

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

**МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
«ГЕОМЕТРИЯ ВА ТОПОЛОГИЯ» КАФЕДРАСИ**

5130100 - Математика таълим йўналиши бўйича бакалавр даражасини
олиш учун

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Мавзу: Гамильтон вектор майдонлар геометрияси

Бажарувчи: Рахимова Х.М.

Илмий раҳбар: ф.-м.ф.д., проф. Нарманов А. Я.

Тошкент - 2018

Мундарижа

Кириш.....	3
I Боб. Текисликда ва фазода вектор майдонлар	
1.1. Текисликда вектор майдонлар.....	5
1.2. Фазода вектор майдонлар.....	11
II Боб. Гамильтон вектор майдонлар геометрияси	
2.1. Функцияларнинг Пуассон коммутатори.....	16
2.2. Гамильтон вектор майдонлар геометрияси.....	19
Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.....	28

КИРИШ

Вектор майдонлар геометрия фанининг асосий тадқиқот объектларидан бири бўлиб, фақат математикада эмас, фан ва техниканинг кўпгина соҳаларида тадбиқларга эга. Бу соҳада ҳозирги вақтда жуда кўп илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда [1-4].

Геометриядаги асосий масала – бу сиртдаги уринма векторни сиртнинг бир нуқтасидан иккинчи нуқтасига параллел кўчириш учун бу нуқталарни туташтирувчи чизикнинг ҳар бир нуқтасига битта векторни мос қўйишимиз керак. Шундай қилиб, чизикда вектор майдон ҳосил бўлади.

Мавзунинг долзарблиги: Вектор майдонлар геометрияси механикада ҳам катта тадбиқларга эга. Бунга сабаб гамильтон системаларини ўрганишда гамильтон вектор майдонлари пайдо бўлади. Масалан, сақланиш қонунлари ва симметриялар ҳақидаги Э.Нетер теоремаси ҳозирги вақтда гамильтон вектор майдонлар ёрдамида ёзилади.

Бундан ташқари гамильтон механикасидаги асосий геометрия объектлардан бири бу гамильтон вектор майдонидир.

Ушбу малакавий битирув иши гамильтон вектор майдонлар геометриясини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқот мақсади: Иккинчи ва учинчи тартибли Евклид фазосида гамильтон вектор майдонларни ўрганиш.

Тадқиқот объекти: функцияларнинг Пуассон коммутатори, вектор майдонлар, гамильтониан функциялар.

Малакавий битирув иши мазмуни: Малакавий битирув иши икки боб ва тўртта параграфдан иборат. Малакавий битирув ишининг биринчи бобида текисликда ва фазода вектор майдон тушунчалари киритилган. Уларга мисоллар келтирилган, улар Maple дастури ёрдамида чизилган.

Бундан ташқари вектор майдоннинг интеграл чизиғи тушунчаси киритилиб, мисолларда интеграл чизикларни топиш ҳам кўрсатилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида функцияларнинг Пуассон коммутатори, Пуассон коммутаторининг хоссалари ҳамда R^{2n} ва R^m фазоларда Пуассон коммутаторини аниқлашга оид мисоллар келтирилган.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида эса гамильтон вектор майдон учун тушунчаси киритилиб, унинг хоссалари, гамильтон вектор майдон ҳосил қилган дифференциал тенгламаларнинг гамильтон системалари ўрганилган. Вектор майдоннинг функцияга таъсири ва уларга мисоллар, вектор майдон учун гамильтониан тушунчаси киритилган.

Шунингдек, гамильтон вектор майдонларнинг қаттиқ жисм ҳаракатларини аниқлашда ишлатилиши мисол сифатида келтирилган. Бундан кўринадики, мавзунинг техника соҳаларидаги бир қатор масалаларни ечилишида аҳамияти каттадир.

Малакавий битирув ишининг ҳамма қисмларида чизик ва сиртларни чизишда, гамильтон вектор майдонлар интеграл чизикларини топишда, гамильтон системаларини сонли ечишда Maple дастуридан кенг фойдаланилган.

I БОБ. ТЕКИСЛИКДА ВА ФАЗОДА ВЕКТОР МАЙДОНЛАР

1.1. Текисликда вектор майдонлар

Евклид текислигида (x^1, x^2) декарт координаталар системаси киритилган бўлса, уни $R^2(x^1, x^2)$ кўринишда белгилаймиз.

Таъриф-1.1.1.[1] Агар текисликнинг ҳар бир (x^1, x^2) нуқтасига битта $X(x^1, x^2) = \{\xi_1(x^1, x^2), \xi_2(x^1, x^2)\}$ вектор мос қўйилган бўлса, **текисликда вектор майдон берилган** дейилади ва қуйидаги кўринишда белгиланади

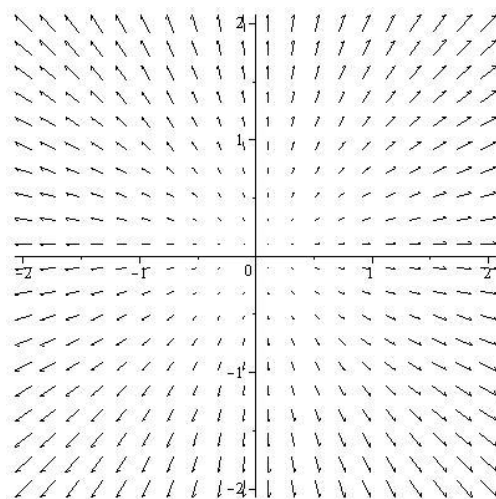
$$(x^1, x^2) \rightarrow X\{x^1, x^2\}.$$

Таъриф-1.1.2.[1] Агар $\{\xi_1, \xi_2\}$ функциялар (x^1, x^2) координаталарнинг дифференциалланувчи функциялари бўлса, $X = \{\xi_1, \xi_2\}$ вектор майдон **дифференциалланувчи ёки силлиқ вектор майдон** дейилади. Демак текисликда вектор майдон бериш учун иккита $\{\xi_1, \xi_2\}$ функцияларни бериш етарлидир.

