Олий математика фанидан маъруза матнлари

1-МАВЗУ: КИРИШ. ОЛИЙ МАТЕМАТИКА ФАНИНИНГ АСОСИЙ ВАЗИФАЛАРИ, УНИ АМАЛИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДАГИ КУЛЛАНИЛИШИ.

Режа.

1. Математика фанининг ривожланиш тарихига доир кискача маълумотлар.
2. Математика фанининг предмети ва вазифалари.
3. Алгебра ва унинг ривожланиш тарихидан.
4. Турли фоизларни хисоблаш ва уларни кулланилиши.

1. Кириш. Математика кадимий фан булиб, дастлаб Миср ва Бобилда арифметика ва геометриянинг энг мущим тушунчалари пайдо была бошлади. Хусусан сонлар, санок системаси ва нихоят турт амал вужудга келди. Турли улчамларга булган эхтиёж натижасида каср сонлар ва кейинчалик иррационал сонлар мавжудлиги курсатилди. Курилиш техникасини мураккаблашиши энг содда геометрик тушунчалар, фигуралар, юза хажм тушунчаларини киритилишига сабаб былди. VI асрга келиб, Юнонистонда мантикий системага солинган математик билимлар яратилди: Фаллес, Пифагор, Евклид, Архимед каби олимлар томонидан математикани дастлабки конун ва коидаларига асос солинди. Масалан: арифметикада $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, геометрияда чизгич ва циркул ёрдамида шакл чизиш щамда айланма жисмларни щажмларини щисоблаш бошланди. Натурал сонлар, квадрат ва куб илдиз чикариш, $\pi=3,1415926...$ сони, ноль раками, манфий сонлар, иррационал сон тушунчалари киритилди.

Математика фанини ривожланишига Урта Осиёлик алломалар Ал-Хоразмий, Умар Хайём, Беруний, Ащмад Фаргоний, Али Кушчи, Улугбеклар кушган хиссалари каттадир.

2. Математика фанининг предмети ва вазифалари. Математика - моддий дунёнинг микдорий муносабатлари ва фазовий шакллари хакидаги фандир. Математикани элементар ва олий математика кисмларга ажратиш мумкин. Элементар математикага арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия кирса, олий математикага аналитик геометрия, олий алгебра, математик тахлил, дифференциал ва интеграл хисоби, эхтимоллар назарияси ва математик статистика ва бошкалар киради.

Математика курсини мукаммал ырганиш натижасида техника, медицина, биология, кишлок хужалиги ва бошка сощаларга тегишли турли амалий масалаларни ечишга эришиш мумкин. Хозирги замон математик усуллари ёрдамида ишлаб чиkариш жараёнларини муkобил математик моделини тузиш, икки ёки бир неча нав пахтадан тажриба натижаси асосида юkори хосилдорлигини етарли кафолат билан аниkлаш мумкин.

3.Алгебра ва унинг ривожланиш тарихидан. **Алгебра** математиканинг бир қисми ва у турли миқдорлар устида амалларни ҳамда шу амаллар билан боғлиқ тенгламаларни ечишни ўрганади. Кенгроқ маънода алгебрада ихтиёрий табиатли тўпламнинг элементлари устида сонларни қўшиш ва кўпайтириш каби одатдаги амалларни умумлаштирувчи амалларни ўрганувчи фан тушунилади.

Уч оғайннинг ёшлари 30, 20, 6 да. Неча йилдан кейин энг каттасининг ёши иккала укаси ёшининг йиғиндисига тенг бўлади. $30+x=(20+x)+(6+x), \quad x=4.$ Бундай тенгламалар эрамиздан аввал 2 мингинчи йилларда қадимги Мисрда маълум эди. Лекин улар ҳарфлардан фойдаланмаган. Эрамиздан аввалги 2 мингинчи йил бошида қадимги бобилликлар янада мураккаброқ масалаларни ечишган.

III асрда яшаган Искандариялик олим Диофант геометрик баённи рад этиб ҳарфий ифодалардан фойдаланади. Унда манфий кўрсаткичли даражалар, манфий сонлар, мусбат ва манфий сонларни кўпайтириш қоидаларини ёзиш учун қисқача белгилар бор эди.

Алгебранинг кейинги ривожига Диофант ўрганган алгебраик тенгламалар кучли таъсир кўрсатган.

VI асрдан бошлаб математик тадқиқотлар маркази Ҳиндистон, Хитой, Яқин Шарқ ва Ўрта Осиё мамлакатларига кўчди. Хитойлик олимлар чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топишда номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулини топишганди. Аммо алгебра, тенгламаларни ечиш масалаларига боғлиқ муаммоларни баён этувчи математиканинг махсус тармоғи сифатида Яқин Шарқ ва Ўрта Осиё олимлари ишларида шаклланди. IX асрда ўзбек математиги ва астраноми Муҳаммад ибн Мусо ал Хоразмий (783-850) «Ал-жабр вал муқобала» асарини ёзди. Бу асарда Хоразмий чизиқли тенгламаларни ечишнинг умумий қоидасини берди ва квадрат тенгламаларни синфларга ажратиб, ҳар бир синф учун ечиш йўлларини кўрсатди. Ал-жабр (тиклаш) сўзи тенгламадаги манфий ҳадларни унинг иккинчи қисмига ишорасини ўзгартириб ўтказишни билдирган. Янги фан **«*Алгебра*» нинг** номи ўша «Ал-жабр» сўзидан олинган.

Қисқача, ал-Хоразмий тўғрисида маълумотларни қараганда Хоразмий ўқиш, ёзиш ва санашни маҳаллий диний мактаб, мадрасада олди. У илмий масалаларни ўз ўқитувчиларидан яхшироқ тушунар, жуда кўп ўқир, ўз устида тинимсиз ишлар, мадрасанинг мажбурий дарсликлари билан чегараланиб қолмас эди.

Хоразмийнинг ёшлик даври Хоразмни араблар забт этган даврга тўғри келади. Берунийнинг ёзишича, араб истилочилари Хоразмнинг миллий маданиятини йўқ қилиб юборгани, китобларнинг куйдирилганини, олимларни ўзлари билан олиб кетганини, бўйсунмаганларини ўлдирганини ёзади. Шу сабаб бўлса керак, VIII аср охирида Хоразмий Бағдодга келади. Бу аср ўрталарида давлат бошига аббосийлар келган ва Шарқий араб халифалигида ҳаёт ўз изига туша бошлаган эди. Бағдодда турли касб эгалари, олимлар тўплана бошлайди. Фаннинг ривожланиши Хорун ар-Рашид (786-809) ва унинг ўғли Ал-Маъмун халифалик қилган (813-833) даврга тўғри келади. Ал-Маъмун Бағдодда «Байт ал-ҳикмат» (Донишмандлар уйи)ни қурдиради. Бунда яхши расадхона, бой кутубхона бор эди. Уни ўз даврининг Академияси деса бўлар эди. Хоразмий Бағдодга келиб илмий ишлар билан шуғулланади. Тез орада Хоразмий математика, астрономия, география, тарих ва табобат илми бўйича бутун Ўрта Шарқда шуҳрат қозонди. У «Донишмандлар уйи»да илмий ишларга, кутубхонага, расадхонага раҳбарлик қилди. Уни Фанлар Академиясининг биринчи президенти дейиш мумкин.

Хоразмийнинг математикага қўшган ҳиссаси беқиёс. Унинг «Ҳинд ҳисоби» номли асари ўнли система рақамлари 0, 1, 2, . . . , 9 га бағишланган. Уларни соддалаштиради ва биринчи марта араб тилида баён этади. Бу рақамлар Хоразмий асари орқали арабларга, кейин Европага ўтади. Математикадаги *алгоритм* термини ҳам Хоразмийнинг номи билан боғлиқ, Ал-Хоразмий лотинча ал-горитм дейилган ва шу сўздан келиб чиққан.

Хоразмий ўрта аср Шарқида яратилган биринчи математик-астрономик жадвалларнинг муаллифи. Америкалик шарқшунос олим Сортон Хоразмийни «барча замонларнинг энг буюк математикларидан биридир» деб таърифлайди.

4. Турли фоизларни хисоблаш ва уларни кулланилиши. Бизга мактаб режасидан оддий ва мураккаб фоизларни хисоблаш усуллари маълум. Бу мавзуда фоизларни хисоблашда маълум булган тушунчаларни янада чукурлаштириб, уларни кишлок хужалик мисолларини ечиш билан тушунтирамиз.

а) Оддий фоиз масалаларини ечиш. Соннинг юздан бир булаги (улуши) фоиз (%) дейилади. Масалан, 3%=0,03; 35%=0,35; 100%=1; 250%=2,5; 180%=1,8 ни билдиради. Оддий фоиз масалалари куйидаги пропорция шаклида ечилади:

А - 100 %

В - С % Уларнинг нисбатлари узаро пропорционаллигидан (албатта А, В, С$\neq$0 хол каралади). А/В=100 % /С % ; АС=100В. Охирги тенгликдан ихтиёрий иккитаси маълум булганда учинчи микдорни топиш мумкин.

б) Берилган сонни маълум бир фоизини топиш.

Мисол 1. 2820 тонна пахтадан 33% тола чикса, канча тонна тола олинади?

Ечиш: 2820 т - 100 %

В -33 % В=(33х2800)/100=924 т.

в) Сонни маълум бир фоизи берилган шу сонни топиш.

Мисол 2. Гушт пиширилганда огирлигини 35 % ни йукотади. 13 кг пиширилган гушт олиш учун канча гушт пишириш керак?

Ечиш: гушт пиширилганда 100-35=65% колади.

А - 100%

13 кг - 65% $A=(13\bullet100)/65=1300/65=20$ кг.

г) Берилган сонни маълум бир кисми канча фоизини ташкил этишини топинг.

Мисол 3. 5000 та экилган бугдойдан 4500 таси униб чикди. Неча фоизи униб чиккан?

Ечиш: 5000 - 100 %

4500 - С % $C=(4500\bullet100)/5000=90$ %.

д) Оддий фоизли жамгармани хисоблаш. Агар омонат кассасига куйилган А - сумнинг маълум бир фоизи бирор вакт утиши билан (ой ёки йил) кушилиб борса жамгарма хосил булади. Бу жамгармада фоиз кушилиб бориши факатгина бошлангич пул микдорига нисбатан булса, оддий фоизли жамгарма дейилади.

Фараз килайлик бошлангич А - сумни усиш фоизи р булсин, у холда n йилдан кейинги оддий фоизли жамгарма микдори A_n куйидаги формула билан хисобланади:

$$A_n=A+A(p/100)=A(1+n(p/100)) \qquad (1)$$

Мисол 4. Агар омонат кассага оддий фоизли шартда куйилган А=10000 сум пулни ойлик усиш фоизи 5 % былса, 4 ойдан сунг жамгарма микдори канча булади?

Ечиш: $A=10000$, $(p/100)=0,05$; $n=4$ булганидан (1) формулага асосан жамгарма 4 ойдан кейин $A_4=A(1+4\bullet0,05)-10000\bullet1,2=12000$ сум булади.

Мисол 5. Агар 5 ойдан кейин оддий 4 % ли жамгарма микдори 16500 сум булса, бошлангич пул суммаси канча булган?

Ечиш: $A_5=16500$, $n=5$, $p=4\%$. (1) формуладан $A=A_n/(1+\mathbf{n(p/100)})$. Бундан бошлангич пул микдори $A=16500/(1+5\bullet0,04)=16500/1,\mathbf{2=13700}$ сум эканлиги келиб чикади.

Мисол 6. Дастлабки куйилган 1600 сум пул оддий 8 фоизли шартда неча йилдан сунг 2240 сум булади.

Ечиш.(1)формуладан $\mathbf{n}=(A_nA)/A(p/100)=(22401600)/(0,08[1600)=640/128=\mathbf{5.}$

Мисол 7. Фараз килайлик, бирор фермер Давлат банкасидан 5 йил муддатга оддий 20 %-ли 1 млн сум карз олган. Беш йилдан кейин фермер канча сум килиб тулаши керак?

Ечиш: $A=1000000$ сум, $p=20\%$, $n=5$. $A_5=1$ млн$(1+5\bullet0,2)=1$ млн$\bullet2=2$ млн сум Давлат банкасига тулайди.

е) Мураккаб фоизли жамгармани хисоблаш.

Агар жамгарма омонат кассага куйилган бошлангич пул микдорига нисбатан эмас, балки хар йилги усиш фоизига нисбатан олинса мураккаб фоизли жамгарма хосил булади.

Фараз килайлик омонат кассага куйилган бошлангич пул микдори К сум булиб, n йил давомида р фоиздан мураккаб фоизда купайсин. Натижада n йилдан кейинги пул микдори K_n куйидагича формула билан топилади:

$$K_n=K(1+(P/100))^n \qquad (2)$$

Мисол 8. Агар 10000 сум пул, хар ойда р=5% мураккаб фоизли купайса, 4 ойдан сунг канча булади?

Ечиш: п=4, р/100=0.05, К=10000, $К_4$=? (2) формулага биноан

$К_4=К(1+р/100)^4=10000(1+0.05)^4=10000\bullet105^4=12155$ сум 6 тийин булар экан. Агар оддий фоизли усиш билан таккосласак (мисол I билан) мураккаб фоизли жамгарма 155 сум 6 тийин ортик экан.

(2) Мураккаб фоизларни хисоблаш формуласида $К_п$, К, п, р лардан исталган учтаси маълум булса, колганини топиш мумкин.

Юкорида келтирилган оддий ёки мураккаб фоизли жамгармалардан фойдаланиб, хужаликни маълум бир муддатга олинган карзларни тулаш, чегириб колинадиган (амортизация фондини) маблаг микдорини щисоблаш, чет эл инвестицияларидан узига фойдалисини танлаш масалаларини ечиш мумкин.

Саволлар:

1. Математика фанининг предмети нима?
2. Оддий ва мураккаб фоизли жамгармани хисоблаш формулаларини келтиринг.

Олий алгебра элементлари

2-мавзу. **Детерминантлар ва уларнинг хоссалари**

Режа

1. **Алгебра ва унинг ривожланиш тарихидан.**
2. **2,3-тартибли детерминантлар.**
3. **Детерминантларнинг хоссалари.**
4. **Минор ва алгебраик тўлдирувчилар.**
5. n **- тартибли детерминантлар.**

Таянч ибора ва тушунчалар

Алгебра, алгоритм, 2,3 ва n-тартибли детерминантлар, бош диагонал, ёрдамчи диагонал, минор, алгебраик тўлдирувчи, учбурчаклар қоидаси, диагонал қоидаси, детерминантларнинг хоссалари, детерминантни бирор сатри (устуни) элементлари бўйича ёйиш.

