

1-МАВЗУ	ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ (МАЪРУЗА 20-СОАТ, АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ 20-СОАТ, МУСТАҚИЛ ИШ 7-СОАТ)
----------------	--

4-Машғулот

3.1 “Векторлар ва улар устида чизикли амаллар.Базис. Векторнинг координаталари”

маъруза машғулотини олиб бориш технологияси

Талабалар сони: 80-90 та		Вақти: 2-соат	
Машғулот шакли		Кириш-кўргазмали тематик маъруза	
Маъруза режаси		1. Вектор тушунчаси. 2. Векторлар устида чизикли амаллар. 3. Векторнинг ўқдаги проекцияси. 4. Базис тушунчаси. 5. Векторнинг координаталари.	
Ўқув машғулотининг мақсади Вектор тушунчаси ҳақида маълумот бериш. Векторни координата ўқлари ташкил этувчилари бўйича ёйишни ўргатиш.			
Педагогик вазифа: * Векторлар ва улар устида чизикли амаллар бажариш тушунтирилади. * Векторни ўқдаги проекцияси келтирилади. * Чизикли боғланганлик ва базис тушунчалари берилади. * Декарт координаталари системасида вектор координаталари келтирилади.		Ўқув фаолиятининг натижаси: * Векторлар ва улар устида чизикли амаллар бажара олади. * Векторни ўқдаги проекциясини топишни билади. * Чизикли боғланганлик ва базис тушунчалари эга бўлади. *Ихтиёрий векторни координата ўқлари ташкил этувчилари бўйича ёйиш мумкинлигини билади..	
Ўқитишнинг усули		Маъруза ва савол-жавоб усули	
Ўқитишнинг шакли		Жамоа билан ишлаш	
Ўқитишнинг воситаси		Тахта, бўр, таркатма материал, проектор.	
Ўқитишнинг шартлари		Маъруза ўқиш учун керакли бўлган техник воситалар билан таъминланган аудитория	

3.2. Маърузанинг технологик харитаси

Иш тартиби	Фаолиятнинг мазмуни	
	Ўқитувчи	Талаба
1-босқич Кириш 5 минут	Маърузанинг мақсади ва кутилаётган натижа эълон қилинади	Талабалар эшитади ва ёзиб олади
2-босқич Асосий материал 65 минут	Аудиториядаги ўқитиш воситалари ёрдамида маъруза савол- жавоб усулида олиб борилади	Талабалар эшитади ва ёзиб олади
3-босқич Яқунлаш 10 минут	Ўтилган мавзу бўйича олинган кўникмалар эълон қилинади. Талабаларга мавзу бўйича саволлар берилади	Талабалар ёзиб олади ва жавоб беради.

4-Машғулот

Векторлар тушунчаси. Векторлар устида амаллар. Базис. Векторнинг координаталари.

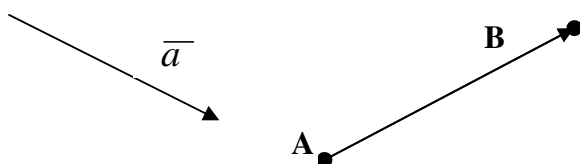
1. Вектор тушунчаси. Векторнинг узунлиги.

Математикада кўпгина катталиклар, масалан кесма узунлиги, шакл юзаси, жисм массаси қиймати билан тўла аниқланади. Бошқа гуруҳ катталиклар учун, масалан куч, тезлик, тезланиш учун қийматини ўзи етарли эмас, улар учун йўналишни ҳам эътиборга олишга тўғри келади. Бундай катталиклар вектор миқдорлар деб аталади.

1-Таъриф

Сон қиймати ва йўналиши билан аниқланадиган кесмаларга векторлар дейилади ва йўналиши бошидан охирига қараб белгиланади.

А ва В нукталар векторнинг мос равишда боши ва охири бўлсин. Вектор $\overrightarrow{AB}$ кўринишида белгиланади. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги унинг модули деб аталиб, $|\overrightarrow{AB}|$ кўринишида аниқланади. Агар вектор узунлиги $|a| = |\overrightarrow{AB}|$ орқали характерланса, вектор $\vec{a}$ кўринишида ҳам ёзилиши мумкин. Векторнинг боши унинг қўйилиш нуктаси бўлади.



