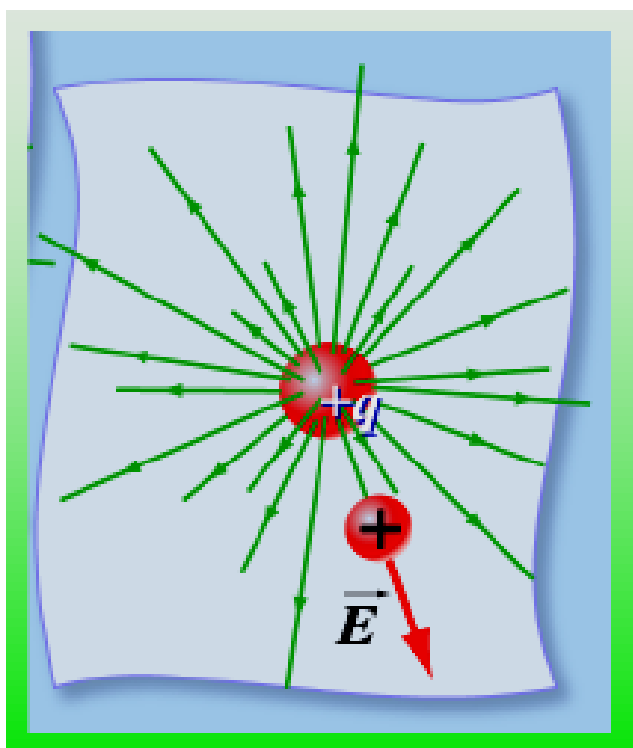


# ФИЗИКА

Сборник лекции по физике



г. Навои. НГГИ

1-ЧАСТЬ

**РЕСПУБЛИКА УЗБЕКИСТАН  
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН  
НАВОЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ  
ЭНЕРГО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА «ОБЩАЯ ФИЗИКА»**

# **СБОРНИК ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ**

**1-часть**

**НАВОИ – 2020**

**С.Дж.Базарова., Урунов И.А., Байчаев Ф.Х. Сборник лекции по физике. – г.Навои: Нав ГГИ . – 2020. \_\_\_\_стр.**

В данном сборнике лекции по физике, составлена на основе типовой программы по дисциплине «Физика», утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования республики Узбекистан для подготовки кадров по инженерным специальностям.

При составлении сборника были учтена специфика обучения бакалавров в Навоийском государственном горном институте и использован опыт и научные достижения в области физики в республике Узбекистан и других странах мира.

Сборник лекции по физике рекомендована внедрению в учебный процесс учебно-методическим советом Навоийского государственного горного института.

**Рецензенты:**

Л.Х. Зоирова	– НГГИ, доцент кафедры «Общая физика», кандидат физико-математических наук
А.М. Музаффаров	– Главный инженер ЦНИЛ НГМК, доктор PhD по техническим наукам

## **ВВЕДЕНИЕ**

Изучение курса общей физики вырабатывает диалектико-материалистическое понимание природы, формирует научный метод мышления, воспитывает инженерную интуицию. Все это имеет важное значение в современном инженерном творчестве.

В условиях современной научно-технической революции роль физики необычайно возрастает как фундаментальной науки, рождающей целые отрасли современной техники, и как науки важного мировоззренческого содержания, отражающей основные черты современной естественно - научной картины мира. Общефизическое и математическое образование вносит важный вклад в формирование у студентов современного научного мышления, позволяющего успешно решать научные и технические проблемы, выдвигаемые практикой.

Фундаментальная физико-математическая подготовка является необходимой предпосылкой широкого технического кругозора, создает возможность нахождения нетривиальных творческих решений.

Тема:

# ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

## План:

1. Понятие механики. Модели в механике
2. Система отсчета, тело отсчета
3. Кинематика материальной точки
  - 3.1. Путь, перемещение
  - 3.2. Скорость
  - 3.3. Проекция вектора скорости на оси координат
  - 3.4. Ускорение и его составляющие
4. Кинематика твердого тела
  - 4.1. Поступательное движение твердого тела
  - 4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

## 1. Понятие механики. Модели в механике

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

*Механическое движение* – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Механика вообще подразделяется на три части: *статику*, *кинематику* и *динамику*.

*Кинематика* (от греческого слова *kineta* – движение) – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

*Динамика* (от греческого *dynamis* – сила) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обуславливают это движение.

*Статика* (от греческого *statike* – равновесие) изучает условия равновесия тел. Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики являются естественным следствием законов динамики и в данном курсе не изучаются.

Без знаний механики невозможно представить себе развитие современного машиностроения. Развитие механики, как науки, начиналось с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый Архимед (287–312 до н.э.) сформулировал закон рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564–1642) и окончательно сформулированы английским физиком И. Ньютоном (1643–1727).

*Механика Галилея и Ньютона* называется классической, т.к. она рассматривает движение макроскопических тел со скоростями значительно меньшими, чем скорость света в вакууме.

Для описания движения тел в зависимости от условий задачи используют различные *физические модели*. Чаще других используют понятия *абсолютно твердого тела* и *материальной точки*.

Движение тел происходит под действием сил. Под действием внешних сил тела могут деформироваться, т.е. изменять свои размеры и форму.

*Тело, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называют абсолютно твердым телом* (хотя абсолютно твердых тел в природе не существует).

**Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой.**

Можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условия задачи (например, наше огромное Солнце тоже материальная точка в Солнечной системе).

## 2. Система отсчета, тело отсчета

Всякое движение *относительно*, поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют телом отсчета.*

Для описания движения практически приходится связывать с телом отсчета *систему координат* (декартова, сферическая и т.д.).

**Система отсчета – совокупность системы координат и часов, связанных с телом, относительно которого изучается движение.**

Движения тела, как и материи, вообще не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени, и наоборот).

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является декартова, или прямоугольная система координат, которой мы в основном и будем пользоваться.

В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки  $A$  в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  или радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из начала координат в данную точку (рис.2.1).

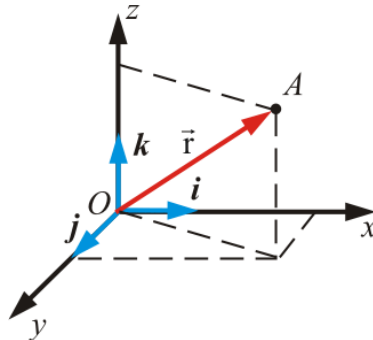


Рис. 2.1

При движении материальной точки её координаты с течением времени изменяются.

В общем случае её движение определяется скалярными уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (2.2.1)$$

Эти уравнения эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = xi + yj + zk, \quad (2.2.2)$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – проекции радиус-вектора  $\vec{r}$  на оси координат, а  $i$ ,  $j$ ,  $k$  – единичные векторы (орты), направленные по соответствующим осям.

Уравнения (2.2.1) и (2.2.2) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки.**

**Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется числом степеней свободы.**

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты  $x, y, z$ ). Если она движется на плоскости – две степени свободы. Если вдоль линии – одна степень свободы.

Всякое движение тела можно разложить на два основных вида движения – *поступательное и вращательное*.

**Поступательное** – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе и все точки твердого тела совершают равные перемещения за одинаковое время (рис. 2.2).

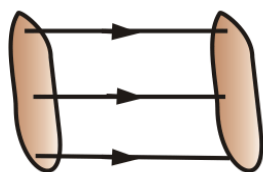


Рис. 2.2

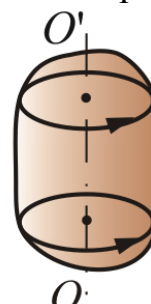


Рис. 2.3

При **вращательном движении** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью  $OO'$  вращения* (рис. 2.3). Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

### 3. Кинематика материальной точки

#### 3.1. Путь, перемещение

Положение точки  $A$  в пространстве можно задать с помощью радиус-вектора  $\vec{r}_1$ , проведенного из точки отсчета  $O$ , или начала координат (рис. 2.4).

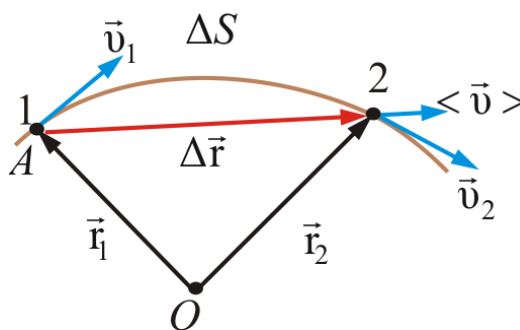


Рис. 2.4

При движении материальной точки  $A$  из положения 1 в положение 2 её радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т.е.  $\vec{r}$  зависит от времени  $t$ .

Геометрическое место точек концов  $\vec{r}$  называется **траекторией точки**. Длина траектории есть путь  $\Delta S$ . Если точка движется по прямой, то приращение  $|\Delta \vec{r}|$  равно пути  $\Delta S$ .

Пусть за время  $\Delta t$  точка  $A$  переместилась из точки 1 в точку 2. **Вектор перемещения**  $\Delta \vec{r}$  есть приращение  $\vec{r}_1$  за время  $\Delta t$ :



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}; \quad (2.3.1)$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}; \quad (2.3.2)$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.3.3)$$

### 3.2. Скорость

**Средний вектор скорости** определяется как отношение вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$  ко времени  $\Delta t$ , за которое это перемещение произошло:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \langle \vec{v} \rangle.$$

Вектор  $\langle \vec{v} \rangle$  совпадает с направлением вектора  $\Delta \vec{r}$  (рис. 2.4).

**Мгновенная скорость** в точке 1:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.3.4)$$

**Мгновенная скорость**  $\vec{v}$  – вектор скорости в данный момент времени, равный первой производной от  $\vec{r}$  по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки  $A$ . Модуль вектора скорости

$$v \equiv |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е. на бесконечно малом участке траектории,  $\Delta S = \Delta r$  (перемещение совпадает с траекторией).

В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – путь:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \quad \text{или} \quad v = \frac{dS}{dt}.$$

Так вычислять скорость проще, т.к.  $S$  – скаляр.

Обратное действие – интегрирование (рис. 2.5).

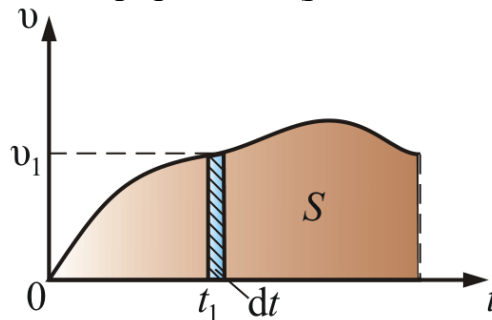


Рис. 2.5

$dS = v dt$  – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь  $S$  за время  $t$ , надо сложить площади всех прямоугольников.

$$S = \int_0^t v dt. \quad (2.3.5)$$

Геометрический смысл этого интеграла в том, что площадь под кривой  $v(t)$  есть путь тела за время  $t$ .

### Принцип независимости движения (Принцип суперпозиции)

Рассмотрим простой опыт (рис. 2.6). Первый шарик участвует в двух движениях, второй – в одном, но так как вертикально вниз на оба шарика действует только одна сила, равная для обоих шариков, – сила тяжести, то они упадут на пол одновременно.

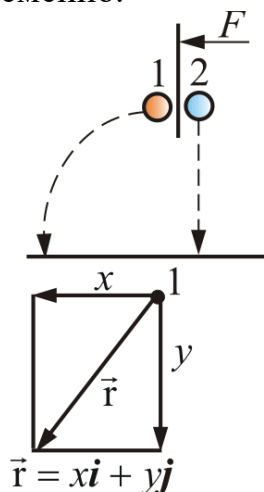


Рис. 2.6

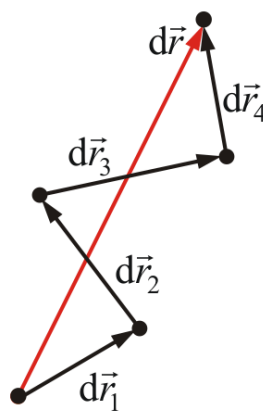


Рис. 2.7

Этот эксперимент доказывает принцип независимости движения (действия сил).

Если материальная точка участвует в нескольких движениях (рис. 2.7), то ее результирующее перемещение  $d\vec{r}$  равно векторной сумме перемещений, обусловленных каждым из этих движений в отдельности.

В общем случае

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \dots + d\vec{r}_i + d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^n d\vec{r}_i,$$

но так как  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , то  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_i + \vec{v}_n$ , или

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i.$$

Таким образом, скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.

В дальнейшем мы подробнее рассмотрим принцип независимости действия сил.

В физике существует общий принцип, который называется **принципом суперпозиции (принцип наложения)** – допущение, согласно которому

результатирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности, при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.

Принцип суперпозиции играет большую роль в теории колебаний, теории цепей и других разделах физики и техники.

### 3.3. Проекция вектора скорости на оси координат

В векторной форме уравнения записываются легко и кратко. Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета. Положение точки  $A$  (рис. 2.8) задается радиус-вектором  $\vec{r}$ . Спроецируем вектор  $\vec{r}$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

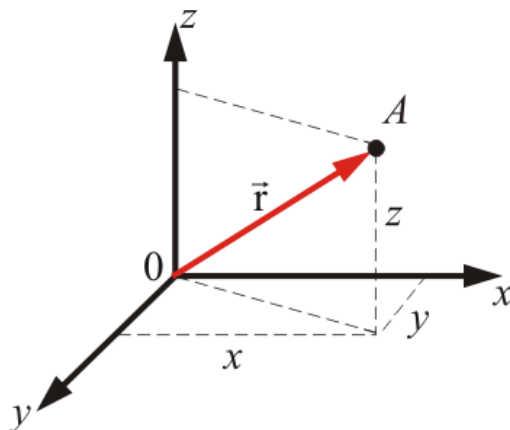


Рис. 2.8

Понятно, что  $x$ ,  $y$ ,  $z$  зависят от времени  $t$ , т.е.  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Зная зависимость этих координат от времени (закон движения точки), можно найти в каждый момент времени скорость точки.

Проекция вектора скорости  $\vec{v}$  на ось  $x$  равна:

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Здесь  $dx$  – проекция вектора перемещения  $d\vec{r}$  на ось  $x$ .

Аналогично:  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ;  $v_z = \frac{dz}{dt}$ .

Модуль вектора скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

Так как скорость величина векторная, то её можно представить с помощью единичных векторов  $i, j, k$ :

$$\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} . \quad (2.3.6)$$

### 3.4. Ускорение и его составляющие

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуется **ускорением**:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.3.7)$$

Ускорение – величина векторная. При криволинейном движении  $\vec{v}$  изменяется также и по направлению. В какую сторону? С какой скоростью? Выражение (2.3.7) на эти вопросы не отвечает.

Введем *единичный вектор*  $\vec{\tau}$  (рис. 2.9), связанный с точкой  $A$  и направленный по касательной к траектории движения точки  $A$  (векторы  $\vec{\tau}$  и  $\vec{v}$  в точке  $A$  совпадают). Тогда можно записать:

$$\vec{v} = v\vec{\tau},$$

где  $v = |\vec{v}|$  – модуль вектора скорости.

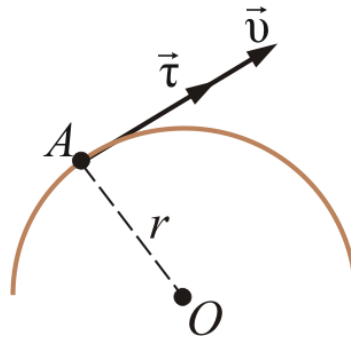


Рис. 2.9

Найдем ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.3.8)$$

Получаем два слагаемых ускорения.

$\vec{a}_\tau$  – **тангенциальное ускорение**, совпадающее с направлением  $\vec{v}$  в данной точке.

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}, \text{ или по модулю } a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (2.3.9)$$

где  $\frac{dv}{dt}$  – скорость изменения модуля вектора скорости  $\vec{v}$ .

Итак,  $\vec{a}_\tau$  показывает изменение вектора скорости по величине:

- если  $\frac{dv}{dt} > 0$ , то  $\vec{a}_\tau$  направлено в ту же сторону, что и вектор  $\vec{v}$ , т.е. ускоренное движение;
- если  $\frac{dv}{dt} < 0$ , то  $\vec{a}_\tau$  направлено в противоположную сторону  $\vec{v}$ , т.е. замедленное движение;

- при  $\frac{dv}{dt} = 0$ , то  $\vec{a}_\tau = 0$ ,  $\vec{v} = \text{const}$  – движение с постоянной по модулю скоростью.

Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения (2.3.8)  $\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ .

Быстрота изменения направления касательной к траектории ( $d\vec{\tau}/dt$ ) определяется скоростью движения точки по окружности и степенью искривленности траекторий.

Степень искривленности плоской кривой характеризуется *кривизной*  $C$ .

*Радиус кривизны*  $r$  – радиус такой окружности, которая сливается с кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке  $dS$ .

Центры таких окружностей – центры кривизны т.  $O$  и  $O'$  (рис. 2.10)

$$r = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}. \quad (2.3.10)$$

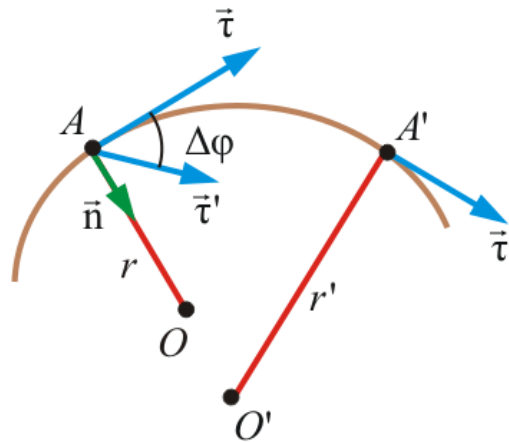


Рис. 2.10

Скорость изменения направления касательной можно выразить как произведение скорости изменения угла на единичный вектор, показывающий направление изменения угла:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n},$$

здесь  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной ( $\vec{\tau}$ ) в данной точке, т.е. по радиусу кривизны к центру кривизны.

Из (2.3.10) следует, что  $d\varphi = \frac{dS}{r}$ , но т.к.  $dS = v dt$ , то  $d\varphi = \frac{v dt}{r}$ .

Тогда  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$ , следовательно  $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{r} \vec{n}$ ; наконец,  $v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{r} \vec{n}$ , т.е.

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{n},$$

здесь  $\vec{a}_n$  – *нормальное ускорение*, или *центростремительное*, т.к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно вектору  $\vec{\tau}$ .

**Нормальное ускорение** показывает быстроту изменения направления вектора скорости. Модуль нормального ускорения:

$$|\vec{a}_n| = a_n = \frac{v^2}{r}. \quad (2.3.11)$$

Центростремительным называют ускорение, когда движение происходит по окружности. А когда движение происходит по произвольной кривой, говорят, нормальное ускорение, перпендикулярное к касательной в любой точке траектории.

Итак, возвращаясь к выражению (2.3.8), можно записать, что суммарный вектор ускорения при движении точки вдоль плоской кривой равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{r} \vec{n}.$$

Изобразим на рис. 2.11 взаимное расположение векторов ускорения:

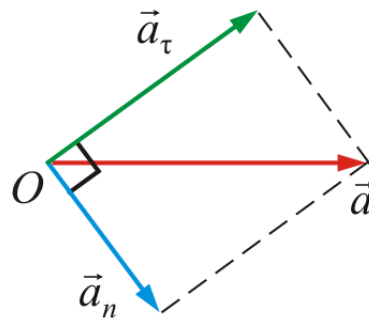


Рис. 2.11

Как видно из этого рисунка, модуль общего ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (2.3.12)$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

- $a_\tau = 0$ ;  $a_n = 0$  – равномерное прямолинейное движение;
- $a_\tau = \text{const}$ ;  $a_n = 0$  – равноускоренное прямолинейное движение;
- $a_\tau = 0$ ;  $a_n = \text{const}$  – равномерное движение по окружности.

Вспомним несколько полезных формул.

При равномерном движении  $S = \int_0^t v dt = vt$ .

При движении с постоянным ускорением

$$S = \int_0^t at dt = a \int_0^t t dt = \frac{at^2}{2}.$$

Если  $v = v_0 \pm at$  ( $a = \text{const}$ ), то:

$$S = S_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \quad (2.3.13)$$

**Обратная задача кинематики** заключается в том, чтобы по известному значению ускорения  $a(t)$  найти скорость точки и восстановить траекторию движения  $r(t)$ .

Пусть нам известно ускорение точки в каждый момент времени.

По определению имеем  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ , отсюда  $v(t) = v(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$ , так как  $v(t) = \frac{dr}{dt}$ , следовательно  $r(t) = r(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ .

## 4. Кинематика твердого тела

Различают пять видов движения:

- *поступательное;*
- *вращательное – вокруг неподвижной оси;*
- *плоское;*
- *вокруг неподвижной точки;*
- *свободное.*

*Поступательное движение и вращательное движение вокруг оси – основные виды движения твердого тела. Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному из этих основных видов или к их совокупности.*

### 4.1. Поступательное движение твердого тела

Как было отмечено в п. 2.1, *поступательное движение – это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению, и при этом все точки твердого тела совершают за один и тот же промежуток времени **равные перемещения*** (рис. 2.2). Поэтому скорости и ускорения *всех точек* твердого тела в данный момент времени  $t$  одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки, т.е. к задаче кинематики материальной точки, подробно рассмотренной в п. 2.3.

### 4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

*Движение твердого тела, при котором две его точки  $O$  и  $O'$  остаются неподвижными, называется **вращательным движением вокруг неподвижной оси**, а неподвижную прямую  $OO'$  называют **осью вращения**.*

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $OO'$  (рис. 2.12).

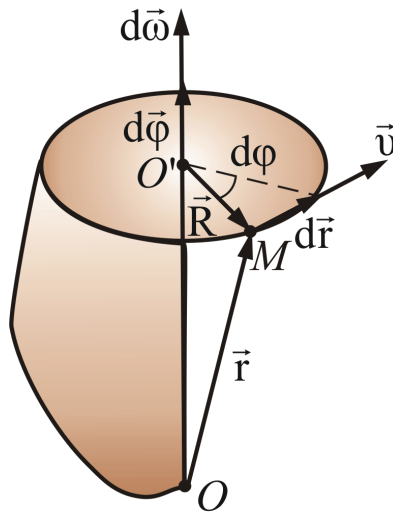


Рис. 2.12

Проследим за некоторой точкой  $M$  этого твердого тела. За время  $dt$  точка  $M$  совершает элементарное перемещение  $d\vec{r}$ .

При том же самом угле поворота  $d\varphi$ , другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояние, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой точки твердого тела, ни первая производная  $\frac{dr}{dt}$ , ни вторая производная  $\frac{d^2r}{dt^2}$  не могут служить характеристикой движения всего твердого тела.

За это же время  $dt$  радиус-вектор  $\vec{R}$ , проведенный из точки  $O'$  в точку  $M$ , повернется на угол  $d\varphi$ . На такой же угол повернется радиус-вектор любой другой точки (т.к. тело абсолютно твердое, в противном случае расстояние между точками должно измениться).

Значит, *угол поворота*  $d\varphi$  характеризует *перемещения всего тела за время*  $dt$ .

Удобно ввести  $d\vec{\varphi}$  – вектор элементарного поворота тела, численно равный  $d\varphi$  и направленный вдоль оси вращения  $OO'$  так, чтобы, глядя вдоль вектора, мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора  $d\vec{\varphi}$  и направление вращения связаны «правилом буравчика»).

Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2.$$

**Угловой скоростью** называется вектор  $\vec{\omega}$ , численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении  $d\vec{\varphi}$  ( $\vec{\omega}$  и  $d\vec{\varphi}$  всегда направлены в одну сторону).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (2.4.1)$$

Если  $\omega = \text{const}$ , то имеет место равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси.



Пусть  $\vec{v}$  – линейная скорость точки  $M$ . За промежуток времени  $dt$  точка  $M$  проходит путь  $dr = vdt$ . В то же время  $d\varphi = R d\varphi$  (центральный угол). Тогда, можно получить связь линейной скорости и угловой:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = \omega R \quad (2.4.2)$$

В векторной форме  $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$ .

Вектор  $\vec{v}$  ортогонален к векторам  $\vec{\omega}$  и  $\vec{R}$  и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение  $[\vec{\omega}, \vec{R}]$ .

Наряду с угловой скоростью вращения используют понятия периода и частоты вращения.

**Период**  $T$  – промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот (т.е. поворот на угол  $\varphi = 2\pi$ ).

**Частота**  $\nu$  – число оборотов тела за 1 секунду.

При вращении с угловой скоростью  $\omega$  имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

Введем вектор **углового ускорения**  $\vec{\varepsilon}$  для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (2.4.3)$$

Вектор  $\vec{\varepsilon}_+$  направлен в ту же сторону, что и  $\vec{\omega}$  при ускоренном вращении  $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$ , а  $\vec{\varepsilon}_-$  направлен в противоположную сторону при замедленном вращении  $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$  (рис. 2.13).

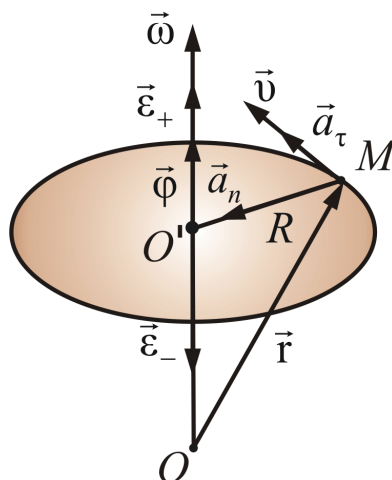


Рис. 2.13

Как и любая точка твердого тела, точка  $M$  имеет нормальную и тангенциальную составляющие ускорения. Выразим нормальное и

тангенциальное ускорение точки  $M$  через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$
$$a_{\tau} = R\varepsilon; \quad (2.4.4)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.4.5)$$

**Обратите внимание.** Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота), направлены вдоль оси вращения.

Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- равномерное вращение  $\varepsilon = 0$ ;  $\omega = \text{const}$ ,  $\varphi = \varphi_0 \pm \omega t$ ;
- равнопеременное вращение  $\varepsilon = \text{const}$ ;  $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ ;  $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ .

# Тема:

# Динамика материальной точки. Силы в природе и их свойства

## План:

- 3.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы
  - 3.2. Масса и импульс тела
  - 3.3. Второй закон Ньютона. Принцип суперпозиции
  - 3.4. Третий закон Ньютона
  - 3.5. Импульс произвольной системы тел
  - 3.6. Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы тел
  - 3.7. Закон сохранения импульса
- 
- 4.1. Виды и категории сил в природе
  - 4.2. Сила тяжести и вес тела
  - 4.3. Упругие силы
  - 4.4. Силы трения

#### **4.5. Силы инерции**

**4.5.1. Уравнения Ньютона для неинерциальной системы отсчета**

**4.5.2. Центробежная и центроостремительная силы**

**4.5.3. Сила Кориолиса**

### 3.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы

В основе так называемой классической, или ньютоновской, механики лежат три закона динамики, сформулированных И. Ньютоном в 1687 г. Эти законы играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта.

Законы Ньютона рассматривают как *систему взаимосвязанных законов* и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом. Ньютоновская механика оказалась настолько плодотворной, настолько могущественной, что у физиков сложилось представление о том, что любое физическое явление можно объяснить с помощью ньютоновских законов. Большинство физиков к концу XIX в. были убеждены в том, что они уже знают о природе всё, что можно было узнать. Однако наиболее проницательные физики понимали, что в знании классической физики есть слабые места. Так, например, английский физик У. Томсон (он же лорд Кельвин) говорил, что на горизонте безоблачного неба классической физики имеются два тёмных облачка: неудача попыток создания теории абсолютно чёрного тела и противоречивое поведение эфира – гипотетической среды, в которой предполагалось распространение световых волн. Эти факты получили своё объяснение в новых теориях – специальной теории относительности и квантовой механике.

В специальной теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1905 г., подверглись радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привёл к созданию «механики больших скоростей», или, как её называют, *релятивистской механики*. Новая механика не привела, однако, к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнения релятивистской механики, в пределе (для скоростей малых, по сравнению со скоростью света), переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как её частный случай и сохранила своё прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями значительно меньшими, чем скорость света.

Аналогично обстоит дело и с соотношениями в классической и квантовой механике, возникшей в 20-х годах прошлого века в результате развития физики атома.

Уравнения квантовой механики также дают в пределе (для масс больших, по сравнению с массами атомов) уравнения классической механики. Следовательно, классическая механика вошла в квантовую механику в качестве её предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало её ограниченную применимость. Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

**Первый закон Ньютона:** *всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её (его) изменить это состояние.*

Оба названных состояния схожи тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: *скорость любого тела остаётся постоянной (в частности, равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет её изменения.*

*Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инертностью.* Поэтому первый закон Ньютона называют *законом инерции.*

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчёта. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчёта, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются *инерциальными системами отсчёта.* **Инерциальной системой отсчёта** является такая система отсчёта, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно (т.е. с постоянной скоростью). Таким образом, *первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчёта.*

Опытным путём установлено, что инерциальной системой отсчёта можно считать гелиоцентрическую (звёздную) систему отсчёта (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определённых звёзд). Система отсчёта, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные её неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач малы, и в этих случаях её можно считать инерциальной.

Из приведённых выше примеров легко понять, что *основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения.*

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трём основным положениям:

- *все тела обладают свойствами инерции;*
- *существуют инерциальные системы отсчёта, в которых выполняется первый закон Ньютона;*
- *движение относительно. Если тело А движется относительно тела отсчёта В со скоростью  $v$ , то и тело В, в свою очередь, движется относительно тела А с той же скоростью, но в обратном направлении  $v = -v'$*

### **3.2. Масса и импульс тела**

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т.е. сообщает данному телу ускорение.

Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает различным телам разные по величине ускорения. *Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения.* Это свойство тел, как мы уже говорили, называется *инертностью* (следует из первого закона Ньютона).

*Мерой инертности тела является величина, называемая массой.*

**Чтобы определить массу некоторого тела, нужно сравнить её с массой тела, принятого за эталон массы (или сравнить с телом уже известной массы).**

*Масса – величина аддитивная (масса тела равна сумме масс частей, составляющих это тело).*

*Система тел, взаимодействующих только между собой, называется замкнутой.*

Рассмотрим замкнутую систему тел массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 3.1).

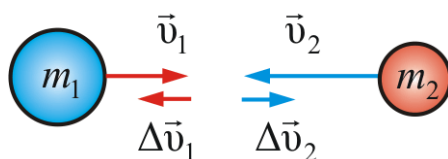


Рис. 3.1

Столкнём эти два тела. Опыт показывает, что приращённые скорости  $\Delta\vec{v}_1$  и  $\Delta\vec{v}_2$  всегда имеют противоположное направление (отличное знаком), а модули приращений скорости относятся как

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3.2.1)$$

(тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость).

Приняв во внимание направление скоростей, запишем:

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2.$$

При  $v \ll c$  масса  $m = \text{const}$  (ньютоновская, классическая механика), тогда имеем:

$$\Delta(m_1\vec{v}_1) = -\Delta(m_2\vec{v}_2).$$

*Произведение массы тела  $m$  на скорость  $\vec{v}$  называется импульсом тела  $\vec{p}$ :*

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.2.2)$$

### 3.3. Второй закон Ньютона. Принцип суперпозиции

Математическое выражение *второго закона Ньютона*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.3.1)$$

*скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе.*

Отсюда можно заключить, что  $d\vec{p} = \vec{F}dt$  – *изменение импульса тела равно импульсу силы.*

Из (3.3.1) получим выражение второго закона через ускорение  $a$  :

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \text{ Т. к. } m = \text{const}, \text{ то } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \text{ Но } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}, \text{ тогда}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (3.3.2)$$

Это привычная запись второго закона Ньютона, или **основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки**.

### **Принцип суперпозиции, или принцип независимости действия сил**

Силы в механике подчиняются **принципу суперпозиции**. Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующую силу  $\vec{F}$  можно найти из выражения:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.3.3)$$

Из второго закона Ньютона имеем:  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i,$

где  $\vec{a}_i$  – ускорение тела, под действием силы  $\vec{F}_i$ . Отсюда

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i. \quad (3.3.4)$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.

Найдем изменение импульса тела за конечный промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t, \text{ или}$$

$$\Delta(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad (3.3.5)$$

т.е., изменение импульса тела равно импульсу силы.

**В системе СИ семь основных единиц** (см. приложение): метр (м), килограмм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвин (К), кандела (кд), единица количества вещества (моль).

Остальные единицы называются **производными** и получаются из физических законов, связывающих их с основными единицами. Например из второго закона Ньютона производная единица силы получается равной  $1 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ , что соответствует 1 Н.

## **3.4. Третий закон Ньютона**

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

**Третий закон Ньютона** отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия тел, и устанавливает, что **силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и противоположны по направлению**:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.4.1)$$

Однако, третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т.е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся друг относительно друга.

Законы Ньютона плохо работают при  $v \approx c$  (релятивистская механика), а также при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц.

### 3.5. Импульс произвольной системы тел

Центром инерции, или центром масс, системы материальных точек называют такую точку  $C$  (рис. 3.2), радиус-вектор которой:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (3.5.1)$$

где  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  – общая масса системы,  $n$  – число точек системы.

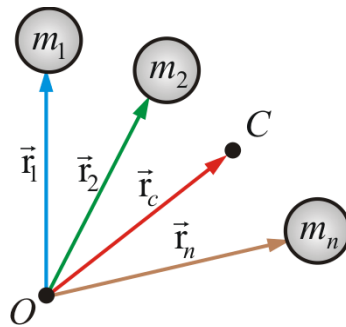


Рис. 3.2

При этом не надо путать *центр масс* с *центром тяжести системы* – с точкой приложения равнодействующей сил тяжести всех тел системы.

Центр тяжести совпадает с центром масс (центром инерции), если  $g$  (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково (когда размеры системы гораздо меньше размеров Земли).

Скорость центра инерции системы  $\vec{v}_c$  равна:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Здесь 
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (3.5.2)$$

– импульс системы тел,  $\vec{v}_i$  – скорость  $i$ -го тела системы. Так как

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c,$$

то импульс системы тел можно определить по формуле

$$\vec{p} = m \vec{v}_c, \quad (3.5.3)$$





$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}.$$

Отсюда можно по-другому записать **основное уравнение динамики поступательного движения системы тел**:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}; \quad (3.6.3)$$

здесь  $\vec{a}_c$  – ускорение центра инерции.

*Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.*

На основании третьего закона Ньютона, силы, действующие на тела системы со стороны других тел системы (внутренние силы), взаимно компенсируют друг друга. Остаются только внешние силы.

В общем случае движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью  $\vec{v} = \vec{v}_c$  и вращательного вокруг центра инерции.

### 3.7. Закон сохранения импульса

*Механическая система называется замкнутой (или изолированной), если на неё не действуют внешние силы, т.е. она не взаимодействует с внешними телами.*

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда незамкнута, т.к. подвержена, как минимум, воздействию гравитационных сил. Однако, если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например, Солнечная система).

*Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0, \quad (3.7.1)$$

отсюда

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_c = \text{const} \quad (3.7.2)$$

*Это есть закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется во времени.*

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции:  $\vec{p} = m\vec{v}_c$ , тогда

$$m\vec{v}_c = \text{const}. \quad (3.7.3)$$

*При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.*

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц, и для релятивистских скоростей, когда  $v \approx c$ .

Если система незамкнута, но главный вектор внешних сил  $\vec{F} = 0$ , то  $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$ , как если бы внешних сил не было (например, прыжок из лодки, выстрел из ружья или реактивное движение (рис. 3.3, 3.4)).

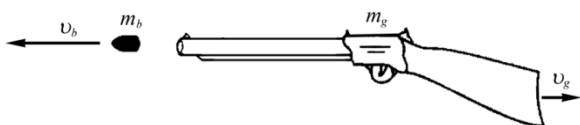


Рис. 3.3



Рис. 3.4

## 4.1. Виды и категории сил в природе

Одно из простейших определений силы: влияние одного тела (или поля) на другое, вызывающее ускорение, это **сила**.

Однако спор вокруг определения силы не закончен до сих пор. Это обусловлено трудностью объединения в одном определении сил, различных по своей природе и характеру проявления. В настоящее время различают четыре типа сил или взаимодействий:

- **гравитационные;**
- **электромагнитные;**
- **сильные** (ответственные за связь частиц в ядрах);
- **слабые** (ответственные за распад частиц).

**Гравитационные** и **электромагнитные** силы нельзя свести к другим, более простым силам, поэтому их называют **фундаментальными**.

Законы фундаментальных сил просты и выражаются точными формулами. Для примера можно привести формулу гравитационной силы взаимодействия двух материальных точек, имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ :

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (4.1.1)$$

где  $r$  – расстояние между точками,  $\gamma$  – гравитационная постоянная.

В качестве второго примера можно привести формулу для определения силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ :

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (4.1.2)$$

где  $k_0$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Как видно, формулы для фундаментальных сил являются простыми и точными.

Для других сил, например для упругих сил и сил трения, можно получить лишь приближенные, эмпирические формулы.

## 4.2. Сила тяжести и вес тела

Одна из фундаментальных сил, **сила гравитации**, проявляется на Земле в виде **силы тяжести** – силы, с которой все тела притягиваются к Земле.

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением – *ускорением свободного падения*  $g$  (вспомним школьный опыт – «трубка Ньютона»). Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует **сила тяжести**  $m\vec{g}$ . Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения к Земле (различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей, не вполне инерциальная).

Если подвесить тело (рис. 4.1) или положить его на опору, то сила тяжести уравнивается силой  $\vec{R}$ , которую называют **реакцией опоры** или **подвеса**.

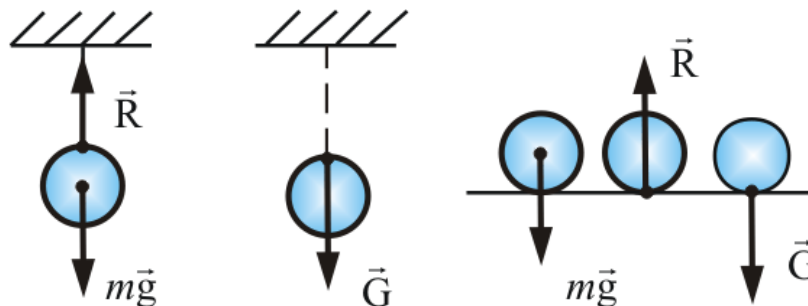


Рис. 4.1

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору *с силой*  $\vec{G}$ , которая называется **весом тела**. Итак, **вес тела** – это сила, с которой тело в состоянии покоя действует на подвес или опору, вследствие гравитационного притяжения к Земле. Поскольку силы  $m\vec{g}$  и  $\vec{R}$  уравнивают друг друга, то выполняется соотношение

$$m\vec{g} = -\vec{R}.$$

Согласно третьему закону Ньютона

$$\vec{G} = -\vec{R}.$$

Значит,

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad (4.2.1)$$

то есть *вес и сила тяжести равны друг другу, но приложены к разным точкам: вес к подвесу или опоре, сила тяжести – к самому телу*. Это равенство

справедливо, если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или движутся равномерно, прямолинейно). Если имеет место движение с ускорением, то справедливо соотношение

$$G = mg \pm ma = m(g \pm a). \quad (4.2.2)$$

Вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если  $g$  и  $a$  направлены в одну сторону (тело движется вниз или падает), то  $G < mg$ , и если наоборот, то  $G > mg$ . Если же тело движется с ускорением  $a = g$ , то  $G = 0$  – т.е. наступает *состояние невесомости*.

Пример: космический корабль на орбите.

### 4.3. Упругие силы

Электромагнитные силы в механике проявляют себя как упругие силы и силы трения.

Под действием внешних сил возникают деформации (т.е. изменение размеров и формы) тел. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется упругой. Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, называемого пределом упругости. При превышении этого предела деформация становится пластичной, или неупругой, т.е. первоначальные размеры и форма тела полностью не восстанавливаются. Рассмотрим упругие деформации.

В деформированном теле (рис. 4.2) возникают упругие силы, уравнивающие внешние силы. Под действием внешней силы –  $F_{вн}$  пружина получает удлинение  $x$ , в результате в ней возникает упругая сила –  $F_{упр}$ , уравнивающая  $F_{вн}$ .

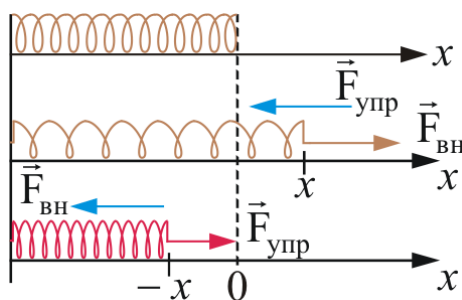


Рис. 4.2

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой упругости  $F_{упр}$ .

*Удлинение пружины пропорционально внешней силе и определяется законом Гука:*

$$x = \frac{1}{k} F_{вн}, \quad (4.3.1)$$

$k$  – жесткость пружины. Видно, что чем больше  $k$ , тем меньшее удлинение получит пружина под действием данной силы.



**Гук Роберт** (1635–1703) – знаменитый английский физик, сделавший множество изобретений и открытий в области механики, термодинамики, оптики. Его работы относятся к теплоте, упругости, оптике, небесной механике. Установил постоянные точки термометра – точку таяния льда, точку кипения воды. Усовершенствовал микроскоп, что позволило ему осуществить ряд микроскопических исследований, в частности наблюдать тонкие слои в световых пучках, изучать строение растений. Положил начало физической оптике.

Так как упругая сила отличается от внешней только знаком, т.е.  $F_{\text{упр}} = -F_{\text{вн}}$ , закон Гука можно записать в виде

$$x = -\frac{1}{k} F_{\text{упр}},$$

отсюда

$$F_{\text{упр}} = -kx.$$

*Потенциальная энергия упругой пружины равна работе, совершенной над пружиной.*

Так как сила непостоянна, элементарная работа  $dA = Fdx$ , или  $dA = -kx dx$ .

Тогда **полная работа**, которая совершена пружиной, равна:

$$A = \int dA = -\int_0^x kx dx = -\frac{kx^2}{2}.$$

### Закон Гука для стержня

Одностороннее (или продольное) растяжение (сжатие) стержня состоит в увеличении (уменьшении) длины стержня под действием внешней силы  $\vec{F}$  (рис. 4.3).

Такая деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил, которые принято характеризовать *напряжением*  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S},$$

где  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь поперечного сечения стержня,  $d$  – его диаметр.

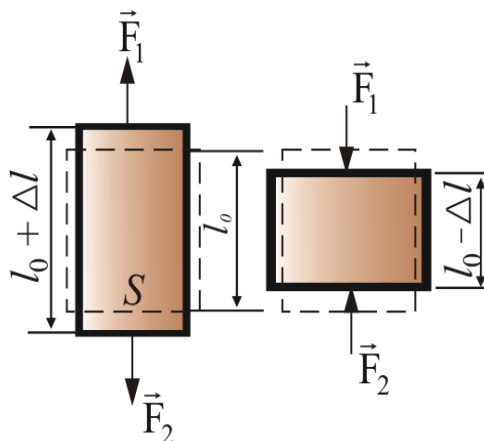


Рис. 4.3

В случае растяжения  $\sigma$  считается положительной, а в случае сжатия – отрицательной. Опыт показывает, что *приращение длины стержня  $\Delta l$  пропорционально напряжению  $\sigma$* :

$$\Delta l = \frac{1}{k} \sigma.$$

Коэффициент пропорциональности  $k$ , как и в случае пружины, зависит от свойств материала и длины стержня.

Доказано, что  $k = \frac{E}{l_0}$ , где  $E$  – величина, характеризующая упругие свойства

материала стержня, – **модуль Юнга** (см. приложение 2).  $E$  измеряется в Н/м<sup>2</sup> или в Па.

Тогда приращение длины можно выразить через модуль Юнга:

$$\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E},$$

или, обозначив  $\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$  – *относительное приращение длины*, получим:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma. \quad (4.3.2)$$

**Закон Гука для стержня:** *относительное приращение длины стержня прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга.*

Заметим, что растяжение или сжатие стержней сопровождается соответствующим изменением их поперечных размеров (рис. 4.3).

*Отношение относительного поперечного сужения (расширения) стержня  $\frac{\Delta d}{d}$  к относительному удлинению (сжатию)  $\frac{\Delta l}{l}$ , называют коэффициентом Пуассона* (см. приложение 2):

$$M = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l}. \quad (4.3.3)$$

Объемная плотность потенциальной энергии тела  $\omega_\sigma$  при растяжении (сжатии) определяется удельной работой по преодолению упругих сил  $A_{\text{упр}}$ , рассчитанной на единицу объема тела:

$$\omega_\sigma = A_{\text{упр}} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (4.3.4)$$

### Деформация сдвига

Под действием силы  $\vec{F}$ , приложенной касательно к верхней грани, брусок получает *деформацию сдвига*.

Пусть  $AB$  – плоскость сдвига (рис. 4.4).

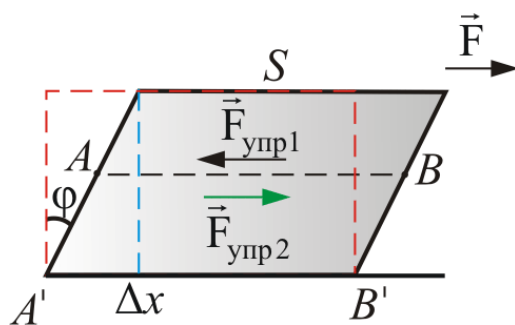


Рисунок 4.4

Назовем величину  $\gamma$ , равную тангенсу угла сдвига  $\varphi$ , **относительным сдвигом**:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x},$$

здесь  $\Delta x$  – **абсолютный сдвиг**.

При упругих деформациях угол  $\varphi$  бывает очень малым, поэтому  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ .

Таким образом, **относительный сдвиг**

$$\gamma = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi.$$

Деформация сдвига приводит к возникновению в каждой точке бруска тангенциального упругого напряжения  $\tau$ , которое определяется как отношение модуля силы упругости к единице площади:

$$\tau = \frac{F_{\text{упр}}}{S}, \quad (4.3.5)$$

где  $S$  – площадь плоскости  $AB$ .

Опытным путем доказано, что относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau, \quad (4.3.6)$$

где  $G$  – **модуль сдвига**, зависящий от свойств материала и равный такому тангенциальному напряжению, при котором  $\gamma = \operatorname{tg} \varphi = 1$ , а  $\varphi = 45^\circ$  (если бы столь огромные упругие деформации были возможны).

Модуль сдвига измеряется так же, как и модуль Юнга в паскалях (Па).

Удельная потенциальная энергия деформируемого тела при сдвиге равна:

$$\omega_s = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (4.3.7)$$

#### 4.4. Силы трения

**Силой трения** называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.

Различают трение внешнее и внутреннее.



**Внешнее трение** возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).

**Внутреннее трение** наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).

Различают **сухое** и **жидкое** (или **вязкое**) трение.

**Сухое трение** возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.

Жидким (вязким) называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на трение скольжения и трение качения.

Рассмотрим законы сухого трения (рис. 4.5).

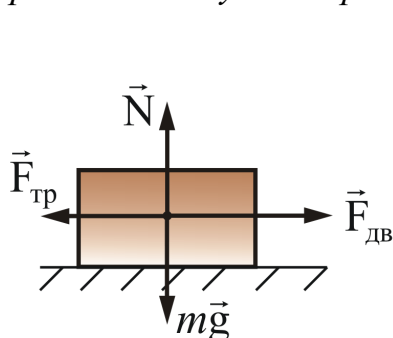


Рис. 4.5

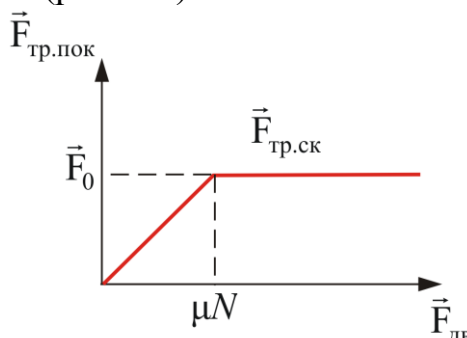


Рис. 4.6

Поддействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой  $\vec{F}_{дв}$ , постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила  $\vec{F}_{дв}$  уравнивается некоторой силой  $\vec{F}_{тр}$ , направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе  $\vec{F}_{дв}$ . В этом случае  $\vec{F}_{тр}$  и есть *сила трения покоя*.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю *силы нормального давления*  $N$ :

$$F_{тр.пок} = \mu_0 N,$$

$\mu_0$  – *коэффициент трения покоя*, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение  $F_0$ , тело начнет скользить по опоре – трение покоя  $F_{тр.пок}$  сменится трением скольжения  $F_{тр.ск}$  (рис. 4.6):

$$F_{тр} = \mu N, \tag{4.4.1}$$

где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения  $\mu$  здесь значительно меньше.

Подробнее рассмотрим силу трения скольжения на наклонной плоскости (рис. 4.7).

На тело, находящееся на наклонной плоскости с сухим трением, действуют три силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , нормальная сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила сухого трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Сила  $\vec{F}$  есть равнодействующая сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}$ ; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 4.7 видно, что  $F = mg \sin \alpha$ ,  $N = mg \cos \alpha$ .

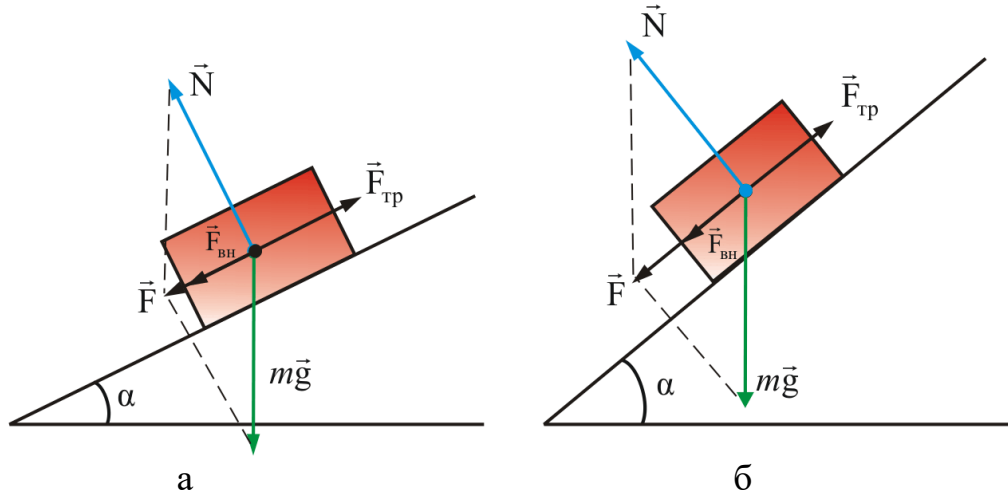


Рисунок 4.7

Если  $F < (F_{\text{тр}})_{\text{max}} = \mu N$  – тело остается неподвижным на наклонной плоскости. Максимальный угол наклона  $\alpha$  определяется из условия  $(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = F$  или  $\mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$ , следовательно  $\text{tg} \alpha_{\text{max}} = \mu$ , где  $\mu$  – коэффициент сухого трения.

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

$$F = mg \sin \alpha. \quad (4.4.2)$$

При  $\alpha > \alpha_{\text{max}}$  тело будет скатываться с ускорением

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad (4.4.3)$$

$$F_{\text{ск.}} = ma = F - F_{\text{тр}}. \quad (4.4.4)$$

Если дополнительная сила  $F_{\text{вн}}$ , направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол  $\alpha_{\text{max}}$  и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

## 4.5. Силы инерции

### 4.5.1. Уравнение Ньютона для неинерциальных систем отсчета

Законы инерции выполняются в инерциальной системе отсчета. А как описать движение тела в неинерциальной системе?

Рассмотрим пример: вы стоите в троллейбусе спокойно. Вдруг троллейбус резко трогается, и вы невольно отклонитесь назад. Что произошло? Кто вас толкнул?

С точки зрения наблюдателя на Земле (в инерциальной системе отсчета), в

тот момент, когда троллейбус тронулся, вы остались стоять на месте – в соответствии с первым законом Ньютона.

С точки зрения сидящего в троллейбусе – вы начали двигаться назад, как если бы кто-нибудь вас толкнул. На самом деле, никто не толкнул, просто ваши ноги, связанные силами трения с троллейбусом «поехали» вперед из-под вас и вам пришлось падать назад.

Можно описать ваше движение в инерционной системе отсчета. Но это не всегда просто, так как обязательно нужно вводить силы, действующие со стороны связей. А они могут быть самыми разными и ведут себя по-разному – нет единого подхода к их описанию.

А можно и в неинерциальной системе воспользоваться законами Ньютона, если ввести силы инерции. Они фиктивны. Нет тела или поля, под действием которого вы начали двигаться в троллейбусе. Силы инерции вводят специально, чтобы воспользоваться уравнениями Ньютона в неинерциальной системе.

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. На силы инерции законы Ньютона не распространяются.

Найдем количественное выражение для силы инерции при поступательном движении неинерциальной системы отсчета.

Введем обозначения:

$\vec{a}'$  – ускорение тела относительно неинерциальной системы;

$\vec{a}^*$  – ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной (относительно Земли).

Тогда ускорение тела относительно инерциальной системы

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}'. \quad (4.5.1)$$

Ускорение в инерциальной системе можно выразить через второй закон Ньютона

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}^* + \vec{a}',$$

где  $m$  – масса движущегося тела, или

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}^*.$$

Мы можем и  $\vec{a}^*$  представить в соответствии с законом Ньютона (формально):

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}_{ин}}{m},$$

где  $\vec{F}_{ин}$  – сила, направленная в сторону, противоположную ускорению неинерциальной системы.

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}^*,$$

тогда получим

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$$

– уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета.

Здесь  $\vec{F}_{\text{ин}}$  – фиктивная сила, обусловленная свойствами системы отсчета, необходимая нам для того, чтобы иметь возможность описывать движения тел в неинерциальных системах отсчета с помощью уравнений Ньютона.

Силы инерции инвариантны относительно перехода из одной системы отсчета в другую. Они не подчиняются закону действия и противодействия. Движение тела под действием сил инерции аналогично движению во внешнем силовом поле. Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любому движению системы материальных тел.

## 4.5.2. Центростремительная и центробежная силы

Рассмотрим вращение камня массой  $m$  на веревке (рис. 4.8).

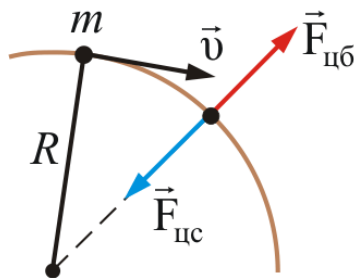


Рис. 4.8

В каждый момент времени камень должен был бы двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Однако он связан с осью вращения веревкой. Веревка растягивается, появляется упругая сила, действующая на камень, направленная вдоль веревки к центру вращения. Это и есть **центростремительная сила** (при вращении Земли вокруг оси в качестве центростремительной силы выступает сила гравитации).

$\vec{F}_{\text{цс}} = m\vec{a}_{\text{цс}}$ , но т.к.  $\vec{a}_{\text{цс}} = \vec{a}_n$ , то

$$\vec{F}_{\text{цс}} = m\vec{a}_n, \quad (4.5.2)$$

$$F_{\text{цс}} = m \frac{v^2}{R}. \quad (4.5.3)$$

Центростремительная сила возникла в результате действия камня на веревку, т.е. это сила, приложенная к телу, – сила инерции второго рода. Она фиктивна – ее нет.

Сила же, приложенная к связи и направленная по радиусу от центра, называется **центробежной**. Помните, что центростремительная сила приложена к вращающемуся телу, а центробежная сила – к связи.

Центробежная сила – сила инерции первого рода. Центробежной силы, приложенной к вращающемуся телу, не существует.

С точки зрения наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчета, он не приближается к центру, хотя видит, что  $F_{\text{цс}}$  действует (об этом можно судить по показанию пружинного динамометра). Следовательно, с точки

зрения наблюдателя в неинерциальной системе есть сила, уравнивающая  $F_{цб}$ , равная ей по величине и противоположная по направлению:

$$\vec{F}_{цб} = -m\vec{a}_n,$$

$$F_{цб} = -m\frac{v^2}{R},$$

т.к.  $a_n = \omega^2 R$  (здесь  $\omega$  – угловая скорость вращения камня, а  $v$  – линейная), то

$$F_{цб} = m\omega^2 R. \quad (4.5.4)$$

Все мы (и физические приборы тоже) находимся на Земле, вращающейся вокруг оси, следовательно, в неинерциальной системе (рис 4.9).

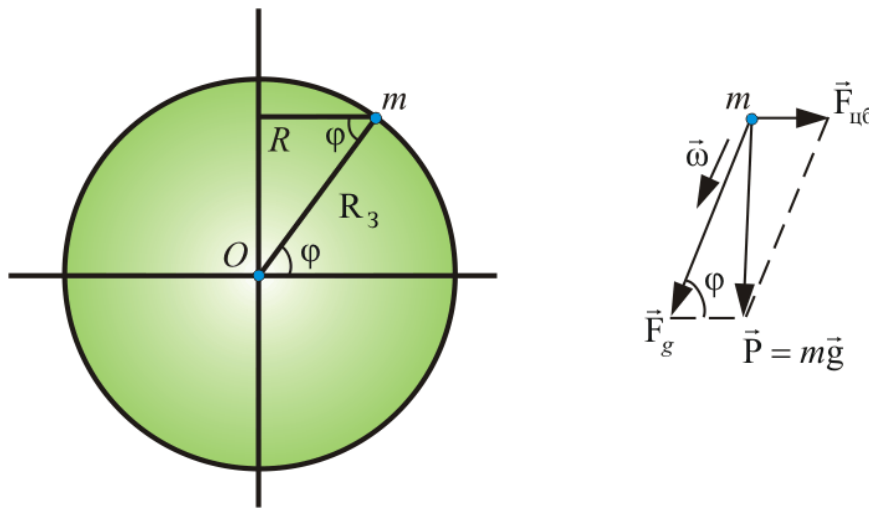


Рис. 4.9

$$R = R_3 \cos \varphi \quad (\varphi \text{ – широта местности}).$$

$$F_{цб} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_3 \cos \varphi,$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли.

Сила тяжести есть результат сложения двух сил:  $\vec{F}_g$  и  $\vec{F}_{цб}$ , таким образом  $g$  (а значит и  $mg$ ) *зависит от широты местности*:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб},$$

где  $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения тела.

Направлено  $g$  точно к центру только на полюсе и на экваторе.

### 4.5.3. Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной и центростремительной сил, появляется еще одна сила, называемая **силой Кориолиса** или кориолисовой силой инерции (Г. Кориолис (1792 – 1843) – французский физик).

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую  $OA$  (рис. 4.10).

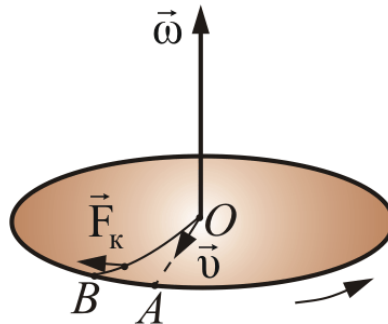


Рисунок 4.10

Запустим в направлении от  $O$  к  $A$  шарик со скоростью  $\vec{v}$ . Если диск не вращается, шарик должен катиться вдоль  $OA$ . Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по кривой  $OB$ , причем его скорость относительно диска быстро изменяет свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила  $\vec{F}_k$ , перпендикулярная направлению движения шарика.

Сила Кориолиса не является «настоящей» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальной системы отсчета такая сила вообще не существует. Она вводится искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета.

Чтобы заставить шарик катиться вдоль  $OA$ , нужно сделать направляющую, выполненную в виде ребра. При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой. Относительно вращающейся системы (диска), шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно объяснить тем, что эта сила уравнивается приложенной к шарикау силой инерции:

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}], \quad (4.5.5)$$

здесь  $\vec{F}_k$  – сила Кориолиса, также являющаяся силой инерции,  $\vec{\omega}$  – угловая скорость вращения диска.

Сила Кориолиса вызывает кориолисово ускорение. Выражение для этого ускорения имеет вид

$$\vec{a}_k = 2[\vec{v}, \vec{\omega}]. \quad (4.5.6)$$

Ускорение направлено перпендикулярно векторам  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}$  и максимально, если относительная скорость точки  $\vec{v}$  ортогональна угловой скорости  $\vec{\omega}$  вращения подвижной системы отсчета. Кориолисово ускорение равно нулю, если угол между векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}$  равен нулю или  $\pi$ , либо если хотя бы один из этих векторов равен нулю.

Следовательно, в общем случае, при использовании уравнений Ньютона во вращающейся системе отсчета, возникает необходимость учитывать

центробежную, центростремительную силы инерции, а также кориолисову силу.

Таким образом,  $\vec{F}_k$  всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Сила Кориолиса возникает только в случае, когда тело изменяет свое положение по отношению к вращающейся системе отсчета.

Влияние кориолисовых сил необходимо учитывать в ряде случаев при истолковании явлений, связанных с движением тел относительно земной поверхности. Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обуславливающая отклонение к востоку от линии отвеса. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах. Летящий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции. Например, при выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу – в южном. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в восточном направлении.

Сила Кориолиса действует на тело, движущееся вдоль меридиана в северном полушарии вправо и в южном – влево (рис. 4.11).

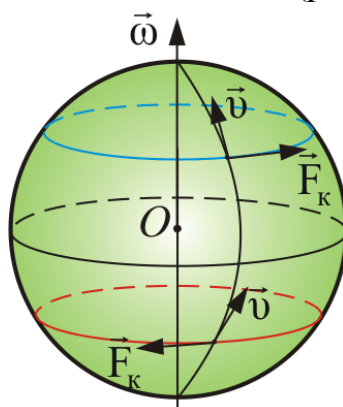


Рис. 4.11

Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый – в южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника (маятник Фуко). Для простоты предположим, что маятник расположен на полюсе (рис. 4.12).

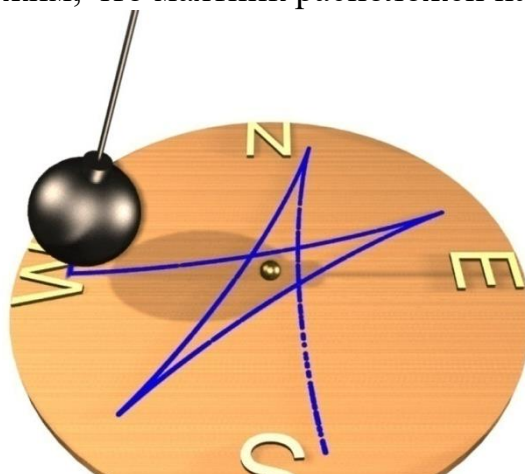


Рис. 4.12

На северном полюсе сила Кориолиса будет направлена вправо по ходу маятника. В итоге траектория движения маятника будет иметь вид розетки. Как следует из рисунка, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, причем за сутки она совершает один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета дело обстоит так: плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее, делая за сутки один оборот.

Таким образом, вращение плоскости качаний маятника Фуко дает непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

*Если тело удаляется от оси вращения, то сила  $F_k$  направлена противоположно вращению и замедляет его.*

*Если тело приближается к оси вращения, то  $F_k$  направлена в сторону вращения.*

С учетом всех сил инерции, уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета (4.5.6) примет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_k, \quad (4.5.7)$$

$\vec{F}_{ин}$  – сила инерции, обусловленная поступательным движением неинерциальной системы отсчета;  $\vec{F}_{цб} + \vec{F}_k$  – две силы инерции, обусловленные вращательным движением системы отсчета;  $\vec{a}'$  – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ин} &= -m\vec{a}, \\ \vec{F}_k &= 2m[\vec{v}, \vec{\omega}], \\ \vec{F}_{цб} &= m\vec{a}_n. \end{aligned}$$



Тема:

# Законы сохранения в механике

## План:

1. Кинетическая энергия. Работа и мощность
2. Консервативные силы и системы
3. Потенциальная энергия
4. Закон сохранения механической энергии
5. Условие равновесия механических систем
6. Применение законов сохранения
  - 6.1. Абсолютно упругий, центральный удар
  - 6.2. Абсолютно неупругий удар
  - 6.3. Движение тел с переменной массой

## 1. Кинетическая энергия. Работа и мощность

Уравнение движения тела под действием внешней силы  $\vec{F}$  имеет вид (рис. 5.1)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

или, в проекции на направление движения,

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\tau}. \quad (5.1.1)$$

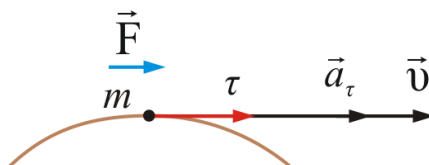


Рис. 5.1

Умножив обе части равенства (5.1.1) на  $v dt = dr$ , получим

$$mv dv = F_{\tau} dr.$$

Левая часть равенства есть **полный дифференциал некоторой функции**:

$$mv dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F_{\tau} dr.$$

Если система замкнута, то  $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$  и  $F_{\tau} = 0$ , тогда и  $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$ .

*Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы, равен нулю, то эта функция может служить характеристикой состояния данной системы.*

*Функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения, называется **кинетической энергией**.*

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (5.1.2)$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы.  $K$  – аддитивная величина:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2},$$

$K$  – относительная величина, её значение зависит от выбора системы координат (так же как и  $\vec{v}$  – относительная величина).

Энергия измеряется в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т.е. в ньютонах на метр.  $1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}$ .

Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (эВ).  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ Дж}$ .

При решении задач полезна формула, связывающая кинетическую энергию с импульсом  $p$ . Получим её:

$$\frac{mv^2}{2} \left( \frac{m}{m} \right) = \frac{m^2 v^2}{2m}, \text{ отсюда}$$

$$K = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.1.3)$$

Теперь рассмотрим связь кинетической энергии с работой.

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда элементарная работа по перемещению тела из точки 1 в точку 2, будет равна произведению силы  $F$  на перемещение  $dr$ :

$$dA = Fdr, \text{ отсюда } A = \int_1^2 Fdr.$$

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}, \quad dr = vdt.$$

$$A = \int_1^2 Fdr = m \int_1^2 vdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$A = \int_1^2 Fdr = K_2 - K_1.$$

Следовательно, **работа** силы, приложенной к телу на пути  $r$ , численно равна изменению кинетической энергии этого тела:

$$A = \Delta K. \quad (5.1.4)$$

Или изменение кинетической энергии  $dK$  равно работе внешних сил:

$$dK = dA.$$

Работа, так же как и кинетическая энергия, измеряется в джоулях.

Скорость совершения работы (передачи энергии) называется **мощность**.

*Мощность есть работа, совершаемая в единицу времени.*

$$\text{Мгновенная мощность } N = \frac{dA}{dt}, \text{ или } N = F \frac{dr}{dt} = Fv.$$

$$\text{Средняя мощность } \langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}.$$

Измеряется мощность в ваттах.  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ .

## 2. Консервативные силы и системы

Кроме контактных взаимодействий, наблюдаются взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Подобное взаимодействие осуществляется посредством физических полей (особая форма материи). Каждое тело создает вокруг себя поле, которое проявляет себя именно воздействием на другие тела.

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела, называются **консервативными**.

Обозначим  $A$  – работа консервативных сил, по перемещению тела из точки 1 в точку 2 (рис. 5.2).

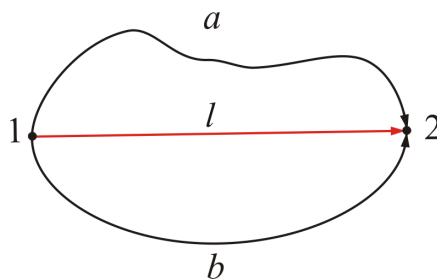


Рис. 5.2

$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1l2} = A_{12}.$$

Изменение направления движения на противоположное вызывает изменение знака работы консервативных сил. Отсюда следует, что *работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю*:

$$\oint_S F dr = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0 \quad (5.2.1)$$

Интеграл по замкнутому контуру  $S$   $\oint_S \vec{F} dr$  называется *циркуляцией* вектора  $\vec{F}$ . Следовательно, **если циркуляция какого-либо вектора силы равна нулю, то эта сила консервативна**.