Мисол-1.1.3.[1] Агар $\xi_1 = x^1$ $\xi_2 = x^2$ бўлса, биз

$$(x^1, x^2) \rightarrow \{x^1, x^2\}$$

вектор майдонни ҳосил қиламиз. Агар бу вектор майдонни Maple дастури ёрдамида акс эттирсак, у қуйидаги кўринишда бўлади

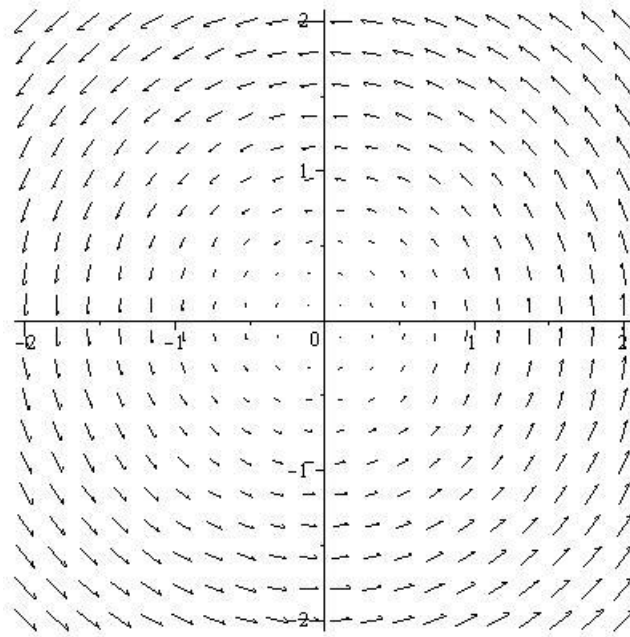


Мисол-1.1.4.[1] Агар $\xi_1 = -x^2$ $\xi_2 = x^1$ бўлса, биз

$$(x^1, x^2) \rightarrow \{-x^2, x^1\}$$

вектор майдонни ҳосил қиламиз.

Агар бу вектор майдонни Maple дастури ёрдамида акс эттирсак, у куйидаги кўринишда бўлади.



Агар биз текисликнинг ҳамма нуқталарига $e_1 = \{1, 0\}$ векторни мос қўйувчи майдонни $\frac{\partial}{\partial x^1}$ билан, текисликнинг ҳамма нуқталарига $e_2 = \{0, 1\}$ векторни мос қўйувчи майдонни $\frac{\partial}{\partial x^2}$ билан белгиласак, ихтиёрий вектор майдонни

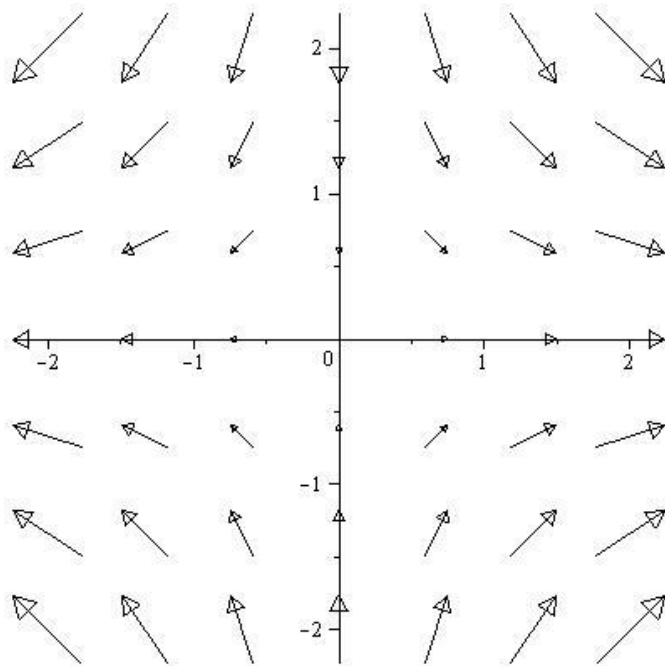
$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

Мисол-1.1.5.[1] $\xi_1 = x^1$ $\xi_2 = -x^2$ бўлса, биз

$$(x^1, x^2) \rightarrow \{x^1, -x^2\}$$

вектор майдонни ҳосил қиламиз. Агар бу вектор майдонни Maple дастури ёрдамида акс эттирсак, у қуйидаги кўринишда бўлади.



Агар бизга текисликда

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

вектор майдон ва битта дифференциалланувчи γ чизик

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t), \\ x^2 = x^2(t), \end{cases}$$

параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин. Чизикнинг ҳар бир $\gamma(t)$ нуқтасида иккитадан вектор мавжуд: биттаси X вектор майдон аниқловчи $X(\gamma(t)) = X(x^1(t), x^2(t))$ вектор ва чизикнинг $\gamma(t)$ нуқтадаги уринма вектори $\gamma'(t)$ дан иборат.

Таъриф-1.1.6.[3] Берилган чизикнинг ҳар бир $\gamma(t)$ нуктасида бу векторлар тенг бўлса, яъни ҳар бир t учун

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$$

тенглик бажарилса, γ чизик X **вектор майдоннинг интеграл чизиғи** деб аталади.

Демак, γ чизик X вектор майдоннинг интеграл чизиғи бўлиши учун ҳар бир t учун

$$\begin{cases} \frac{dx^1(t)}{dt} = \xi_1(\gamma(t)), \\ \frac{dx^2(t)}{dt} = \xi_2(\gamma(t)), \end{cases} \quad (1.1.7)[3]$$

тенгликлар бажарилиши керак. Юқоридаги (1.1.7) система дифференциал тенгламалар системасидан иборат.