2-Таъриф. Параллел тўғри чизикларда ётган векторлар коллинеар векторлар дейилади.

3-Таъриф. Коллинеар векторларнинг узунлиги тенг бўлиб, йўналишлари бир хил бўлса, бундай векторлар тенг векторлар дейилади.

4-Таъриф. Агар векторларнинг боши ва охири мос тушса 0 векторлар дейилади.

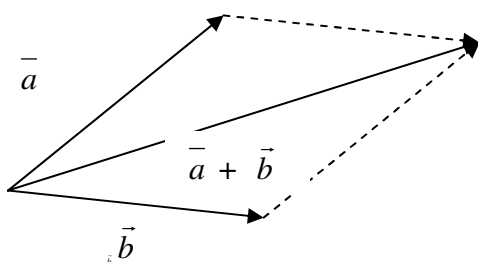
2. Векторлар устида амаллар

Векторларни қўшиш ва айириш.

Векторларни қўшиш учун учбурчак ва параллелограмм усулидан фойдаланиш мумкин.

Учбурчаклар усули. Бу усулга кўра $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторни қўшиш учун $\vec{a}$ векторни бирор О нуктага қўчириб, $\vec{a}$ векторни охирига $\vec{b}$ векторни бошини жойлаштирамиз, у ҳолда $\vec{a}$ векторнинг боши ва $\vec{b}$ векторни охирини туташтирувчи вектор $\vec{a} + \vec{b}$ ни аниқлайди.

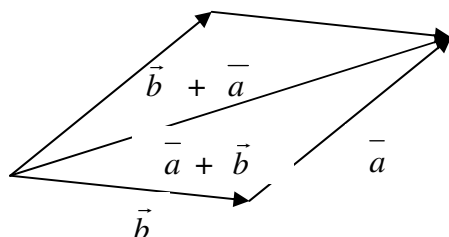
Параллелограмм усули. Бу усулга кўра $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни боши бир нуктага келтирилади ва бу векторлардан параллелограмм ясалади. У ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни бошидан чиқувчи диагональ $\vec{a} + \vec{b}$ векторни ҳосил қилади.



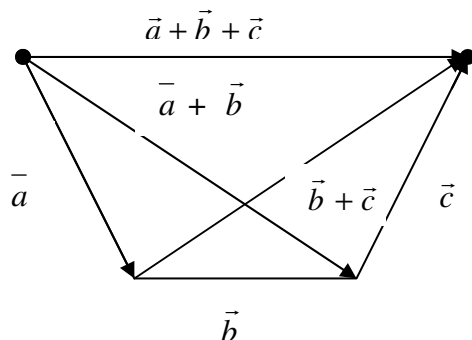
Векторларни қўшишда қуйидаги хоссалар ўринли:

1. Коммутативлик хоссаси

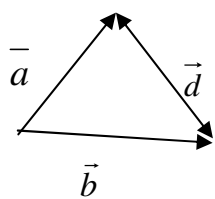
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



2. Ассоциативлик хоссаси: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$



5-Таъриф. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни айирмаси $\vec{a} - \vec{b}$ деб шундай $\vec{d}$ векторга айтиладики $\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ векторга қўшганда $\vec{a}$ вектор ҳосил бўлади.

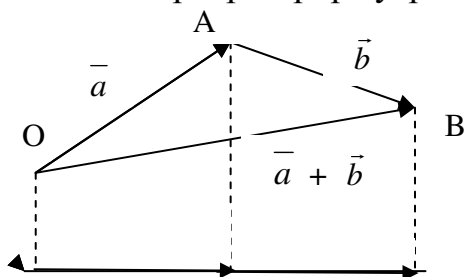


Таърифдан векторлар айирмаси учун қуйидаги қоида келиб чиқади $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни боши бир нуқтага келтирилиб охирларини туташтирувчи вектор ҳосил қилинади ва бу векторни охири камаювчи векторни охирига мос қўйилади. Бу қоидага кўра йўналишлари қарама-қарши узунликлари тенг векторлар йиғиндиси 0 эканлиги келиб чиқади.