Консервативные силы: сила тяжести, электростатические силы, силы центрального стационарного поля.

Неконсервативные силы: силы трения, силы вихревого электрического поля.

**Консервативная система** – такая, внутренние силы которой только консервативные, внешние – консервативны и стационарны.

Пример консервативных сил – гравитационные силы (рис. 5.3).

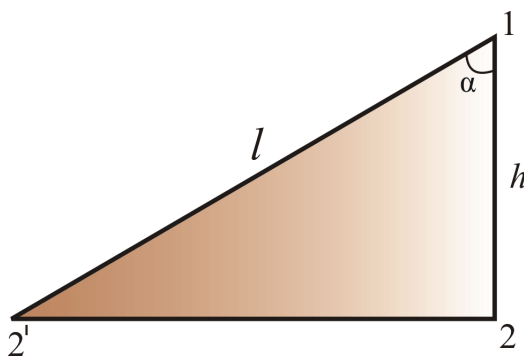


Рис. 5.3

Работа по подъему тела массы  $m$  на высоту  $h$  равна:  $A_{21} = mgh$ .

С другой стороны,  $A_{21} = mgl \cos \alpha = mgh$ ,

где  $\alpha$  – угол между силой  $m\vec{g}$  и направлением перемещения.

Таким образом, из примера видно, что работа не зависит от формы пути, значит, силы консервативны, а поле этих сил потенциально.

### 3. Потенциальная энергия

Если на систему материальных тел действуют *консервативные силы*, то можно ввести понятие *потенциальной энергии*.

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, то есть при изменении положения тел относительно системы отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение. Работа определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad (5.3.1)$$

здесь потенциальная энергия  $U(x, y, z)$  – *функция состояния системы, зависящая только от координат всех тел системы в поле консервативных сил*.

Итак,  $K$  – определяется скоростью движения тел системы, а  $U$  – их взаимным расположением.

Из (5.3.1) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dU.$$

Нет единого выражения для  $U$ . В разных случаях она определяется по-разному.

#### *Потенциальная энергия при гравитационном взаимодействии*

Работа тела при падении  $A = mgh$ . Или  $A = U - U_0$ . Условились считать, что на поверхности Земли ( $h = 0$ ),  $U_0 = 0$ , тогда  $U = A$ , т. е.

$$U = mgh. \quad (5.3.2)$$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами  $M$  и  $m$ , находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга, потенциальную энергию можно найти по формуле

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (5.3.3)$$

На рис. 5.4 изображена диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс  $M$  и  $m$ .

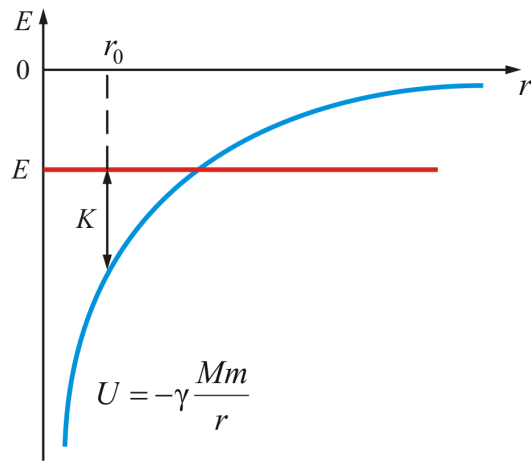


Рис. 5.4

Здесь полная энергия  $E = K + U$ . Отсюда легко найти кинетическую энергию:  $K = E - U$ .

### **Потенциальная энергия упругой деформации (пружины)**

Найдём работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости,  $F_{\text{упр}} = -kx$ , где  $k$  – коэффициент упругости. Сила непостоянна, поэтому элементарная работа  $dA = Fdx = -kxdx$  (знак минус говорит о том, что работа совершена над пружиной). Тогда

$$A = \int dA = - \int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \quad (5.3.4)$$

т.е.  $A = U_1 - U_2$ . Примем:  $U_2 = 0$ ,  $U_1 = U$ , тогда

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (5.3.5)$$

На рис. 5.5 показана диаграмма потенциальной энергии пружины.

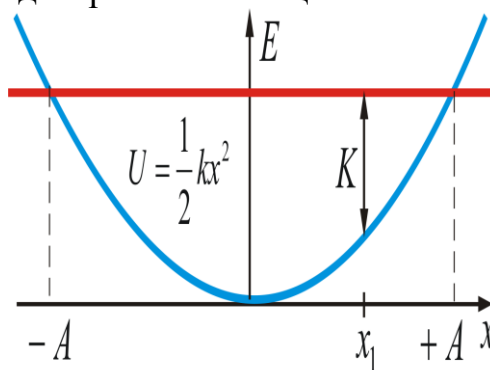


Рис. 5.5

Здесь  $E = K + U$  – полная механическая энергия системы,  $K$  – кинетическая энергия в точке  $x_1$ .

## Связь между потенциальной энергией и силой

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется потенциальным полем.

Каждой точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы  $\vec{F}$ , действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии  $U$ . Значит, между силой  $\vec{F}$  и  $U$  должна быть связь  $dA = \vec{F}d\vec{r}$ , с другой стороны,  $dA = -dU$ , следовательно  $\vec{F}d\vec{r} = -dU$ , отсюда

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}. \quad (5.3.6)$$

Проекции вектора силы на оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вектор силы можно записать через проекции:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

или

$$F = -\text{grad } U, \quad (5.3.7)$$

где  $\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ .

Градиент – это вектор, показывающий направление наибоыстрейшего изменения функции. Следовательно,  $\vec{F}$  направлен в сторону наибоыстрейшего уменьшения  $U$ .

## 4. Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения сводит воедино результаты, полученные нами раньше.

В 40-х годах XIX в. трудами Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля (в разное время и независимо друг от друга) был доказан закон сохранения и превращения энергии.



Джоуль Джеймс Прескотт (1818–1889) – английский физик, один из первооткрывателей закона сохранения энергии. Первые уроки по физике ему давал Дж. Дальтон, под влиянием которого Джоуль начал свои эксперименты. Работы посвящены электромагнетизму, кинетической теории газов.

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$ -частиц.

Силы взаимодействия между частицами ( $\vec{F}^{\text{внутр}}$ ) – консервативные. Кроме внутренних сил, на частицы действуют внешние консервативные и

неконсервативные силы, т.е. рассматриваемая система частиц или тел консервативна. Тогда для этой системы можно найти полную энергию системы:

$$E = K + U_{\text{внутр}} + U_{\text{внеш}} = \text{const} \quad (5.4.1)$$

Для механической энергии **закон сохранения** звучит так: **полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остаётся постоянной**.

Для **замкнутой системы**, т.е. для системы, на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр}} = \text{const}, \quad (5.4.2)$$

т.е. **полная механическая энергия замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, остаётся постоянной**.

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется – частично она переходит в другие виды энергии, неконсервативные.

*Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется **диссипативной***, сам процесс перехода называется **диссипацией энергии**.

В диссипативной, изолированной от внешнего воздействия системе остаётся постоянной сумма всех видов энергии (механической, тепловой и т.д.) Здесь действует общий закон сохранения энергии.

Этот процесс хорошо демонстрирует маятник Максвелла (рис. 5.6). Роль консервативной внешней силы здесь играет гравитационное поле. Маятник прекращает свое движение из-за наличия внутренних неконсервативных сил (сил трения, сопротивления воздуха).

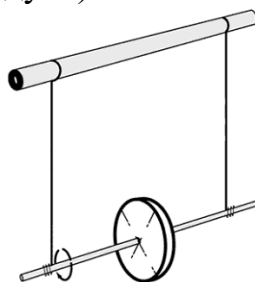


Рис. 5.6

## 5. Условие равновесия механической системы

*Механическая система будет находиться в **равновесии**, если на неё не будет действовать сила*. Это условие **необходимое**, но **не достаточное**, так как система может при этом находиться в равномерном и прямолинейном движении.

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 5.7.



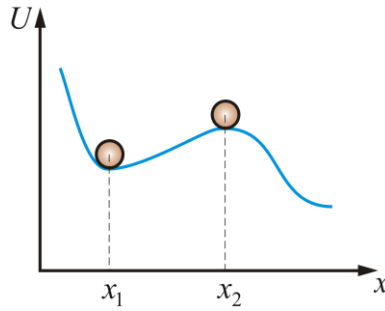


Рис. 5.7

Здесь, даже при отсутствии силы, положение в точке  $x_2$  нельзя назвать устойчивым равновесием.

И так, по определению,  $F_x = 0$  – условие равновесия системы. Из (5.3.7)

имеем  $|\vec{F}_x| = -\frac{\partial U}{\partial x}$ . Следовательно, при  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$  система будет находиться в состоянии равновесия.

Именно так находят положение точек экстремума.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_1 \text{ и } x = x_2,$$

но при  $x_2$   $U = \max$  – состояние неустойчивого равновесия (потенциальный барьер); при  $x_1$   $U = \min$  – система находится в устойчивом равновесии (потенциальная яма). Следовательно, *достаточным условием равновесия является равенство минимуму значения  $U$*  (это справедливо не только для механической системы, но, например, и для атома).

## 6. Применение законов сохранения

### 6.1. Абсолютно упругий центральный удар

При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не работает.

Применим закон сохранения механической энергии для расчета скорости тел при *абсолютно упругом ударе* – ударе, при котором не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии.

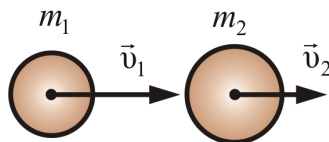


Рис. 5.8

На рис. 5.8 изображены два шара  $m_1$  и  $m_2$ . Скорости шаров  $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$ , поэтому, хотя скорости и направлены в одну сторону, все равно будет удар. Систему можно считать замкнутой. Кроме того, при абсолютно упругом ударе она консервативна.

Обозначим  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$  как скорость шаров после их столкновения.

В данном случае можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса (в проекциях на ось  $x$ ):

$$\begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно  $v_1'$  и  $v_2'$ , получим

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \quad v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом, скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми по величине и по направлению.

Рассмотрим теперь *абсолютно упругий удар шара о неподвижную массивную стенку*.

Стенку можно рассматривать как неподвижный шар с  $v_2 = 0$ , массой  $m_2 \rightarrow \infty$ . Разделим числитель и знаменатель на  $m_2$  и пренебрежем  $m_1/m_2$ , тогда

$$v_1' = \frac{2v_2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{2v_2 - v_1}{1}, \text{ т.е.}$$

$$v_1' = -v_1.$$

Так, шар  $m_1$  изменит направление скорости на *противоположное*.

## 6.2. Абсолютно неупругий удар

*Абсолютно неупругий удар* – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше, как единое целое.

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости до удара  $v_1$  и  $v_2$ , то, используя закон сохранения импульса, можно записать:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad (5.6.1)$$

где  $\vec{v}$  – скорость движения шаров после удара. Тогда

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.6.2)$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае – если массы и скорости шаров равны, то

$$v = \frac{v_1 - v_2}{2} = 0.$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии (диссипация энергии). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta K = \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (5.6.3)$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Когда  $m_2 \gg m_1$  (масса неподвижного тела очень большая), то  $v \ll v_1$  и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Когда  $m_2 \approx m_1$ , тогда  $v \approx v_1$  и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток – гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

### 6.3. Движение тел с переменной массой

Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае импульс системы

$$\vec{p} = M \vec{v}_{ц.м}. \quad (5.6.4)$$

Полный импульс системы частиц равен произведению полной массы системы

$M$  на скорость её центра масс  $\vec{v}_{ц.м}$ .

Если продифференцировать обе части равенства по времени, то при условии, что  $M$  постоянна, получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{ц.м}}{dt} = M \vec{a}_{ц.м} = \vec{F}^{внешн}, \quad (5.6.5)$$

где  $\vec{F}^{внешн}$  – внешняя результирующая сила, приложенная к системе. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса.

Важным примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса  $M$  ракеты все время уменьшается, т.е.  $dM/dt < 0$ .

Другим примером систем с переменной массой может служить погрузка сыпучих или иных материалов на транспортерную ленту конвейера; при этом масса  $M$  нагруженного конвейера возрастает, т.е.  $dM/dt > 0$ .

Рассмотрим движение тел с переменной массой на примере ракеты.

Реактивное движение основано на *принципе отдачи*. В ракете при сгорании топлива газы, нагретые до высокой температуры, выбрасываются из сопла с большой скоростью  $v_r$ . Ракета и выбрасываемые газы взаимодействуют между собой по закону сохранения импульса:  $m_p v_p = m_r v_r$ .

На основании этого закона конечная скорость ракеты

$$v_p = -v_r \ln\left(\frac{M_0}{M}\right), \quad (5.6.6)$$

где  $v_r$  – относительная скорость выбрасываемых газов,  $M_0$  и  $M$  – начальная и конечная массы ракеты. Это соотношение в физике называют *формулой Циолковского*. Из него следует, что для достижения скорости  $v$ , в 4 раза превышающей по модулю относительную скорость выбрасываемых газов, стартовая масса одноступенчатой ракеты должна примерно в 50 раз превышать ее конечную массу.

# Тема:

# ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## План:

1. Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки
2. Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси
3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел. Теорема Штейнера
4. Кинетическая энергия вращающегося тела
5. Закон сохранения момента импульса
6. Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени
7. Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения

# 1. Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

Рассмотрим твердое тело, как некую систему (рис. 6.1), состоящую из  $n$  точек ( $m_1, m_2, \dots, m_n$ );  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор  $i$ -й точки, проведенный из точки  $O$  – центра неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим  $\vec{F}_i$  – внешняя сила, действующая на  $i$ -ю точку,  $\vec{F}_{ik}$  – сила действия со стороны  $k$ -й точки на  $i$ -ю.

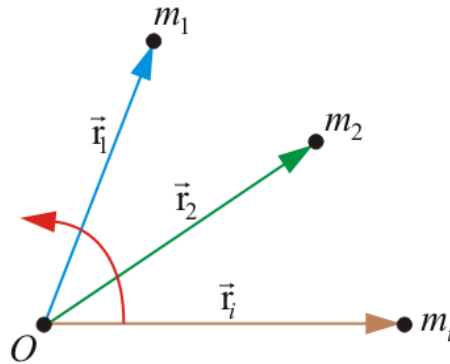


Рис. 6.1

Запишем основное уравнение динамики для точки (см. п. 3.6):

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на  $\vec{r}_i$ :

$$\left[ \vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right] = \left[ \vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik} \right] + \left[ \vec{r}_i, \vec{F}_i \right].$$

Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_k [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Векторное произведение  $\vec{r}_i$  точки на её импульс называется **моментом импульса (количества движения)**  $\vec{L}_i$  этой точки относительно точки  $O$ .

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]. \tag{6.1.1}$$

Эти три вектора образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика» (рис. 6.2).

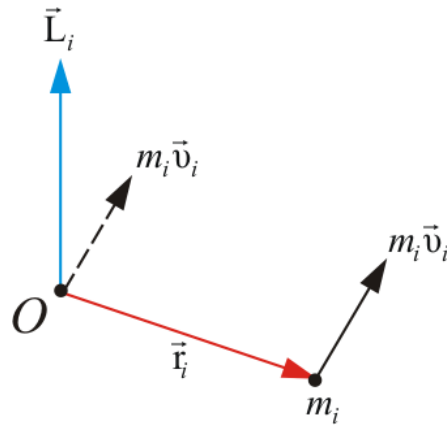


Рис. 6.2

Векторное произведение  $\vec{r}_i$ , проведенного в точку приложения силы, на эту силу, называется **моментом силы**  $\vec{M}_i$ :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \quad (6.1.2)$$

Обозначим  $l_i$  – плечо силы  $F_i$ , (рис. 6.3). Т.к.  $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$ , то

$$|\vec{M}_i| = F_i r_i \sin \alpha = F_i l_i. \quad (6.1.3)$$

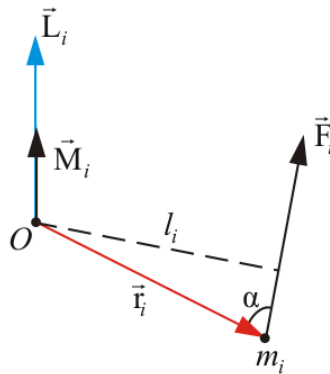


Рис. 6.3

С учетом новых обозначений:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i. \quad (6.1.4)$$

Запишем систему  $n$  уравнений для всех точек системы и сложим их левые и правые части:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

Здесь сумма производных равна производной суммы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

где  $\vec{L}$  – момент импульса системы,  $\vec{M}$  – результирующий момент всех внешних сил относительно точки  $O$ .

Так как

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} = 0.$$

Отсюда получим **основной закон динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг точки.**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}. \quad (6.1.5)$$

Момент импульса системы  $\vec{L}$  является основной динамической характеристикой вращающегося тела.

Сравнивая это уравнение с основным уравнением динамики поступательного движения (3.6.1), мы видим их внешнее сходство.

## 2. Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

Описанное нами движение твердого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения. Однако вычислить вектор  $\vec{L}$  – момент импульса системы относительно произвольной точки – не просто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).

Значительно проще найти момент импульса  $\vec{L}$  тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $z$  (рис. 6.4). В этом случае составляющие  $\vec{M}$  – моменты внешних сил, направленные вдоль  $x$  и  $y$ , *компенсируются моментами сил реакции закрепления*. Вращение вокруг оси  $z$  происходит только под действием  $\vec{M}_z$ .

Пусть некоторое тело вращается вокруг оси  $z$  (рис. 6.5).

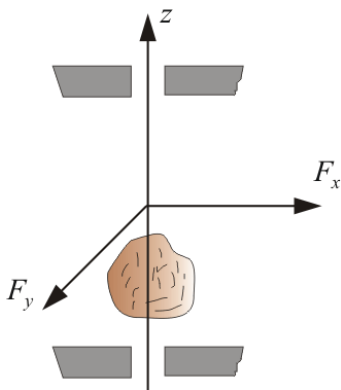


Рис. 6.4

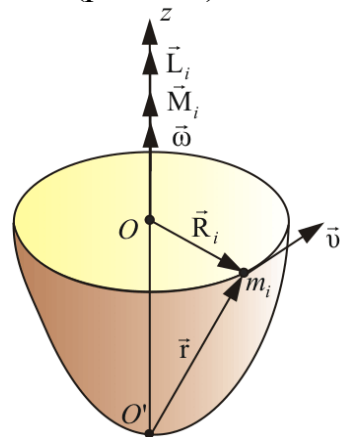


Рис. 6.5

Получим уравнение динамики для некоторой точки  $m_i$  этого тела, находящегося на расстоянии  $R_i$  от оси вращения. При этом помним, что  $\vec{L}_z$  и  $\vec{M}_z$  направлены всегда вдоль оси вращения  $z$ , поэтому в дальнейшем опустим индекс  $z$ .

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i; \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}[\vec{R}, m_i \vec{v}] = \vec{M}_i$$



Поскольку  $\vec{v}_i$  у всех точек разная, введем вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$ , причем  $\vec{v} = \frac{v}{R} \vec{R}$ . Тогда  $\frac{d}{dt}(m_i R_i^2 \vec{\omega}) = \vec{M}_i$ .

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения  $m_i$  и  $R_i$  останутся неизменными. Тогда

$$m_i R_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i.$$

Обозначим  $I_i$  – **момент инерции** точки находящейся на расстоянии  $R$  от оси вращения:

$$I_i = m_i R_i^2. \quad (6.2.1)$$

*Момент инерции тела служит мерой инертности во вращательном движении.*

В общем случае тело состоит из огромного количества точек, и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения. *Момент инерции* такого

тела равен: 
$$I = \int_0^m R^2 dm, \quad (6.2.2)$$

Как видно, момент инерции  $I$  – величина скалярная.

Просуммировав (6.2.1) по всем  $i$ -м точкам, получим  $I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$  или

$$I \vec{\varepsilon} = \vec{M}. \quad (6.2.3)$$

Это **основное уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси**. (Сравним:  $m\vec{a} = \vec{F}$  – основное уравнение динамики поступательного движения тела).

Для **момента импульса**  $\vec{L}$  тела, вращающегося вокруг оси  $z$ , имеем:

$$\begin{aligned} I d\vec{\omega} &= \vec{M} dt; & I d\vec{\omega} &= d\vec{L}; \\ \vec{L} &= I \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

(Сравним:  $\vec{p} = m\vec{v}$  – для поступательного движения).

При этом помним, что  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$  динамические характеристики вращательного движения, направленные всегда вдоль оси вращения. Причем  $\vec{L}$  определяется направлением вращения, как и  $\vec{\omega}$ , а направление  $\vec{M}$  – зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

### 3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел. Теорема Штейнера

По формуле  $I = \int_0^m R^2 dm$  не всегда просто удается рассчитать момент инерции тел произвольной формы.

Наиболее легко эта задача решается для тел простых форм, вращающихся вокруг оси, проходящей через центр инерции тела  $C$ . В этом случае, при вычислении  $I_c$  по формуле (6.2.1), появляется коэффициент  $k$ :

$$I_c = kmR^2.$$

Моменты инерции шара, диска, стержня приведены на рис. 6.6.

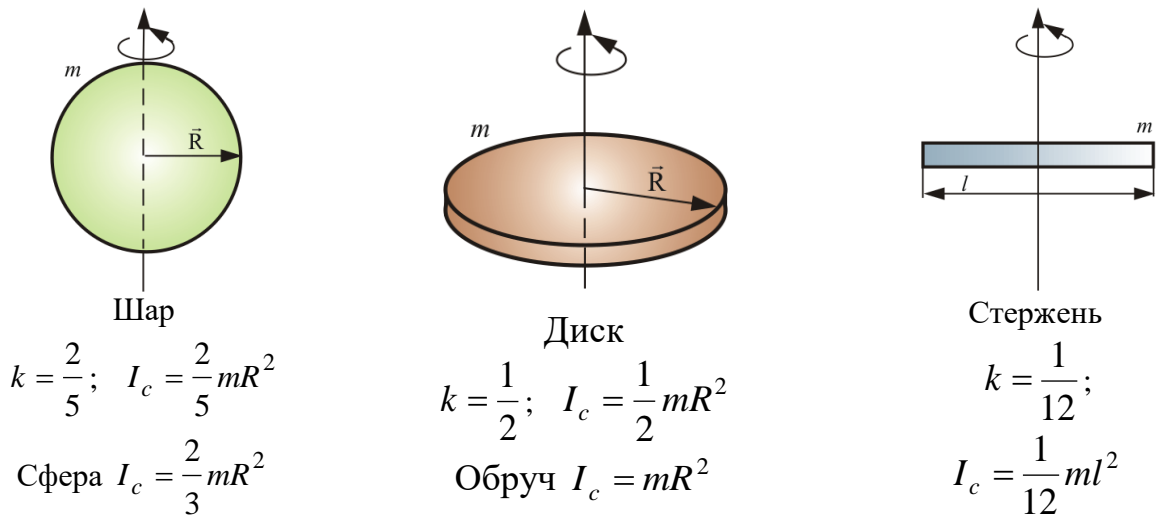
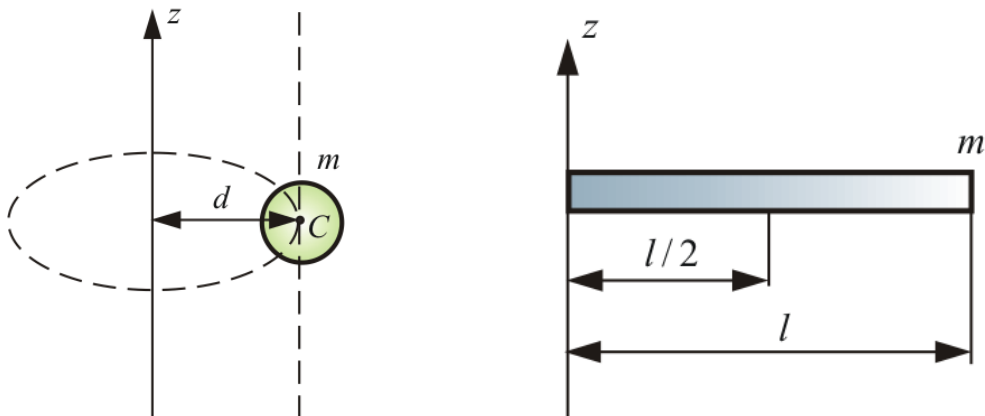


Рис. 6.6

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции (рис. 6.7), следует пользоваться *теоремой о параллельном переносе осей*, или **теоремой Штейнера** (Якоб Штейнер, швейцарский геометр, 1796–1863 гг.):

$$I = I_c + md^2. \quad (6.3.1)$$

Момент инерции тела  $I$  относительно любой оси вращения равен моменту его инерции  $I_c$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



Например: стержень массой  $m$  длиной  $l$  вращается вокруг оси, проходящей через конец стержня (рис. 6.8).

$$I_c = \frac{1}{12} ml^2,$$

$$I_z = I_c + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

#### 4. Кинетическая энергия вращающегося тела

*Кинетическая энергия* – величина аддитивная. Поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех  $n$  материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (6.4.1)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , то линейная скорость  $i$ -й точки  $\vec{v}_i = \vec{\omega} R_i$ ,  $R_i$  – расстояние до оси вращения. Следовательно,

$$K_{\text{вращ}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (6.4.2)$$

Сопоставив (6.4.1) и (6.4.2), можно увидеть, что момент инерции тела  $I$  является *мерой инертности при вращательном движении*, так же как масса  $m$  – *мера инерции при поступательном движении*.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений – поступательного со скоростью  $v_c$  и вращательного с угловой скоростью  $\omega$  вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия этого тела

$$K_{\text{полн}} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (6.4.3)$$

Здесь  $I_c$  – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

#### 5. Закон сохранения момента импульса

Для замкнутой системы тел момент внешних сил  $\vec{M}$  всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему.

Поэтому  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv 0$ , то есть

$$\vec{L} = \text{const} \quad \text{или} \quad I\vec{\omega} = \text{const}.$$

**Закон сохранения момента импульса:** момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки **не изменяется** с течением времени.

Это один из фундаментальных законов природы.

Аналогично для замкнутой системы тел, вращающихся вокруг оси  $z$ :

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \equiv 0, \quad \text{отсюда} \quad \vec{L}_z = \text{const}, \quad \text{или} \quad I_z \vec{\omega} = \text{const}.$$

Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тождественно равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

Момент импульса и для незамкнутых систем постоянен, если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.

Очень нагляден закон сохранения момента импульса в опытах с уравновешенным **гироскопом** – быстро вращающимся телом, имеющим три степени свободы (рис. 6.9).



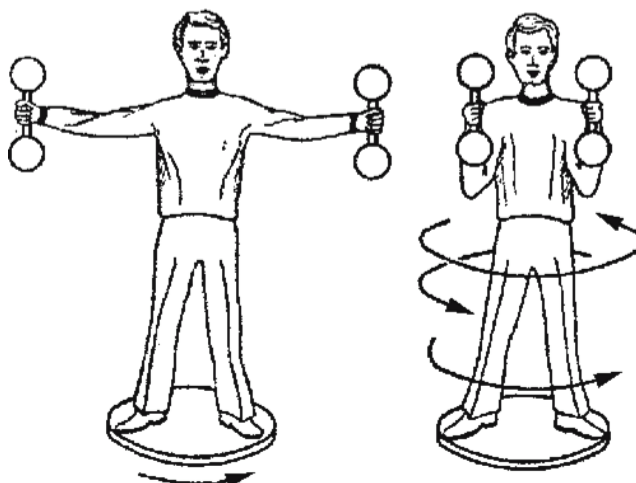
Рис. 6.9



Рис. 6.10

Используется гироскоп в различных навигационных устройствах кораблей, самолетов, ракет (гироскоп, гироскоп, гироскоп). Один из примеров навигационного гироскопа изображен на рис. 6.10.

Именно закон сохранения момента импульса используется танцорами на льду для изменения скорости вращения. Или еще известный пример – скамья Жуковского (рис. 6.11).



## Рис. 6.11

*Изученные нами законы сохранения есть следствие симметрии пространства-времени.*

Принцип симметрии был всегда путеводной звездой физиков, и она их не подводила.

Но вот в 1956 г. Ву Цзянь, обнаружил асимметрию в слабых взаимодействиях: он исследовал  $\beta$ -распад ядер изотопа  $\text{Co}^{60}$  в магнитном поле и обнаружил, что число электронов, испускаемых вдоль направления магнитного поля, не равно числу электронов, испускаемых в противоположном направлении.

В этом же году Л. Ледерман и Р. Гарвин (США) обнаружили нарушение симметрии при распаде пионов и мюонов.

Эти факты означают, что законы слабого взаимодействия не обладают зеркальной симметрией.

## **6. Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени**

В предыдущих разделах рассмотрены *три фундаментальных закона природы: закон сохранения импульса, момента импульса и энергии*. Следует понимать, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета.

В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а они применимы только в инерциальных системах. Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если система *замкнутая* (сумма всех внешних сил и всех моментов сил равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно – тело должно быть еще и *адиабатически изолированным* (т.е. не участвовать в теплообмене).

Во всей истории развития физики законы сохранения оказались чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

1. *В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени*, т. е. равнозначность всех моментов времени (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени). Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени  $t_1$  на момент времени  $t_2$ , без изменения значений координат и скорости частиц, не изменяет механические свойства системы. Это означает то, что после указанной замены, координаты и скорости частиц имеют в любой момент времени  $t_2 + t$  такие же значения, какие имели до замены, в момент времени  $t_1 + t$ .

**2. В основе закона сохранения импульса** лежит **однородность пространства**, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках (симметрия по отношению к сдвигу начала координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое, без изменения взаимного расположения и скоростей частиц, не изменяет механические свойства системы.

**3. В основе закона сохранения момента импульса** лежит **изотропия пространства**, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям (симметрия по отношению к повороту осей координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы, как целого, не отражается на её механических свойствах.

Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

*Таким образом, законы сохранения проявляются как **принципы запрета**: любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.*

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадется на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распасться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

*Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы*

в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

## 7. Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения

Основные величины и уравнения кинематики и динамики вращательного движения легко запоминаются, если сопоставить их с величинами и уравнениями поступательного движения (см. табл. 6.1).

Таблица 6.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	$S$	Угол поворота	$\varphi$
Скорость	$v = \frac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$ $v = v_0 \pm at$ $S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t v dt$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega dt$
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{v} = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \text{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Энергия тела, катящегося с высоты $h$			
$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$			

Тема:

# Механические колебания

## План:

- 1.1. Виды и признаки колебаний
- 1.2. Параметры гармонических колебаний
- 1.3. Графики смещения скорости и ускорения
- 1.4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний
- 1.5. Энергия гармонических колебаний
- 1.6. Гармонический осциллятор
  
- 2.1. Способы представления гармонических колебаний
- 2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения
- 2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний
- 2.4. Фигуры Лиссажу (частные случаи)
  
- 3.1. Свободные затухающие механические колебания
- 3.2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания
- 3.3. Вынужденные механические колебания
- 3.4. Автоколебания



## 1.1. Виды и признаки колебаний

В физике особенно выделяют колебания двух видов – *механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации*, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека. Так, механические колебания плотности воздуха воспринимаются нами как звук, а быстрые электромагнитные колебания – как свет. С помощью звука и света мы получаем основную часть информации об окружающем нас мире. Для колебаний характерно *превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.*

**Колебательным движением** (или просто колебанием) называются процессы, отличающиеся той или иной степенью **повторяемости во времени**.

Не смотря на большое число колебательных явлений встречающихся в нашей жизни (звук, свет, радиоволны), существуют общие закономерности этих явлений. Поэтому основные, учения о *механических колебаниях*, которые мы рассматриваем здесь, должны стать фундаментом для изучения любых видов колебаний.

Итак, различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями.

Говоря о колебаниях или осцилляциях тела, мы подразумеваем повторяющееся движение его туда и обратно по одной и той же траектории. Иными словами такое движение является *периодическим*. Простейшим примером периодического движения служат *колебания груза на конце пружины*. Многие другие виды колебательных движений проявляют большое сходство с этими колебаниями; поэтому мы разберем этот пример подробно. Будем считать, что массой пружины можно пренебречь, и что пружина установлена горизонтально, как показано на рисунке 1.1, а.

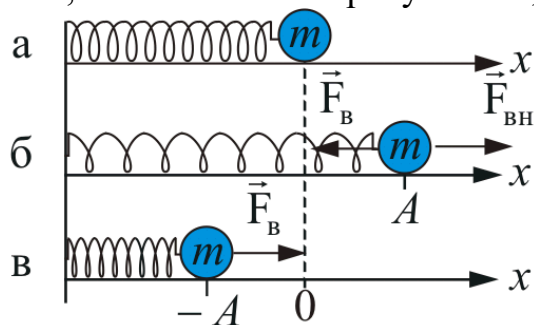


Рисунок 1.1

К одному концу пружины прикреплен груз массой  $m$ , который движется без трения по горизонтальной поверхности. Любая пружина имеет определенное значение длины, при котором с ее стороны на груз не действует сила; в этом случае говорят, что пружина находится в *положении равновесия* ( $x=0$ ). Если сдвинуть груз вправо, растягивая пружину, или влево, сжимая ее, то пружина действует на груз с силой  $F_B$ , которая стремится вернуть его в положение равновесия; такую силу называют *возвращающей*. Для нашей

системы сила  $F_B$  прямо пропорциональна расстоянию  $x$ , на которое сжимается или растягивается пружина:

$$F_B = -kx. \quad (1.1.1)$$

Формула (1.1.1) справедлива до тех пор, пока пружина не сжимается настолько, что ее витки приходят в соприкосновение или не растягиваются сверх предела упругости. Знак минус означает, что возвращающая сила, всегда противоположна направлению перемещения  $x$ .

Постоянная  $k$  в формуле (1.1.1) называется *жесткостью пружины*. Для того чтобы растянуть пружину на длину  $x$ , к ней надо приложить внешнюю силу, равную, по меньшей мере

$$F_{\text{вн}} = +kx.$$

Что же произойдет, если пружину растянуть на длину  $x = A$ , как показано на рисунке 1.1, б, и затем отпустить. Пружина действует на груз с силой, которая стремится вернуть её в положение равновесия. Но поскольку эта сила сообщает грузу ускорение, груз приходит в положение равновесия со значительной скоростью. Заметим, что в положении равновесия сила, действующая на груз, уменьшается до нуля, а скорость его в этой точке максимальна. Когда груз, проскочив положение равновесия, движется влево, сила со стороны пружины замедляет его в точке  $x = -A$  (рисунок 1.1, в). Груз на мгновение останавливается, а затем начинает двигаться в противоположном направлении, пока не придет в точку  $x = A$ , откуда он начал движение. Затем весь этот процесс повторяется.

Из приведенного примера следуют *три признака колебательного движения*:

- **повторяемость (периодичность)** – движение по одной и той же траектории туда и обратно;

- **ограниченность** пределами крайних положений;

- **действие силы**, описываемой функцией  $F = -kx$ .

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются, так называемые, **гармонические колебания**.

Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например,  $F = -kx$ ), совершает **гармонические колебания**. Самую такую систему часто называют **гармоническим осциллятором**. Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

- колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, *близкий к гармоническому*;

- различные *периодические процессы* (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как *наложение гармонических колебаний*.

Периодический процесс можно описать уравнением:

$$f(t) = f(t + nT).$$

По определению, колебания называются *гармоническими*, если зависимость некоторой величины  $x = f(t)$  имеет вид

$$x = A \sin \varphi \text{ или } x = A \cos \varphi. \quad (1.1.2)$$

Здесь синус или косинус используются в зависимости от условия задачи,  $A$  и  $\varphi$  – параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.

## 1.2. Параметры гармонических колебаний

Для изучения колебательного движения нам придется ввести несколько терминов – *параметров колебательного движения*.

Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют *смещением*  $x$ . *Максимальное смещение* – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется *амплитудой* и обозначается, буквой  $A$ .

Выражение, стоящее под знаком синуса или косинуса в формуле (1.1.2)  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , определяет смещение  $x$  в данный момент времени  $t$  и называется *фазой колебания*. При  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , поэтому  $\varphi_0$  называется *начальной фазой колебания*. Фаза измеряется в радианах и определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени.

Т.к. синус и косинус изменяются в пределах от  $+1$  до  $-1$ , то  $x$  может принимать значения от  $+A$  до  $-A$  (рисунок 1.2).

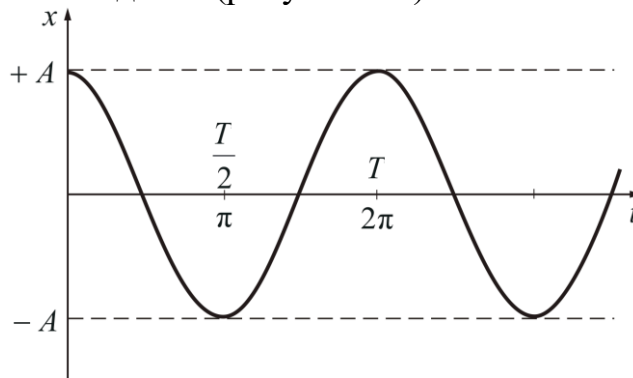


Рисунок 1.2

Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от  $x = A$  к  $x = -A$  и обратно в  $x = A$ , называется *полным колебанием*. *Частота колебаний*  $\nu$  определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен 1 полному колебанию в секунду. Очевидно, что

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.2.1)$$

$T$  – *период колебаний* – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}. \quad (1.2.3)$$

$\omega$  – **циклическая (круговая) частота** – число полных колебаний за  $2\pi$  секунд.

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.2.2)$$

Заметим, что фаза  $\varphi$  не влияет на форму кривой  $x(t)$ , а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени  $t$ .

Например, при  $\varphi_0 = 0$  мы имеем  $x(t) = A \cos \omega t$ , как на рисунке 1.2, а при  $\varphi_0 = -\pi/2$ ,  $x(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin \omega t$ , т.е. мы имеем чистую синусоиду. Таким образом, *гармонические колебания являются всегда синусоидальными*.

Кроме того, заметим, что частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды. Изменяя амплитуду колебаний груза на пружине, мы не изменяем частоту колебаний этой системы.

Колебания характеризуются не только смещением, но и **скоростью**  $v_x$  и **ускорением**  $a_x$ .

Если смещение описывается уравнением  $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$  то, по определению

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.2.4)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.2.5)$$

В этих уравнениях  $v_m = \omega A$  – *амплитуда скорости*;  $a_m = -\omega^2 A$  – *амплитуда ускорения*.

Из уравнений (1.2.4) и (1.2.5) видно, что скорость и ускорение так же являются гармоническими колебаниями.

### 1.3. Графики смещения скорости и ускорения

Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

- *скорость колебаний тела максимальна и, по абсолютной величине, равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия ( $x = 0$ ). При максимальном смещении ( $x = \pm A$ ) скорость равна нулю;*

- *ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.*

Ускорение всегда направленно к положению равновесия, поэтому, удаляясь от положения равновесия, тело движется замедленно, приближаясь к нему –

ускоренно. Ускорение всегда прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения. Все эти выводы могут служить определением гармонического колебания.

Графики смещения скорости и ускорения гармонических колебаний, приведены на рисунке 1.3.

Начальная фаза  $\varphi_0$  определяется из начальных условий конкретной задачи (точно так же, как и амплитуда  $A$ ).

Найдем разность фаз  $\Delta\varphi$  между фазами смещения  $x$  и скорости  $v_x$ . Для этого воспользуемся (1.3.1):

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\varphi_x \\ v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) = v_m \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) = v_m \sin\varphi_v \end{cases}$$

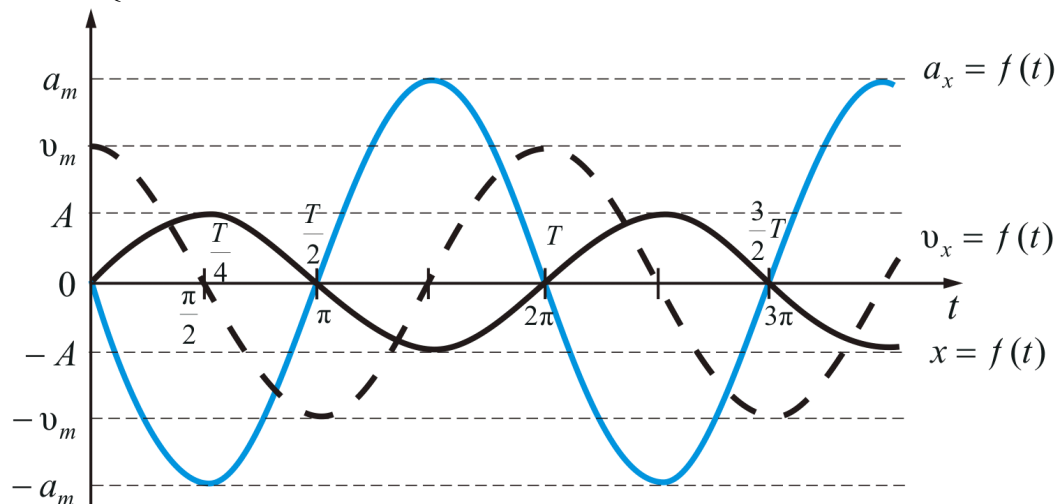


Рисунок 1.3

Отсюда видно, что

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_v = \pi/2, \quad (1.3.2)$$

то есть скорость опережает смещение на  $\pi/2$ .

Аналогично можно показать, что ускорение в свою очередь опережает скорость по фазе на  $\pi/2$ :

$$a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) = a_m \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi) = a_m \sin\varphi_a,$$

т.к.  $-\sin\alpha = \sin(\pi + \alpha)$ , то  $\varphi_a - \varphi_v = \omega t + \varphi_0 + \pi - \omega t - \varphi_0 - \pi/2 = \pi/2$ , или

$$\varphi_v - \varphi_a = -\pi/2. \quad (1.3.3)$$

Тогда ускорение опережает смещение на  $\pi$ , или

$$\varphi_x - \varphi_a = -\pi, \quad (1.3.4)$$

то есть, смещение и ускорение находятся в противофазе. Все выше изложенное хорошо иллюстрируется рисунком 1.3.

## 1.4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний

Второй закон Ньютона позволяет, в общем виде, записать связь между силой и ускорением, при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой  $m$ .

Т.к., исходя из второго закона  $F = ma$ , то можно записать

$$F_x = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x, \quad (1.4.1)$$

где  $F_x$  – проекция силы на направление  $x$ . Из (1.4.1) следует, что сила  $F$  пропорциональна  $x$  и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют возвращающей силой). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Примером сил удовлетворяющих (1.4.1) являются *упругие силы*. Силы же имеющие иную природу, но удовлетворяющие (1.4.1) называются *квазиупругими*. Квазиупругая сила

$$F_x = -kx, \quad (1.4.2)$$

где  $k$  – коэффициент квазиупругой силы.

Сравнивая (1.4.1) и (1.4.2) видим, что  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

В случае прямолинейных колебаний вдоль оси  $x$ , проекция ускорения на эту ось  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Подставив выражения для  $a_x$  и  $F_x$  во второй закон Ньютона, получим **основное уравнение динамики гармонических колебаний**, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{тогда}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.4.3)$$

Решение этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

т.е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является *гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону*.

Круговая частота незатухающих колебаний  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , но, т.к.  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  тогда

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{откуда}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1.4.4)$$

то есть чем больше жесткость пружины  $k$ , тем меньше период (больше частота), а чем больше масса, тем период колебаний больше.

## 1.5. Энергия гармонических колебаний

Вычислим энергию тела массой  $m$ , совершающего гармонические колебания с амплитудой  $A$  и круговой частотой  $\omega$  (рисунок 1.1).

**Потенциальная энергия тела**  $U$ , смещенного на расстояние  $x$  от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила  $F_x = -kx$ , перемещая тело в положение равновесия.

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \quad dU = -Fdx = kxdx, \quad \text{отсюда } U = k \int_0^x xdx, \quad \text{или}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}, \quad (1.5.1)$$

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.5.2)$$

**Кинетическая энергия**

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.5.3)$$

Заменяя в (1.5.2)  $k = m\omega^2$  и сложив почленно уравнения (1.5.2) и (1.5.3), получим выражение для **полной энергии**:

$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2, \quad \text{или}$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (1.5.4)$$

*Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.*

В случае свободных незатухающих колебаний полная энергия не зависит от времени, поэтому и амплитуда  $A$  – не зависит от времени.

Из (1.5.2) и (1.5.3) видно что и потенциальная  $U$ , и кинетическая  $K$  энергии пропорциональны квадрату амплитуды  $A^2$ .

Рассмотрим колебания груза под действием сил тяжести (квазиупругих сил) (рисунок 1.4).

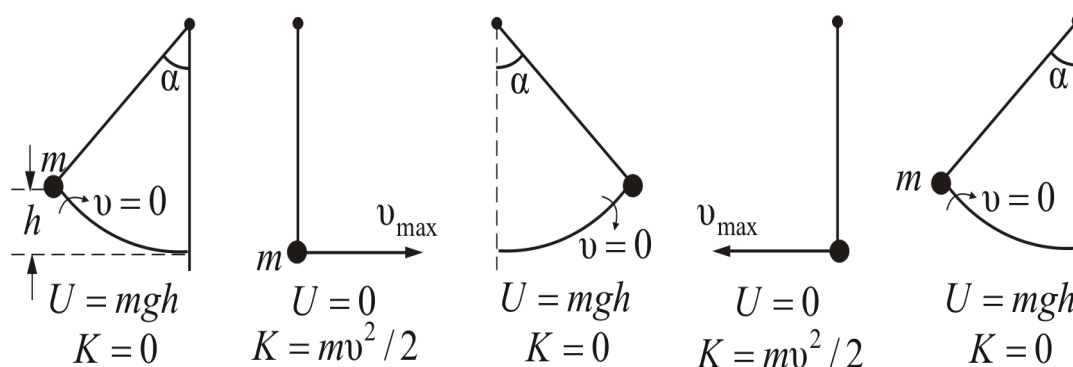


Рисунок 1.4

Из рисунка 1.3 и из формул (1.5.2) и (1.5.3) видно, что  $U$  и  $K$  изменяются периодически (при свободных незатухающих колебаниях). Однако период изменения энергии в два раза меньше чем период изменения смещения скорости и ускорения. Это значит, что кинетическая и потенциальная энергия изменяются с частотой, которая в два раза превышает частоту смещения

гармонического колебания. За время одного полного колебания  $U$  и  $K$  дважды достигают свои максимальные значения и дважды обращаются в нуль. Связанно это с тем, что и  $U$  и  $K$  пропорциональны квадрату косинуса и синуса фазы колебаний.

Максимум потенциальной энергии (1.5.2),  $U_{\max} = mgh = \frac{1}{2}kA^2$ .

Максимум кинетической энергии  $K_{\max} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2$ , но когда  $K = \max$ ,  $U = 0$  и наоборот. На рисунке 1.5 представлены графики зависимости  $x$ ,  $U$  и  $K$  от времени  $t$ .

При колебаниях совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их сумма в любой момент времени постоянна.

На рисунке 1.6 приведена кривая потенциальной энергии.

Горизонтальная линия соответствует определенному значению полной энергии  $E = \frac{1}{2}kA^2$ . Расстояние от этой линии до кривой равно кинетической энергии, а движение ограничено значениями  $x$ , заключенными в пределах от  $+A$  до  $-A$ . Эти результаты, полностью согласуются с полным решением уравнения движения.

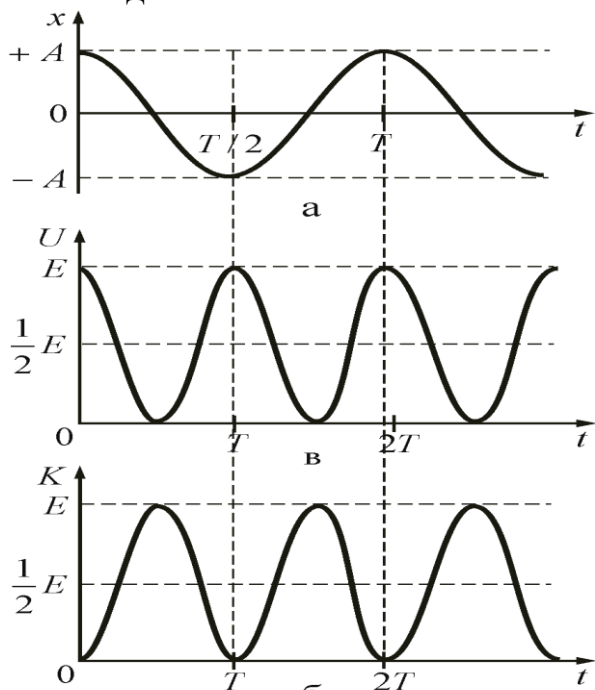


Рисунок 1.5

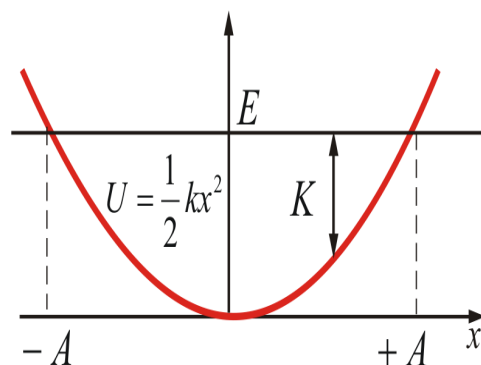


Рисунок 1.6

## 1.6. Гармонические осцилляторы

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического



осциллятора являются *пружинный, математический и физический маятники*, а также *колебательный контур* (для малых токов и напряжений).

• **Пружинный маятник** – это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью  $k$ , совершающий гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$  (рисунок 1.7).

Уравнение движения маятника

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0. \quad (1.6.1)$$

Из сравнения выражений (1.4.3) и (1.4.6) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  с циклической частотой  $\omega$  и периодом  $T$ , где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

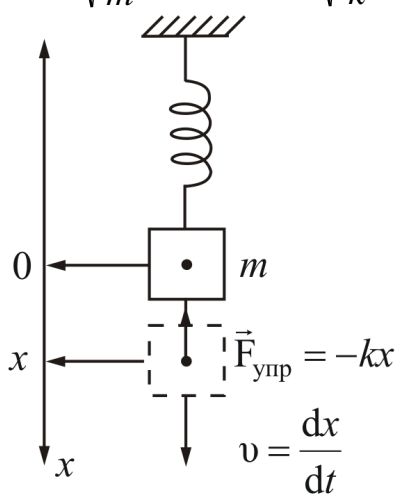


Рисунок 1.7

Эти формулы справедливы для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука, т.е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела и ее деформация не превышает предел упругости.

• **Математическим маятником** – называется идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (шарик на длинной тонкой нити) (рисунок 1.8).

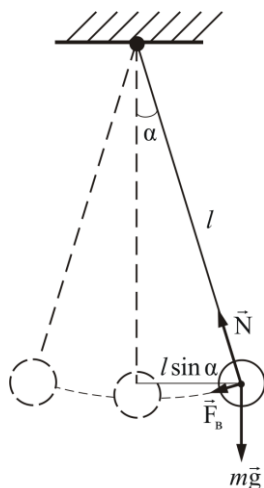


Рисунок 1.8

Рассмотрим условия, при которых колебания маятника являются гармоническими.

Отклонения маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\alpha$ , образованным нитью с вертикалью.

При отклонении маятника от вертикали, возникает вращающий момент, модуль которого  $|\vec{M}| = mgl \sin \alpha$ . Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия и в этом отношении он аналогичен квазиупругой силе. Поэтому можно записать

$$M = -mgl \sin \alpha. \quad (1.6.2)$$

Уравнение динамики вращательного движения для маятника:  $M = J\varepsilon$ , где  $J = ml^2$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  – угловое ускорение.

$$\text{Тогда } ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha, \text{ или } \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$$

Рассмотрим колебания с *малой амплитудой*, т.е.  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и введем обозначение  $\frac{g}{l} = \omega^2$ . Тогда получим **уравнение движения маятника**:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0. \quad (1.6.3)$$

А это есть *уравнение динамики гармонических колебаний*. Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.6.4)$$

Следовательно, *при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется во времени по гармоническому закону*.

Циклическая частота колебаний  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T}$ , тогда период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.6.5)$$

Т.е. период  $T$  – *зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения*.

• **Физический маятник** – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , не совпадающую с центром масс  $C$  (рисунок 1.9)

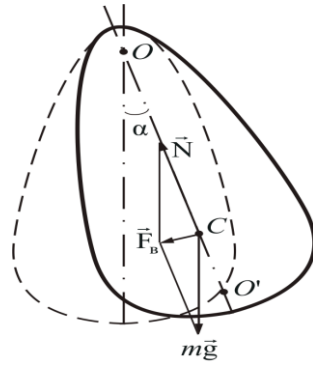


Рисунок 1.9

При отклонении этого тела от положения равновесия на угол  $\alpha$ , также возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl \sin \alpha,$$

где  $l$  – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника  $C$ .

Обозначим через  $J$  – момент инерции маятника относительно точки подвеса  $O$ , тогда

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha. \quad (1.6.6)$$

В случае малых колебаний ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ) уравнение (1.6.6) переходит в известное нам уравнение  $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0$ . Его решение нам известно:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ где } \omega^2 = \frac{mgl}{J}.$$

Из (1.6.6) следует, что физический маятник, при малых отклонениях, также совершает гармонические колебания, частота которых, кроме того, зависит от массы и момента инерции маятника. Аналогично (1.6.5) получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (1.6.7)$$

Величину момента инерции  $J$  иногда бывает трудно вычислить. Сопоставляя (1.6.5) и (1.6.7) получим, что физический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}, \quad (1.6.8)$$

будет иметь такой же период колебаний, как и математический:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \quad (1.6.9)$$

где  $l_{\text{пр}}$  – *приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка  $O'$  на продолжении прямой  $OC$ , отстоящая от точки подвеса  $O$  на расстоянии приведенной длины  $l_{\text{пр}}$ , называется *центром качаний* физического маятника. Применяя теорему Штейнера, получим

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = \frac{J_C}{ml} + l > l,$$

т.е.  $l_{\text{пр}}$  всегда больше  $l$ . Точки  $O$  и  $O'$  всегда будут лежать по обе стороны от точки  $C$ .

Точка подвеса  $O$  маятника и центр качаний  $O'$  обладают *свойством взаимозаменяемости*: если маятник *перевернуть* и подвесить за точку  $O'$ , то прежняя точка  $O$  станет центром качаний, и период колебаний физического маятника не изменится.

На этом свойстве основано определение ускорения силы тяжести  $g$  с помощью так называемого *оборотного маятника*. Это такой маятник, у которого имеются две точки подвеса и два груза, которые могут перемещаться вдоль оси маятника. Перемещением грузов добиваются того, что расстояние между точками подвеса будет соответствовать  $l_{\text{пр}}$ . Тогда, измерив период  $T$  и  $l_{\text{пр}}$ , легко рассчитать  $g$ , используя формулу (1.6.9).

Рассматривая физический и математический маятники, мы все время подчеркивали, что они совершают гармонические колебания при малых отклонениях, т.е. когда длина дуги  $x = l\alpha$  очень мало отличается от длины хорды  $l \sin \alpha$ , это справедливо для углов меньше  $15^\circ$ , для которых значения  $\alpha$  и  $\sin \alpha$  различаются меньше чем на 1%.

## 2.1. Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

- аналитический:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0); \quad v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi_0); \quad a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0);$$

- графический (рисунки 1.2 и 1.3);

- геометрический, с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм).

Рассмотрим подробнее последний способ (рисунок 2.1).

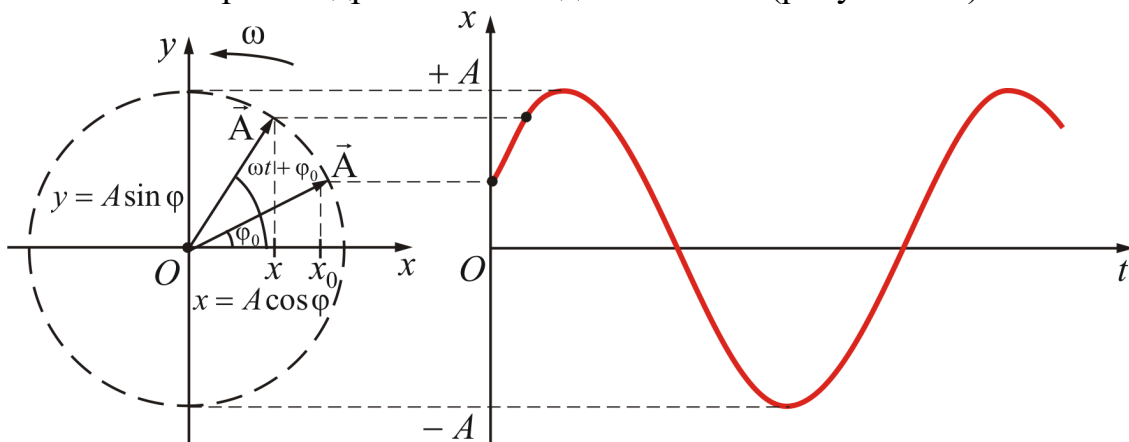


Рисунок 2.1

Пусть гармоническое колебание описывается уравнением  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Проведем прямую  $Ox$  (опорную) и построим вектор  $\vec{A}$  направленный из точки  $O$  под углом  $\varphi_0$  к опорной линии.

Обозначим  $x_0$  – проекция вектора  $\vec{A}$  на опорную линию в момент времени  $t = 0$ :

$$x_0 = A \cos \varphi_0.$$

Вращение происходит против часовой стрелки, т.е.  $\omega > 0$ . За промежуток времени  $t$  вектор амплитуды повернется на угол  $\omega t$  и займет новое положение. Его проекция на опорную линию равна  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . За время равное периоду колебаний  $T$ , вектор амплитуды повернется на угол  $2\pi$ , и проекция вектора совершит полное колебание около положения равновесия (точка  $O$ ). Следовательно, *вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.*

Проекция кругового движения на ось  $y$ , также совершает гармоническое колебание  $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ . Таким образом, равномерное движение по окружности можно рассматривать как два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Этим представлением широко пользуются при сложении колебаний.

## 2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.

Сложение колебаний будем проводить методом векторных диаграмм (рисунок 2.2). Пусть колебания заданы уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (2.2.1)$$

Такие два колебания называются *когерентными*. Их разность фаз не зависит от времени ( $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ ).

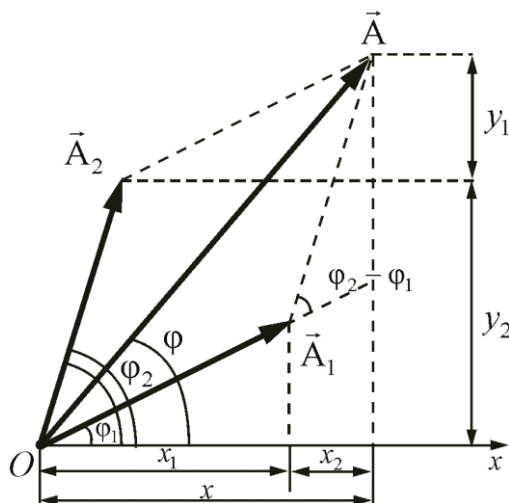


Рисунок 2.2

Отложим из точки  $O$  вектор  $\vec{A}_1$  под углом  $\varphi_1$  к опорной линии, и вектор  $\vec{A}_2$  под углом  $\varphi_2$ . Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , поэтому разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  всегда постоянна.

Нам известно, что суммарная проекция вектора  $\vec{A}$  равна сумме проекций на эту же ось. Поэтому результирующее колебание может быть изображено вектором амплитуды  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ , вращающимся вокруг точки  $O$  с той же угловой скоростью  $\omega$ , что и  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ . Результирующее колебание должно быть также гармоническим с частотой  $\omega$ :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду:

$$\begin{aligned} A^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = \\ &= A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2A_1A_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2 + A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \\ &\quad + 2A_1A_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right] = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Окончательно, результирующую амплитуду найдем по формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2.2.2)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \quad (2.2.3)$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Из (2.2.2) следует, что амплитуда  $A$  результирующего колебания зависит от разности начальных фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Возможные значения  $A$  лежат в диапазоне  $|A_2 - A_1| \leq A \leq A_2 + A_1$  (амплитуда не может быть отрицательной).

**Рассмотрим несколько простых случаев.**

1. *Разность фаз равна нулю или четному числу  $\pi$* , то есть  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$  и

$$A = A_1 + A_2, \quad (2.2.4)$$

так как  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$ , т.е. амплитуда результирующего колебания  $A$  равна сумме амплитуд складываемых колебаний (колебания *синфазны*) (рисунок 2.3).

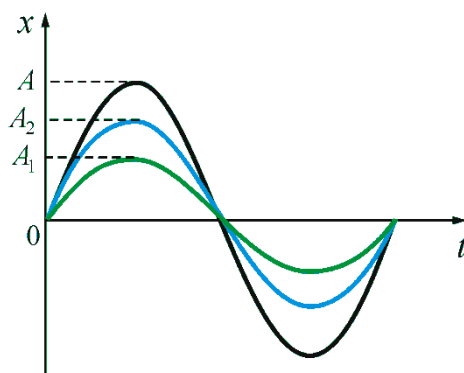


Рисунок 2.3

2. Разность фаз равна нечетному числу  $\pi$ , то есть  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n + 1)$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ . Отсюда

$$A = |A_2 - A_1|. \quad (2.2.5)$$

На рисунке 2.4 изображена амплитуда результирующего колебания  $A$  равная разности амплитуд складываемых колебаний (колебания в противофазе).

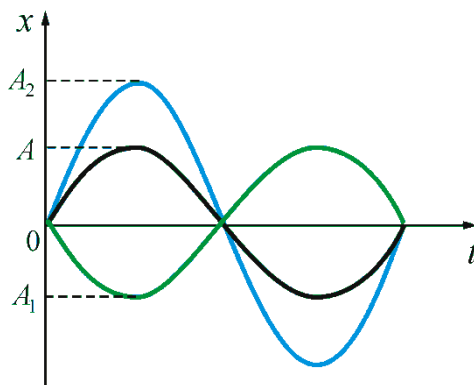


Рисунок 2.4

3. Разность фаз изменяется во времени произвольным образом:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)] \\ x_2 = A_2 \cos[\omega_2 t + \varphi_2(t)] \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Из уравнения (2.2.6) следует, что  $A \neq \text{const}$ , а будет изменяться в соответствии с величиной  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Поэтому, при сложении некогерентных колебаний, не имеет смысла говорить о сложении амплитуд, но, в некоторых случаях, наблюдаются вполне определенные закономерности. Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой.

*Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются биениями.* Строго говоря, это уже не гармонические колебания.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны  $A$ , а частоты равны  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega$ . Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$x_1 = A \cos \omega t;$$

$$x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Сложим эти выражения и пренебрежем  $\frac{\Delta\omega}{2}t$ , так как  $\frac{\Delta\omega}{2}t \ll 2\omega t$ .

$$x = A[\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t] = (2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t) \cos \omega t \quad (2.2.7)$$

Результирующее колебание (2.2.7) можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A_6$  которая изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_6 = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t \right|; \quad (2.2.8)$$

$$x = A_6 \cos \omega t.$$

Характер зависимости (2.2.4) показан на рисунке 2.5, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания, а огибающие их – график медленно меняющейся по уравнению (2.2.5) амплитуды.

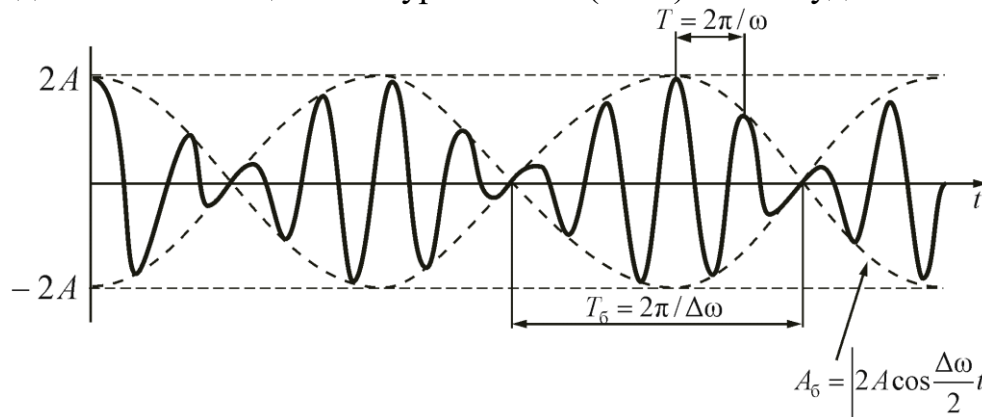


Рисунок 2.5

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями – наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т.д.

Вообще, колебания вида  $x = A(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]$  называются **модулированными**. Частные случаи: *амплитудная модуляция и модулирование по фазе или частоте*. **Биение** – простейший вид модулированных колебаний.

Любые сложные периодические колебания  $S = f(t)$  можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами кратными циклической частоте  $\omega$ :

$$S(t) = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(m\omega t + \varphi_n).$$

Представление периодической функции в таком виде связывают с понятием *гармонического анализа сложного периодического колебания, или разложения Фурье* (то есть представление сложных модулированных колебаний в виде ряда (суммы) простых гармонических колебаний). Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ ,



называются *первой (или основной), второй, третьей* и т.д. гармониками сложного периодического колебания.

### 2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть некоторое тело колеблется и вдоль оси  $x$  и вдоль оси  $y$ , т.е. участвует в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях.

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (2.3.1)$$

Найдем уравнение результирующего колебания. Для простоты примем  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

Разность фаз между обоими колебаниями  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Чтобы получить уравнение траектории, надо исключить из этих уравнений время  $t$ .

Упростим выражения, выбрав начало отсчета так, чтобы  $\varphi_1 = 0$  т.е.

$$x = A_1 \cos \omega t; \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi).$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t \quad \text{или} \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}.$$

Распишем второе уравнение через косинус суммы:

$$\frac{y}{A_2} = \cos \omega t \cos \Delta\varphi - \sin \omega t \sin \Delta\varphi = \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi - \sin \Delta\varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$$

$$\text{Отсюда} \quad \left( \frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi \right)^2 = \left( -\sin \Delta\varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \right)^2$$

Возведем обе части в квадрат

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} (\cos^2 \Delta\varphi + \sin^2 \Delta\varphi) - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi;$$

Окончательное уравнение

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.3.2)$$

В результате мы получили *уравнение эллипса*, оси которого ориентированы относительно  $x$  и  $y$  произвольно (рисунок 2.6).

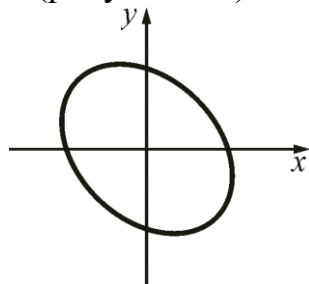


Рисунок.2.6

## 2.4. Фигуры Лиссажу (частные случаи)

Рассмотрим некоторые частные случаи решений уравнения (2.3.2).

### 1. Начальные фазы колебаний одинаковы

$$\varphi_1 = \varphi_2, \text{ т.е. } \varphi_2 - \varphi_1 = 0.$$

Тогда уравнение (2.3.2) примет вид

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \quad \text{или} \quad \left( \frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0;$$

отсюда получим уравнение результирующего колебания:

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (2.4.1)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рисунок 2.7, а). Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми начальными фазами, колебания будут происходить вдоль прямой, проходящей через начало координат.

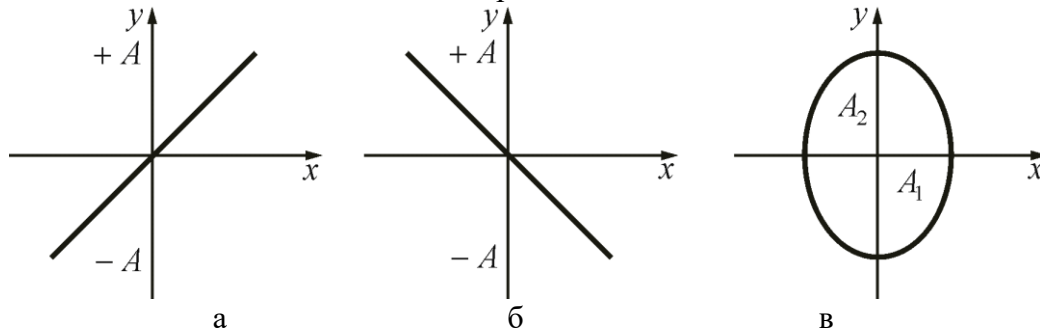


Рисунок 2.7

Такие колебания называются *линейно поляризованными*.