Агар биз бирорта нуктани (x_0^1, x_0^2) берсак, шу нуктадан ўтувчи интеграл чизикни топиш учун қуйидаги Коши масаласини ечишимиз керак:

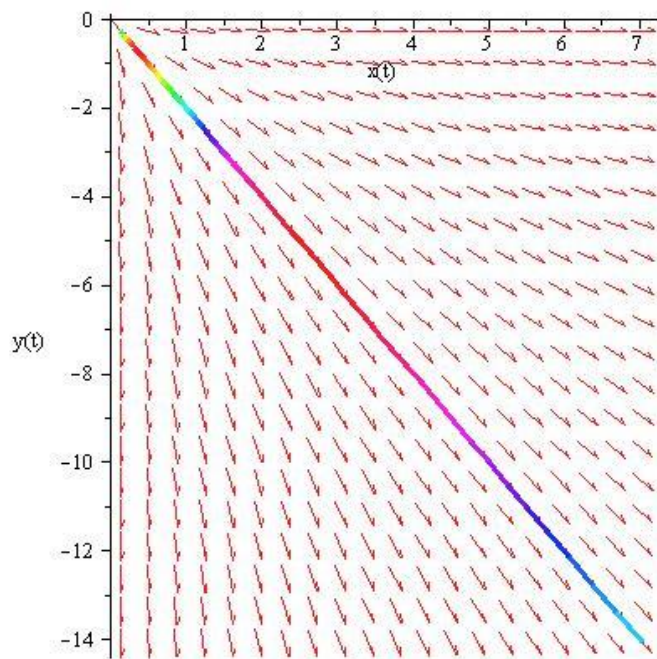
$$\begin{cases} \frac{dx^1(t)}{dt} = \xi_1(\gamma(t)), \\ \frac{dx^2(t)}{dt} = \xi_2(\gamma(t)), \\ x^1(0) = x_0^1, x^2(0) = x_0^2. \end{cases}$$

Мисол-1.1.8.[3] Агар бизга $(x^1, x^2) \rightarrow \{x^1, x^2\}$ вектор майдон берилган бўлса унинг интеграл чизиқни топиш учун қуйидаги Коши масаласини ечишимиз керак:

$$\begin{cases} \frac{dx^1(t)}{dt} = x^1, \\ \frac{dx^2(t)}{dt} = x^2, \\ x^1(0) = x_0^1, x^2(0) = x_0^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^1(t) = x_0^1 e^t, \\ x^2(t) = x_0^2 e^t. \end{cases}$$

Қуйида $(x^1, x^2) \rightarrow \{x^1, x^2\}$ вектор майдоннинг $(1, -2)$ нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғи келтирилган.

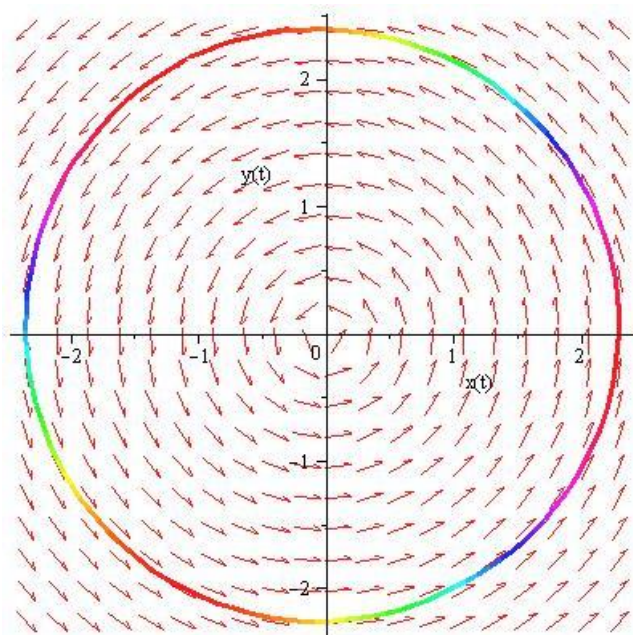


Мисол-1.1.9.[3] Агар бизга $(x^1, x^2) \rightarrow \{-x^2, x^1\}$ вектор майдон берилган бўлса унинг интеграл чизиқни топиш учун қуйидаги Коши масаласини ечишимиз керак:

$$\begin{cases} \frac{dx^1(t)}{dt} = -x^2, \\ \frac{dx^2(t)}{dt} = x^1, \\ x^1(0) = -x_0^2, x^2(0) = x_0^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^1(t) = x_0^1 \sin(t) - x_0^2 \cos(t), \\ x^2(t) = x_0^1 \cos(t) + x_0^2 \sin(t). \end{cases}$$

Қуйида $X : (x^1, x^2) \rightarrow \{-x^2, x^1\}$ вектор майдоннинг $(1, -2)$ нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғи келтирилган.



1.2. Фазода вектор майдонлар

Евклид фазосида (x^1, x^2, x^3) декарт координаталар системаси киритилган бўлса, уни $R^3(x^1, x^2, x^3)$ кўринишда белгилаймиз.