Векторнинг ўққа проекцияси.

$\vec{a}$ векторнинг U ўққа проекцияси, унинг модули ва U ўқ билан ташкил қилган бурчаги φ орқали қуйидагича аниқланади. Шаклга кўра, бевосита бурчак косинусининг таърифидан векторнинг ўқдаги проекцияси узунлиги келиб чиқади - $pr_U \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$.

1. Тенг векторлар бирор тўғри чизикда тенг проекциялар ҳосил қилади.



2. Векторлар йиғиндисининг тўғри чизикдаги проекцияси, алоҳида олинган вектор проекциялари йиғиндисига тенг.

$$np_l(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = np_l(a_1) + np_l(a_2) + \dots + np_l(a_n)$$

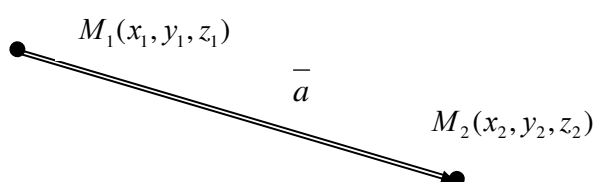
2 – хоссанинг ўринли эканлиги шаклдан яққол намоён бўлиб турибди.

3. Векторни бирор скаляр сонга кўпайтирилганда, унинг проекцияси ҳам шу сонга кўпайтирилади.

3. Тўғри бурчакли координаталар системасида векторларнинг берилиши

Охуз координата системасида $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар мос равишда $\vec{a}$ векторнинг боши ва охири бўлсин. У ҳолда $\vec{a}$ векторнинг координаталари қуйидагича аниқланади.

$$\vec{a} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Шаклдан кўриниб турибдики $\vec{a}$ векторнинг узунлиги ёки модули қуйидагича аниқланади.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Агар $\vec{a}$ вектор координата ўқлари билан мос равишда α, β ва γ бурчаклар ҳосил қилса, у ҳолда $\cos \alpha, \cos \beta$ ва $\cos \gamma$, $\vec{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади ва қуйидагича аниқланади:

$$\cos \alpha = \frac{X}{|\vec{a}|} \quad \cos \beta = \frac{Y}{|\vec{a}|} \quad \cos \gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}$$

Бу ерда: $X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$

Ихтиёрий $\vec{a}$ векторнинг берилган координаталар системасидаги проекциясларини X, Y, Z орқали белгиласак, у ҳолда $\vec{a} = (X, Y, Z)$ ва $|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ бўлади.

1-Мисол. $\vec{a} = (6; 3; -2)$ векторнинг модулини топинг.

Ечиш: Модулни топиш формуласига асосан

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

2-Мисол. $A(3; -1; 2)$ ва $B(-1; 2; 1)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

Ечиш: $\overline{AB}$ векторнинг координаталарини топиш учун мос равишда B нуқтанинг координаталаридан A нуқтанинг координаталарини айирамиз.

$$\overline{AB} = (-1 - 3; 2 - (-1); 1 - 2) = (-4; 3; -1)$$

3-Мисол. $\vec{a} = (12; -15; -16)$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини аниқланг.

$$\text{Ечиш: } |\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 225 + 256} = 25$$

Энди $x=12$; $y=-15$; $z=-16$ эканлигини эътиборга олиб йўналтирувчи косинусларни аниқлаймиз.

$$\cos \alpha = \frac{12}{25}; \cos \beta = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}; \cos \gamma = -\frac{16}{25}$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар координаталари берилган бўлса, яъни $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ ва $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ у ҳолда

$$\vec{a} - \vec{b} = (X_1 - X_2; Y_1 - Y_2; Z_1 - Z_2)$$

4. Векторларни базис координаталари бўйича ёйиш

Қуйидаги учта шарт бажарилса, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ учлик векторлар базис координаталари дейилади,

1) $\vec{i}$ вектор ОХ ўқида, $\vec{j}$ вектор ОУ ўқида, $\vec{k}$ вектор ОZ ўқида ётади.

2) ҳар бир $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлар ўз ўқларида мусбат томонга йўналган бўлади.

3) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлар, бирлик векторлар, яъни $|\vec{i}| = 1$; $|\vec{j}| = 1$, $|\vec{k}| = 1$.

Базис координаталари ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар эканлигидан, уларни ортлар деб номланган.

$\vec{a}$ вектор қандай бўлишидан қатъий назар уни ҳар доим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базислар бўйича ёйиш мумкин, яъни $\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

4-Мисол. $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ва $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ векторлар берилган $2\vec{a} + 3\vec{b}$ векторлар йиғиндисини топинг.

Ечиш: $\vec{a}$ векторнинг координаталари, $\vec{a} = (1; 3; -2)$, худди шунингдек $\vec{b} = (2; 1; 4)$. Энди $2\vec{a}$ ва $3\vec{b}$ векторларни аниқлаймиз.

$$2\vec{a} = (2; 6; -2); 3\vec{b} = (6; 3; 12)$$

Демак, $2\vec{a} + 3\vec{b} = (2+6; 6+3; -2+12) = (8; 9; 10)$.

5-Мисол. $\vec{a} = (4, 2, 0)$ векторни $\vec{p} = (1, -1, 2)$, $\vec{q} = (2, 2, -1)$ ва $\vec{r} = (3, 7, -7)$ векторлар бўйича ёйинг.

Ечиш. $\vec{a}$ векторни $\vec{p}$, $\vec{q}$ ва $\vec{r}$ векторлар бўйича ёйиш, $\vec{a}$ векторни шу векторлар орқали чизиқли комбинация кўринишида ифодалаш демакдир.

$$\vec{a} = c_1\vec{p} + c_2\vec{q} + c_3\vec{r},$$

бу ерда c_1, c_2 ва c_3 - топилиши керак бўлган сонлар.

Координата кўринишида бу қуйидагича бўлади.

$$4\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} = (c_1 + 2c_2 + 3c_3)\vec{i} + (-c_1 + 2c_2 + 7c_3)\vec{j} + (2c_1 - c_2 - 7c_3)\vec{k}$$

Натижада қуйидаги тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 4 \\ -c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 2 \\ 2c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \end{cases}$$

Буни ечиб, $c_1 = 3$; $c_2 = -1$; $c_3 = 1$ эканлигини топамиз. Демак, $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$.

6-Мисол. $\vec{a} = (6; -2; -3)$ векторга мос бирлик векторни топинг.

Ечиш:

Бирлик векторни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\vec{a}^0 = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ларни топамиз

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}_x}{|\vec{a}|}; \cos \beta = \frac{\vec{a}_y}{|\vec{a}|}; \cos \gamma = \frac{\vec{a}_z}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Бундан $\cos \alpha = 6/7$; $\cos \beta = -2/7$; $\cos \gamma = -3/7$.

Демак, $\vec{a}^0 = (\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7})$.

Саволлар

1. Вектор деб қандай катталиқка айтилади?
2. Векторнинг модули қандай катталик?
3. Қандай векторлар коллинеар ва компланар дейилади?
4. Геометрик тарзда векторларни қўшиш ва айириш қандай амалга оширилади?
5. Векторнинг ўққа проекцияси қандай аниқланади?
6. Фазодаги ва тексликдаги иккита нуқта орасидаги масофа қандай аниқланади?

Тестлар.

1. Маркази $C(1,2)$ нуқтада ва $A(4,6)$ нуқтадан ўтувчи айлананинг радиуси аниқлансин?
A. 5 B. 4 C. 2 D. 3 E. 6
2. $A(1,-3,0)$ ва $B(2,0,1)$ нуқталар берилган. $\vec{AB}$ векторнинг модули аниқлансин
A. $\sqrt{11}$ B. 4 C. 3 D. 5 E. 2
3. Агар $\vec{AB}(-1,-3,4)$ векторнинг охири $B(0,4,2)$ бўлса бошланғич нуқтаси аниқлансин
A. $(1,7,-2)$ B. $(-1,7,2)$ C. $(1,0,6)$ D. $(-1,7,-2)$ E. $(2,7,-1)$
4. Агар $\vec{a}(1,1,0)$ ва $\vec{b}(-2,3,-1)$ бўлса, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ вектор координаталари аниқлансин?
A. $(8,-7,3)$ B. $(8,7,0)$ C. $(8,3,3)$ D. $(3,7,0)$ E. $(11,7,3)$
5. ABC учбурчакнинг $A(1,1,0)$, $B(3,0,1)$, $C(-2,3,-1)$ нуқталари берилган. A нуқтадан ўтказилган медеананинг узинлиги аниқлансин.
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 2 C. 3 D. 1 E. $\frac{1}{2}$

Машқлар.