### 2. Начальная разность фаз равна $\pi$ . Тогда, $\cos\pi = -1$ следовательно

$$\left( \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} \right) = 0;$$

$$\left( \frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0.$$

Уравнение колебания в этом случае

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (2.4.2)$$

То есть, точка тоже будет колебаться вдоль прямой, проходящей через начало координат, но прямая лежит в других четвертях по сравнению с первым случаем (рисунок 2.7, б).

Амплитуда результирующего колебания в обоих случаях равна

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \quad (2.4.3)$$

### 3. Начальная разность фаз равна $\pi/2$ . Проанализируем уравнение (2.3.2),

учитывая, что  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ;  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (2.4.4)$$

– это уравнение эллипса с полуосями  $A_1$  и  $A_2$ . (Случай эллиптически поляризованных колебаний) (рисунок 2.7, в).

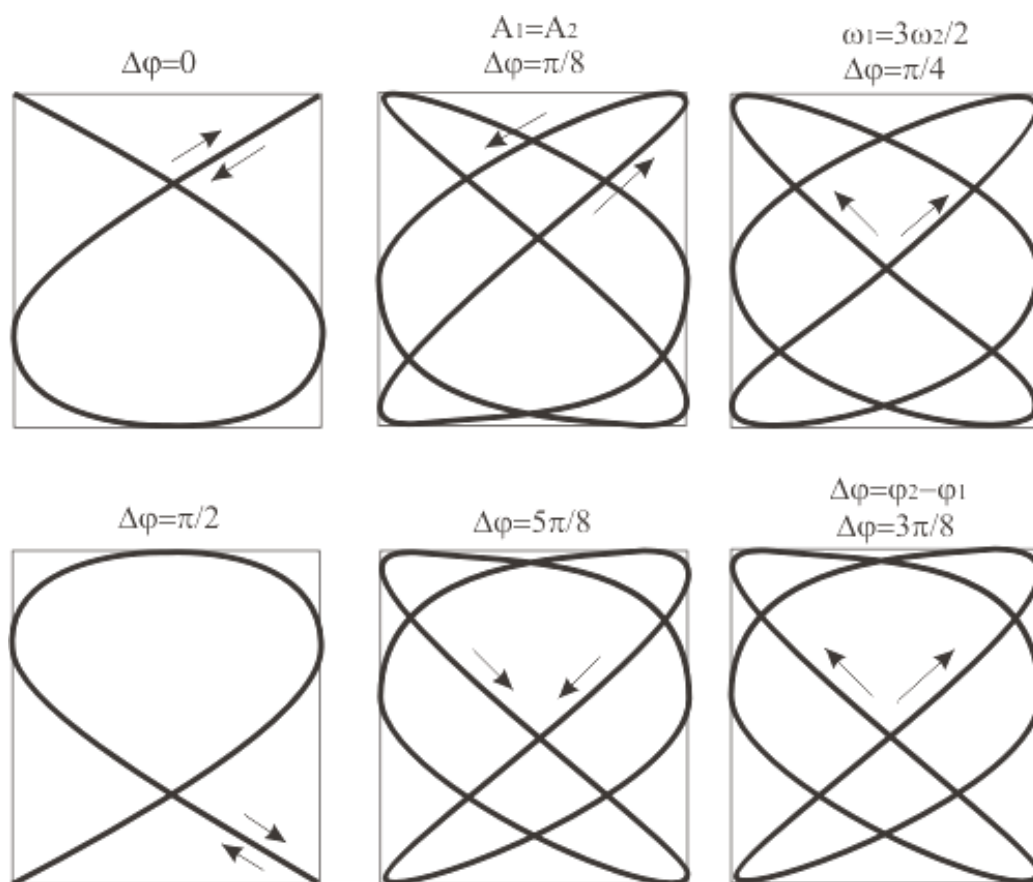
При  $A_1 = A_2$  – получим уравнение окружности (циркулярно-поляризованные колебания).

4. **Все остальные разности фаз дают эллипсы с различным углом наклона относительно осей координат.**

Необходимо отметить, что все рассматриваемые случаи, все кривые – это эллипсы (даже прямая – частный случай эллипса).

Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются **фигурами Лиссажу**. В простейших случаях можно сравнить частоты по виду фигур.

В приведенных выше примерах рассматривались простейшие случаи, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Если  $\omega_1 \neq \omega_2$ , то в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу (рисунок 2.8).



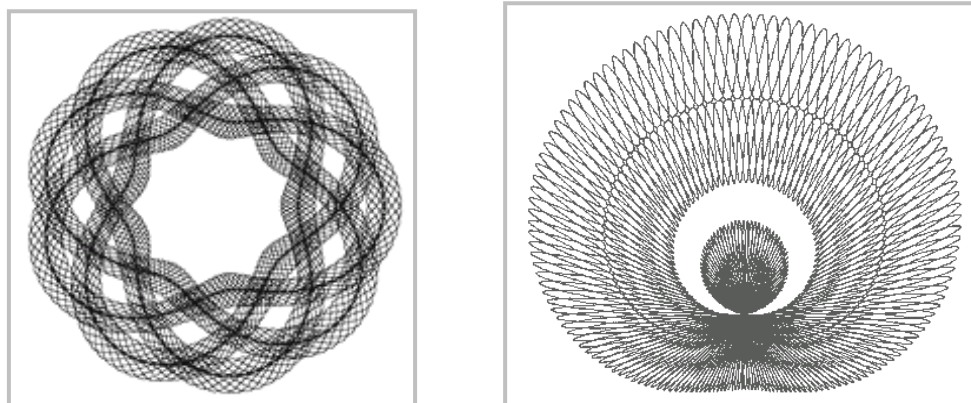


Рисунок 2.8

### 3.1. Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается.

Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например, маятник). Тогда *сила трения* (или *сопротивления*)

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v},$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления,  $\vec{v}$  – скорость движения.

Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси  $x$

$$ma_x = -kx - rv_x,$$

где  $kx$  – возвращающая сила,  $rv_x$  – сила трения. Это уравнение можно переписать:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \quad \text{отсюда следует,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Введем обозначения  $\frac{r}{2m} = \beta$ ;  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ .

Тогда однородное дифференциальное уравнение второго порядка описывающее колебательное движение запишется так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при  $\beta \leq \omega_0$ )

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (3.1.2)$$

$A_0$  и  $\varphi_0$  – определяются из краевых условий задачи (начальных и граничных), а  $\beta$  и  $\omega$  – из самого уравнения.

Найдем круговую частоту  $\omega$ . Здесь она уже не равна  $\omega_0$  ( $\omega \neq \omega_0$ ).

Подставим (3.1.2) в (3.1.1), для этого найдем первую и вторую производные от  $x$ :

$$\frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \beta \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) +$$

$$+ \beta \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Подставим эти значения в (3.1.1) и сократим на  $A_0 e^{-\beta t}$

$$\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + 2\beta \omega \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) -$$

$$- 2\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\omega \beta \sin(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 0;$$

$$-\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Сократим на  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  и выразим  $\omega$

$$-\beta^2 - \omega^2 - \omega_0^2 = 0; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2;$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где  $\omega_0$  – *круговая частота собственных колебаний* (без затухания);  $\omega$  – *круговая частота свободных затухающих колебаний*. Из этого выражения ясно, почему решение (3.1.1) будет только при  $\beta \leq \omega_0$ .

Для колебаний под действием различных сил (квазиупругих) значения  $\omega$ ,  $\beta$ ,  $\omega_0$  будут различными. Например, для колебаний под действием упругой силы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \beta = \frac{r}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды. Поэтому называть  $\omega$  – *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*. По этой же причине и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

называется *условным периодом* затухающих колебаний.

### 3.2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени  $t$  и  $t+T$  (рисунок 3.1)

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T},$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания.

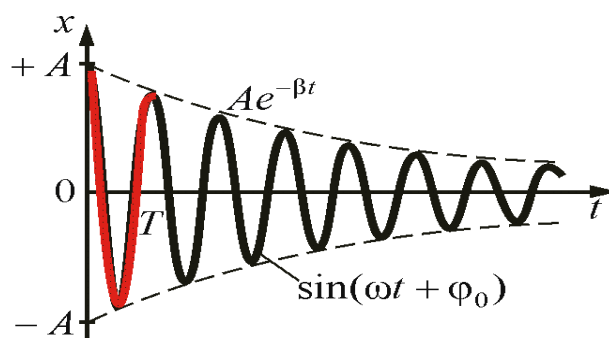


Рисунок 3.1

Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период  $T$ , называется **логарифмическим декрементом затухания**,  $\chi$ :

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T;$$

$$\chi = \beta T.$$

Выясним физический смысл  $\chi$  и  $\beta$ .

Обозначим через  $\tau$  – время, в течение которого амплитуда  $A$  уменьшается в  $e$  раз.

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \text{ откуда } \beta\tau = 1; \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, коэффициент затухания  $\beta$  – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз,  $\tau$  – время релаксации.

Пусть  $N$  число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в  $e$  – раз. Тогда

$$\tau = NT; \quad T = \frac{\tau}{N}; \quad \beta = \frac{1}{\tau};$$

$$\chi = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания  $\chi$  есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечению которых амплитуда  $A$  уменьшается в  $e$  раз.

Если  $\chi = 0,01$  то  $N = 100$ .

При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным **критическому**  $r = r_{кр}$ , а  $\beta = \omega_0$ , то круговая частота обращается в нуль ( $\omega = 0$ ), ( $T \rightarrow \infty$ ), колебания прекращаются. Такой процесс называется **апериодическим** (рисунок 3.2).

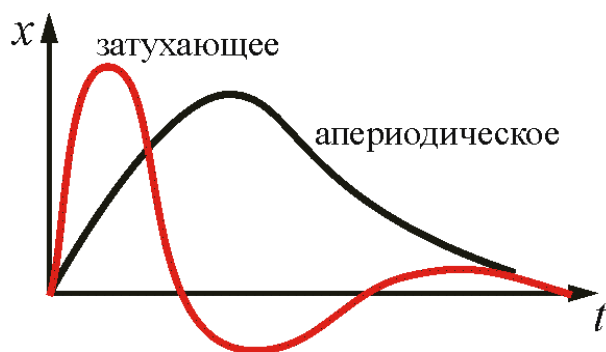


Рисунок 3.2

Отличия в следующем. При колебаниях, тело, возвращающееся в положение равновесия, имеет запас кинетической энергии. В случае *апериодического движения* энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения.

### 3.3. Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме упругой силы ( $-kx$ ) и сил сопротивления ( $-rv$ ) действует добавочная *периодическая сила*  $F$  – *вынуждающая сила*. Для колебаний вдоль оси  $x$  запишем

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x, \quad (3.3.1)$$

где  $f_x = F_x/m$  – вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$f_x = F_0 \cos \omega t.$$

Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы,  $\omega$ . Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.3.2)$$

Наша задача найти амплитуду  $A$  и разность фаз  $\varphi$  между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Обратим внимание на то, что скорость на  $\pi/2$  опережает смещение, а ускорение на  $\pi/2$  опережает скорость (см. п. 1.3).

Из (3.3.2) получим:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.3.3)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) \quad (3.3.4)$$

Преобразуем и (3.3.2) через косинус:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2), \quad (3.3.5)$$

Обозначим  $\alpha = \varphi - \pi/2$  – угол между смещением и вынуждающей силой.

Подставим (3.3.5), (3.3.3) и (3.3.4) в (3.3.1)

$$\omega^2 A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega A \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \cos\omega t$$

$$\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA} \cos\omega t$$

Каждое слагаемое последнего уравнения можно представить в виде соответствующего вращающегося вектора амплитуды:

$A_1 = \omega^2$  – амплитуда ускорения;  $A_2 = 2\beta\omega$  – амплитуда скорости;  $A_3 = \omega_0^2$  – амплитуда смещения;  $A_4 = F_0/mA$  – амплитуда вынуждающей силы, причем  $|A_3| > |A_1|$ .

Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов:

$$\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

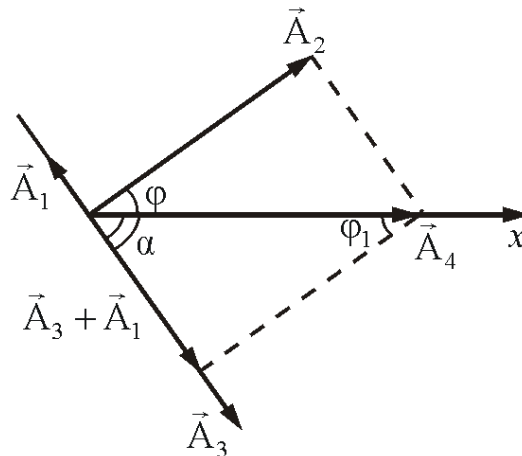


Рисунок 3.3

Из рисунка 3.2 видно  $A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$ . Найдем амплитуду  $A$ :

$$A = \frac{F_0}{mA_4} = \frac{F_0}{m\sqrt{(A_3 - A_1)^2 + A_2^2}},$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (3.3.7)$$

Таким образом,  $A \sim F_0/m$  и  $\sim 1/\beta$ .

При постоянных  $F_0$ ,  $m$  и  $\beta$  – амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы  $\omega$  и свободных незатухающих колебаний системы  $\omega_0$ .

Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}. \quad (3.3.8)$$

Из рисунка 3.3 видно, что сила опережает смещение на угол, который определяется из выражения:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_3 - A_1} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$



### Проанализируем выражение (3.3.7).

1)  $\omega = 0$  (частота вынуждающей силы равна нулю), тогда

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

2)  $\beta = 0$  (затухания нет). С увеличением  $\omega$  (но при  $\omega < \omega_0$ ), амплитуда растет и при  $\omega = \omega_0$ , амплитуда резко возрастает ( $A \rightarrow \infty$ ). Это явление называется – **резонанс**. При дальнейшем увеличении  $\omega$ , ( $\omega > \omega_0$ ) амплитуда опять уменьшается (рисунок 3.4).

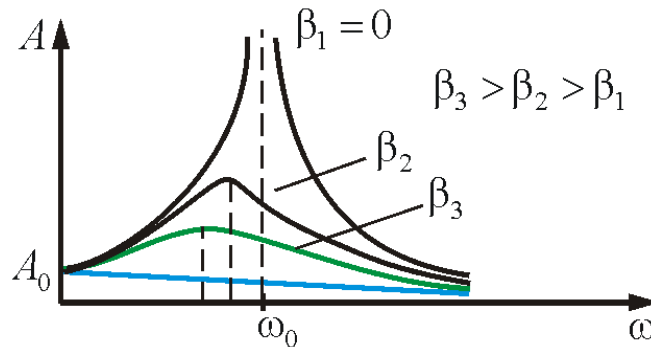


Рисунок 3.4

3)  $\beta \neq 0$ . Амплитуда будет максимальна при минимальном значении знаменателя. Для нахождения точки перегиба возьмем первую производную по  $\omega$  от подкоренного выражения (3.3.7) и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] &= \frac{d}{d\omega} \left[ \omega_0^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = -4\omega_0^2 \omega + \\ &+ 4\omega^3 + 8\beta^2 \omega = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2) = 0 \end{aligned}$$

Т.к.  $4\omega \neq 0$ , следовательно, выражение в скобках равно нулю

$$\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2 = 0, \text{ отсюда}$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (3.3.9)$$

где  $\omega_{\text{рез}}$  – резонансная частота.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к  $\omega_{\text{рез}}$  называется **резонансом**.

Для консервативной системы, т.е.  $\beta = 0$ ,  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$  (3.3.9); для диссипативной  $\omega_{\text{рез}}$  несколько меньше собственной круговой частоты  $\omega_0$ .

С увеличением коэффициента затухания  $\beta$  явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при  $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ .

### 3.4. Автоколебания

Наблюдая колебания листьев деревьев, дорожных знаков над проезжей частью улиц, полотнищ на ветру и др., мы понимаем, что во всех перечисленных случаях незатухающие колебания происходят за счет энергии постоянно дующего ветра. При этом сама колебательная система производит отбор энергии ветра в нужный момент времени и в количестве, требуемом для

компенсации неизбежно присутствующих энергетических потерь. Колебания в этих системах начинаются самопроизвольно за счет начальных флуктуаций (дрожаний) колеблющихся предметов. Частота и амплитуда установившихся колебаний определяется как параметрами самой системы, так и параметрами ее взаимодействия с ветром. Такие колебания являются примерами автоколебаний, а сами системы – примерами автоколебательных систем.

Классическим примером автоколебательной системы служат механические часы с маятником и гирями. Эти часы периодически «черпают» энергию при опускании гирь, подвешенных к цепочке, перекинутой через шестерню часового механизма.

Принцип работы всех автоколебательных систем можно понять, обратившись к схеме, изображенной на рисунке 3.5.

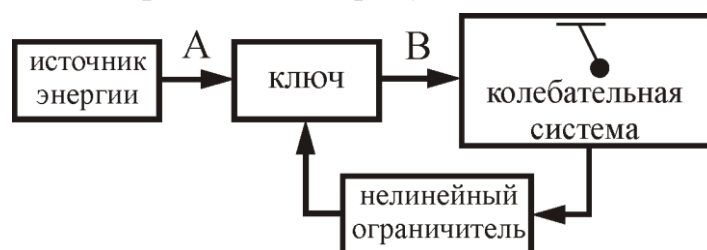


Рисунок 3.5

Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу АВ управляет сама колебательная система посредством обратной связи. Схематически это изображено в виде некоторого запирающего канал АВ устройства (ключа), который управляется самой системой. Так, в зависимости от положения и скорости колеблющегося листа на ветру будет различной мощность сил аэродинамического давления. В конструкции часового механизма (рисунок 3.6) присутствует специальное устройство – анкер, выполняющий роль ключа. Этот анкер, представляющий собой коромысло, приводится в колебание самим маятником часов. При определенных положениях он «отпирает» одну из шестерен часового механизма. В этот момент времени шестерня проворачивается за счет момента сил, приложенного со стороны натянутой цепи с грузом. Груз при этом опускается на небольшую величину. Количество энергии, поступающей в часовой механизм, равно по величине уменьшению потенциальной энергии груза в поле силы тяжести.

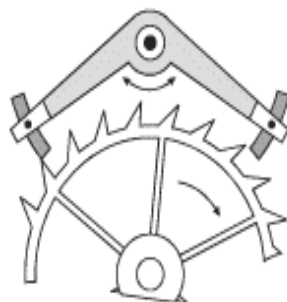


Рисунок 3.6

Важно отметить, что любая автоколебательная система нелинейна. На схеме это отражено наличием в системе обратной связи нелинейного

ограничителя сигнала, управляющего ключом. Нелинейность системы проявляется в том, что при начальном нарастании амплитуды колебаний, порожденных флуктуациями, поступление энергии в систему за каждый последующий период колебаний увеличивается нелинейно, т.е. прирост поступающей энергии становится все меньше и меньше. Естественно, что амплитуда колебаний достигнет такой установившейся величины, при которой приток энергии и ее потери будут равны по величине.

Тема:

# Механические волны

## План:

1. Распространение волн в упругой среде
2. Уравнения плоской и сферической волн
3. Фазовая скорость
4. Принцип суперпозиции. Групповая скорость
5. Стоячие волны
6. Волновое уравнение
7. Эффект Доплера

# 1. Распространение волн в упругой среде

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, увлекаемые частицы будут отставать по фазе от тех частиц, которые их увлекают.

При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды. Среда рассматривается как сплошная, т.е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Итак, колеблющееся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны. Процесс распространения колебаний в среде называется волной.

При распространении волны, частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице, передается лишь состояние колебательного движения и его энергии. Поэтому, основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

Волны бывают **поперечными** (колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения), и **продольными** (сжатие и разряжение частиц среды происходят в направлении распространения).

Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, еще не начавших колебаться, называется **фронтом волны**.

В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны (рисунок 5.1).

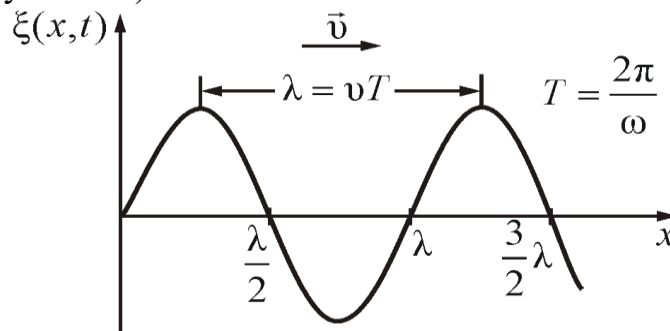


Рисунок 5.1

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны*  $\lambda$

$$\lambda = vT \quad ; \quad (5.1.1)$$

где  $v$  – скорость распространения волны,  $T = \frac{1}{\nu}$  – период,  $\nu$  – частота.

Отсюда, скорость распространения волны можно найти по формуле:

$$v = \lambda \nu \quad (5.1.2)$$

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом, т.е. волновых поверхностей бесконечное множество. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положение равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт только один и он все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях волновые поверхности имеют форму *плоскости* или *сферы*, соответственно волны называются **плоскими** или **сферическими**. В плоской волне волновые поверхности представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне – систему концентрических сфер.

## 2. Уравнения плоской и сферической волн

**Уравнением волны** – называется выражение, которое дает **смещение колеблющейся точки** как функцию ее координат  $(x, y, z)$  и времени  $t$ .

$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t) \quad (5.2.1)$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени, так и координат (волна – это распространяющееся колебание, следовательно, периодически повторяющееся движение). Кроме того, точки, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\lambda$ , колеблются одинаковым образом.

### Уравнение плоской волны

Найдем вид функции,  $\xi$  в случае плоской волны предполагая, что колебания носят гармонический характер.

Направим оси координат так, чтобы ось  $x$  совпадала с направлением распространения волны. Тогда волновая поверхность будет перпендикулярна оси  $x$ . Так как все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение  $\xi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ .  $\xi = \xi(x, t)$ . Пусть колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$  имеет вид (при начальной фазе  $\varphi = 0$ ):

$$\xi = \xi(0, t) = A \cos \omega t \quad (5.2.2)$$

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению  $x$ . Чтобы пройти путь  $x$  необходимо время  $\tau = \frac{x}{v}$ .

Следовательно, колебания частиц в плоскости  $x$  будут отставать по времени на  $\tau$  от колебания частиц в плоскости  $x = 0$ , т.е.

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (5.2.3)$$

– это **уравнение плоской волны**.

Таким образом,  $\xi$  – есть **смещение** любой из точек с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . При выводе мы предполагали, что амплитуда колебания  $A = \text{const}$ . Это будет, если энергия волны не поглощается средой.

Такой же вид уравнение (5.2.3) будет иметь, если колебания распространяются вдоль оси  $y$  или  $z$ .

В общем виде, **уравнение плоской волны** записывается так:

$$\xi = A \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \quad \text{или} \quad \xi = A \cos \omega \left[ \left( t - \frac{r}{v} \right) + \varphi \right]. \quad (5.2.4)$$

Выражения (5.2.3 и 5.2.4) есть **уравнения бегущей волны**.

Уравнение (5.2.3) описывает волну, распространяющуюся в сторону увеличения  $x$ . Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, имеет вид

$$\xi = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right).$$

Уравнение волны можно записать и в другом виде.

Введем **волновое число**  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  или в векторной форме

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \quad (5.2.5)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к волновой поверхности.

Так как  $\lambda = vT$ , то  $k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi v}{v} = \frac{\omega}{v}$ . Отсюда  $v = \frac{\omega}{k}$ . Тогда **уравнение**

**плоской волны** запишется так:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx) \quad (5.2.6)$$

### **Уравнение сферической волны**

В случае, когда скорость волны  $v$  во всех направлениях постоянна, а источник точечный, то волна будет сферической.

Предположим, что **фаза** колебаний источника равна  $\omega t$  (т.е.  $\varphi_0 = 0$ ). Тогда точки, лежащие на **волновой поверхности** радиуса  $r$ , будут иметь фазу  $\omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$ .

Амплитуда колебаний здесь, даже если волна не поглощается средой, не будет постоянной, она убывает по закону  $\frac{1}{r}$ . Следовательно, уравнение сферической волны:

$$\xi = \frac{A}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \quad \text{или} \quad \xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (5.2.7)$$

где  $A$  – равна амплитуде на расстоянии от источника равном единице.

Уравнение (5.2.7) неприменимо для малых  $r$ , т.к. при  $r \rightarrow 0$ . Амплитуда стремится к бесконечности. То, что амплитуда колебаний  $A \sim \frac{1}{r}$ , следует из рассмотрения энергии, переносимой волной.

### 3. Фазовая скорость

**Фазовая скорость** – это скорость распространения фазы волны.

Зафиксируем, какое либо значение фазы волны и проследим, с какой скоростью фаза будет перемещаться вдоль оси  $x$ .

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \text{const},$$

это уравнение дает связь между  $t$  и тем значением  $x$ , где зафиксированное значение фазы будет в данный момент времени. Следовательно,  $\frac{dx}{dt}$  – это есть

**скорость перемещения данной фазы**. Т.к.  $\omega = \text{const}$ , поэтому  $t - \frac{x}{v} = \text{const}$ .

Возьмем производную по времени от обеих частей равенства:  $1 - \frac{1}{v} \frac{dx}{dt} = 0$ ,

отсюда получим выражение для фазовой скорости:

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (5.3.1)$$

Итак, *скорость распространения фазы есть скорость распространения волны*.

Т.е.  $v$  – в уравнении волны есть **фазовая скорость**. Для синусоидальной волны *скорость переноса энергии равна фазовой скорости*. Но синусоидальная волна не несет никакой информации, любой сигнал это модулированная волна, т.е. несинусоидальная (негармоническая).

При решении некоторых задач получается, что фазовая скорость больше скорости света. Здесь нет парадокса, так как **скорость перемещения фазы** – это не скорость передачи (распространения) энергии. Энергия, масса не может двигаться со скоростью большей, чем скорость света  $c$ .

### 4. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если свойства среды не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим **принцип суперпозиции (наложения волн)**: *при распространении в такой среде нескольких волн, каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений частиц*.

Строго *монохроматическая* волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин».



$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (5.4.1)$$

Фазовая скорость этой волны

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{или} \quad v = \lambda \nu \quad (5.4.2)$$

С помощью такой волны нельзя передавать сигнал, так как в любой точке волны все «горбы» одинаковы. Сигнал должен отличаться, быть знаком (меткой) на волне. Но тогда волна уже не будет описываться уравнением (5.4.1).

Сигнал (импульс) можно представить (согласно теореме Фурье) в виде суперпозиции гармонических волн с частотами, заключенными в некотором интервале  $\Delta\omega$ . Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется **волновым пакетом или группой волн** (рисунок 5.2).

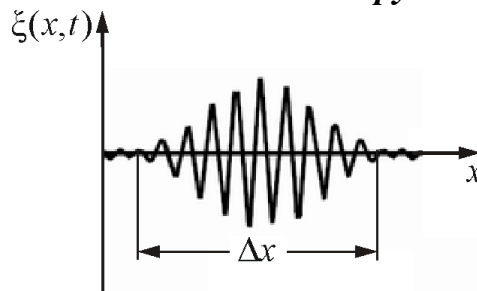


Рисунок 5.2

Выражение для группы волн:

$$\xi(x,t) = \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} E_{0\omega} \cos(\omega t - k_{\omega} x + \alpha_{\omega}) d\omega \quad (5.4.3)$$

Этот волновой пакет может быть суммой двух волн с мало отличающимися частотами (рисунок 5.3).

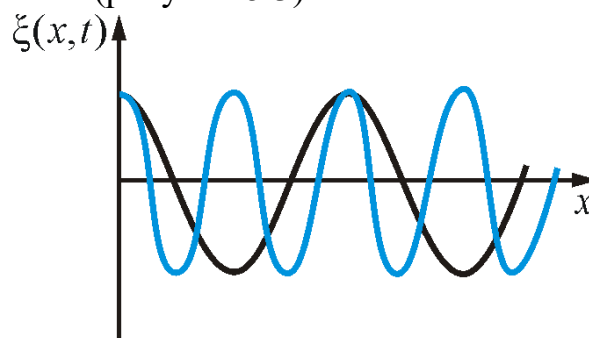


Рисунок 5.3

Там где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет – гашение (результат интерференции).

Чтобы суперпозицию можно было считать группой волн, необходимо условие  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

**Дисперсия** – это зависимость фазовой скорости в среде от частоты.

В *недиспергирующей среде* все плоские волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью  $v$ . Очевидно, что в данном

случае скорость перемещения пакета совпадает со скоростью  $v$ . В *диспергирующей среде*, каждая волна диспергирует со своей скоростью, пакет с течением времени расплывается, его ширина увеличивается. Если *дисперсия невелика*, то расплывание не происходит слишком быстро и пакету можно приписать скорость  $u$  (рисунок 5.4).

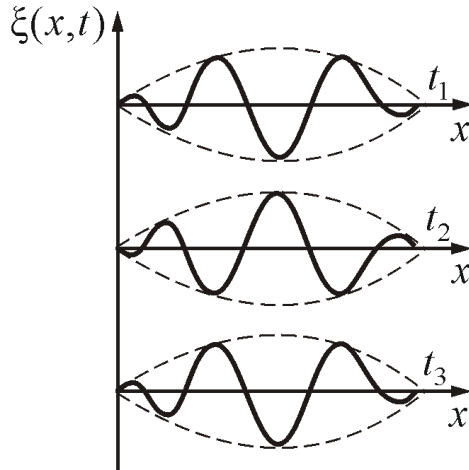


Рисунок 5.4

Скорость, с которой перемещается центр пакета (точка с максимальным значением  $A$ ), называется **групповой скоростью**  $u$ .

В диспергирующей среде  $u \neq v$ . Вместе с движением самого пакета происходит движение горбов внутри пакета. «Горбы» перемещаются со скоростью  $v$ , а пакет в целом с  $u$ .

Рассмотрим это подробнее на примере суперпозиции двух волн с одинаковой амплитудой и разными длинами волн  $\lambda$ .

Уравнения волн (при начальной фазе  $\varphi = 0$ ) запишутся так:

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{и} \quad \xi_2 = A_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

$$\text{здесь } k = \frac{\omega}{v_1}; \quad (k + \Delta k) = \frac{\omega + \Delta\omega}{v_2}, \quad \text{т.к.} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Пусть  $\Delta\omega \ll \omega$ , соответственно  $\Delta k \ll k$ .

Сложим колебания, применив преобразования для суммы косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\xi = 2A_0 \left[ \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + \Delta\omega t - kx - \Delta kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - \Delta\omega t + kx + \Delta kx}{2}\right) \right] =$$

$$2A_0 \cos\left(\frac{2\omega t - 2kx}{2}\right) \cos\left(\frac{-\Delta\omega t + \Delta kx}{2}\right), \quad \text{т.к.} \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \text{то}$$

$$\xi = \left[ 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right] \cos(\omega t - kx) \quad (5.4.4)$$

Множитель в квадратных скобках изменяется с  $t$  и  $x$  значительно медленнее, чем второй множитель, следовательно, выражение (5.4.4) можно рассматривать как уравнение плоской волны с амплитудой

$$A = \left| 2A_0 \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \right|.$$

Результирующая амплитуда получается в результате сложения, следовательно, будут *максимумы и минимумы амплитуды*. Максимум амплитуды будет определяться условием

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x_{\max} = \pm m\pi, \quad (5.4.5)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x_{\max}$  – координата максимума амплитуды.

Каждый из этих максимумов можно рассматривать как центр соответствующей группы волн. Разрешив (5.4.5) относительно  $x_{\max}$  получим:

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t + \text{const}; \quad (2m\pi = \text{const}).$$

Так как  $v = \frac{\omega}{k}$  – фазовая скорость, то  $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = u$  – групповая скорость.

С такой скоростью перемещается максимум амплитуды. В пределе, выражение для групповой скорости

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5.4.6)$$

Это выражение справедливо для центра группы произвольного числа волн. Выражению для групповой скорости можно придать другой вид. Т.к.  $\omega = vk$ , следовательно

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (5.4.7)$$

Выразим  $\frac{dv}{dk}$  через длину волны  $\lambda$ :

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$$

следовательно,

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{dv}{d\lambda} \frac{\lambda}{k}, \quad \text{тогда получим}$$

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (5.4.8)$$

Из этой формулы следует, что в диспергирующей среде, в зависимости от знака  $\frac{dv}{d\lambda}$ , групповая скорость может быть больше или меньше фазовой.

**В отсутствие дисперсии**  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$  и  $u = v$ . Максимум интенсивности приходится на центр группы волн. Поэтому скорость переноса энергии равна групповой скорости.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что *поглощение энергии волны в среде невелико*. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Это случай из области аномальной дисперсии (рассмотрим позже).

## 5. Стоячие волны

Если в среде распространяется несколько волн, то колебания частиц среды оказывается геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. **Волны накладываются друг на друга не возмущая (не искажая друг друга)**. Это и есть **принцип суперпозиции волн**.

Если две волны, приходящие в какую либо точку пространства, обладают постоянной разностью фаз, такие волны называются **когерентными**. При сложении когерентных волн возникает **явление интерференции**.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется **стоячей волной**. Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

Напишем уравнения двух плоских волн распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx) \end{aligned} \right\}, \quad (5.5.1)$$

положим начальную фазу  $\varphi = 0$ .

Сложим эти уравнения и преобразуем по формуле суммы косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right):$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t + kx}{2}\right)$$

т.к.  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ , то запишем

$$\xi = 2A \cos \omega t \cos kx = 2A \cos kx \cos \omega t$$

учтем, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , отсюда

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t \quad (5.5.2)$$

– **уравнение стоячей волны**. В выражении для фазы не входит координата, поэтому можно записать

$$\xi = A^* \cos \omega t \quad (5.5.3)$$

где суммарная амплитуда  $A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$ .

В точках, где координаты удовлетворяют условию  $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = 1$ , суммарная амплитуда равна максимальному значению  $A^* = 2A$ . Это – **кучности** стоячей волны. Координаты кучностей.

$$x_{\text{кучн}} = \pm n\lambda/2 \quad (5.5.4)$$

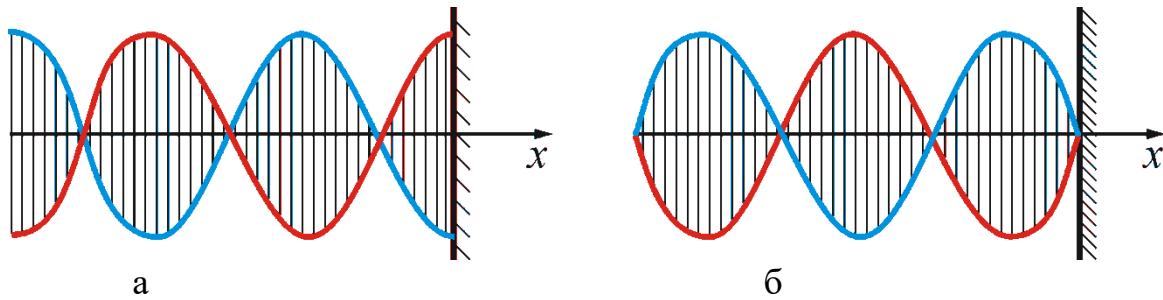


Рисунок 5.5

В точках координаты, которых удовлетворяют условию  $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(n + \frac{1}{2})\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$  и суммарная амплитуда колебаний равна нулю  $A^* = 0$  – это **узлы** стоячей волны. Координаты узлов запишутся так

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (5.5.5)$$

Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженных волн. На границе, где происходит отражение волны, получается пучность, если среда от которой происходит отражение менее плотная (рисунок 5.5, а), и узел, если более плотная (рисунок 5.5, б).

Если рассматривать **бегущую волну**, то в направлении ее распространения **переносится энергия** колебательного движения. **В случае же стоячей волны переноса энергии нет**, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.

## 6. Волновое уравнение

Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого **волновым**. Найдем общий вид волнового уравнения. Для этого продифференцируем дважды уравнение плоской волны по времени  $t$  и всем координатам:

$$\xi = A \cos(\omega t - kr);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kr) = -\omega^2 \xi ;$$

$$\xi = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} ; \quad (5.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 A \cos(\omega t - kr) = -k_x^2 \xi \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 A \cos(\omega t - kr) = -k_y^2 \xi \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 A \cos(\omega t - kr) = -k_z^2 \xi \end{aligned} \right\} ; \quad (5.6.2)$$

сложим уравнения (5.6.2):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi ; \quad (5.6.3)$$

подставим из (5.6.1) значение  $\xi$ , и получим,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

учтем, что  $v = \frac{\omega}{k}$ , а  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v}$ , окончательно получим выражение для **волнового уравнения**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \quad (5.6.4)$$

**Всякая функция, удовлетворяющая уравнению (5.6.4), описывает некоторую волну; причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени  $\frac{1}{v^2}$  – есть фазовая скорость волны.**

Можно записать уравнение (5.6.4) короче, используя, оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ тогда}$$

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \quad (5.6.6)$$

## 7. Эффект Доплера

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда, его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя – более низким, чем сигнал того же электропоезда, но неподвижного. Это явление теоретически было обосновано в 1824 г. австрийским физиком Х. Доплером.



**Доплер Кристиан** (1803 – 1853), австрийский физик и астроном, член Венской АН (1848 г.). Учился в Зальцбурге и Вене. С 1847 г. профессор Горной академии в Хемнице, с 1850 г. профессор Политехнического института и университета в Вене. Основные труды посвящены аберрации света, теории микроскопа и оптического дальномера, теории цветов и др. В 1842 г. теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения наблюдателя относительно источника колебаний.

*Эффектом Доплера называется изменение частоты волн, регистрируемых приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приемника.*

Источник, двигаясь к приемнику как бы сжимает пружину – волну (рисунок 5.6).

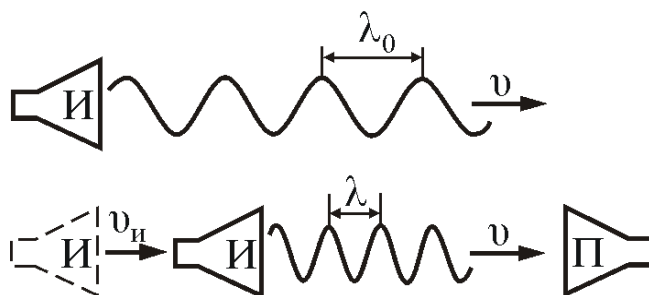


Рисунок 5.6

Данный эффект наблюдается при распространении звуковых волн (акустический эффект) и электромагнитных волн (оптический эффект).

*Рассмотрим несколько случаев проявления акустического эффекта Доплера.*

Пусть приемник звуковых волн П в газообразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник И удаляется от приемника со скоростью  $\vec{v}_и$  вдоль соединяющей их прямой (рисунок 5.7, а).

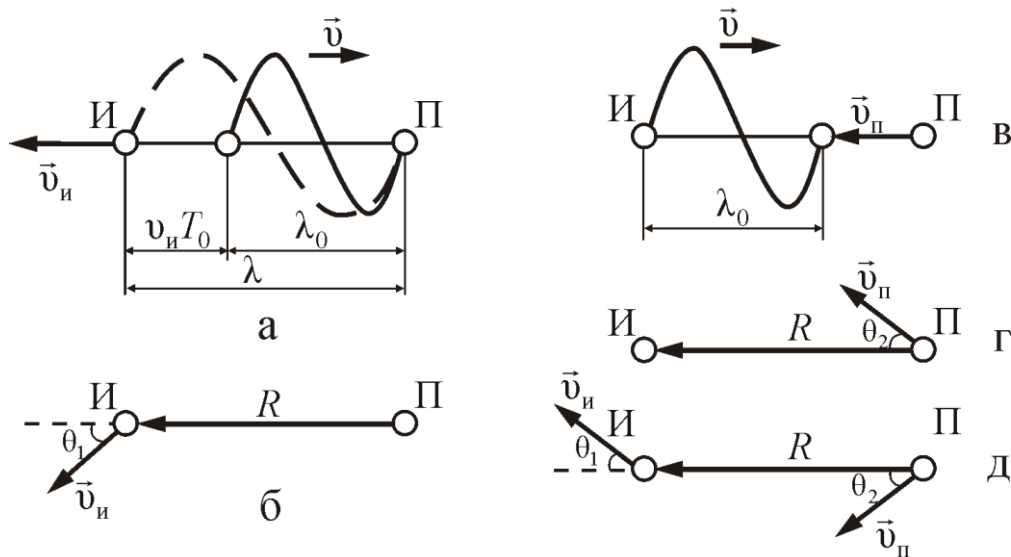


Рисунок 5.7

Источник смещается в среде за время, равное периоду  $T_0$  его колебаний, на расстояние  $v_{и}T_0 = \frac{v_{и}}{\nu_0}$ , где  $\nu_0$  – частота колебаний источника. Поэтому при движении источника длина волны в среде  $\lambda$  отлична от ее значения  $\lambda_0$  при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + v_{и}T_0 = (\nu + v_{и})T_0 = \frac{(\nu + v_{и})}{\nu_0},$$

где  $\nu$  – фазовая скорость волны в среде.

Частота волны, регистрируемая приемником,

$$\nu = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + v_{и}/\nu}. \quad (5.7.1)$$

Если вектор  $\vec{v}_{и}$  скорости источника направлен под произвольным углом  $\theta_1$  к радиус-вектору  $\vec{R}$ , соединяющему неподвижный приемник с источником (рисунок 5.7, б), то

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (v_{и}/\nu) \cos \theta_1}. \quad (5.7.2)$$

Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью  $\vec{v}_{п}$  вдоль соединяющей их прямой (рисунок 5.7, в), то длина волны в среде  $\lambda = \lambda_0 = \frac{\nu}{\nu_0}$ . Однако, скорость распространения волны относительно

приемника равна  $\nu + v_{п}$ , так что частота волны, регистрируемая приемником

$$\nu = (\nu + v_{п})/\lambda_0 = \nu_0(1 + v_{п}/\nu). \quad (5.7.3)$$

В том случае, когда скорость  $\vec{v}_{п}$  направлена под произвольным углом  $\theta_2$  к радиус-вектору  $\vec{R}$ , соединяющему движущийся приемник с неподвижным источником (рисунок 5.7, г), то имеем:



$$v = v_0[1 + (v_{\text{п}}/v) \cos \theta_2] \quad (5.7.4)$$

В самом общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольными скоростями (рисунок 5.7, д),

$$v = v_0 \frac{1 + (v_{\text{п}}/v) \cos \theta_2}{1 + (v_{\text{и}}/v) \cos \theta_1} \quad (5.7.5)$$

Эту формулу можно также представить в виде (если  $v_{\text{и}} \ll v$ )

$$v \approx v_0[1 - (v'/v) \cos \theta] \quad (5.7.6)$$

где  $\vec{v}' = \vec{v}_{\text{и}} - \vec{v}_{\text{п}}$  – скорость источника волны относительно приемника, а  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{v}'$  и  $\vec{R}$ . Величина  $v' \cos \theta$ , равная проекции  $\vec{v}'$  на направление  $\vec{R}$ , называется *лучевой скоростью источника*.

### **Оптический эффект Доплера**

При движении источника и приемника электромагнитных волн относительно друг друга, также наблюдается *эффект Доплера*, т.е. изменение частоты волны, регистрируемой приемником. В отличие от рассмотренного нами эффекта Доплера в акустике, закономерности этого явления для электромагнитных волн можно установить только на основе специальной теории относительности.

Соотношение, описывающее эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме, с учетом преобразований Лоренца, имеют вид:

$$v = \frac{v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \theta} \quad (5.7.7)$$

При небольших скоростях движения источника волн относительно приемника, релятивистская формула эффекта Доплера (5.7.7) совпадает с классической формулой (5.7.2).

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается *продольный эффект Доплера*.

В случае сближения источника и приемника ( $\theta = \pi$ )

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} > v_0 \quad (5.7.8)$$

а в случае их взаимного удаления ( $\theta = 0$ )

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} < v_0 \quad (5.7.9)$$

Кроме того, из релятивистской теории эффекта Доплера, следует существование *поперечного эффекта Доплера*, наблюдающегося при  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ , т.е. в тех случаях, когда источник движется перпендикулярно линии наблюдения (например, источник движется по окружности, приемник в центре):

$$v = v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} < v_0 \quad (5.7.10)$$

Поперечный эффект Доплера необъясним в классической физике. Он представляет чисто релятивистский эффект.

Как видно из формулы (5.7.10), поперечный эффект пропорционален отношению  $v^2/c^2$ , следовательно, он значительно слабее продольного, который пропорционален  $v/c$  (5.7.9).

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на составляющие, одна обеспечивает продольный другая поперечный эффекты.

Существование поперечного эффекта Доплера следует непосредственно из замедления времени в движущихся системах отсчета.

Впервые экспериментальная проверка существования эффекта Доплера и правильности релятивистской формулы (5.7.7) была осуществлена американскими физиками Г. Айвсом и Д. Стилуэллом в 30-ых гг. Они исследовали с помощью спектрографа излучения пучка атомов водорода разогнанных до скоростей  $2 \cdot 10^6$  м/с. В 1938 г. результаты были опубликованы. Резюме: поперечный эффект Доплера наблюдался в полном соответствии с релятивистскими преобразованиями частоты (спектр излучения атомов оказался сдвинут в низкочастотную область); вывод о замедлении времени в движущихся инерциальных системах отсчета подтвержден.

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в астрофизике. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости  $v' \cos \theta$  этих объектов по отношению к Земле: при  $v \ll c$  по формуле (5.7.6)

$$v' \cos \theta \approx (1 - v/v_0)c \quad (5.7.11)$$

Американский астроном Э. Хаббл обнаружил в 1929 г. явление, получившее название **космологического красного смещения** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн). Оказалось, что для каждого объекта относительное смещение частоты  $z = (v_0 - v)/v_0$  ( $v_0$  – частота линии в спектре неподвижного источника,  $v$  – наблюдаемая частота) совершенно одинаково по всем частотам. Космологическое красное смещение есть не что иное, как эффект Доплера. Оно свидетельствует о том, что Метагалактика расширяется, так что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики. Под метагалактикой понимают совокупность всех звездных систем. В современные телескопы можно наблюдать часть Метагалактики, оптический радиус которой равен  $R = 1,12 \cdot 10^{23}$  км. Существование этого явления было теоретически предсказано еще в 1922 г. советским ученым А.А. Фридманом на основе развития общей теории относительности.

Хаббл установил закон, согласно которому, **относительное красное смещение  $z$  галактик растет пропорционально расстоянию  $r$  до них.**

**Закон Хаббла** можно записать в виде:

$$v \cos \theta \approx cz = Hr \quad (5.7.12)$$

где  $H$  – постоянная Хаббла. По самым современным оценкам, проведенным в 2003 г.,  $H = 73,2$  км/(с · Мпк). (1 пк (парсек) – расстояние, которое свет проходит в вакууме за 3,27 лет (1 пк  $\approx 3,09 \cdot 10^{16}$  м)).

В 1990 г. на борту шаттла «Дискавери» был выведен на орбиту космический телескоп имени Хаббла (рисунок 5.8).



Рисунок 5.8

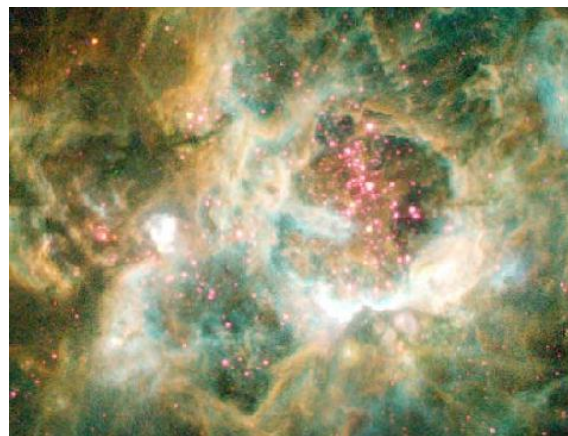


Рисунок 5.9

Астрономы давно мечтали о телескопе, который работал бы в видимом диапазоне, но находился за пределами земной атмосферы, сильно мешающей наблюдениям. «Хаббл» не только не обманул возлагавшихся на него надежд, но даже превзошел практически все ожидания. Он фантастически расширил «поле зрения» человечества, заглянув в немислимые глубины Вселенной. За время своей работы космический телескоп передал на землю 700 тыс. великолепных фотографий (рисунок 5.9). Он, в частности, помог астрономам определить точный возраст нашей Вселенной – 13,7 млрд. лет; помог подтвердить существование во Вселенной странной, но оказывающей огромное влияние, формы энергии – темной энергии; доказал существование сверхмассивных черных дыр; удивительно четко заснял падение кометы на Юпитер; показал, что процесс формирования планетных систем является широко распространенным в нашей галактике; обнаружил небольшие протогалактики, зарегистрировав излучение, испущенное ими, когда возраст Вселенной составлял менее 1 млрд. лет.

На эффекте Доплера основаны радиолокационные лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.). Лазерная анемометрия является незаменимым методом изучения потока жидкости или газа. Хаотическое тепловое движение атомов светящегося тела также вызывает уширение линий в его спектре, которое возрастает с увеличением скорости теплового движения, т.е. с повышением температуры газа. Это явление можно использовать для определения температуры раскаленных газов.

# Тема:

## Общие свойства жидкостей и газов

### План:

1. Линии и трубки тока. Уравнение неразрывности несжимаемой струи
2. Уравнение Бернулли
3. Вязкое трение
4. Ламинарное и турбулентное течения
- 5.. Течение Пуазейля

## 1. Линии и трубки тока. Уравнение неразрывности несжимаемой струи

Один из разделов механики называется механикой сплошной среды. Он включает в себя гидродинамику, газовую динамику, теорию упругости. В этих дисциплинах вещество рассматривается как непрерывная среда. Познакомимся с основами гидродинамики. Гидрадинамика изучает движение несжимаемых жидкостей и взаимодействие таких жидкостей с твердыми телами.

Состояние движения жидкости можно определить, задав в каждой точке пространства вектор скорости как функцию времени. Такая совокупность векторов  $\vec{v}$  образует поле вектора скорости. Его можно изобразить следующим образом. В движущейся жидкости проведем линии так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала по направлению с вектором скорости (рис. 5.1). Эти линии называются *линиями тока*.

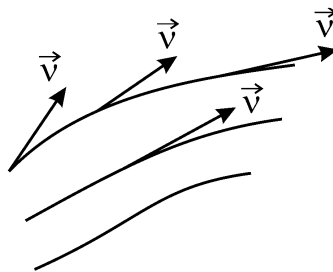


Рис. 5.1

Линии тока проводят так, чтобы их густота (отношение числа линий, пронизывающих перпендикулярную к ним площадку, к величине этой площадки  $\frac{\Delta N}{\Delta S}$ ) была пропорциональна величине скорости в данном месте.

Тогда по картине линий тока можно судить о величине скорости в разных точках пространства: где линии гуще, там скорость выше.

Поскольку вектор скорости в каждой точке пространства может меняться со временем, то и линии тока могут меняться. Если  $\vec{v}$  в каждой точке пространства постоянен во времени, то течение называется стационарным. При этом картина линий тока неизменна.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока*. Поскольку вектор  $\vec{v}$  касается линии тока, то он касается и поверхности трубки тока, а значит, частицы при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

Рассмотрим трубку тока настолько тонкую, что можно считать в каждом сечении скорость постоянной величиной по всему сечению (рис. 5.2). Если жидкость несжимаема ( $\rho = const$ ), то количество жидкости между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  должно быть постоянно, то есть сколько жидкости войдет через сечение  $S_1$ , столько же должно выйти через сечение  $S_2$ . Трубка тока узкая, и  $\Delta t$  мало  $\square$ .

За это время через сечение  $S_1$  войдет объем жидкости, равный  $v_1 S_1 \Delta t$ , так как через  $S_1$  пройдут частицы жидкости, которые находились от него на расстоянии, не большем  $v_1 \Delta t$ . За единицу времени объем вошедшей жидкости

будет равен  $\frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = S_1 v_1$ . Такой же объем жидкости должен выйти через сечение  $S_2$ . Но через сечение  $S_2$  пройдет в единицу времени объем жидкости, равный  $S_2 v_2$ . Значит,  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ . Сечения  $S_1$  и  $S_2$  выбраны произвольно, значит, полученное равенство справедливо для любой пары сечений.

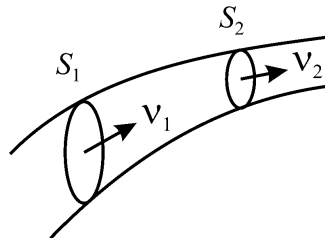


Рис. 5.2

Для несжимаемой жидкости произведение  $sv$  в любом сечении одной и той же трубки тока должно быть одинаковым:  $sv = const$ . Это равенство называется *уравнением неразрывности струи несжимаемой жидкости*.

Из уравнения видно, что в трубке уменьшающегося сечения жидкость будет двигаться с ускорением.

Еще раз подчеркнем, что уравнение неразрывности справедливо только для несжимаемой жидкости. Несжимаемыми можно считать капельные жидкости и газы при их движении со скоростями до  $\sim 100$  м/с.

## 2. Уравнение Бернулли

Жидкость (или газ), вязкостью которой можно пренебречь, называется *идеальной*.

Выделим в идеальной стационарно текущей жидкости трубку тока очень малого сечения (рис. 5.3). За время  $\Delta t$  объем жидкости между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  переместится вдоль трубки тока: сечение  $S_1$  перейдет в сечение  $S'_1$ ; сечение  $S_2$  перейдет в сечение  $S'_2$ . Первое сечение пройдет путь  $\Delta l_1$ , второе –  $\Delta l_2$ .

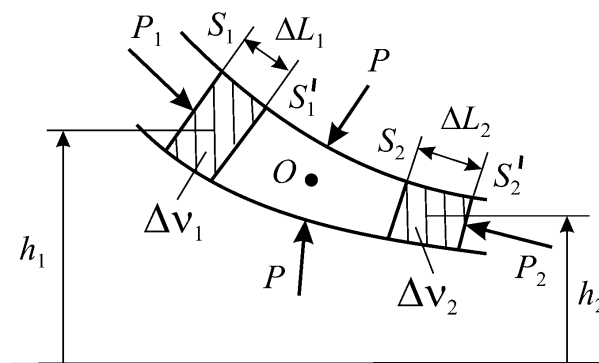


Рис. 5.3

В силу неразрывности струи объем жидкости, вошедшей в объем между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , равен вышедшему объему жидкости. Значит, заштрихованные на рисунке объемы будут иметь одинаковую величину:  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ . Энергия каждой частицы жидкости складывается из потенциальной энергии в поле сил земного тяготения и кинетической энергии. Так как течение стационарно, любая частица жидкости, проходя через

выбранную точку (например, точку  $O$ ), имеет такую же скорость, как и частица, находившаяся в этой точке в начальный момент времени. Значит, и кинетическая энергия всех частиц в выбранной точке будет одинаковой. Отсюда следует, что приращение энергии  $\Delta E$  всего рассматриваемого объема можно определить как разность энергий заштрихованных объемов  $\Delta V_2$  и  $\Delta V_1$ . Пусть сечение трубки и путь  $\Delta L$  настолько малы, что во всех точках заштрихованного объема ( $\Delta V_2$  или  $\Delta V_1$ ) значения скорости  $\bar{v}$ , давления  $P$  и высоты  $h$  одинаковы. Тогда приращение энергии можно записать следующим образом:

$$\Delta E = \left( \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right),$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

Поскольку жидкость идеальная, то трение отсутствует. Поэтому приращение энергии обеспечивается работой сил давления над выделенным объемом. Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны в каждой точке перемещениям частиц жидкости, к которым они приложены, и, вследствие этого, работы не совершают. Отлична от нуля только работа сил, приложенных к сечениям  $S_1$  и  $S_2$ . Она равна

$$A = P_1 S_1 \Delta L_1 - P_2 S_2 \Delta L_2 = (P_1 - P_2) \Delta V.$$

Приравняв значения работы и энергии, сократив на  $\Delta V$  и сгруппировав члены, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2.$$

Сечения  $S_1$  и  $S_2$  взяты произвольно, поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока выражение  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P$  имеет одинаковое значение.

Так как при выводе этого уравнения было сделано предположение о малости площади сечения трубки тока, то это уравнение будет абсолютно точным при стремлении площади сечения трубки к нулю, т. е. при превращении трубки тока в линию тока.

Таким образом, в стационарно текущей идеальной жидкости вдоль любой линии тока выполняется условие:  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = const$ . Это уравнение носит имя Бернулли.

Оно довольно хорошо выполняется и для реальных жидкостей с малой вязкостью.

Если разность высот рассматриваемых точек линии тока невелика и ею можно пренебречь, полагая  $h_1 = h_2$ , то уравнение Бернулли упрощается:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2.$$

Из этого уравнения видно, что с увеличением скорости снижается давление. На этом принципе работает водоструйный вакуумный насос (рис. 5.4).

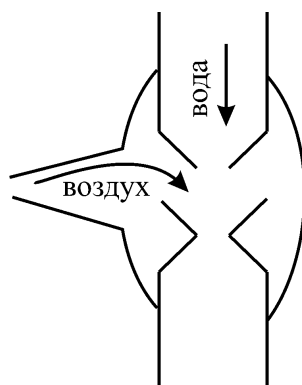


Рис. 5.4

Скорость воды в сужающемся месте увеличивается, давление снижается, становясь ниже атмосферного; происходит подсос воздуха из окружающего пространства.

Уравнение Бернулли позволяет легко рассчитать истечение жидкости из небольшого отверстия в широком открытом сосуде.

### 3. Вязкое трение

В реальных жидкостях всегда проявляется вязкость (трение, приводящее к прекращению движения жидкости).

Рассмотрим следующий опыт. Две параллельные пластинки погружены в жидкость. Размеры пластин много больше расстояния  $d$  между ними (рис. 5.5).

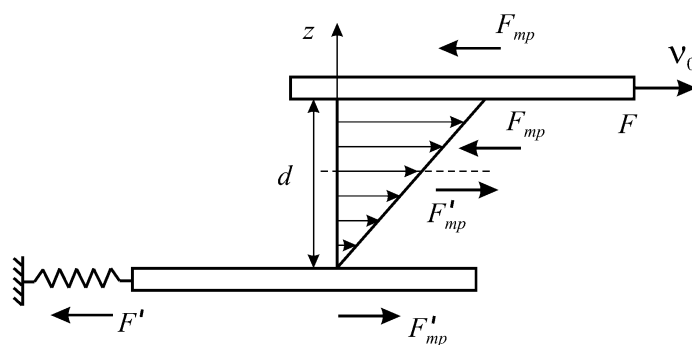


Рис. 5.5

Нижняя пластина закреплена, верхняя приводится в движение с постоянной скоростью  $v_0$  под действием определенной и постоянной силы  $\bar{F}$ . Опыт показывает, что ускорение движущейся пластины равно нулю. Значит, сила  $\bar{F}$  уравновешивается равной ей противоположно направленной силой. Это и есть сила трения  $\bar{F}_{mp}$ , действующая на пластину при ее движении в жидкости. Ньютон, исследуя этот факт, установил, что сила трения пропорциональна скорости движения пластины и ее площади и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами:

$$\bar{F}_{mp} = \eta \frac{v_0}{d} S. \quad (*)$$



Здесь  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения (коэффициент вязкости). Нижняя пластина подвергается действию силы  $\bar{F}'_{mp}$ , равной  $\bar{F}_{mp}$ . Эта сила уравнивается силой  $\bar{F}'$  со стороны пружины.

Значит, при движении двух параллельных пластин, погруженных в жидкость, между ними возникает взаимодействие с силой  $\bar{F}_{mp}$ . Воздействие верхней пластины на нижнюю осуществляется через жидкость, передаваясь от одного слоя к другому. Если мысленно провести между пластинами плоскость, параллельную пластинам, то можно утверждать, что верхняя часть жидкости действует на нижнюю с силой  $\bar{F}'_{mp}$ , а нижняя на верхнюю – с силой  $\bar{F}_{mp}$ , причем обе силы определяются одним и тем же выражением (\*). Это выражение определяет не только силу, действующую между пластинами, но силу трения между соприкасающимися слоями жидкости.

Если измерить скорость жидкости в разных слоях, то обнаружится, что она изменяется в направлении, перпендикулярном нижней пластине по линейному закону:  $v(z) = \frac{v_0}{d}z$ . Вследствие вязкости частицы жидкости, соприкасающиеся с пластинами, как бы прилипают к ним и имеют ту же скорость, что и пластины.

Дифференцируя выражение для скорости, имеем:  $\left| \frac{dv(z)}{dz} \right| = \frac{v_0}{d}$ . Поскольку правая

часть всегда положительна, то и производная  $\frac{dv(z)}{dz}$  должна быть положительна.

Но ее знак зависит от направления оси  $z$ . Поэтому для того, чтобы формула была справедливой, при дифференцировании берут модуль производной. Подставив это равенство в закон Ньютона (\*), получим:

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S.$$

Эта зависимость определяет модуль силы трения. Градиент  $dv/dz$  показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси  $z$ .

Тела шарообразной формы при движении в вязкой жидкости испытывают сопротивление трения, определяемое эмпирическим законом, установленным Стоксом:

$$F_{mp} = 6\pi\eta r v.$$

Здесь  $r$  – радиус шара. Закон справедлив при малых значениях скорости  $v$ .

Вязкость жидкости характеризуется коэффициентом вязкости. Единицей вязкости в СИ служит такая вязкость, при которой градиент скорости с модулем  $1 \frac{м/с}{м}$  приводит к возникновению силы трения в  $1Н$  на поверхности в

$1м^2$ . Эта единица называется паскаль-секунда –  $[Па \cdot с]$ . Коэффициент вязкости зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен. Для жидкостей коэффициент вязкости с ростом температуры уменьшается, для газов – наоборот. Это объясняется различием механизмов внутреннего трения у жидкостей и газов.

#### 4. Ламинарное и турбулентное течения

При наблюдении издалека дыма, выходящего из трубы, мы видим сплошную струю, равномерно вытекающую из отверстия трубы. При приближении к трубе мы увидим беспорядочные клубы дыма, перемешивающиеся между собой. Значит, кроме общего движения по ветру клубы дыма совершают различные движения то в одну, то в другую сторону. Это явление – наличие в потоке беспорядочных движений частиц среды – называется *турбулентностью*. Благодаря турбулентности происходит перемешивание потока. В дымовой струе беспорядочные движения воздуха переносят частицы дыма во все стороны: струя расширяется и на большом расстоянии от трубы оказывается размытой во все стороны. Этот результат турбулентности виден и на большом расстоянии.

Турбулентность – очень распространенное явление. Турбулентны течение воды в реке и движение воды в водопроводных трубах. При движении тела в воздухе за ним всегда образуется турбулентный след и т. д. (Турбулентность в потоках жидкости или газа отсутствует только при определенных условиях.) Наблюдать турбулентное движение легко, если ввести в поток жидкости подкрашенную струйку – она уже на небольшом расстоянии от места введения равномерно распределяется по всему сечению потока. Турбулентное течение нестационарно.

Если уменьшать скорость потока жидкости или газа, то можно заметить, что, начиная с некоторой скорости потока, окрашенная струйка, введенная в поток, перестанет расплываться и вытянется вдоль потока. При малой скорости потока турбулентность исчезает, и течение становится струйным. Такое движение жидкости или газа называется *ламинарным*. Оно стационарно.

Если опять увеличить скорость потока, течение снова станет турбулентным. Опыт показывает, что в узких трубах турбулентность прекращается и появляется при больших скоростях раньше, чем в широких трубах. В капиллярах движение жидкости всегда ламинарно. Течение вязких жидкостей (глицерин, масло) может оставаться ламинарным при значительно больших скоростях, чем течение текучих жидкостей (вода, спирт). При нормальном кровообращении кровь протекает в артериях без турбулентности. Значит, течение крови по кровеносным сосудам описывается законами ламинарного течения.

Английский ученый Осборн Рейнольдс установил, что характер течения жидкости или газа зависит от значения безразмерной величины  $Re = \frac{\rho v l}{\eta}$ , впоследствии названной числом Рейнольдса. Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $v$  – средняя по сечению скорость,  $\eta$  – вязкость,  $l$  – характерный размер поперечного сечения потока.

При малых числах Рейнольдса наблюдается ламинарное течение. Начиная с некоторого значения  $Re$ , называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Для течения в круглой трубе  $Re_{кр} \approx 2000$ , если за характерный размер принят диаметр трубы.

В число Рейнольдса входят две величины, зависящие от свойств жидкости: плотность  $\rho$  и вязкость  $\eta$ . Их отношение  $\nu = \eta/\rho$  называется *кинематической вязкостью*, величина  $\eta$  называется *динамической вязкостью*. Используя выражение для  $\nu$ , число Рейнольдса можно записать следующим образом:

$$Re = vl/\nu.$$

### 5. Течение Пуазейля

Как уже сказано, течение в трубах малого диаметра (например, движение крови по кровеносным сосудам) или течение с малыми скоростями будет ламинарным. Найдем закон изменения скорости с расстоянием  $r$  от оси трубы. При движении жидкости в круглой трубе скорость равна нулю у стенок трубы и максимальна на оси трубы. Выделим воображаемый цилиндрический объем жидкости радиусом  $r$  и длиной  $l$  (рис.5.6).

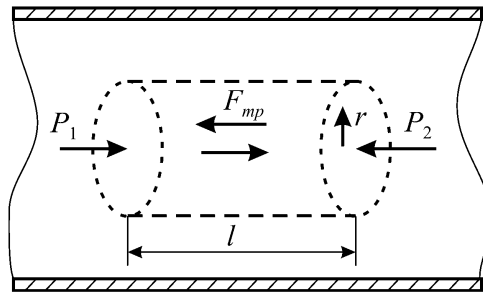


Рис. 5.6

В силу стационарности ламинарного течения скорости всех частиц жидкости в трубе постоянного сечения остаются неизменными, т. е. выделенный объем жидкости движется без ускорения. В соответствии со вторым законом Ньютона сумма всех внешних сил, приложенных к любому объему жидкости, равна нулю. На основании выделенного цилиндрического объема действуют силы давления, сумма которых равна  $(P_1 - P_2)\pi r^2$ . Эта сила действует в направлении движения жидкости. На боковую поверхность цилиндра действует сила трения

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| 2\pi r l. \text{ Здесь } \left| \frac{dv}{dr} \right| \text{ — значение градиента скорости на расстоянии } r \text{ от оси}$$

трубы.

Уравнение стационарности имеет вид:

$$(P_1 - P_2) \pi r^2 = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| 2\pi r l. \quad (*)$$

Скорость убывает от оси трубы, поэтому  $\left| \frac{dv}{dr} \right| = -\frac{dv}{dr}$ . Из равенства (\*\*) имеем:

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(P_1 - P_2) r}{2\eta l}.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r dr.$$

Интегрируем:

$$v(r) = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим из условия  $v=0$  при  $r=R$  (на стенке трубы). Полагая  $r=R$ , имеем:  $-\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2 + C = 0$ . Отсюда  $C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$ .

Следовательно,  $v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ .

На оси трубы  $v_0 = v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$ .

Значит, общая формула будет иметь вид:  $v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ .

При ламинарном течении скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону (рис. 5.7).

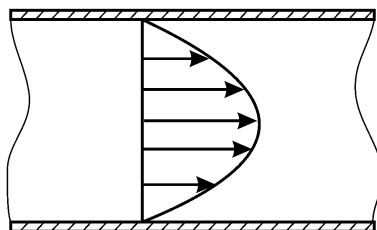


Рис. 5.7

Полагая течение ламинарным, вычислим поток жидкости  $Q$ , т. е. объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы радиусом  $R$  за единицу времени. Разобьем сечение на кольца ширины  $dr$  (рис. 5.8). Через кольцо радиусом  $r$  за секунду пройдет объем жидкости, равный произведению площади кольца  $2\pi r dr$  на скорость течения в точках, отстающих от оси трубы на расстоянии  $r$ .