1. 2, 3 - тартибли детерминантлар. Детерминантларни ҳисоблашга келтириладиган ушбу масалани қарайлик. Масала. A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 2 турдаги хом ашёдан фойдаланилади. Битта A маҳсулотни ишлаб чиқариш учун 5 бирлик 1-тур ва 4 бирлик 2-тур хом ашё сарфланади,битта B маҳсулотни ишлаб чиқариш учун эса, 3 бирлик 1-тур ва 5 бирлик 2-тур хом ашё ишлатилади. 1-тур хом ашё 62 бирлик, 2-тур хом ашё 73 бирликда берилган бўлса, энг катта фойда олинадиган ишлаб чиқаришни режалаштириш учун хом ашё сарфи моделини тузинг.

Бу масаланинг математик моделини тузиш мақсадида x_1 билан ишлаб чиқарилиши керак бўлган A маҳсулот миқдорини, x_2 билан эса ишлаб чиқарилиши керак бўлган B маҳсулот миқдорини белгилайлик. Бу ҳолда $5x_1$ A маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур хом ашё миқдорини, $3x_2$ эса B маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур хом ашё миқдорини ифодалайди. $5x_1 + 3x_2$ A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарфланадиган 1-тур хом ашё жами сарфи миқдорини ифодалайди, бу хом ашё чегараланган бўлиб, 62 бирликда мавжуд, демак $5x_1 + 3x_2 = 62$ тенглама келиб чиқади. Худди шундай қилиб, 2-тур хом ашё сарфи учун $4x_1 + 5x_2 = 73$ тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу тенгламалар системаси берилган A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқаришда, хом ашё сарфининг математик моделини ифодалайди.

Биз юқорида энг оддий иқтисодий масалани қарадик, ҳамда унинг модели икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасига келтирилишини кўрсатдик. Фан ва техниканинг жуда кўп масалаларининг математик моделлари чизиқли тенгламалар системаси орқали ифодаланади. Бу ҳолатлар чизиқли тенгламалар назариясини умумий ҳолда қарашимиз лозимлигини кўрсатади.

Икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} \quad x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ бўлса, (1) тенгламалар системаси ягона

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

ечимга эга бўлади. (2) формуладаги сурьат ва маҳраждаги ифодалар 2-тартибли детерминант (аникловчи)лар дейилади. 2-тартибли детерминантни

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

билан белгиланади. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ларга детерминантнинг элементлари дейилади. Шундай қилиб, (2) формулаларни детерминантлар ёрдамида

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

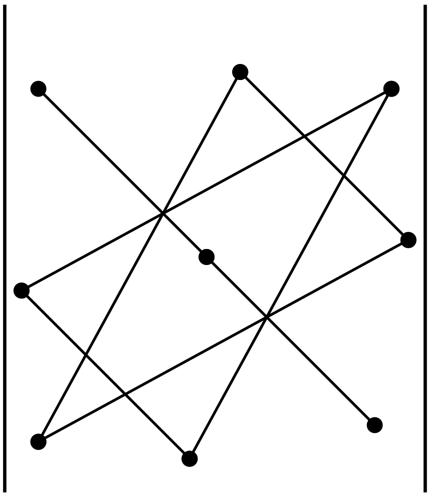
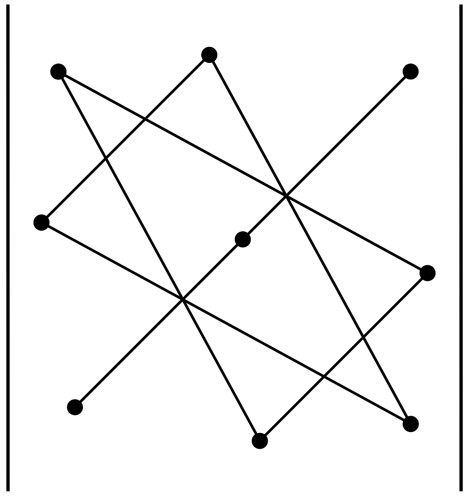
$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{13}a_{12} \\ a_{33}a_{32} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ифодага ***<u>3- тартибли детерминант дейилади</u>*** ва $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$ билан белгиланади. a_{11}, a_{22}, a_{33} элементлар ***<u>бош диагонални</u>***, a_{13}, a_{22}, a_{31} ***<u>ёрдамчи диагонални</u>*** ифодалайди. (4) тенгликда 2- тартибли детерминантларни катталиклари билан алмаштирсак

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (5)$$

бўлади. (5) формулани эсда сақлаш ***<u>учун учбурчак қоидасидан</u>*** фойдаланиш мумкин. Элементларни нуқталар билан белгиласак, ушбу схема хосил бњлади :

	
+	–

(+) ишора билан, (-) ишора билан олинади.

2*. **Минор ва алгебраик тўлдирувчилар***

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$ детерминантда i- сатрни ва j- устунни ўчиришдан 2-тартибли детерминант ҳосил бўлади, бунга a_{ij} элементга мос ***минор*** дейилади ва M_{ij} билан белгиланади. Масалан,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix}$$

ва бошқалар.

a_{ij} ***элементнинг алгебраик тўлдирувчиси*** деб унга мос минорнинг мусбат ёки манфий ишора билан олинган катталигига айтилади,бунда $i + j$ жуфт бўлса, мусбат ишора билан, $i + j$ тоқ бўлса манфий ишора олинади. a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини A_{ij} билан белгиланади. Демак,

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлади ва бошқалар.

3. ***Детерминантларнинг хоссалари.*** Детерминантлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. Детерминантнинг барча сатридаги элементларини мос устунэлементлари билан алмаштирилса унинг катталиги ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{21}a_{31} \\ a_{12}a_{22}a_{32} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-мисол. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24-6-0-0+4-0=22$

бўлиб, бу детерминантда барча сатрларини мос устунлар билан алмаштирсак,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24-6+0-0+4-0=22$$

бўлади. Бундан кўринадики, иккала ҳолда ҳам бир хил катталик ҳосил бўлди, бу биринчи хоссанинг тўғрилигини кўрсатади.

2. Иккита сатр (устун)ни ўзаро алмаштирилса детерминант катталигининг ишораси тескарисига ўзгаради; ҳақиқатан ҳам 1- мисолдаги детерминантда 1-сатрини 3-сатри билан ўзаро алмаштирсак,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-4-24-0+6=-28+6=-22$$

бўлиб, бу 2-хоссанинг ўринли эканлигини кўрсатади.

3. Иккита бир хил сатр (устун)ли детерминант катталиги нўлга тенг; иккита сатри бир хил бўлган детерминантни ҳисобласак,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36+0+0+36-0-0=0$$

бўлади, бу эса 3-хоссанинг тўғрилигини кўрсатади.

4. Детерминантнинг бирор сатр (устун) нинг ҳамма элементларини $m \neq 0$ сонга кўпайтирилса, унинг катталиги шу m сонга кўпаяди.

Ҳақиқатан ҳам, 1-хоссада келтирилган детерминантнинг 2-сатри элементларини 2 га кўпайтирсак,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 12 + 0 - 0 + 8 - 0 = 44$$

бўлиб, бу хоссанинг ҳам тўғрилиги кўринади.
5. Детерминантнинг иккита сатри (устуни) элементлари ўзаро пропорционал (мутаносиб) бўлса, унинг катталиги нўлга тенг, мисол учун,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминант берилган бўлсин. Бу детерминантнинг 1 ва 2-сатри элементлари ўзаро пропорционал, уни ҳисобласак

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 12 - 0 + 6 + 12 = 0$$

бўлиб, бу эса 5-хоссанинг тўғрилигини кўрсатади.
6. Детерминантнинг катталиги, бирор сатри (устуни) элементларини унга мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб қўшилганига тенг. 1-хоссада келтирилган мисолни қараймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

бу детерминантни 3-сатр элементлари бўйича ёйиб ёзсак,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 28 = 22$$

келиб чиқади, бу эса 6-хоссанинг ҳам ўринли эканлигини кўрсатади.
7. Детерминант бирор сатри (устуни)нинг ҳар бир элементи иккита қўшилувчидан иборат бўлса, у ҳолда бу детерминант иккита детерминант йиғиндисига тенг бўлади, яъни

$$\begin{pmatrix} (\ a_{11} + b_1\ ) a_{12} a_{13} \\ (\ a_{21} + b_2\ ) a_{22} a_{23} \\ (\ a_{31} + b_3\ ) a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ушбу детерминантни

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2+2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

кейинги иккита детерминантни ҳисобласак,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18+0-3-18+3-0=0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6+0-3+18+1-0=22;$$

1-хоссадаги мисолдан маълумки, у 22 га тенг эди, кейинги икки детерминант йиғиндиси ҳам 22га тенг бўлади,бу эса 7-хоссанинг ўринли эканлигини кўрсатади.

8. Детерминантнинг бирор устини (сатри) элементларига бошқа устини(сатри)нинг мос элементларини исталган умумий кўпайтувчига кўпайтириб қўшилса, унинг катталиги ўзгармайди, яъни:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+\lambda a_{12}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+\lambda a_{22}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}+\lambda a_{32}) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Мисол учун,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

детерминантнинг 2-устун элементларини 2 га кўпайтириб, 1-устуннинг мос элементларига қўшиб, ҳосил бўлган детерминантни ҳисобласак:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28-6=22$$

бўлади. Бу детерминантнинг катталиги 1- мисолда ҳисоблаганимиздек 22 га тенг эди, бу эса 8-хоссанинг ҳам тўғрилигини кўсатади;

Детерминантларнинг хоссаларидан фойдаланиш кўп ҳолларда қулай ҳисоблашларга олиб келади. Ушбу мисолни қараймиз.

2-мисол. $\Delta = \begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$ детерминантнинг катталигини ҳисобланг.

Ечиш. Бу детерминантни учбурчак қоидаси билан ҳисоблаш кўп хонали сонлар бўлганлиги учун анча ноқулайликларга олиб келади. Шунинг учун бу детерминантни ҳисоблаш учун, унинг хоссаларидан фойдаланишга уринамиз. Иккинчи сатр элементларини -2 га кўпайтириб 1-сатр мос элементларига қўшамиз, бу ҳолда ушбу детерминант ҳосил бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix};$$

ҳосил бўлган детерминантни 1- сатр элементлари бўйича ёйиб,ушбуни

$$\Delta = 0\cdot\begin{vmatrix} 8268 & 10268 \\ 689 & 126 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 6157 & 10268 \\ 513 & 126 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} (-12)$$

оламиз.Охирги детерминант 2-сатр элементларини (-12) га кўпайтириб 1-сатр мос элементларига қўшиб ушбу натижага эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = 1\cdot 689 - 0\cdot 513 = 689.$$

Бу мисолдан кўринадики, детерминантларни ҳисоблашда унинг хоссаларидан фойдаланиш анча қулайликларга олиб келади.

3 –тартибли детерминантни ***диагоналлар усули*** деб аталувчи ушбу усул билан ҳам ҳисоблаш мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}\ .$$

.

1-мисолдаги детерминантни диагонал усулидан фойдаланиб ҳисобласак,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{matrix} = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

бўлади.

4. n*- тартибли детерминантлар ҳақида.* Кўпгина масалаларни ечишда 2 ва 3-тартибли детерминантлардан ташқари янада юқори тартибли детерминантлар ҳам учрайди. Масалан, 4-тартибли детерминант ушбу кўринишда бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Умумий ҳолда n-тартибли детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

кўринишда бўлади. Бунда $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ мос равишда $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларидир. Маълумки, алгебраик тўлдирувчилар $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ нинг тартиблари $(n-1)$ бўлади. Детерминантларнинг ҳамма хоссалари n-тартибли детерминант учун ҳам ўринлидир.

Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашда детерминантларнинг 6-хоссасидан фойдаланиб, унинг тартибини пасайтириш билан 3 ёки 2-тартибли детерминантларга келтириб ҳисобланади. Масалан, 4-тартибли детерминантни 1-сатр элеменлари бўйича ёйсак ушбу кўринишда бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Бундан юқори тартибли детерминантларнинг ҳам катталиги юқоридагига ўхшаш ҳисобланади. Масалан, 6-тартибли детерминантнинг катталигини ҳисоблаш керак бўлса, уни бирор сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйиб 5-тартибли детерминантларга, кейин ўз навбатида 5-тартибли детерминанатларни ҳам бирор сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйиб, 4-тартибли детерминантларга келтирилади ва ҳоказо.

Детерминантларнинг юқорида кўрсатилган хоссалари ҳамма тартибли детерминантлар учун ҳам тўғри. Энди юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашга мисол қараймиз. Ушбу детерминантнинг катталигини ҳисобланг.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ечиш. Берилган детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2\left[3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] + 3\cdot\left[(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 2(-9+4+16)+3(2+6-16) = 22-24 = -2.$$

Детерминантларни ҳисоблашда унинг бирор сатри ёки устунларида нўллар кўпроқ бўлса, ўша сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаш анча қулайлик келтиради, масалан, юқоридаги мисолда 1-сатр элементлари бўйича ёйганимиз учун, яъни унда 2 та нўл элемент бўлгани учун 2 та 3-тартибли детерминантларни ҳисоблаб чиқишга ҳожат қолмади. Бундай сатр ёки устунлар бўлмаса детерминантларнинг 8-хоссасидан фойдаланиб, уни бундай сатрга ёки устунга эга бўладиган қилиб ўзгартириш мумкин, мисол учун ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисоблайлик. Бунинг учун 1-устун элементларини олдин 2 га кейин мос равишда 5 га, -4 га кўпайтириб, 2,3 ва 4- устунларнинг мос элементларига қўшамиз, бу ҳолда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

бўлиб, кейинги 3-тартибли детерминантни 2-сатр элементлари бўйича ёйсак:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84$$

бўлади.

Мустакил бажариш учун топшириклар

1. Куйидаги детерминантлар биринчи устун элементлари бўйича ёйиб хисоблансин:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Куйидаги детерминантлар ноллар энг кўп бўлган сатр элементлари бўйича ёйиб хисоблансин:

1) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$**;** **2)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$**.**

3. Куйидаги детерминантлар ҳисоблансин:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$**;** **2)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$**;** **3)** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$**.**

Такрорлаш учун саволлар

1. 2. 2-тартибли детерминант қандай белгиланади ва у нимага тенг?
3. 3-тартибли детерминант қандай белгиланади ва у қандай ҳисобланади?
4. Детерминантларнинг хоссалари нималардан иборат.
5. 4-тартибли детерминантларнинг катталиги қандай ҳисобланади?
6. 5,6,…,n-тартибли детерминантлар қандай белгиланади ва ҳисобланади?

3- мавзу. Чизиқли тенгламалар системаси

Режа

1. Чизиқли тенгламалар системаси ҳақида умумий тушунчалар.
2. Чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули билан ечиш.
3.**Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ечиш.**
4. Кронекер-Капелли теоремаси.
5.Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси.
6. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш.

Таянч иборалар

Чизиқли тенгламалар системаси(ЧТС),тенгламалар системасининг ечими, ягона ечим, система биргаликда, аниқ бўлмаган система,эквивалент система, биргаликда бўлмаган система, система матрицаси, кенгайтирилган матрица, Кронекер-Капелли теоремаси, бир жинсли система, бош ўзгарувчилар, номаълумларни йўқотиш, тескари қадам, Гаусс усулининг хусусияти.