Таъриф-1.2.1.[1] Агар фазонинг ҳар бир (x^1, x^2, x^3) нуктасига битта

$$X(x^1, x^2, x^3) = \{\xi_1(x^1, x^2, x^3), \xi_2(x^1, x^2, x^3), \xi_3(x^1, x^2, x^3)\}$$

вектор мос қўйилган бўлса, **фазода вектор майдон берилган** дейилади ва қуйидаги кўринишда белгиланади

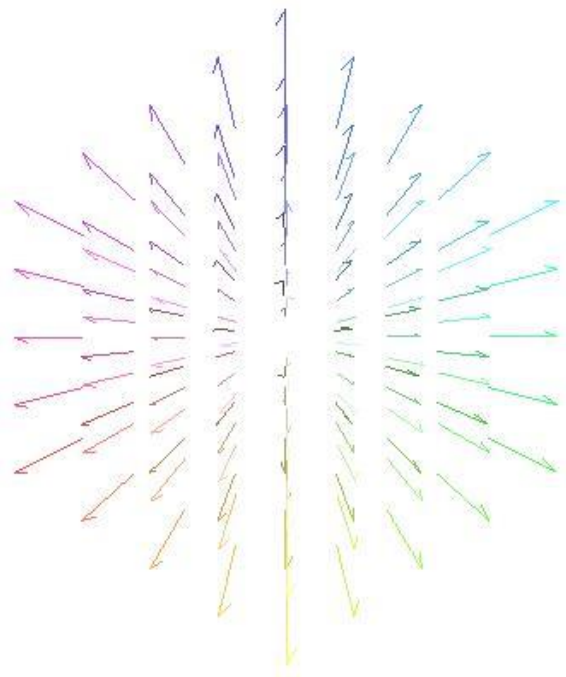
$$(x^1, x^2, x^3) \rightarrow X(x^1, x^2, x^3).$$

Таъриф-1.2.2.[1] Агар $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ функциялар (x^1, x^2, x^3) координаталарнинг дифференциалланувчи функциялари бўлса, $X = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ вектор майдон **дифференциалланувчи ёки силлиқ вектор майдон** дейилади. Демак фазода вектор майдон бериш учун учта $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ функцияларни бериш етарлидир.

Мисол-1.2.3.[1] $\xi_1 = x^1$ $\xi_2 = x^2$ $\xi_3 = x^3$ бўлса, биз

$$(x^1, x^2, x^3) \rightarrow \{x^1, x^2, x^3\}$$

вектор майдонни ҳосил қиламиз. Агар бу вектор майдонни Maple дастури ёрдамида акс эттирсак, у қуйидаги кўринишда бўлади.



Агар биз фазонинг ҳамма нуқталарига $e_1 = \{1, 0, 0\}$ векторни мос қўйувчи майдонни $\frac{\partial}{\partial x^1}$ билан, фазонинг ҳамма нуқталарига $e_2 = \{0, 1, 0\}$ векторни мос қўйувчи майдонни $\frac{\partial}{\partial x^2}$, фазонинг ҳамма нуқталарига $e_3 = \{0, 0, 1\}$ векторни мос қўйувчи майдонни $\frac{\partial}{\partial x^3}$ билан белгиласак, ихтиёрий вектор майдонни

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

қўринишда ёзишимиз мумкин.

Агар бизга фазода

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

вектор майдон ва битта дифференциалланувчи γ чизик

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t), \\ x^2 = x^2(t), \\ x^3 = x^3(t), \end{cases}$$

параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин. Чизиқнинг ҳар бир $\gamma(t)$ нуқтасида иккитадан вектор мавжуд: биттаси X вектор майдон аниқловчи $X(\gamma(t)) = X(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ вектор ва чизиқнинг $\gamma(t)$ нуқтадаги уринма вектори $\gamma'(t)$ дан иборат.

Таъриф-1.2.4.[3] Берилган чизиқнинг ҳар $\gamma(t)$ нуқтасида бу векторлар тенг бўлса, яъни ҳар бир t учун

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$$

тенглик бажарилса, γ чизиқ X вектор майдоннинг интеграл чизиғи деб аталади.

Демак γ чизиқ X вектор майдоннинг интеграл чизиғи бўлиши учун ҳар бир t учун

$$\begin{cases} \frac{dx^1(t)}{dt} = \xi_1(\gamma(t)), \\ \frac{dx^2(t)}{dt} = \xi_2(\gamma(t)), \\ \frac{dx^3(t)}{dt} = \xi_3(\gamma(t)), \end{cases} \quad (1.2.5.)$$

тенгликлар бажарилиши керак. Юқоридаги (1.2.5) система дифференциал

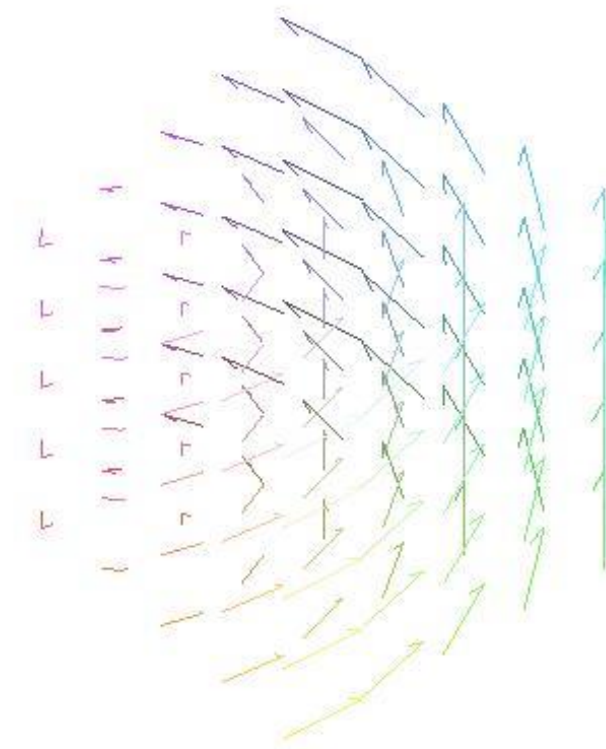
тенгламалар системасидан иборат. Агар биз бирорта нуктани (x_0^1, x_0^2, x_0^3) берсак, шу нуктадан ўтувчи интеграл чизиқни топиш учун қуйидаги Коши масаласини ечишимиз керак:

$$\begin{cases} \frac{dx^1(t)}{dt} = \xi_1(\gamma(t)), \\ \frac{dx^2(t)}{dt} = \xi_2(\gamma(t)), \\ \frac{dx^3(t)}{dt} = \xi_3(\gamma(t)), \\ x^1(0) = x_0^1, x^2(0) = x_0^2, x^3(0) = x_0^3. \end{cases}$$

Мисол-1.2.6.[3] Агар $\xi_1 = -x^2$ $\xi_2 = x^1$ $\xi_3 = 1$ бўлса, биз

$$(x^1, x^2, x^3) \rightarrow \{-x^2, x^1, 1\}$$

вектор майдонни ҳосил қиламиз. Агар бу вектор майдонни Maple дастури ёрдамида акс эттирсак, у қуйидаги кўринишда бўлади.