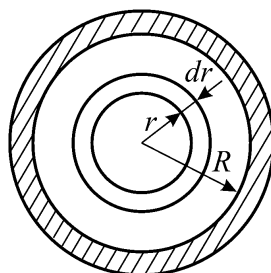


Рис. 5.8

Приняв во внимание общую формулу распределения скорости по радиусу трубы, получим:  $dQ = v(r) \cdot 2\pi r dr = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr$ . Для получения полного потока  $Q$  это выражение нужно проинтегрировать по радиусу  $r$  от 0 до  $R$ :

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0, .$$

где  $S$  – площадь сечения трубы.

Отсюда следует, что при ламинарном течении среднее по сечению значение скорости равно половине максимального значения, которое достигается на оси трубы. Если заменить  $v_0$  его выражением, то получим:

$$Q = \frac{(P_1 - P_2) \pi R^4}{8\eta l}.$$

Это – формула Пуазейля. Поток жидкости (расход) пропорционален перепаду давления на единицу длины трубы, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален вязкости жидкости. Все это справедливо только для ламинарного течения. Формулу Пуазейля используют для определения вязкости жидкости. Пропуская жидкость через капилляр известного радиуса, измеряют перепад давления  $\frac{P_1 - P_2}{l}$  и расход  $Q$ ; по формуле Пуазейля вычисляют  $\eta$ .

# Тема:

## Основы молекулярно-кинетической теории и статистической физики

### План:

- 1.1. Основные понятия и определения молекулярной физики и термодинамики
- 1.2. Давление. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории
- 1.3. Температура и средняя кинетическая энергия теплового движения молекул
- 1.4. Законы идеальных газов
- 1.5. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона)
  
- 2.1. Скорости газовых молекул. Опыт Штерна
- 2.2. Вероятность события. Понятие о распределении молекул газа по скоростям
- 2.3. Функция распределения Максвелла
- 2.4. Барометрическая формула
- 2.5. Распределение Больцмана
- 2.6. Закон распределения Максвелла – Больцмана
- 2.7. Распределение Бозе – Эйнштейна, Ферми – Дирака

## 1.1. Основные понятия и определения молекулярной физики и термодинамики

Рассмотрим несколько *терминов и понятий*, широко используемых в термодинамике и молекулярной физике.

Совокупность тел, составляющих *макроскопическую* систему, называется *термодинамической системой*.

Система может находиться в различных состояниях. *Величины, характеризующие состояние системы, называются параметрами состояния: давление  $P$ , температура  $T$ , объём  $V$  и так далее.* Связь между  $P$ ,  $T$ ,  $V$  специфична для каждого тела и называется *уравнением состояния*.

Любой параметр, имеющий *определённое* значение для каждого равновесного состояния, является *функцией состояния системы*.

*Равновесной* называется такая система, параметры состояния которой *одинаковы во всех точках системы и не изменяются со временем (при неизменных внешних условиях)*. При этом в равновесии находятся отдельные, *макроскопические части системы*.

Термодинамическое равновесие существенно отличается от механического тем, что хотя параметры системы остаются неизменными, частицы, из которых состоит система, находятся в непрерывном движении.

Например, рассмотрим газ, равномерно распределенный по всему объёму. При огромном числе молекул, некоторые из них отклоняются от равномерного распределения. Параметры состояния не остаются строго постоянными, а испытывают небольшие колебания внутри своих равновесных состояний. Такие колебания называются *флуктуациями*.

*Процесс* – переход из одного равновесного состояния в другое.

*Релаксация* – возвращение системы в равновесное состояние. Если система выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, то есть, не подвержена внешним воздействиям, то в течение достаточно большого промежутка времени самопроизвольно происходит процесс перехода к равновесному состоянию. *Время перехода – время релаксации*.

Если равновесие установилось, то система самопроизвольно не сможет выйти из него. Например, если опустить горячий камень в холодную воду, то через некоторое время наступит равновесное состояние: температуры выровняются. Но обратный процесс невозможен – температура камня самопроизвольно не увеличится.

*Атомная единица массы* (а.е.м.) – единица массы, равная 1/12 массы изотопа углерода  $^{12}\text{C}$  –  $m_{\text{C}}$ :

$$m_{\text{ед}} = (1/12)m_{\text{C}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Атомная масса химического элемента (атомный вес)  $A$  есть отношение массы атома этого элемента  $m_{\text{A}}$  к 1/12 изотопа углерода  $\text{C}^{12}$  (атомная масса – безразмерная величина).

$$A = \frac{m_{\text{A}}(\text{масса атома элемента})}{m_{\text{ед}}(1/12 \text{ массы атома углерода})}$$

Молекулярная масса (молекулярный вес)

$$M = \frac{m_M (\text{масса молекулы})}{m_{\text{ед}}}$$

Отсюда можно найти массу атома и молекулы в килограммах:

$$m_A = Am_{\text{ед}}; \quad m_M = Mm_{\text{ед}}.$$

В термодинамике широко используют понятия киломоль, моль, число Авогадро и число Лошмидта. Дадим определения этих величин.

**Моль** – это стандартизированное количество любого вещества, находящегося в газообразном, жидком или твердом состоянии.

**1 моль** – количество грамм вещества, равное его молекулярной массе.

Соответственно для **киломоля**: 1 – киломоль это количество килограмм вещества, равное его молекулярной массе.

Или по-другому: количество вещества, масса которого, выраженная в килограммах, равна его молекулярному весу, называется **киломолем**  $\mu$ :

$$\mu [\text{кг/кмоль} = \text{г/моль}] = M \text{ или } A \text{ (безразмерные)}.$$



**Авогадро Амедео** (1776–1856) – итальянский физик и химик. Основные физические работы посвящены молекулярной физике. Уже первыми своими исследованиями в этой области заложил основы молекулярной теории, выдвинув молекулярную гипотезу. Открыл важный для химии и физики закон, по которому в равных объемах различных газов при одинаковых условиях содержится одинаковое количество молекул (закон Авогадро). Исходя из этого закона, разработал метод определения молекулярного и атомного веса.

В 1811 г. Авогадро высказал предположение, что число частиц в киломоле любого вещества постоянно и равно величине, названной впоследствии **числом Авогадро**:

$$N_A = \frac{\mu (\text{кг/кмоль})}{M \cdot m_{\text{ед}} (\text{кг})} = \frac{M (\text{кг/кмоль})}{M \cdot m_{\text{ед}} (\text{кг})} = \frac{1}{m_{\text{ед}}} 6,023 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{кмоль}} = 6,023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}.$$

**Молярная масса** – масса одного моля ( $\mu$ ):

$$\mu = Am_{\text{ед}} N_A.$$

При одинаковых температурах и давлениях все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. **Число молекул идеального газа, содержащихся в 1 м<sup>3</sup> при нормальных условиях, называется числом Лошмидта**:

$$N_L = P_0 / kT_0 = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

**Нормальные условия**:  $P_0 = 10^5$  Па;  $T_0 = 273$  К;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

Под **идеальным газом** мы будем понимать газ, для которого:

- радиус взаимодействия двух молекул много меньше среднего расстояния между ними (молекулы взаимодействуют только при столкновении);
- столкновения молекул между собой и со стенками сосуда – абсолютно упругие (выполняются законы сохранения энергии и импульса);



- *объем всех молекул газа много меньше объема, занятого газом.*

Следует помнить, что классические представления в молекулярно-кинетической теории и термодинамике, как и вообще в микромире, не объясняют некоторые явления и свойства. Здесь, как и в механике, *условием применимости классических законов* является выполнение неравенства

$$mvR \ll \hbar,$$

где  $m$  – масса,  $v$  – скорость,  $R$  – размер пространства движения частицы,  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  кг·м<sup>2</sup>/с – постоянная Планка. В противном случае используются *квантово-механические представления*.

## 1.2. Давление. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим подробнее, что представляет собой один из основных параметров состояния – давление  $P$ . Ещё в XVIII веке Даниил Бернулли предположил, что **давление газа** есть *следствие столкновения газовых молекул со стенками сосуда*. Именно давление чаще всего является единственным сигналом присутствия газа.

Итак, находящиеся под давлением газ или жидкость действуют с некоторой силой на любую поверхность, ограничивающую их объем. В этом случае сила действует по нормали к ограничивающей объем поверхности. Давление на поверхность равно:

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

где  $\Delta F$  – сила, действующая на поверхность площадью  $\Delta S$ .

Можно также говорить о давлении внутри газа или жидкости. Его можно измерить, помещая в газ или жидкость небольшой куб с тонкими стенками, наполненный той же средой (рисунок 1.1).

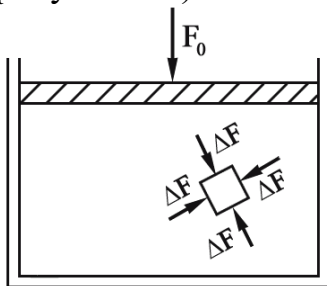


Рисунок 1.1

Поскольку среда покоится, на каждую грань куба со стороны среды действует одна и та же сила  $\Delta F$ . В окрестности куба давление равно  $\Delta F/\Delta S$ , где  $\Delta S$  – площадь грани куба. Из этого следует, что **внутреннее давление** является *одним и тем же во всех направлениях и во всем объеме независимо от формы сосуда*. Этот результат называется **законом Паскаля**: *если к некоторой части поверхности, ограничивающей газ или жидкость, приложено давление  $P_0$ , то оно одинаково передается любой части этой поверхности*.

Допустим, автомобиль поднимается гидравлическим домкратом, состоящим, как показано на рисунке 1.2, из двух соединенных трубкой

цилиндров с поршнями. Диаметр большого цилиндра равен 1 м, а диаметр малого – 10 см. Автомобиль имеет вес  $F_2$ . Найдем силу давления на поршень малого цилиндра, необходимую для подъема автомобиля.

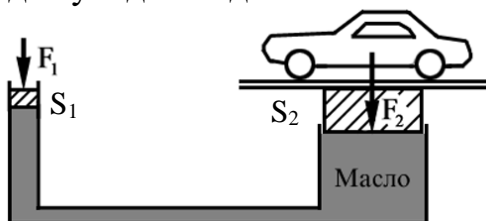


Рисунок 1.2

Поскольку оба поршня являются стенками одного и того же сосуда, то в соответствии с законом Паскаля они испытывают одинаковое давление. Пусть  $P_1 = F_1/S_1$  – давление на малый поршень, а  $P_2 = F_2/S_2$  – давление на большой поршень. Тогда, т.к.  $P_1 = P_2$ , имеем:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Отсюда  $F_1 = F_2(S_1/S_2) = 0,01F_2$ .

Таким образом, для подъема автомобиля достаточно давить на малый поршень с силой, составляющей лишь 1 % веса автомобиля.

Вычислим давление, оказываемое газом на одну из стенок сосуда (рисунок 1.3).

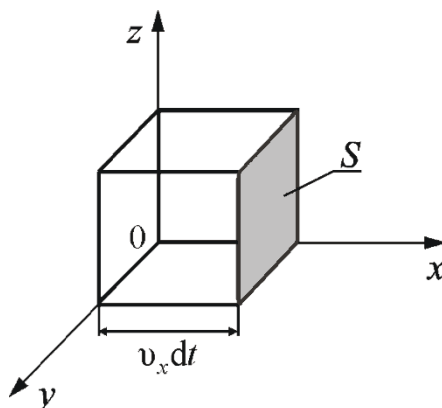


Рисунок 1.3

Обозначим:  $n$  – концентрация молекул в сосуде;  $m_0$  – масса одной молекулы. Движение молекул по всем осям равновероятно, поэтому к одной из стенок сосуда площадью  $S$ , подлетает в единицу времени  $(1/6)n v_x$  молекул, где  $v_x$  – проекция вектора скорости на направление, перпендикулярное стенке.

Каждая молекула обладает импульсом  $m_0 v_x$ , но стенка получает импульс  $2m_0 v_x$  (при абсолютно-упругом ударе  $m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2m_0 v_x$ ). За время  $dt$  о стенку площадью  $S$  успеет удариться число молекул, которое заключено в объеме  $V$ :

$$n = S v_x dt.$$

Общий импульс, который получит стенка  $S$ :

$$Fdt = \frac{1}{6} n 2m_0 v_x v_x S dt = \frac{1}{3} m_0 n v_x^2 S dt.$$

Разделив обе части равенства на  $S$  и  $dt$ , получим выражение для давления:

$$\frac{F}{S} = \frac{1}{3} m_0 n v_x^2 = P. \quad (1.2.1)$$

Таким образом, мы определили давление как силу, действующую в единицу времени на единицу площади:

$$P = dF / dS. \quad (1.2.2)$$

Наивно полагать, что все молекулы подлетают к стенке  $S$  с одной и той же скоростью  $v_x$  (рисунок 1.3). На самом деле молекулы имеют разные скорости, направленные в разные стороны, то есть скорости газовых молекул – случайные величины.

Более точно случайную величину характеризует среднеквадратичная величина. Поэтому под скоростью  $v_x^2$  понимаем **среднеквадратичную скорость**  $\langle v_x^2 \rangle$ . Вектор скорости, направленный произвольно в пространстве, можно разделить на три составляющих:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

Ни одной из этих проекций нельзя отдать предпочтение из-за хаотического теплового движения молекул, то есть в среднем  $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$ . Следовательно, на другие стенки будет точно такое же давление. Тогда можно записать в общем случае:

$$P = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2},$$

или

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle, \quad (1.2.3)$$

где  $\langle E_k \rangle$  – средняя энергия одной молекулы. Это и есть **основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов**.

Итак, давление газов определяется средней кинетической энергией поступательного движения молекул.

Уравнение (1.2.3) называют основным уравнением, потому что давление  $P$  – макроскопический параметр системы здесь связан с основными характеристиками – массой и скоростью молекул.

Иногда за основное уравнение принимают выражение  $P = nkT$ .

Рассмотрим единицы измерения давления.

По определению,  $P = F/S$ , поэтому размерность давления  $\text{Н/м}^2$ .

$$1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}; 1 \text{ атм.} = 9,8 \text{ Н/см}^2 = 98066 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па},$$

$$1 \text{ мм рт.ст.} = 1 \text{ тор} = 1/760 \text{ атм.} = 133,3 \text{ Па},$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}; 1 \text{ атм.} = 0,98 \text{ бар}.$$

### 1.3. Температура и средняя кинетическая энергия теплового движения молекул

Из опыта известно, что если привести в соприкосновение два тела, горячее и холодное, то через некоторое время их температуры выравниваются. Что перешло от одного тела к другому? Раньше, во времена Ломоносова и Лавуазье, считали, что носителем тепла является некоторая жидкость – *теплород*. На самом деле – ничто не переходит, только изменяется средняя кинетическая энергия – энергия движения молекул, из которых состоят эти тела. Именно средняя кинетическая энергия атомов и молекул служит характеристикой системы в состоянии равновесия.

Это свойство позволяет определить параметр состояния, выравнивающийся у всех тел, контактирующих между собой, как величину, пропорциональную средней кинетической энергии частиц в сосуде. Чтобы связать энергию с температурой, Больцман ввел коэффициент пропорциональности  $k$ , который впоследствии был назван его именем:

$$T = \frac{2}{3k} \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}, \quad (1.3.1)$$

где  $k$  – *постоянная Больцмана*,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup>.

Величину  $T$  называют *абсолютной температурой* и измеряют в градусах Кельвина ( $K$ ). Она служит мерой кинетической энергии теплового движения частиц идеального газа.

Из (1.3.1) получим:

$$\frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (1.3.2)$$

Формула (1.3.2) применима для расчетов средней кинетической энергии *на одну молекулу* идеального газа.

Можно записать:  $\frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} N_A = \frac{3}{2} k N_A T$ .

Обозначим:  $R = k N_A$ , – *универсальная газовая постоянная*,

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

Тогда, с учетом обозначения получим:

$$\frac{\mu \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} RT, \quad (1.3.3)$$

– это формула для *молярной массы газа*.

Так как температура определяется средней энергией движения молекул, то она, как и давление, является *статистической* величиной, то есть параметром, проявляющимся в результате совокупного действия огромного числа молекул. Поэтому не говорят: «температура одной молекулы», нужно сказать: «энергия одной молекулы, но температура газа».

С учетом вышесказанного о температуре, **основное уравнение молекулярно-кинетической теории** можно записать по-другому. Так как из (1.2.3)  $P = 2/3n \langle E_k \rangle$ , где  $\langle E_k \rangle = 3/2kT$ . Отсюда

$$P = nkT. \quad (1.3.6)$$

В таком виде **основное уравнение молекулярно-кинетической теории** употребляется чаще.

### Термометры. Единицы измерения температуры

Наиболее естественно было бы использовать для измерения температуры определение  $T = \frac{2}{3k} \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}$ , т.е. измерять кинетическую энергию поступательного движения молекул газа. Однако чрезвычайно трудно проследить за молекулой газа и еще сложнее за атомом. Поэтому для определения температуры идеального газа используется уравнение

$$PV = (m/\mu)RT.$$

Действительно, величины  $P$  и  $V$  легко поддаются измерению.

В качестве примера рассмотрим изображенный на рисунке 1.4 простейший газовый термометр с постоянным давлением. Объем газа в трубке

$$V = \frac{nk}{P_0} T,$$

как мы видим, пропорционален температуре, а поскольку высота подъема ртутной капли пропорциональна  $V$ , то она пропорциональна и  $T$ .

Существенно то, что в газовом термометре необходимо использовать идеальный газ. Если же в трубку вместо идеального газа поместить фиксированное количество жидкой ртути, то мы получим обычный ртутный термометр. Хотя ртуть далеко не идеальный газ, вблизи комнатной температуры ее объем изменяется почти пропорционально температуре. Термометры, в которых вместо идеального газа используются какие-либо другие вещества, приходится калибровать по показаниям точных газовых термометров.



Рисунок 1.4

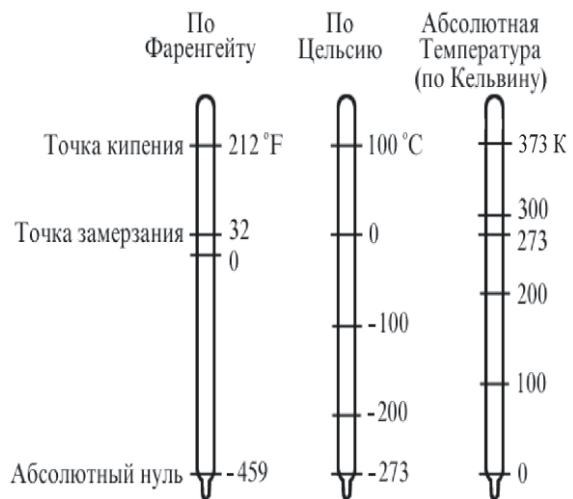


Рисунок 1.5

В физике и технике *за абсолютную шкалу температур принята шкала Кельвина*, названная в честь знаменитого английского физика, лорда Кельвина. 1 К – одна из основных единиц СИ.

Кроме того, используются и другие шкалы:

– шкала Фаренгейта (немецкий физик 1724 г.) – точка таяния льда 32 °F, точка кипения воды 212 °F.

– шкала Цельсия (шведский физик 1842г.) – точка таяния льда 0 °C, точка кипения воды 100 °C.

$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 273,15\text{ K.}$$

На рисунке 1.5 приведено сравнение разных температурных шкал.



**Цельсий Андерс** (1701 – 1744) – шведский астроном и физик. Работы относятся к астрономии, геофизике, физике. Предложил в 1742 г. стоградусную шкалу термометра, в которой за ноль градусов принял температуру таяния льда, а за 100 градусов – температуру кипения воды.

Так как  $\frac{mv^2}{2} \geq 0$  всегда, то и  $T$  не может быть отрицательной величиной.

Своеобразие температуры заключается в том, что она не *аддитивна* (*аддитивный – получаемый сложением*).

Если мысленно разбить тело на части, то температура всего тела не равна сумме температур его частей (длина, объём, масса, сопротивление, и так далее – аддитивные величины). Поэтому температуру нельзя измерять, сравнивая её с эталоном.

Современная термометрия основана на шкале идеального газа, где в качестве термометрической величины используют давление. Шкала газового термометра – является абсолютной ( $T = 0; P = 0$ ).

#### 1.4. Законы идеальных газов

В XVII – XIX веках были сформулированы опытные законы идеальных газов, которые подробно изучаются в школьном курсе физики. Кратко напомним их.

*Изопроцессы идеального газа – процессы, при которых один из параметров остаётся неизменным.*

1. **Изохорический процесс.** Закон Шарля.  $V = \text{const}$ .

*Изохорическим процессом называется процесс, протекающий при постоянном объёме  $V$ . Поведение газа при этом изохорическом процессе подчиняется закону Шарля:*

*При постоянном объёме и неизменных значениях массы газа и его молярной массы, отношение давления газа к его абсолютной температуре остаётся постоянным:  $P/T = \text{const}$ .*

График изохорического процесса на  $PV$ -диаграмме называется *изохорой*. Полезно знать график изохорического процесса на  $PT$ - и  $VT$ -диаграммах (рисунок 1.6).

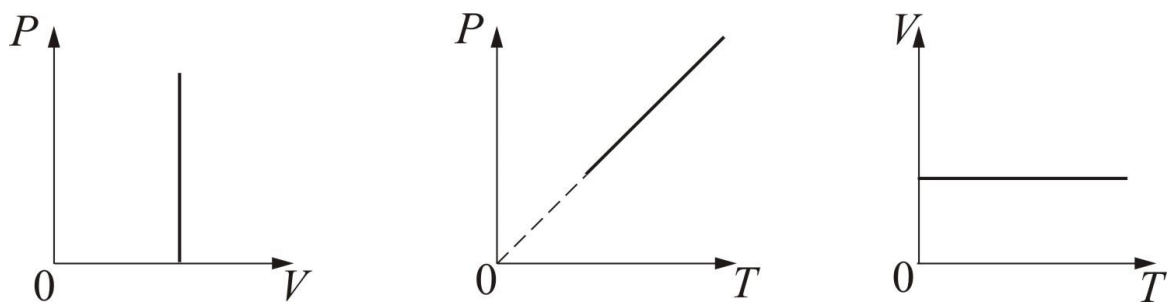


Рисунок 1.6

Уравнение изохоры: 
$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}. \quad (1.4.1)$$

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изохорического процесса записывается в виде

$$P = P_0(1 + \alpha t), \quad (1.4.2)$$

где  $P_0$  – давление при  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – температурный коэффициент давления газа равный  $1/273 \text{ град}^{-1}$ . График такой зависимости на  $Pt$ -диаграмме имеет вид, указанный на рисунке 1.7.

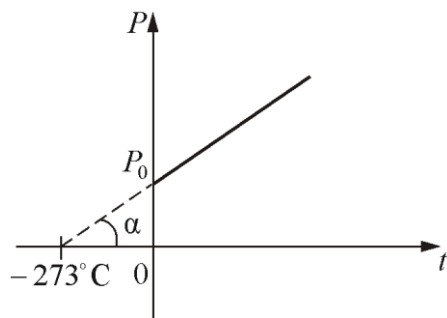


Рисунок 1.7

## 2. Изобарический процесс. Закон Гей-Люссака. $P = \text{const}$ .

**Изобарическим** процессом называется процесс, протекающий при **постоянном давлении**  $P$ . Поведение газа при изобарическом процессе подчиняется **закону Гей-Люссака**:

При постоянном давлении и неизменных значениях массы и газа и его молярной массы, отношение объёма газа к его абсолютной температуре остаётся постоянным:  $V/T = \text{const}$ .

График изобарического процесса на  $VT$ -диаграмме называется **изобарой**. Полезно знать графики изобарического процесса на  $PV$ - и  $PT$ -диаграммах (рисунок 1.8).

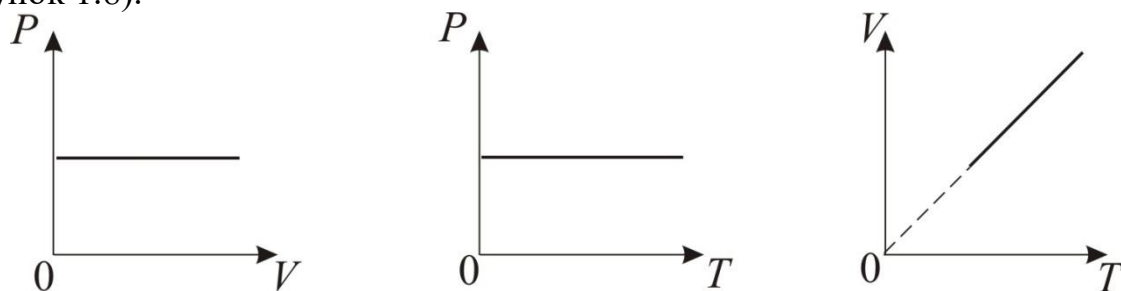


Рисунок 1.8

Уравнение изобары:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (1.4.3)$$

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изобарического процесса записывается в виде

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad (1.4.4)$$

где  $\alpha = 1/273 \text{град}^{-1}$  – температурный коэффициент объёмного расширения. График такой зависимости на  $Vt$  диаграмме имеет вид, показанный на рисунке 1.9.

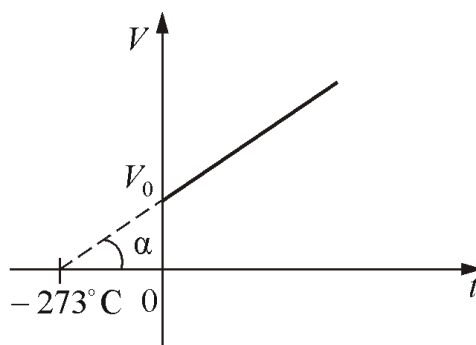


Рисунок 1.9

### 3. Изотермический процесс. Закон Бойля – Мариотта. $T = \text{const}$ .

**Изотермическим** процессом называется процесс, протекающий при постоянной температуре  $T$ .

Поведение идеального газа при изотермическом процессе подчиняется **закону Бойля – Мариотта**:

При постоянной температуре и неизменных значениях массы газа и его молярной массы, произведение объёма газа на его давление остаётся постоянным:  $PV = \text{const}$ .

График изотермического процесса на  $PV$ -диаграмме называется **изотермой**. Полезно знать графики изотермического процесса на  $VT$ - и  $PT$ -диаграммах (рисунок 1.10).

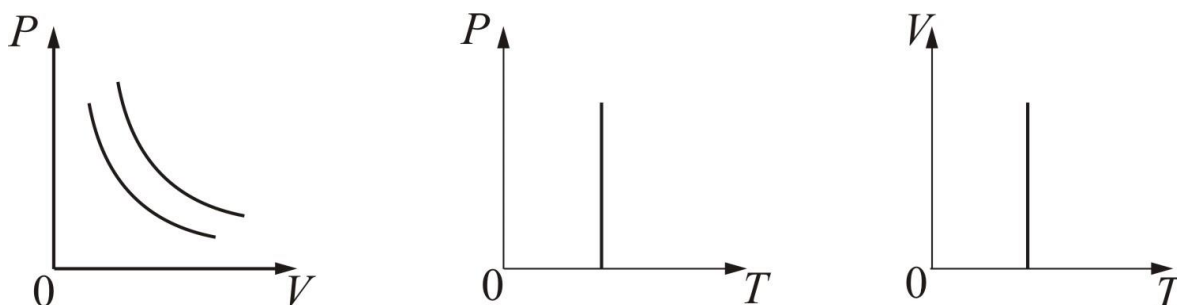


Рисунок 1.10

Уравнение изотермы:

$$P_1V_1 = P_2V_2. \quad (1.4.5)$$

### 4. Адиабатический процесс (изоэнтропийный):

**Адиабатический процесс** – термодинамический процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.



5. **Полиτροпический процесс.** Процесс, при котором теплоёмкость газа остаётся постоянной. Политропический процесс – общий случай всех перечисленных выше процессов.

6. **Закон Авогадро.** При одинаковых давлениях и одинаковых температурах, в равных объёмах различных идеальных газов содержится одинаковое число молекул. В одном моле различных веществ содержится  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  молекул (число Авогадро).

7. **Закон Дальтона.** Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $P$ , входящих в неё газов:

$$P_{\text{см}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n. \quad (1.4.6)$$

Парциальное давление  $P_n$  – давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объём.

При  $P_{\text{см}} = P_1 + P_2$ ;  $v_{\text{см}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}$ , давление смеси газов:

$$P_{\text{см}} = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V} + \frac{m_2 RT}{\mu_2 V} = \frac{RT}{V} \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right). \quad (1.4.7)$$

8. **Объединённый газовый закон** (Закон Клапейрона).

В соответствии с законами Бойля – Мариотта (1.4.5) и Гей-Люссака (1.4.3) можно сделать заключение, что для данной массы газа

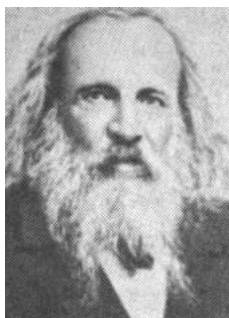
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{PV}{T} = \text{const}. \quad (1.4.8)$$



**Клапейрон Бенуа Поль Эмиль** (1799–1864) – французский физик и инженер. Физические исследования посвящены теплоте, пластичности и равновесию твердых тел. Придал математическую форму идеям Н. Карно, первым оценил большое научное значение его труда. Вывел уравнения состояния идеального газа. Впервые ввел в термодинамику графический метод.

## 1.5. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона)

Уравнение, связывающее основные параметры состояния идеального газа вывел великий русский ученый Д.И. Менделеев.



**Менделеев Дмитрий Иванович** (1834–1907) – русский ученый. Работы – преимущественно в области химии, а также физики, метрологии, метеорологии. Открыл в 1869 году один из фундаментальных законов природы – периодический закон химических элементов – и, на его основе, создал периодическую таблицу химических элементов. Исправил значения атомных весов многих элементов, предсказал существование и свойства новых. Предсказал существование критической температуры. В области метрологии разработал физическую теорию весов.

Менделеев объединил известные нам законы Бойля – Мариотта, Гей-Люссака и Шарля с законом Авогадро. Уравнение, связывающее все эти законы, называется *уравнением Менделеева – Клапейрона* и записывается так:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1.5.1)$$

здесь  $\frac{m}{\mu} = \nu$  – число молей. Если обозначим  $\frac{m}{V} = \rho$  – плотность газа, то

$$P = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\rho}{\mu} RT. \quad (1.5.2)$$

Уравнение Менделеева – Клапейрона для смеси газов:

$$PV = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n} \right) RT \quad (1.5.3)$$

## 2.1. Скорости газовых молекул. Опыт Штерна

В середине XIX века была сформулирована молекулярно-кинетическая теория, но тогда не было никаких доказательств существования самих молекул. Вся теория базировалась на предположении о движении молекул, но как измерить скорость их движения, если они невидимы.

Теоретики первыми нашли выход. Из уравнения молекулярно-кинетической теории газов известно, что

$$\frac{mv_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где  $m$  – масса молекулы. Отсюда среднеквадратичная скорость равна:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (2.1.1)$$

Получена формула для расчета среднеквадратичной скорости, но масса молекулы неизвестна. Запишем по-другому значение  $v_{\text{кв}}$ :

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (2.1.2)$$

А мы знаем, что  $P = RT \frac{\rho}{\mu}$ , тогда

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}, \quad (2.1.3)$$

где  $P$  – давление;  $\rho$  – плотность. Это уже измеряемые величины.

Например, при плотности азота, равной  $1,25 \text{ кг/м}^3$ , при  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  и  $P = 1 \text{ атм}$ , скорости молекул азота  $v_{N_2} = 500 \text{ м/с}$ . Для водорода:  $v_{H_2} = 2000 \text{ м/с}$ .

При этом интересно отметить, что скорость звука в газе близка к скорости молекул в этом газе  $v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$ , где  $\gamma$  – коэффициент Пуассона. Это объясняется тем, что звуковые волны переносятся молекулами газа.

Проверка того факта, что атомы и молекулы идеальных газов в термически равновесном пучке имеют различные скорости, была осуществлена немецким физиком Отто Штерном (1888–1969) в 1920 г. Схема его установки приведена на рисунке 2.1.

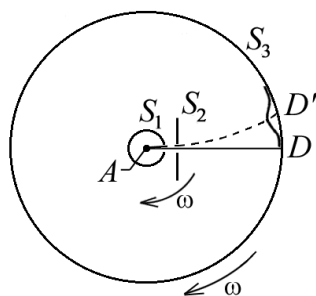


Рисунок 2.1

Платиновая нить  $A$ , покрытая снаружи серебром, располагается вдоль оси коаксиальных цилиндров  $S_1$ ,  $S_3$ . Внутри цилиндров поддерживается низкое давление порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$  Па. При пропускании тока через платиновую нить она разогревается до температуры выше точки плавления серебра ( $961,9$  °С). Серебро испаряется, и его атомы через узкие щели в цилиндре  $S_1$  и диафрагме  $S_2$  летят к охлаждаемой поверхности цилиндра  $S_3$ , на которой они осаждаются. Если цилиндры  $S_1$ ,  $S_3$  и диафрагма не вращаются, то пучок осаждается в виде узкой полоски  $D$  на поверхности цилиндра  $S_3$ . Если же вся система приводится во вращение с угловой скоростью  $\omega \cong 2\pi 50$  рад/с, то изображение щели смещается в точку  $D'$  и становится расплывчатым.

Пусть  $l$  – расстояние между  $D$  и  $D'$ , измеренное вдоль поверхности цилиндра  $S_3$ , оно равно  $l = v_1 t$ , где  $v_1 = \omega R$  – линейная скорость точек поверхности цилиндра  $S_3$ , радиусом  $R$ ;  $t = S_2 / v$  – время прохождения атомами серебра расстояния  $S_2 D = h$ . Таким образом, имеем  $l = \omega R h / v$ , откуда  $v_{\text{эксп}} = \omega R h / l$  – можно определить величину скорости теплового движения атомов серебра. Температура нити в опытах Штерна равнялась  $1200$  °С, что соответствует среднеквадратичной скорости  $v_{\text{кв}} = 584$  м/с. В эксперименте для этой величины получилось значение от  $560$  до  $640$  м/с. Кроме того, изображение щели  $D'$  всегда оказывалось размытым, что указывало на то, что атомы Ag движутся с различными скоростями.

Таким образом, в этом опыте были не только измерены скорости газовых молекул, но и показано, что они имеют большой разброс по скоростям. Причина – в хаотичности теплового движения молекул. Ещё в XIX веке Дж. Максвелл утверждал, что молекулы, беспорядочно сталкиваясь друг с другом, как-то «распределяются» по скоростям, причём вполне определённым образом.

## 2.2. Вероятность события.

### Понятие о распределении молекул газа по скоростям

С точки зрения атомно-молекулярного строения вещества величины, встречающиеся в макроскопической физике, имеют смысл средних значений, которые принимают некоторые функции от микроскопических переменных системы. Величины такого рода называются статистическими. Примерами таких величин являются давление, температура, плотность и др. Большое число сталкивающихся атомов и молекул обуславливает важные закономерности в поведении статистических переменных, не свойственные отдельным атомам и молекулам. Такие закономерности называются вероятностными или статистическими.

Математическое определение вероятности: **вероятность** какого-либо события – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев, при бесконечном увеличении последних:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}.$$

Здесь  $n'$  – число раз, когда событие произошло, а  $n$  – общее число опытов. Отсюда следует, что  $P$  может принимать значения от нуля до единицы.

По определению Лапласа, **вероятность** можно представить как отношение числа благоприятных случаев к числу возможных случаев.

Определить распределение молекул по скоростям вовсе не значит, что нужно определить число молекул, обладающих той или иной заданной скоростью. Ибо число молекул, приходящихся на долю каждого значения скорости равно нулю. Вопрос нужно поставить так: *сколько молекул обладает скоростями, лежащими в интервале, включающем заданную скорость?* Так всегда ставятся статистические задачи.

Например: на переписи населения, когда указывается возраст 18 лет – это не значит, что 18 лет, 0 часов, 0 минут. Эта цифра свидетельствует, что возраст лежит в интервале от 18 до 19 лет.

Итак, молекулы движутся хаотически. Среди них есть и очень быстрые, и очень медленные. Благодаря беспорядочному движению и случайному характеру их взаимных столкновений, молекулы определённым образом распределяются по скоростям. Это распределение оказывается однозначным и единственно возможным, и не только не противоречит хаотическому движению, но именно им и обусловлено.

Мы будем искать число частиц ( $\Delta n$ ), скорости которых лежат в определённом интервале значения скорости  $\Delta v$  (от  $v$  до  $v + \Delta v$ ). То есть  $\Delta n$  – число благоприятных молекул, попавших в этот интервал.

Очевидно, что в единице объёма число таких благоприятных молекул тем больше, чем больше  $\Delta v$ .

Ясно также, что  $\Delta n$  должно быть пропорционально концентрации молекул ( $n$ ). Число  $\Delta n$  зависит и от самой скорости, так как в одинаковых по величине

интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости, число молекул будет различным. Смысл сказанного легко понять из простого примера: неодинаково, число людей в возрасте от 20 до 21 года и от 90 до 91 года. Таким образом,

$$\Delta n = f(v)n\Delta v,$$

где  $f(v)$  – **функция распределения молекул по скоростям**. Перейдя к пределу, получим, что число молекул, попавших в интервал скоростей от  $v$  до  $v + dv$ :

$$dn = f(v)ndv. \quad (2.2.1)$$

*Физический смысл  $f(v)$  в том, что это отношение числа молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, к общему числу молекул в единичном интервале скоростей:*

$$f(v) = \frac{dn}{n}. \quad (2.2.2)$$

Таким образом,  $f(v)$  имеет смысл **вероятности**, то есть показывает, какова **вероятность** любой молекулы газа в единице объёма иметь скорость, заключённую в единичном интервале, включающем заданную скорость  $v$ . В данном случае  $f(v)$  называют **плотностью вероятности**.

### 2.3. Функция распределения Максвелла

Пусть имеется  $n$  тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре. После каждого акта столкновения между молекулами, их скорости меняются случайным образом. В результате невообразимо большого числа столкновений устанавливается стационарное равновесное состояние, когда число молекул в заданном интервале скоростей сохраняется постоянным.

В результате каждого столкновения проекции скорости молекулы испытывают случайное изменение на  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$ ,  $\Delta v_z$ , причем изменения каждой проекции скорости независимы друг от друга. Будем предполагать, что силовые поля на частицы не действуют. Найдем в этих условиях, каково число частиц  $dl$  из общего числа  $n$  имеет скорость в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . При этом мы не можем ничего определенного сказать о точном значении скорости той или иной частицы  $v_i$ , поскольку за столкновениями и движениями каждой из молекул невозможно проследить ни в опыте, ни в теории. Такая детальная информация вряд ли имела бы практическую ценность.

Распределение молекул идеального газа по скоростям впервые было получено знаменитым английским ученым Дж. Максвеллом в 1860 году с помощью методов теории вероятностей.



**Максвелл Джеймс Клерк** (1831 – 1879) – английский физик. Работы посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статике, оптике, механике, теории упругости. Установил статистический закон, описывающий распределение молекул газа по скоростям. Самым большим достижением Максвелла является теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений, выражающих все основные закономерности электромагнитных явлений.

Вывод формулы функции распределения молекул по скоростям есть в учебнике Ю.И Тюрин и др. (ч. 1) или И.В. Савельева (т. 1). Мы воспользуемся результатами этого вывода.

Скорость – векторная величина. Для *проекции скорости на ось x* (x-й составляющей скорости) из (2.2.1) имеем

$$dn_x = f(v_x)ndv_x,$$

тогда

$$f(v_x) = \frac{dn_x}{ndv_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} = A_1 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}, \quad (2.3.1)$$

где  $A_1$  – постоянная, равная  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Графическое изображение функции показано на рисунке 2.2. Видно, что доля молекул со скоростью  $v_x = 0$  не равна нулю. При  $v_x = 0$ ,  $f(v_x) = A_1$  (в этом физический смысл постоянной  $A_1$ ).

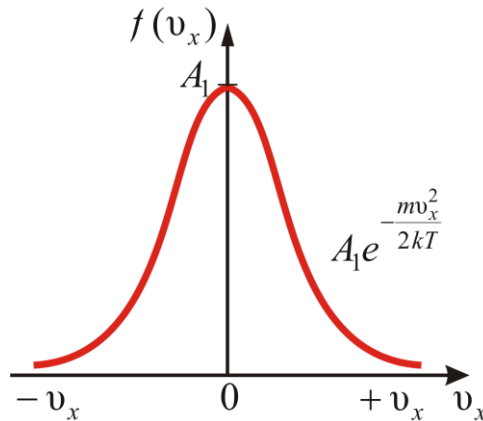


Рисунок 2.2

Приведённое выражение и график справедливы для *распределения молекул газа по x-компонентам скорости*. Очевидно, что и по y- и z-компонентам скорости также можно получить:

$$\frac{dn_y}{ndv_y} = A_1 e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \quad \text{и} \quad \frac{dn_z}{ndv_z} = A_1 e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

*Вероятность* того, что скорость молекулы одновременно удовлетворяет трём условиям: x-компонента скорости лежит в интервале от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ ; y-компонента, в интервале от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$ ; z-компонента, в интервале от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$  будет равна *произведению вероятностей каждого из условий (событий) в отдельности*:

$$\frac{dn_{xyz}}{n} = A_1^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , или

$$dn_{xyz} = \frac{n}{\pi^{3/2}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z. \quad (2.3.2)$$

Формуле (2.3.2) можно дать геометрическое истолкование:  $dn_{xyz}$  – это число молекул в параллелепипеде со сторонами  $dv_x$ ,  $dv_y$ ,  $dv_z$ , то есть в объёме  $dV = dv_x dv_y dv_z$  (рисунок 2.3), находящемся на расстоянии  $\vec{v}$  от начала координат в пространстве скоростей.

Эта величина ( $dn_{xyz}$ ) не может зависеть от направления вектора скорости  $\vec{v}$ . Поэтому надо получить функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, то есть по абсолютному значению скорости.

Если собрать вместе все молекулы в единице объёма, скорости которых заключены в интервале от  $v$  до  $v + dv$  по всем направлениям, и выпустить их, то они окажутся через одну секунду в шаровом слое толщиной  $dv$  и радиусом  $v$  (рисунок 2.4). Этот *шаровой слой* складывается из тех параллелепипедов, о которых говорилось выше.

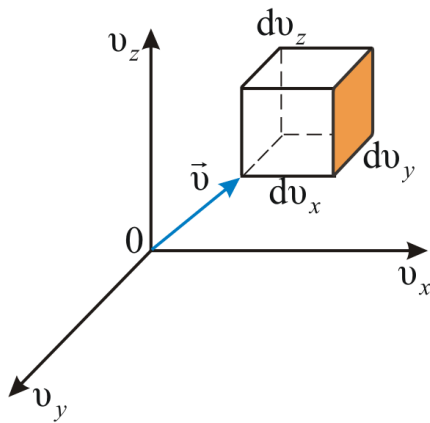


Рисунок 2.3

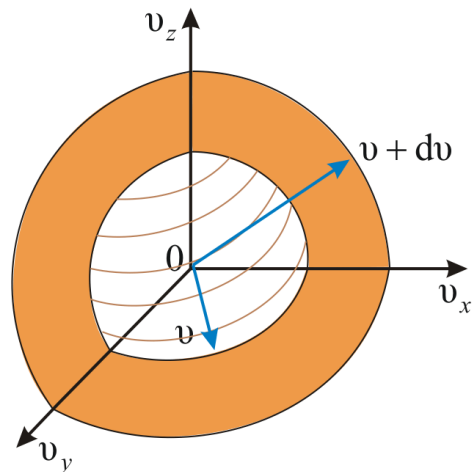


Рисунок 2.4

Если собрать вместе все молекулы в единице объёма, скорости которых заключены в интервале от  $v$  до  $v + dv$  по всем направлениям, и выпустить их, то они окажутся через одну секунду в шаровом слое толщиной  $dv$  и радиусом  $v$  (рисунок 2.4). Этот *шаровой слой* складывается из тех параллелепипедов, о которых говорилось выше.

Объём этого шарового слоя

$$dV = 4\pi v^2 dv.$$

Общее число молекул в слое, как следует из (2.3.2)

$$dn = \frac{n}{\pi^{3/2}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dV.$$

Отсюда следует **закон распределения молекул по абсолютным значениям скоростей Максвелла:**

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (2.3.3)$$

где  $\frac{dn}{n}$  – доля всех частиц в шаровом слое объема  $dV$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ .

При  $dv=1$  получаем **плотность вероятности**, или **функцию распределения молекул по скоростям**:

$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (2.3.4)$$

Эта функция обозначает долю молекул единичного объёма газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном интервале скоростей, включающем данную скорость.

Обозначим:  $A = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}}$ , тогда, из (2.3.4) получим:

$$f(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (2.3.5)$$

График этой функции показан на рисунке 2.5.

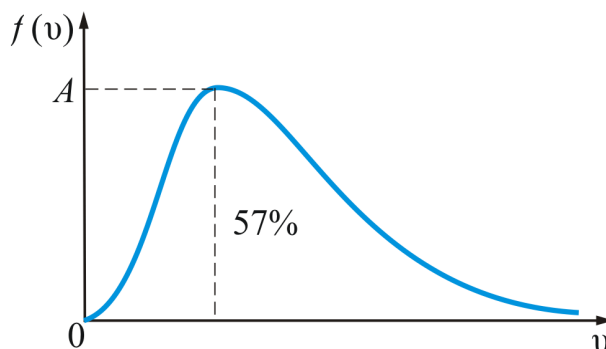


Рисунок 2.5

**Выводы:**

- Вид распределения молекул газа по скоростям для каждого газа зависит от рода газа ( $m$ ) и от параметра состояния ( $T$ ). Давление  $P$  и объём газа  $V$  на распределение молекул не влияют.

- В показателе степени стоит отношение  $\frac{mv^2}{2kT}$ , т.е. кинетической энергии, соответствующей данной скорости  $v$  к ( $kT$ ) – средней энергии теплового движения молекул при данной температуре, значит **распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии** (то есть показывает, какова вероятность при данной температуре иметь именно такое значение кинетической энергии).

Рассмотрим пределы применимости классического описания распределения частиц по скоростям. Для этого воспользуемся соотношением неопределенностей Гейзенберга. Согласно этому соотношению координаты и импульс частицы не могут одновременно иметь определенное значение. Классическое описание возможно, если выполнены условия:



$$\Delta x \Delta P_x \gg h, \Delta y \Delta P_y \gg h, \Delta z \Delta P_z \gg h.$$

Здесь  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка – фундаментальная константа, определяющая масштаб квантовых (микроскопических) процессов.

Таким образом, если частица находится в объеме  $\Delta x \Delta y \Delta z \gg h^3 / P^3$ , то в этом случае возможно описание ее движения на основе законов классической механики.

### **Наиболее вероятная, среднеквадратичная и средняя арифметическая скорости молекул газа**

Рассмотрим, как изменяется с абсолютной величиной скорости число частиц, приходящихся на единичный интервал скоростей, при единичной концентрации частиц.

График функции распределения Максвелла

$$f(v) = \frac{dn}{n dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

приведен на рисунке 2.6.

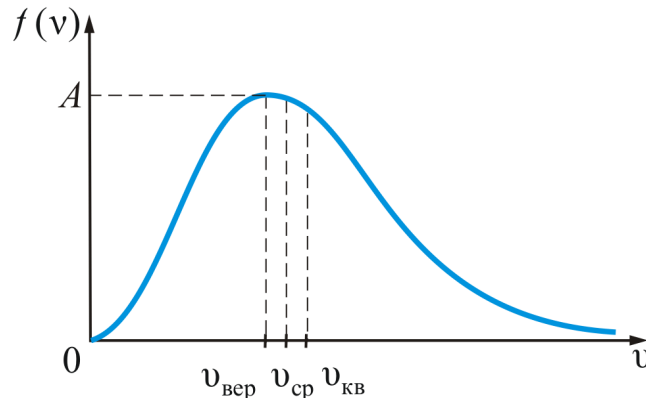


Рисунок 2.6

Из графика видно, что при «малых»  $v$ , т.е. при  $\left( \frac{mv^2}{2kT} \ll 1 \right)$ , имеем  $f(v) \sim v^2$ ; затем  $f(v)$  достигает максимума  $A$  и далее экспоненциально спадает  $f(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ .

**Величина скорости, на которую приходится максимум зависимости  $f(v)$ , называют наиболее вероятной скоростью.**

Найдем эту скорость из условия равенства производной  $\frac{df(v)}{dv} = 0$ .

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (2.3.6)$$

– наиболее вероятная скорость одной молекулы.

Для одного моля газа:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.3.7)$$

**Среднюю квадратичную скорость** найдем, используя соотношение  $\frac{mv_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ :

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \text{ — для одной молекулы.} \quad (2.3.8)$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \text{ — для одного моля газа.} \quad (2.3.9)$$

**Средняя арифметическая скорость:**

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n_0} \int_0^{\infty} v n f(v) dv,$$

где  $n f(v) dv = dn$  — число молекул со скоростью от  $v$  до  $v + dv$ . Если подставить сюда  $f(v)$  и вычислить, то получим:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m}} \text{ — для одной молекулы.} \quad (2.3.10)$$

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}} \text{ — для одного моля газа.} \quad (2.3.11)$$

Все три скорости незначительно отличаются друг от друга множителем порядка единицы, причем  $v_{\text{кв}} > v_{\text{ср}} > v_{\text{вер}}$ .

### **Формула Максвелла для относительных скоростей**

Для решения многих задач удобно использовать формулу Максвелла, где скорость выражена в относительных единицах.

Относительную скорость обозначим через  $u$ :

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}, \quad (2.3.13)$$

где  $v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ . Тогда из (2.3.3), получим

$$\frac{dn}{ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \quad (2.3.14)$$

Это уравнение универсальное. *В таком виде функция распределения не зависит ни от рода газа, ни от температуры.*

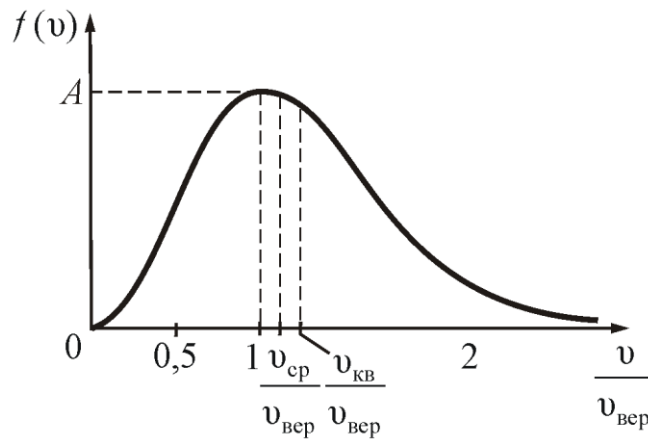


Рисунок 2.7

На рисунке 2.7 показано максвелловское распределение частиц  $f(v)$ , имеющих скорости от  $v$  до  $v+dv$ . За единицу скорости здесь взята *наиболее вероятная скорость*.

Полезно знать, что  $\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{вер}}} = 1,13$ ;  $\frac{v_{\text{кв}}}{v_{\text{вер}}} = 1,22$ .

### ***Зависимость функции распределения Максвелла от массы молекул и температуры газа***

На рисунке 2.8 показана зависимость  $f(v)$  при различных температурах и массах молекул газа.

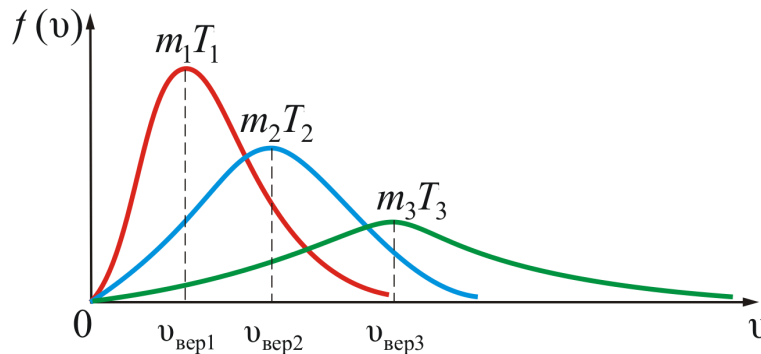


Рисунок 2.8

Из рисунка 2.8 можно проследить за изменением  $f(v)$  при изменении  $m$  и  $T$ . В данном случае  $m_1 > m_2 > m_3$  (при  $T = \text{const}$ ) или  $T_1 < T_2 < T_3$  (при  $m = \text{const}$ ). *Площадь под кривой величина постоянная, равная единице ( $f(v) = \text{const} = 1$ ), поэтому важно знать как будет изменяться положение максимума кривой:*

$$f(v_{\text{вер}}) \sim \sqrt{\frac{m}{T}}, \text{ кроме того } v_{\text{вер}} \sim \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Максвелловский закон распределения по скоростям и все вытекающие следствия справедливы только для газа в равновесной системе. Закон статистический, и выполняется тем лучше, чем больше число молекул.

## 2.4. Барометрическая формула

Рассмотрим ещё один очень важный закон.

Атмосферное давление на какой-либо высоте  $h$  обусловлено весом слоёв газа, лежащих выше. Пусть  $P$  – давление на высоте  $h$ , а  $P + dP$  – на высоте  $h + dh$  (рисунок 2.9).

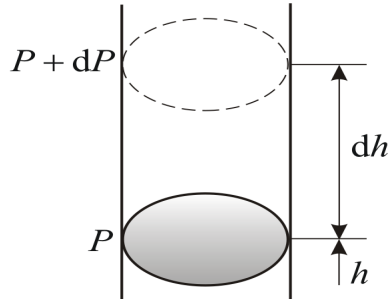


Рисунок 2.9

Причём  $dh > 0$ , а  $dP < 0$ , так как на большей высоте давление меньше. Разность давления  $P - (P + dP)$  равна весу газа, заключённого в объёме цилиндра с площадью основания равного единице и высотой  $dh$ .

Т.к.  $P = \rho gh$ , где  $\rho = \frac{P\mu}{RT}$  – плотность газа на высоте  $h$ , медленно убывающая с высотой, то можно записать:

$$P - (P + dP) = \rho g dh.$$

Отсюда можно получить **барометрическую формулу**:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (2.4.1)$$

где  $P_0$  – давление на высоте  $h = 0$ .

Из формулы (2.4.1) следует, что  $P$  убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше  $\mu$ ) и чем ниже температура (например, на больших высотах концентрация легких газов He и H<sub>2</sub> гораздо больше, чем у поверхности Земли).

На рисунке 2.10 изображены две кривые, которые можно трактовать, либо как соответствующие разным  $\mu$  (при одинаковой  $T$ ), либо как отвечающие разным  $T$ , при одинаковых  $\mu$ .

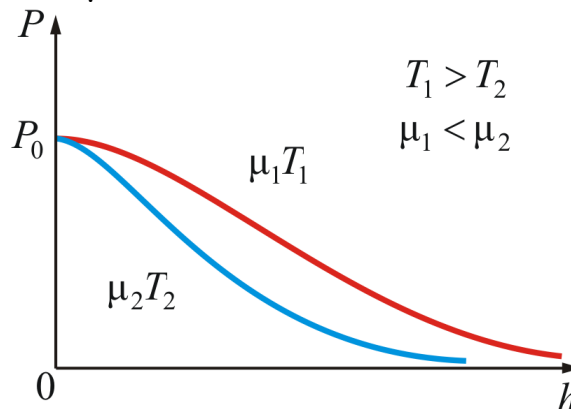


Рисунок 2.10

Таким образом, чем *тяжелее* газ (больше  $\mu$ ) и чем *ниже* температура, тем *быстрее убывает* давление.

## 2.5. Распределение Больцмана

Распределение Больцмана определяет распределение частиц в силовом поле в условиях теплового равновесия.



**Больцман Людвиг** (1844–1906) – австрийский физик-теоретик, один из основоположников классической статистической физики. Основные работы – в области кинетической теории газов, термодинамики и теории излучения. Вывел основное кинетическое уравнение газов, являющееся основой физической кинетики. Впервые применил к излучению принципы термодинамики.

Пусть идеальный газ находится в поле консервативных сил в условиях теплового равновесия. При этом концентрация газа будет различной в точках с различной потенциальной энергией, что необходимо для соблюдения условий механического равновесия. Так, число молекул в единичном объеме  $n$  убывает с удалением от поверхности Земли, и давление, в силу соотношения  $P = nkT$ , падает.

Если известно число молекул в единичном объеме, то известно и давление, и наоборот. Давление и плотность пропорциональны друг другу, поскольку температура в нашем случае постоянна. Давление с уменьшением высоты должно возрастать, потому что нижнему слою приходится выдерживать вес всех расположенных сверху атомов.

Исходя из основного уравнения молекулярно-кинетической теории:  $P = nkT$ , заменим  $P$  и  $P_0$  в барометрической формуле (2.4.1) на  $n$  и  $n_0$  и получим **распределение Больцмана** для молярной массы газа:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (2.5.1)$$

где  $n_0$  и  $n$  – число молекул в единичном объеме на высоте  $h = 0$  и  $h$ .

Так как  $\mu = mN_A$ , а  $R = N_A k$ , то (2.5.1) можно представить в виде

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (2.5.2)$$

С уменьшением температуры число молекул на высотах, отличных от нуля, убывает. При  $T = 0$  тепловое движение прекращается, все молекулы расположились бы на земной поверхности. При высоких температурах, наоборот, молекулы оказываются распределёнными по высоте почти равномерно, а плотность молекул медленно убывает с высотой. Так как  $mgh$  – это потенциальная энергия  $U$ , то на разных высотах  $U = mgh$  – различна. Следовательно, (2.5.2) характеризует распределение частиц по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}, \quad (2.5.3)$$

– это закон распределения частиц по потенциальным энергиям – **распределение Больцмана**. Здесь  $n_0$  – число молекул в единице объема там, где  $U = 0$ .

На рисунке 2.11 показана зависимость концентрации различных газов от высоты. Видно, что число более тяжелых молекул с высотой убывает быстрее, чем легких.

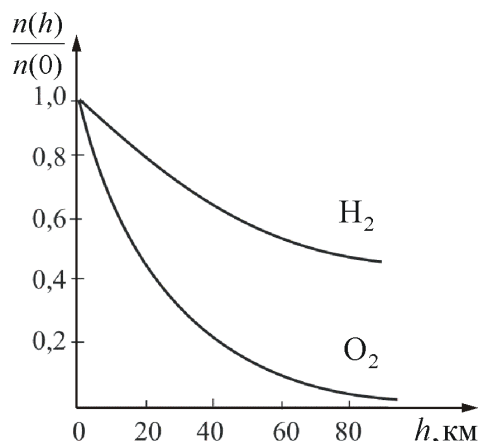


Рисунок 2.11

Из (2.5.3) можно получить, что отношение концентраций молекул в точках с  $U_1$  и  $U_2$  равно:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{U_1 - U_2}{kT}}. \quad (2.5.4)$$

Больцман доказал, что соотношение (2.5.3) справедливо не только в потенциальном поле сил гравитации, но и в любом потенциальном поле, для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

## 2.6. Закон распределения Максвелла – Больцмана

В п. 2.3 мы получили выражение для распределения молекул по скоростям (распределение Максвелла):

$$dn(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Из этого выражения легко найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии  $K$ . Для этого перейдем от переменной  $v$  к переменной

$$K = \frac{mv^2}{2}:$$

$$dn(K) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} K^{1/2} e^{-\frac{K}{kT}} dK = nf(K)dK,$$

где  $dn(K)$  – число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от  $K$  до  $K + dK$ . Отсюда получим **функцию распределения молекул по энергиям теплового движения**:

$$f(K) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} K^{1/2} e^{-\frac{K}{kT}}. \quad (2.6.1)$$

Средняя кинетическая энергия  $\langle K \rangle$  молекулы идеального газа:

$$\langle K \rangle = \int_0^{\infty} K f(K) dK = \frac{3}{2} kT,$$

то есть получаем результат, совпадающий с прежним результатом, полученным в п. 1.3.

Итак, закон Максвелла даёт распределение частиц по значениям кинетической энергии, а закон Больцмана – распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Оба распределения можно объединить в единый **закон Максвелла – Больцмана**:

$$dn = n_0 A e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (2.6.2)$$

Здесь  $n_0$  – число молекул в единице объёма в той точке, где  $U = 0$ ,  $E = U + K$  – полная энергия.

В последнем выражении, потенциальная и кинетическая энергии, а следовательно и полная энергия  $E$ , могут принимать непрерывный ряд значений. Если же энергия частицы может принимать лишь дискретный ряд значений  $E_1, E_2, \dots$  (как это имеет место, например, для внутренней энергии атома), то в этом случае распределение Больцмана имеет вид:

$$N_i = A N e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (2.6.3)$$

где  $N_i$  – число частиц, находящихся в состоянии с энергией  $E_i$ , а  $A$  – коэффициент пропорциональности, который должен удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^N N_i = A \sum_{i=1}^N e^{-\frac{E_i}{kT}} = N,$$

где  $N$  – полное число частиц в рассматриваемой системе.

Тогда окончательное выражение **распределения Максвелла – Больцмана для случая дискретных значений энергий** будет иметь вид:

$$N_i = \frac{N e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_i}{kT}}}. \quad (2.6.4)$$

## 2.7. Распределение Бозе – Эйнштейна, Ферми – Дирака

Если у нас имеется термодинамическая система состоящая из  $N$  частиц, энергии которых могут принимать дискретные значения  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , то говорят о системе квантовых чисел.

Поведение такой системы описывается *квантовой статистикой*, в основе которой лежит *принцип неразличимости тождественных частиц*. Основная задача этой статистики состоит в определении среднего числа  $\langle N_i \rangle$  частиц, находящихся в ячейке фазового пространства: «координаты – проекции

импульса» ( $x, y, z$  и  $p_x, p_y, p_z$ ) частиц. При этом имеют место два закона распределения частиц по энергиям (две статистики):

- распределение Бозе – Эйнштейна:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1}; \quad (2.7.1)$$

- распределение Ферми – Дирака:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} + 1}. \quad (2.7.2)$$

Здесь  $\mu$  – химический потенциал.

Первая формула описывает квантовые частицы с целым спином (собственный момент количества движения). Их называют *бозоны* (например, фотоны). Вторая формула описывает квантовые частицы с полуцелым спином. Их называют *фермионы* (например: электроны, протоны, нейтрино).



Тема:

# ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

План:

- 1. Внутренняя энергия. Работа и теплота**
- 2. Теплоёмкость идеального газа. Уравнение Майера**
- 3. Теплоёмкости одноатомных и многоатомных газов**
- 4. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы**
- 5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам идеальных газов**

# 1. Внутренняя энергия. Работа и теплота

Наряду с механической энергией, любое тело (или система) обладает *внутренней энергией*. Внутренняя энергия – энергия покоя. Она складывается из теплового хаотического движения *молекул*, составляющих тело, потенциальной энергии *их взаимного* расположения, кинетической и потенциальной энергии *электронов* в атомах, *нуклонов* в ядрах и так далее.

В термодинамике важно знать не абсолютное значение внутренней энергии, а её изменение.

В термодинамических процессах изменяется только кинетическая энергия движущихся молекул (тепловой энергии недостаточно, чтобы изменить строение атома, а тем более ядра). Следовательно, фактически *под внутренней энергией* в термодинамике подразумевают энергию *теплового хаотического* движения молекул.

Внутренняя энергия  $U$  одного моля идеального газа равна:

$$U = N_A K = \frac{3}{2} k T N_A = \frac{3}{2} RT, \text{ или}$$
$$U = \frac{3}{2} RT .$$

Таким образом, *внутренняя энергия зависит только от температуры. Внутренняя энергия  $U$  является функцией состояния системы*, независимо от предыстории.

Понятно, что в общем случае термодинамическая система может обладать как внутренней, так и механической энергией, и разные системы могут обмениваться этими видами энергии.

Обмен *механической энергией* характеризуется совершенной *работой  $A$* , а обмен внутренней энергией – *количеством переданного тепла  $Q$* .

Например, зимой вы бросили в снег горячий камень. За счёт запаса потенциальной энергии совершена механическая работа по смятию снега, а за счёт запаса внутренней энергии снег был растоплен. Если же камень был холодный, т.е. температура камня равна температуре среды, то будет совершена только работа, но не будет обмена внутренней энергией.

Итак, работа и теплота не есть особые формы энергии. Нельзя говорить о запасе теплоты или работы. Это *мера переданной* другой системе механической или внутренней энергии. Вот о запасе этих энергий можно говорить. Кроме того, механическая энергия может переходить в тепловую энергию и обратно. Например, если стучать молотком по наковальне, то через некоторое время молоток и наковальня нагреются (это пример *диссипации* энергии).

Можно привести ещё массу примеров превращения одной формы энергии в другую.

Опыт показывает, что во всех случаях, *превращение механической энергии в тепловую и обратно совершается всегда в строго эквивалентных количествах*. В этом и состоит суть первого начала термодинамики, следующего из закона сохранения энергии.

Количество теплоты, сообщаемой телу, идёт на увеличение внутренней энергии и на совершение телом работы:

$$Q = \Delta U + A, \quad (4.1.1)$$

– это и есть *первое начало термодинамики*, или *закон сохранения энергии в термодинамике*.

*Правило знаков*:  $\Delta Q > 0$ , если тепло передаётся от окружающей среды данной системе,  $\Delta U > 0$  и  $\Delta A > 0$ , если система производит работу над окружающими телами, при этом  $U < 0$ . Учитывая правило знаков, первое начало термодинамики можно записать в виде:

$$\Delta U = Q - A$$

– изменение внутренней энергии тела равно разности сообщаемой телу теплоты и произведённой телом работы.

Выражение (4.1.1) для малого изменения состояния системы будет иметь вид:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (4.1.2)$$

В этом выражении  $U$  – функция состояния системы;  $dU$  – её полный дифференциал, а  $\delta Q$  и  $\delta A$  таковыми не являются. В каждом состоянии система обладает определенным и только таким значением внутренней энергии, поэтому можно записать:

$$U = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1.$$

Важно отметить, что теплота  $Q$  и работа  $A$  зависят от того, каким образом совершен переход из состояния 1 в состояние 2 (изохорически, адиабатически и т.д.), а внутренняя энергия  $U$  не зависит. При этом нельзя сказать, что система обладает определенным для данного состояния значением теплоты и работы.

Из формулы (4.1.2) следует, что количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т.е. в джоулях (Дж).

Особое значение в термодинамике имеют круговые или циклические процессы, при которых система, пройдя ряд состояний, возвращается в исходное. На рис. 4.1 изображен циклический процесс 1–a–2–b–1, при этом была совершена работа  $A$ .

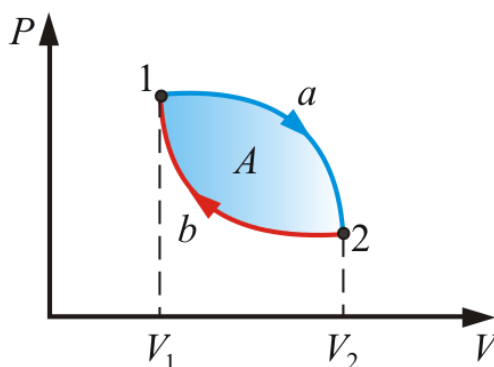


Рис. 4.1

Так как  $U$  – функция состояния, то

$$\oint dU = 0. \quad (4.1.6)$$

Это справедливо для любой функции состояния.

Если  $\Delta U = 0$ , то согласно первому началу термодинамики,  $A = Q$ , т.е. нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы бóльшую работу, чем количество сообщенной ему извне энергии. Иными словами, вечный двигатель первого рода невозможен. Это одна из формулировок первого начала термодинамики.

Следует отметить, что первое начало термодинамики не указывает, в каком направлении идут процессы изменения состояния, что является одним из его недостатков.

## 2. Теплоёмкость идеального газа. Уравнение Майера

**Теплоёмкость** тела характеризуется количеством теплоты, необходимой для нагревания этого тела на один градус:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (4.2.1)$$

Размерность теплоемкости:  $[C] = \text{Дж/К}$ .

Однако, теплоёмкость – величина неопределённая, поэтому пользуются понятиями удельной и молярной теплоёмкости.

**Удельная теплоёмкость** ( $C_{\text{уд}}$ ) есть количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы вещества на 1 градус  $[C_{\text{уд}}] = \text{Дж/К}$ .