1.ЧТС ҳақида умумий тушунчалар. Маълумки бир неча тенгламалар биргаликда қаралса, уларга тенгламалар системаси дейилади.

Тенгламалар системасидаги ҳамма тенгламалар чизиқли (1-даражали) бўлса, бундай тенгламалар системасига чизиқли тенгламалар системаси дейилади.

Тенгламалар системасидаги номаълумлар ўрнига маълум сонлар мажмуини қўйганда, системанинг ҳамма тенгламалари айниятга айланса, бундай сонлар мажмуига тенгламалар системасининг ечими (илдизи) дейилади. Бундай сонлар мажмуи битта бўлса, тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиб, бу система аниқланган (тайин, муайян) деб аталади ва бу тенгламалар системаси биргаликда дейилади. Биргаликда бўлган система биттадан кўп ечимга эга бўлса, бундай система аниқ бўлмаган система дейилади.

Биргаликда бўлган тенгламалар системаси бир хил ечимлар мажмуига эга бўлса, бундай системалар эквивалент дейилади.

Тенгламалар системаси бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса, бундай системага биргаликда бўлмаган система дейилади.

Берилган тенгламалар системасининг бирорта тенгламасини 0дан фарқли сонга кўпайтириб, бошқа тенгламасига ҳадма-ҳад қўшиш билан ҳосил бўлган система берилган системага эквивалент бўлади (бу хоссадан келгусида кўп фойдаланилади).

Фан ва техниканинг кўп соҳаларида бўлганидек, иқтисодиётнинг ҳам кўп масалаларининг математик моделлари чизиқли тенгламалар системаси орқали ифодаланади.

Чизиқли тенгламалар системасини тузишга иқтисодиётдан мисол қараймиз.

1-мисол. Корхона уч хилдаги хом ашёни ишлатиб уч турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Ишлаб чиқариш характеристикалари 1-жадвалда берилган.

1-жадвал.

хом ашё хиллари	Маҳсулот турлари бўйича хом ашё сарфлари			хом ашё захираси
	1	2	3	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Берилган хом ашё захирасини ишлатиб, маҳсулот турлари бўйича ишлаб чиқариш ҳажмини аниқланг.

Ечиш: Ишлаб чиқарилиши керак бўлган маҳсулотлар ҳажмини мос равишда x_1, x_2 , x_3 лар билан белгилаймиз. 1-тур маҳсулотга, 1-хил хом ашё, биттаси учун сарфи 5 бирлик бўлганлиги учун 5x_1 1-тур маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашёнинг сарфини билдиради. Худди шундай 2,3-тур маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашё сарфлари мос равишда 12x_2, 7x_3 бўлиб, унинг учун қуйидаги тенглама ўринли бўлади: 5x_1+ 12x_2+ 7x_3=2000. Юқоридагига ўхшаш 2,3-хил хом ашёлар учун

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660\,,$$

$$9x_1+11x_2+4x_3=2070$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Демак, масала шартларида қуйидаги уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 5x_1+12x_2+7x_3=2000, \\ 10x_1+6x_2+8x_3=1660, \\ 9x_1+11x_2+4x_3=2070 \end{cases}$$

$$5x_1+12x_2+7x_3=2000,$$

$$9x_1+11x_2+4x_3=2070.$$

Бу масаланинг математик модели уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасидан иборат бўлди. Бу масала тенгламалар системасининг ечимини топиш билан ечилади. Бундай тенгламалар системасини ечишни умумий ҳолда қараймиз.

2.Чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули билан ечиш

Чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топишни олдин икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси учун қараймиз. Ушбу икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

дан, биринчи тенгламани a_{22} га, иккинчи тенгламани $-a_{22}$ га ҳадма-ҳад кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгламаларни қўшамиз, натижада

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=b_1a_{22}-b_2a_{12} \qquad (1)$$

тенглама ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш, 1-тенгламани $-a_{21}$ га, 2-тенгламани a_{11} га ҳадма-ҳад кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни қўшиб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})y=b_2a_{11}-b_1a_{21} \qquad (2)$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

бўлгани учун, қуйидаги белгилашларни киритиб

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1) ва (2) тенгликларни

$$\Delta x = \Delta_1, \qquad \Delta y = \Delta_2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $\Delta \neq 0$ бўлса,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

бўлади, ёки детерминантлар орқали ёзсак

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Бу формулаларга Крамер формулалари дейилади, бунда Δ_1 ёрдамчи детерминант Δ детерминантнинг биринчи устунини озод ҳадлар билан, Δ_2 да эса иккинчи устун озод ҳадлар билан алмаштирилади. Δ детерминантга тенгламалар системасининг детерминанти дейилади.

Шундай қилиб, берилган чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти 0 дан фарқли бўлса, система ягона ечимга эга бўлади.

Энди системанинг детерминанти 0 га тенг, яъни

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \textit{ёки} \quad a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$$

бўлсин. Бу ҳолда 1-тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлари 2-тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентларига пропорционалдир. Ҳақиқатан, коэффициентлардан бири, масалан a_{11} нолдан фарқли бўлсин деб $\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda$ билан белгиласак, бундан $a_{21} = \lambda a_{11}$ бўлади. У ҳолда $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ тенгликдан $a_{11}a_{22} = \lambda a_{11}a_{12}$ бўлиб, $a_{22} = \lambda a_{12}$ келиб чиқади. Буларни ҳисобга олиб, берилган системани

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

кўринишда ёзиш мумкин. бунда иккита хусусий ҳол бўлиши мумкин:

1) иккала Δ_1 ва Δ_2 детерминантлар 0 га тенг, яъни $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0, \quad \Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0$ бундан $b_2 = \lambda b_1$, чунки $a_{22} = \lambda a_{12}$.

Бу ҳолда a_{21}, a_{22}, b_2 сонлар a_{11}, a_{12}, b_1 сонларга пропорционал бўлиб, берилган тенгламалар системаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

Шундай қилиб, системанинг иккинчи тенгламаси, биринчи тенгламасидан унинг иккала қисмини λ га кўпайтириш билан ҳосил қилинади, яъни у 1-тенгламанинг натижасидир. Бу ҳолда берилган система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўлади. Масалан, y га ихтиёрий қийматлар бериб, x нинг тегишли қийматини $x = \dfrac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$ тенгликдан топамиз.

2) Δ_1ва Δ_2 детерминантлардан ҳеч бўлмаганда биттаси 0 дан фарқли, масалан,

$\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $b_2a_{11} \neq b_1a_{21}$ бўлади, демак $b_2 \neq \lambda b_1$.

бу ҳолда (3) системадан маълум бўладики, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ тенглама биринчи $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ тенгламага қарама-қаршидир. Демак, берилган система ечимга эга эмас, яъни биргаликда эмас.

Энди уч номаълумли учта тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\} \quad (4)$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бу система номаълумлари коэффициентларидан ушбу детерминантни тузамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

бунга (4) ***системанинг детерминанти*** ёки аниқловчиси дейилади. $\Delta \neq 0$ бўлса, (4) система ягона

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \quad (5)$$

ечимга эга бўлади, бунда

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

(5) формулага ҳам икки номаълумли иккита тенгламалар системасидагидек ***Крамер формулалари*** *дейилади*. Крамер формулалари n номаълумли n та тенгламалар системаси учун ҳам умумлаштирилади.

Энди мисоллар қараймиз:

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимини топинг.

Ечиш. Бу системанинг детерминанти $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0$.

Демак, берилган тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 \cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33.$$

Шундай қилиб, $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{55}{11} = 5, x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{33}{11} = 3$.

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Система детерминантини тузиб, унинг учинчи сатри элементларини (-1)га кўпайтириб, 1 сатр мос элементларига қўшиб, ҳосил бўлган детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Охирги 3-тартибли детерминантда 1- устун элементларини (-2)га кўпайтириб 3- устун мос элементларига қўшиб, ҳамда 3- устун элементлари бўйича ёйиб

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

ни ҳосил қиламиз. $\Delta \neq 1$, демак, тенгламалар системаси ягона ечимга эга. Энди бошқа детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta x_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

.

(Бу детерминантларни ҳисоблаб кўришни ўқувчига ҳавола этамиз).
Шундай қилиб, Крамер формулаларига асосан,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{-3}{1} = -3, \quad x_4 = \frac{4}{1} = 4$$

бњлади.
Топилган ечимни тенгламалар системасига бевосита қўйиб унинг тўғрилигига ишонамиз.
3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимини топинг.

Ечиш. Олдин системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 4 + 18 - 24 - 4 = 0.$$

Система детерминанти 0 га тенг, бунда икки ҳол бўлиши мумкин. Тенгламалар системаси ечимга эга бўлмаслиги ёки чексиз кўп ечимга эга бўлиши мумкин. Буни аниқлаш учун $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ ёрдамчи детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Иккинчи ва биринчи тенгламаларни солиштириб, иккинчи тенглама биринчи тенгламадан иккига кўпайтириш билан ҳосил бўлганлигини пайқаймиз. Демак, берилган система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad (6)$$

тенгламалар системасига тенг кучли бўлади. Бу системанинг бирорта номаълумига ихтиёрий қийматлар бериш билан чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўламиз, масалан,

$x_3 = 1$ бўлсин, уни охирги системага қўйсак,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

система ҳосил бўлиб, $x_1 = -\dfrac{5}{11},\quad x_2 = \dfrac{18}{11}$ бўлади. Бу ҳолда $\left(\dfrac{-5}{11},\ \dfrac{18}{11},\ 1\right)$ ечим ҳосил бўлади. $x_3 = -2$ бўлсин, буни (6) системага қўйиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

бундан, $x_1 = \dfrac{10}{11},\ x_2 = -\dfrac{3}{11}$ бўлиб, $\left(\dfrac{10}{11},\ -\dfrac{3}{11},\ -2\right)$ ечимни оламиз.

Шундай қилиб, номаълумларнинг бирига ихтиёрий қийматлар бериб, чексиз кўп ечимларни оламиз.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Берилган система детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиб, ёрдамчи детерминантлар ҳам $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ бўлади. Бу тенгламалар системаси ечимга эга эмас, чунки 1-тенглама билан 3-тенглама ўзаро зиддир, яъни 1-тенгламани -3 га кўпайтириб 3- тенгламага ҳадма-ҳад қўшсак, 0=-3 тенглик ҳосил бўлиб, бу тенгламалар системасининг биргаликда бўлмаслигини билдиради.

3.**Таянч ибора ва тушунчалар**

Система матрицаси, кенгайтирилган матрица, Кронекер-Капелли теоремаси, бир жинсли система, бош ўзгарувчилар, номаълумларни йўқотиш, тескари қадам, Гаусс усулининг хусусияти, система биргаликда ва аниқмас, система биргаликда эмас, Гаусс усулининг Жардоно модификациялашган усули.

1.Кронекер-Капелли теоремаси.Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

умумий кўринишдаги, яьни n та номаьлумли m та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин.

Берилган система номаълумлари коэффициентларидан A матрицани ҳамда бу матрицага озод ҳадлардан тузилган устунни бирлаштириб, иккинчи B матрицани тузамиз, яъни булар ушбу кўринишшда бўлади.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------- & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ва } \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ ---------- & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A матрицага (1) системанинг матрицаси, B матрицага системанинг кенгайтирилган матрицаси дейилади. Қуйидаги теорема ўринли.

1- теорема. (Кронекер-Капелли теоремаси). Чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиши учун система матрицаси A нинг ранги система кенгайтирилган B матрицасининг рангига тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. (1) система биргаликда бўлсин. $k_1, k_2, \dots, k_s$ унинг ечимларидан бири бўлсин. Бу сонларни системадаги номаълумлар ўрнига қўйиб, s та айният ҳосил қиламиз. Бу айниятлар B матрицанинг охирги устуни қолган барча устунларининг мос равишда коэффициетлар билан кўпайтмасидан олинган йиғиндиси эканлигини кўрсатади. B матрицанинг ҳар қандай бошқа устуни A матрицага ҳам киради ва шунинг учун у матрицанинг барча устунлари орқали чизиқли ифодаланади. Аксинча, A матрицанинг ҳар қандай устуни B матрицани ҳам устуни бўлади, яъни бу матрицанинг устунлари орқали чизиқли ифодаланади. Бундан A ва B матрицаларнинг устунлари системаси ўзаро эквивалент эканлиги келиб чиқади, шунинг учун бу матрицаларнинг ранги бир хил бўлади, яъни $r(A) = r(B)$ келиб чиқади.

Етарлилиги. A ва B матрицалар бир хил рангга эга бўлсин. Бундан A матрица устунларининг исталган максимал чизиқли эркли системаси B матрицада ҳам максимал чизиқли эркли система бўлиб қолишлиги келиб чиқади. Шунда қилиб A матрица устунлари системаси орқали B матрицанинг охирги устуни чизиқли ифодаланади. Демак, шундай $k_1, k_2, \dots, k_s$ сонлар мажмуи мавжуд бўладики, A матрицанинг бу сонлар билан кўпайтиришдан олинган устунлари йиғиндиси озод ҳадлардан иборат устунга тенг, яъни $k_1, k_2, \dots, k_s$ сонлар (1) системанинг ечими бўлади, шундай қилиб, A ва B матрицалар рангларининг бир хилда бўлишидан (1) системанинг биргаликда бўлиши келиб чиқади. Теорема тўлиқ исботланди.

Кронекер-Капелли теоремаси ечим мавжуд эканлигини тасдиқлайди, лекин бу системанинг барча ечимларини амалда топиш учун усулни бермайди. Энди, ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг қуйидаги қоидасини келтирамиз.

A матрицанинг ранги B матрицанинг рангига тенг бўлиб, $r(A) = r(B) = k$ бўлсин. Бунда k сон A матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сонига тенг бўлиб, k номаълумлар сонига тенг бўлса, у ҳолда система тенгламалари сони номаълумлари сонига тенг ва унинг детерминанти нолдан фарқли бўлади, бундай системанинг ечими ягона бўлиб уни Крамер қоидаси бўйича топиш мумкин бўлади.

Энди матрицаларнинг ранги k номаълумлар сонидан кичик, яъни $k < n$ бўлсин. Бу ҳолда k - тартибли минор нолдан фарқли бўлади. Система тенгламаларининг ҳар қайсисида $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ номаълумли ҳадларини тенгламаларнинг ўнг томонига ўтказамиз ва бу номаълумлар учун бирор

$c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ қийматлари мажмуини танлаб олиб k номаълумли k та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган системага Крамер қоидасини қўллаш мумкин ва ягона $c_1, c_2, \dots, c_k$ ечим мажмуи мавжуд бўлади. Система тенгламаларининг ўнг томонига ўтказилган номаълумларни ***озод*** **номаълумлар** деб атаймиз. Чап томондаги номаьлумлар **бош(базис) ўзгарувчилар,** Озод номаълумлар учун $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ сонларни ихтиёрий танлаб олишиьиз мумкин бўлганлиги учун ҳосил бўлган системанинг чексиз кўп турлича ечимлари шу йўл билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, бу ҳолда чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўламиз.