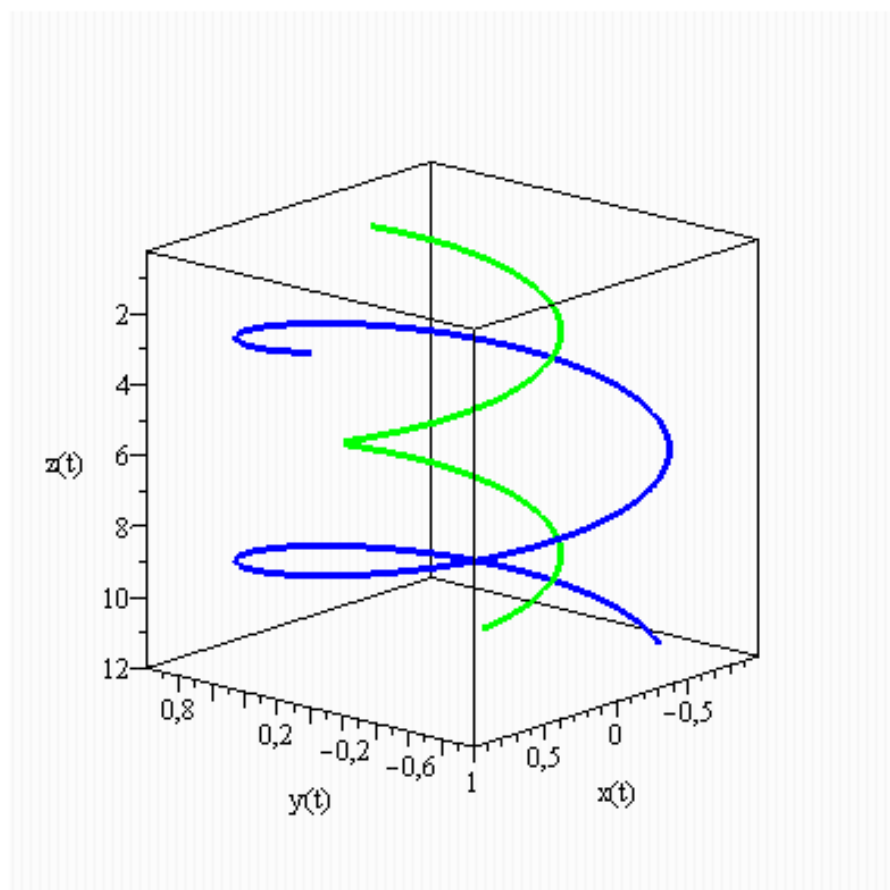


Мисол-1.2.7.[3] Биз қуйида

$$(x^1, x^2, x^3) \rightarrow \{-x^2, x^1, 1\}$$

вектор майдоннинг $(1,0,2)$ ва $(0,0.5, 0.25)$ нукталардан ўтувчи интеграл чизикларини келтирдик.

> `DEplot3d({D(x)(t)=-y(t), D(y)(t)=x(t), D(z)(t)=1}, {x(t), y(t), z(t)}, t=0..10, [[x(0)=1, y(0)=0, z(0)=2], [x(0)=0, z(0)=0.25, y(0)=0.5]], scene=[x(t), y(t), z(t)], linecolour=[blue, green], stepsize=0.1, orientation=[139,-106])`



II БОБ. ГАМИЛЬТОН ВЕКТОР МАЙДОНЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

2.1. Функцияларнинг Пуассон коммутатори

Бизга иккита F, H функциялар берилган бўлса, уларга учинчи функцияни мос қўямиз. Бу функцияни $\{F, H\}$ билан белгилаб, қуйидаги шартларнинг бажарилишини талаб қиламиз:

Бичизиқлилиқ:

$$\{\lambda F + \mu P, H\} = \lambda\{F, H\} + \mu\{P, H\},$$

$$\{F, \lambda H + \mu P\} = \lambda\{F, H\} + \mu\{F, P\}.$$

Антисимметрия:

$$\{F, H\} = -\{H, F\};$$

Якоби айнияти:

$$\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0;$$

Лейбниц қоидаси

$$\{F, H \cdot P\} = \{F, H\} \cdot P + H \cdot \{F, P\}.$$

Бу ерда $F \cdot H$ иккита функциянинг кўпайтмасидир.

Таъриф-2.1.1.[5] Юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи функция Пуассон коммутатори дейилади.

Мисол-2.1.2.[5] Биз R^{2n} фазода координаталарни

$$(p, q) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$$

билан белгилаб, Пуассон коммутаторини

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right\}.$$

қоида билан аниқлаймиз.

Текшириб кўриш мумкинки

$$\{p^i, p^j\} = 0, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{q^i, p^j\} = \delta_j^i,$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Бу функцияни R^2 евклид текислигида қарасак, у

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y}$$

кўринишда бўлади.

Мисол-2.1.3.[4] Мисол учун биз

$$F = xy, H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

функцияларни олсак, уларнинг Пуассон коммутатори

$$\{F, H\} = xy - yx = x^2 - y^2$$

кўринишда бўлади.

Мисол-2.1.4.[4] Биз энди R^m евклид фазони қарасак, $2n + l = m$ тенглик билан n, l сонларини аниқлаб, фазода координаталарни

$$(p, q, z) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n, z^1, \dots, z^l)$$

кўринишда белгилаб, Пуассон коммутаторини

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right\}.$$

кўринишда киритамиз.