Для газов удобно пользоваться **молярной теплоемкостью**  $C_{\mu}$  – количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля газа на 1 градус:

$$C_{\mu} = C_{\text{уд}} \mu. \quad (4.2.2)$$

$[C_{\mu}] = \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

Из п. 1.2 известно, что молярная масса – масса одного моля:

$$\mu = A m_{\text{ед}} N_A,$$

где  $A$  – атомная масса;  $m_{\text{ед}}$  – атомная единица массы;  $N_A$  – число Авогадро; моль  $\mu$  – количество вещества, в котором содержится число молекул, равное числу атомов в 12 г изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ .

Теплоёмкость термодинамической системы зависит от того, как изменяется состояние системы при нагревании.

Если газ нагревать при *постоянном объёме*, то всё подводимое тепло идёт на нагревание газа, то есть изменение его внутренней энергии. Теплоёмкость при этом обозначается  $C_V$ .

$C_P$  – теплоемкость при *постоянном давлении*. Если нагревать газ при постоянном давлении  $P$  в сосуде с поршнем, то поршень поднимется на некоторую высоту  $h$ , то есть газ совершит работу (рис. 4.2).

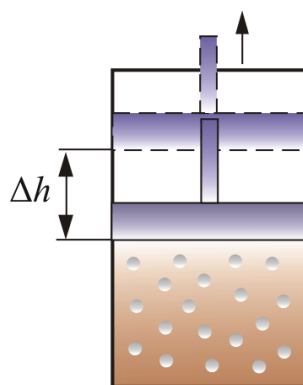


Рис. 4.2

Следовательно, проводимое тепло затрачивается и на нагревание и на совершение работы. Отсюда ясно, что  $C_p > C_v$ .

Итак, проводимое тепло и теплоёмкость *зависят от того, каким путём осуществляется передача тепла*. Значит,  $Q$  и  $C$  не являются функциями состояния.

Величины  $C_p$  и  $C_v$  оказываются связанными простыми соотношениями. Найдём их.

Пусть мы нагреваем один моль идеального газа при постоянном объёме ( $dA = 0$ ). Тогда первое начало термодинамики запишем в виде:

$$dQ = dU, \quad (4.2.3)$$

т.е. бесконечно малое приращение количества теплоты  $dQ$  равно приращению внутренней энергии  $dU$ .

*Теплоёмкость при постоянном объёме будет равна:*

$$C_v = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU_\mu}{dT}. \quad (4.2.4)$$

В общем случае

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v,$$

так как  $U$  может зависеть не только от температуры. Но в случае идеального газа справедлива формула (4.2.4).

Из (4.2.4) следует, что  $dU_\mu = C_v dT$

$$U_\mu = \int_0^T C_v dT = C_v T, \\ U = C_v T. \quad (4.2.5)$$

***Внутренняя энергия идеального газа является только функцией температуры (и не зависит от  $V$ ,  $P$  и тому подобных), поэтому формула (4.2.5) справедлива для любого процесса.***

Для произвольной идеальной массы газа:

$$U = \frac{m}{\mu} C_v T. \quad (4.2.6)$$

При изобарическом процессе, кроме увеличения внутренней энергии, происходит совершение работы газом:

$$dQ_P = dU_\mu + PdV_\mu.$$

$$C_P = \frac{dQ_P}{dT} = \frac{dU_\mu}{dT} + P \frac{dV_\mu}{dT}. \quad (4.2.7)$$

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории  $PV_\mu = RT$ .  
 При изобарическом процессе  $P = \text{const}$ . Следовательно, из (4.2.7) получим:

$$C_P = C_V + R. \quad (4.2.8)$$

Это **уравнение Майера** для одного моля газа.

Из этого следует, что *физический смысл универсальной газовой постоянной в том, что  $R$  – численно равна работе, совершаемой одним молем газа при нагревании на один градус в изобарическом процессе.*

Используя это соотношение, Роберт Майер в 1842 г. вычислил механический эквивалент теплоты:  $1 \text{ кал} = 4,19 \text{ Дж}$ .

Полезно знать формулу Майера для удельных теплоёмкостей:

$$\frac{C_P}{\mu} = \frac{C_V}{\mu} + \frac{R}{\mu},$$

или

$$C_{P_{уд}} - C_{V_{уд}} = \frac{R}{\mu}. \quad (4.2.9)$$

### 3. Теплоёмкости одноатомных и многоатомных газов

Так как энергия одной молекулы идеального газа  $\frac{3}{2}kT$ , то *внутренняя энергия одного моля* идеального газа равна:

$$U_\mu = N_A \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}RT,$$

то есть

$$U_\mu = \frac{3}{2}RT. \quad (4.3.1)$$

*Внутренняя энергия произвольного количества газа:*

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2}RT. \quad (4.3.2)$$

Её изменение:

$$dU = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2}RdT.$$

**Теплоёмкости одноатомных газов  $C_V$  и  $C_P$**

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}R = 12,5 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}},$$

где теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$  – величина постоянная, от температуры не зависит.

Учитывая физический смысл  $R$  для изобарических процессов, можно записать:

$$dQ_p = dU_\mu + RdT \text{ (для одного моля)}. \quad (4.3.3)$$

Тогда *теплоемкость при постоянном давлении для одноатомных газов*:

$$C_p = \frac{3}{2}R + R \text{ или } C_p = \frac{5}{2}R = 20,8 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

Полезно знать соотношение:

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma, \quad (4.3.4)$$

где  $\gamma$  – *коэффициент Пуассона*,  $\gamma = \frac{20,8}{12,5} = 1,67$ .

Так как  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$ , то  $\gamma - 1 = \frac{R}{C_v}$ . Из этого следует, что

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (4.3.5)$$

Кроме того,  $\gamma = \frac{i + 2}{i}$ , где  $i$  – число степеней свободы молекул.

Подставив в выражение для внутренней энергии, получим:

$$U = \frac{m}{\mu} C_v T = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} T.$$

Так как  $PV = \frac{m}{\mu} RT$ , то *внутреннюю энергию можно найти по формуле*

$$U = \frac{PV}{\gamma - 1}. \quad (4.3.6)$$

То, что  $C_v = 12,5 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$ , хорошо подтверждается на опыте с Ne, He, Ar, Kr, парами одноатомных металлов.

### ***Теплоемкости многоатомных газов***

Опыты с двухатомными газами, такими как азот, кислород и др., показали, что

$$C_v \approx 20,8 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

Для водяного пара и других многоатомных газов ( $\text{CH}_3$ ,  $\text{CH}_4$  и так далее)

$$C_v \approx 25 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

Таким образом, *молекулы многоатомных газов нельзя рассматривать как материальные точки. Необходимо учитывать вращательное движение молекул и число степеней свободы этих молекул.*

**Число степеней свободы** ( $i$ ) называется число независимых переменных, определяющих положение тела в пространстве.

Положение одноатомной молекулы, как и материальной точки, задаётся тремя координатами, поэтому она имеет три степени свободы (рис. 4.3).

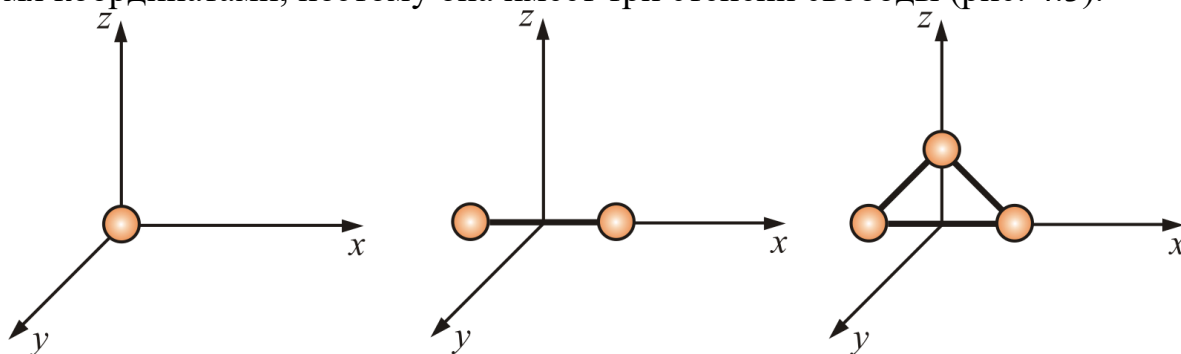


Рис. 4.3

Многоатомная молекула может ещё и вращаться. Например, у двухатомных молекул вращательное движение можно разложить на два независимых вращения, а любое вращение можно разложить на три вращательных движения вокруг взаимно перпендикулярных осей. Но для двухатомной молекулы вращение вокруг её собственной оси не изменит её положение в пространстве, а момент инерции относительно этой оси равен нулю (рис. 4.3).

Таким образом, у двухатомных молекул пять степеней свободы ( $i = 5$ ), а у трёхатомных шесть степеней свободы ( $i = 6$ ).

При взаимных столкновениях молекул возможен обмен их энергиями и превращение энергии вращательного движения в энергию поступательного движения и обратно. Таким путём было установлено равновесие между значениями средних энергий поступательного и вращательного движения молекул. **Больцман доказал**, что для не слишком низких температур **средняя энергия**  $\langle K \rangle$ , приходящаяся на одну степень свободы, равна  $1/2 kT$ .

#### 4. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы

Итак, средняя энергия приходящаяся на одну степень свободы:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} kT. \quad (4.4.1)$$

У одноатомной молекулы  $i = 3$ , тогда для одноатомных молекул

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (4.4.2)$$

для двухатомных молекул

$$\langle K \rangle = \frac{5}{2} kT, \quad (4.4.3)$$

для трёхатомных молекул

$$\langle K \rangle = \frac{6}{2} kT. \quad (4.4.4)$$



Таким образом, на среднюю кинетическую энергию молекулы, имеющей  $i$ -степеней свободы, приходится

$$\langle K \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (4.4.5)$$

Это и есть закон Больцмана о равномерном распределении средней кинетической энергии по степеням свободы.

При этом для двухатомных молекул:  $C_V = \frac{5}{2} R = 20,8 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$ ,

для трехатомных молекул:  $C_V = \frac{6}{2} R = 25 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$ .

В общем случае для молярной массы газа

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (4.4.6)$$

$$C_P = \frac{i+2}{2} R. \quad (4.4.7)$$

Для произвольного количества газов:

$$C_V = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R, \quad (4.4.8)$$

$$C_P = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R. \quad (4.4.9)$$

Из теории также следует, что  $C_V$  не зависит от температуры (рис. 4.4).

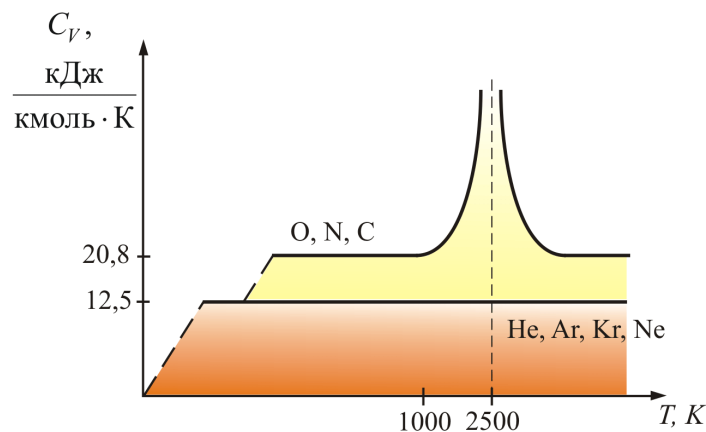


Рис. 4.4

Для одноатомных газов это выполняется в очень широких пределах, а для двухатомных газов только в интервале от 100 до 1000 К. Отличие связано с проявлением квантовых законов. При низких температурах вращательное движение как бы «вымерзает» и двухатомные молекулы движутся поступательно, как одноатомные; равны их теплоёмкости.

При увеличении температуры, когда  $T > 1000$  К, начинают сказываться колебания атомов молекулы вдоль оси  $z$  (атомы в молекуле связаны не жёстко, а как бы на пружине). Одна колебательная степень свободы несет  $\frac{1}{2} kT$

энергии, так как при этом есть и кинетическая, и потенциальная энергия, то есть появляется шестая степень свободы – колебательная. При температуре равной 2500 К, молекулы диссоциируют. На диссоциацию молекул тратится энергия раз в десять превышающая среднюю энергию поступательного движения. Это объясняет сравнительно низкую температуру пламени. Кроме того, атом – сложная система, и при высоких температурах начинает сказываться движение электронов внутри него.

## 5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам идеальных газов

В таблице (4.1) приводятся сводные данные о характеристиках изопроцессов в газах.

Таблица 4.1

	Название процесса			
	Изохорический	Изобарический	Изотермический	Адиабатический
Условие протекания процесса	$V = \text{const}$	$P = \text{const}$	$T = \text{const}$	$\delta Q = 0$ $\gamma = C_p / C_v = \frac{i+2}{i}$
Связь между параметрами состояния	$\frac{P}{T} = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$ $PdV = \frac{m}{\mu} R dT$	$PV = \text{const}$	$PV^\gamma = \text{const}$ $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$
Работа в процессе	$\delta A = 0$ $A = 0$	$\delta A = p dV$ $A = P(V_2 - V_1)$ $A = \frac{m}{\mu} R dT$	$\delta A = P dV$ $A = \int_{V_1}^{V_2} P dV$ $A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$\delta A = P dV = -dU$ $\delta A = -\frac{m i}{\mu 2} R dT$ $A = -\Delta U = C_v(T_1 - T_2)$ $A = \frac{P_1 V_1 (T_1 - T_2)}{(\gamma - 1) T_1}$
Количество теплоты, сообщённое в процессе	$\delta Q = C_v dT$ $Q = C_v(T_2 - T_1)$	$\delta Q = C_p dT$ $Q = C_p(T_2 - T_1)$ $Q = \frac{m}{\mu} R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1\right)$	$\delta Q = \delta A$ $Q = A$	$\delta Q = 0$ $Q = 0$
Изменение внутренней энергии	$dU = \delta Q$ $U = Q$	$dU = C_v dT$ $\Delta U = C_v(T_2 - T_1)$ $\Delta U = \frac{i m}{2 \mu} R \Delta T$	$dU = 0$ $U = 0$	$dU = -\delta A = -C_v dT$ $U = A = -C_v(T_2 - T_1)$

				$\Delta U = \frac{P_1 V_1}{T_1(\gamma - 1)}$
Теплоёмкость	$C_V = \frac{m R}{\mu (\gamma - 1)}$ $C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R$	$C_P = \frac{m \gamma R}{\mu (\gamma - 1)}$ $C_P = \frac{m dQ}{\mu dT}$	$C_T = \pm \infty$	$C_{ад} = 0$

Здесь уместно рассмотреть еще и **политропический процесс** – такой процесс, при котором изменяются все основные параметры системы, кроме теплоемкости, т.е.  $C = \text{const}$ .

Уравнение политропы:

$$PV^n = \text{const} \quad (4.5.1)$$

или

$$TV^{n-1} = \text{const} . \quad (4.5.2)$$

Здесь  $n$  – показатель политропы.

С помощью этого показателя можно легко описать любой изопроецесс:

1. Изобарический процесс  $P = \text{const}$ ,  $n = 0$ :

$$C = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \gamma C_V = C_P. \quad (4.5.3)$$

2. Изотермический процесс  $T = \text{const}$ ,  $n = 1$ ,  $CT = \pm \infty$ .

3. Изохорический процесс  $V = \text{const}$ ,  $n = \pm \infty$ :

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (4.5.4)$$

4. Адиабатический процесс  $\Delta Q = 0$ ,  $n = \gamma$ ,  $C_{ад} = 0$ .

Во всех этих процессах работу можно вычислить по формуле:

$$A = \frac{P_1 V_1}{n - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (4.5.5)$$

# Тема:

## Обратимые и необратимые процессы.

## Реальные газы

### План:

**5.1. Круговые обратимые и необратимые процессы**

**5.2. Тепловые машины**

**5.3. Цикл Карно (обратимый)**

**5.4. Работа и КПД цикла Карно**

**5.5. Необратимый цикл. Холодильная машина**

**7.1. Реальные газы**

**7.2. Уравнение Ван-дер-Ваальса**

**7.3. Изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса**

**7.4. Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса**

## 5.1. Круговые обратимые и необратимые процессы

Прежде чем переходить к изложению второго закона термодинамики, рассмотрим круговые процессы. *Круговым процессом, или циклом, называется такой процесс, в результате которого термодинамическое тело возвращается в исходное состояние.* В диаграммах состояния  $P$ ,  $V$  и других круговые процессы изображаются в виде замкнутых кривых (рисунок 5.1). Это связано с тем, что в любой диаграмме два тождественных состояния (начало и конец кругового процесса) изображаются одной и той же точкой на плоскости.

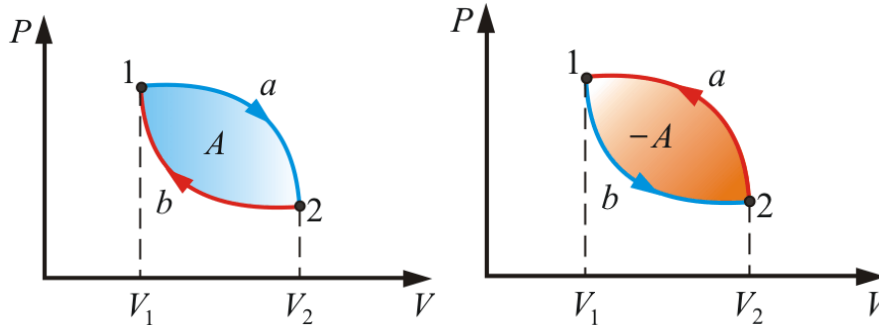


Рисунок 5.1

Рисунок 5.2

Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения (1 – 2) и сжатия (2 – 1) газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры  $1a2V_2V_1$ ) положительна ( $dV > 0$ ), работа сжатия (определяется площадью фигуры  $2b1V_1V_2$ ) отрицательна ( $dV < 0$ ). Следовательно, *работа, совершаемая за цикл, определяется площадью, охваченной замкнутой кривой.* Если за цикл совершается положительная работа

$$A = \oint PdV > 0 \quad (5.1.1)$$

(цикл протекает по часовой стрелке), то он называется *прямым* (рисунок 5.1). Если за цикл совершается отрицательная работа

$$A = \oint PdV < 0, \quad (5.1.2)$$

(цикл протекает против часовой стрелки), то он называется *обратным* (рисунок 5.2).

Круговые процессы лежат в основе всех тепловых машин: двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин, паровых и холодильных машин и т. д.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, и следовательно полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики для кругового процесса

$$Q = \Delta U + A = A, \quad (5.1.3)$$

т.е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2, \quad (5.1.4)$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, полученное системой;  $Q_2$  – количество теплоты, отданное системой.

Поэтому термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (5.1.5)$$

Все термодинамические процессы, в том числе и круговые, делят на две группы: обратимые и необратимые.

**Процесс называют обратимым**, если он протекает таким образом, что после окончания процесса он может быть проведен в **обратном направлении** через все те же промежуточные состояния, что и прямой процесс. После проведения кругового обратимого процесса никаких изменений в среде, окружающей систему, не произойдет. При этом под средой понимается совокупность всех не входящих в систему тел, с которыми система непосредственно взаимодействует.

**Процесс называется необратимым**, если он протекает так, что после его окончания систему нельзя вернуть в начальное состояние через прежние промежуточные состояния. Нельзя осуществить необратимый круговой процесс, чтобы нигде в окружающей среде не осталось никаких изменений.

Свойством обратимости обладают только равновесные процессы. Каждое промежуточное состояние является состоянием термодинамического равновесия, нечувствительного к тому, идет ли процесс в прямом или обратном направлении.

Например, обратимым можно считать процесс *адиабатического расширения* или сжатия газа. При адиабатическом процессе условие теплоизоляции системы исключает непосредственный теплообмен между системой и средой. Поэтому, производя *адиабатическое расширение газа*, а затем *сжатие*, можно вернуть газ в исходное состояние так, что в окружающей среде никаких изменений не произойдет. Конечно, в реальных условиях, и в этом случае, всегда имеется некоторая необратимость процесса, обусловленная, например, несовершенством теплоизоляции, трением при движении поршня и т.д.

Только в обратимых процессах теплота используется по назначению, не расходуется зря. Если процесс неравновесный, то будет необратимый переход, т.е. часть энергии уйдет (необратимо).

*Максимальным КПД обладают машины, у которых только обратимые процессы.*

Реальные процессы сопровождаются *диссипацией энергии* (из-за трения, теплопроводности и т.д.), которая нами не рассматривается. *Обратимые процессы* – это в какой-то степени идеализация реальных процессов. Их рассмотрение важно по двум причинам:

- многие процессы в природе и технике практически обратимы;
- обратимые процессы являются наиболее экономичными и приводят к максимальному значению термического коэффициента полезного действия тепловых двигателей.

## 5.2. Тепловые машины

**Тепловой машиной** называется периодический действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла.

Любая тепловая машина работает по принципу кругового (циклического) процесса, т.е. возвращается в исходное состояние (рисунок 5.1). Но чтобы при этом была совершена полезная работа, возврат должен быть произведен с наименьшими затратами.

Полезная работа равна разности работ расширения и сжатия, т.е. равна площади, ограниченной замкнутой кривой.

Обязательными частями тепловой машины являются нагреватель (источник энергии), холодильник, рабочее тело (газ, пар).

Зачем холодильник? Так как в тепловой машине реализуется круговой процесс, то вернуться в исходное состояние можно с меньшими затратами, если отдать часть тепла. Или если охладить пар, то его легче сжать, следовательно работа сжатия будет меньше работы расширения. Поэтому в тепловых машинах используется холодильник.

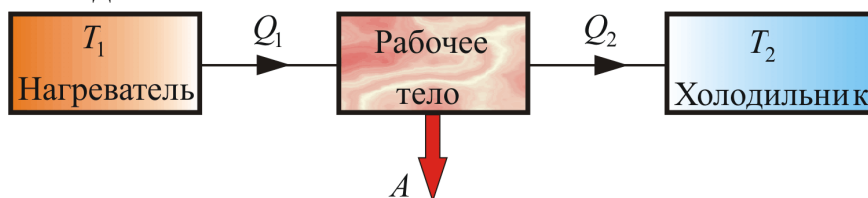


Рисунок 5.3

Прямой цикл используется в *тепловом двигателе* – периодически действующей тепловой машине, совершающей работу за счет полученной извне теплоты. Рассмотрим схему теплового двигателя (рисунок 5.3). От термостата с более высокой температурой  $T_1$ , называемого нагревателем, за цикл отнимается количество теплоты  $Q_1$ , а термостату с более низкой температурой  $T_2$ , называемому холодильником, за цикл передается количество теплоты  $Q_2$  и совершается работа  $A$ :

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (5.2.1)$$

Обратный цикл используется в *холодильных машинах* – периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой. Принцип действия холодильной машины представлен на рисунке 5.4. Системой за цикл поглощается при низкой температуре  $T_2$  количество теплоты  $Q_2$  и отдается при более высокой температуре  $T_1$  количество теплоты  $Q_1$  за счет работы внешних сил  $A$ .

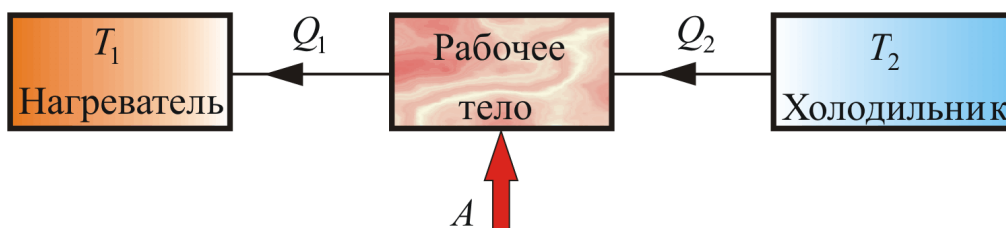
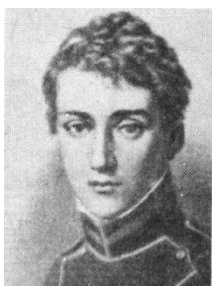


Рисунок 5.4

### 5.3. Цикл Карно (обратимый)



**Карно Никола Леонард Сади** (1796 – 1832) – французский физик и инженер, один из создателей термодинамики. Впервые показал, что работу можно получить в случае, когда тепло переходит от нагретого тела к более холодному (второе начало термодинамики). Ввел понятие кругового и обратимого процессов, идеального цикла тепловых машин, заложил тем самым основы их теории. Пришел к понятию механического эквивалента теплоты. В 1824 г. опубликовал сочинение «Размышления о движущей силе огня и о машинах способных развивать эту силу».

Основываясь на втором начале термодинамики, **Карно** вывел **теорему**, носящую теперь его имя:

*Из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины. Причем КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и не зависят от конструкции машины и от природы рабочего вещества. При этом КПД меньше единицы.*

Цикл, изученный Карно, является самым экономичным и представляет собой круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рисунок 5.5).

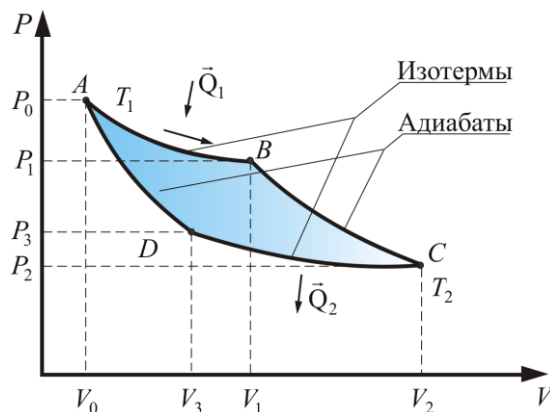


Рисунок 5.5

Рассмотрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем. Определим его КПД.

Рассмотрим круговой процесс, при котором тепло можно превратить в работу, притом наилучшим образом, т.е. чтобы работа была максимальна. Напомню, что тепловой машиной называется периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла и имеющего нагреватель, холодильник и рабочее тело. Так вот будем считать, что нагреватель и холодильник имеют бесконечную теплоемкость, т.е. их температуры не изменяются в процессе передачи тепла.

Рассмотрим процесс сначала качественно. Начнем процесс из т. А. Газ сжат до давления  $P_0$  и находится в контакте с нагревателем при  $T_1$ . Расширение газа при каком процессе даст максимальную работу? Вспомним закон



сохранения энергии в термодинамике, или  $I$  начало:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (5.3.1)$$

В изотермическом процессе  $dU = 0$ , значит все тепло перейдет в работу:

$$\delta Q = \delta A$$

$$(5.3.2)$$

Итак, на участке  $AB$  – *изотермическое расширение при температуре  $T_1$*  (процесс теплопередачи не происходит, т.к. нет разности температур, не происходит и передача тепла без совершения работы, т.е. процесс обратимый).

Полученное рабочим телом тепло нужно передать холодильнику. Но если просто привести к соприкосновению с холодильником, то будет передача тепла без совершения работы. Поэтому нужно сначала рабочее тело охладить до  $T_2$  (а охлаждать без затрат тепла – это *адиабатическое расширение* участок  $BC$ ), а затем уже присоединять к холодильнику. *Адиабатическим* расширением заканчивается первая половина цикла – *совершение полезной работы*.

Теперь необходимо вернуть рабочее тело в исходное состояние, т.е. сжать газ до  $P_0$ . Контакт с нагревателем опять не следует делать, пока рабочее тело не примет температуру нагревателя ( $T_1$ ).

Возвращение в т.  $A$  опять происходит в два этапа: сначала рабочее тело сжимают, не прерывая контакта с холодильником, при этом холодильнику отдается тепло  $Q_2$  (*изотермическое сжатие  $CD$* ). Затем изолируют тело от холодильника, *адиабатно* сжимают его, при этом температура его повышается до  $T_1$  ( $DA$ ). Рабочее тело при *адиабатическом сжатии* нагревается за счет внешней работы, совершаемой над ним.

Как видим, на всех стадиях кругового процесса нигде не допускается соприкосновение тел с разной температурой, т.е. нет необратимых процессов теплопроводности. Весь цикл проводится обратимо (бесконечно медленно).

## 5.4. Работа и КПД цикла Карно

Найдем полезную работу цикла Карно.

**Процесс  $A$ – $B$ .** *Положительная работа, совершенная газом при изотермическом расширении* одного моля газа от  $V_0$  до  $V_1$ .

Тепло, полученное от нагревателя  $Q_1$ , идет на изотермическое расширение газа, совершая при этом работу  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = Q_1. \quad (5.4.1)$$

**Процесс  $B$ – $C$**  – *адиабатическое расширение*. При адиабатическом расширении теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения  $A_2$  совершается за счет изменения внутренней энергии.

Уравнение адиабаты: 
$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}.$$

Давление при этом изменится до  $P_2$ . Полученная *работа на этой стадии*:

$$A_2 = \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2). \quad (5.4.2)$$

**Процесс C–D – изотермическое сжатие.** На третьем этапе газ изотермический сжимается  $V_2$  до  $V_3$ . Теплота  $Q_2$ , отданная газом холодильнику при изотермическом сжатии, равна работе сжатия  $A_3$  – это работа совершаемая над газом, она отрицательна:

$$A_3 = -\frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = -Q_2. \quad (5.4.3)$$

**Процесс D–A – адиабатическое сжатие.**

Уравнение адиабаты: 
$$\left( \frac{V_3}{V_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Работа сжатия на последнем этапе:

$$A_4 = -\frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2). \quad (5.4.4)$$

Общая работа цикла  $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ , или

$$A = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_0} + \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} - \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}.$$

Обозначим  $\ln \beta = \ln \frac{V_2}{V_3} = \ln \frac{V_1}{V_0}$ , тогда

$$A = Q_1 - Q_2 = R(T_1 - T_2) \ln \beta > 0. \quad (5.4.5)$$

Значит работа, совершаемая газом больше работы внешних сил.

Работа равна площади ограниченной кривой ABCDA.

Из равенств следует:

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \left| \frac{T_1}{T_2} \right|. \quad (5.4.6)$$

Полезная работа:

$$A = Q_1 - Q_2.$$

КПД  $\eta$  равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.4.7)$$

Из (5.4.7) видно, что  $\eta < 1$ , зависит от разности температур между нагревателем и холодильником (и не зависит от конструкции машины и рода рабочего тела). Это ещё одна формулировка **теоремы Карно**.

Цикл Карно, рассмотренный нами, был на всех стадиях проведен так, что не было необратимых процессов (не было соприкосновения тел с разными температурами). Поэтому здесь самый большой КПД. Больше получить в принципе невозможно.

## 5.5. Необратимый цикл. Холодильная машина

Предположим для простоты, что необратимость цикла обусловлена тем, что теплообмен между рабочим телом и источником теплоты (считаем холодильник тоже «источником», только отрицательной температуры) происходит при конечных разностях температур, т.е. нагреватель, отдавая тепло, охлаждается на  $\Delta T$ , а холодильник нагревается на  $\Delta T$ .

Любой процесс, не удовлетворяющий условию обратимости, мы называем **необратимым процессом**. Примером необратимого процесса является процесс торможения тела под действием сил трения. При этом скорость тела уменьшается, и оно останавливается. Энергия механического движения тела расходуется на увеличение энергии хаотического движения частиц тела и окружающей среды. Происходит **диссипация** энергии. Для продолжения движения необходим компенсирующий процесс охлаждения тела и среды. В нашем случае тепловых машин, нагреватель и холодильник – не идеальны, они не обладают бесконечной теплоёмкостью и в процессе работы получают или отдают добавочную температуру  $\Delta T$ .

На рисунке 5.6 изображен один из таких необратимых циклов.

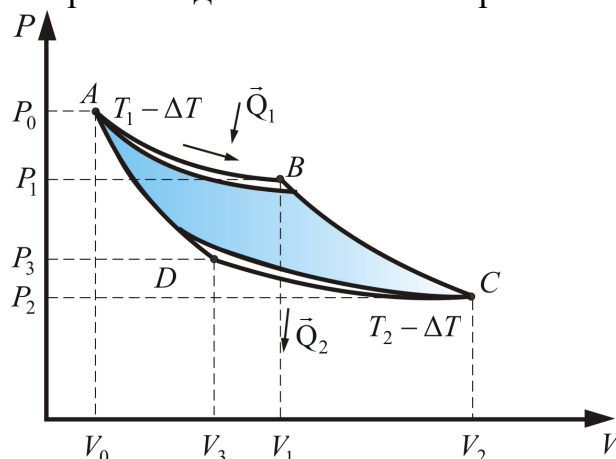


Рисунок 5.6

Как видно из рисунка, площадь внутри фигуры  $ABCD$  уменьшилась из-за потерь, значит уменьшилась полезная работа цикла и КПД.

Для обратимого цикла Карно

$$\eta_{\text{обр}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.5.1)$$

Для необратимого цикла

$$\eta_{\text{необр}} = 1 - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1 - \Delta T} < 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.5.2)$$

Т.е. всегда  $\eta_{\text{обр}} > \eta_{\text{необр}}$  – этот вывод справедлив независимо от причин необратимости циклического процесса.

## Холодильная машина

*Холодильная машина* это машина, работающая по обратному циклу Карно (рисунок 5.4). То есть если проводить цикл в обратном направлении, тепло будет забираться у холодильника и передаваться нагревателю (за счет работы внешних сил).

Обратный цикл Карно можно рассмотреть на примере рисунке 5.5. При изотермическом сжатии  $B-A$ , от газа отводится количество теплоты  $Q_1$  при  $T_1$ . В процессе изотермического расширения  $D-C$ , к газу подводится количество теплоты  $Q_2$ .

В этом цикле  $Q_1 < 0$ ,  $Q_2 > 0$  и работа, совершаемая над газом, отрицательна, т.е.

$$A = (Q_1 + Q_2) < 0. \quad (5.5.3)$$

Если рабочее тело совершает обратный цикл, то при этом *можно переносить энергию в форме тепла от холодного тела к горячему за счет совершения внешними силами работы.*

Для холодильных машин Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.5.4)$$

## 7.1. Реальные газы

Как известно, уравнение состояния устанавливает функциональную связь между давлением  $P$ , объемом  $V$ , температурой  $T$  и числом молей  $n$  газа в состоянии равновесия. Эта связь может выражаться не только в форме уравнения, но также графически или в виде таблиц, которые часто используются, особенно для практических целей. Самым простым и известным уравнением состояния является уравнение состояния идеального газа:

$$PV = \nu RT \quad (7.1.1)$$

Реальные газы описываются уравнением состояния идеального газа только приближенно, и отклонения от идеального поведения становятся заметными при высоких давлениях и низких температурах, особенно когда газ близок к конденсации. Так, для газов с низкой температурой сжижения ( $He$ ,  $H_2$ ,  $Ne$  и даже  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $Ar$ ,  $CO$ ,  $CH_4$ ) при давлениях до 50 атм отклонения не превышают 5 %, а при давлениях до 10 атм. – 2 %. Легко конденсирующиеся газы ( $CO_2$ ,  $SO_2$ ,  $Cl_2$ ,  $CH_3Cl$ ) уже при 1 атм. обнаруживают отклонения до 3 %.

Предпринималось много попыток для учета отклонений свойств реальных газов от свойств идеального газа путем введения различных поправок в уравнение состояния идеального газа. Наибольшее распространение вследствие простоты и физической наглядности получило *уравнение Ван-дер-Ваальса* (1873).

Первая поправка в уравнении состояния идеального газа рассматривает собственный объем, занимаемый молекулами реального газа. В уравнении Дюпре (1864)

$$P(V - vb) = \nu RT ,$$

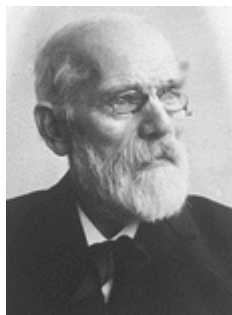
постоянная  $b$  учитывает собственный мольный объем молекул,  $\nu = \frac{m}{\mu}$  – число молей газа.

При понижении температуры межмолекулярное взаимодействие в реальных газах приводит к конденсации (образование жидкости). Межмолекулярное притяжение эквивалентно существованию в газе некоторого внутреннего давления  $P'$  (иногда его называют статическим давлением). Изначально величина  $P'$  была учтена в общей форме в уравнении Гирна (1865):

$$(P + P')(V - vb) = \nu RT .$$

Голландский физик Ван-дер-Ваальс в 1873 г. дал функциональную интерпретацию внутреннего давления. Согласно модели Ван-дер-Ваальса, силы притяжения между молекулами (*силы Ван-дер-Ваальса*) обратно пропорциональны шестой степени расстояния между ними, или второй степени объема, занимаемого газом. Считается также, что силы притяжения суммируются с внешним давлением. С учетом этих соображений уравнение состояния идеального газа преобразуется в *уравнение Ван-дер-Ваальса*:

$$(V - vb) \left( P + \frac{v^2 a}{V^2} \right) = \nu RT . \quad (7.1.2)$$



**Ян-Дидерик Ван-дер-Ваальс** (1837–1923) – голландский физик. Его докторская диссертация, посвященная непрерывности газообразного и жидкого состояний, получила горячее одобрение со стороны Джеймса-Клерка Максвелла. В 1910 г. Ван-дер-Ваальс получил Нобелевскую премию по физике «за работу над уравнением состояния газов и жидкостей». Помимо Нобелевской премии, Ван-дер-Ваальс получил почетную докторскую степень Кембриджского университета. Кроме того, он являлся членом Нидерландской королевской академии наук и искусств и был избран иностранным членом Французской академии наук, Берлинской королевской академии наук, Московского императорского общества

естествоиспытателей, Британского химического общества и Американской национальной академии наук.

**Реальные газы** – газы, свойства которых зависят от взаимодействия молекул. В обычных условиях, когда средняя потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия много меньше средней кинетической энергии молекул, свойства реальных и идеальных газов отличаются незначительно. Поведение этих газов резко различно при высоких давлениях и низких температурах, когда начинают проявляться квантовые эффекты.

Ван-дер-Ваальс, объясняя свойства реальных газов и жидкостей, предположил, что на малых расстояниях между молекулами действуют силы отталкивания, которые с увеличением расстояния сменяются силами притяжения. Межмолекулярные взаимодействия имеют электрическую

природу и складываются из сил притяжения (ориентационных, индукционных) и сил отталкивания.

**Ориентационные силы** действуют между полярными молекулами – молекулами, обладающими дипольными или квадрупольными моментами. Сила притяжения между молекулами зависит от их взаимной ориентации, поэтому они и называются ориентационными. Хаотическое тепловое движение непрерывно меняет ориентацию полярных молекул, но среднее по всем ориентациям значение силы не равно нулю (рисунок 7.1).

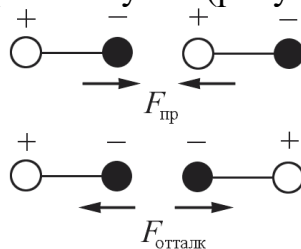


Рисунок 7.1

Среднее значение потенциальной энергии ориентационного межмолекулярного взаимодействия равно  $U_{ор}(r) \sim p_1 p_2 r^{-6}$ , где  $p_1, p_2$  – дипольные моменты взаимодействующих молекул. Сила ориентационного взаимодействия  $F_{ор} = -\partial U/\partial r \sim r^{-7}$  убывает с расстоянием значительно быстрее, чем кулоновская сила взаимодействия заряженных частиц  $F_{кул} \sim r^{-2}$ .

**Индукционные (поляризационные) силы** действуют между полярной и неполярной молекулами, а также между полярными молекулами. Полярная молекула создает электрическое поле, которое поляризует другую молекулу – индуцирует в ней дипольный момент. Потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия в этом случае пропорциональна дипольному моменту  $p_1$  полярной молекулы и поляризуемости  $\alpha_2$  второй молекулы:  $U_{инд} \sim p_1 \alpha_2 r^{-6}$ . Индукционные силы убывают по тому же закону, что и ориентационные  $F_{инд} \sim r^{-7}$ .

**Дисперсионное молекулярное взаимодействие** возникает благодаря виртуальному нарушению электронейтральности молекулы в отдельные моменты времени. Мгновенный диполь поляризует соседние молекулы – возникает взаимодействие мгновенных диполей. Данное взаимодействие называется дисперсионным, его энергия определяется поляризуемостью молекул  $\alpha_1, \alpha_2$ :  $U(r) \sim \alpha_1 \alpha_2 r^{-6}$ , а сила убывает по закону  $F_{дисп} \sim r^{-7}$ . Обычно дисперсионные силы превосходят ориентационные и индукционные. Например, при взаимодействии таких полярных молекул, как CO, HI, HBr и др.,  $F_{дисп}$  в десятки и сотни раз превосходят все остальные.

Отметим, что все три силы и энергии одинаковым образом убывают с расстоянием:

$$F = F_{ор} + F_{инд} + F_{дисп} \sim r^{-7},$$

$$U = U_{ор} + U_{инд} + U_{дисп} \sim r^{-6}.$$

**Силы отталкивания** действуют между молекулами на очень малых расстояниях, когда происходит взаимодействие электронных оболочек атомов,

входящих в состав молекул. Принцип Паули запрещает проникновение заполненных электронных оболочек друг в друга. Возникающие при этом силы отталкивания зависят в большей степени, чем силы притяжения от индивидуальных особенностей молекул. К хорошему согласию с данными экспериментов приводит допущение, что потенциальная энергия сил отталкивания возрастает с уменьшением расстояния по закону  $U_{от}(r) \sim r^{-12}$ , а, соответственно, сила отталкивания растет как  $F_{от} \sim r^{-13}$ . Полагаем, что  $U(r = \infty) = 0$  – при больших расстояниях потенциальная энергия взаимодействия равна нулю. В этом случае кривая взаимодействия описывается потенциалом Леннарда – Джонса (рисунок 7.2)

$$U(r) = -ar^{-6} + br^{-12}.$$

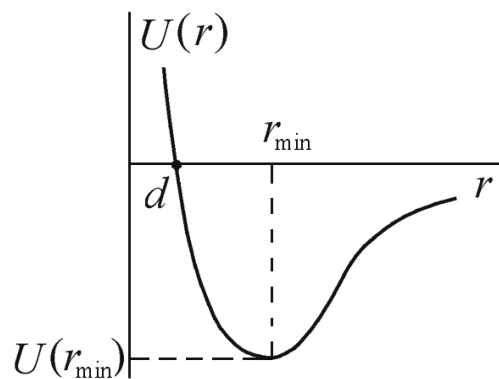


Рисунок 7.2

Глубина потенциала равна  $U(r_{\min}) = -a^2/4b$  при  $r_{\min} = (2b/a)^{1/6}$  – расстоянию, соответствующем наибольшей энергии связи молекул. Отметим, что в данном потенциале не учтены ориентационные взаимодействия, существенные для многоатомных молекул и кристаллов.

## 7.2. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Уравнение Ван-дер-Ваальса (7.1.2) – одно из первых уравнений состояния реального газа. Данное уравнение учитывает конечные размеры всех молекул, что становится существенным при больших давлениях, а также притяжение молекул в результате межмолекулярного взаимодействия.

Уравнение состояния реального газа, предложенное Ван-дер-Ваальсом можно получить из следующих рассуждений. Учтем влияние конечных размеров молекул на уравнение состояния реального газа. Давление определяется средней кинетической энергией теплового движения всех молекул

$$P = nkT. \quad (7.2.1)$$

При конечных размерах молекул, имеющих радиус  $r$ , область  $4\pi(2r)^3/3$  вокруг каждой из молекул будет недоступна для попадания в нее другой неточечной молекулы. В результате в сосуде, содержащем  $N$  молекул конечных размеров, область объемом  $(N/2)4\pi(2r)^3/3 = 4NV_{\text{молек}}$  ( $V_{\text{молек}} = 4\pi r^3/3$  – объем одной молекулы) будет недоступна для столкновений. Поэтому можно считать, что половина всех молекул занимает объем  $b = 4NV_{\text{молек}}$  и покоится, а другая половина представляет собой точечные молекулы и движется с удвоенной

кинетической энергией, обладая температурой  $T' = 2T$ . Объем, доступный точечным молекулам, будет равен  $V - b$ , а давление, оказываемое на стенки сосуда, определяется точечными подвижными молекулами ( $N' = N/2$ ):

$$P = n'kT' = \frac{N'}{V - 4NV_{\text{молек}}} kT' = \frac{NkT}{V - 4NV_{\text{молек}}}.$$

Если в сосуде находится один моль газа, то уравнение состояния примет вид ( $N = N_A$ ,  $N_A k = R$ ,  $b = 4N_A V_{\text{молек}}$ ):

$$P(V - b) = RT.$$

Для  $\nu = m/\mu$  молей газа уравнение состояния газа с учетом конечного размера молекул примет вид

$$P(V - \nu b) = \nu RT.$$

Отметим, что это уравнение является приближенным и выведено в предположении только парных столкновений. При больших давлениях это условие уже не выполняется, и возможно одновременное соприкосновение трех и более частиц, а такие случаи были исключены из рассмотрения.

Рассмотрим теперь влияние сил притяжения на уравнение состояния идеального газа. Будем считать для простоты частицы газа точечными. Наличие сил притяжения между ними, действующих на больших расстояниях, приводит к появлению дополнительного внутреннего воздействия на газ. Это обусловлено тем, что в то время как в объеме газа действие сил притяжения между молекулами в среднем уравнивается, на границе «газ – стенка сосуда» действие сил притяжения со стороны газа остается не скомпенсированным, и появляется избыточная сила, направленная в сторону газа (рисунок 7.3).

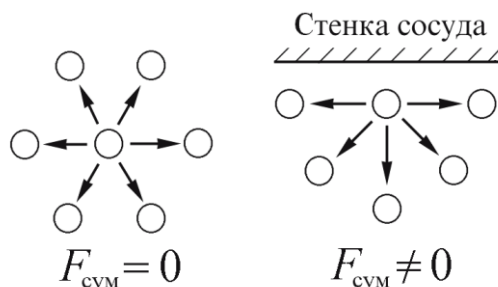


Рисунок 7.3

Дополнительное внутреннее давление пропорционально числу частиц, приходящихся на единицу площади границы  $n_S$  и силе взаимодействия этих частиц с другими частицами газа, находящимися в единице объема  $n_V$ .

В результате избыточное внутреннее давление  $P_i$  ( $i$  – *intrinsic*) будет пропорционально квадрату концентрации числа частиц

$$P_i \sim n_S n_V \sim N^2/V^2,$$

где  $N$  – полное число частиц в сосуде объема  $V$ . Если  $N = N_A$  – в сосуде находится один моль газа, то запишем

$$P_i = a/V^2,$$

где  $a$  – постоянная величина, своя для каждого сорта газа. В случае  $\nu$ -молей имеем

$$P_i = \nu^2 a/V^2.$$



С учетом внутреннего давления уравнение состояния примет вид

$$P + P_i = nkT.$$

Давление  $P_i$  не зависит от материала стенки, в противном случае удалось бы создать вечный двигатель первого рода. Роль стенки может играть и сам газ. Достаточно для этого выполнить мысленное сечение произвольной плоскостью любой внутренней области объема газа. Полученное уравнение, с учетом выражения для  $P_i$  переходит в новое уравнение состояния реального газа при наличии сил притяжения:

$$(P + v^2 a/V^2)V = vRT.$$

Учитывая совместное действие сил притяжения и сил отталкивания и полученные поправки для объема и давления в уравнении Менделеева – Клапейрона, получим уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа:

$$(P + v^2 a/V^2)(V - vb) = vRT, \quad (7.2.3)$$

или для одного моля:

$$V_m - b \left( P + \frac{a}{V_m^2} = RT \right). \quad (7.2.4)$$

Данное уравнение справедливо при условии  $vb \ll V$  и  $v^2 a/V^2 \ll P$ . Помимо этого предполагается, что частицы газа сферически симметричны. Поскольку реально это не так, то даже для неплотных газов величины  $a$  и  $b$  зависят от температуры (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1.

Константы Ван-дер-Ваальса и критические данные

	$P_k$ , атм	$V_k$ , м <sup>3</sup> /кмоль	$T_k$ , К	$a$ , ат·м <sup>6</sup> /кмоль <sup>2</sup>	$b$ , м <sup>3</sup> /кмоль	$R/N_A k$
НСl	86	0,060	324,6	0,922	0,020	0,469
H <sub>2</sub>	13,2	0,065	33,2	0,194	0,022	0,813
He	2,34	0,058	5,2	0,035	0,024	0,821
H <sub>2</sub> O	225	0,055	647,3	5,65	0,031	0,602
O <sub>2</sub>	51,4	0,075	154,3	1,40	0,032	0,768
N <sub>2</sub>	34,8	0,090	126,0	1,39	0,039	0,782
CO <sub>2</sub>	75	0,096	304,1	3,72	0,043	0,745

*Примечание.* Константы  $a$  и  $b$  выбраны таким образом, чтобы получить оптимальное согласование уравнения Ван-дер-Ваальса с измеренными изотермами для комнатной температуры.

Для плотных газов уравнение Ван-дер-Ваальса как количественное соотношение не годится. Однако качественно оно позволяет описывать поведение газов при высоких давлениях, конденсацию газов и переход газов в критическое состояние.

### 7.3. Изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса

Проанализируем изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса – зависимости  $P$  от  $V$  для реального газа при постоянной температуре. Умножив уравнение Ван-дер-Ваальса на  $V^2$  и раскрыв скобки, получаем

$$PV^3 - (RT + bP)vV^2 + av^2V - abv^3 = 0.$$

Поскольку данное уравнение имеет третью степень относительно  $V$ , а коэффициенты при  $V$  действительны, то оно имеет либо один, либо три вещественных корня, т.е. изобара  $P = \text{const}$  пересекает кривую  $P = P(V)$  в одной или трех точках, как это изображено на рисунке 7.4. Причем с повышением температуры мы перейдем от немонотонной зависимости  $P = P(V)$  к монотонной однозначной функции. Изотерма при  $T_{\text{кр}}$ , которая разделяет немонотонные  $T < T_{\text{кр}}$  и монотонные  $T > T_{\text{кр}}$  изотермы, соответствует изотерме при критической температуре. При температуре выше критической зависимость  $P = P(V)$  является однозначной монотонной функцией объема. Это означает, что при  $T > T_{\text{кр}}$  вещество находится только в одном, газообразном состоянии, как это имело место у идеального газа. При температуре газа ниже критической такая однозначность исчезает, а это означает возможность перехода вещества из газообразного в жидкое и наоборот. На участке  $ACB$  изотермы  $T_1$  давление растет с увеличением объема  $(dP/dV) > 0$ . Данное состояние неустойчиво, поскольку здесь должны усиливаться малейшие флуктуации плотности. Поэтому область  $BCA$  не может устойчиво существовать. В областях  $DLB$  и  $AGE$  давление падает с увеличением объема  $(dP/dV)_T < 0$  – это необходимое, но не достаточное условие устойчивого равновесия. Эксперимент показывает, что система переходит из области устойчивых состояний  $GE$  (газ) в область устойчивых состояний  $LD$  (жидкость) через двухфазное состояние (газ – жидкость)  $GL$  вдоль горизонтальной изотермы  $GCL$ .

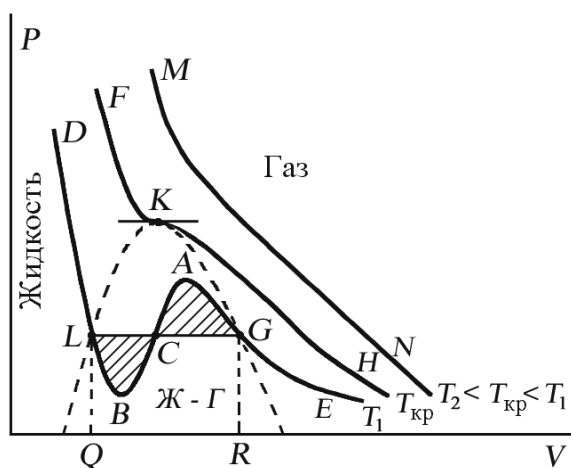


Рисунок 7.4

При квазистатическом сжатии, начиная с точки  $G$ , система распадается на 2 фазы – жидкость и газ, причем плотности жидкости и газа остаются при сжатии неизменными и равными их значениям в точках  $L$  и  $G$  соответственно. При сжатии количество вещества в газообразной фазе непрерывно уменьшается, а в жидкой фазе – увеличивается, пока не будет достигнута точка  $L$ , в которой все вещество перейдет в жидкое состояние.

Наличие критической точки на изотерме Ван-дер-Ваальса означает, что для каждой жидкости существует такая температура, выше которой вещество может существовать только в газообразном состоянии. К этому заключению пришел и Д.И. Менделеев в 1861 г. Он заметил, что при определенной температуре прекращалось поднятие жидкости в капиллярах, т.е. поверхностное натяжение обращалось в нуль. При той же температуре обращалась в нуль скрытая теплота парообразования. Такую температуру Менделеев назвал температурой абсолютного кипения. Выше этой температуры, согласно Менделееву, газ не может быть сконденсирован в жидкость никаким увеличением давления.

Критическую точку  $K$  мы определили как точку перегиба критической изотермы, в которой касательная к изотерме горизонтальна (рисунок 7.5). Ее можно определить также как точку, в которую в пределе переходят горизонтальные участки изотерм при повышении температуры до критической. На этом основан способ определения критических параметров  $P_k$ ,  $V_k$ ,  $T_k$ , принадлежащий Эндрюсу. Строится система изотерм при различных температурах. Предельная изотерма, у которой горизонтальный участок  $LG$  (рисунок 7.4) переходит в точку, будет критической изотермой, а указанная точка – критической точкой (рисунок 7.5).

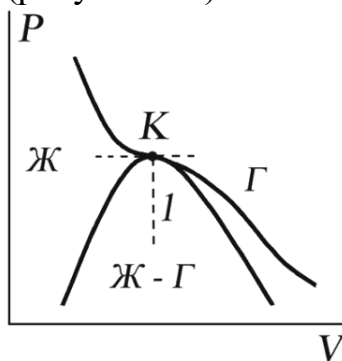


Рисунок 7.5

Недостаток способа Эндрюса заключается в его громоздкости.

## 7.4. Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса

Энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса складывается из внутренней энергии молекул, составляющих газ: кинетической энергии теплового движения центра масс молекул, равной  $\int_0^T C_V dT$ , и потенциальной энергии взаимного притяжения молекул.

Потенциальная энергия притяжения молекул равна работе, необходимой для разведения молекул на бесконечное расстояние друг от друга. В этом конечном состоянии молекулы не взаимодействуют друг с другом, а потенциальную энергию можно считать равной нулю. Дополнительное давление газа Ван-дер-Ваальса за счет взаимного притяжения молекул равно  $a/V_m^2$  и, следовательно, потенциальная энергия взаимодействия равна:

$$E_n = \int_{\infty}^{V_m} (a/V_m^2) dV_m = -a/V_m.$$

Знак «минус» указывает на то, что между молекулами действуют силы притяжения;  $V_m$  – молярный объем,  $V_m = V/\mu$ ,  $v = m/\mu$ .

Полная энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса определяется соотношением

$$U_m = \int_0^T C_V dT - a/V_m.$$

Если  $C_V$  не зависит от температуры, то имеем для одного моля

$$U_m = C_V T - a/V_m.$$

Причиной недостаточной точности уравнения Ван-дер-Ваальса считал ассоциацию молекул в газовой фазе, которую не удастся описать, учитывая зависимость параметров  $a$  и  $b$  от объема и температуры, без использования дополнительных постоянных. После 1873 г. сам Ван-дер-Ваальс предложил еще шесть вариантов своего уравнения, последнее из которых относится к 1911 г. и содержит пять эмпирических постоянных. Две модификации уравнения предложил Клаузиус, и обе они связаны с усложнением вида постоянной  $b$ . Больцман получил три уравнения этого типа, изменяя выражения для постоянной  $a$ . Всего известно более сотни подобных уравнений, отличающихся числом эмпирических постоянных, степенью точности и областью применимости. Выяснилось, что ни одно из уравнений состояния, содержащих менее 5 индивидуальных постоянных, не оказалось достаточно точным для описания реальных газов в широком диапазоне  $P$ ,  $V$ ,  $T$ , и все эти уравнения оказались непригодными в области конденсации газов. Из простых уравнений с двумя индивидуальными параметрами неплохие результаты дают уравнения Дитеричи и Бертло.

Принципиальное значение уравнения Ван-дер-Ваальса определяется следующими обстоятельствами:

- уравнение было получено из модельных представлений о свойствах реальных газов и жидкостей, а не явилось результатом эмпирического подбора функции  $f(p, V, T)$ , описывающей свойства реальных газов;
- уравнение долго рассматривалось как некоторый общий вид уравнения состояния реальных газов, на основе которого было построено много других уравнений состояния;
- с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса впервые удалось описать явление перехода газа в жидкость и проанализировать критические явления. В этом отношении уравнение Ван-дер-Ваальса имеет преимущество даже перед более точными уравнениями в вириальной форме.

# Тема:

# Электростатическое поле и его свойства

## План:

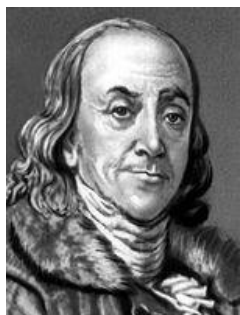
- 1.1. Электрический заряд. Закон сохранения заряда**
- 1.2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона**
- 1.3. Электростатическое поле. Напряженность поля**
- 1.4. Сложение электростатических полей. Принцип суперпозиции**
- 1.5. Электростатическое поле диполя**
- 1.6. Взаимодействие диполей**
  
- 2.1. Силовые линии электростатического поля**
- 2.2. Поток вектора напряженности**
- 2.3. Теорема Остроградского-Гаусса**
- 2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса**
- 2.5. Вычисление электростатических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса**
  - 2.5.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости**
  - 2.5.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей**
  - 2.5.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)**
  - 2.5.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью заряда, но разным знаком**
  - 2.5.5. Поле заряженного пустотелого шара**
  - 2.5.6. Поле объемного заряженного шара**

## 1.1. Электрический заряд, закон сохранения электрического заряда

**Электростатика** – раздел, изучающий статические (неподвижные) заряды и связанные с ними электрические поля.

Перемещение зарядов либо отсутствует, либо происходит так медленно, что возникающие при движении зарядов магнитные поля ничтожны. Сила взаимодействия между зарядами определяется только их взаимным расположением. Следовательно, энергия электростатического взаимодействия – потенциальная энергия.

Несмотря на обилие различных веществ в природе, существуют только два вида электрических зарядов: заряды подобные тем, которые возникают на стекле, потертом о шелк, и заряды, подобные тем, которые появляются на янтаре, потертом о мех. Первые были названы положительными, вторые отрицательными зарядами. Назвал их так Бенджамин Франклин в 1746 г.



**Франклин Бенджамин** (1706 – 1790) – американский физик, политический и общественный деятель. Основные работы в области электричества. Объяснил действие Лейденской банки, построил первый плоский конденсатор. Изобрел молниеотвод, доказал электрическую природу молнии и тождественность земного и атмосферного электричества. Разработал теорию электрических явлений – так называемую «унитарную теорию». Работы относятся также к теплопроводности тел, к распространению звука в воде и воздухе и т.п. Является автором ряда технических изобретений.

Электрический заряд электрона отрицателен, а заряд протона равен по величине заряду электрона, но имеет противоположный знак. Открытие электрона и протона показало, что электрические заряды существуют не сами по себе, а связаны с частицами и являются их внутренним свойством.

В целом заряд атома любого вещества равен нулю, так как положительный заряд ядра атома компенсируется противоположным зарядом электронных оболочек атома. Очень сильное взаимодействие между зарядами практически исключает самопроизвольное появление заряженных макроскопических тел. Так, сила кулоновского притяжения между электроном и протоном в атоме водорода в  $10^{39}$  раз больше их гравитационного взаимодействия.

Известно, что одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются. Далее, если поднести заряженное тело (с любым зарядом) к легкому – незаряженному, то всегда будет притяжение – явление *электризации* легкого тела *через влияние*. На ближайшем к заряженному телу конце появляются заряды противоположного знака (индуцированные заряды) это явление называется *электростатической индукцией*.

Опыт показывает, что возникновение заряда на любом теле сопровождается появлением заряда такой же величины, но противоположного знака на другом теле. Например, при трении стеклянной палочки о шелк заряжаются оба тела: палочка отрицательно, шелк положительно.

Таким образом, всякий процесс заряджения есть процесс разделения зарядов. Сумма зарядов не изменяется, заряды только перераспределяются. Отсюда следует **закон сохранения заряда** – один из фундаментальных законов природы, сформулированный в 1747 г. Б. Франклином и подтвержденный в 1843 г. М. Фарадеем: **алгебраическая сумма зарядов, возникающих при любом электрическом процессе на всех телах, участвующих в процессе всегда равна нулю.** Или короче: **суммарный электрический заряд замкнутой системы не изменяется.**

Электрические заряды не существуют сами по себе, а являются внутренними свойствами элементарных частиц – электронов, протонов и др.

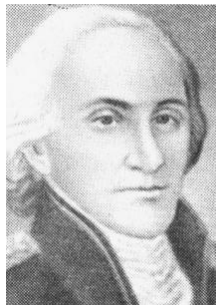
Опытным путем в 1914 г. американский физик Р. Милликен показал что **электрический заряд дискретен.** Заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

$$q = \pm ne,$$

где  $n$  – целое число. **Электрон** и **протон** являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Например, наша Земля имеет отрицательный заряд  $6 \cdot 10^5$  Кл, это установлено по измерению напряженности электростатического поля в атмосфере Земли.

Большой вклад в исследование явлений электростатики внес знаменитый французский ученый Ш. Кулон. В 1785 г. он экспериментально установил закон взаимодействия **неподвижных точечных** электрических зарядов.



**Кулон Шарль Огюстен** (1736 – 1806) – французский физик и военный инженер. Работы относятся к электричеству, магнетизму, прикладной механике. Сформулировал законы трения, качения и скольжения. Установил законы упругого кручения. Исходя из этого в 1784 г. Кулон построил прибор для измерения силы – крутильные весы и с помощью их открыл основной закон электростатики – закон взаимодействия электрических зарядов на расстоянии, названный в последствии его именем.

## 1.2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме.

### Закон Кулона

**Точечным зарядом** ( $q$ ) называется заряженное тело, размеры которого пренебрежительно малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которым оно взаимодействует.

В результате опытов Кулон установил, что **сила взаимодействия точечных зарядов в вакууме пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними**, причем одноименные заряды притягиваются, а разноименные – отталкиваются.

$$F = k_0 \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (1.2.1)$$

здесь  $k_0$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

В векторной форме закон Кулона выглядит так:

$$\vec{F}_1 = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\vec{F}_2, \quad (1.2.2)$$

где  $\vec{F}_1$  – сила, действующая на заряд  $q_1$ ,  $\vec{F}_2$  – сила, действующая на заряд  $q_2$ ,  $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$  – единичный вектор, направленный от положительного заряда к отрицательному.

Принципиальное отличие кулоновских сил от гравитационных, является то, что последние всегда являются силами притяжения.

В электростатике взаимодействие зарядов подчиняется *третьему закону Ньютона*: силы взаимодействия между зарядами равны по величине и направлены противоположно друг другу вдоль прямой, связывающей эти заряды (рисунок 1.1).

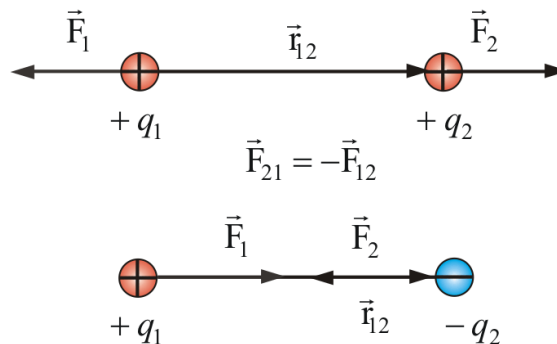


Рисунок 1.1

Если заряды не точечные, то в такой форме закон Кулона не годится – нужно интегрировать по объему.

Вся совокупность фактов говорит, что закон Кулона справедлив при  $10^{-15} \text{ м} < r < 10^7 \text{ м}$ . Внутри ядра действуют уже другие законы, не кулоновские силы.

В системе СГС единица заряда выводится именно из закона Кулона: 1 ед.СГС – такой заряд, который действует на равный ему по величине другой заряд на расстоянии 1 см с силой в 1 дн (дину). Здесь  $k_0 = 1$ , т.е.

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$

В системе СИ единица заряда  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$ , поэтому здесь  $k_0 \neq 1$ :

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2},$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $4\pi$  здесь выражают сферическую симметрию закона Кулона.

Электрическая постоянная относится к числу *фундаментальных физических констант* и равна  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ .



Элементарный заряд в СИ:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Отсюда следует, что  $1 \text{ Кл} = 6,25 \cdot 10^{18} e$ .

Поскольку элементарный заряд мал, мы как бы не замечаем его дискретности (заряду 1 мкКл соответствует  $\sim 10^{13}$  электронов)

### 1.3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

Почему заряды взаимодействуют? Долгое время бились над этим ученые, имела место борьба двух теорий: *теория дальнего действия* – Ньютон, Ампер и *теория ближнего действия* – Фарадей, Максвелл и т.д. Для электростатического поля справедливы обе эти теории.

Для понимания происхождения и передачи сил действующих между зарядами, необходимо допустить наличие между зарядами какого-либо физического агента, обуславливающего это взаимодействие. Этим агентом является *электрическое поле*.

*Вокруг заряда всегда есть электрическое поле, основное свойство которого заключается в том, что на всякий другой заряд, помещенный в это поле, действует сила.*

*Электрические и магнитные поля – частный случай более общего – электромагнитного поля (ЭМП). Они могут порождать друг друга, превращаться друг в друга. Если заряды не движутся, то магнитное поле не возникает.*

*ЭМП – есть не абстракция, а объективная реальность – форма существования материи, обладающая определенными физическими свойствами, которые мы можем измерить.*

Не существует статических электрических полей, не связанных с зарядами, как не существует «голых», не окруженных полем зарядов.

*Силовой характеристикой поля создаваемого зарядом  $q$  является отношение силы действующей на заряд к величине этого заряда называемое напряженностью электростатического поля, т.е.*

$$E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.3.1)$$

Или в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.3.2)$$

здесь  $r$  – расстояние от заряда до точки, где мы изучаем это поле. Тогда

$$\vec{F} = q\vec{E} \text{ и при } q = +1, \vec{F} = \vec{E}.$$

**Вектор напряженности электростатического поля равен силе, действующей в данной точке на помещенный в нее пробный единичный положительный заряд.**

Направление вектора напряженности определяет направление силы, действующей на положительный заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля.

Из формулы (1.3.1) следует что единица измерения напряженности электростатического поля – **ньютон на кулон** (Н/Кл).

1 Н/Кл – напряженность такого поля, которое на точечный заряд 1 Кл действует с силой в 1 Н.

$$\text{В СИ } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ размерность напряженности } [E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \text{ или } \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

## 1.4. Сложение электростатических полей.

### Принцип суперпозиции

Одной из основных задач электростатики является оценка параметров поля при заданном, стационарном, распределении зарядов в пространстве. Один из способов решения подобных задач основан на **принципе суперпозиции**. Суть его в следующем.

Если поле создается несколькими точечными зарядами, то на пробный заряд  $q$  действует со стороны заряда  $q_k$  такая сила, как если бы других зарядов не было. Результирующая сила определится выражением:

$$\vec{F} = \sum_k \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_k}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k} = \sum_k \vec{F}_k$$

– это принцип суперпозиции или независимости действия сил.

Т.к.  $\vec{F} = q\vec{E}$ , то  $\vec{E}$  – результирующая напряженность поля в точке, где расположен пробный заряд, так же **подчиняется принципу суперпозиции**:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \sum_k \vec{E}_k. \quad (1.4.1)$$

Это соотношение выражает принцип наложения или **суперпозиции электрических полей** и представляет важное свойство электрического поля.

**Напряженность результирующего поля, системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в данной точке каждым из них в отдельности.**

Рассмотрим применение принципа суперпозиции в случае поля, созданного электрической системой из двух зарядов с расстоянием между зарядами, равными  $l$  (рисунок 1.2).