$x_1, x_2, \dots, x_k$ номаълумларнинг $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ озод номаълумлар қатнашган ечимига ***умумий ечим*** деб аталади, чунки бошқа чексиз кўп ечимлар $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ озод номаълумларга ихтиёрий қийматлар мажмуини бериш билан олинади.

Тенгламалар системасини ечишга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Ечиш. Система коэффициентларидан матрица тузамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг ранги 2 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

бўлиб,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

бўлади. Кенгайтирилган матрица

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 12 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

нинг ранги 3 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A) = 2,\ r(B) = 3$ бўлиб, $r(A) \neq r(B)$ бўлади, демак исботланган теоремага асосан система биргаликда эмас.

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \end{cases}$$

Ечиш. Система коэффициентларидан тузилган матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

бўлиб, $r(A) = 2$, чунки $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, лекин 3-тартибли минори йўқ. Кенгайтирилган матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = -144 + 40 - 14 + 112 - 24 + 30 = 0$$

.

Биринчи иккита тенгламанинг чап қисмлари чизиқли эркли, бу иккита тенгламалар системасини ечиб, номаълумлар учун ушбу қийматларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Бу ечим 3-тенгламани ҳам қаноатлантиради.

3-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Ечиш. Система матрицасининг ранги $r(A)=2$, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

бўлганлигини, яъни кенгайтирилган матрицанинг барча 3-тартибли минорлари 0 га тенг бўлганлиги учун, унинг ҳам ранги $r(B)=2$. Шундай қилиб, система биргаликда ва $r(A)=r(B)=k=2<4$ номаълумлар сонидан кичик, бу ҳолда биринчи ва учинчи тенгламалар системасини олайлик, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3-10=-7 \neq 0;$$

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1, \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1 \end{cases}$$

бундан

$$\begin{cases} x_1+5x_2=1-4x_3-3x_4, \\ 5x_1+3x_2=1-8x_3-x_4 \end{cases}$$

бўлиб, тенгламалар системасини x_1, x_2 асосий номаълумларга нисбатан ечсак:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-4x_3-3x_4 & 5 \\ 1-8x_3-x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2}{7} - 4x_3 + \frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4x_3-3x_4 \\ 5 & 1-8x_3-x_4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}x_3 - 2x_4$$

бўлади. Озод номаълумларни $x_3=C_1,\ x_4=C_2$ деб

$$x_1 = \frac{2}{7} - 4C_1 + \frac{4}{7}C_2,$$
$$x_2 = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}C_1 + 2C_2$$

умумий ечимни оламиз. C_1 ва C_2 ларга хар хил қийматлар бериб, масалан, $C_1 = 2,\ C_2 = 3$ бўлганда $x_1 = -6,\ x_2 = \frac{22}{7},\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,$ яъни $\left(-6, \frac{22}{7}, 2, 3\right)$ ечимни, $C_1 = 0, C_2 = -3$ бўлганда $x_1 = -\frac{10}{7},\ x_2 = -\frac{38}{7},\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = -3,$ яъни $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{38}{7},\ 0, -3\right)$ ва ҳоказо чексиз кўп ечимларни олиш мумкин.

4.Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси. (1) тенгламалар системасида озод ҳадлар 0 лардан иборат бўлса, бундай системага ***бир жинсли система*** дейилади, яьни

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

бўлиб, биржинсли система доимо биргаликда.

Бир жинсли система 0 дан фарқли ечимга эгалигини аниқлаш муҳимдир.

2-теорема. Бир жинсли система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун система матрицасининг ранги номаълумлар сонидан кичик бўлиши зарур ва етарлидир.

1-натижа. Бир жинсли системада номаълумлар сони тенгламалар сонидан катта бўлса, система 0 дан фарқли ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин.

2-натижа. n номаълумли n та бир жинсли тенгламалар системаси 0 дан фарқли ечимларга эга бўлиши учун системанинг детерминанти 0 га тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Система матрицасини ва унинг кенгайтирилган матрицасини тузамиз:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix} \text{ ва } \quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&2&1&0\\1&1&-1&1&3\end{pmatrix}$$

B матрицада охирги устунни сақлаб элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&2&1&0\\1&1&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&-2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

0 лардан иборат сатрни ташлаб

$$B_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. Бундай алмаштиришларда B матрица рангини аниқлаш билан A матрицанинг ҳам рангини аниқлаш имконияти туғилади. Шундай қилиб, B матрицанинг ранги 2 га тенг, A матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг. Демак, берилган система биргаликда бўлади. Маълум бўлдики, учинчи тенглама биринчи иккита тенгламаларнинг чизиқли комбинациясидан иборат. Шунинг учун учинчи тенгламани чиқариб

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

тўрт номаълумли иккита тенгламалар системасига эга бўламиз. Иккита номаълумни қолганлари орқали ифодалаймиз. Маълумки, x_1, x_2 номаълумларга нисбатан ечиш мумкин эмас, чунки уларнинг коэффициентларидан тузилган детерминант 0 га тенг. Системани x_2, x_3 ларга нисбатан ечиш мумкин, яъни

$$\begin{cases}x_2+x_3=1-x_1-x_4,\\x_2+2x_3=-x_1-x_4\end{cases}$$

x_2, x_3 ларни ***<u>бош (базис) ўзгарувчилар</u>***, x_1, x_4 лар эса озод(эркин) ўзгарувчилар бўлади. Бу системани ечиб $x_3=-1,\ x_2=2-x_1-x_4$ ни аниқлаймиз. x_1, x_4 ўзгарувчиларга кетма-кет қийматлар бериб, чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўламиз. Масалан, $x_1=0,\ \ x_4=1$ бўлганда $x_1=0,\ x_2=1\ ,\ x_3=-1,\ x_4=1$ ечим ҳосил бўлади ва ҳоказо. Текшириб кўриш мумкинки, бу ечим берилган системани қаноатлантиради.

5-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

бир жинсли тенгламалар системасини ечинг.
Ечиш. Система матрицасининг рангини топамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Биринчи учта сатрини қўшиб, тўртинчи сатридан айирамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ҳосил бўлган матрицанинг рангги 3 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 .$$

Шундай килиб, A матрицанинг ранги 3 га тенг, номаълумлар сони тўртта, 2-теоремага асосан система 0 дан фарқли ечимга эга. Берилган система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

системага тенг кучли. x_1, x_2, x_3 номаълумлар коэффициентидан тузилган детерминант 0 дан фарқли бўлгани учун x_4 ни ўнг томонга ўтказиб тенгламалар системасини ечамиз.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Крамер формулаларига асосан:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4,\ x_2 = \frac{43}{21}x_4,\ x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Бу ечимни берилган системага бевосита қўйиб ечимнинг тўғрилигига ишониш мумкин**.**

5. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг энг кўп ишлатиладиган усулларидан бири Гаусс усулидир. Унинг моҳиятини уч номаълумли учта чизиқли тенглама учун кўрсатамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Бунда $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини a_{11} га бўламиз ва уни $-a_{21}$, $-a_{31}$ га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўшамиз. Бу ҳолда қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \quad \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ \quad \alpha_{23}x_1 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

бу ерда $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{11}, \quad \alpha_{23} = a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{21}}$ ва ҳ.к.

$a_{11} = 0$ бўлиб, бошқа тенгламаларда номаьлумлар олдидаги коэффициентлари орасида нўлдан фарқлилари бўлса, у ҳолда бу тенгламалардан бирини биринчи тенгламанинг ўрни билан алмаштирамиз, кейин юқоридаги амалларни бажарамиз. Бу биринчи қадам бўлади. Демак, биринчи қадамда биринчи тенгламада x_1 - номаълум қолиб, қолган тенгламалардан кетма-кет x_1 - ***номаълумни йўқотамиз***. Иккинчи қадамда биринчи тенглама ўз ўрнида қолиб, иккинчи ва учинчи тенглама учун юқоридаги амалларни бажарамиз, яъни иккинчи тенгламада x_2 номаълумни қолдириб, учинчи тенгламадан уни йўқотамиз. Шундай қилиб, бу амаллар натижасида (1) тенгламалар системаси

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \alpha'_{13}x_3 = \beta'_1, \\ \qquad \alpha'_{22}x_2 + \alpha'_{23}x_3 = \beta'_2, \\ \qquad\qquad \alpha'_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases} \tag{2}$$

кўринишга келади. Энди ҳамма номаълумларни сўнгги тенгламадан бошлаб ***тескари қадам*** билан топиш қолди.

6-мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламани (-4) ва (-3) га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўшамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9 - 4\cdot 6, \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10 - 3\cdot 6 \end{cases}$$

яъни

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 7x_2 - 8x_3 = -15 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \end{array} \right\}$$

бўлади.

Шу билан биринчи қадам тугади.

Иккинчи қадамда, биринчи тенгламани ўз ўрнида қолдириб, иккинчи тенгламани (-7) га бўлиб ёзамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \dfrac{8}{7}x_3 = \dfrac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан x_2 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун иккинчи тенгламани (-1) га кўпайтириб учинчи тенгламага қўшамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7}. \end{cases}$$

Охирги тенгламадан $x_3 = 1$ ни топамиз. $x_3 = 1$ ни иккинчи тенгламага қўйсак, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ ёки $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1, \quad x_2 = 1$ бўлади. $x_2 = 1, \quad x_3 = 1$ ларни биринчи тенгламага қуйсак x_1=1 бўлади. Шундай қилиб, $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$.

<u>Гаусс усулининг хусусияти</u> шундан иборатки, унда системанинг биргаликда масаласини олдиндан аниқлаб олиш талаб этилмайди ва:

1) система биргаликда ва аниқ бўлса, у ҳолда усул ягона ечимга олиб келади;

2) система ***<u>биргаликда ва аниқмас бўлса</u>,*** бу ҳолда бирор қадамда иккита айнан тенг тенглама ҳосил бўлади ва шундай қилиб, тенгламалар сони номаълумлар сонидан битта кам бўлиб қолади;

3) система ***<u>биргаликда бўлмаса</u>,*** у ҳолда бирор қадамда чиқарилаётган (йўқотилаётган) номаълум билан биргаликда қолган барча номаълумлар ҳам йўқотилади, ўнг томонда эса нолдан фарқли озод ҳад қолади.

Жардоно-Гаусс модификациялашган усули. Маълумки, Гаусс усули билан чизиқли тенгламалар системасини ечишда тенгламалар системаси учбурчак кўринишдаги системага келтирилади. Номаълумларнинг қиймати бевосита топиладиган, яъни тескари қадам билан номаълумлар қийматини кетма-кет топишга ҳожат қолмайдиган усулни қараймиз. Бу усулни ушбу чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топиш билан ифодалаймиз.

7-мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимини топинг.

Ечиш. 1-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб системанинг қолган тенгламаларидан x_1 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 1- тенгламани кетма-кет (-4), (-1) га кўпайтириб мос равишда 3,4-тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшиб ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Энди 2–тенгламани ўзгаришсиз қолдириб, бошқа тенгламалардан x_2 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 2 тенгламани (-2), 8,1 ларга кетма-кет кўпайтириб, мос равишда 1,3,4 – тенгламаларга ҳадма –ҳад қўшамиз ва ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Эндиги қадамда 3-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб бошқа тенгламалардан x_3 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 3- тенгламани кетма-кет (5/21), (-3/21) (-2/21) ларга кўпайтириб мос равишда 1,2,4 – тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшсак, ушбу тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21}x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21}x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Охирги қадамда 4-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб бошқа тенгламалардан, x_4 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 4 – тенгламани кетма-кет $(-\frac{21}{3}), (\frac{21}{6}), (-9)$ ларга кўпайтириб, мос равишда 1,2,3- тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшамиз натижада, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Охирги системадан $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$ ягона ечимни оламиз. Юқоридаги тенгламалар системасини ечишда x_1, x_2,x_3, x_4 номаълумларни кетма-кет йўқотдик, ҳисоблашларни ихчамлаштириш учун ҳар сафар коэффициенти 1 га тенг бўлган номаълумни чиқариш ҳам мумкин эди.

У усулда ҳам Гаусс усулининг хусусиятлари ўз кучида қолади, яъни тенгламалар системаси аниқ бўлса, бу усул ягона ечимга, тенгламалар системаси биргиликда лекин аниқ бўлмаса бирор қадамда 0=0 тенглик ҳосил бўлиб чексиз кўп ечимга олиб келади. Тенгламалар системаси биргаликда бўлмаса, бирор қадамда тенгликларнинг бирининг чап томонида 0 ўнг томонида 0 дан фарқли сон бўлиб, система ечимга эга бўлмайди.

Такрорлаш учун саволлар

1. Чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти деб нимага айтилади?
2. Чизиқли тенгламалар системаси қачон ягона ечимга эга бўлади?
3. Чизиқли тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлса, у қандай топилади?
4. Крамер формулалари нимадан иборат?
5. Кронекер-Капелли теоремасининг шарти нимадан иборат?
6. Қандай матрицага кенгайтирилган матрица дейилади?
7. Бир жинсли система деб қандай системага айтилади?
8. Бир жинсли система қандай ҳолда биргаликда?
9. Бир жинсли система нўлдан фарқли ечимга эга бўлиши учун қандай шарт бажарилиши керак?
10. Гаусс усулининг моҳияти нима?

Мустақил ечиш учун топшириклар

1. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 4x + y &= 5 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини Крамер қоидаси билан ечинг.

2.Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 + 13 &= 0 \\ 5x_1 - 19x_2 - 14 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини ечинг.

3. Ушбу

$$1)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}, \qquad 2)\ \begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини Крамер формулалари ёрдамида ечинг.

4. Қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасини ечинг:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} ; \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

4-мавзу. Текисликда аналитик геометрия. Координатлар усули

Режа:

1. **Геометриянинг ривожланиш тарихидан.**
2. **Координатлар усули ва содда масалалар.**

Таянч ибора ва тушунчалар

Геометрия ривожланиш тарихи, аналитик геометрия, координатлар усули ва содда(асосий) масалалар, координатлар, икки нуқта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш, координатлар орқали учбурчак юзини топиш.

1. **<u>Геометриянинг ривожланиш тарихидан.</u>** Геометрия фани қадимий тарихга эга бўлиб, унга оид бошланғич тушунчалар бундан 4000 йил муқаддам Миср ва Бобилда вужудга келган. Геометрик билимларнинг вужудга келиши одамларнинг амалий фаолияти билан боғлиқ. Бу кўпгина геометрик фигураларнинг номларида ўз аксини топган. Масалан, трапеция номи юнонча trapezion - сўзидан олинган бўлиб, «столча» ни билдиради. «Чизиқ» термини лотинча limem - «зиғир ип» сўзидан ҳосил бўлган.