Текшириб кўриш мумкинки

$$\{p^i, z^k\} = \{q^i, z^k\} = \{z^i, z^k\} = 0$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Масалан уч ўлчамли евклид $R^3(x, y, z)$ фазосида Пуассон коммутаторини

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y}$$

кўринишда киритамиз. Бу ерда $n=1, l=1$.

2.2. Гамильтон вектор майдонлар геометрияси

R^n евклид фазодаги $(x^1, \dots, x^n)$ координаталар системасида X вектор майдон n та координата функциялар ёрдамида берилади:

$$X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}.$$

Агар биз i -координата чизигининг тезлик векторини $\frac{\partial}{\partial x^i}$ билан белгиласак,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (x^1, x^2, \dots, x^n) = e_i = \{0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$$

тенглик ўринли. Шунинг учун $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ вектор майдонни

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x^n} = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Таъриф-2.2.1.[2] Агар $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ функциялар $(x^1, \dots, x^n)$ координаталарнинг дифференциалланувчи функциялари бўлса, $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ вектор майдон **дифференциалланувчи ёки силлиқ вектор майдон** дейилади.

Бизга

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x^n} = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

вектор майдон берилган бўлса, у F функцияга қуйидаги қоида бўйича таъсир қилади:

$$X(F) = \xi_1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial x^n} = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

Шундай қилиб, агар бизга X вектор майдон ва F функция берилган бўлса, X ни F га таъсир эттириб $X(F)$ функцияни ҳосил қиламиз.

Демак вектор майдонни функциялар тўпламида аниқланган дифференциаллаш оператори сифатида қараш мумкин.

Таъриф-2.2.2.[4] Бизга H функция берилган бўлсин. Агар X вектор майдонда

$$X(F) = \{F, H\}$$

тенглик ҳамма F функциялар учун ўринли бўлса, X вектор майдон H функцияга мос келувчи гамильтон вектор майдон дейилади, H функция эса **гамильтониан** дейилади.

H функцияга мос келувчи гамильтон вектор майдон v_H кўринишда белгиланади.

Биз энди R^m евклид фазони қарасак, $2n + l = m$ тенглик билан n, l сонларини аниқлаб, фазода координаталарни

$$(p, q, z) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n, z^1, \dots, z^l)$$

кўринишда белгиласак, ихтиёрий вектор майдон

$$\begin{aligned} X = & \xi_1 \frac{\partial}{\partial p^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial p^2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial p^n} + \xi_{n+1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \xi_{n+2} \frac{\partial}{\partial q^2} + \dots + \xi_{2n} \frac{\partial}{\partial q^n} + \\ & + \xi_{2n+1} \frac{\partial}{\partial z^1} + \xi_{2n+2} \frac{\partial}{\partial z^2} + \dots + \xi_m \frac{\partial}{\partial z^l} \end{aligned}$$

кўринишда бўлади.

Агар H функция берилган бўлса, H функцияга мос келувчи v_H гамильтон вектор майдоннинг координаталари қуйидаги кўринишда бўлади.

$$X = -\frac{\partial H}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial p^1} - \frac{\partial H}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial p^2} - \dots - \frac{\partial H}{\partial q^n} \frac{\partial}{\partial p^n} + \frac{\partial H}{\partial p^1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial H}{\partial p^2} \frac{\partial}{\partial q^2} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p^n} \frac{\partial}{\partial q^n}$$

Масалан уч ўлчамли евклид $R^3(x, y, z)$ фазосида агар H функция берилган бўлса, H функцияга мос келувчи v_H гамильтон вектор майдоннинг кўриниши қуйидагича бўлади

$$X = -\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Бу ифода

$$X = \left\{ -\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}, 0 \right\}$$

ифодага тенг кучлидир.

Мисол-2.2.3.[4] Агар $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ бўлса, H функцияга мос келувчи v_H гамильтон вектор майдоннинг кўриниши қуйидагича бўлади

$$v_H = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Мисол-2.2.4.[4] Агар $H = xy$ бўлса, H функцига мос келувчи v_H гамильтон вектор майдоннинг кўриниши қуйидагича бўлади

$$v_H = -x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Қуйида гамильтон вектор майдонларнинг қаттиқ жисм ҳаракатини аниқлашда ишлатилиши мисол сифатида келтирилган.

Қаттиқ жисмнинг ҳаракати

Таъриф-2.2.3.[6] Механикада орасидаги масофа ўзгармайдиган бир нечта моддий нуқталардан иборат система **қаттиқ жисм** дейилади.

Қаттиқ жисмнинг инерция моменти

Инерция моменти — жисм массасининг тақсимотини характерловчи катталиқ бўлиб, ўққа нисбатан инерция моменти

$$I = \sum r_i^2 m_i,$$

формула билан ҳисобланади. Бу ерда m_i жисмнинг элементар массалари, r_i -айланиш ўқиғача бўлган масофа.

Массаси m_i га тенг бўлган ва радиуси r_i га тенг бўлган айлана бўйича v_i тезлик билан ҳаракатланаётган жисмнинг импульс моменти

$$L_i = m_i r_i v_i$$

формула билан ҳисобланади.

Қаттиқ жисмнинг импульс моменти эса

$$L = \sum L_i = \sum_i m_i r_i v_i$$

формула билан ҳисобланади. Биз $v_i = \omega r_i$ тенгликни ҳисобга олиб

$$L = \sum L_i = \omega \sum_i m_i r_i^2$$

тенгликни оламиз. Уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$L = \omega \sum_i m_i r_i^2 = \omega I$$

Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси элементар жисмлар кинетик энергиялари йиғиндисидан иборат бўлади ва

$$H = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2}$$

формула билан ҳисобланади.