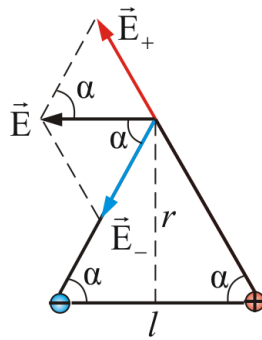


Рисунок 1.2

Поля, создаваемые различными зарядами, не влияют друг на друга, поэтому вектор  $\vec{E}$  результирующего поля нескольких зарядов  $q_1, q_2, q_3, \dots$  может быть найден по правилу сложения векторов (правило параллелограмма)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots = \sum_k \vec{E}_k \quad \vec{E} = \sum_k \vec{E}_k$$

, т.е.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \quad |\vec{E}_+| = |\vec{E}_-| \quad E = 2E_+ \cos \alpha, \text{ так как задача симметрична.}$$

В данном случае

$$E_- = E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{l}{2\sqrt{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}}$$

Следовательно,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.4.2)$$

Рассмотрим другой пример. Найдем напряженность электростатического поля  $E$ , создаваемую двумя положительными зарядами  $q_1$  и  $q_2$  в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r_1$  от первого и  $r_2$  от второго зарядов (рисунок 1.3).

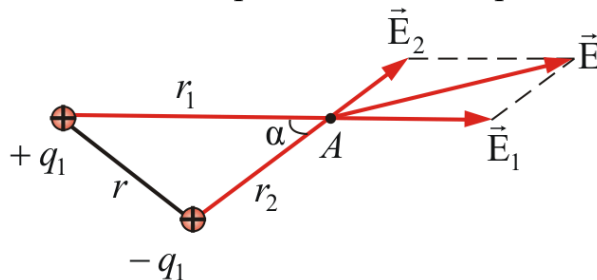


Рисунок 1.3

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}; \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

Воспользуемся теоремой косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - \frac{2q_1q_2}{r_1^2r_2^2} \cos\alpha}, \quad (1.4.3)$$

где  $\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2}$ .

Если поле создается не точечными зарядами, то используют обычный в таких случаях прием. Тело разбивают на бесконечно малые элементы и определяют напряженность поля создаваемого каждым элементом, затем интегрируют по всему телу:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad (1.4.4)$$

где  $d\vec{E}$  – напряженность поля, обусловленная заряженным элементом. Интеграл может быть линейным, по площади или по объему в зависимости от формы тела. Для решения подобных задач пользуются соответствующими значениями плотности заряда:

$\lambda = dq/dl$  – линейная плотность заряда, измеряется в Кл/м;

$\sigma = dq/dS$  – поверхностная плотность заряда, измеряется в Кл/м<sup>2</sup>;

$\rho = dq/dV$  – объемная плотность заряда, измеряется в Кл/м<sup>3</sup>.

Если же поле создано сложными по форме заряженными телами и неравномерно заряженными, то используя принцип суперпозиции, трудно найти результирующее поле.

В формуле (1.4.4) мы видим, что  $d\vec{E}$  – векторная величина:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.4.5)$$

так что интегрирование может оказаться непростым. Поэтому для вычисления  $\vec{E}$  часто пользуются другими методами, которые мы обсудим в следующих темах. Однако в некоторых, относительно простых случаях эти формулы позволяют аналитически рассчитать  $\vec{E}$ .

В качестве примеров можно рассмотреть *линейное распределение зарядов* или *распределение заряда по окружности*.

Определим напряженность электрического поля в точке *A* (рисунок 1.4) на расстоянии *x* от бесконечно длинного, линейного, равномерно распределенного заряда. Пусть  $\lambda$  – заряд, приходящийся на единицу длины.

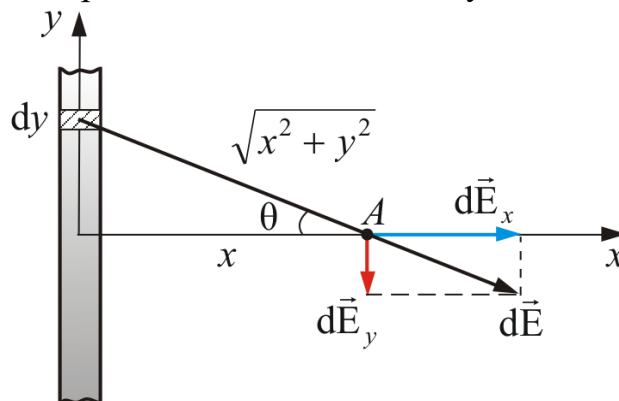


Рисунок 1.4

Считаем, что  $x$  – мало по сравнению с длиной проводника. Выберем систему координат так, чтобы ось  $y$  совпадала с проводником. Элемент длины  $dy$ , несет заряд  $dq = \lambda dy$ . Создаваемая этим элементом напряженность электрического поля в точке  $A$ :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{(x^2 + y^2)}. \quad (1.4.6)$$

Вектор  $d\vec{E}$  имеет проекции  $dE_x$  и  $dE_y$ , причем  $dE_x = dE \cos \theta$ ;  $dE_y = dE \sin \theta$ . Т.к. проводник бесконечно длинный, а задача симметричная, то  $y$  – компонента вектора  $d\vec{E}$  обратится в ноль (скомпенсирована), т.е.  $E_y = \int dE \sin \theta = 0$ .

Тогда  $E = E_x = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos \theta dy}{x^2 + y^2}$ . Теперь выразим  $y$  через  $\theta$ . Т.к.  $y = x \operatorname{tg} \theta$ , то  $dy = x d\theta / \cos^2 \theta$  и  $(x^2 + y^2) = x^2 / \cos^2 \theta$ , тогда

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}. \quad (1.4.7)$$

Таким образом, напряженность электрического поля линейно распределенных зарядов изменяется обратно пропорционально расстоянию до заряда.

Этот результат, полученный для бесконечно длинного линейного заряда, с хорошей точностью справедлив и для линейного заряда конечной длины при условии, что  $x$  – мало по сравнению с расстоянием от точки  $A$  до концов проводника.

Задание: по тонкому кольцу радиуса  $R$  равномерно распределен заряд  $q$ . Определить  $E$  в точке  $A$  (рисунок 1.5).

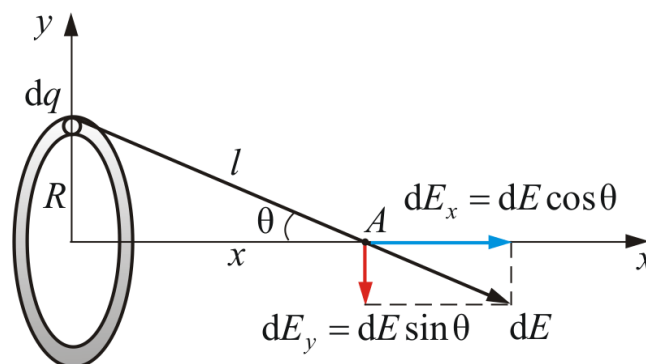


Рисунок 1.5

## 1.5. Электростатическое поле диполя

*Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине, но разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми  $l$  значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле системы ( $r \gg l$ ).*

Здесь  $\vec{l}$  называют *плечо диполя* – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между зарядами.

Пример 1. Найдём  $E_{\perp}$  в точке  $A$  на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной к оси (рисунок 1.6)

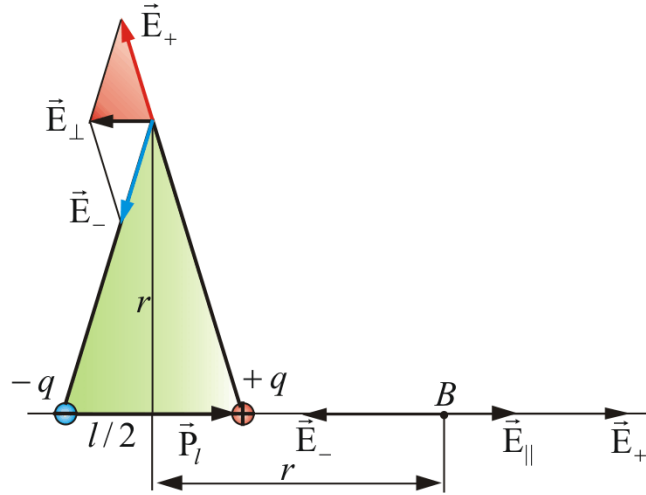


Рисунок 1.6

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{т.к. } l \ll r). \quad (1.5.1)$$

Из подобия заштрихованных треугольников можно записать:

$$\frac{E_{\perp}}{E_+} = \frac{l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{l}{r}$$

отсюда 
$$E_{\perp} = E_+ \frac{l}{r} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.5.2)$$

Обозначим вектор:  $\vec{P} = q\vec{l}$  – *электрический момент диполя* (или *дипольный момент*) – произведение положительного заряда диполя на плечо  $\vec{l}$ . Направление  $\vec{P}$  совпадает с направлением  $\vec{l}$ , т.е. от отрицательного заряда к положительному. Тогда, учитывая что  $ql = P$  получим:

$$E_{\perp} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ или } \vec{E}_{\perp} = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.5.3)$$

Пример 2. На оси диполя, в точке  $B$  (рисунок 1.6):

$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ или } \vec{E}_{\parallel} = \frac{2\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.5.4)$$

Пример 3. В произвольной точке  $C$  (рисунок 1.7).

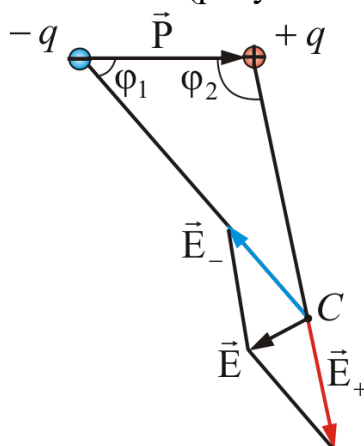


Рисунок 1.7

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}, \quad (1.5.5)$$

где  $\varphi \approx \varphi_1 \approx \varphi_2$ .

При  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $E_1 = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ;

при  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $E_2 = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ .

Из приведенных примеров видно, что напряженность электрического поля системы зарядов равна геометрической сумме напряженностей полей каждого из зарядов в отдельности (принцип суперпозиции).

### 1.6. Взаимодействие двух диполей

Рассмотрим взаимодействие диполей, расположенных вдоль одной оси. Расстояние между центрами диполей обозначим  $r$ ; пусть это расстояние много больше плеча диполя:  $r \gg l$  (рисунок 1.8).

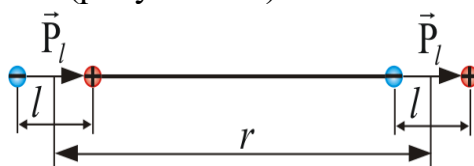


Рисунок 1.8

Сила взаимодействия складывается из четырех компонентов – двух сил отталкивания между одноименными зарядами и двух сил притяжения – между разноименными зарядами:

$$\begin{aligned} F &= \frac{(-q)(-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{(-q)(q)}{4\pi\epsilon_0 (r-l)^2} + \frac{(-q)(q)}{4\pi\epsilon_0 (r+l)^2} = \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right]. \end{aligned}$$

После нескольких преобразований получим  $F = \frac{6q^2 l^2 (r^2 - (l^2/3))}{4\pi\epsilon_0 r^2 (r^2 - l^2)^2}$ . Обозначив  $ql = P_l$  и отбрасывая  $l^2$ , как очень малую величину по сравнению с  $r^2$ , имеем

$$F = -\frac{6P_l^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (1.6.1)$$

Нетрудно обобщить это выражение для случая взаимодействия диполей с разными электрическими моментами  $\vec{P}_{1l}$  и  $\vec{P}_{2l}$ :

$$F = -\frac{6P_{1l}P_{2l}}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (1.6.2)$$

Итак, если дипольные моменты двух диполей расположены вдоль одной прямой и одинаково направлены, то они притягиваются, причем сила притяжения пропорциональна произведению электрических моментов диполей и обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними. Следовательно, дипольное взаимодействие убывает с расстоянием значительно быстрее, чем взаимодействие между точечными зарядами.

Самостоятельно покажите, что будет – притяжение или отталкивание, между диполями, моменты которых расположены на одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Вычислим силу взаимодействия между диполями, расположенными так, как показано на рисунке 1.9.

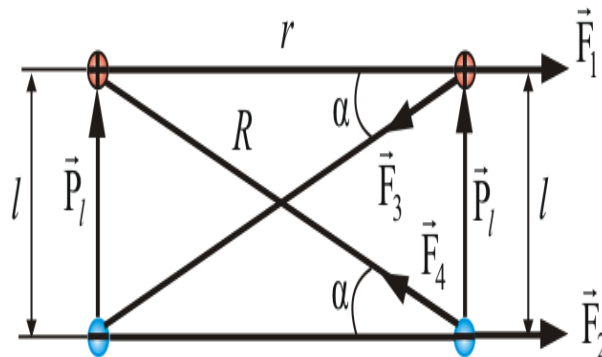


Рисунок 1.9

Равнодействующая сила

$$F = F_1 + F_2 - F_3 \cos \alpha - F_4 \cos \alpha = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{2q^2 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Учитывая, что  $\cos \alpha = r/R$  и  $R^2 - r^2 = l^2$ , получаем после нескольких преобразований

$$F = \frac{2q^2 l^2 (R^2 + Rr + r^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2 R^3 (R + r)}.$$

Полагая, как и выше, что  $l \ll R$ , следовательно  $R \approx r$ , имеем

$$F = \frac{2q^2 l^2 3r^2}{4\pi\epsilon_0 2r^6} = \frac{3P_l^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{F}{2}. \quad (1.6.3)$$



Самостоятельно подсчитайте, чему будет равна сила при антипараллельной ориентации дипольных моментов.

Сравнивая выражения (1.6.2) и (1.6.3), убеждаемся, что, в отличие от центральных сил (гравитационных и кулоновских), сила взаимодействия между диполями зависит не только от расстояния между ними, но и от их взаимной ориентации. Аналогичными свойствами обладают ядерные силы.

## 2.1. Силовые линии электростатического поля

Теорема Остроградского-Гаусса, которую мы докажем и обсудим позже, устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона.



**Остроградский Михаил Васильевич** (1801 – 1862) отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827). Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики. Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.). Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях. Известен теоремой Остроградского-Гаусса в электростатике

(1828 г.).

**Гаусс Карл Фридрих** (1777 – 1855) – немецкий математик, астроном и физик. Исследования посвящены многим разделам физики. В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг, и в 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф. Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный. В 1829 г. сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса). Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.



В принципе, напряженность электростатического поля, создаваемого данным распределением зарядов, всегда можно вычислить с помощью закона Кулона. Полное электрическое поле в любой точке является векторной суммой (интегральным) вкладом всех зарядов, т.е.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots = \sum_k \vec{E}_k \quad \text{или} \quad \vec{E} = \int d\vec{E}. \quad (2.1.1)$$

Однако, за исключением самых простых случаев, вычислить эту сумму или интеграл крайне сложно.

Здесь приходит на помощь теорема Остроградского-Гаусса, с помощью которой гораздо проще удастся рассчитать напряженность электрического поля, создаваемая данным распределением зарядов.

Основная ценность теоремы Остроградского-Гаусса состоит в том, что она позволяет *глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядом и полем.*

Но прежде, чем переходить к теореме Остроградского-Гаусса необходимо ввести понятия: **силовые линии** электростатического поля и **поток вектора напряженности** электростатического поля.

Для того, чтобы описать электрическое поле, нужно задать вектор напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически или графически. Для этого пользуются **силовыми линиями** – это линии, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$  (рисунок 2.1).

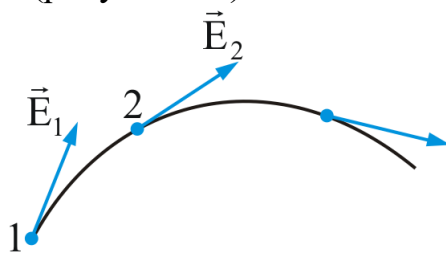


Рисунок 2.1

Силовой линии приписывают определенное направление – от положительного заряда к отрицательному, или в бесконечность.

Рассмотрим случай *однородного электрического поля.*

**Однородным** называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению, т.е.  $\vec{E} = \text{const}$ . Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга (такое поле существует, например, между пластинами конденсатора) (рисунок 2.2).

В случае точечного заряда, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд. Т.к.  $E \sim 1/r^2$ , то и густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда. Т.к. площадь поверхности сферы, через которую проходят эти линии сама возрастает пропорционально квадрату расстояния, то общее число линий остается постоянным на любом расстоянии от заряда.

Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному (рисунок 2.2).

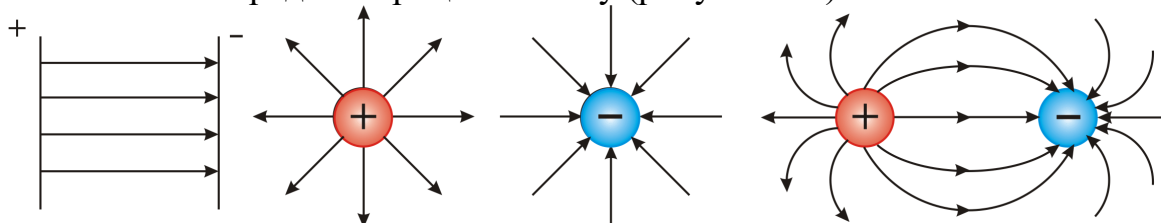


Рисунок 2.2

Из рисунка 2.3 видно, так же, что густота силовых линий может служить показателем величины  $\vec{E}$ .

Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности  $|\vec{E}|$ , т.е.

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

Пример 1: если на рисунке 2.3 выделить площадку,  $S = 2 \text{ м}^2$ , то напряженность изображенного поля будет равна

$$|\vec{E}| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

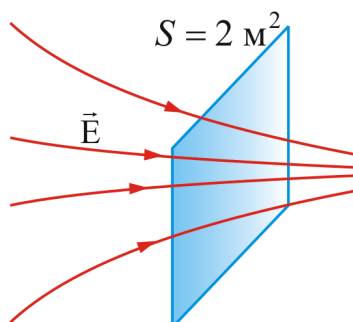


Рисунок 2.3

Пример 2: площадка  $S = 3 \text{ м}^2$  находится в однородном поле  $100 \text{ Н/Кл}$ . Сколько линий пересекает эту площадку, если угол составляет  $30^\circ$  (рисунок 2.4).

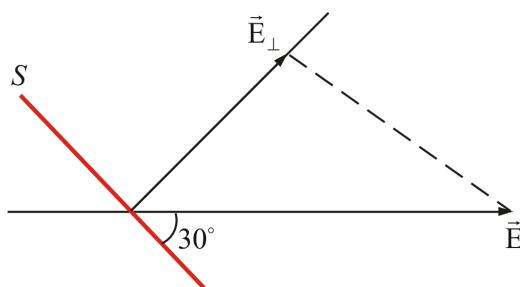


Рисунок 2.4

$$E_{\perp} = E \sin 30^\circ = 50 \text{ Н/Кл}$$

$$\Phi = E_{\perp} S = 50 \cdot 3 = 150 \text{ линий.}$$

## 2.2. Поток вектора напряженности

Итак, на примерах мы показали, что, если силовые линии однородного электрического поля напряженностью  $\vec{E}$  пронизывают некоторую площадку  $S$ , то *поток вектора напряженности* (раньше мы называли число силовых линий через площадку) будет определяться формулой

$$\Phi_E = ES_{\perp} = EScos\alpha = E_n S,$$

где  $E_n$  – произведение вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  к данной площадке (рисунок 2.5).

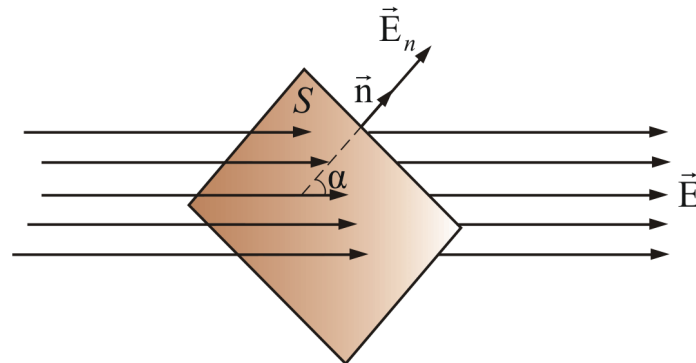


Рисунок 2.5

Полное число силовых линий, проходящих через поверхность  $S$  называется **поток вектора напряженности**  $\Phi_E$  через эту поверхность.

В векторной форме можно записать  $\Phi_E = (\vec{E}, \vec{S})$  – скалярное произведение двух векторов, где вектор  $\vec{S} = \vec{n}S$ .

Таким образом, поток вектора  $\vec{E}$  есть скаляр, который в зависимости от величины угла  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным.

Рассмотрим примеры, изображенные на рисунках 2.6 и 2.7.

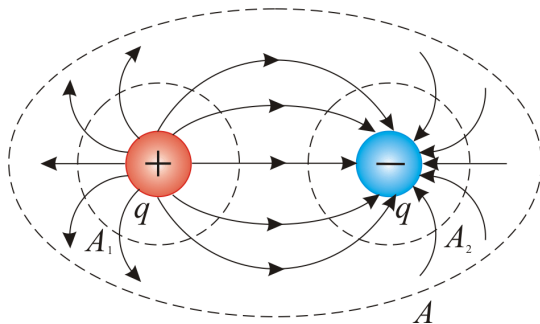


Рисунок 2.6

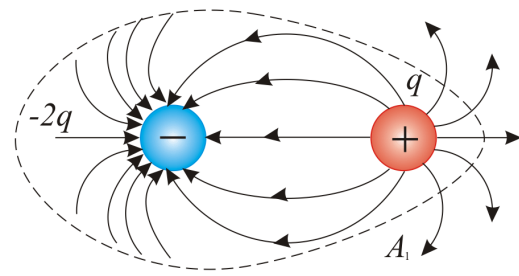


Рисунок 2.7

Для рисунка 2.6 – поверхность  $A_1$  окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е.  $\Phi_E > 0$ . Поверхность  $A_2$  – окружает отрицательный заряд, здесь  $\Phi_E < 0$  и направлен внутрь. Общий поток через поверхность  $A$  равен нулю.

Для рисунка 2.7 – поток будет не равен нулю, если суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю. Для этой конфигурации поток через поверхность  $A$  отрицательный (подсчитайте число силовых линий).

Таким образом, поток вектора напряженности зависит от заряда. В этом смысл теоремы Остроградского-Гаусса.

### 2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

Итак, по определению, поток вектора напряженности электрического поля равен числу линий напряженности, пересекающих поверхность  $S$ .

Рассмотрим рисунок 2.8.

Для данной конфигурации поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку  $dS$  будет равен:

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS. \quad (2.3.1)$$

Т.е. в однородном поле  $\Phi_E = ES$ . В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (2.3.2)$$

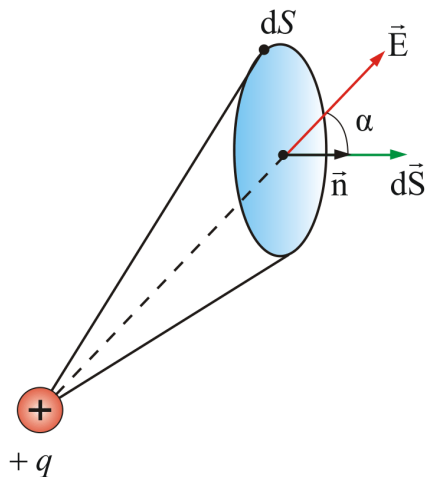


Рисунок 2.8

Здесь  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ , т.е. ориентация  $dS$  в пространстве задается с помощью единичного вектора  $\vec{n}$ . Таким образом, направление вектора  $d\vec{S}$  совпадает с направлением  $\vec{n}$  внешней нормали к поверхности.

Подсчитаем поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , окружающую точечный заряд  $q$  (рисунок 2.9). Окружим заряд  $q$  сферой  $S_1$ .

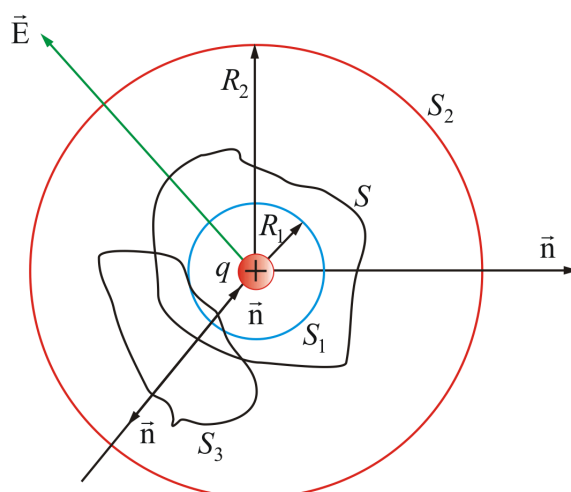


Рисунок 2.9

Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы  $S_1$  равен  $R_1$ .

В каждой точке поверхности  $S_1$  проекция  $\vec{E}$  на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1^2}.$$

Тогда поток через  $S_1$

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Подсчитаем поток через сферу  $S_2$ , имеющую радиус  $R_2$ :

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Из непрерывности линии  $\vec{E}$  следует, что поток и через любую произвольную поверхность  $S$  будет равен этой же величине:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} - \text{теорема Гаусса для одного заряда.} \quad (2.3.3)$$

Линии напряженности  $\vec{E}$  начинаются и заканчиваются на зарядах (или в бесконечности).

Полученный результат справедлив не только для одного заряда, но и для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0} - \text{теорема Гаусса для нескольких зарядов.} \quad (2.3.4)$$

**Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .**

При вычислении потока через замкнутую поверхность, вектор нормали  $\vec{n}$  следует считать направленным наружу. Линии  $\vec{E}$ , выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, создают положительный поток, линии же, входящие в объем – отрицательный поток.

Если между нашими сферами расположить ещё одну поверхность  $S_3$ , не охватывающую заряд, то, как видно из рисунка 2.9, каждая линия напряженности  $\vec{E}$  будет дважды пересекать эту поверхность: один раз с положительной стороны – войдет в поверхность  $S_3$ , другой раз – с отрицательной стороны – выйдет из поверхности  $S_3$ . В результате алгебраическая сумма линий напряженности, проходящая через замкнутую поверхность  $S_3$  будет равна нулю, т.е. *полный поток проходящий через  $S_3$ , равен нулю.*

Таким образом, для точечного заряда  $q$ , полный поток через любую замкнутую поверхность  $S$  будет равен:

- $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$  – если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;
- $\Phi_E = 0$  – если заряд расположен вне замкнутой поверхности;
- этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью  $\rho = dq/dV$  различной в разных местах пространства.

Здесь  $dV$  – *физически бесконечно малый объем*, под которым следует понимать такой объем, который с одной стороны достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона  $e^-$  или протона  $p^+$ .

Суммарный заряд объема  $dV$  будет равен:

$$\sum q_i = \int_V \rho dV. \quad (2.3.5)$$

Тогда из теоремы Гаусса (2.3.4) можно получить:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.3.6)$$

– это ещё одна форма записи теоремы Остроградского-Гаусса, если заряд непрерывно распределен по объему.

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство: в то время как само поле  $\vec{E}$  зависит от конфигурации всех зарядов, поток  $\Phi_E$  сквозь произвольную замкнутую поверхность определяется только алгебраической суммой зарядов внутри поверхности  $S$ . Это значит, что *если передвинуть заряды, то  $\vec{E}$  изменится всюду, и на поверхности  $S$ , а поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность останется прежним.*

## 2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

С помощью дифференциальной формы теоремы можно рассчитать электростатическое поле при произвольном пространственном распределении зарядов. В ней установлена связь между объемной плотностью заряда  $\rho$  и изменением  $\vec{E}$  в окрестности данной точки пространства.

Пусть заряд распределен в пространстве  $\Delta V$ , с объемной плотностью  $\langle \rho \rangle$ . Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\epsilon_0}; \quad \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}.$$

Теперь устремим  $\Delta V \rightarrow 0$ , стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом  $\langle \rho \rangle$  будет стремиться к  $\rho$  в данной точке, т.е.

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Величину, являющуюся пределом отношения  $\oint \vec{E} d\vec{S}$  к  $\Delta V$ , при  $\Delta V \rightarrow 0$ , называют **дивергенцией поля  $E$**  и обозначается  $\text{div } \vec{E}$ . Тогда, по определению

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} \quad (2.4.1)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из этого определения следует, что **дивергенция является скалярной функцией координат**. В декартовой системе координат

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (2.4.2)$$

Итак,

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.4.3)$$

**Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.**

Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор  $\vec{\nabla}$  (Набла)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (2.4.4)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты осей (единичные векторы).

Сам по себе оператор  $\vec{\nabla}$  смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \\ \vec{\nabla} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Формула (2.4.5) это тоже **дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса**.

В тех точках поля, где  $\text{div } E > 0$  – (положительные заряды) **источники** поля, где  $\text{div } E < 0$  – **стоки** (отрицательные заряды). **Линии  $\vec{E}$  выходят из источников и заканчиваются в стоках**.

## 2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

Продемонстрируем возможности теоремы Остроградского-Гаусса на нескольких примерах.



### 2.5.1. Поле бесконечной однородно заряженной плоскости

Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью  $S$  определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

где  $dq$  – заряд, сосредоточенный на площади  $dS$ ;  $dS$  – физически бесконечно малый участок поверхности.

Пусть  $\sigma$  во всех точках плоскости  $S$  одинакова. Заряд  $q$  – положительный. Напряженность  $\vec{E}$  во всех точках будет иметь направление, перпендикулярное плоскости  $S$  (рисунок 2.10).

Очевидно, что в симметричных, относительно плоскости точках, напряженность  $\vec{E}$  будет одинакова по величине и противоположна по направлению.

Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями  $\Delta S$ , расположенными симметрично относительно плоскости (рисунок 2.11).

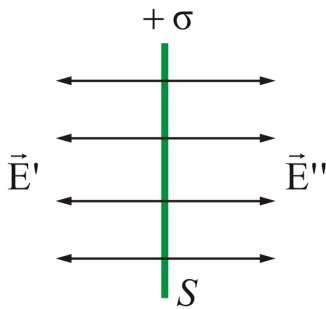


Рисунок 2.10

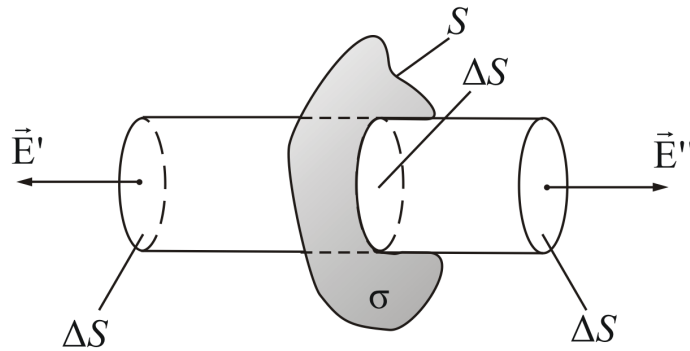


Рисунок 2.11

Тогда  $E' = E'' = E$ .

Применим теорему Остроградского-Гаусса. Поток  $\Phi_E$  через боковую часть поверхности цилиндра равен нулю, т.к.  $E_n = 0$ . Для основания цилиндра  $E_n = E$ .

Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равна:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

Внутри поверхности заключен заряд  $q = \sigma\Delta S$ . Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S \frac{1}{\epsilon_0};$$

откуда видно, что напряженность поля плоскости  $S$  равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{2.5.1}$$

Полученный результат не зависит от длины цилиндра. Это значит, что на любом расстоянии от плоскости  $E = \text{const}$ .

## 2.5.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине плотностью  $\sigma$  (рисунок 2.12).

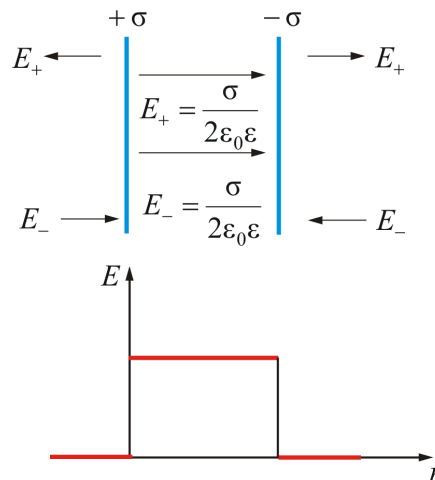


Рисунок 2.12

Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

$$E = E_+ + E_- \text{ отсюда } E = \sigma / \epsilon_0 \quad (2.5.2)$$

*Вне плоскостей* напряженность поля  $E = 0$ .

Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

Распределение напряженности электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке 2.12.

Между пластинами конденсатора действует сила взаимного притяжения (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S}, \text{ т.е. } F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0\epsilon}. \quad (2.5.3)$$

Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными**.

Тогда сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0}, \quad (2.5.4)$$

где  $S$  – площадь обкладок конденсатора. Т.к.  $\sigma = \frac{q}{S} = E\epsilon_0$ , то

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} = \frac{\epsilon_0 E^2 S}{2}. \quad (2.5.5)$$

Это формула для расчета пондермоторной силы.

### 2.5.3. Поле заряженного бесконечного цилиндра (нити)

Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса*  $R$ , заряженной с постоянной линейной плотностью  $\lambda^+ = \frac{dq}{dl}$ , где  $dq$  – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра (рисунок 2.13).

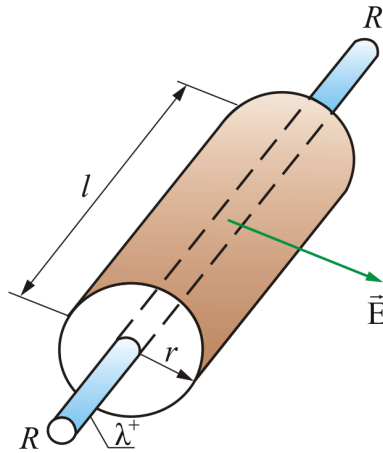


Рисунок 2.13

Из соображения симметрии следует, что  $E$  в любой точке будет направлена вдоль радиуса, перпендикулярно оси цилиндра.

Представим вокруг цилиндра (нити) *коаксиальную* замкнутую поверхность (*цилиндр в цилиндре*) радиуса  $r$  и длиной  $l$  (основания цилиндров перпендикулярно оси). Для оснований цилиндров  $E_n = 0$ , для боковой поверхности  $E_n = E(r)$ , т.е. зависят от расстояния  $r$ .

Следовательно, поток вектора  $\vec{E}$  через рассматриваемую поверхность, равен  $\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl$ .

При  $r \geq R$ , на поверхности будет заряд  $q = \lambda l$ . По теореме Остроградского-Гаусса  $E(r)2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$ , откуда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ при } r \geq R \quad (2.5.6)$$

Если  $r < R$ ,  $E(r) = 0$ , т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет.

Если уменьшать радиус цилиндра  $R$  (при  $\lambda = \text{const}$ ), то можно вблизи поверхности получить поле с очень большой напряженностью и, при  $R \rightarrow 0$ , получить нить.

Графически распределение напряженности электростатического поля показано на рисунке 2.14.

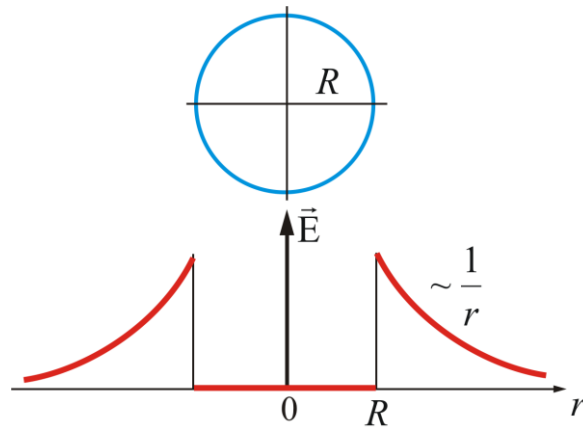


Рисунок 2.14

### 2.5.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью $\lambda$ , но разным знаком

Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать  $E=0$  (рисунок 2.15). В зазоре между цилиндрами, поле определяется так же, как в п. 2.5.3:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

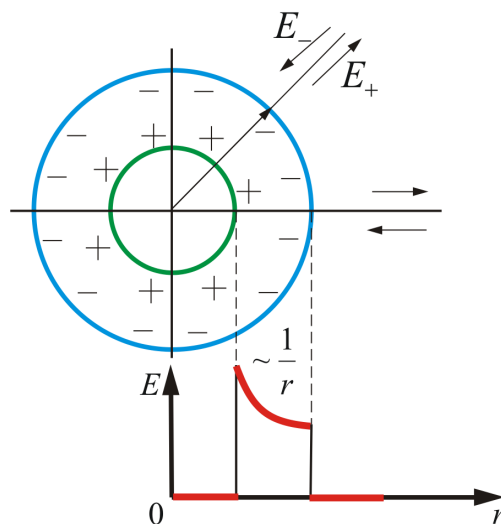


Рисунок 2.15

Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

На рисунке 2.15, показано распределение напряженности электростатического поля между двумя цилиндрами.

### 2.5.5. Поле заряженного пустотелого шара

Пустотелый шар (или сфера) радиуса  $R$  заряжен положительным зарядом с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Поле в данном случае будет центрально симметричным,  $\vec{E}$  – в любой точке проходит через центр шара.  $E = E(r)$ , и

силовые линии перпендикулярны поверхности в любой точке. Вообразим вокруг шара – сферу радиуса  $r$  (рисунок. 2.16).

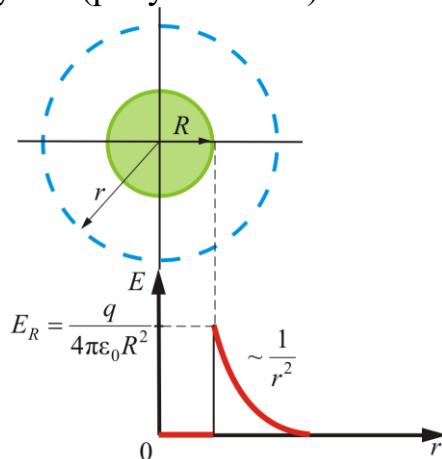


Рисунок 2.16

Если  $r \geq R$ , то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд  $q$ , распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда **поле вне сферы**:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{2.5.7}$$

**Внутри сферы**, при  $r < R$ , поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:  $E(r) = 0$ .

Как видно из (2.5.7) вне сферы поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.

### 2.5.6. Поле объемного заряженного шара

Для поля **вне шара** радиусом  $R$  (рисунок 2.17) получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

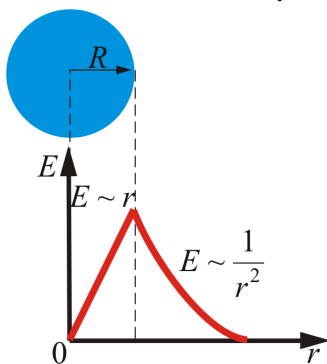


Рисунок 2.17

Но внутри шара при  $r < R$ , сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда, равная:  $\rho = \frac{q}{V}$ ;  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  – объем шара.

Тогда по теореме Остроградского-Гаусса запишем:

$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

т.е. *внутри шара*

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \tag{2.5.8}$$

Таким образом, внутри шара  $E \sim r$ .

# Тема:

## Поток вектора напряжения электрического поля

### План:

- 3.1. Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$
- 3.2. Работа сил электростатического поля. Потенциальная энергия
- 3.3. Потенциал. Разность потенциалов
- 3.4. Связь между напряженностью и потенциалом
- 3.5. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности
- 3.6. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

### 3.1. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$

В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через *электростатическое поле*. Описание электростатического поля мы рассматривали с помощью *вектора напряженности*  $\vec{E}$ , равного силе, действующей в данной точке на помещенный в неё пробный единичный положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Существует и другой способ описания поля – с помощью *потенциала*. Однако для этого необходимо сначала *доказать*, что *силы электростатического поля консервативны*, а само поле *потенциально*.

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом  $q'$ . В любой точке этого поля на пробный точечный заряд  $q$  действует сила  $\vec{F}$  (рисунок 3.1).

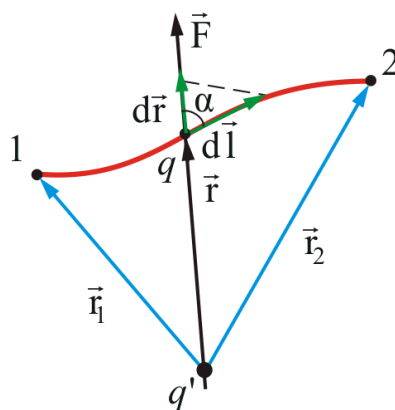


Рисунок 3.1

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

где  $F(r)$  – модуль вектора силы  $\vec{F}$ ,  $\frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор, определяющий положение заряда  $q$  относительно  $q'$ ,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.

Для того, чтобы доказать, что *электростатическое поле потенциально*, нужно доказать, что *силы электростатического поля консервативны*. Из раздела «Физические основы механики» известно, что *любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек*.

Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом  $q'$  по перемещению заряда  $q$  из точки 1 в точку 2.

Работа на пути  $dl$  равна:



$$dA = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl\cos\alpha,$$

где  $dr$  – приращение радиус-вектора  $\vec{r}$  при перемещении на  $dl$ ;  $dr = dl\cos\alpha$ , т. е.

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

Тогда полная работа при перемещении  $q'$  из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3.1.1)$$

Получили, что работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения. Следовательно, силы поля консервативны, а само поле – потенциально.

Этот вывод можно распространить и на поле, созданное системой зарядов, так как по принципу суперпозиции полей:  $E = \sum_k E_k$ .

Итак, как и в механике, любое стационарное поле центральных сил является консервативными, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения начальной и конечной точек. Именно таким свойством обладает электростатическое поле – поле, образованное системой неподвижных зарядов. Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 (рисунок 3.2) заданного поля  $\vec{E}$  в точку 2, взять положительный единичный заряд  $q$ , то элементарная работа сил поля будет равна:

$$dA = q\vec{E}d\vec{l}. \quad (3.1.2)$$

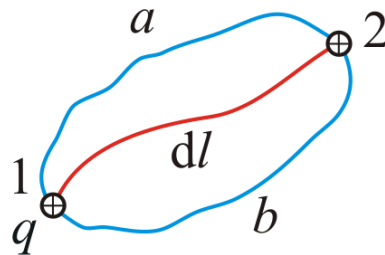


Рисунок 3.2

Тогда вся работа равна:

$$A = q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}. \quad (3.1.3)$$

Такой интеграл по замкнутому контуру называется *циркуляцией вектора  $\vec{E}$* .

Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по *произвольному замкнутому пути*:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0. \quad (3.1.4)$$

Это утверждение и называют *теоремой о циркуляции  $\vec{E}$* .

Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части:  $1a2$  и  $2b1$  (рисунок 3.2). Из сказанного выше следует, что

$$\int_1^2 E dl = - \int_2^1 E dl.$$

(Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q \oint \vec{E} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} - q \int_2^1 \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Поле, обладающее такими свойствами, называется *потенциальным*. Любое электростатическое поле является потенциальным.

Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам. Рассмотрим два простых примера, подтверждающих это заключение.

1. *Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми*. В самом деле, если это не так, и какая-то линия  $\vec{E}$  – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с *теоремой о циркуляции вектора  $\vec{E}$* :  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ . А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора  $\vec{E}$  не равна нулю.

2. Возможна ли конфигурация электростатического поля как на рисунке 3.3?

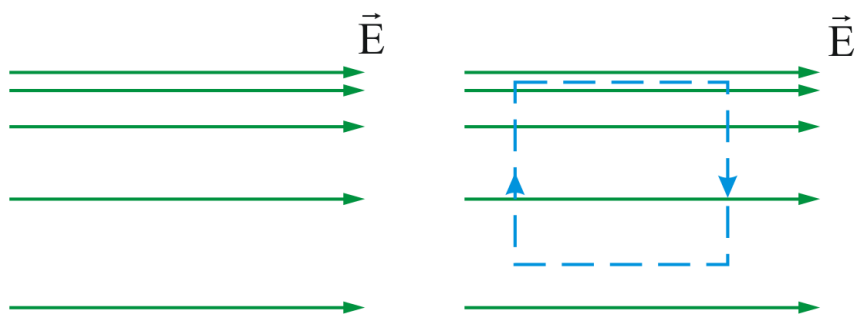


Рисунок 3.3

Нет невозможна! Применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$  к замкнутому контуру, показанному пунктиром. Стрелки здесь показывают направление обхода. На вертикальных участках  $\vec{E}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $\vec{E} d\vec{l} = 0$ . Остаются два одинаковых по длине горизонтальных участка. Из рисунка видно, что вклады в циркуляцию на этих участках противоположны по знаку, но не равны по модулю:  $\vec{E}$  больше там, где линии гуще, поэтому циркуляция отлична от нуля, что противоречит теореме о циркуляции.

## 3.2. Работа сил электростатического поля.

### Потенциальная энергия

До сих пор мы рассматривали описание электростатического поля с помощью вектора напряженности  $\vec{E}$ . Есть другой способ описания поля – с помощью потенциала.

Мы сделали заключение, что электростатическое поле потенциально. Следовательно, можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – *потенциальную энергию*.

Исходя из принципа суперпозиции сил  $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$ , можно показать, что

общая работа  $A$  будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k.$$

*Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма.*

Итак, электростатическое поле потенциально.

Работу сил электростатического поля можно выразить через *убыль потенциальной энергии* – разность двух функций состояний:

$$A_{12} = W_1 - W_2. \quad (3.2.2)$$

Это выражение для работы можно переписать в виде:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (3.2.3)$$

Сопоставляя формулу (3.2.2) и (3.2.3), получаем *выражение для потенциальной энергии* заряда  $q'$  в поле заряда  $q$ :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const}. \quad (3.2.4)$$

Потенциальную энергию определяют с точностью до постоянной интегрирования.

Значение константы в выражении для  $W$  выбирают таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т. е. при  $r \rightarrow \infty$ ), потенциальная энергия обращалась в нуль.

Выражение (3.2.4.) – для одного заряда. Для системы зарядов суммарная энергия

$$W = \sum_k W_k. \quad (3.2.5)$$

## 3.3. Потенциал. Разность потенциалов

Разные пробные заряды  $q', q'', \dots$  будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями  $W', W''$  и так далее. Однако отношение  $W/q'_{\text{пр}}$  будет для всех зарядов одним и тем же. *Поэтому можно ввести скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой собственно поля – потенциал:*

$$\varphi = \frac{W}{q'}. \quad (3.3.1)$$

Из этого выражения следует, что **потенциал** численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля **единичный положительный заряд**.

Подставив в (3.3.1.) значение потенциальной энергии (3.2.4), получим для потенциала точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (3.3.2)$$

Потенциал, как и потенциальная энергия, определяют с точностью до постоянной интегрирования. Поскольку физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю. Когда говорят «потенциал такой-то точки» – имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность*. Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} \quad \text{или} \quad A_\infty = q\varphi,$$

*т.е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность (или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля).* При этом  $\varphi > 0$ , если  $q > 0$ .

Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k q'}{r_k}. \quad (3.3.3)$$

Тогда и для потенциала  $\varphi = \sum_k \varphi_k$  или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k}, \quad (3.3.4)$$

*т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.* А вот напряженности складываются при наложении полей – **векторно**. По этой причине потенциалы полей считать проще, чем напряженности.

Вернемся к работе сил электростатического поля над зарядом  $q$ . Выразим работу через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.3.5)$$

Таким образом, работа над зарядом  $q$  равна произведению заряда на убыль потенциала. То есть

$$\begin{aligned} A &= q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \\ A &= qU, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где  $U$  – *напряжение*.

(Между прочим, хорошая аналогия с гравитационным полем:

$$A = mgh_1 - mgh_2 = m(gh_1 - gh_2),$$

здесь  $gh$  – имеет смысл потенциала, а  $m$  – заряда гравитационного поля).

Итак, потенциал – скалярная величина, поэтому пользоваться и вычислять  $\varphi$  проще, чем  $\vec{E}$ . Приборы для измерения разности потенциалов широко распространены.

Формулу  $A_\infty = q\varphi$  можно использовать для установления единиц потенциала: за единицу  $\varphi$  принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.

В СИ – единица потенциала  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл}$ .

В физике часто используется единица энергии и работы, называемая электрон - вольт (эВ) – это работа, совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона при прохождении им разности потенциалов  $1 \text{ В}$ , то есть:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

### 3.4. Связь между напряженностью и потенциалом

Итак, электростатическое поле можно описать либо с помощью векторной величины  $\vec{E}$ , либо с помощью скалярной величины  $\varphi$ . Очевидно, что между этими величинами должна существовать определенная связь. Найдем ее:

Изобразим перемещение заряда  $q$  по произвольному пути  $l$  (рисунок 3.1) в электростатическом поле  $\vec{E}$ .

Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке  $dl$ , можно найти так:

$$dA = F_l dl = E_l q dl, \quad (3.4.1)$$

где  $E_l$  – проекция  $\vec{E}$  на  $d\vec{l}$ ;  $dl$  – произвольное направление перемещения заряда.

С другой стороны, как мы показали, эта работа, если она совершена электростатическим полем, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии  $dl$ :

$$dA = -q d\varphi; \quad E_l q dl = -q d\varphi,$$

отсюда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (3.4.2)$$

Для ориентации  $dl$  (направление перемещения) в пространстве, надо знать проекции  $\vec{E}$  на оси координат:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$
$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (3.4.3)$$

где  $i, j, k$  – орты осей – единичные векторы.

По определению градиента *сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции*, то есть

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k},$$

$\text{grad } \varphi$  – вектор, показывающий направление *наибыстрейшего увеличения функции*.

Тогда коротко связь между  $\vec{E}$  и  $\varphi$  записывается так:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (3.4.4)$$

или так:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad (3.4.5)$$

где  $\nabla$  (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона.

Знак минус говорит о том, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

### 3.5. Безвихревой характер электростатического поля

Из условия  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  следует одно важное соотношение, а именно, *величина, векторного произведения  $[\nabla, \vec{E}]$  для стационарных электрических полей всегда равна нулю*. Действительно, по определению, имеем

$$[\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0,$$

поскольку определитель содержит две одинаковые строки.

Величина  $[\nabla, \vec{E}]$ , называется **ротором** или **вихрем** и обозначается, как  $\text{rot } \vec{E}$ .

Мы получаем *важнейшее уравнение электростатики*:

$$\text{rot } \vec{E} = 0. \quad (3.5.1)$$

Таким образом *кулоновское электростатическое поле – безвихревое*.

Согласно теореме Стокса, присутствует следующая связь между контурным и поверхностным интегралами:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = 0,$$

где контур  $L$  ограничивает поверхность  $S$ , ориентация которой определяется направлением вектора положительной нормали  $\vec{n}$ :

$$d\vec{S} = \vec{n} dS.$$

Поэтому *работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.*

Это условие выполняется для любой радиальной силы  $F \sim r^{-n}$  независимо от показателя степени  $n$ .

### 3.6. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением  $\vec{E}$ . Отсюда следует, что *напряженность  $\vec{E}$  равна разности потенциалов  $U$  на единицу длины силовой линии.*

Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить  $\vec{E}$  между двумя точками, измеряя  $U$  между ними, причем тем точнее, чем ближе точки. В однородном электрическом поле силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить  $\vec{E}$  наиболее просто:

$$E = \frac{U}{l}. \quad (3.6.1)$$

Теперь дадим определение *эквипотенциальной поверхности*. *Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью.* Уравнение этой поверхности

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const}. \quad (3.6.2)$$

Графическое изображение силовых линий и эквипотенциальных поверхностей показано на рисунке 3.4.

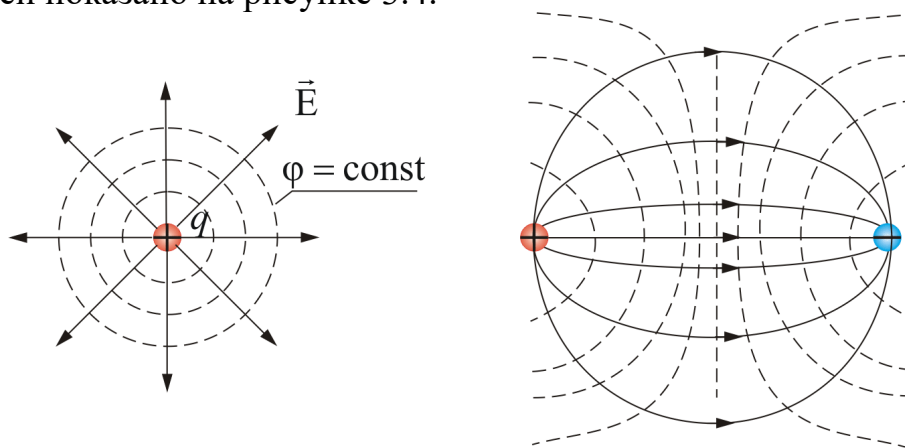


Рисунок 3.4

При перемещении по этой поверхности на  $dl$  потенциал не изменится:  $d\varphi = 0$ .

Отсюда следует, что проекция вектора  $\vec{E}$  на  $dl$  равна нулю, то есть  $E_l = 0$ . Следовательно,  $\vec{E}$  в каждой точке направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности.

Эквипотенциальных поверхностей можно провести сколько угодно много. По густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине  $\vec{E}$ , это будет при условии, что разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями равна постоянной величине.

Формула  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям  $\varphi$  найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям  $\vec{E}$  в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом  $q$  при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть, вычислена как:

$$A_{12} = q \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

С другой стороны работу можно представить в виде:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ тогда } \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру  $\varphi_1 = \varphi_2$  получим:

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$

т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности: *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

*Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.*

*Из обращения в нуль циркуляции вектора  $\vec{E}$  следует, что линии  $\vec{E}$  электростатического поля не могут быть замкнутыми: они начинаются на положительных зарядах (истоки) и на отрицательных зарядах заканчиваются (стоки) или уходят в бесконечность (рисунок 3.4).*

Это соотношение верно только для электростатического поля. Впоследствии мы с вами выясним, что поле движущихся зарядов не является потенциальным, и для него это соотношение не выполняется.

### 3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами.

#### 3.7.1. Разность потенциалов между точками поля, образованного двумя бесконечными заряженными плоскостями

Мы показали, что напряженность связана с потенциалом

$$E = -\frac{d\varphi}{dl}, \text{ тогда}$$

$$d\varphi = -Edl, \quad (3.7.1)$$



где  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  – напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями, найденная в п. 2.5.2 с помощью теоремы Остроградского-Гаусса;  $\sigma = q/S$  – поверхностная плотность заряда.

Теперь, чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем выражение (3.7.1):

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1) \text{ или } \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (3.7.2)$$

$$\text{При } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = d \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}. \quad (3.7.3)$$

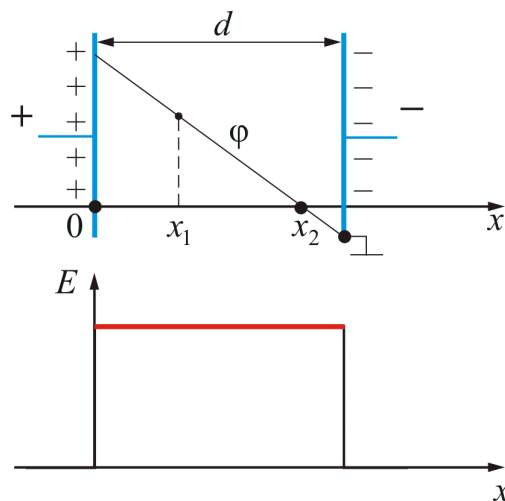


Рисунок 3.5

На рисунке 3.5 изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния между плоскостями.

### 3.7.2. Разность потенциалов между точками поля, образованного бесконечно длинной цилиндрической поверхностью

В п. 2.5.3, с помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что,

т.к.  $\varphi_E = \oint_s E dS = \frac{q}{\epsilon_0}$ , то (см. рисунок 3.6)

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases} \quad (3.7.4)$$

где  $\lambda = \frac{q}{l}$  – линейная плотность заряда.

Тогда, т.к.  $d\varphi = -E dr$ ;  $\int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$ , отсюда следует разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} - \text{вне цилиндра.} \end{cases} \quad (3.7.5)$$

На рисунке 3.6 изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от  $r$ . (Здесь и далее  $E$  – изображена сплошной линией, а  $\varphi$  – пунктирной).

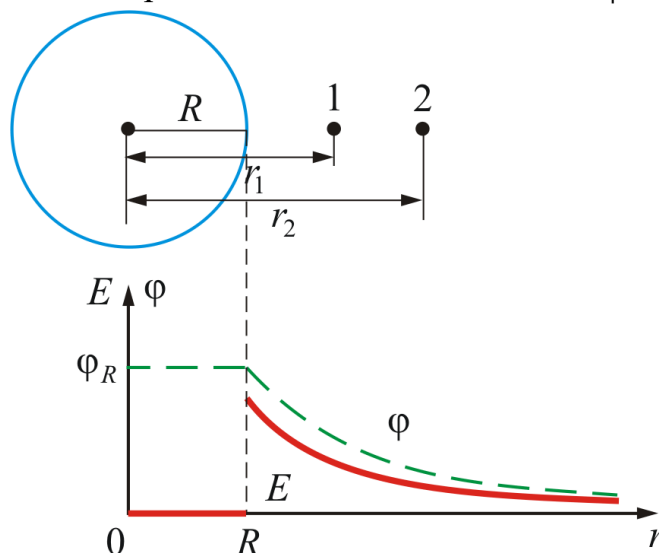


Рисунок 3.6

### 3.7.3. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

В п. 2.5.4 мы нашли, что (рисунок 3.7)

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2. \end{cases} \quad (3.7.6)$$

Отсюда так же, как и в предыдущем случае, разность потенциалов будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1) \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 - \text{вне цилиндров.} \end{cases} \quad (3.7.7)$$

Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем  $\varphi = \text{const}$ ,  $E = 0$ , между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, а вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и  $\varphi$  и  $E$  равны нулю.

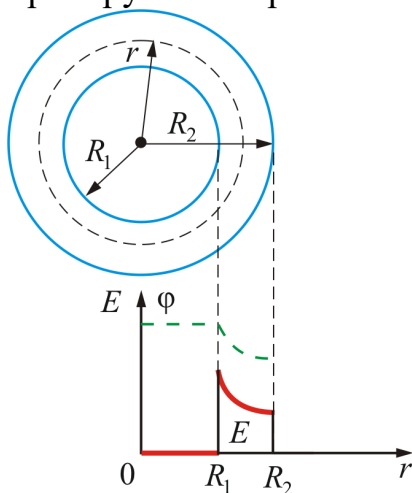


Рисунок 3.7

На рисунке 3.7 изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от  $r$ .

### 3.7.4. Разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной сферой (пустотелой)

Напряженность поля сферы определяется формулой (2.5.7):  $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

(рисунок 3.8). А т.к.  $d\varphi = -E dr$ , то

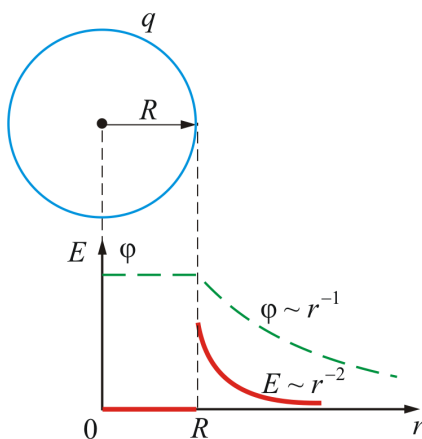


Рисунок 3.8

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \text{ т.е. } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Отсюда имеем

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхн. сферы } (r \leq R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases} \quad (3.7.8)$$

### 3.7.5. Разность потенциалов внутри диэлектрического заряженного шара

Имеем диэлектрический шар (рисунок 3.9), заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$

Как мы уже вычислили в п. 2.5.6 с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \text{внутри шара } (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара } (r = R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \text{вне шара } (r > R). \end{cases} \quad (3.7.9)$$

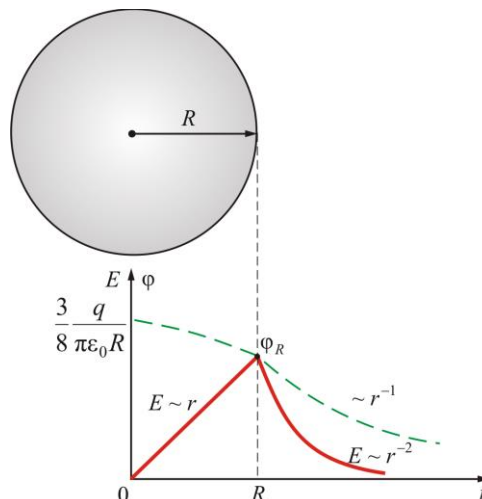


Рисунок 3.9

Отсюда найдем разность потенциалов внутри шара:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_1^2 r dr = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\epsilon_0 2R^3}.$$

Отсюда находим потенциал шара:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} & \text{-- в центре шара } (r = 0) \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{-- внутри шара } (r \leq R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{-- на поверхности и вне шара } (r \geq R). \end{cases} \quad (3.7.10)$$

Из полученных соотношений можно сделать следующие *выводы*.

- *С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать  $E$  и  $\varphi$  от различных заряженных поверхностей.*
- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*

# Тема:

# Диэлектрики и проводники электростатического поля

## План:

4.1. Поляризация диэлектриков

4.2. Различные виды диэлектриков

4.3. Вектор электрического смещения  $\vec{D}$

4.4. Поток вектора электрического смещения. Теорема Остроградского-Гаусса для вектора  $\vec{D}$

4.5. Изменение  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух диэлектриков

5.1. Напряженность и потенциал электростатического поля в проводнике

5.2. Определение напряженности электростатического поля вблизи проводника

5.3. Экспериментальная проверка распределения заряда на проводнике

5.4. Конденсаторы

5.4.1. Электрическая емкость

5.4.2. Соединение конденсаторов

5.4.3. Расчет емкостей различных конденсаторов

5.5. Энергия электростатического поля

## 4.1. Поляризация диэлектриков

Все известные в природе вещества, в соответствии с их способностью проводить электрический ток, делятся на три основных класса: диэлектрики, полупроводники и проводники. Если удельное сопротивление у проводников равно  $\rho_{\text{пр}} = 10^{-6} - 10^{-8}$  Ом/м, то у диэлектриков  $\rho_{\text{д}} = 10^8 - 10^{18}$  Ом/м, а полупроводники занимают промежуточную область  $\rho_{\text{д}} > \rho_{\text{п/п}} > \rho_{\text{пр}}$ .

В идеальном диэлектрике свободных зарядов, то есть способных перемещаться на значительные расстояния (превосходящие расстояния между атомами), нет. Но это не значит, что диэлектрик, помещенный в электростатическое поле, не реагирует на него, что в нем ничего не происходит.

Любое вещество состоит из атомов, образованных положительными ядрами и отрицательными электронами. Поэтому в диэлектриках происходит поляризация.

Смещение электрических зарядов вещества под действием электрического поля называется **поляризацией**. Способность к поляризации является основным свойством диэлектриков.

Видов поляризации много.

**Поляризуемость** диэлектрика включает составляющие – электронную, ионную и ориентационную (дипольную). Рисунок 4.1 иллюстрирует механизм этих видов поляризуемости.

Электронная поляризуемость обусловлена смещением электронной оболочки атома относительно ядра. Ионная поляризуемость вызвана смещением заряженных ионов по отношению к другим ионам. Ориентационная (дипольная) поляризуемость возникает, когда вещество состоит из молекул, обладающих постоянными электрическими дипольными моментами, которые могут более или менее свободно изменять свою ориентацию во внешнем электрическом поле.

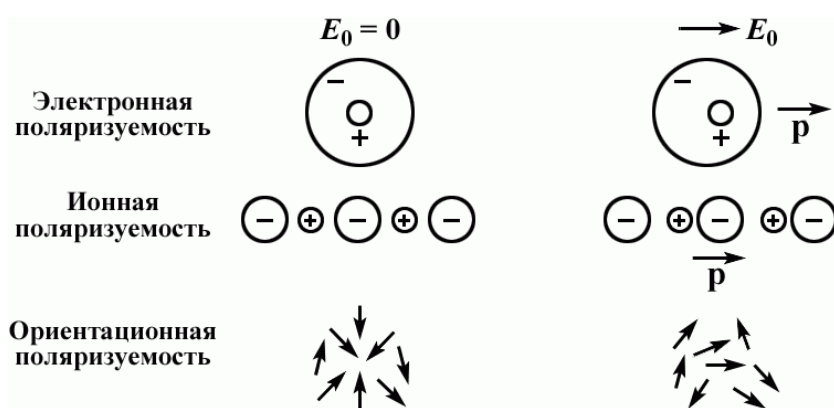


Рисунок 4.1

Есть и другие виды поляризации. Главное в поляризации – смещение зарядов в электростатическом поле. В результате, каждая молекула или атом образует электрический момент  $P$  (рисунок 4.2):

$$P_1 = ql_1 \text{ или } \vec{P}_1 = q\vec{l}_1. \quad (4.1.1)$$

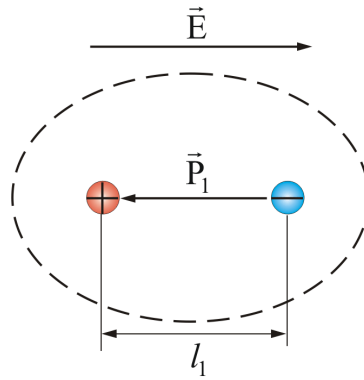


Рисунок 4.2

Ясно, что электрический момент  $P$  пропорционален напряженности  $E$  – напряженности электростатического поля в месте нахождения молекулы, то есть внутри вещества.

К чему приводит поляризация? Рассмотрим рисунок 4.3.

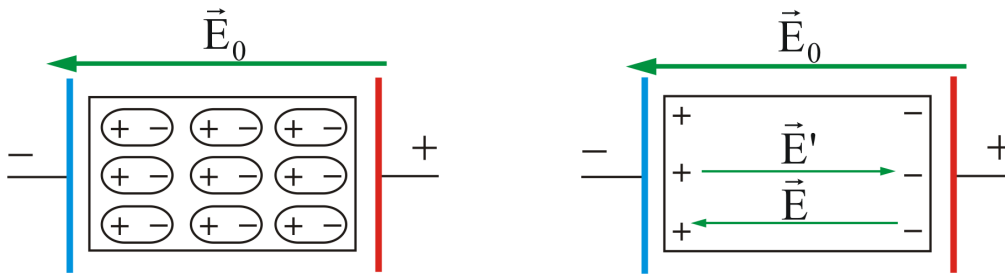


Рисунок 4.3

Внутри диэлектрика электрические заряды диполей компенсируют друг друга. Но на внешних поверхностях диэлектрика, прилегающих к электродам, появляются заряды противоположного знака (поверхностно связанные заряды). Обозначим  $E'$  – электростатическое поле связанных зарядов. Оно направлено всегда против внешнего поля  $E_0$ . Следовательно, результирующее электростатическое поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'. \quad (4.1.2)$$

Итак, электростатическое поле внутри диэлектрика всегда меньше внешнего поля. Во сколько раз?

Рассмотрим некоторые количественные соотношения.

Поместим диэлектрик в виде параллелепипеда в электростатическое поле  $\vec{E}_0$  (рисунок 4.4).



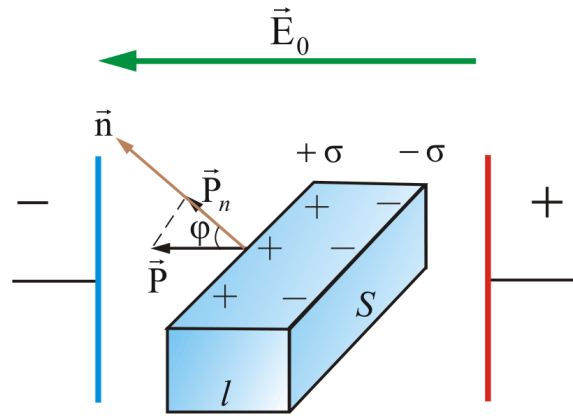


Рисунок 4.4

Как мы знаем, электрический момент тела,  $\vec{P}$  можно найти по формуле:

$$\vec{P} = q\vec{l} = \sigma' S\vec{l}, \text{ или } P = \sigma' Sl \cos \varphi, \quad (4.1.3)$$

где  $\sigma'$  – поверхностная плотность связанных зарядов.