Қадимдаёқ геометрия аксиомалар системасига асосан тузилган қатъий мантиқий фанга айланган. У узлуксиз ривожланиб янги теоремалар, ғоялар ва усуллар билан бойиб борган.

Эрамиздан аввалги III асрда юнон олими Евклид «Негизлар» номли асарини ёзади. Евклид шу давргача бўлган геометрик билимларни жамлади ва бу фаннинг тугалланган аксиоматик баёнини беришга ҳаракат қилди. Евклиддан сўнг яшаган олимлар унинг «Негизлар»ига баъзи мавзуларни қўшдилар, аниқликлар киритдилар.

Геометриянинг ҳозирги замон физикаси билан боғланишини кузатиш ғоят қизиқарли. Кўпинча математикани бойитган янги тушунчалар физика ҳамда химия ва табиатшуносликнинг бошқа бўлимларидан келади. Масалан, вектор механикадан олинганлиги мисол бўлаолади. Геометриянинг келгуси ривожланишида эса математиканинг ички талаби ва ўзига хос мантиқий ривожланиши натижасида унинг ичида вужудга келган, янги геометрик тушунчалар янги замонавий физикани яратишга йўл очди. Масалан, Лобачевский геометрияси нисбийлик назариясини очишга асос бўлиб хизмат қилди.

Ҳозирги замон геометрияси жуда кўп йўналишларга эга. Улардан бири геометрияни сонлар назарияси билан, иккинчиси квант физикаси билан, учинчиси эса математик таҳлил билан яқинлаштиради. Ҳозирги замон математикаси бўлимлари шундайки унда геометрия кўпроқми, алгебрами ёки таҳлил (анализ) айтиш қийин.

Геометриянинг ривожланишида Марказий Осиёдан чиққан математиклар Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий, Абу Райҳон Беруний, Абу Али ибн Сино, Абдураҳмон ал-Хазиний, Абул Вафо Бузмоний, Умар Хайём, Мирзо Улуғбек, Ғиёсиддин ал-Коший ва бошқаларнинг хизмати каттадир.

XVII асрда француз математиги ва философи Рене Декарт ишлари туфайли, бутун математикани, хусусан геометрияни инқилобий қайта қурган координатлар усули (методи) вужудга келди. Алгебраик тенглик (тенгсизлик) ларни геометрик образ (график) лар орқали талқин қилиш ва аксинча геометрик масалаларни ечишни аналитик, формулалар, тенгламалар системалари ёрдамида излаш имкониятини пайдо қилди. Математика фанининг янги тармоғи ***аналитик геометрия*** **вужудга келди. Аналитик геометриянинг моҳияти, геометрик обьектларга унинг алгебраик (аналитик) ифодасини мос қўйиб, уларнинг хусусиятларини ўрганишни, унга мос алгебраик ифодаларни текшириш орқали амалга оширилади.**

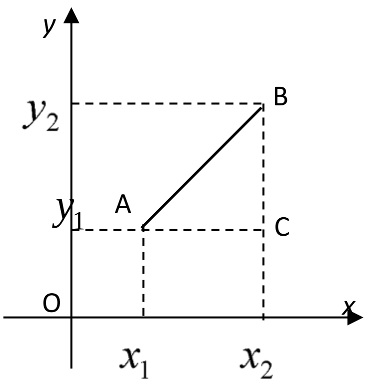
2. Координатлар усули ва содда масалалар. Маълумки, ўзаро перпендикуляр бўлган горизонтал ва вертикал сонлар ўқи Декарт тўғри бурчакли координатлар системасини ташкил қилади. Бу система орқали текисликдаги нуқта билан бир жуфт ҳақиқий сон ўртасида бир қийматли мослик ўрнатилади. Текисликда нуқта $A(x,y)$ билан белгиланади. x,y сонларга унинг ***координатлари*** дейилади. ,,Нуқта берилган" деган ибора унинг координатларининг берилганлигини, ,,Нуқтани топинг" деган ибора эса, шу координатларни топишни тушунилади. Координатлар системаси орқали ўрнатилган бундай мосликка **координатлар усули** дейилади.

Бу усулни геометриянинг **содда** ***масалаларини ечишга*** қўллаймиз.

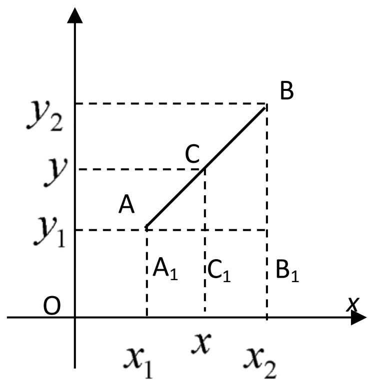
1) Текисликда берилган $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,x_2)$ нуқталар орасидаги масофани топиш талаб этилсин. Маълумки, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$. ABC тўғри бурчакли учбурчакдан, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, шундай қилиб,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

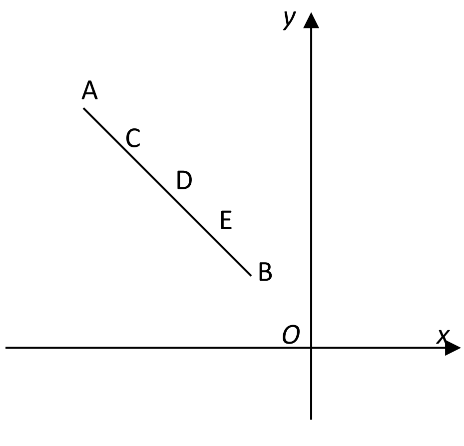
бўлади. (1) формулага текисликда берилган иккита нуқта орасидаги масофани топиш формуласи дейилади (1-чизма).



1-чизма



2-чизма



3-чизма

2) AB кесма берилган бўлиб, унинг учлари $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ бўлсин. AB кесмани $AC:BC=\lambda$ нисбатда бўлувчи $C(x,y)$ нуқтани топиш масаласи қўйилган бўлсин. Њрта мактаб геометриясидан маълумки (2-чизма),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda,$$

ёки

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

бњлиб,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$$

бњлганлиги учун,

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda, \qquad x - x_1 = \lambda\left(x_2 - x\right); \qquad x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

бњлади. Худди шундай ,

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Демак, C нуқтанинг координатлари учун

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (2)$$

формулани ҳосил қилдик. (2) формулага AB кесмани λ нисбатда бўлувчи $C(x, y)$ нуқтани топиш формуласи дейилади. Хусусий ҳолда $C(x;\ y)$ нукта AB кесмани тенг иккига бўлса, у холда

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1 \text{ бўлиб,} \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

кесмани тенг иккига бўлиш формуласи келиб чиқади.

3) Тўгри бурчакли координатлар системасида учлари $A(x_1;\, y_1),\ B(x_2;\, y_2),\quad C(x_3;\, y_3)$ нукталарда бўлган учбурчак юзи куйидаги формула оркали топилади:

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) + \left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right) + \left(x_3 y_1 - x_1 y_3\right)\right] \qquad (3)$$

1-м***исол***. $M(5;\,3)$ ва $N(2;\,-1)$ нукталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Шартга кўра: $x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ x_2 = 2,\ y_2 = -1$. Буларни (1) формулага кўйсак:

$$MN = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

бњлади.

2-**мисол.** Текисликда $A(5;3)$, $B(2;\,1)$ нукталар берилган. AB кесмани $\frac{AC}{CB} = \lambda = 0{,}2$ нисбатда бўлувчи $C(x;\,y)$ нуктанинг координатларини топинг.

Ечиш. Шартга кўра $x_1 = 5,\ x_2 = 2,\ y_1 = 3,\ y_2 = 1,\ \lambda = 0{,}2$.
(2) формулага асосан:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{5 + 0{,}2\cdot 2}{1+0{,}2} = \frac{5+0{,}4}{1{,}2} = \frac{5{,}4}{1{,}2} = \frac{54}{12} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{3 + 0{,}2\cdot 1}{1+0{,}2} = \frac{3+0{,}2}{1{,}2} = \frac{3{,}2}{1{,}2} = \frac{32}{12} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Шундай килиб, $C\left(4{,}5;\frac{8}{3}\right)$ бњлади.

3-м***исол.*** Учлари $A(2;\,0), B(5;\,3)$ ва $C(2;\,6)$ нукталарда бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

Ечиш. (3) формулага кўра $x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 3,\ y_3 = 6$ бњлганлиги учун,

$$S = \frac{1}{2}\left[(2\cdot 3 - 5\cdot 0) + (5\cdot 6 - 3\cdot 2) + (0\cdot 2 - 2\cdot 6)\right] = \frac{1}{2}(6 + 24 - 12) = \frac{1}{2}\cdot 18 = 9$$

бњлади.

4-мисол. $A(-6;7)$ ва $B(-2;3)$ нуқталар берилган. AB кесма C, D, E нуқталар орқали 4 та тенг қисмларга ажратилган. C, D, E бўлиниш нуқталарини топинг (3-чизма).

Ечиш: Маълумки $\frac{AC}{CB}=\frac{1}{3}$, $\frac{AD}{DB}=1$, $\frac{AE}{EB}=3$.

C нуқтанинг координатларини (2) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$x_c=\frac{-6+\frac{1}{3}(-2)}{1+\frac{1}{3}}=-5, \quad y_c=\frac{-6+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}}=6$$

Демак, $C(-5,\ 6)$. (D ва E нуқталарни топиш ўқувчига ҳавола этилади).

Такрорлаш учун саволлар

1. Геометрия қачон пайдо бўлган ва қандай тарихга эга?
2. Геометрик билимларнинг келиб чиқиши нима билан боғлиқ?
3. Геометрия табиатшуносликнинг бошқа бўлимлари билан қандай боғланган?
4. Геометриянинг ривожида катта ҳисса қўшган Марказий Осиёлик олимлардан кимларни биласиз?
5. Координатлар усули нима?
6. Аналитик геометрия нимани ўрганади?
7. Берилган икки нуқта орасидаги масофа кандай топилади?
8. Кесмани берилган нисбатда бўлиш кандай бажарилади?
9. Учбурчакнинг учлари берилган бњлса, унинг юзи кандай топилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Координаталар бошидан $A(-3;\ 4)$ нуқтагача бўлган масофани топинг.

2. Учлари $A(4;\ 3)$, $B(0;\ 0)$ ва $C\ (10,\ -5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.

3. OY ўқида $A\ (4;\ 5)$ ва $B\ (3;\ 2)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган $C\,(x;\ \ y)$ нуқтани топинг.

4. OX ўқида $A(0;\ 5)$ ва $B\,(-3;\ -2)$ нуқталардан тенг узоқликда бўлган нуқтани топинг.

5. $A(5.-4)$ нуқта ва AB кесманинг ўртаси $C\ (0;\ -3)$ берилган. Кесманинг иккинчи $B(x,y)$ учини топинг.

6. Учлари $A\ (3;\ 4),\ B(7;\ 7),\ \ C\ (4;\ 3)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг тенг ёнли эканлигини кўрсатинг.

7. $A\ (2;\ 8)$ ва $B\ (6;\ -4)$ нуқталар билан чегараланган AB кесма $C,\ D,\ E$ нуқталар билан 4 та тенг бўлакларга бўлинган. $C,\ D,\ ва\ \ E$ нуқталарни топинг.

8. AB кесма $C\,(-1;\ -2)$ ва $D\ (2;\ 0)$ нуқталар орқали тенг уч бўлакларга бўлинган. A ва B нуқталарни топинг.

5-мавзу. Текисликда тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари

Режа

1. Чизиқ ва унинг тенгламаси ҳақида.

2. Тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари:

1). Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.

2). Берилган битта ва иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари.

3). Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.

4). Тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси.

5). Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси.

Таянч ибора ва тушунчалар

Текисликда чизиқ ва унинг тенгламаси, бурчак коэффициент, тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси, тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси, тўғри чизиқнинг ўқлардан ажратган кесмаларга нисбатан тенгламаси, берилган битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тенгламаси, берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси, тугри чизикнинг нормали, тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси.

1. Чизиқ ва унинг тенгламаси ҳақида. Аналитик геометриянинг энг муҳим тушунчаларидан бири, **чизиқ тенгламаси** тушунчасидир. Текисликда тўғри бурчакли координатлар системасида L чизиқ берилган бўлсин(4-чизма).

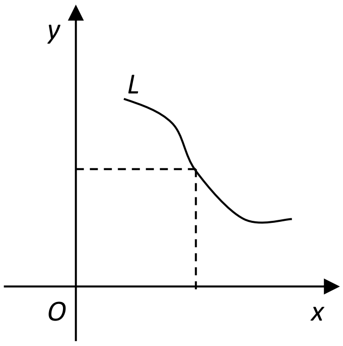
Таъриф. L чизиқда ётувчи исталган $M(x,y)$ нуқтанинг координатлари

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

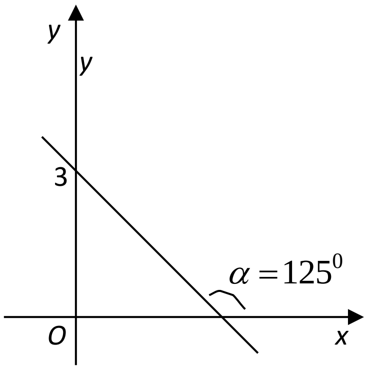
тенгламани қаноатлантириб, унда ётмаган нуқталарнинг координатлари қаноатлантирмаса, бу тенглама L чизиқнинг тенгламаси дейилади. Бундан L чизиқ, координатлари (1) тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўпламидан иборат эканлиги келиб чиқади. Чизиқнинг тенгламасини тузиш деганда унга тегишли ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтанинг координатлари орасидаги муносабатни(боғланишни) тенглама кўринишида ифодалашдан иборат. Топилган чизиқ тенгламаси учун: чизиқдаги исталган нуқтанинг координатлари уни қаноатлантиради ва аксинча, нуқтанинг координатлари тенгламани қаноатлантирса, бу нуқта шу чизиқда ётади.

2. Тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари. Тўғри чизиқ тушунчаси аналитик геометриянинг асосий тушунчаларидан биридир. Қуйида ҳар хил ҳолатларда тўғри чизиқнинг аналитик ифодаларини (тенгламаларини) келтириб чиқарамиз ва улар ёрдамида тўғри чизиқнинг текисликдаги вазиятларини ўрганамиз.

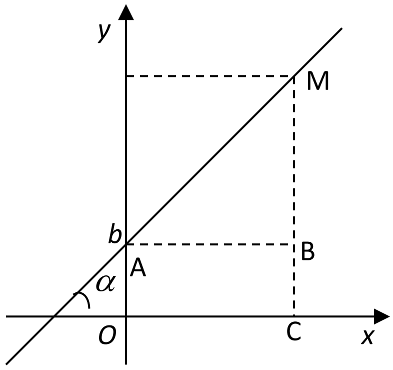
1) *Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.* Тўғри чизиқнинг OX ўқи мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги α ва тўғри чизиқнинг ординатлар ўқидан ажратган кесмасининг катталиги b берилганда, унинг текисликдаги ҳолати аниқ бўлади. Масалан, $b=3$, $\alpha=125^0$ бўлса, унинг ҳолати аниқ бўлади (5-чизма).