1. $\vec{a} = (3;6;6)$ векторнинг модулини топинг.
2. $A(2;-2;5)$ ва $B(5;-2;4)$ нуқталар берилган. $\vec{AB}$ векторнинг узунлигини топинг.
3. $\vec{a} = (6;-9;18)$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини аниқланг.

5- Машғулот

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси.

1. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси.

Бирор моддий жисм катталиги ва йўналиши ўзгармас бўлган ташқи $\vec{F}$ куч таъсирида бирор P нуқтадан Q нуқтага кўчсин. Физика курсидан маълумки, бу ерда бажарилган иш A , $|\vec{F}|$ кучни кўчиш йўналиши PQ , ҳамда улар орасидаги бурчакни косинуси кўпайтмасига тенг

$$A = |\vec{F}| |\overrightarrow{PQ}| \cos(\vec{F}, \overrightarrow{PQ})$$

Бу ердан кўриниб турибдики, векторлар устида амал бажарилиши натижасида қиймат(скаляр) ҳосил бўлди. Бу амал математикада векторларнинг скаляр кўпайтмаси дейилади. Векторлар узунликлари кўпайтмаси билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмаси қуйидагича белгиланади:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

Скаляр кўпайтманинг таърифидан, ўзаро перпендикуляр векторлар учун $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ га тенг бўлиши келиб чиқади, чунки $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} \quad \text{ёки} \quad (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар координаталари билан берилган бўлса, яъни $\vec{a} = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}$ ва $\vec{b} = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}$, у ҳолда уларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}, X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}).$$

Вектор ортлари скаляр кўпайтмалари учун $(\vec{i}, \vec{i}) = 1$, $(\vec{j}, \vec{j}) = 1$, $(\vec{k}, \vec{k}) = 1$, $(\vec{i}, \vec{j}) = 0$, $(\vec{j}, \vec{k}) = 0$, $(\vec{k}, \vec{i}) = 0$, муносабатлар ўринли бўлганлигидан $(\vec{a}, \vec{b}) = (X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)$ ҳосил бўлади. У ҳолда векторларнинг перпендикулярлик шarti

$$X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2 = 0$$

эканлиги келиб чиқади.

Координаталари билан берилган $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ ва $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ векторлар орасидаги φ бурчак қуйидагича аниқланади:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

ёки координаталар шаклида

$$\cos \varphi = \frac{X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

Энди векторларни йўналтирувчи косинуслар ёрдамида ёзиб оламиз:

$$X_1 = |\vec{a}| \cos \alpha_1, \quad Y_1 = |\vec{a}| \cos \beta_1, \quad Z_1 = |\vec{a}| \cos \gamma_1,$$

$$X_2 = |\vec{b}| \cos \alpha_2, \quad Y_2 = |\vec{b}| \cos \beta_2, \quad Z_2 = |\vec{b}| \cos \gamma_2,$$

У ҳолда йўналтирувчи косинуслар учун

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1, \quad \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1,$$

ўринли эканлигидан $\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$, формулани ҳосил қиламиз.

Ихтиёрий $\vec{a} = (X, Y, Z)$ векторни $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ йўналтирувчи бирлик векторга эга бўлган чизикга проекцияси учун

$$np_e \vec{a} = |\vec{e}| np_e \vec{a} = (\vec{a}, \vec{e}) = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$$

формула ҳосил бўлади.

Векторларни сонга кўпайтириш.

Агар $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай α сон учун қуйидаги формула ўринли $\alpha \vec{a} = (\alpha X_1, \alpha Y_1, \alpha Z_1)$.