Введем новое понятие – вектор поляризации  $\vec{P}$  – электрический момент единичного объема.

$$\vec{P} = \sum_k^n \vec{P}_{1k} = n\vec{P}_1, \quad (4.1.4)$$

где  $n$  – концентрация молекул в единице объема,  $\vec{P}_1$  – электрический момент одной молекулы.

С учетом этого обстоятельства,

$$P = \underline{P}V = \underline{P}Sl \cos \varphi \quad (4.1.5)$$

(т.к.  $V = Sl \cos \varphi$  – объем параллелепипеда).

Приравняем (4.1.3.) и (4.1.5) и учтем, что  $\underline{P} \cos \varphi = P_n$  – проекция  $\underline{P}$  на направление  $\vec{n}$  – вектора нормали, тогда

$$\sigma' = \underline{P}_n. \quad (4.1.6)$$

**Поверхностная плотность** поляризационных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности.

Отсюда следует, что **индуцированное** в диэлектрике электростатическое поле  $E'$  будет влиять только на нормальную составляющую вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ .

Вектор поляризации можно представить так:

$$\vec{P} = n\vec{P}_1 = n\alpha\epsilon_0\vec{E} = \chi\epsilon_0\vec{E}, \quad (4.1.7)$$

где  $\alpha$  – поляризуемость молекул,  $\chi = n\alpha$  – диэлектрическая восприимчивость – макроскопическая безразмерная величина, характеризующая поляризацию единицы объема.

Следовательно, и у результирующего поля  $\vec{E}$  изменяется, по сравнению с  $\vec{E}_0$ , только нормальная составляющая. Тангенциальная составляющая поля остается без изменения.

В векторной форме результирующее поле можно представить так:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (4.1.8)$$

Результирующая электростатического поля в диэлектрике равно внешнему полю, деленному на диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$ :

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (4.1.9)$$

Величина  $\epsilon = 1 + \chi$  характеризует электрические свойства диэлектрика. Физический смысл диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon$  – величина, показывающая во сколько раз электростатическое поле внутри диэлектрика меньше, чем в вакууме:

$$\epsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (4.1.10)$$

С учетом этого обстоятельства, при наличии диэлектрической среды мы должны поправить все полученные нами в прошлых разделах формулы: например, теорема Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{\sum_k q_k}{\epsilon_0 \epsilon},$$

или закон Кулона:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2}.$$

График зависимости напряженности электростатического поля шара от радиуса, с учетом диэлектрической проницаемости двух сред ( $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ), показан на рисунке 4.5.

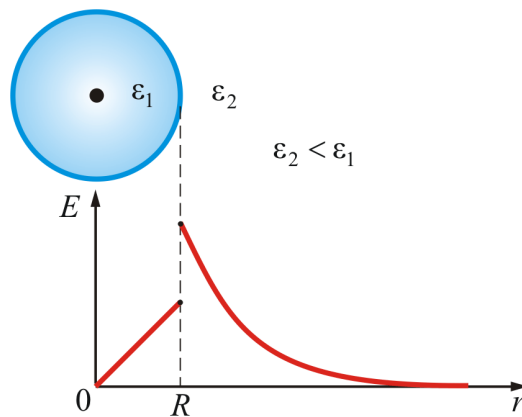


Рисунок 4.5

Как видно из рисунка, напряженность поля  $\vec{E}$  изменяется скачком при переходе из одной среды  $\epsilon_1$  в другую  $\epsilon_2$ .

## 4.2. Различные виды диэлектриков

До сих пор мы рассматривали диэлектрики, которые приобретают электрический момент во внешнем электростатическом поле. Но есть и другие диэлектрики, например, сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики.

## Сегнетоэлектрики

В 1920 г. была открыта *спонтанная* (самопроизвольная) *поляризация*. Сначала её обнаружили у кристаллов сегнетовой соли ( $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), а затем и у других кристаллов. Всю эту группу веществ назвали *сегнетоэлектрики* (или *ферроэлектрики*). Детальное исследование диэлектрических свойств этих веществ было проведено в 1930 – 1934 гг. И.В. Курчатовым в ленинградском физическом техникуме. Все сегнетоэлектрики обнаруживают резкую анизотропию свойств (сегнетоэлектрические свойства могут наблюдаться только вдоль одной из осей кристалла). У изотропных диэлектриков поляризация всех молекул одинакова, у анизотропных – поляризация, и следовательно, вектор поляризации  $\vec{P}$  в разных направлениях разные. В настоящее время известно несколько сотен сегнетоэлектриков.

Рассмотрим *основные свойства сегнетоэлектриков*:

1. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  в некотором температурном интервале велика ( $\epsilon \sim 10^3 - 10^4$ ).
2. Значение  $\epsilon$  зависит не только от внешнего поля  $E_0$ , но и от предыстории образца.
3. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (а следовательно, и  $P$ ) – нелинейно зависит от напряженности внешнего электростатического поля (*нелинейные диэлектрики*).

Это свойство называется *диэлектрическим гистерезисом*. На рисунке 4.6 изображена кривая поляризации сегнетоэлектрика – петля гистерезиса.

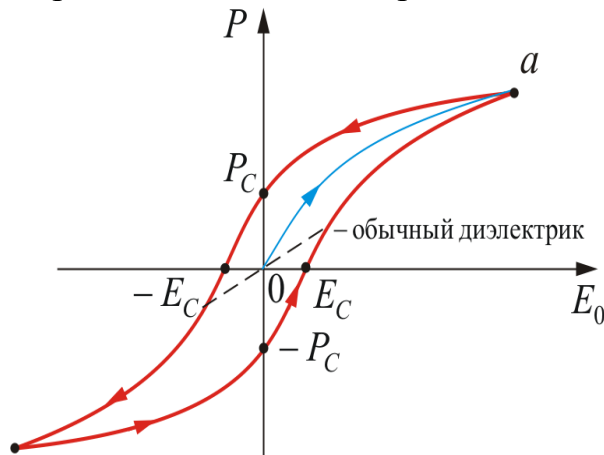


Рисунок 4.6

Здесь точка  $a$  – состояние насыщения.

При  $E_0 = 0$ ,  $P \neq 0$ , это говорит о том, что в кристаллах имеется остаточная поляризованность  $P_C$ , чтобы ее уничтожить, необходимо приложить  $E_C$  – коэрцитивную силу противоположного направления.

4. Наличие точки Кюри – температуры, при которой (и выше) сегнетоэлектрические свойства пропадают. При этой температуре происходит фазовый переход 2-го рода. (Например, титанат бария:  $133^\circ \text{C}$ ; сегнетова соль:  $-18 + 24^\circ \text{C}$ ; дигидрофосфат калия:  $-150^\circ \text{C}$ ; ниобат лития  $1210^\circ \text{C}$ ).

Причиной сегнетоэлектрических свойств является самопроизвольная (спонтанная) поляризация, возникающая под действием особо сильного взаимодействия между частицами, образующими вещество.

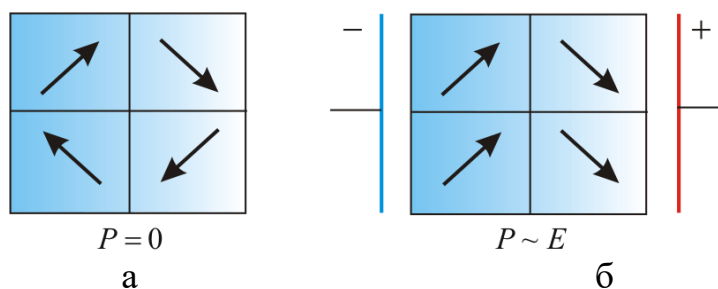


Рисунок 4.7

Стремление к минимальной потенциальной энергии и наличие дефектов структуры приводит к тому, что сегнетоэлектрик разбит на **домены** (рисунок 4.7). Без внешнего поля  $P$  – электрический импульс кристалла равен нулю (рисунок 4.7, а). Во внешнем электростатическом поле домены ориентируются вдоль поля (рисунок 4.7, б).

Сегнетоэлектрики используются для изготовления многих радиотехнических приборов, например, варикондов – конденсаторов с изменяемой емкостью.

Среди диэлектриков есть вещества, называемые **электреты** – это диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электростатического поля (аналоги постоянных магнитов).

Электретами называют диэлектрики, длительное время сохраняющие электризованное состояние после окончания внешнего воздействия, вызвавшего электризацию. Электреты являются формальными аналогами постоянных магнитов, создающих вокруг себя магнитное поле. Принципиальная возможность получения таких материалов была предсказана Фарадеем. Термин «электрет» был предложен Хевисайдом в 1896 году по аналогии с английским «magnet» – постоянный магнит, а первые электреты получены японским исследователем Егучи в 1922 году. Егучи охладил в сильном электрическом поле расплав карнаубского воска и канифоли. Электрическое поле сориентировало полярные молекулы, и после охлаждения материал остался в поляризованном состоянии. Для уточнения технологии такие материалы называют термоэлектретами.

## Пьезоэлектрики

Некоторые диэлектрики поляризуются не только под действием электростатического поля, но и под действием механической деформации. Это явление называется *пьезоэлектрическим эффектом*.

Явление открыто братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 году.

Если на грани кристалла наложить металлические электроды (обкладки), то при деформации кристалла с помощью силы  $\vec{F}$  на обкладках возникнет разность потенциалов. Если замкнуть обкладки, то потечет ток.

Продемонстрировать пьезоэффект можно рисунком 4.8.

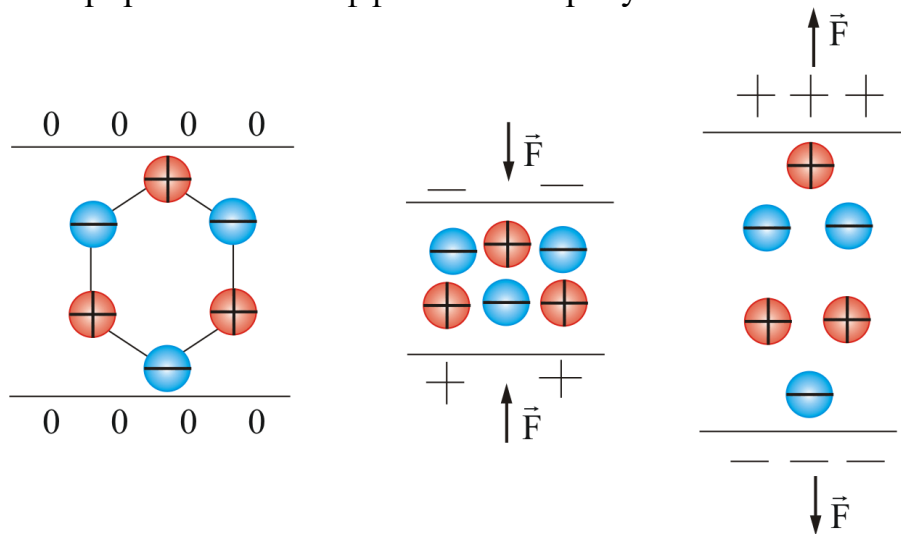


Рисунок 4.8

Сейчас известно более 1800 пьезокристаллов. Все сегнетоэлектрики обладают пьезоэлектрическими свойствами.

Возможен и обратный пьезоэлектрический эффект. Возникновение поляризации сопровождается механическими деформациями. Если на пьезоэлектрический кристалл подать напряжение, то возникнут механические деформации кристалла, причем, деформации будут пропорциональны приложенному электростатическому полю  $E_0$ .

## Пироэлектрики

Кроме сегнетоэлектриков, спонтанно поляризованными диэлектриками являются *пироэлектрики* (от греч. *pur* – огонь). Пироэлектрики – это кристаллические диэлектрики, обладающие спонтанной электрической поляризацией во всей температурной области, вплоть до температуры плавления.

В отличие от сегнетоэлектриков в пироэлектриках поляризация  $P$  линейно зависит от величины внешнего электрического поля, т.е. пироэлектрики являются линейными диэлектриками.

*Пироэлектричество* – появление электрических зарядов на поверхности некоторых кристаллов при их нагревании или охлаждении. При нагревании один конец диэлектрика заряжается положительно, а при охлаждении он же – отрицательно. Появление зарядов связано с изменением существующей поляризации при изменении температуры кристаллов. Типичный пироэлектрик – турмалин.

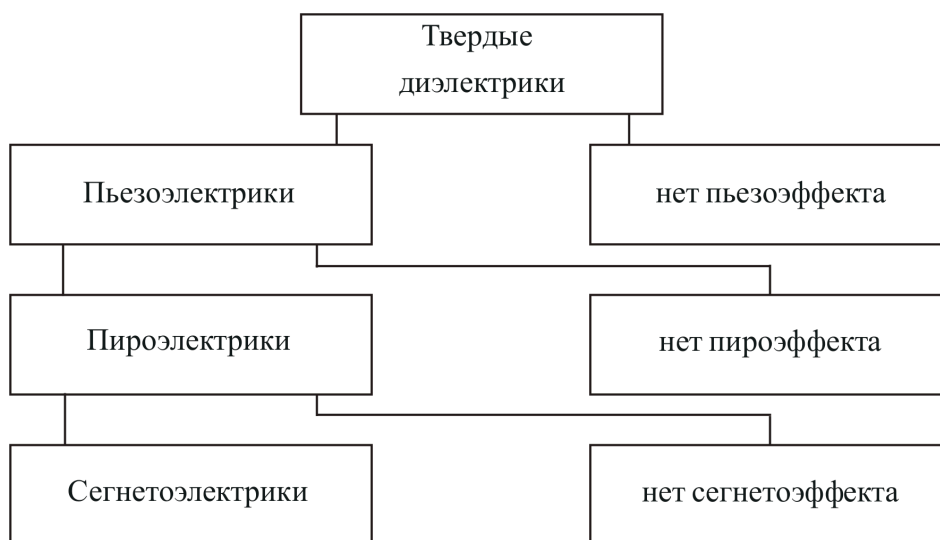


Рисунок 4.9

Из рисунка 4.9 видно, что все пироэлектрики являются пьезоэлектриками, но не наоборот. Некоторые пироэлектрики обладают сегнетоэлектрическими свойствами. Из сказанного выше следует, что понятие «пироэлектрик» является более общим, чем «сегнетоэлектрик». Можно сказать, что сегнетоэлектрики есть пироэлектрики с реориентируемой внешним полем поляризацией.

В пироэлектриках *поляризация  $P$  линейно зависит* от величины внешнего электростатического поля  $E_0$ , т.е. пироэлектрики являются *линейными диэлектриками*.

В качестве примеров использования различных диэлектриков можно привести следующие:

- сегнетоэлектрики – электрические конденсаторы, ограничители предельно допустимого тока, позисторы, запоминающие устройства;
- пьезоэлектрики – генераторы ВЧ и пошаговые моторы, микрофоны, наушники, датчики давления, частотные фильтры, пьезоэлектрические адаптеры;
- пироэлектрики – позисторы, детекторы ИК-излучения, болометры (датчики инфракрасного излучения), электрооптические модуляторы.

### 4.3. Вектор электрического смещения $\vec{D}$

Имеем границу раздела двух сред с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , так что,  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  (рисунок 4.10, а).

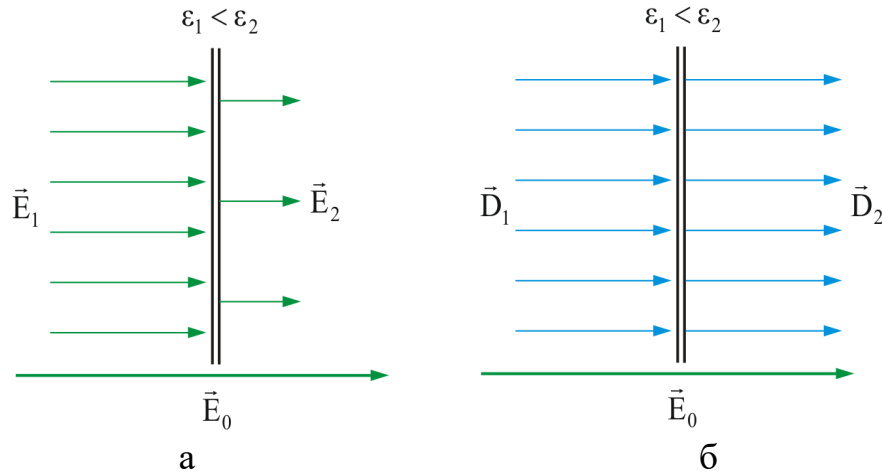


Рисунок 4.10

Как мы уже показали, в соответствии с (4.1.10),

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \text{ или } E_1 = E_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т.е., напряженность электростатического поля  $E$  изменяется скачком при переходе из одной среды в другую.

Главная задача электростатики – расчет электрических полей, то есть  $\vec{E}$  в различных электрических аппаратах, кабелях, конденсаторах, и т.д. Эти расчеты сами по себе не просты, да еще наличие разного сорта диэлектриков и проводников еще более усложняют задачу.

Для упрощения расчетов была введена новая векторная величина – **вектор электрического смещения** (электрическая индукция):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (4.3.1)$$

Из предыдущих рассуждений  $\vec{E}_1 \epsilon_1 = \epsilon_2 \vec{E}_2$ , тогда  $\epsilon_0 \epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_0 \epsilon_2 \vec{E}_2$ , откуда и

$$\vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2}. \quad (4.3.2)$$

Таким образом, вектор  $\vec{D}$  остается неизменным при переходе из одной среды в другую (рисунок 4.10, б), и это облегчает расчет  $\vec{D}$ . Зная  $\vec{D}$  и  $\epsilon$ , легко

рассчитывать  $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon}$ .

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E}, \text{ откуда можно записать:}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (4.3.3)$$

где  $\vec{P}$  – вектор поляризации,  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость среды, характеризующая поляризацию единичного объема среды.

Таким образом, вектор  $\vec{D}$  – есть сумма (линейная комбинация) двух векторов различной природы:  $\vec{E}$  – главной характеристики поля и  $\vec{P}$  – поляризации среды.

В СГС:  $\epsilon = 1$ , поэтому в вакууме  $\vec{D} = \vec{E}$  и размерность у  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  одинакова.

В СИ:  $[D] = [E] \cdot [\epsilon_0] = \frac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ , т. е. это заряд, протекающий через единицу поверхности.

Для точечного заряда в вакууме  $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ .

Для  $\vec{D}$  имеет место принцип суперпозиции, как и для  $\vec{E}$ , т.е.

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{D}_k.$$

#### 4.4. Поток вектора электрического смещения. Теорема Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{D}$

Аналогично потоку для вектора  $\vec{E}$  ( $\Phi_E = \int_S E_n dS$ ) можно ввести понятие потока для вектора  $\vec{D}$  ( $\Phi_D$ ). Пусть произвольную площадку  $S$  пересекают линии вектора электрического смещения  $\vec{D}$  под углом  $\alpha$  к нормали  $\vec{n}$  (рисунок 4.11).

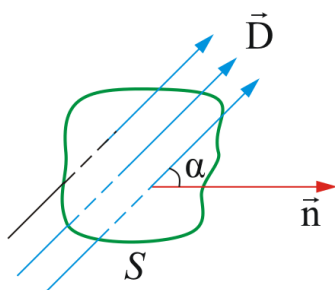


Рисунок 4.11

$$\Phi_D = \int_S D_n dS.$$

В однородном электростатическом поле  $\Phi_D = DS \cos \alpha = D_n S$ .

Теорему Остроградского-Гаусса для вектора  $\vec{D}$  получим из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора  $\vec{E}$ :

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad \text{т. к. } E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad \text{то } \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \oint_S D_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

**Теорема Остроградского-Гаусса для  $\vec{D}$ :**



$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q_k. \quad (4.4.1)$$

Поток вектора  $\vec{D}$  через любую замкнутую поверхность определяется только свободными зарядами, а не всеми зарядами внутри объема, ограниченного данной поверхностью. Это позволяет не рассматривать связанные (поляризованные) заряды, влияющие на  $\vec{E}$  и упрощает решение многих задач. В этом смысл введения вектора  $\vec{D}$ .

#### 4.5. Изменение $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим простой случай (рисунок 4.12): два бесконечно протяженных диэлектрика с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , имеющих общую границу раздела, пронизывает внешнее электростатическое поле  $\vec{E}_0$ .

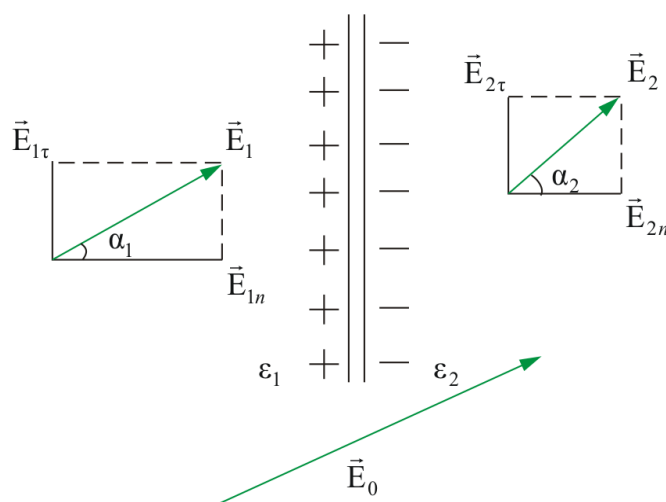


Рисунок 4.12

Пусть  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ .

Из п. 4.3 мы знаем, что  $\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  и  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ .

Образовавшиеся поверхностные заряды изменяют только *нормальную составляющую*  $\vec{E}$ , а тангенциальная составляющая остается постоянной (рисунок 4.12):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{2\tau} E_{1n}}{E_{2n} E_{1\tau}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

то есть направление вектора  $\vec{E}$  изменяется. **Это закон преломления вектора напряженности электростатического поля.**

Рассмотрим изменение вектора  $\vec{D}$  и его проекций  $D_n$  и  $D_\tau$  (рисунок 4.13).

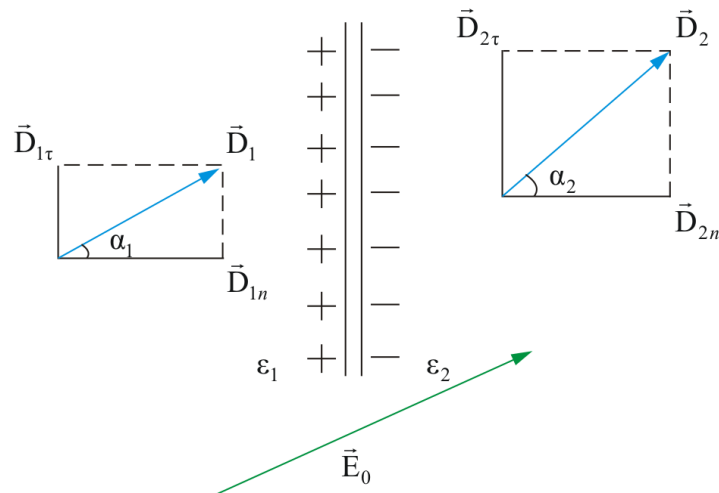


Рисунок 4.13

Т.к.  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ , то имеем:

$$D_{1n} = \epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n}, \quad D_{2n} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n},$$

$$\frac{D_{1n}}{D_{2n}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n}}{\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_0 \epsilon_2 \epsilon_1} = 1,$$

т.е.  $D_{1n} = D_{2n}$  – нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  не изменяется.

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1\tau}}{\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2};$$

$$D_{2\tau} = D_{1\tau} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т.е. тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  увеличивается в  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  раз (рисунок 4.12).

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{2\tau} D_{1n}}{D_{2n} D_{1\tau}} = \frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (4.5.1)$$

Это закон преломления вектора  $\vec{D}$ .

Объединим рисунки 4.12 и 4.13 и проиллюстрируем на рисунке 4.14 закон преломления для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ .

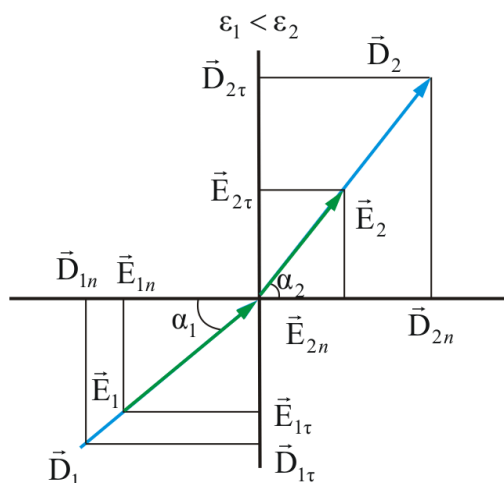


Рисунок. 4.14

Как видно из рисунка 4.13, при переходе из одной диэлектрической среды в другую вектор  $\vec{D}$  – преломляется на тот же угол, что и  $\vec{E}$  ( $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ ). Входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  удаляются от нормали.

## 5.1. Напряженность и потенциал электростатического поля в проводнике

В проводниках имеются электрически заряженные частицы – носители заряда (электроны в металлах, ионы в электролитах), способные перемещаться по всему объему проводника под действием внешнего электростатического поля. В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением твердых металлических проводников.

Носителями заряда в металлах являются электроны проводимости. Они возникают при конденсации паров металла за счет обобществления валентных электронов.

При отсутствии электростатического поля металлический проводник является электрически нейтральным – электростатическое поле, создаваемое положительными и отрицательными зарядами внутри него, компенсируется.

При внесении металлического проводника во внешнее электростатическое поле электроны проводимости перемещаются (перераспределяются) до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов проводимости и положительных ионов не скомпенсирует внешнее поле.

Итак, в любой точке внутри проводника, находящегося в электростатическом поле  $\vec{E} = 0$ ;  $d\varphi = 0$ ; т.е.  $\varphi = \text{const}$ , в идеальном проводнике диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\text{ме}} \rightarrow \infty$ .

На поверхности проводника напряженность  $\vec{E}$  (рисунок 5.1) должна быть направлена по нормали к этой поверхности, иначе, под действием составляющей  $E_\tau$ , касательной к поверхности, заряды перемещались бы по проводнику, а это противоречило бы их статическому распределению.

Вне заряженного проводника поле есть, следовательно, должен быть вектор  $\vec{E}$ , и направлен он перпендикулярно поверхности.

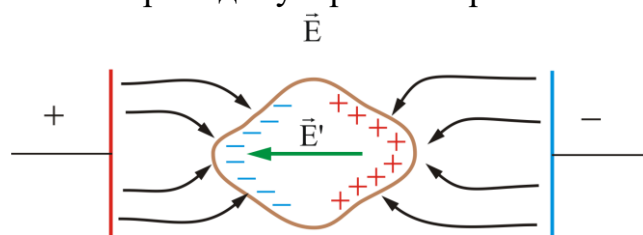


Рисунок 5.1

Итак, в установившемся состоянии в проводнике, помещенном в электростатическое поле имеем:

- Появление у заряженной поверхности на металле заряда противоположного знака – **электростатическая индукция**. Этот процесс очень краток  $\sim 10^{-8}$  с.

- **Электростатическое экранирование** – внутри проводника поле не проникает.

- Во всех точках внутри проводника  $E=0$ , а во всех точках на поверхности  $E = E_n$  ( $E_\tau = 0$ );

- Весь объем проводника, находящегося в электростатическом поле, **эквипотенциален**.

Действительно, в любой точке внутри проводника  $\frac{d\phi}{dl} = -E = 0$ , следовательно,  $\phi = \text{const}$ .

Поверхность проводника тоже эквипотенциальна:  $\phi_{\text{пов}} = \text{const}$ , т.к.

$$\frac{d\phi}{dl} = -E_\tau = 0.$$

- Потенциал поверхности равен потенциалу объема проводника.

- В заряженном проводнике **некомпенсированные** заряды располагаются только на поверхности (их расталкивают кулоновские силы).

Можно доказать это последнее утверждение формально: проведем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность  $S$ , ограничив некоторый объем внутри проводника. Тогда, согласно теореме Остроградского-Гаусса, суммарный заряд  $q$  этого объема равен

$$q = \oint_S D dS = \oint_S E \epsilon \epsilon_0 dS = 0, \text{ так как } E = 0.$$

## 5.2. Определение напряженности поля вблизи поверхности заряженного проводника

Выделим на поверхности  $S$  проводника площадку  $dS$  и построим на ней цилиндр с образующими, перпендикулярными к площадке  $dS$ , высотой  $dl$  (рисунок 5.2).

$$dS' = dS'' = dS.$$

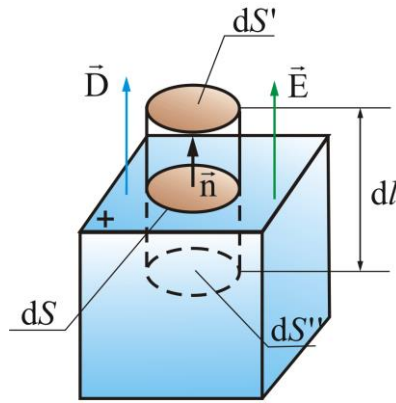


Рисунок 5.2

На поверхности проводника вектор напряженности поля  $\vec{E}$  и вектор электрического смещения  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$  перпендикулярны поверхности. Поэтому поток  $\vec{D}$  сквозь боковую поверхность равен нулю.

Поток вектора электрического смещения  $\Phi_D$  через  $dS''$  тоже равен нулю, так как  $dS''$  лежит внутри проводника, где  $\vec{E} = 0$  и, следовательно,  $\vec{D} = 0$ . Отсюда следует, что поток  $d\Phi_D$  сквозь замкнутую поверхность равен потоку  $\vec{D}$  через  $dS'$ :

$$d\Phi_D = D_n dS.$$

С другой стороны, по теореме Остроградского-Гаусса:

$$d\Phi_D = dq = \sigma dS,$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов на  $dS$ . Из равенства правых частей следует, что  $D_n = \sigma$ , тогда

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}. \quad (5.2.1)$$

Итак, напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника

прямо пропорциональна поверхностной плотности зарядов.

Мы с вами рассматривали поля, создаваемые плоскостью, цилиндром, шаром, и везде получаем, что  $E \sim \sigma$ . Этот вывод является общим, так как произвольные поверхности есть комбинации указанных выше простейших поверхностей.

### 5.3. Экспериментальная проверка распределения заряда на проводнике

Проверим экспериментально сделанные нами выводы.

#### 1. Заряженный кондуктор (рисунок 5.3).

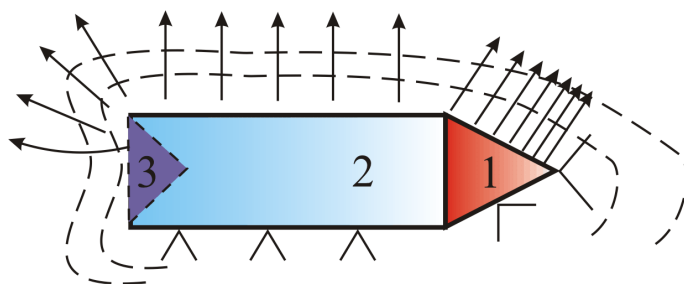


Рисунок 5.3

В местах разной напряженности электростатического поля лепестки бумажки расходятся по-разному: на поверхности 1 – максимальное расхождение, на поверхности 2 заряд распределен равномерно ( $q = \text{const}$ ) и на ней имеем одинаковое расхождение лепестков. На поверхности 3 (внутри кондуктора) зарядов нет и лепестки не расходятся.

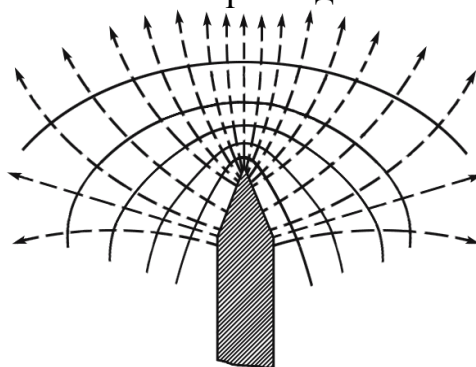


Рисунок 5.4

Из рисунка 5.4 видно, что напряженность электростатического поля максимальна на острие заряженного проводника.

## 2. Стеkanie электростатических зарядов с острия.

Большая напряженность поля  $E$  на остриях – нежелательное явление, т.к. происходит утечка зарядов и ионизация воздуха. Ионы уносят электрический заряд, образуется как бы «электрический ветер» («огни Святого Эльма»).

Есть наглядные эксперименты по этому явлению: сдувание пламени свечи электрическим ветром (рисунок 5.5), колесо Франклина или вертушка (рисунок 5.6). На этом принципе построен электростатический двигатель.

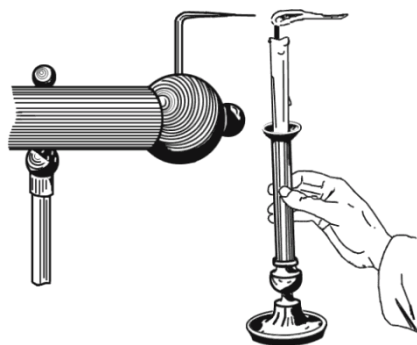


Рисунок 5.5

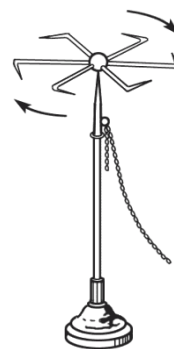


Рисунок 5.6

### 3. Электростатический генератор.

Если заряженный металлический шарик привести в соприкосновение с поверхностью какого-либо проводника, то заряд шарика частично передается проводнику: шарик будет разряжаться до тех пор, пока их потенциалы не выровняются. Иначе обстоит дело, если шарик привести в соприкосновение с внутренней поверхностью полого проводника. При этом весь заряд с шарика стечет на проводник и распределится на внешней поверхности проводника (рисунок 5.7).

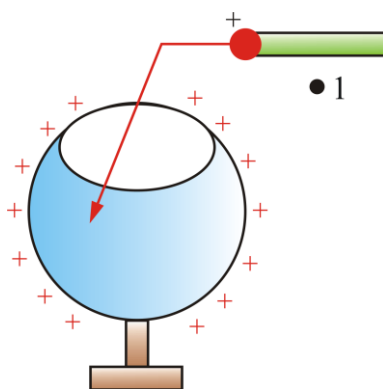


Рисунок 5.7

Потенциал полого проводника может быть больше, чем потенциал шарика, тем не менее, заряд с шарика стечет полностью. В точке 1 потенциал шарика меньше потенциала проводника ( $\varphi_{ш} < \varphi_{пр}$ ), но пока мы переносили шарик в полость, мы совершили работу по преодолению сил отталкивания и, тем самым увеличивая потенциальную энергию, увеличили потенциал шарика. То есть, когда мы вносим шарик, потенциал его становится больше, и заряд как обычно перетекает от большего потенциала к меньшему. Перенос с помощью шарика следующую порцию заряда, мы совершаем еще большую работу. Это наглядный пример того, что потенциал – энергетическая характеристика. На этом принципе построен электростатический генератор Ван-де-Граафа.



**Ван-де-Грааф Роберт** (1901 – 1967) – американский физик. Окончил университет штата Алабама (1922 г.). Совершенствовал знания в Сорбонне и Оксфорде. В 1929 – 31 гг. работал в Принстонском университете, в 1931 – 60 гг. – в Массачусетском технологическом институте.

Научные исследования в области ядерной физики и ускорительной техники. Выдвинул идею тандемного ускорителя и к 1958 г. построил первый тандемный ускоритель отрицательных ионов.

В 1931 году Роберт Ван-де-Грааф запатентовал высоковольтный *электростатический ускоритель*, принцип действия которого разработал в 1929 г., и в 1932 – 33 гг. спроектировал и построил генератор с диаметром сферы 4,5 м. В 1936 г. он построил самый большой из традиционных генераторов постоянного напряжения.

Устройство электростатического генератора показано на рисунке 5.8.

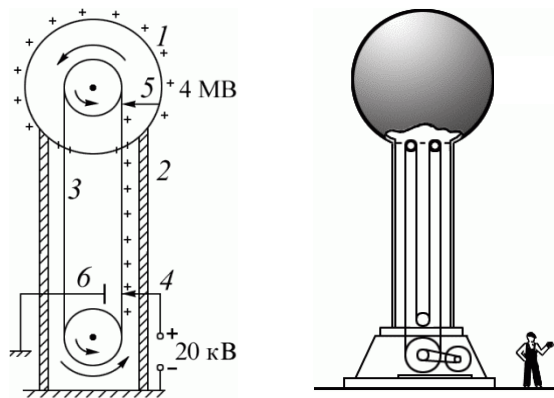


Рисунок 5.8

Зарядное устройство 4 заряжает ленту транспортера 3 положительными зарядами. Лента переносит их вовнутрь металлической сферы 5, где происходит съем этих зарядов. Далее они стекают на внешнюю поверхность 1. Так на поверхности сферы можно получить потенциал относительно Земли в несколько миллионов вольт. Ограничением является ток утечки. Такие генераторы существуют в настоящее время. Например, в Массачусетском технологическом институте построен генератор с диаметром сферы 4,5 метров и получен потенциал  $3 \div 5 \cdot 10^6$  В.

У нас в Томске хорошо развита ускорительная техника. Так, только в НИИ ядерной физики имеется около десяти ускорителей различного класса. Один из них ЭСГ или генератор Ван-де-Граафа. Он изготовлен в специальной башне, и на нем был получен потенциал один миллион вольт.

## 5.4. Конденсаторы

### 5.4.1. Электрическая емкость

При сообщении проводнику заряда на его поверхности появляется потенциал  $\phi$ , но если этот же заряд сообщить другому проводнику, то потенциал будет другой. Это зависит от геометрических параметров проводника. Но в любом случае потенциал  $\phi$  пропорционален заряду  $q$ .

$$q = C\phi. \quad (5.4.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  называют *электроемкостью* – физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу.

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (5.4.2)$$

Единица измерения емкости в СИ – фарада.  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/1В}$ .

Если потенциал поверхности шара

$$\phi_{\text{шар.}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}, \quad (5.4.3)$$

то

$$C_{\text{шар.}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R, \quad (5.4.4)$$



По этой формуле можно рассчитать емкость Земли. Если диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon = 1$  (воздух, вакуум) и  $R = R_{\text{Земли}}$ , то имеем, что  $C_3 = 7 \cdot 10^{-4}$  Ф или 700 мкФ.

Чаще на практике используют более мелкие единицы емкости:

1 нФ (нанофарада) =  $10^{-9}$  Ф и 1 пкФ (пикофарада) =  $10^{-12}$  Ф.

Необходимость в устройствах, накапливающих заряд, есть, а уединенные проводники обладают малой емкостью. Опытным путем было обнаружено, что электроемкость проводника увеличивается, если к нему поднести другой проводник – за счет явления электростатической индукции.

*Конденсатор* – это два проводника, называемые *обкладками*, расположенные близко друг к другу.

Конструкция такова, что внешние, окружающие конденсатор тела, не оказывают влияние на его электроемкость. Это будет выполняться, если электростатическое поле будет сосредоточено внутри конденсатора, между обкладками.

Конденсаторы бывают плоские, цилиндрические и сферические.

Так как электростатическое поле находится внутри конденсатора, то линии электрического смещения начинаются на положительной обкладке, заканчиваются на отрицательной, и нигде не исчезают. Следовательно, заряды на обкладках *противоположны по знаку, но одинаковы по величине*.

Емкость конденсатора равна отношению заряда к разности потенциалов между обкладками конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (5.4.5)$$

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется  $U_{\text{раб}}$  (или  $U_{\text{пр.}}$ ) – максимальное допустимое напряжение, выше которого происходит пробой между обкладками конденсатора.

### 5.4.2. Соединение конденсаторов

*Емкостные батареи* – комбинации параллельных и последовательных соединений конденсаторов.

1) Параллельное соединение конденсаторов (рисунок 5.9):

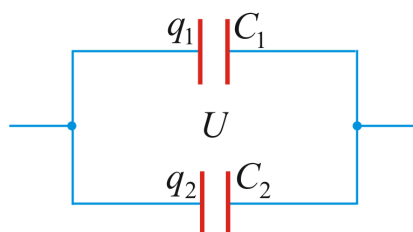


Рисунок 5.9

В данном случае общим является напряжение  $U$ :

$$q_1 = C_1 U;$$

$$q_2 = C_2 U.$$

Суммарный заряд:

$$q = q_1 + q_2 = U(C_1 + C_2).$$

Результирующая емкость:

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2.$$

Сравните с параллельным соединением сопротивлений  $R$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}.$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов суммарная емкость

$$C = \sum_k C_k.$$

Общая емкость больше самой большой емкости, входящей в батарею.

2) Последовательное соединение конденсаторов (рисунок 5.10):

Общим является заряд  $q$ .

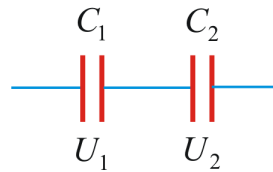


Рисунок 5.10

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2}; \quad \text{или} \quad U = \sum_k U_k = q \sum_k \frac{1}{C_k}, \quad \text{отсюда}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (5.4.6)$$

Сравните с последовательным соединением  $R$ :

$$R = R_1 + R_2.$$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов общая емкость меньше самой маленькой емкости, входящей в батарею:

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

### 5.4.3. Расчет емкостей различных конденсаторов

#### 1. Емкость плоского конденсатора

Напряженность поля внутри конденсатора (рисунок 5.11):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

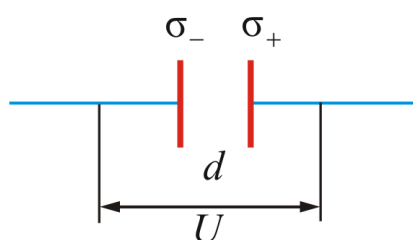


Рисунок 5.11

Напряжение между обкладками:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_2}^{x_1} E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d,$$

где  $d = x_2 - x_1$  – расстояние между пластинами.

Так как заряд  $q = \sigma S$ , то

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}. \quad (5.4.7)$$

Как видно из формулы, диэлектрическая проницаемость вещества очень сильно влияет на емкость конденсатора. Это можно увидеть и экспериментально: заряжаем электроскоп, подносим к нему металлическую пластину – получили конденсатор (за счет электростатической индукции, потенциал увеличился). Если внести между пластинами диэлектрик с  $\epsilon$ , больше, чем у воздуха, то емкость конденсатора увеличится.

Из (5.4.6) можно получить единицы измерения  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = \frac{Cd}{\epsilon S}, \quad (5.4.8)$$

$$[\epsilon_0] = \frac{[C] \cdot [d]}{[S]} = \frac{\Phi \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

## 2. Емкость цилиндрического конденсатора

Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора, изображенного на рисунке 5.12, может быть рассчитана по формуле:

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где  $\lambda$  – линейная плотность заряда,  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы цилиндрических обкладок,  $l$  – длина конденсатора,  $q = \lambda l$ .

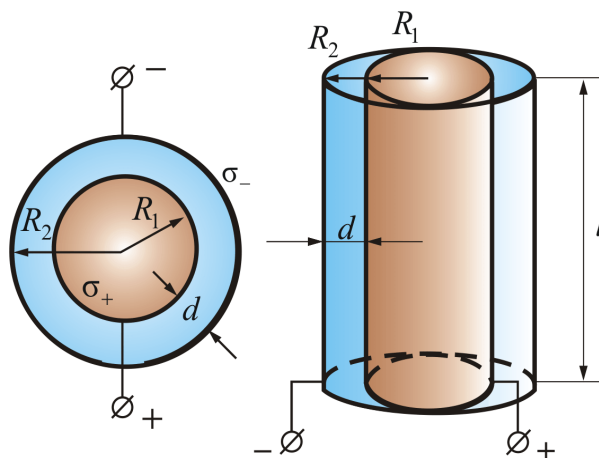


Рисунок 5.12

Тогда, так как  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , получим

$$C_{\text{цил}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (5.4.9)$$

Понятно, что зазор между обкладками мал:  $d = R_2 - R_1$ , то есть  $d \ll R_1$ .

Тогда  $\ln \frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1}$

$$C_{\text{цил}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l R_1}{R_2 - R_1} = \varepsilon_0\varepsilon \frac{S}{d}. \quad (5.4.10)$$

### 3. Емкость шарового конденсатора (рисунок 5.13)

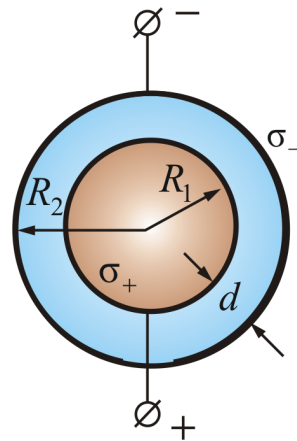


Рисунок 5.13

Из п. 3.6.4 мы знаем, что разность потенциала между обкладками равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

Тогда, так как  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , получим

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Это емкость шарового конденсатора, где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы шаров.

В шаровом конденсаторе  $R_1 \approx R_2$ ;  $S = 4\pi R^2$ ;  $R_2 - R_1 = d$  – расстояние между обкладками. Тогда

$$C_{\text{шар}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}{d} = \varepsilon_0\varepsilon \frac{S}{d}. \quad (5.4.11)$$

Таким образом, емкость шарового конденсатора с достаточной степенью точности можно рассчитать так же, как и емкость плоского, и цилиндрического конденсаторов.

## 5.5. Энергия электростатического поля

Где же сосредоточена энергия конденсатора? На обкладках? На зарядах? А может, в пространстве между обкладками? Только опыт может дать ответ на этот вопрос.

В пределах электростатики дать ответ на этот вопрос невозможно. Поля и заряды, их образовавшие, не могут существовать обособленно. Их не разделить. Однако переменные поля могут существовать независимо от возбуждавших их зарядов (излучение солнца, радиоволны, ...), и они переносят энергию. Эти факты заставляют признать, что носителем энергии является электростатическое поле.

При перемещении электрических зарядов силы кулоновского взаимодействия совершают определенную работу  $\delta A$ . Работа, совершенная системой, определяется убылью энергии взаимодействия  $-dW$  зарядов

$$\delta A = -dW. \quad (5.5.1)$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r_{12}$ , численно равна работе по перемещению заряда  $q_1$  в поле неподвижного заряда  $q_2$  из точки с потенциалом  $\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  в точку с потенциалом  $\varphi_1 + d\varphi_1$ :

$$\delta A = -q_1 d\varphi_1 = -d\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\right) = -dW,$$

откуда

$$W = q_1 \varphi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + W_0.$$

Будем считать аддитивную постоянную  $W_0$ , равной нулю. В этом случае  $W$  может быть и отрицательной величиной, если  $q_1$  и  $q_2$  – заряды противоположного знака.

Аналогично можно рассчитать энергию двух зарядов, рассмотрев перемещение заряда  $q_2$  в поле неподвижного заряда  $q_1$  из точки с потенциалом

$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  в точку с потенциалом  $\varphi_2 + d\varphi_2$ :

$$\delta A = -q_2 d\varphi_2 = -d\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\right) = -dW,$$

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (5.5.2)$$

Удобно записать энергию взаимодействия двух зарядов в симметричной форме

$$W = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2). \quad (5.5.3)$$

Для системы из  $n$  точечных зарядов (рисунок 5.14) в силу принципа суперпозиции для потенциала, в точке нахождения  $k$ -го заряда, можно записать:

$$\varphi_k = (\varphi_{k,1} + \varphi_{k,2} + \dots + \varphi_{k,k-1} + \varphi_{k,k+1} + \dots + \varphi_{k,n}).$$

Здесь  $\varphi_{k,i}$  – потенциал  $i$ -го заряда в точке расположения  $k$ -го заряда. В сумме исключен потенциал  $\varphi_{k,k}$ , т.е. не учитывается воздействие заряда самого на себя, равное для точечного заряда бесконечности.

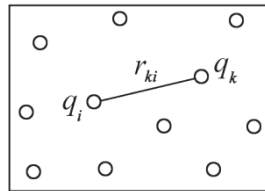


Рисунок 5.14

Тогда взаимная энергия системы  $n$  зарядов равна:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \frac{q_k q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ki}} \quad (k \neq i). \quad (5.5.4)$$

Данная формула справедлива лишь в случае, если расстояние между зарядами заметно превосходит размеры самих зарядов.

**Рассчитаем энергию заряженного конденсатора.** Конденсатор состоит из двух, первоначально незаряженных, пластин. Будем постепенно отнимать у нижней пластины заряд  $dq$  и переносить его на верхнюю пластину (рисунок 5.15).

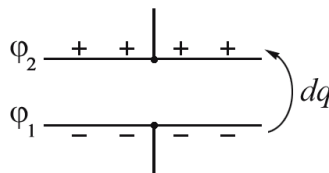


Рисунок 5.15

В результате между пластинами возникнет разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$ . При переносе каждой порции заряда совершается элементарная работа

$$\delta A = -dq(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Воспользовавшись определением емкости  $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ , получаем

$$\delta A = \frac{q dq}{C}.$$

Общая работа, затраченная на увеличение заряда пластин конденсатора от 0 до  $q$ , равна:

$$A = \int_0^q \delta A = \int_0^q \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C}. \quad (5.5.5)$$

При вычислении интеграла учтено, что емкость  $C$  не зависит от  $q$  и  $\varphi$ . Величина полной работы  $A$  равна энергии, запасенной конденсатором:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{qU}{2}. \quad (5.5.6)$$

Эту энергию можно также записать в виде

$$W = \frac{1}{2} C(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{1}{2} CU^2. \quad (5.5.7)$$

Запасание энергии конденсатором наглядно проявляется при его подключении к электрической лампочке. Лампочка вспыхивает и гаснет при разрядке конденсатора (рисунок 5.16).

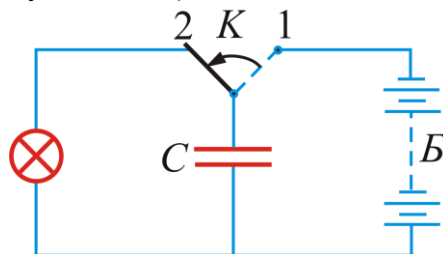


Рисунок 5.16

Вспомним понятие **пондермоторные силы** – силы электрического взаимодействия между пластинами конденсатора (п. 2.5.2). Эту силу можно вычислить через энергию взаимодействия.

При незначительном перемещении одной пластины в поле другой совершается работа

$$\delta A = -dW = Fdx, \quad \text{отсюда} \quad F = -\frac{dW}{dx}.$$

Продифференцируем выражение для энергии конденсатора (5.5.6) и, подставив значение емкости конденсатора  $C$ , получим

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Модуль этого выражения дает величину пондермоторной силы:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \quad (5.5.8)$$

Тема:

# Законы постоянного электрического тока

## План:

- 7.1. Причины электрического тока
- 7.2. Плотность тока
- 7.3. Уравнение непрерывности
- 7.4. Сторонние силы и ЭДС
- 7.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи
- 7.6. Закон Ома в дифференциальной форме
- 7.7. Работа и мощность. Закон Джоуля-Ленца
- 7.8. КПД источника тока
- 7.9. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей



## 7.1. Причины электрического тока

Заряженные объекты являются причиной не только электростатического поля, но еще и электрического тока. В этих двух явлениях есть существенное отличие. Для возникновения электростатического поля требуются неподвижные, каким-то образом зафиксированные в пространстве заряды, а для возникновения электрического тока, напротив, требуется наличие свободных, не закрепленных заряженных частиц, которые в электростатическом поле неподвижных зарядов приходят в состояние упорядоченного движения вдоль силовых линий поля. Это движение и есть электрический ток.

Распределение напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  электростатического поля связано с плотностью распределения зарядов  $\rho$  в пространстве уравнением Пуассона:

$$\nabla E = \frac{1}{\varepsilon} \rho, \quad (7.1.1)$$

и

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \rho, \quad (7.1.2)$$

где  $\rho = \frac{\partial q}{\partial V}$  – объемная плотность заряда.

Если заряды неподвижны, то есть распределение зарядов в пространстве стационарно, то  $\rho$  не зависит от времени, в результате чего и  $E$ , а значит и  $\varphi$  являются функциями только координат, но не времени. Поэтому поле и называется электростатическим. Наличие свободных зарядов приводит к тому, что  $\rho$  становится функцией времени, что порождает изменение со временем и характеристик электрического поля, появляется электрический ток. Поле перестает быть электростатическим.

Количественной мерой тока служит сила тока  $I$ , т.е. заряд, перенесенный сквозь рассматриваемую поверхность  $S$  (или через поперечное сечение проводника) в единицу времени, т.е.

$$I = \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (7.1.3)$$

Если движение свободных зарядов таково, что оно не приводит к перераспределению зарядов в пространстве, то есть к изменению со временем плотности зарядов  $\rho$ , то в этом частном случае электрическое поле – снова статическое. Этот частный случай есть случай постоянного тока.

Ток, не изменяющийся по величине со временем, называется постоянным током

$$I = \frac{q}{t},$$

отсюда видна размерность силы тока в СИ:  $1 \text{ А} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}$ .

Как может оказаться, что заряды движутся, а плотность их не меняется, мы разберемся позже. А сначала введем количественные характеристики электрического тока.

## 7.2. Плотность тока

Как известно из курса школьной физики, есть две основные характеристики электрического тока – это **сила тока**  $I$  и **плотность тока**  $\vec{j}$ . В отличие от силы тока, которая есть величина скалярная и направления не имеет, плотность тока – это вектор. Связь между этими двумя физическими величинами такова:

$$I = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (7.2.1)$$

Модуль вектора плотности тока численно равен отношению силы тока  $\partial I$  через элементарную площадку  $\partial S$ , перпендикулярную направлению движения носителей заряда, к ее площади:

$$j = \frac{\partial I}{\partial S_{\perp}}. \quad (7.2.2)$$

Единица плотности тока  $A/m^2$ . Плотность тока есть более подробная характеристика тока, чем сила тока  $I$ . Плотность тока характеризует ток локально, в каждой точке пространства, а  $I$  – это интегральная характеристика, привязанная не к точке, а к области пространства, в которой протекает ток.

Ясно, что плотность тока связана с плотностью свободных зарядов  $\rho$  и с дрейфовой скоростью их движения  $\vec{v}_{др}$ :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}_{др}. \quad (7.2.3)$$

За направление вектора  $\vec{j}$  принимают направление вектора  $\vec{v}_{др}$  **положительных** носителей зарядов (раньше не знали о существовании отрицательных носителей зарядов и приняли так). Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой:

$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{v}_{др+} + q_- n_- \vec{v}_{др-}, \quad (7.2.4)$$

где  $q_+ n_+$  и  $q_- n_-$  – объемные плотности соответствующих зарядов.

Там где носители только электроны, плотность тока определяется выражением:

$$\vec{j} = en \vec{v}_{др}. \quad (7.2.5)$$

Поле вектора  $\vec{j}$  можно изобразить графически с помощью линий тока, которые проводят так же, как и линии вектора напряженности  $\vec{E}$  (рисунок 7.1).

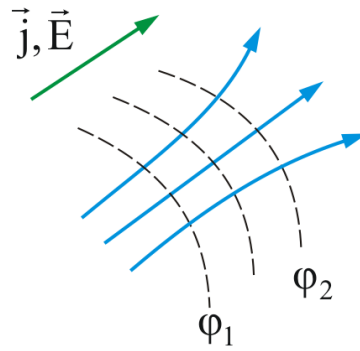


Рисунок 7.1

Зная  $\vec{j}$  в каждой точке интересующей нас поверхности  $S$ , можно найти силу тока через эту поверхность, как поток вектора  $\vec{j}$ :

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{\partial S}.$$

Сила тока является скалярной величиной и алгебраической. А знак определяется, кроме всего прочего, выбором направления нормали к поверхности  $S$ .

### 7.3. Уравнение непрерывности

Представим себе, в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность  $S$ . Для замкнутых поверхностей векторы нормалей, а следовательно, и векторы  $\vec{\partial S}$  принято брать наружу, поэтому интеграл  $\oint_S \vec{j} \cdot \vec{\partial S}$

дает заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема  $V$ , охваченного поверхностью  $S$ . Мы знаем, что плотность постоянного электрического тока одинакова по всему поперечному сечению  $S$  однородного проводника. Поэтому для постоянного тока в однородном проводнике с поперечным сечением  $S$  сила тока:

$$I = jS \tag{7.3.1}$$

Из (7.3.1) и постоянства значения  $I$  во всех участках цепи постоянного тока следует, что плотности постоянного тока в различных поперечных сечениях 1 и 2 цепи обратно пропорциональны площадям  $S_1$  и  $S_2$  этих сечений (рисунок 7.2):

$$j_2 / j_1 = S_1 / S_2. \tag{7.3.2}$$

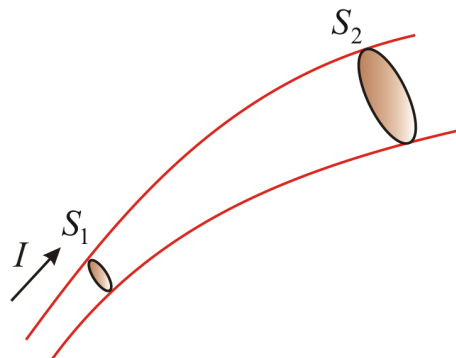


Рисунок 7.2

Пусть  $S$  – замкнутая поверхность, а векторы  $\vec{\partial S}$  всюду проведены по внешним нормальям  $\vec{n}$ . Тогда поток вектора  $\vec{j}$  сквозь эту поверхность  $S$  равен электрическому току  $I$ , идущему вовне из области, ограниченной замкнутой поверхностью  $S$ . Следовательно, согласно закону сохранения электрического заряда, суммарный электрический заряд  $q$ , охватываемый поверхностью  $S$ , изменяется за время  $\partial t$  на  $\partial q = -I\partial t$ , тогда в интегральной форме можно записать:

$$\oint_S \vec{j} \partial \vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (7.3.3)$$

Это соотношение называется **уравнением непрерывности**. Оно является, по существу, выражением **закона сохранения электрического заряда**.

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.3.4)$$

Это **дифференциальная форма записи уравнения непрерывности**.

В случае постоянного тока, распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0,$$

следовательно,

$$\oint \vec{j} \partial \vec{S} = 0, \quad (7.3.5)$$

это **уравнение непрерывности для постоянного тока** (в интегральной форме).

Линии  $\vec{j}$  в этом случае нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Поле вектора  $\vec{j}$  не имеет источника. В дифференциальной форме уравнение непрерывности для постоянного тока  $\nabla \vec{j} = 0$ .

Если ток постоянный, то избыточный заряд внутри однородного проводника всюду равен нулю. В самом деле, т.к. для постоянного тока справедливо уравнение  $\oint_S \vec{j} \partial \vec{S} = 0$ , то

$$\sum q_i = 0.$$

Избыточный заряд может появиться только на поверхности проводника в местах соприкосновения с другими проводниками, а также там, где проводник имеет неоднородности.

## 7.4. Сторонние силы и ЭДС

Для того, чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, необходимо от конца проводника с меньшим потенциалом непрерывно отводить, а к другому концу – с большим потенциалом – подводить электрические заряды. Т.е. необходим круговорот зарядов. Поэтому в замкнутой цепи, наряду с нормальным движением зарядов, должны быть участки, на которых движение (положительных) зарядов происходит в

направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электрического поля (рисунок 7.3).

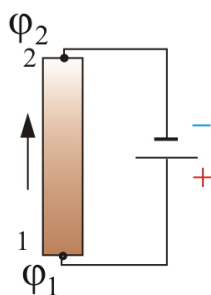


Рисунок 7.3

Перемещение заряда на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектрического происхождения (сторонних сил): химические процессы, диффузия носителей заряда, вихревые электрические поля. Аналогия: насос, качающий воду в водонапорную башню, действует за счет негравитационных сил (электромотор).

Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по замкнутой цепи или ее участку зарядами.

Величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда в цепи, называется **электродвижущей силой (ЭДС)**, действующей в цепи:

$$E = \frac{A}{q}; \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right] = [B]. \quad (7.4.1)$$

Как видно из (7.4.1), размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала, т.е. измеряется в вольтах.

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить в виде:

$$\vec{F}_{\text{ст}} = \vec{E}_{\text{ст}} q, \quad (7.4.2)$$

$\vec{E}_{\text{ст}}$  – напряженность поля сторонних сил.

Работа сторонних сил на участке 1 – 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l},$$

Тогда 
$$E_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (7.4.3)$$

Для замкнутой цепи:

$$E = \sum E_i = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (7.4.4)$$

**Циркуляция вектора напряженности сторонних сил равна ЭДС, действующей в замкнутой цепи (алгебраической сумме ЭДС).**

При этом необходимо помнить, что поле сторонних сил не является потенциальным, и к нему нельзя применять термин разность потенциалов или напряжение.

## 7.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Один из основных законов электродинамики был открыт в 1826 г. немецким учителем физики Георгом Омом. Он установил, что сила тока в проводнике пропорциональна разности потенциалов:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$



**Георг Симон Ом** (1787 – 1854) – немецкий физик. В 1826 г. Ом открыл свой основной закон электрической цепи. Этот закон не сразу нашел признание в науке, а лишь после того, как Э. Х. Ленц, Б. С. Якоби, К. Гаусс, Г. Кирхгоф и другие ученые положили его в основу своих исследований. В 1881 г. на Международном конгрессе электриков именем Ома была названа единица электрического сопротивления (Ом). Последние годы своей жизни Ом посвятил исследованиям в области акустики. Акустический закон Ома был положен затем немецким ученым Г. Гельмгольцем в основу резонансной теории слуха. Ом вел также исследования и в области оптики и кристаллооптики.

Рассмотрим неоднородный участок цепи, участок, содержащий источник ЭДС (т.е. участок, где действуют неэлектрические силы). Напряженность  $\vec{E}$  поля в любой точке цепи равна векторной сумме поля кулоновских сил и поля сторонних сил, т.е.  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{ст}$ .

Величина, численно равная работе по переносу единичного положительного заряда суммарным полем кулоновских и сторонних сил на участке цепи (1 – 2), называется **напряжением** на этом участке  $U_{12}$  (рисунок 7.4).

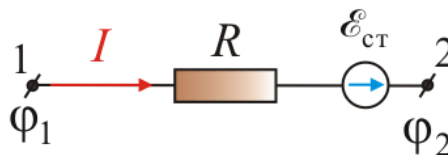


Рисунок 7.4

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l}. \quad (7.5.1)$$

т.к.  $\vec{E}_q d\vec{l} = -d\varphi$ , или  $\int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$ , тогда

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}. \quad (7.5.2)$$

Напряжение на концах участка цепи совпадает с разностью потенциалов только в случае, если на этом участке нет ЭДС, т.е. на однородном участке цепи. Запишем **обобщенный закон Ома для участка цепи содержащей источник ЭДС**:

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}. \quad (7.5.3)$$

Обобщенный закон Ома выражает закон сохранения энергии применительно к участку цепи постоянного тока. Он в равной мере справедлив как для пассивных участков (не содержащих ЭДС), так и для активных.

В электротехнике часто используют термин **падение напряжения** – изменение напряжения вследствие переноса заряда через сопротивление

$$U = IR. \quad (7.5.4)$$

В замкнутой цепи:  $\varphi_1 = \varphi_2$ ;

$$IR_{\Sigma} = E \quad \text{или} \quad I = \frac{E}{R_{\Sigma}},$$

где  $R_{\Sigma} = R + r$ ;  $r$  – внутреннее сопротивление активного участка цепи (рисунок 7.5).

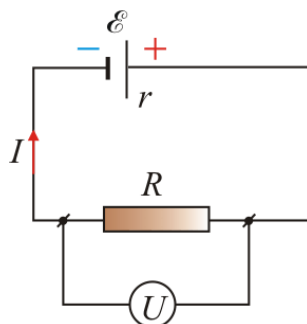


Рисунок 7.5

Тогда закон Ома для замкнутого участка цепи, содержащего источник ЭДС запишется в виде

$$I = \frac{E}{R + r}. \quad (7.5.5)$$

## 7.6. Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (не содержащего ЭДС)

$$I = \frac{U}{R} \quad (7.6.1)$$

Для однородного линейного проводника выразим  $R$  через  $\rho$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (7.6.2)$$

$\rho$  – удельное объемное сопротивление;  $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$ .

Найдем связь между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  в бесконечно малом объеме проводника – закон Ома в дифференциальной форме.

В изотропном проводнике (в данном случае с постоянным сопротивлением) носители зарядов движутся в направлении действия силы, т.е. вектор плотности тока  $\vec{j}$  и вектор напряженности поля  $\vec{E}$  коллинеарны (рисунок 7.6).

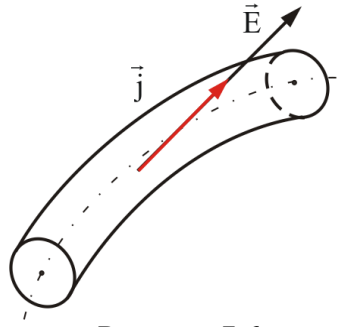


Рисунок 7.6

Исходя из закона Ома (7.6.1), имеем:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Edl}{\rho \frac{dS}{dS}} = \frac{EdS}{\rho}$$

А мы знаем, что  $j = \frac{dI}{dS} = \frac{1}{\rho} E$  или  $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ . Отсюда можно записать

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (7.6.3)$$

это запись **закона Ома в дифференциальной форме**.

Здесь  $\sigma = 1/\rho$  – удельная электропроводность.

Размерность  $\sigma$  – [Ом<sup>-1</sup>м<sup>-1</sup>].

Плотность тока можно выразить через заряд электрона  $e$ , количество зарядов  $n$  и дрейфовую скорость  $\vec{v}$ :

$$\vec{j} = en\vec{v}.$$

Обозначим  $b = \frac{\vec{v}}{E}$ , тогда  $\vec{v} = b\vec{E}$ ;

$$\vec{j} = enb\vec{E} \quad (7.6.4)$$

Теперь, если удельную электропроводность  $\sigma$  выразить через  $e$ ,  $n$  и  $b$ :  $\sigma = enb$ , то вновь получим выражение **закона Ома в дифференциальной форме**:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

## 7.7. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим произвольный участок цепи, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через каждое сечение проводника проходит заряд  $dq = Idt$ .

При этом силы электрического поля, действующего на данном участке, совершают работу:

$$dA = Udq = UI dt.$$

Разделив работу на время, получим выражение для мощности:



$$N = \frac{dA}{dt} = UI. \quad (7.7.1)$$

Полезно вспомнить и другие формулы для мощности и работы:

$$N = RI^2; \quad (7.7.2)$$

$$A = RI^2t. \quad (7.7.3)$$

В 1841 г. манчестерский пивовар Джеймс Джоуль и в 1843 г. петербургский академик Эмилий Ленц установили закон теплового действия электрического тока.



**Джоуль Джеймс Прескотт** (1818 – 1889) – английский физик, один из первооткрывателей закона сохранения энергии. Первые уроки по физике ему давал Дж. Дальтон, под влиянием которого Джоуль начал свои эксперименты. Работы посвящены электромагнетизму, кинетической теории газов.

**Ленц Эмилий Христианович** (1804 – 1865) – русский физик. Основные работы в области электромагнетизма. В 1833 г. установил правило определения электродвижущей силы индукции (закон Ленца), а в 1842 г. (независимо от Дж. Джоуля) – закон теплового действия электрического тока (закон Джоуля-Ленца). Открыл обратимость электрических машин. Изучал зависимость сопротивления металлов от температуры. Работы относятся также к геофизике.



Независимо друг от друга Джоуль и Ленц показали, что при протекании тока, в проводнике выделяется количество теплоты:

$$Q = RI^2t. \quad (7.7.4)$$

Если ток изменяется со временем, то

$$Q = \int_1^2 RI^2 dt.$$

Это закон **Джоуля – Ленца в интегральной форме**.

Отсюда видно, что *нагревание происходит за счет работы, совершаемой силами поля над зарядом*.