4-чизма



5-чизма



6-чизма

Юқоридаги микдорлар берилганда тўғри чизиқнинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. $M(x, y)$ тўғри чизиққа тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин (6-чизма). AMB тўғри бурчакли учбурчакдан

$$\frac{BM}{AB} = tg\alpha, \text{ бундан } BM = ABtg\alpha$$

6–чизмадан $y = BC + BM$; ёки $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ бўлганлиги учун $y = xtg\alpha + b$ бўлади. $tg\alpha$ тўғри чизиқнинг **бурчак коэффициенти** дейилади ва $tg\alpha = k$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

муносабат келиб чиқади. Бунга тўғри чизиқнинг **бурчак коэффициентли тенгламаси** дейилади. $b = 0$ бўлса, тўғри чизиқ координатлар бошидан ўтиб, тенгламаси $y = kx$ бўлади. $k = 1$ бўлса, $y = x$ бўлиб, бу биринчи координатлар бурчагининг биссектрисаси бўлади.

1-мисол. OX ўқи билан 120^0 бурчак ҳосил қилувчи ва OY ўқини $A(0;\ 3)$ нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Шартга кўра, тўғри чизиқ OY ўқини $A(0;\ 3)$ нуқтада кесиб ўтади, демак $b = 3$. Бу нуқтадан OX ўқига параллел чизиқ ўтказамиз, ҳамда шу тўғри чизиқ билан 120^0 бурчак ҳосил қилувчи томон, ясалиши керак бўлган тўғри чизиқ бўлади .

Энди шу тўғри чизиқ тенгламасини ёзамиз. Бу ҳолда $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ бўлганлиги учун, $y = -\sqrt{3}\,x + 3$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси бўлади.

<u>2) Берилган битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси.</u> Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. $A(x_1, x_1)$, $B(x_2; y_2)$ нуқталар берилган булсин.

$$y = kx + b \tag{3}$$

тўғри чизиқ A нуқтадан ўтсин. Бу ҳолда A нуқтанинг координатлари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради, яъни $y_1 = kx_1 + b$ бўлади. (3) тенгликдан охирги тенгликни айирсак:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4}$$

ҳосил бўлади. (4) тенгламага берилган **<u>битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг</u> тенгламаси** дейилади.

Тўғри чизиқ $B(x_2; y_2)$ иккинчи нуқтадан ҳам ўтса,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

бўлиб,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

бўлади. k нинг юкоридаги қийматини (4)га қўйиб,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (5) **<u>берилган икки</u>** $A(x_1, y_1)$ **ва** $B(x_2, y_2)$ **нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси** дейилади.

2-мисол. Бирор хил маҳсулотдан 100 донасини ишлаб чиқаришга 300 минг сўм харажат қилинсин. 500 донаси учун эса харажат 1300 минг сўм бўлсин. Харажат функцияси чизиқли (тўғри чизиқ) бўлса, шу маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш харажатини топинг.

Ечиш. Масала шарти бўйича $A(100\,,\ 300)$ ва $B=(500\,,\ 1300)$ нуқталар берилган. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасига асосан,

$$\frac{y-300}{1300-300}=\frac{x-100}{500-100}\text{, ёки } y=2{,}5x+50$$

тенглик ўринли бўлади. Охирги тенгламадан $x=400$ учун, $y=1050$ эканлигини топамиз. Демак, маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш учун 1050 минг сўм харажат қилинади.

<u>3). Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.</u> Икки номаълумли

$$Ax+By+C=0$$

тенгламани қараймиз.

Бундан, $By=-Ax-C$, $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$ бўлиб, $k=-\dfrac{A}{B}$, $b=-\dfrac{C}{B}$ билан белгиласак, $y=kx+b$ тенглама ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $Ax+By+C=0$ тенглама ҳам тўғри чизиқ тенгламаси эканлиги келиб чиқади.

$$Ax+By+C=0 \tag{6}$$

тенгламага тўғри чизиқнинг **<u>умумий тенгламаси</u>** дейилади.

Тўғри чизиқ умумий тенгламасининг хусусий ҳоллари: 1) $A\neq 0$, $B\neq 0, C=0$ бўлса, $Ax+By=0$ бўлиб, тўғри чизиқ координатлар бошидан ўтади, чунки $O(0;0)$ нуқтанинг координатлари тенгламани қаноатлантиради;

2) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, бўлса, $y=-\dfrac{C}{B}$ бўлиб, OY ўқдан $-\dfrac{C}{B}$ кесма ажратиб, OX ўқига параллел тўғри чизиқ тенламаси бўлади;

3) $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ бўлса, $x=-\dfrac{C}{A}$ бўлиб, OX ўқдан $-\dfrac{C}{A}$ кесма ажратиб , OY ўқига паралллел тўғри чизиқ тенгламаси бўлади;

4) $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$ бўлса, $y=0$ бўлиб, OX ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

5) $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ бўлса, $x=0$ бўлиб, OY ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

6) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ бўлса, $C=0$ бўлиб, ўзгармас миқдор, бир пайтда 0 дан фарқли ҳамда 0 га тенг келиб чиқади, бундай бўлиши мумкин эмас.

3-мисол. $x-2y+6=0$ тўғри чизиқ учун k ва b параметрларни топинг.

Ечиш: Бунинг учун берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз: $2y=x+6$, $y=1/2\cdot x+3$ бундан (2) тенглама билан таққослаб $k=1/2$, $b=3$, эканлигини топамиз. Шундай қилиб, тўғри чизиқ умумий тенгламасини бурчак коэффициентли тенгламага келтириб k ва b параметрларни топдик.

4). <u>Тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси.</u> Тўғри чизиқ координат ўқларидан мос равишда a ва b кесмалар ажратиб ўтсин(7-чизма). Тўғри чизиқ $A(a;\,0)$ ва $B(0;\,b)$ нуқталардан ўтади. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасига асосан

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}\,,\qquad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}\,,\qquad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

ёки

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (7)$$

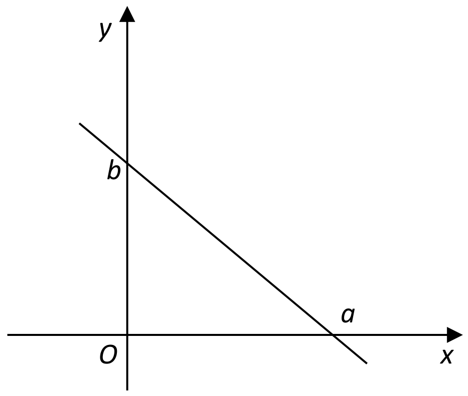
тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламага тўғри чизиқнинг **<u>кесмаларга нисбатан</u> тенгламаси** дейилади.

4-мисол. $3x+5y-15=0$ тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

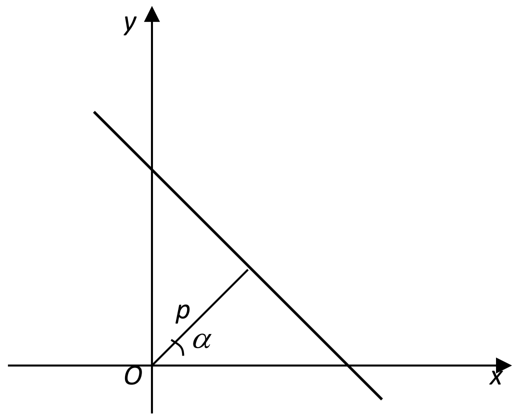
Ечиш. $3x+5y-15=0$ тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини (7) кўринишдаги тенгламага келтирамиз.

$$3x+5y=15, \quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1 \quad \textit{ёки} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

бу тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси бўлади. Энди координат ўқларидан мос равишда 5 ва 3 кесмаларни ажратиб, ажратилган кесмалар охиридан ясалиши керак булган тўғри чизиқни утказамиз.



7- чизма.



8- чизма.

<u>5). Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси.</u> Тўғри чизиққа координат бошидан туширилган перпендикулярнинг (нормал) узунлиги ва унинг OX ўқи мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги α берилганда тўғри чизиқнинг текисликдаги ҳолати аниқ бўлади (8-чизма) ва унинг тенгламаси

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{8}$$

бўлади. (8) тенгламага тўғри чизиқнинг **<u>нормал тенгламаси</u>** дейилади. Маълумки, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Нормал тенгламада шу шарт бажарилиши керак. Тўғри чизиқ умумий тенгламасини нормал тенглама келтириш учун

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

нормалловчи кўпайтувчини ҳисоблаб, уни

$$Ax+By+C=0$$

тенгламага кўпайтирамиз. Бу ҳолда

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

нормал тенглама ҳосил бўлади. Нормалловчи кўпайтувчининг ишораси озод ҳад ишорасига тескари олинади.

5-мисол. Нормалнинг узунлиги $p=3$ ва унинг OX ўқи билан ҳосил қилган бурчаги 30^0 бўлса, тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Шартга кўра нормал OX ўқи билан 30^0 ли бурчак ташкил этади. Бу бурчакни ясаймиз ва унинг қўзғалувчи томони нормал тўғри чизиқ бўлади. Шу тўғри чизиқда $p=3$ кесма ажратиб унинг охиридан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу ясалиши керак бўлган тўғри чизиқ бўлади . Энди тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзамиз. Шартга кўра нормалнинг узунлиги ва унинг OX ўқи билан ҳосил қилган бурчаги берилган, бу ҳолда маълумки, тўғри чизиқнинг (8) нормал тенгламасини ёзамиз. $p=3$, $\alpha=30^0$ бўлганлиги учун

$$x\cos 30^0+y\sin 30^0-3=0 \qquad \text{ёки} \qquad \sqrt{3}/2\cdot x+1/2\cdot y-3=0$$

Натижада $\sqrt{3}\,x+y-6=0$ тенглама ҳосил бўлади.

6-мисол.. $4x-3y-5=0$ тўғри чизиқ тенгламасини нормал тенгламага келтиринг.

Ечиш. Нормалловчи кўпайтувчини топамиз: $M=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$ булади.

Берилган тенгламани $M=1/5$ кўпайтириб, $4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси, чунки

$$(\frac{4}{5})^2+(-\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1, \qquad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$$ эди.

Такрорлаш учун саволлар

1. Чизиқнинг тенгламаси деганда нима тушунилади?

2. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси қандай ёзилади?

3. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти деб нимага айтилади?

4. Берилган битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси қандай?

5. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қандай?

6. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий холлари нималардан иборат?

7. Тўғри чизиқнинг координат ўқларидан ажратган кесмаларига нисбатан тенгламаси қандай ёзилади?

8. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси қандай?

9. Нормалнинг узунлиги нима?

10. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал тенгламага қандай қилиб келтирилади?

11. Тўғри чизиқнинг тенгламаси нормал кўринишдалигини қандай текширилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. OY ўқидан $b=4$ кесама ажратиб OX ўқи билан 135^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

2. OY ўқидан $b=-2$ кесма ажратиб OX ўқи билан 60^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқни ясанг ва унинг тенгламасини ёзинг.

3. Координатлар бошидан ўтиб, OX ўқи билан: 1). 45^0, 2). 120^0, 3). 60^0, 4). 90^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқларни ясанг ва уларнинг тенгламаларини ёзинг.

4. 1) $3x+5y+15=0$; 2) $3x+2y=0$; 3) $y=-2$; 4) $x/4+y/4=1$ тўғри чизиқлар учун k ва b параметрларни аниқланг.

5. 1) $4x+3y-12=0$; 2) $4x+3y=0$; 3) $2x-7=0$; 4) $2y+7=0$ тўғри чизиқларнинг кесмаларга нисбатан тенгламаларини ёзинг ва уларни ясанг.

6-мавзу. Тўғри чизиқларга доир асосий масалалар

Режа

1. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак.

2. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари.

3. Иккита тўғри чизиқнинг кесишуви.

4. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа.

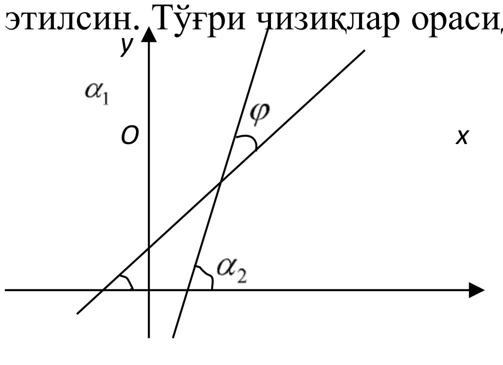
Таянч ибора ва тушунчалар

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак, тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги ва параллеллиги, иккита тўғри чизиқларнинг кесишуви, берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофа, иккита параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа.

1. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Иккита

$$y=k_1x+b_1,$$
$$y=k_2x+b_2$$

тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Бунда $k_1=tg\alpha$, $k_2=tg\alpha_2$ бу тўғри чизиқлар параллел бўлмасин ва улар орасидаги бурчакни топиш талаб этилсин. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни φ билан белгилаймиз.



9-чизма.

Яъни ,$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$(9-чизма) . Маълумки,

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

ёки

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (1)$$

булади. (1) икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакнинг тангенсини топиш формуласи деб аталади.

1-мисол. $y = 3x + 1$, $y = 2x + 5$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. (1) формулага асосан,

$\varphi = \frac{3-2}{1+2\cdot 3} = \frac{1}{7}$ булиб, $\varphi = arctg\,{}^1\!/_7 \approx arctg0.14 \approx 8^0$,$\varphi \approx 8^0$

булади.

2. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари

Тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, улар орасидаги бурчак

$\varphi = 90^0$ бўлиб, $tg90^0 = \infty$ ёки $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1.k_2 = 0$

келиб чиқади, бундан

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

бўлади, бунга икки тўғри чизиқнинг **<u>перпендикулярлик</u> шарти** дейилади.

Тўғри чизиқлар параллел бўлса,$\varphi = 0$ бўлиб, $tg0^0 = 0$, ,ёки

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0, \quad k_2 - k_1 = 0, \quad k_1 = k_2$$

келиб чиқади.

$$k_1 = k_2$$

тенгликка **икки тўғри чизиқнинг <u>параллеллик</u> шарти** дейилади.

3. Иккита тўғри чизиқнинг кесишуви. Иккита тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиб, кесишиш нуқтасининг координатлари топилади.

2-мисол. $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш. Иккинчи тенгламани (-1)га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшиб $x - 1 = 0$, $x = 1$ ни ҳосил қиламиз. $x = 1$ ни биринчи тенгламага қўйсак, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ ёки $y = 1$ бўлади. Шундай қилиб, бу тўғри чизиқлар $A(1;1)$ нуқтада кесишади.

4. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. $M(x_0; y_0)$ нуқта ва $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ тўғри чизиқ берилган бўлсин. Берилган нуқтадан, берилган тўғри чизиққача бўлган масофа

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \tag{2}$$

формула ёрдамида топилади. Тўғри чизиқ тенгламаси умумий

$$Ax + By + C = 0$$

кўринишда берилган бўлса, нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3}$$

формула билан топилади.

3-мисол. $A(3;\ \sqrt{5})$ нуқтадан $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Ечиш. Тўғри чизиқ тенгламаси умумий ҳолда берилган. Шунинг учун (3) формулага асосан,

$$d = \left|\frac{2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2}{\pm\sqrt{2^2 + \sqrt{5^2}}}\right| = \left|\frac{6 + 5 - 2}{3}\right| = \frac{9}{3}, \qquad d = 3$$

булади.

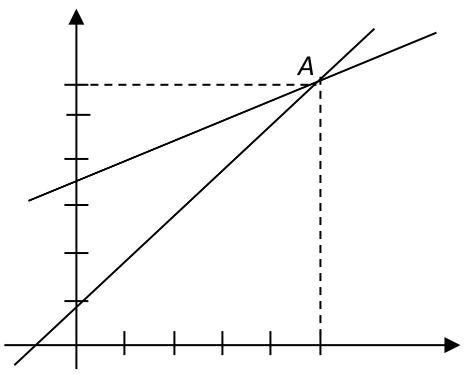
4-мисол. Икки хил транспорт воситасида юк ташиш харажатлари функцияси

$$y = 100 + 50x \quad \text{ва} \quad y = 200 + 30x$$

билан ифодалансин. Бунда, y транспорт харажати, x ҳар юз километрга юк ташиш масофаси. Қандай масофадан бошлаб 2-хил транспорт воситаси билан юк ташиш тежамлироқ бўлади.

Ечиш. Масала шартида берилган $y = 100 + 50x$ ва $y = 200 + 30x$ тўғри чизиқлар кесишадиган нуқтани топамиз: тенгликларнинг чап томонлари тенг бўлганлиги учун $100 + 50x = 200 + 30x$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x = 5$, $y = 350$ бўлади. Демак, тўғри чизиқлар $A(5,350)$ нуқтада кесишади.

Энди тўғри чизиқларни ясаймиз: (10-чизма).



10- чизма

10-чизмадан кўринадики, юк ташиш масофаси 500 км дан ортиқ бўлганда 2-хил транспорт воситаси билан юк ташилса, харажат камроқ бўлади.

5. Иккита параллел тугри чизиклар орасидаги масофани топиш

$$5x - 2y + 10 = 0 \quad \textbf{ва} \quad 5x - 2y + 36 = 0$$

параллел тугри чизиклар берилган булсин. Бу тугри чизиклар орасидаги масофани топиш учун, бу тугри чизикларнинг биттасида ихтиёрий бир нуктани танлаймиз ва танланган нуктадан иккинчи тугри чизиккача булган масофани топамиз: биринчи тугри чизикда $x = 4$ десак, $y = 15$ булиб, $A(4{,}15)$ 1-тугри чизикдаги нукта булади. $A(4{,}15)$ нуктадан иккинчи $5x - 2y + 36 = 0$ тугри чизиккача булган масофани (3) формулага асосан, хисобласак,

$$d = \left|\frac{5 \cdot 4 - 2 \cdot 15 + 36}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{26}{\sqrt{29}}, \quad d == \frac{26}{\sqrt{29}}$$

булади.

Такрорлаш учун саволлар

1. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак қандай топилади?
2. Икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шарти нима?
3. Икки тўғри чизиқнинг параллеллик шарти қандай бўлади?
4. Иккита тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси қандай топилади?
5. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа қандай формуладан фойдаланиб топилади?
6. Иккита параллел тугри чизиклар орасидаги масофани топиш кандай бажарилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $y = 1/2 \cdot x + 4$ тўғри чизиқ берилган. Унинг координат ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

2. Бошланғич ординатаси $b = -3$ бўлган ва $y = 2x + 3$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқни ясанг ва тенгламасини ёзинг.

3. $y = \sqrt{3}\, x - 2$ ва $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} x + 3$ тўғри чизиқлар берилган. Уларнинг абсцисса ўқи билан ташкил қиладиган бурчакларини топинг.

4. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

5. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

6. 1) $3x-15y+16=0$, 2) $3x+15y-8=0$, 3) $6x-30y+13=0$,

4) $30x+6y+7=0$

тўғри чизиқлардан қайсилари перпендикуляр ва қайсилари параллел.

7. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакларни топинг:

1) $\begin{array}{l} y=2/3\cdot x-7 \\ y=5x+9 \end{array}$; 2) $\begin{array}{l} 2x-4y+9=0 \\ 6x-2y-3=0 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} y=3/7\cdot x-2 \\ 7x+3y+5=0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} x/4-y/5=1 \\ x/2+y/18=1 \end{array}$

7,8-мавзу. Иккинчи тартибли чизиқлар

Режа

1. Иккинчи тартибли чизиқ ва унинг тенгламаси.

2. Айлана ва унинг тенгламаси.

3. Эллипс ҳамда унинг тенгламаси.

4. Гипербола ва унинг тенгламаси.

5. Парабола ва унинг тенгламаси.

Таянч ибора ва тушунчалар

Иккинчи тартибли чизик, айлана, эллипс, гипербола, парабола, эллипс ва гипербола ярим ўқлари, асимптота, қўшма гипербола, каноник тенглама, симметрия маркази, симметрия ўқи, эксцентриситет, фокус, директриса, парабола фокуси.

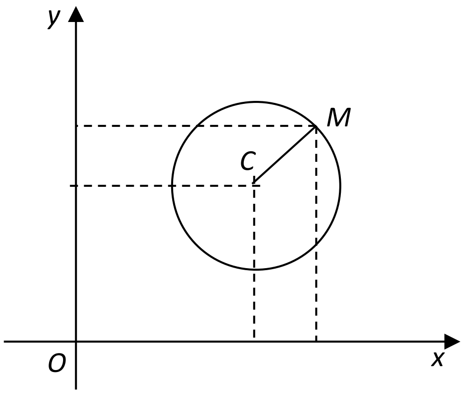
1. Иккинчи тартибли чизиқ ва унинг тенгламаси. Маълумки, текисликда тўғри чизиқ x ва y ўзгарувчи кординатларга нисбатан биринчи даражали эди. Энди текисликда иккинчи тартибли чизиқларни ўрганамиз. Иккинчи тартибли чизиқлар x ва y ўзгарувчи координатларга нисбатан иккинчи даражали тенглама билан ифодаланади. Иккинчи даражали тенгламанинг умумий кўриниши

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

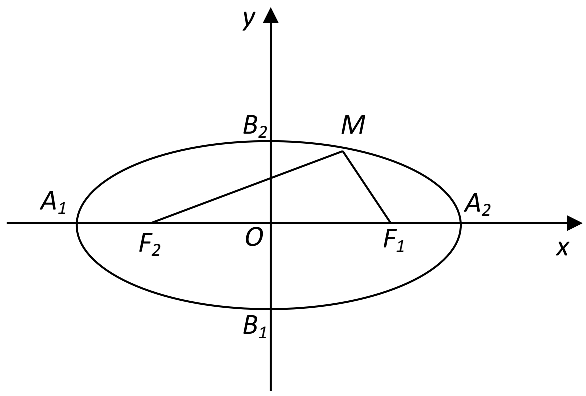
бўлади. (1) тенгламага **<u>иккинчи тартибли чизиқнинг</u> умумий тенгламаси** дейилади. Қуйида муайян ҳолларда, иккинчи тартибли чизиқларнинг аналитик ифодаларини топиб, уларнинг хусусиятларини ўрганамиз.

<u>2. Айлана ва унинг тенгламаси.</u> Таъриф. Текисликда бирор $C(a,\ b)$ нуқтадан тенг узоқликда жойлашган нуқталар геометрик урнига <u>айлана</u> дейилади.

$M(x,\ \ y)$ айланага тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин (1-чизма). Айлана таърифига кўра CM масофа ўзгармас, бу масофани R билан белгилайлик.



1-чизма



2-чизма

икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига асосан,

$$CM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \qquad \text{ёки} \qquad \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

булади. Охирги тенгликнинг иккала тарафини квадратга кўтариб,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламага маркази $C(a,\ b)$ нуқтада, радиуси R га тенг **айлананинг <u>каноник(қонуний)</u> тенгламаси** деб аталади. (2) дан

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=R^2$ ёки

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$

бўлади. Бу тенглама (1) тенгламанинг $A=C,\quad B=0$ бўлган хусусий ҳолидир. Демак, айлана иккинчи тартибли чизиқдир.

1-мисол. Иккинчи тартибли чизиқ $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ тенглама билан берилган булсин. Унинг айлана эканлигини кўрсатинг ҳамда марказини ва радиусини топинг.

Ечиш. x ва y ли ҳадлар бўйича тўла квадратлар ажратамиз:

$$x^2-6x+9-9+y^2+4y+4-4-23=0,$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-23=0 \quad \text{ёки} \quad (x-3)^2+(y+2)^2=36$$

бўлади. Бу айлананинг каноник тенгламасидир. Унинг маркази $C(3;\ -2)$, нуктада, радиуси $R=6$ бўлади.

3. Эллипс ҳамда унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган иккита нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас миқдордан иборат бўлган нуқталар геометрик урнига ***эллипс дейилади.*** Берилган нуқталар F_1 ва F_2 бўлсин. Бу нуқталарга эллипснинг фокуслари дейилади. Ўзгармас миқдорни $2a$, фокуслар орасидаги масофани $2c$ билан белгилаб, координатлар системасини шундай оламизки, OX ўқи фокуслардан ўтсин ва координатлар боши F_1F_2 масофанинг ўртасида бўлсин (2-чизма). $M(x, y)$ эллипсга тегишли ихтиёрий нуқта бўлса, таърифга кўра

$$F_1M+F_2M=2a \qquad (3)$$

бўлади. Маълумки, $F_1(+c;\ 0)$ ва $F_2(-c;\ 0)$ бўлиб, икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига асосан:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан иррационалликни йўқотиб,

$$x^2(a^2-c)^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

кўринишга келтирамиз. $a^2 - c^2 = b^2$ билан белгилаймиз (чунки, $a > c$). Бу ҳолда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (4) тенгламага ***<u>эллипснинг каноник</u>*** тенгламаси дейилади.

Координатлар боши, эллипснинг **симметрия маркази**, координатлар ўқи **симметрия ўқлари** бўлади.

$A_1(-a,\ 0),\quad A_2(a,\ 0),\quad B_1(0,\ -b),\quad B_2\ (0,\ +b)$

нуқталар эллипснинг учлари, $a = 0A_2$ *ва* $b = 0B_2$ масофалар мос равишда **эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари** дейилади.

Шундай қилиб, эллипс иккита симметрия ўқига, симметрия марказига эга бўлган ёпиқ эгри чизиқдир.

$\varepsilon = c/a < 1$ катталик ***<u>эллипснинг эксцентриситети</u>*** дейилади. Айланани эллипснинг $a = b,\ \varepsilon = 0$ бўлган хусусий ҳоли деб қараш мумкин.

$M(x, y)$ нуқтадан фокусларгача бўлган масофага эллипснинг фокал радиуслари дейилади, уларни r_1 ва r_2 билан белгиласак, $r_1 = a + \varepsilon x,\qquad r_2 = a - \varepsilon x$ бўлади.

2-мисол. $16x^2 + 25y^2 = 400$ эллипснинг ярим ўқларини, фокусларини ва эксцентриситетини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани 400 га бўлиб,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

кўринишга келтирамиз. Бу тенгламадан $a^2 = 25,\ b^2 = 16$ бўлиб, ярим ўқлари мос равишда $a = 5,\ b = 4$ бўлади. Маълумки, $b^2 = a^2 - c^2$, бўлиб,

$c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = \pm 3$ бўлади. Демак, фокуслари $F_1(3{,}0)$ ва $F_2(-3{,}0)$ нукталарда бўлади. Эксцентриситети эса, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

4. Гипербола ва унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган иккита (фокус) нуқталаргача бўлган масофалар айирмаси ўзгармас миқдордан иборат бўлган нуқталар геометрик урнига ***гипербола*** дейилади(кўрсатилган айирма абсолют қиймати бўйича олиниб, у фокуслар орасидаги масофадан кичик ва 0 дан фарқли).

Ўзгармас миқдорни $2a$, фокуслар орасидаги масофани $2c$ ва координат ўқларини эллипсдагидек олиб, $c^2 - a^2 = b^2$ белгилаш киритиб,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (5) тенгламага ***гиперболанинг каноник*** тенгламаси дейилади. Гиперболанинг фокуслари $F_1(+c;\ 0)$ ва $F_2(-c;\ 0)$ бўлади (3-чизма). Координатлар ўқи **симметрия ўқлари** ва координатлар боши $0(0;\ 0)$ **симметрия маркази**дир. Гипербола кординат ўқларини $A_1(-a;\ 0)$ *ва* $A_2(a;\ 0)$ нуқталарда кесиб ўтиб, бу нуқталарга **ҳақиқий учлари** ва $a = 0A_2$ масофа **ҳақиқий ярим ўқи** дейилади. $B_1(0,\ -b)$, *ва* $B_2(0,\ b)$ нуқталар гиперболанинг **мавҳум учлари**, $b = 0B_2$ − **мавҳум ярим ўқи** дейилади.

Гипербола иккита асимптоталарга эга бўлиб, унинг тенгламалари

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (6)$$

бўлади.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ катталикка ***гиперболанинг эксцентриситети*** деб аталади.

Гипербола ўқлари $a = b$ бўлса, унга **тенг томонли гипербола** дейилади ва унинг тенгламаси

$$x^2 - y^2 = a^2$$

бўлади.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболаларга ***ўзаро қўшма гиперболалар*** деб аталади.

3-мисол. $9x^2 - 16y^2 = 144$ гиперболанинг ярим ўқларини, фокусларини, эксцентриситетини ҳамда аксимптоталарининг тенгламаларини топинг.