Векторларнинг коллинеарлик шарти

Коллинеар векторлар параллел ёки битта тўғри чизикда ётганлиги сабабли, улар фақат узинликлари билан фарқланади. $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ ва $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ векторларнинг коллинеарлик шарти қуйидагича аниқланади

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар ва $\vec{a} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ шартни бажарувчи ягона қиймат мавжуд.

2. Скаляр кўпайтманинг хоссалари:

1. Коммутативлик хоссаси $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2. Бирор скаляр сонга нисбатан ассоциативлик хоссаси $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$.
3. Дистрибутивлик хоссаси $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$.

1-Мисол. Агар $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}; |\vec{a}| = 1; |\vec{b}| = 3; (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}\pi$ бўлса, $\vec{p} + 2\vec{q}$ векторнинг узунлигини топинг.

Ечиш. Векторнинг модули таърифига кўра: $|\vec{p} + 2\vec{q}| = \sqrt{(\vec{p} + 2\vec{q})^2} = \sqrt{(\vec{p} + 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} + 2\vec{q})}$ ни ҳисоблаймиз.

$$(\vec{p} + 2\vec{q})^2 = (\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{a} + 4\vec{b})^2 =$$

$$9(\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2) = 9(1 + 2 \cdot 3 \cos \frac{2}{3}\pi + 9) = 63$$

$$\text{Бундан } |\vec{p} + 2\vec{q}| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

2-Мисол. $\vec{x} = (2, 1, -2)$ векторга коллинеар ва $(\vec{x}, \vec{a}) = 27$ шартни қаноатлантирувчи $\vec{a}$ векторни топинг.

Ечиш: Коллинеарлик шартдан фойдаланиб, $\vec{a}$ векторни қуйидагича ёзиш мумкин. $\vec{a} = \lambda \vec{x}$, бу ерда λ - номаълум кўпайтувчи. $\vec{a}$ векторни топиш учун қуйидаги шартдан фойдаланамиз: $(\vec{x}|\vec{a}) = \lambda(\vec{x}|\vec{a}) = \lambda(4+1+4) = 9\lambda = 27$.

Бундан $\lambda = 3$ ва $\vec{x} = 3\vec{a} = (6, 3, -6)$.

3-Мисол. Агар $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$ ва $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ бўлса, $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b} + \vec{c}$ векторга проекциясини ҳисобланг.

Ечиш: Қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$\text{Pr}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = \frac{\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|}$$

$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$ ва $|\vec{b} + \vec{c}|$ ифодаларни ҳисоблаймиз.

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = 1(3-1) - 3(-4+1) + 4(2+4) = 35$$

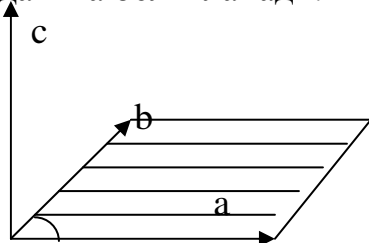
$$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(3-1)^2 + (-4+1)^2 + (2+4)^2} = 7$$

Бундан $\text{Pr}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = 5$.

3. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси ва хоссалари

Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг вектор кўпайтмаси деб, шундай $\vec{c}$ векторга айтиладки, бу вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр бўлиб, унинг модули $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ясалган параллелограмм юзига тенг, йўналиши эса $\vec{c}$ учидан қараганда $\vec{c}$ вектор атрофида $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга энг кичик бурчак билан айланиши соат стрелкасига тескари бўлиши керак.

$\vec{a}$ вектор билан ва $\vec{b}$ векторнинг вектор кўпайтмаси $\vec{a} \times \vec{b}$ ёки $[\vec{a}, \vec{b}]$ шаклида ёзилади ва қуйидагича белгиланади.



$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Бу вектор узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ясалган параллелограммнинг юзига тенг; яъни

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

1. Вектор кўпайтмадаги кўпайтувчилар ўрни алмаштирилса, вектор кўпайтма (-1) га кўпаяди.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

2. Скаляр кўпайтувчига нисбатан вектор кўпайтма группалаш қонунига бўйсунди, яъни :

$$[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$$

4. Проекциялари билан берилган векторларнинг вектор кўпайтмаси.

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ва $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг вектор кўпайтмаси қуйидагича бўлади.