Соотношение (7.7.4) имеет интегральный характер и относится ко всему проводнику с сопротивлением  $R$ , по которому течет ток  $I$ . Получим закон Джоуля-Ленца в локальной-дифференциальной форме, характеризуя тепловыделение в произвольной точке. **Тепловая мощность тока** в элементе проводника  $\Delta l$ , сечением  $\Delta S$ , объемом  $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$  равна:

$$\Delta W = I^2 R = I \Delta \varphi = j \Delta S E \Delta l = \vec{j} \vec{E} \Delta V.$$

Удельная мощность тока

$$\omega = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \vec{j} \vec{E}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , получим закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = \sigma \vec{E}, \quad (7.7.5)$$

характеризующий плотность выделенной энергии. Так как выделенная теплота равна работе сил электрического поля

$$A = IUt,$$

то мы можем записать для мощности тока:

$$W = UI = RI^2. \quad (7.7.6)$$

**Мощность, выделенная в единице объема проводника**  $\omega = \rho j^2$ .

Приведенные формулы справедливы для однородного участка цепи и для неоднородного.

## 7.8. КПД источника тока

Рассмотрим элементарную электрическую цепь, содержащую источник ЭДС с внутренним сопротивлением  $r$ , и внешним сопротивлением  $R$  (рисунок 7.5).

КПД всегда определяем как отношение полезной работы к затраченной:

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} = \frac{UI}{EI} = \frac{U}{E}. \quad (7.8.1)$$

**Полезная работа** – мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении  $R$  в единицу времени. По закону Ома имеем:  $U = IR$ , а  $E = (R + r)I$ , тогда

$$\eta = \frac{U}{E} = \frac{IR}{I(R + r)} = \frac{R}{R + r}.$$

Таким образом, имеем, что при  $R \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 1$ , но при этом ток в цепи мал и полезная мощность мала. Вот парадокс – мы всегда стремимся к повышенному КПД, а в данном случае нам это не приносит пользы.

Найдем условия, при которых полезная мощность будет максимальна. Для этого нужно, чтобы  $\frac{dN_{\text{п}}}{dR} = 0$ .

$$N_{\text{п}} = I^2 R = \left( \frac{E}{R + r} \right)^2 \cdot R = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}.$$

$$\frac{dN_{\text{п}}}{dR} = \frac{E^2 (R + r)^2 - 2(r + R)E^2 R}{(R + r)^4} = 0. \quad (7.8.2)$$

$$E^2 [(R + r) - 2R] = 0$$

В выражении (7.8.2)  $E \neq 0$ ,  $R + r \neq 0$ , следовательно, должно быть равно нулю выражение в квадратных скобках, т.е.  $r = R$ . При этом условии выделяемая мощность максимальна, а КПД равен 50%.

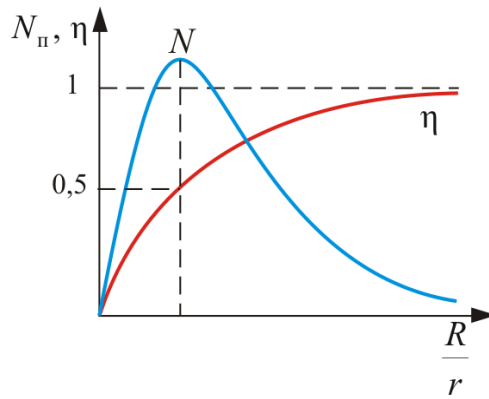


Рисунок 7.7

Вышесказанное утверждение иллюстрируется на рисунке 7.7.

## 7.9. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Расчет разветвленных цепей с помощью закона Ома довольно сложен. Эта задача решается более просто с помощью двух правил немецкого физика Г. Кирхгофа (1824 – 1887).

**Первое правило Кирхгофа** утверждает, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (7.9.1)$$

В случае установившегося постоянного тока в цепи ни в одной точке проводника, ни на одном из его участков не должны накапливаться электрические заряды (узел – любой участок цепи, где сходятся более двух проводников (рисунок 7.8)).

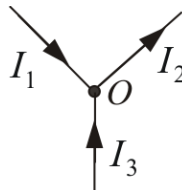


Рисунок 7.8

Токи, сходящиеся к узлу, считаются положительными:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

**Второе правило Кирхгофа** (обобщение закона Ома для разветвленной цепи).

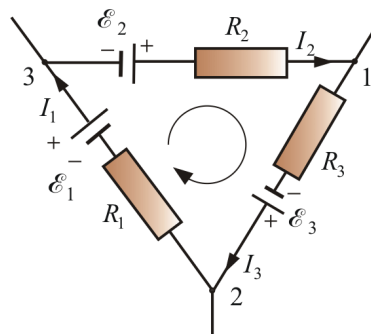


Рисунок 7.9

Для произвольного замкнутого контура с произвольным числом разветвлений (рисунок 7.9) можно записать для каждого элемента контура:

$$\begin{aligned}\varphi_2 - \varphi_3 + E_1 &= I_1 R_1; \\ \varphi_3 - \varphi_1 + E_2 &= I_2 R_2; \\ \varphi_1 - \varphi_2 + E_3 &= I_3 R_3.\end{aligned}$$

Складывая получим:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k E_k. \quad (7.9.2)$$

В любом замкнутом контуре электрической цепи **алгебраическая сумма произведения тока на сопротивление равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре.**

Обход контуров осуществляется по часовой стрелке, если направление обхода совпадает с направлением тока, то ток берется со знаком «плюс».

Тема:

# Электрический ток в вакууме и средах

## План:

**6.1. Эмиссия электронов из проводников**

**6.1.1. Термоэлектронная эмиссия**

**6.1.2. Холодная и взрывная эмиссия**

**6.1.3. Фотоэлектронная эмиссия**

**6.2. Контактные явления на границе раздела двух проводников**

**8.1. Явление ионизации и рекомбинации в газах**

**8.2. Несамостоятельный газовый разряд**

**8.3. Самостоятельный газовый разряд**

**8.4. Типы разрядов**

**8.5. Применение газового разряда**

**8.6. Понятие о плазме**

## 6.1. Эмиссия электронов из проводников

Уже отмечалось, при переходе границы раздела между проводником и вакуумом скачком изменяются напряженность и индукция электрического поля. С этим связаны специфические явления. Электрон свободен только в границах металла. Как только он пытается перейти границу «металл – вакуум», возникает кулоновская сила притяжения между электроном и образовавшимся на поверхности избыточным положительным зарядом (рисунок 6.1).

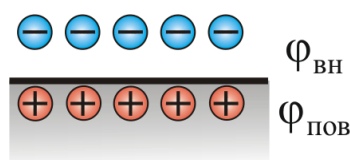


Рисунок 6.1

Вблизи от поверхности образуется электронное облако, и на границе раздела формируется двойной электрический слой с разностью потенциалов ( $\varphi_{\text{вн.}} - \varphi_{\text{пов.}}$ ). Скачки потенциала на границе металла показаны на рисунке 6.2.

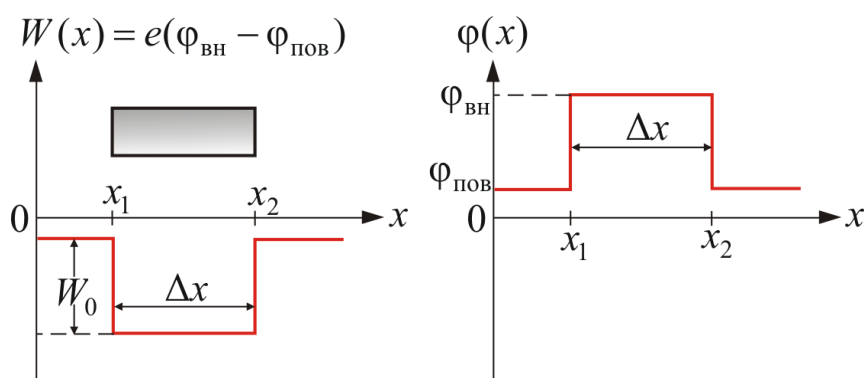


Рисунок 6.2

В занятом металлом объеме образуется потенциальная энергетическая яма, так как в пределах металла электроны свободны, и их энергия взаимодействия с узлами решетки равна нулю. За пределами металла электрон приобретает энергию  $W_0$ . Это энергия притяжения  $W_0 < 0$ . Для того, чтобы покинуть металл, электрон должен преодолеть потенциальный барьер и совершить работу

$$A_{\text{вых}} = e(\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пов}}). \quad (6.1.1)$$

Эту работу называют **работой выхода электрона из металла**. Для ее совершения электрону необходимо сообщить достаточную энергию  $W \geq A_{\text{вых}}$ .

### 6.1.1. Термоэлектронная эмиссия

Величина работы выхода зависит от химической природы вещества, от его термодинамического состояния и от состояния поверхности раздела. Если энергия, достаточная для совершения работы выхода, сообщается электронам путем нагревания, то процесс выхода электронов из металла называют **термоэлектронной эмиссией**.

В классической термодинамике металл представляют в виде ионной решетки, заключающей в себе электронный газ. Считают, что сообщество свободных электронов подчиняется законам идеального газа. Следовательно, в соответствии с распределением Максвелла при температуре, отличной от 0 К, в металле есть какое-то количество электронов, тепловая энергия которых больше работы выхода. Эти электроны и покидают металл. Если температуру увеличить, то увеличивается и число таких электронов.

Явление испускания электронов нагретыми телами (эмиттерами) в вакуум или другую среду называется **термоэлектронной эмиссией**. Нагрев необходим для того, чтобы энергии теплового движения электрона было достаточно для преодоления сил кулоновского притяжения между отрицательно заряженным электроном и индуцируемым им на поверхности металла положительным зарядом при удалении с поверхности. Кроме того, при достаточно высокой температуре над поверхностью металла создается отрицательно заряженное электронное облако, препятствующее выходу электрона с поверхности металла в вакуум. Этими двумя и, возможно, другими причинами определяется величина работы выхода электрона из металла.

Явление термоэлектронной эмиссии открыто в 1883 г. Эдисоном, знаменитым американским изобретателем. Это явление наблюдалось им в вакуумной лампе с двумя электродами – анодом, имеющим положительный потенциал, и катодом с отрицательным потенциалом. Катодом лампы может служить нить из тугоплавкого металла (вольфрам, молибден, тантал и др.), нагреваемая электрическим током (рисунок 6.3). Такая лампа называется вакуумным диодом. Если катод холодный, то ток в цепи катод – анод практически отсутствует. При повышении температуры катода в цепи катод – анод появляется электрический ток, который тем больше, чем выше температура катода. При постоянной температуре катода ток в цепи катод – анод возрастает с повышением разности потенциалов  $U$  между катодом и анодом и выходит к некоторому стационарному значению, называемому **током насыщения**  $I_n$ . При этом все термоэлектроны, испускаемые катодом, достигают анода. Величина тока анода не пропорциональна  $U$ , и поэтому для вакуумного диода закон Ома не выполняется.

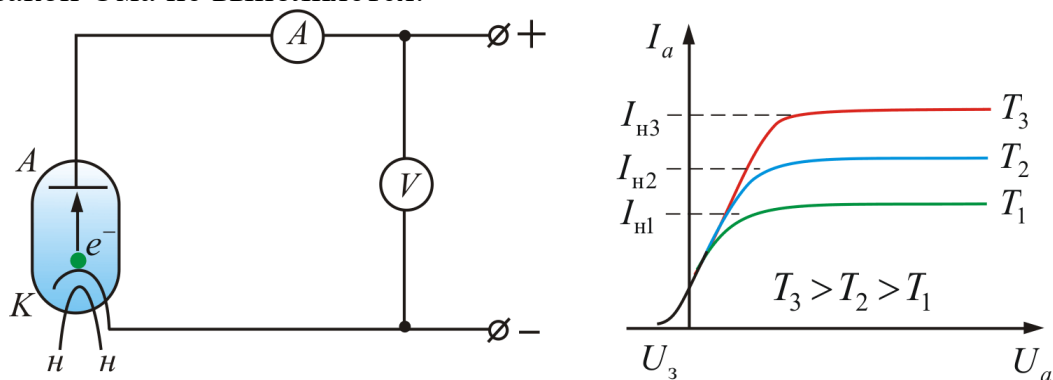


Рисунок 6.3

На рисунке 6.3 показаны схема вакуумного диода и вольт-амперные характеристики (ВАХ)  $I_a(U_a)$ . Здесь  $U_3$  – задерживающее напряжение при котором  $I = 0$ .

## 6.1.2. Холодная и взрывная эмиссия

Электронную эмиссию, вызываемую действием сил электрического поля на свободные электроны в металле, называют **холодной эмиссией** или **автоэлектронной**. Для этого должна быть достаточной напряженность поля и должно выполняться условие

$$A_{\text{вых}} = e(\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пов}}) \leq eEd, \quad (6.1.2)$$

здесь  $d$  – толщина двойного электрического слоя на границе раздела сред. Обычно у чистых металлов  $d \approx 10^{-10}$  м и  $A_{\text{вых}} \approx 10^{-19}$  Дж = 1 эВ. При  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл получим  $E = 10^{10}$  В/м. На практике же холодная эмиссия наблюдается при значении напряженности порядка  $10^6 - 10^8$  В/м. Такое несоответствие относят на счет несостоятельности классических представлений для описания процессов на микроуровне.

Автоэлектронную эмиссию можно наблюдать в хорошо откачанной вакуумной трубке, катодом которой служит острие, а анодом – обычный электрод с плоской или мало изогнутой поверхностью. Напряженность электрического поля на поверхности острия с радиусом кривизны  $r$  и потенциалом  $U$  относительно анода равна

$$E = \frac{U}{r}.$$

При  $r \sim 10^{-2}$  мм и  $U \sim 10^3$  В,  $E \sim 10^6$  В/см, что приведет к появлению слабого тока, обусловленного автоэлектронной эмиссией с поверхности катода. Сила эмиссионного тока быстро нарастает с повышением разности потенциалов  $U$ . При этом катод специально не разогревается, поэтому эмиссия и называется холодной.

С помощью автоэлектронной эмиссии принципиально возможно получение плотности тока  $10^6 \div 10^8$  А/см<sup>2</sup>, но для этого нужны эмиттеры в виде совокупности большого числа острий, идентичных по форме (рисунок 6.4), что практически невозможно, и, кроме того, увеличение тока до  $10^8$  А/см<sup>2</sup> приводит к взрывообразному разрушению острий и всего эмиттера.

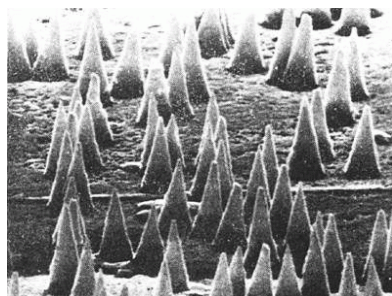


Рисунок 6.4

Плотность тока АЭЭ в условиях влияния объемного заряда равна (закон Чайльда-Ленгмюра)



$$j = A E^{3/2} \leq 10^8 \text{ A/cm}^{-2},$$

где  $A = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left( \frac{2e}{m} \right) E^{3/2} r^{-1/2}$  – коэффициент пропорциональности, определяемый геометрией и материалом катода.

Проще говоря, закон Чайльда-Ленгмюра показывает, что плотность тока пропорциональна  $E^{3/2}$  (закон трех вторых).

Током автоэлектронной эмиссии при концентрации энергии в микрообъемах катода до  $10^4 \text{ Дж}\cdot\text{м}^{-1}$  и более (при общей энергии  $10^{-8} \text{ Дж}$ ) может инициироваться качественно иной вид эмиссии, обусловленный **взрывом микроострий на катоде**. При этом появляется ток электронов, который на порядки превосходит начальный ток – **наблюдается взрывная электронная эмиссия (ВЭЭ)**. ВЭЭ была открыта и изучена в Томском политехническом институте в 1966 г. коллективом сотрудников под руководством Г.А. Месяца.

Помимо автоэлектронной эмиссии существует и много других способов концентрации энергии в микрообъемах катода, приводящих к микровзрывам – обтекание микронеоднородностей плазмой, микропробой диэлектрических пленок, лазерный разогрев микроучастков катода, удар микрочастиц. ВЭЭ – это единственный вид электронной эмиссии, позволяющий получить потоки электронов мощностью до  $10^{13} \text{ Вт}$  с плотностью тока до  $10^9 \text{ A/cm}^2$ .

Ток ВЭЭ необычен по структуре. Он состоит из отдельных порций электронов  $10^{11} \div 10^{12}$  штук, имеющих характер электронных лавин, получивших название *эктонов* (начальные буквы «*explosive centre*»). Время образования лавин  $10^{-9} \div 10^{-8} \text{ с}$ .

Появление электронов в эктоне вызвано быстрым перегревом микроучастков катода и является, по существу, разновидностью термоэлектронной эмиссии (рисунок 6.5). Прекращение эмиссии электронов в эктоне обусловлено охлаждением зоны эмиссии за счет теплопроводности, уменьшения плотности тока, испарения атомов.

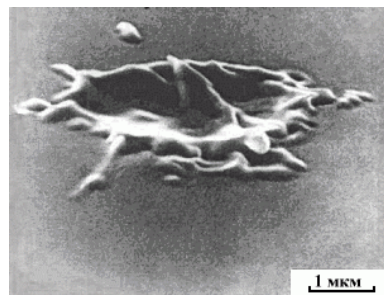


Рисунок 6.5

Существование эктона проявляется в образовании кратера на поверхности катода (рисунок 6.5). Взрывная эмиссия электронов и эктоны играют фундаментальную роль в вакуумных искрах и дугах, в разрядах низкого давления, в сжатых и высокопрочных газах, в микропромежутках, т.е. там, где в

наличии есть электрическое поле высокой напряженности на поверхности катода.

Явление взрывной электронной эмиссии послужило основой для создания импульсных электрофизических установок, таких как сильноточные ускорители электронов, мощные импульсные и рентгеновские устройства, мощные релятивистские сверхвысокочастотные генераторы. Например, импульсные ускорители электронов имеют мощность  $10^{13}$  Вт и более при длительности импульсов  $10^{-10} \div 10^{-6}$  с, токе электронов  $10^6$  А и энергии электронов  $10^4 \div 10^7$  эВ. Такие пучки широко используются для исследований в физике плазмы, радиационной физике и химии, для накачки газовых лазеров и пр.

### 6.1.3. Фотоэлектронная эмиссия

**Фотоэлектронная эмиссия (фотоэффект)** заключается в «выбивании» электронов из металла при действии на него электромагнитного излучения.

Закономерности фотоэффекта еще в большей степени не согласуются с классической теорией, чем в случае холодной эмиссии. По этой причине мы рассмотрим теорию фотоэффекта при обсуждении квантовых представлений в оптике. Схема установки для исследования фотоэффекта и ВАХ аналогичны изображенным на рисунке 6.3. Здесь, вместо разогрева катода, на него направляют поток фотонов или  $\gamma$  – квантов.

В физических приборах, регистрирующих  $\gamma$  – излучение, используют фотоэлектронные умножители (ФЭУ). Схема прибора приведена на рисунке 6.6.

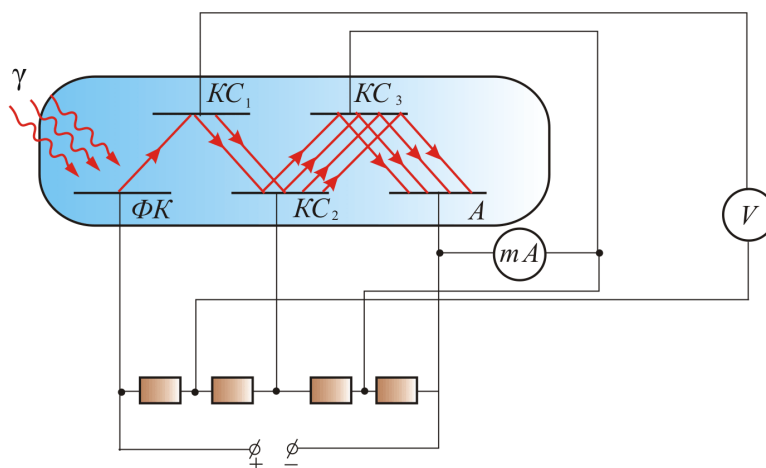


Рисунок 6.6

В нем используют два эмиссионных эффекта: *фотоэффект* и *вторичную электронную эмиссию*, которая заключается в выбивании электронов из металла при бомбардировке последнего другими электронами. Электроны выбиваются светом из фотокатода (ФК). Ускоряясь между ФК и первым эмиттером (КС<sub>1</sub>), они приобретают энергию, достаточную, чтобы выбить большее число электронов из следующего эмиттера. Таким образом, умножение электронов происходит за счет увеличения их числа при последовательном прохождении разности потенциалов между соседними

эмиттерами. Последний электрод называют коллектором. Регистрируют ток между последним эмиттером и коллектором. Таким образом, ФЭУ служит усилителем тока, а последний пропорционален излучению, попадающему на фотокатод, что и используют для оценки радиоактивности.

## 6.2. Контактные явления на границе раздела двух проводников

Как показывает опыт, на контакте двух различных металлов образуется двойной электрический слой и соответствующая разность потенциалов (рисунок 6.7).

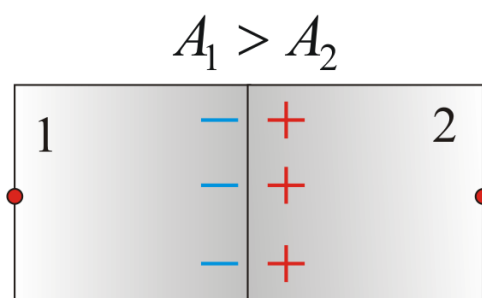


Рисунок 6.7

Появление двойного электрического слоя обусловлено различием работ выхода электронов из металлов. Чем она больше, тем меньше вероятность перехода электронами границы раздела. Поэтому со стороны металла с большей работой выхода накапливается отрицательный заряд, а с противоположной – положительный. Это явление наблюдалось итальянским физиком Александро Вольта (1745 – 1827), который сформулировал два экспериментальных закона, известных как законы Вольта.

1. На контакте двух разных металлов возникает разность потенциалов, которая зависит от химической природы и от температуры спаяев.

2. Разность потенциалов на концах последовательно соединенных проводников не зависит от промежуточных проводников и равна разности потенциалов, возникающей при соединении крайних проводников при той же температуре.

Результаты эксперимента можно объяснить с позиции классической электронной теории. Если принять, что потенциал за пределами металла равен нулю, то энергия электрона внутри металла с потенциалом  $\varphi_i$  определится выражением

$$W_i = e\varphi_i. \quad (6.2.1)$$

При соединении двух разных металлов (рисунок 6.8) с работами выхода

$$A_1 = e\varphi_1 \text{ и } A_2 = e\varphi_2,$$

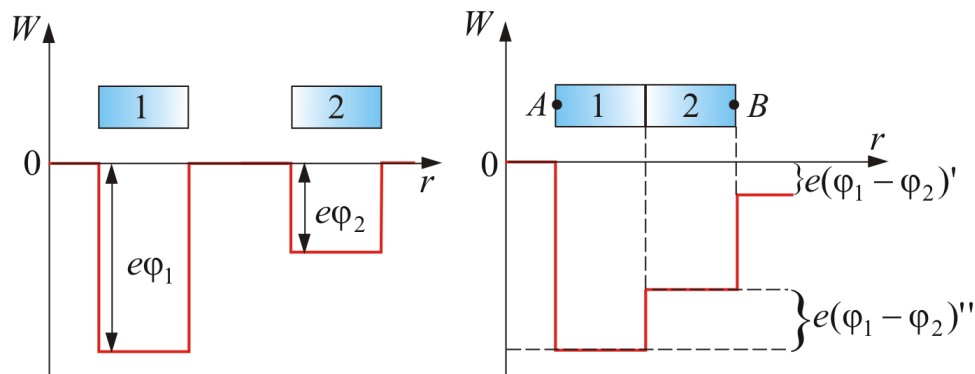


Рисунок 6.8

возникает избыточный переход электронов из второго металла в первый, так как  $A_2 < A_1$ . В результате концентрация электронов  $n_1$  в металле 1 увеличивается, по сравнению с  $n_2$ , что порождает обратный избыточный поток электронного газа за счет диффузии, противоположный потоку, обусловленному разностью работ выхода.

Установившаяся разность потенциалов в равновесном состоянии определяется как:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)' + (\varphi_1 - \varphi_2)'',$$

где  $(\varphi_1 - \varphi_2)'$  – разность потенциалов, обусловленная разными работами выхода электронов из металлов, а  $(\varphi_1 - \varphi_2)''$  – разность потенциалов, возникающая на границе раздела за счет неодинаковой концентрации электронов в электронном газе.

Установившуюся разность потенциалов можно найти из выражения:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

Явление возникновения контактной разности потенциалов и ее зависимость от температуры называют **термоэлектрическим эффектом** или **эффектом Зеебека**. Эффект Зеебека (**прямой термоэлектрический эффект**) заключается в появлении разности потенциалов в термопарах. Схема термопары состоящей из спая двух разных металлов 1 и 2, показана на рисунке 6.9.

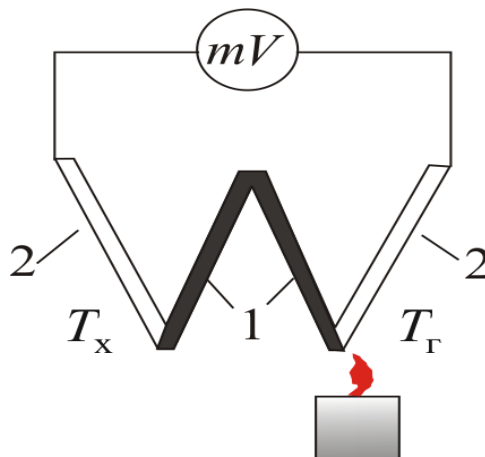


Рисунок 6.9

На концах термопары возникает термоЭДС термопары  $E$  :

$$E = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} (T_x - T_r) = \alpha (T_r - T_x), \quad (6.2.2)$$

где  $T_r$  – температура горячего спая и  $T_x$  – температура холодного спая.

Таким образом  $E = \alpha (T_r - T_x)$  – термоЭДС термопары, где  $\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}$  –

*постоянная термопары.*

Термопары применяют для измерения температуры. Батареи термопар используют как источники ЭДС для питания физических приборов.

**Эффектом Пельтье** называют **обратный термоэлектрический эффект**. Он заключается в том, что при пропускании тока через термопару, ее спай поглощает или выделяет тепло в зависимости от направления тока. Количество поглощенного тепла пропорционально плотности тока.

$$Q_{\Pi} = \Pi_{12} j, \quad (6.2.4)$$

где  $\Pi_{12}$  – **коэффициент Пельтье**, зависящий от материала контактирующих металлов. Эффект используют при изготовлении холодильников. Этот термоэлектрический эффект проявляется более эффективно, если используются полупроводники.

## 8.1. Явление ионизации и рекомбинации в газах

В нормальном состоянии газы состоят из электрически нейтральных молекул и атомов, и, следовательно, не могут проводить электрический ток. Поэтому газы являются хорошими электрическими изоляторами. Напомню, что окружающий нас воздух является хорошим и самым дешёвым диэлектриком, и его изолирующие свойства широко используются в различных устройствах высокого напряжения (ЛЭП, подстанциях, электростатических генераторах и др.).

Проделаем опыт: разорвём цепь источника тока, т.е. создадим в ней воздушный промежуток. Если включить в такую разорванную цепь гальванометр, то он покажет отсутствие электрического тока.

Поднесём к воздушному промежутку пламя газовой горелки. В пламени происходят интенсивные химические процессы, за счёт энергии которых отдельные атомы могут возбуждаться и ионизироваться. Образующиеся в пламени горелки ионы и электроны переходят в возбужденный промежуток, и под действием приложенной к нему разности потенциалов начинают двигаться к электродам; в цепи появляется ток.

*Процесс ионизации* заключается в том, что под действием высокой температуры или некоторых лучей молекулы газа теряют электроны, и тем самым превращаются в положительные ионы.

Таким образом, в результате происходит освобождение электронов из атомов и молекул, которые могут присоединиться к нейтральным молекулам

или атомам, превращая их в отрицательные ионы. Ионы и свободные электроны делают газ проводником электричества.

Ионизация газа может происходить под действием коротковолнового излучения – ультрафиолетовых, рентгеновских и гамма-лучей, а также альфа-, бета- и космических лучей.

Установлено, что в нормальных условиях газы, например воздух, обладают электрической проводимостью, но очень ничтожной. Эта проводимость вызвана излучением радиоактивных веществ, имеющихся на поверхности земли, а также космическими лучами, приходящими из мировых глубин. Однако равновесная концентрация ионов в воздухе не превышает нескольких десятков пар ионов в кубическом сантиметре. Для того, чтобы воздух стал заметно проводить электрический ток, его надо подвергнуть воздействию интенсивных ионизаторов.

Итак, при ионизации газовых молекул под действием внешнего источника из молекулы обычно вырывается один электрон, и остаётся положительный молекулярный ион с зарядом  $e^+$ , т.е. образуется пара – положительный ион и электрон. Вырвавшийся электрон обычно присоединяется к какой-либо другой молекуле и образует отрицательный молекулярный ион с зарядом  $e^-$ , опять образуется пара – положительный и отрицательный ионы. Оба типа ионов одновалентны ( $z = 1$ ), имеют одинаковую концентрацию  $n$ , но несколько различные подвижности  $\mu_+$  и  $\mu_-$ . Под действием внешнего электрического поля эти ионы начинают двигаться, и возникает *электрический ток*.

*Электрический ток, возникающий в процессе ионизации газа – ток в газах – это встречный поток ионов и свободных электронов.*

Наряду с термином «*ионизация*» часто употребляют термин «*генерация*», характеризующий тот же самый процесс образования носителей зарядов в газе.

Одновременно с процессом ионизации идёт обратный процесс *рекомбинации* (иначе – *молизации*).

*Рекомбинация – это нейтрализация при встрече разноименных ионов или воссоединение иона и электрона в нейтральную молекулу (атом).*

*Факторы, под действием которых возникает ионизация в газе, называют внешними ионизаторами, а возникающая при этом проводимость называется **несамостоятельной проводимостью**.*

При данной мощности внешнего ионизатора в объёме газа устанавливается *равновесное состояние*, при котором число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за одну секунду в единице объёма, равно числу пар рекомбинировавших ионов. При этом *скорость ионизации равна скорости рекомбинации*:

$$v^{\text{ген}} = v^{\text{рек}}. \quad (8.1.1)$$

Таким образом, ионизованный газ способен проводить ток. Явление прохождения электрического тока через газ называется *газовым разрядом*.

Газовые разряды можно разделить на два вида: *несамостоятельный и самостоятельный*.

## 8.2. Несамостоятельный газовый разряд

*Несамостоятельным газовым разрядом называется такой разряд, который, возникнув при наличии электрического поля, может существовать только под действием внешнего ионизатора.*

Рассмотрим физические процессы, имеющие место при несамостоятельном газовом разряде. Введем ряд обозначений: обозначим через  $N_0$  число молекул газа в исследуемом объеме  $V$ . Концентрация молекул  $n_0 = N_0/V$ . Часть молекул ионизирована. Обозначим число ионов одного знака через  $N$ ; их концентрация  $n = N/V$ . Далее, обозначим через  $\Delta n_i$  – число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за одну секунду в единице объема газа.

Наряду с процессом ионизации в газе происходит рекомбинация ионов. Вероятность встречи двух ионов разных знаков пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов, а эти числа, в свою очередь, равны  $n$ . Следовательно, число пар ионов, рекомбинирующих за секунду в единице объема, пропорционально  $n^2$ :

$$\Delta n_r = rn^2, \quad (8.2.1)$$

где  $r$  – коэффициент рекомбинации.

В состоянии равновесия число возникающих ионов в единице объема равно числу рекомбинирующих:

$$\Delta n_i = \Delta n_r = rn^2. \quad (8.2.2)$$

Отсюда для равновесной концентрации ионов (числа пар ионов в единице объема) получается следующее выражение:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \quad (8.2.3)$$

Схема эксперимента с газоразрядной трубкой изображена на рисунке 8.1.

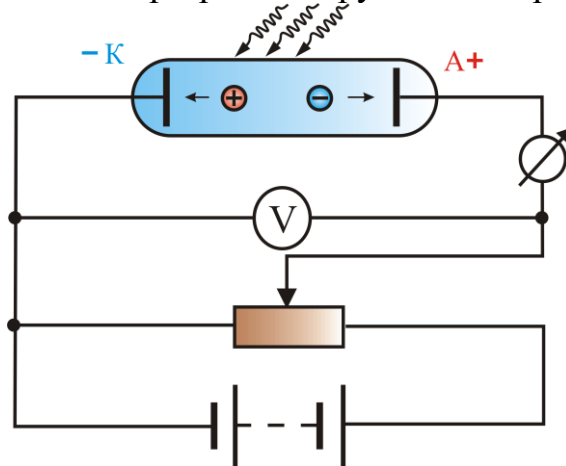


Рисунок 8.1

Проанализируем далее действие электрического поля на процессы в ионизованных газах. Подадим постоянное напряжение на электроды. Положительные ионы будут направляться к отрицательному электроду, а отрицательные заряды – к положительному электроду. Таким образом, часть носителей из газоразрядного промежутка будет уходить к электродам (в цепи возникнет электрический ток). Пусть из единицы объема уходит ежесекундно  $\Delta n_j$  пар ионов. Теперь условие равновесия можно представить в виде

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j. \quad (8.2.4)$$

1. Рассмотрим случай *слабого поля*:  $\Delta n_j \ll \Delta n_r$ . В цепи будет протекать *слабый ток*. Плотность тока по величине пропорциональна концентрации носителей  $n$ , заряду  $q$ , переносимому каждым носителем и скорости направленного движения положительных и отрицательных ионов  $\bar{v}^+$  и  $\bar{v}^-$ :

$$\bar{j} = nq(\bar{v}^+ + \bar{v}^-). \quad (8.2.5)$$

Скорость направленного движения ионов выражается через подвижность  $\mu$  и напряженность  $\vec{E}$  электрического поля:

$$\bar{v}^+ = \mu_+ \vec{E}, \quad \bar{v}^- = \mu_- \vec{E}. \quad (8.2.6)$$

*Подвижность* – физическая величина, численно равная скорости направленного движения ионов в газе под действием поля с напряженностью 1 В/м.

На основании (8.2.6) для плотности тока имеем:

$$\bar{j} = nq(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}. \quad (8.2.7)$$

В слабом поле ( $\Delta n_j \ll \Delta n_r$ ) равновесная концентрация равна:  $n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}$ .

Подставим это выражение в (8.2.7):

$$\bar{j} = q\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}. \quad (8.2.8)$$

В последнем выражении множитель при  $\vec{E}$  не зависит от напряженности. Обозначив его через  $\sigma$ , мы получим *закон Ома в дифференциальной форме*:

$$\bar{j} = \sigma \vec{E}, \quad (8.2.9)$$

где  $\sigma = q\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(\mu_+ + \mu_-)$  – удельная электропроводность.

**Вывод:** в случае слабых электрических полей ток при несамостоятельном разряде подчиняется закону Ома.

2. Рассмотрим *сильное поле*. В этом случае  $\Delta n_r \ll \Delta n_j$  и  $\Delta n_i = \Delta n_j$ , т. е. все генерируемые ионы уходят из газоразрядного промежутка под действием электрического поля. Это объясняется тем, что за время, требующееся иону, чтобы пролететь в сильном поле  $\vec{E}$  от одного электрода к другому, ионы не успевают сколько-нибудь заметно рекомбинировать. Поэтому все ионы, производимые ионизатором, участвуют в создании тока и уходят на электроды. А так как число, генерируемых ионизатором ионов в единицу времени  $\Delta n_i$ , не



зависит от напряженности поля, то плотность тока будет определяться только величиной  $\Delta n_i$  и не будет зависеть от  $\vec{E}$ . Другими словами, с дальнейшим увеличением приложенного напряжения ток перестает расти и *остается постоянным*.

Максимальное значение тока, при котором все образующиеся ионы уходят к электродам, носит название тока насыщения.

Дальнейшее увеличение напряженности поля ведет к образованию лавины электронов, когда возникшие под действием ионизатора электроны приобретают на длине свободного пробега (от столкновения до столкновения) энергию, достаточную для ионизации молекул газа (ударная ионизация). Возникшие при этом вторичные электроны, разогнавшись, в свою очередь, производят ионизацию и т. д. – происходит лавинообразное размножение первичных ионов и электронов, созданных внешним ионизатором и усиление разрядного тока.

На рисунке 8.2 изображен процесс образования лавины.

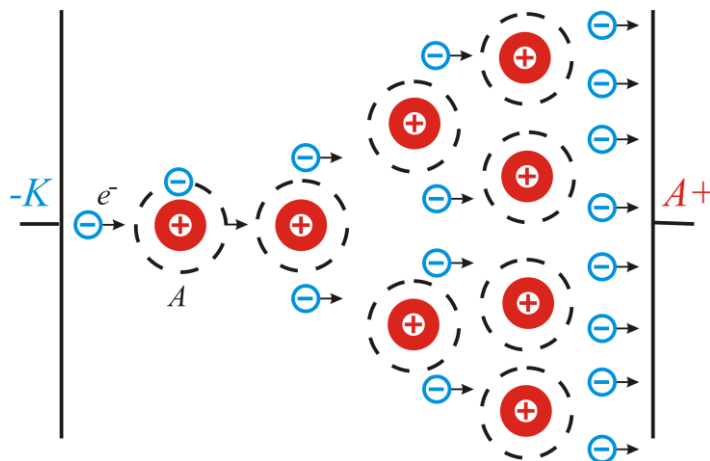
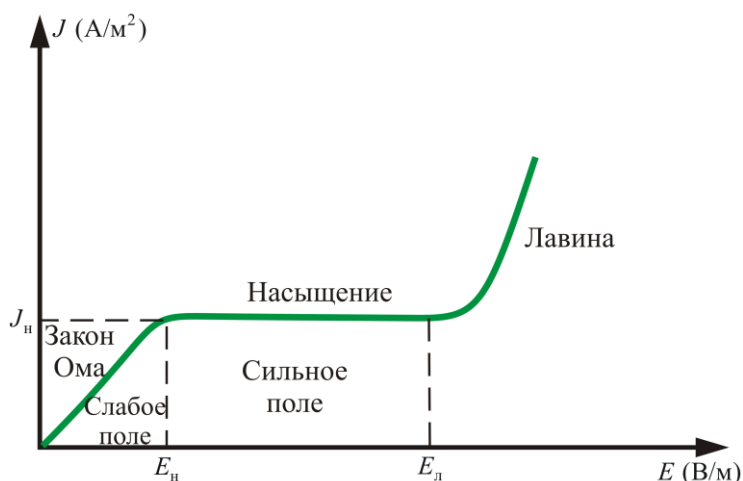


Рисунок 8.2

Полученные результаты можно изобразить графически (рисунок 8.3) в виде вольтамперной характеристики несамостоятельного газового разряда.



### Рисунок 8.3

**Вывод:** для несамостоятельного разряда при малых плотностях тока, т.е. когда основную роль в исчезновении зарядов из газоразрядного промежутка играет процесс рекомбинации, имеет место закон Ома ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ); при больших полях ( $E \geq E_n$ ) закон Ома не выполняется – наступает явление насыщения, а при полях превышающих  $E_n$  – возникает лавина зарядов, обуславливающая значительное увеличение плотности тока.

## 8.3. Самостоятельный газовый разряд

Рассмотренный выше процесс возникновения и образования лавин за счет ударной ионизации не утрачивает характера несамостоятельного разряда, т.к. в случае прекращения действия внешнего ионизатора разряд быстро исчезает.

Однако возникновение и образование лавины зарядов не ограничивается процессом ударной ионизации. При дальнейшем, сравнительно небольшом увеличении напряжения, на электродах газоразрядного промежутка, положительные ионы приобретают большую энергию и, ударяясь о катод, выбивают из него электроны, происходит **вторичная электронная эмиссия**. Возникшие свободные электроны на пути к аноду производят ударную ионизацию молекул газа. Положительные ионы на пути к катоду при электрических полях  $E = E_n$  сами ионизируют молекулы газа.

Если каждый выбитый с катода электрон способен ускориться и производить ударную ионизацию молекул газа, то разряд будет поддерживаться и после прекращения воздействия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором развивается самостоятельный разряд, называется **напряжением замыкания**.

На основании сказанного, **самостоятельным разрядом** будем называть такой газовый разряд, в котором носители тока возникают в результате тех процессов в газе, которые обусловлены приложенным к газу напряжением. Т.е. данный разряд продолжается и после прекращения действия ионизатора.

Когда межэлектродный промежуток перекрывается полностью проводящей газоразрядной плазмой, наступает его **пробой**. Напряжение, при котором происходит пробой межэлектродного промежутка, называется **пробивным напряжением**. А соответствующая напряженность электрического поля носит название **пробивная напряженность**.

Рассмотрим условия возникновения и поддержания самостоятельного разряда.

При больших напряжениях между электродами газового промежутка ток сильно возрастает. Это происходит вследствие того, что возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваются с нейтральными молекулами газа и ионизируют их. В результате этого образуются **вторичные электроны** и **положительные ионы** (процесс 1, рисунок 8.4). Положительные ионы движутся к катоду, а электроны – к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и,

следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере продвижения электронов к аноду лавинообразно. Это и является причиной увеличения электрического тока. Описанный процесс называется *ударной ионизацией*.

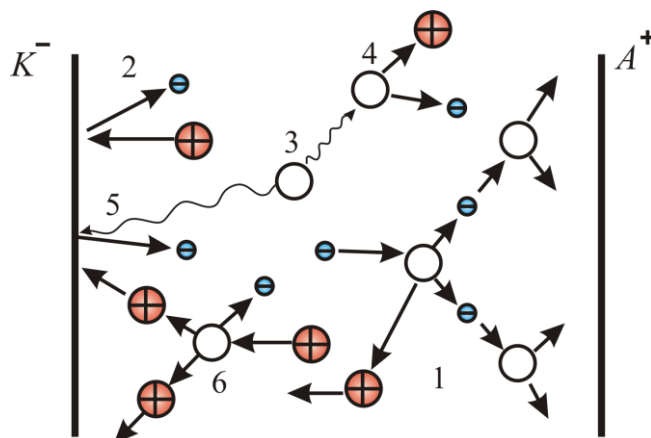


Рисунок 8.4

Однако ударная ионизация под действием электронов недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора. Для этого необходимо, чтобы электронные лавины «воспроизводились», т.е. чтобы в газе под действием каких-то процессов возникали новые электроны. Это следующие процессы:

- ускоренные электрическим полем положительные ионы, ударяясь о катод, выбивают из него электроны (процесс 2);
- положительные ионы, сталкиваясь с молекулами газа, переводят их в возбужденное состояние; переход таких молекул в основное состояние сопровождается испусканием фотонов (процесс 3);
- фотон, поглощенный нейтральной молекулой, ионизирует ее, происходит процесс фотонной ионизации молекул (процесс 4);
- выбивание электронов из катода под действием фотонов (процесс 5);
- наконец, при значительных напряжениях между электродами газового промежутка наступает момент, когда положительные ионы, обладающие меньшей длиной свободного пробега, чем электроны, приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа (процесс 6), и к отрицательной пластине устремляются ионные лавины. Когда возникают, кроме электронных лавин, еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения.

## 8.4. Типы разрядов

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов и параметров внешней цепи существует четыре типа самостоятельных разрядов:

1. Тлеющий разряд;
2. Искровой разряд;
3. Дуговой разряд;
4. Коронный разряд.

1. **Тлеющий разряд** возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рисунок 8.5). Вблизи катода располагается тонкий светящийся слой, называемый *катодной светящейся пленкой* 2.

Между катодом и пленкой находится *астоново темное пространство* 1. Справа от светящейся пленки помещается слабо светящийся слой, называемый *катодным темным пространством* 3. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют *тлеющим свечением* 4, с тлеющим пространством граничит темный промежуток – *фарадеево темное пространство* 5. Все перечисленные слои образуют *катодную часть* тлеющего разряда. Вся остальная часть трубки заполнена светящимся газом. Эту часть называют *положительным столбом* 6.

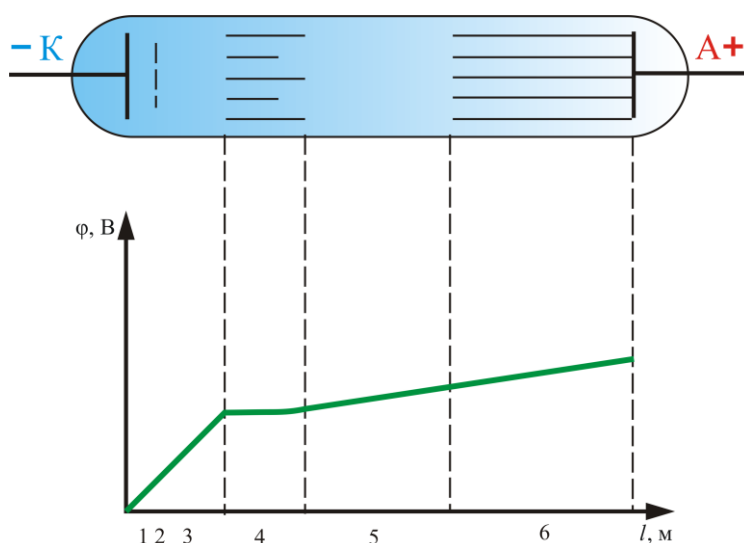


Рисунок 8.5

При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство увеличивается, а положительный столб укорачивается.

Измерения показали, что почти все падения потенциала приходятся на первые три участка разряда (астоново темное пространство, катодная светящаяся плёнка и катодное темное пятно). Эту часть напряжения, приложенного к трубке, называют *катодным падением потенциала*.

В области тлеющего свечения потенциал не изменяется – здесь напряженность поля равна нулю. Наконец, в фарадеевом темном пространстве и положительном столбе потенциал медленно растёт.

Такое распределение потенциала вызвано образованием в катодном темном пространстве положительного пространственного заряда, обусловленного повышенной концентрацией положительных ионов.

Положительные ионы, ускоренные катодным падением потенциала, бомбардируют катод и выбивают из него электроны. В астоновом темном пространстве эти электроны, пролетевшие без столкновений в область катодного темного пространства, имеют большую энергию, вследствие чего они чаще ионизируют молекулы, чем возбуждают. Т.е. интенсивность свечения

газа уменьшается, но зато образуется много электронов и положительных ионов. Образовавшиеся ионы в начале имеют очень малую скорость и потому в катодном тёмном пространстве создаётся положительный пространственный заряд, что и приводит к перераспределению потенциала вдоль трубки и к возникновению катодного падения потенциала.

Электроны, возникшие в катодном тёмном пространстве, проникают в область тлеющего свечения, которая характеризуется высокой концентрацией электронов и положительных ионов колларным пространственным зарядом, близким к нулю (плазма). Поэтому напряженность поля здесь очень мала. В области тлеющего свечения идёт интенсивный процесс рекомбинации, сопровождающийся излучением выделяющейся при этом энергии. Таким образом, тлеющее свечение есть, в основном, свечение рекомбинации.

Из области тлеющего свечения в фарадеево тёмное пространство электроны и ионы проникают за счёт диффузии. Вероятность рекомбинации здесь сильно падает, т.к. концентрация заряженных частиц невелика. Поэтому в фарадеевом тёмном пространстве имеется поле. Увлекаемые этим полем электроны накапливают энергию и часто в конце концов возникают условия, необходимые для существования плазмы. Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Свечение положительного столба вызвано, в основном, переходами возбужденных молекул в основное состояние.

2. **Искровой разряд** возникает в газе обычно при давлениях порядка атмосферного. Он характеризуется прерывистой формой. По внешнему виду искровой разряд представляет собой пучок ярких зигзагообразных разветвляющихся тонких полос, мгновенно пронизывающих разрядный промежуток, быстро гаснущих и постоянно сменяющих друг друга (рисунок 8.6). Эти полосы называют *искровыми каналами*.

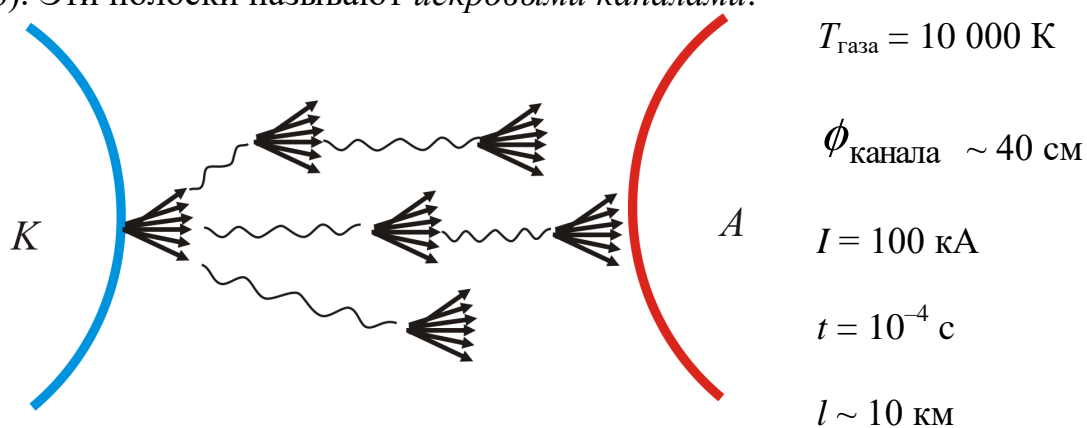


Рисунок 8.6

После того, как разрядный промежуток «пробит» искровым каналом, сопротивление его становится малым, через канал проходит кратковременный импульс тока большой силы, в течение которого на разрядный промежуток приходится лишь незначительное напряжение. Если мощность источника не очень велика, то после этого импульса тока разряд прекращается. Напряжение

между электродами начинает повышаться до прежнего значения, и пробой газа повторяется с образованием нового искрового канала.

В естественных природных условиях искровой разряд наблюдается в виде молнии. На рисунке 8.7 изображен пример искрового разряда – молния, продолжительностью  $0,2 \div 0,3$  с силой тока  $10^4 - 10^5$  А, длиной 20 км (рисунок 8.7).



Рисунок 8.7

3. **Дуговой разряд.** Если после получения искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд из прерывистого становится непрерывным, возникает новая форма газового разряда, называемая *дуговым разрядом* (рисунок 8.8).

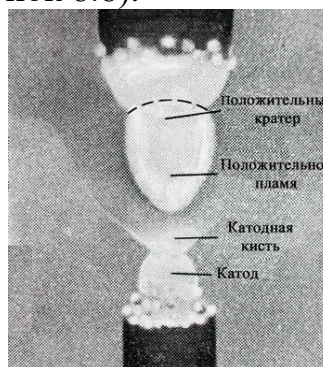
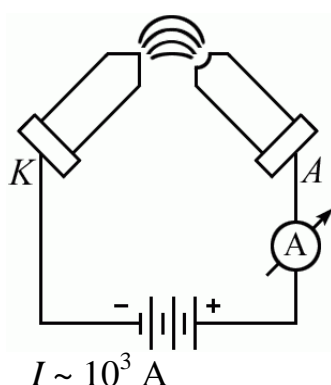


Рисунок 8.8

При этом ток резко увеличивается, достигая десятков и сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт. Согласно В. Ф. Литкевичу (1872 – 1951), дуговой разряд поддерживается, главным образом, за счет термоэлектронной эмиссии с поверхности катода. На практике – это сварка, мощные дуговые печи.

4. **Коронный разряд** (рисунок 8.9) возникает в сильном неоднородном электрическом поле при сравнительно высоких давлениях газа (порядка атмосферного). Такое поле можно получить между двумя электродами, поверхность одного из которых обладает большой кривизной (тонкая проволочка, острие).

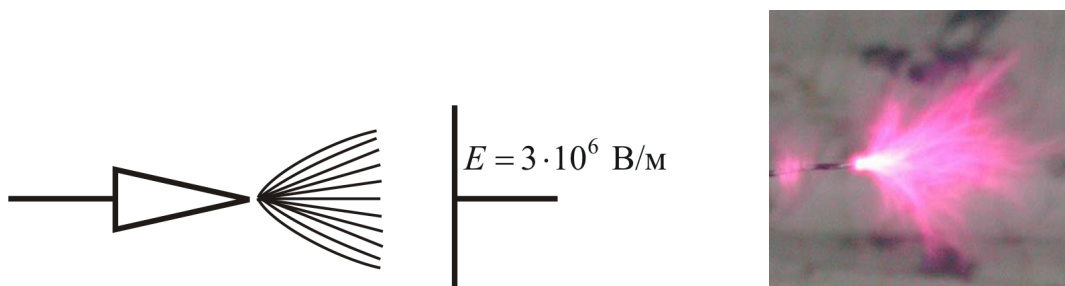


Рисунок 8.9

Наличие второго электрода необязательно, но его роль могут играть ближайšie, окружающие заземленные металлические предметы. Когда электрическое поле вблизи электрода с большой кривизной достигает примерно  $3 \cdot 10^6$  В/м, вокруг него возникает свечение, имеющее вид оболочки или короны, откуда и произошло название заряда.

## 8.5. Применение газового разряда

Глубокое понимание процессов, сопровождающих газовый разряд, привело к созданию ряда приборов и устройств, которые широко используются в различных областях науки и техники. Самые распространённые приборы, основанные на явлении газового разряда, можно разделить на следующие группы:

- Тиратроны и газотроны тлеющего разряда.
- Стабилитроны тлеющего и коронного разрядов.
- Счётчики коммутаторные, векотроны.
- Индикаторы тлеющего разряда.
- Газотроны, тиратроны с наполненным катодом.
- Импульсные водородные тиратроны с наполненным катодом.

Газоразрядные приборы очень разнообразны, и различаются видом используемого разряда. Они предназначены для стабилизации напряжения, защиты от перенапряжения, выполнения переключательных функций, индикации электрического состояния и т.д. Например, искровой разряд нашел широкое применение в науке и технике. С его помощью инициируют взрывы и процессы горения, измеряют напряжение, используют в спектральном анализе, для регистрации заряженных частиц, в переключателях электрических цепей, для обработки металлов, разрушения высокопрочных материалов и пород.

В последнее время для повышения защиты уязвимых и ответственных объектов, например, пусковых комплексов ракет, пытаются реализовать различные формы управления молнией, в частности лазерное инициирование молнии. Лазерное инициирование основано на создании в воздухе ионизированного канала с помощью лазерного излучения.

## 8.6. Понятие о плазме

В газовом разряде возникает большое количество положительных ионов вследствие высокой эффективности ударной ионизации, причем концентрация

ионов и электронов одинакова. Такая система из электронов и положительных ионов, распределенных с одинаковой концентрацией, называется *плазмой*. Термин «плазма» был введен в 1929 г. американскими физиками И. Ленгмюром и Л. Тонксом.

Плазма, возникающая в газовом разряде, носит название газоразрядной; к ней относятся положительный столб тлеющего разряда, канал искрового и дугового разрядов.

Положительный столб представляет собой так называемую *неизотермическую плазму*. В такой плазме средние кинетические энергии электронов, ионов и нейтральных молекул (атомов) различны.

Вспомним связь между средней кинетической энергией молекул идеального газа (давление газа в тлеющем разряде невелико, поэтому его можно считать идеальным) и температурой

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Можно утверждать, что температуры компонентов плазмы различны. Так, электронная температура в тлеющем разряде в неоне при давлении 3 мм. рт. ст., порядка  $4 \cdot 10^4$  К, а температура ионов и атомов 400 К, причем температура ионов несколько выше атомной температуры.

*Плазма, в которой выполняется равенство:  $T_e = T_u = T_a$  (где индексы «э», «и», «а» относятся к электронам, ионам, атомам) называется изотермической.* Такая плазма имеет место при ионизации с помощью высокой температуры (дуга, горящая при атмосферном и выше давлении, искровой канал); например, в дуге сверхвысокого давления (до 1000 атм.) температура плазмы достигает 10000 К, температура плазмы при термоядерном взрыве – порядка нескольких десятков миллионов градусов, в установке «ТОКАМАК» для исследования термоядерных реакций – порядка  $7 \cdot 10^6$  К.

Плазма может возникнуть не только при прохождении тока через газ. Газ можно перевести в плазменное состояние и путем его нагревания до высоких температур. Внутренние области звезд (в том числе и солнце) находятся в плазменном состоянии, температуры которых достигают  $10^8$  К.

Кулоновское дальнедействующее взаимодействие заряженных частиц в плазме приводит к качественному своеобразию плазмы, позволяющему считать ее особым, *четвертым агрегатным состоянием вещества*.

#### ***Важнейшие свойства плазмы:***

- сильное взаимодействие с внешними магнитными и электрическими полями, связанное с ее высокой электропроводностью;
- специфическое коллективное взаимодействие частиц плазмы, осуществляющееся через усредненные электрические и магнитные поля, которые создают сами эти частицы;
- благодаря коллективным взаимодействиям плазма ведет себя как своеобразная упругая среда, в которой легко возбуждаются и распространяются различного рода колебания и волны (например, ленгмюровские колебания плазмы);

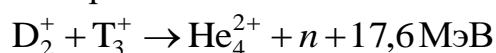


- во внешнем магнитном поле плазма ведет себя как диамагнитная среда;
- удельная электрическая проводимость  $\sigma$  полностью ионизированной плазмы не зависит от плотности плазмы и увеличивается с ростом термодинамической температуры, пропорционально  $T^{3/2}$ . При  $T \geq 10^7$  К,  $\sigma$  столь велика, что плазму можно приближенно считать идеальным проводником ( $\sigma \rightarrow \infty$ ).

Плазма – наиболее распространенное состояние вещества во Вселенной. Солнце и другие звезды состоят из полностью ионизированной высокотемпературной плазмы. Основным источником энергии излучения звезд – термодинамические реакции синтеза, протекающие в недрах звезд при огромных температурах. Холодные туманности и межзвездная среда также находятся в плазменном состоянии. Они представляют собой низкотемпературную плазму, ионизация которой происходит, главным образом, путем фотоионизации под действием ультрафиолетового излучения звезд. В околоземном пространстве слабоионизованная плазма находится в радиационных поясах и ионосфере Земли. С процессами, происходящими в этой плазме, связаны такие явления, как магнитные бури, нарушения дальней радиосвязи и полярные сияния.

Низкотемпературная газоразрядная плазма, образующаяся при тлеющем, искровом и дуговом разрядах в газах, широко используется в различных источниках света, в газовых лазерах, для сварки, резки, плавки и других видов обработки металлов.

Основной практический интерес к физике плазмы связан с решением проблемы управляемого термоядерного синтеза – процесс слияния легких атомных ядер при высоких температурах в управляемых условиях. Энергетический выход реактора составляет  $10^5$  кВт/м<sup>3</sup> в реакции



при плотности плазмы  $10^5$  см<sup>-3</sup> и температуре  $10^8$  К.

Удерживать высокотемпературную плазму предлагается (1950 г. СССР, И. Е. Тамм, А. Д. Сахаров) сильным магнитным полем в тороидальной камере с магнитными катушками, сокращенно – *токамак*. На рисунке 8.10 изображена *схема токамака*: 1 – первичная обмотка трансформатора; 2 – катушки тороидального магнитного поля; 3 – лайнер, тонкостенная внутренняя камера для выравнивания тороидального электрического поля; 4 – катушки тороидального магнитного поля; 5 – вакуумная камера; 6 – железный сердечник (магнитопровод).

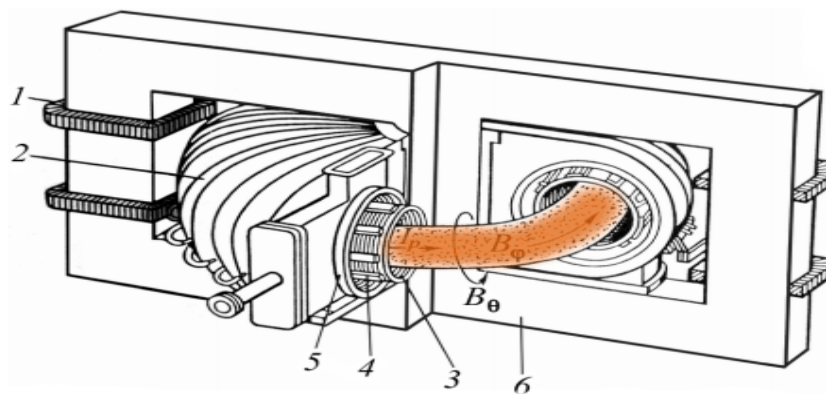


Рисунок 8.10

В настоящее время, в рамках осуществления мировой термоядерной программы, интенсивно разрабатываются новейшие системы типа *токамак*. Например, в Санкт Петербурге создан первый Российский *сферический токамак* «Глобус-М». Планируется создание крупного токамака ТМ-15, для исследования управления конфигурацией плазмы. Начато сооружение Казахстанского токамака КТМ для отработки технологий термоядерной энергетики. На рисунке 8.11 приведена схема токамака КТМ в сечении и его вид с вакуумной камерой.

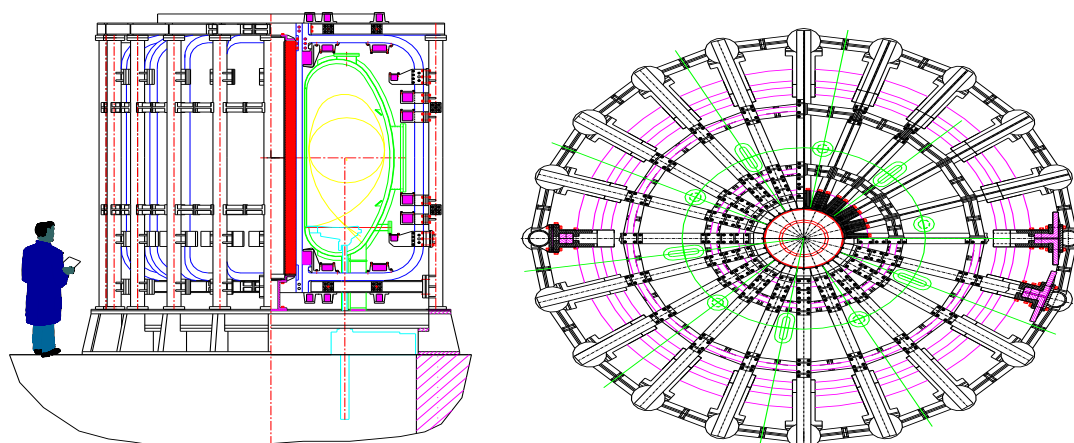


Рисунок 8.11

Осуществление управляемой термоядерной реакцией в высокотемпературной плазме позволит человечеству в будущем получить практически неисчерпаемый источник энергии.

Низкотемпературная плазма ( $T \sim 10^3$  К) находит применение в газоразрядных источниках света, газовых лазерах, термоэлектронных преобразователях тепловой энергии в электрическую. Возможно создание плазменного двигателя, эффективного для маневрирования в космическом пространстве и длительных космических полетов.

Плазма служит в качестве рабочего тела в плазменных ракетных двигателях и МГД-генераторах.

Движение плазмы в магнитном поле используется в методе прямого преобразования внутренней энергии ионизованного газа в электрическую. Этот

метод осуществлен в *магнитогидродинамическом генераторе* (МГД-генераторе), принципиальная схема которого показана на рисунке 8.12.

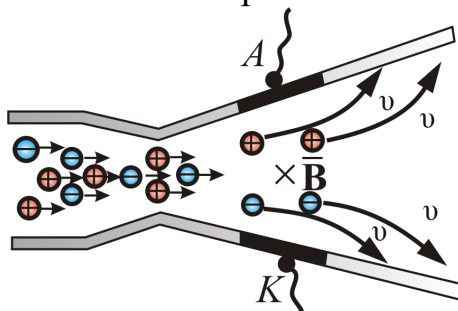


Рисунок 8.12

Сильно нагретый ионизованный газ, образующийся в результате сгорания топлива и обогащения продуктов сгорания парами щелочных металлов, которые способствуют повышению степени ионизации газа, проходит через сопло и расширяется в нем. При этом часть внутренней энергии газа преобразуется в его кинетическую энергию. В поперечном магнитном поле (на рисунке 8.9 вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции поля направлен за плоскость чертежа) положительные ионы отклоняются под действием сил Лоренца к верхнему электроду *A*, а свободные электроны – к нижнему электроду *K*. При замыкании электродов на внешнюю нагрузку в ней идет электрический ток, направленный от анода *A*, МГД-генератора, к его катоду *K*.

Свойства плазмы излучать электромагнитные волны ультрафиолетового диапазона используются в современных телевизорах с плоским плазменным экраном. Ионизация плазмы в плоском экране происходит в газовом разряде. Разряд возникает при бомбардировке молекул газа электронами, ускоренными электрическим полем – самостоятельный разряд. Разряд поддерживается достаточно высоким электрическим потенциалом – десятки и сотни вольт. Наиболее распространенным газовым наполнением плазменных дисплеев является смесь инертных газов на основе гелия или неона с добавлением ксенона.

Экран плоского телевизора или дисплея на газоразрядных элементах составлен из большого числа ячеек, каждая из которых – самостоятельный излучающий элемент. На рисунке 8.13 показана конструкция плазменной ячейки, состоящей из люминофора 1, электродов 2, иницирующих плазму 5, слоя диэлектрика ( $MgO$ ) 3, стекла 4, адресного электрода 6. Адресный электрод вместе с основной функцией проводника, выполняет функцию зеркала, отражающего половину света, излучаемого люминофором, в сторону зрителя.

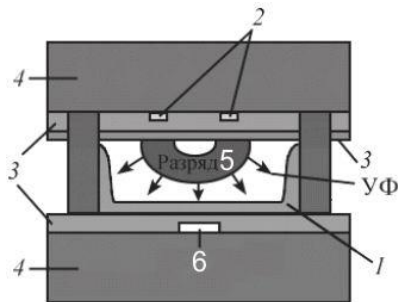


Рисунок 8.13

Срок службы такого плазменного экрана 30 тыс. часов.

В плоских газоразрядных экранах, воспроизводящих цветное изображение, применяются три разновидности люминофоров, излучающих красный (R), зеленый (G) и синий (B) свет. Плоский телевизор с экраном из газоразрядных элементов содержит около миллиона маленьких плазменных ячеек, собранных в триады RGB – пиксели (*pixel – picture element*).

# СОДЕРЖАНИЕ

## **ВВЕДЕНИЕ.**

Основы кинематике.

Динамика материальной точки. Силы в природе и их свойства.

Законы сохранения в механике.

Динамика вращательного движения твёрдого тела.

Механические колебания.

Механические волны.

Общие свойства жидкостей и газов.

Основы молекулярно-кинетической теории и статистической физики.

Основы термодинамики.

Обратимый и необратимый процессы. Реальные газы.

Электростатическое поле и его свойства.

Поток вектора напряжённости электрического поля.

Диэлектрики и проводники электростатического поля.

Законы постоянного электрического тока.

Электрический ток в вакууме и средах.

Литературы.

## ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1-5. М, Астрель АСТ, 2003-2004.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1-4. М., КНОРУС, 2009.
3. Трофимова Т.И. Курс физики. М., Академия, 2007.
4. Детлаф А.А, Яворский Б.М. Курс физики. М, Академия, 2008.
5. Наркевич И.И., Волмянский Э.И., Лобко СИ. Физика. Т. 1-2. Мн., Вышэйшая школа, 2004.
6. Лебедев А.Н. Физика. Т. 1-4. М., Физматлит, 2008.
7. Демидченко В.И. Физика. Ростов-на-Дону, Феникс, 2008.
8. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М., Физматлит, 2008.
9. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. С-Пб., Книжный мир, 2007.

### Дополнительная учебная литература

1. Калашников С.Г. Электричество. М., Физматлит, 2008.
2. Зильберман Г.Е. Электричество и магнетизм. М., Интеллект, 2008.
3. Майсова В.В. Практикум по курсу общей физики. Учебник -М.: Наука. 1995
4. .Химматкулов О., Эшкулов А.А., Вахобов К.И. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Физика», часть 1 - И. - Т: ТГТУ, 2016.
5. Юсупов Д.Б., Узоков А.А. Методические указания к лабораторным работам по физике часть II, -Т: ТГТУ, 2010.

### Информационные источники

1. [www.gov.uz](http://www.gov.uz). – Правительственный портал Республики Ўзбекистон.
2. [www.lex.uz](http://www.lex.uz) – Национальная база данных законодательства Республики Узбекистан
3. [www.ziyounet.uz](http://www.ziyounet.uz) – Национальный сайт поиска учебных материалов.
4. [www.google.ru](http://www.google.ru) – Международный сайт поиска учебных материалов.
5. [www.physics-lectures.ru](http://www.physics-lectures.ru)– Полный курс лекций по физике