Агар биз $I^i = \omega I_i = \omega r_i^2 m_i$ белгилашлар киритсак, қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

$$H(u) = \frac{(u^1)^2}{2I_1} + \frac{(u^2)^2}{2I_2} + \frac{(u^3)^2}{2I_3},$$

кўринишда бўлади. Биз гамильтониан сифатида қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси бўлган H функцияни олсак, унга мос келувчи гамильтон вектор майдон

$$v_H = \xi_1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial u^3}$$

кўринишда бўлади.

Бу ерда

$$\xi_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} u^2 u^3$$

$$\xi_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} u^3 u^1$$

$$\xi_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} u^1 u^2$$

Бу вектор майдоннинг интеграл чизигини аниқловчи дифференциал тенгламалар системаси

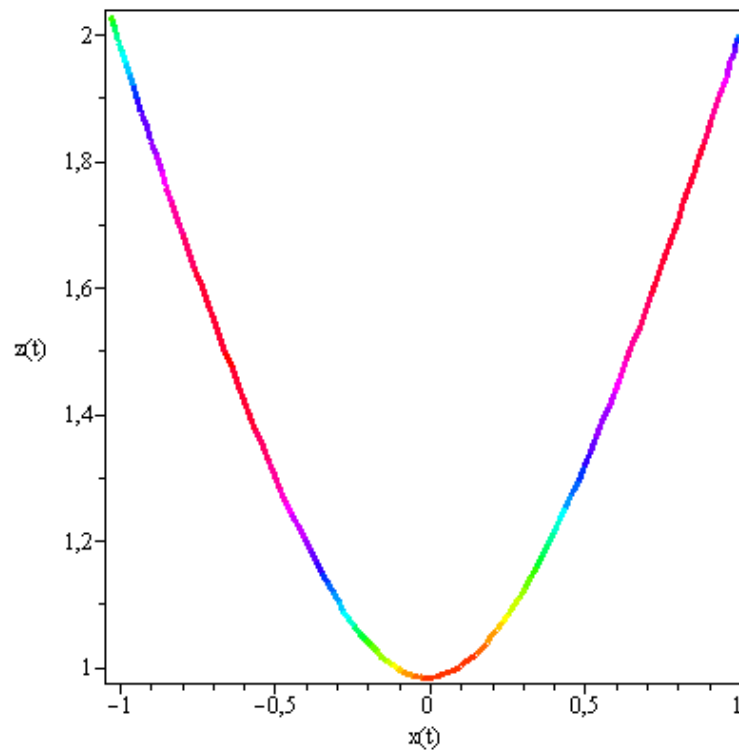
$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} u^2 u^3, \\ \frac{du^2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} u^3 u^1, \\ \frac{du^3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} u^1 u^2 \end{cases}$$

қаттиқ жисм ҳаракати учун Эйлер тенгламаларини беради.

Бу системани $I_1 = 1, I_2 = 2, I_3 = 3$ бўлган ҳолда қарасак, унинг ҳаракати кўринишда бўлади. Биринчи расмда унинг ҳаракатининг охз текислигида кўрсатилган

> *with(DEtools) :*

> *phaseportrait* $\left(\left[D(x)(t) = \frac{-1}{6} \cdot y(t) \cdot z(t), D(y)(t) = \frac{2}{3} \cdot z(t) \cdot x(t), \right. \right.$
 $D(z)(t) = \frac{-1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t) \Big], [x(t), y(t), z(t)], t = -2 \cdot \pi .. 2 \cdot \pi,$
 $[[x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 2]], stepsize = 0.05, scene = [x(t),$
 $z(t)], linecolour = \sin\left(\frac{t \pi}{2}\right), method = classical_{foreuler} \Big)$

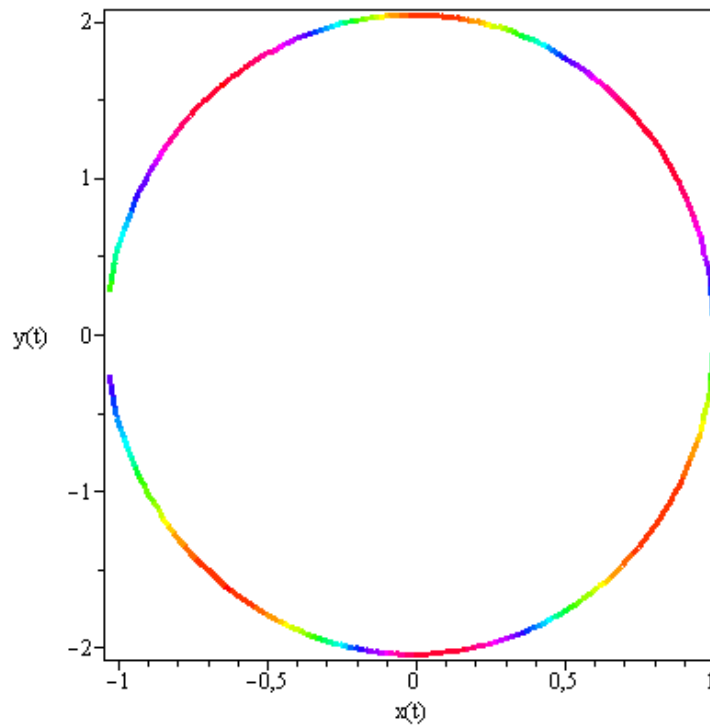


Бу проекция аслида гипербола бўлиб, фазонинг маълум соҳасида кўрганлигимиз учун парабола сифатида намоён бўлди.