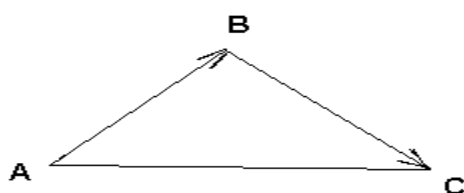
$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Бу тенгламадан $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ вектор кўпайтмани тасвирловчи векторларнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$y_1 z_2 - z_1 y_2; \quad z_1 x_2 - x_1 z_2; \quad x_1 y_2 - y_1 x_2;$$

бўлишини кўрамиз.

4-мисол. Агар А (1,1,1), В (2,0,1) ва С (1,2,-1) бўлса, АВС учбурчакнинг юзини ҳисобланг (1-расм).



1-расм

Ечиш: Вектор кўпайтманинг модули сон жиҳатдан, томонлари шу векторлардан қурилган учбурчак юзининг иккиланганига тенг:

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{ab}]|$$

$$\vec{a} = \vec{AB} = (-1, 1, 0) \quad \text{ва}$$

$\vec{b} = \vec{AC} = (0, 1, -2)$ векторларни киритамиз.

Бу векторларнинг вектор кўпайтмаси.

$$[\vec{ab}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$|[\vec{ab}]| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

Бундан $S = 1,5$ кв.бир.

5-мисол. Агар $|\vec{x}| = \sqrt{6}$ бўлса, $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ва $\vec{b} = (2, 0, 1)$ векторларга перпендикуляр ва ОХ ўқи билан ўтмас бурчак ҳосил қилувчи $\vec{x}$ векторни ва $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ векторни топинг.

Ечиш: $\vec{c}$ векторни киритамиз

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$\vec{x}$ вектор $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec{c}$ векторга коллинеар бўлади. Бундан келиб чиқадики, $\vec{x} = \lambda \vec{c} = (\lambda, \lambda, -2\lambda)$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6}\lambda = \sqrt{6} \rightarrow \sqrt{\lambda} = \pm 1$$

$\vec{x}$ вектор ОХ ўқ билан ўтмас бурчак ташкил қилади, шунинг учун унинг ОХ ўқдаги проекцияси манфий бўлиши керак. Бундан $\lambda = -1$ ва $\vec{x} = -\vec{c} = (-1, -1, 2)$

6-мисол. В (5,1,0) нуқтага қўйилган $\vec{F} = (1, -1, 1)$ куч векторининг йўналтирувчи косинусларини ва шу кучнинг А(3,2,-1) нуқтага нисбатан моментини топинг.

Ечиш: Куч векторининг йўналтирувчи косинусларини топамиз.

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Куч моменти $\vec{AB} = (2, -1, 1)$ ва $\vec{F}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси каби аниқланади.

$$\vec{m} = [\vec{AB}\vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} - \vec{k}$$

яъни $\vec{m} = (0, -1, -1)$.

5. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси

Учта $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар берилган бўлсин. $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ вектор кўпайтма билан $\vec{c}$ векторни скаляр кўпайтириш аралаш кўпайтма дейилади ва $[\vec{a} \cdot \vec{b}]\vec{c}$ ёки $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ ёки $(\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c})$ кўринишда ёзилади.

Аралаш кўпайтманинг хоссалари.

1. Кўпайтмада икки қўшни вектор ўрни алмаштирилса, аралаш кўпайтма ишорасини алмаштиради.

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{c} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{a}$$

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{a} \cdot \vec{c}] \cdot \vec{b} \quad \text{ва х.к.}$$

2. Агар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлардан исталган икkitаси бир-бирига тенг ёки параллел (коллинеар) бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, хусусий ҳолда

$$[\vec{a} \cdot \vec{a}] \cdot \vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{a} = [\vec{b} \cdot \vec{a}] \cdot \vec{a} = 0$$

3. Агар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар компланар (бир текисликда ётувчи) векторлар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.

6. Проекциялари билан берилган векторларнинг аралаш кўпайтмаси.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ ва $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг аралаш кўпайтмаси қуйидагича бўлади.