Иккинчи ҳолда расмда унинг ҳаракатининг оху текислигида кўрсатилган

> *with(DEtools)* :

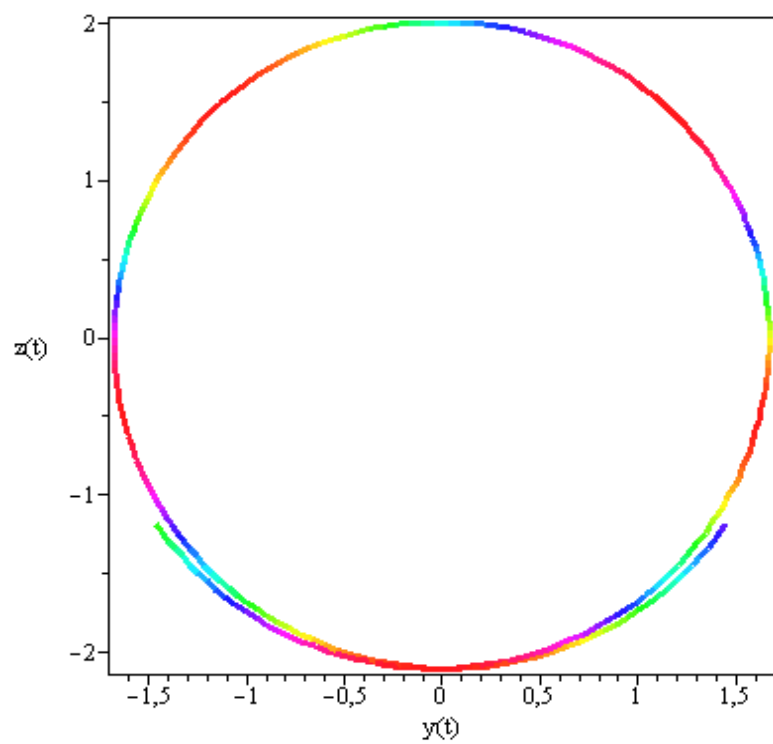
> *phaseportrait* $\left(\left[D(x)(t) = \frac{-1}{6} \cdot y(t) \cdot z(t), D(y)(t) = \frac{2}{3} \cdot z(t) \cdot x(t), \right. \right.$
 $D(z)(t) = \frac{-1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t) \left. \right], [x(t), y(t), z(t)], t = -2 \cdot \pi .. 2 \cdot \pi,$
 $[[x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 2]], stepsize = 0.05, scene = [x(t),$
 $y(t)], linecolour = \sin\left(\frac{t \pi}{2}\right), method = classical_{foreuler} \right)$



Учинчи ҳолда расмда унинг ҳаракатининг оуз текислигида кўрсатилган

> *with(DEtools) :*

> *phaseportrait* $\left(\left[D(x)(t) = \frac{-1}{6} \cdot y(t) \cdot z(t), D(y)(t) = \frac{2}{3} \cdot z(t) \cdot x(t), \right. \right.$
 $D(z)(t) = \frac{-1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot 2 \Big], [x(t), y(t), z(t)], t = -2 .. 2, [[x(0)$
 $= 1, y(0) = 0, z(0) = 2]], stepsize = 0.05, scene = [y(t), z(t)],$
 $linecolour = \sin\left(\frac{t \pi}{2}\right), method = classical_{foreuler} \Big)$



ХУЛОСА

Ушбу малакавий битирув иши гамильтон вектор майдонлар геометриясини ўрганишга бағишланган.

Малакавий битирув иши икки боб ва тўртта параграфдан иборат. Малакавий битирув ишининг биринчи бобида текисликда ва фазода вектор майдон тушунчалари киритилган. Уларга мисоллар келтирилган, улар Maple дастури ёрдамида чизилган. Бундан ташқари вектор майдоннинг интеграл чизиғи тушунчаси киритилиб, мисолларда интеграл чизиқларни топиш ҳам кўрсатилган.

Вектор майдонлар геометрияси механикада катта тадбиқларга эга. Бунга сабаб гамильтон системаларини ўрганишда гамильтон вектор майдонлари пайдо бўлади. Масалан, сақланиш қонунлари ва симметриялар ҳақидаги Э.Нетер теоремаси ҳозирги вақтда гамильтон вектор майдонлар ёрдамида ёзилади. Шунинг учун ҳам гамильтон механикасидаги асосий геометрия объектлардан бири бу гамильтон вектор майдонидир.

Сиртларда глобал координаталар системаси бўлмаганлиги сабабли тенгламаларни ва формулаларни вектор майдон ёрдамида ёзиш мумкин.

Битирув малакавий ишининг биринчи бобида текисликда ва фазода вектор майдонлар тушунчаси киритилган. Бундан ташқари вектор майдоннинг интеграл чизиғи тушунчаси киритилиб, мисолларда интеграл чизиқларни топиш ҳам кўрсатилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида функцияларнинг Пуассон коммутатори, Пуассон коммутаторининг хоссалари ҳамда R^{2n} ва R^m фазоларда Пуассон коммутаторини аниқлашга оид мисоллар келтирилган.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида эса гамильтон вектор майдон учун тушунчаси киритилиб, унинг хоссалари, гамильтон вектор майдон ҳосил қилган дифференциал тенгламаларнинг гамильтон системалари ўрганилган. Шунингдек, гамильтон вектор майдонларнинг

каттик жисм ҳаракатларини аниқлашда ишлатилиши мисол сифатида келтирилган.

Мавзуни ўрганилиши келажакда техниканинг кўплаб соҳаларида қўлланилади. Техниканинг ҳозирги кундаги изланишлари натижасидаги қатор масалалари айнан гамильтониан вектор майдонлар ёрдамида ифодаланади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Нарманов А.Я., Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга // Дифференциальные уравнения. 2014, Т. 50, № 12, С. 1582–1589.
2. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // Успехи физических наук. 1997 ноябрь.
3. Элиашберг Я., Трайнор Л. Лекции по симплектической геометрии и топологии // Москва издательство МЦНМО 2008.
4. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория уравнения // Москва физматлет 2005.
5. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Москва. Наука, 1990
6. Blair D.E. On the zero of a conformal vector field. Nagoya Mathematical Journal V. 55 (1974), 1- 3.