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

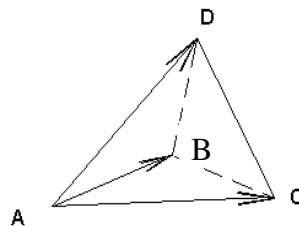
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар компланар бўлишининг зарурий ва етарли шарти.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Тенглик бажарилиши билан ифодаланади.

7-мисол. Агар $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ ва $D(-5,-4,8)$ нукталар пирамиданинг учлари бўлса, (2-расм) D учидан ABC ёққа туширилган баландликнинг узунлигини топинг.

Ечиш: $\overline{AB} = (2, -2, -3)$; $\overline{AC} = (4, 0, 6)$; ва $\overline{AD} = (-7, -7, 7)$ векторларни топамиз.
 $\overline{AB}, \overline{AC}$ ва $\overline{AD}$ векторларга қурилган пирамиданинг ҳажми, шу векторлар аралаш кўпайтмаси модулининг олтидан бир қисмига тенг



2-расм

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}| \quad \text{ва} \quad V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

Бу ерда $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC}|$, бундан $h = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD}|}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}$

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз

$$\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} -7 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 308$$

$$[\overline{AB} \cdot \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\bar{i} + 24\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$|[\overline{AB} \cdot \overline{AC}]| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 28$$

Бу ердан $h = \frac{308}{28} = 11$.

Саволлар.

1. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай аниқланади?
2. Скаляр кўпайтма қандай ҳоссаларга эга?
3. Векторларнинг перпендекулярлик шарти қандай аниқланади?
4. Векторларнинг векто кўпайтмаси қандай аниқланади?
5. Вектор кўпайтманинг ҳоссаларини айтинг?
6. Вектор кўпайтма проекциялари орқали қандай аниқланади?
7. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси қандай аниқланади?
8. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси проекциялари орқали қандай аниқланади?

Тестлар.

1. $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 2$; $\varphi = 60^\circ$ эканлиги маълум. $(\vec{a} - 2\vec{b}; 2\vec{a} + 3\vec{b})$ скаляр кўпайтмани топинг

A. 4. B. 2. C. -4. D. $1 - \sqrt{3}$ E. $4\sqrt{3}$

2. Агар $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$; $\varphi = 120^\circ$ бўлса $|\vec{a} + \vec{b}|$ топинг.

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. 4 E. 5

3. $\vec{a} = \{1, -1, 3\}$ векторнинг $\vec{b} = \{4, 0, 3\}$ векторга проекцияси ($pr_{\vec{b}} \vec{a}$) топилсин.

A. 2,6. B. $\frac{13}{\sqrt{11}}$. C. 2,4. D. 13 E. 1,8

4. При каком l нинг қандай қийматида $\vec{a}(3.4.2); \vec{b}(l.2.0.5)$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади.

A. -3. B. 3 . C. 1. D. -1 E. 2

5. Найти модуль векторного произведения векторов Агар

$|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 4; \varphi = 30^\circ$ бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар вектор кўпайтмасининг модули аниқлансин.

A. 6. B. 12 . C. 5. D. 4 E. 3

6. Найти объем пирамиды с вершинами Учлари A(1,0,1), B(-1,1,-1), C(0,-1,2) ва D(2,3,0) нукталарда бўлган пирамиданинг ҳажми аниқлансин,

A. $1\frac{1}{3}$. B. 6. C. 10. D. $2\frac{2}{3}$ E. 4

Машқлар.

1. m нинг қандай қийматида $\vec{a} = (m; -2; 5)$ ва $\vec{b} = (m; m - 1; -2)$ векторлар перпендикуляр бўлади.
2. $\vec{a} = (2; -2; 1)$ ва $\vec{b} = (3; 2; 6)$ векторлар орасидаги бурчак косинусини топинг.
3. Учлари A(2; -3; 1), B(4; -3; 2) ва C(-4; 0; 5) нукталарда бўлган учбурчак юзини топинг.
4. $\vec{a} = (3; -4; 2)$, $\vec{b} = (-3; 4; -2)$ ва $\vec{c} = (0; -2; -3)$ векторлар компланарми?
5. A(-3; -4; -2), B(-2; 0; -1), C(-1; 2; 0) ва D(-2; 3; 3) бўлса ABCD пирамиданинг ҳажмини топинг.