Ечиш. Берилган тенламани 144 га бўлиб тенгламани каноник

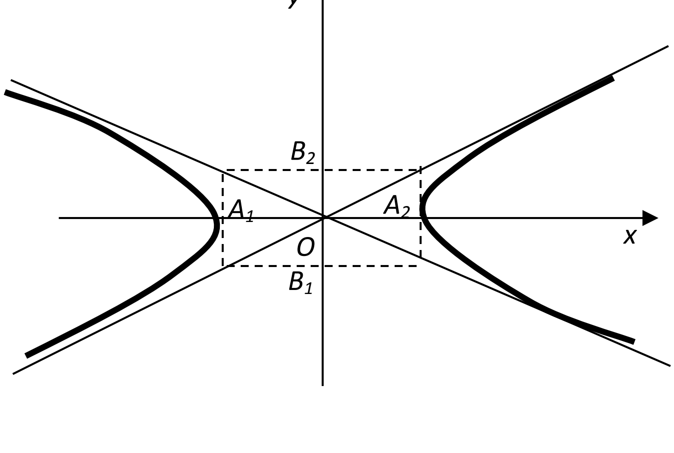
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

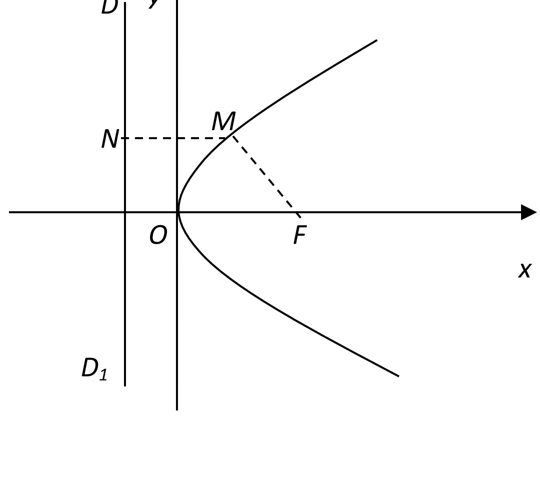
кўринишга келтирамиз. Бундан $a^2 = 16, \quad b^2 = 9$ бўлиб, ҳақиқий ярим ўқ $a = 4$, мавҳум ярим ўқ $b = 3$ бўлади. $c^2 = a^2 + b^2, \quad c^2 = 16 + 9, \quad c = \pm 5$ бўлиб, фокуслари $F_1(+5;\ 0), \quad F_2(-5;\ 0)$ нукталарда бўлади. Эксцентриситет $\varepsilon = c / a = 5/4$.

a ва b ларнинг қийматини (6) асимптота тенгламасига қўйиб,

$$y = \pm\frac{3}{4}x$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу асимптоталар тенгламасидир.





3-чизма 4-чизма

<u>5. Парабола ва унинг тенгламаси</u>. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган нуқта(фокус)гача ва берилган тўғри чизиқ (директриса)гача масофалари ўзаро тенг бўлган нуқталар геометрик урнига **парабола** дейилади.

Координатлар системасини шундай оламизки, OX ўқи F (фокус)дан ўтиб, DD_1 директрисага перпендикуляр, OY ўқи эса фокус ва директрисанинг ўртасидан ўтсин(4-чизма). $M(x,\ y)$ параболага тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин. F нуқтадан DD_1 тўғри чизиққача бўлган масофани $p\ \ (p>0)$ билан белгилаймиз. Бунда $F(p/2,\ \ 0)$ бўлиб, директрисанинг тенгламаси $x=-\dfrac{p}{2}$ бўлади. Таърифга асосан,

$$MN=MF. \qquad N(-\frac{p}{2},\ y).$$

Икки нуқта орасидаги масофа формуласига асосан,

$$x+p/2=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}.$$

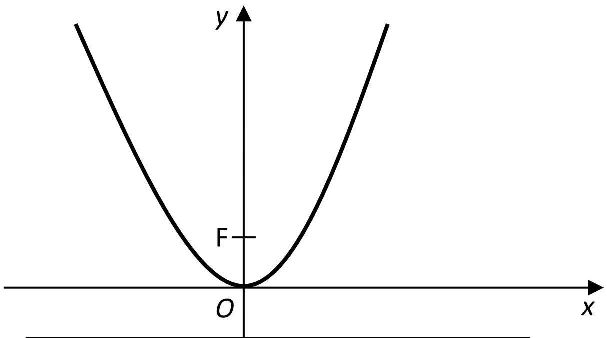
Бу тенгламадан иррационалликни йўқотиб,

$$y^2=2px \tag{7}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу абсциссалар ўқига симметрик ***<u>параболанинг каноник</u>*** тенгламаси бўлади. Ординатлар ўқи **симметрия ўқи** бўлса, парабола тенгламаси

$$x^2=2py(p>0)$$

кўринишда бўлади. Бу ҳолда $y=-p/2$ директриса тенгламаси, $F=(0;\ \ p/2)$ нуқта фокус бўлади(5-чизма).



5-чизма

$M(x,\ y)$ нуқтадан $F(p/2;\ 0)$ фокусгача масофага фокал радиус дейилади ва $r = x + p/2.$ $M(x,\ y)$ нуқтадан $F(0,\ \ p/2)$ фокусгача масофа $r = y + p/2$ бўлади.

4-мисол.. $y^2 = 12x$ параболанинг фокусини ва директрисасининг тенгламасини топинг. $M(3;\ 6)$ нуқтадан фокусгача бўлган масофани аниқланг.

Ечиш. Берилган тенгламани (7) тенглама билан солиштириб $2p = 12,$ бундан $p = 6, \quad p/2 = 3.$ Шундай қилиб, фокус $F(3;\ 0)$ нуқтада директриса тенгламаси x=-3 эканлигини топамиз. $M(3;\ 6)$ нуқта учун $x = 3$, бўлиб, факол радиус $r = 3 + 3 = 6, \quad r = 6$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1.. Иккинчи тартибли чизиқлар деб қандай чизиқларга айтилади?

2. Айлана, эллипс, гипербола ва парабола деб нималарга айтилади ва уларнинг каноник тенгламалари қандай бўлади?

3. Эллипс ва гиперболаларнинг эксцентриситети нимага айтилади?

4. Эксцентриситет айлана учун нимага тенг?

5. Эллипс, гипебала ва параболаларнинг фокал радиуслари нима?

6. Эллипс ва гиперболаларнинг симметрия маркази ва симметрия ўқлари борми?

7. Эллипс ва гиперболаларнинг ярим уклари нималардан иборат?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1.. $N\ (7;\ \ -2)$ нуқтадан ўтиб, маркази $C\ (3;\ \ -5)$ нуқтада бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

2. $M\ (4;\ 2)$ ва $N\ (12;\ 8)$ нуқталар берилган. Диаметри MN кесмадан иборат бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

3. Ушбу 1) $x^2+y^2-4x+8y-16=0$;

2) $3x^2+3y^2-6x+8y-29/3=0$;

3) $x^2+y^2+7x=0$;

4) $5x^2+5y^2+9y=0$

айланаларнинг марказларини ва радиусларини топинг.

4. $x^2+y^2-4x+8y-16=0$, ва $x^2+y^2+8x+12y-14=0$ айланалар марказларидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

5. Фокуслари орасидаги масофа 24, катта ўқи 26 га тенг бўлган эллипснинг каноник тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

6. Қуйидагилар берилганда эллипснинг каноник тенгламасини топинг:

1) катта ярим ўқ 10, эксцентриситет $0{,}8$;

2) кичик ярим ўқ 12, эксцентриситет $5/13$;

3) эксцентриситет $0{,}6$, фокуслар орасидаги масофа 6.

7. 1) $9x^2+25y^2=225$, 2) $9x^2+y^2=36$ эллипслар учун ўқларининг узунликларини, фокусларини ва эксцентриситетларини топинг ва ясанг.

8.Координат ўқларига нисбатан симметрик бўлган эллипс $M\ (2;\ \sqrt{3})$ ва $N\ (0;\ 2)$ нуқталардан ўтади. Эллипс тенгламасини ёзинг. M нуқтадан фокусларгача масофаларни топинг.

9. Эллипснинг эксцентриситети ε берилган. Эллипс ярим ўқларининг b/a нисбатини топинг.

10. Қуйидагилар берилганда гиперболанинг каноник тенгламасини ёзинг:

1) фокуслари орасидаги масофа 10, эксцентриситет $5/3$;

2) ҳақиқий ярим ўқ $\sqrt{20}$ ва гипербола $N\ (-10;\ \ 4)$ нуқтадан ўтади;

3) фокуслар орасидаги масофа 10, учлари орасидаги масофа 4.

11. 1) $144x^2 - 25y^2 = 3600$; 2) $9x^2 + y^2 = 144$ гиперболалар учун ўқларнинг узунликларини, фокусларини ва эксцентриситетини топинг.

9 — МАЪРУЗА

ВЕКТОРЛАР

РЕЖА

1. Скаляр ва вектор микдорлар. Вектор тушунчаси.
2. Векторларнинг тенглиги, бирлик, ноль вектор, коллинеар векторлар, карама-карши векторлар.
3. Векторлар устида чизикли амаллар.
4. Базис. Векторни базис буйича ёйиш.
5. Векторни укдаги проекцияси, йуналтирувчи косинуслар.

Физик, кимёвий ва бошка ходисаларни урганишда учрайдиган катталикларни икки синфга булиш мумкин.

Скаляр катталиклар деб аталадиган катталиклар синфи мавжудки, уларни характерлаш учун бу катталикларнинг сон кийматларини курсатиш етарлидир. Булар масалан, хажм, масса, зичлик, харорат ва бошкалардир. Лекин шундай катталиклар мавжудки, улар факат сон кийматлари билангина эмас, балки йуналиши билан хам характерланади.

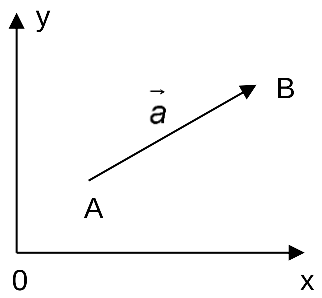
Улар йуналтирилган катталиклар ёки вектор катталиклар деб аталади. Масалан, харакатланаётган нуктанинг бир вазиятдан иккинчи вазиятга кучишида таъсир этаётган кучни характерлаш учун кучнинг улчамларини курсатиш кифоя килмасдан, балки бу кучнинг йуналишини хам курсатиш зарурдир. Харакат тезлиги магнит ёки электр майдоннинг кучланганлиги ва бошка катталиклар хам шунга ухшаш характерланади. Буларнинг хаммаси вектор катталикларга оид мисолдир. Уларни тасвирлаш учун вектор тушунчаси киритилган булиб, у математиканинг узи учун хам фойдали булиб чикди. Биз юкорида йуналган кесма хакида гапирганимизда, унда йуналиш аникланган, яъни унинг четки нукталаридан кайси бири боши, кайси бири охири эканлиги курсатилган кесма эканлиги хакида айтган эдик.

Маълумки, табиатдаги мавжуд барча катталикларни икки гурухга ажратиш мумкин. *Скаляр* ва *вектор* катталиклар. Фаќат сон ќиймати билан аниќланадиган катталиклар скаляр катталиклар деб аталади. Масалан масса, зичлик, узунлик, температура каби катталиклар скаляр катталикларга мисол бўла олади.

Шундай катталиклар мавжудки, улар сон ќиймати хамда йўналиши билан аниќланади. Масалан босиб ўтилган йўл, тезлик, тезланиш каби каттликлар. Бу каби катталиклар вектор катталиклар деб аталади.

Таъриф. Сон ќиймати ва йўналиши билан аниќланадиган катталиклар вектор катталиклар деб аталади.

Текисликда А ва В нўќталар берилган бўлсин. А нўќтадан В нўќтага йўналган вектор $\overrightarrow{AB}$ деб белгиланади ва А нўќта векторнинг бош нўќтаси, В нўќта эса охирги нўќтаси деб аталади. Вектор $\vec{a}$ хам деб белгиланади.



$\overrightarrow{AB}$ вектор узунлиги унинг модули хам деб аталади ва у $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ кўринишда белгиланади.

Боши ва охири усма-уст тушган вектор ноль вектор деб аталади ва $\vec{0}$ билан белгиланади. Бу вектор аниќ йўналишга эга эмас ва унинг модули 0 га тенг, яъни $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Таъриф. Битта тўѓри чизиќда ёки параллел тўѓри чизиќларда ётувчи векторлар коллинеар векторлар деб аталади.

Коллинеар векторлар бир хил ёки ќарама-ќарши йўналган бўлиши мумкин.

Таъриф. Бир хил йўналишга эга ва узунликлари тенг бўлган векторлар тенг векторлар деб аталади.

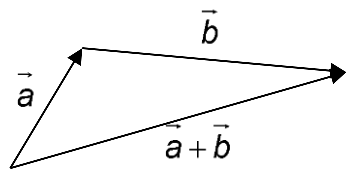
Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар тенг бўлса, у $\vec{a} = \vec{b}$ кўринишда ёзилади.

Таъриф. Битта текисликда ёки параллел текисликларда ётувчи векторлар компланар векторлар деб аталади.

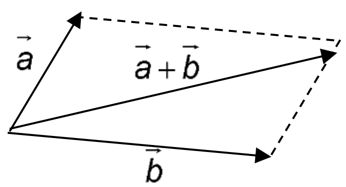
Таъриф. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ векторлар ќарама-ќарши векторлар деб аталади.

Векторлар устида амаллар

Векторларни ќўшиш. Векторларни ќўшишда учбурчак ёки параллелограм ќоидаларидан фойдаланиш мумкин. Учбурчак ќоидаси:



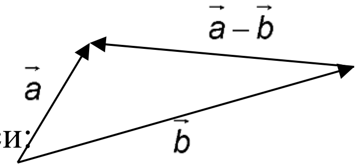
Параллелограм ќоидаси:



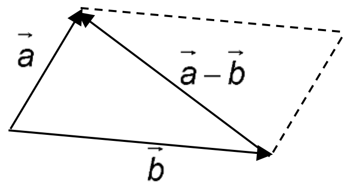
Векторларни ќўшиш ќуйидаги хоссаларга эга:

1. Ўрин алмаштириш хоссаси, яъни $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. Гуруппалаш хоссаси, яъни $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Векторларни айириш. Векторларни айиришда учбурчак ёки параллелограм ќоидаларидан фойдаланиш мумкин. Учбурчак ќоидаси:



Параллелограм ќоидаси:



Векторни сонга кўпайтириш. $\vec{a}\neq\vec{0}$ векторни $m\neq 0$ сонга кўпайтмаси деб, $\vec{a}$ векторга коллениар, узунлиги $|m|\cdot|\vec{a}|$ га тенг бўлган, $m>0$ бўлганда $\vec{a}$ вектор Билан бир хил йўналишдаги, $m<0$ бўлганда эса унга ќарама-ќарши йўналган хамда $m\vec{a}$ билан белгиланадиган векторга айтилади. Векторларни сонга кўпайтириш ќуйидаги хоссаларга эга:

1. Ўрин алмаштириш хоссаси: $m\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot m$.
2. Скаляр сонга кўпайтиришга нисбатан гурухлаш хоссаси: $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$.
3. Скалярларни ќўшишга нисбатан таќсимот хоссаси: $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$.
4. Векторни ќўшишга нисбатан таќсимот хоссаси: $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

Таъриф. Узунлиги бирга тенг бўлган вектор, бирлик вектор деб аталади.

Чизиќли эркли векторлар системаси

n та $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ вектор ва n та $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ сонлар берилган бўлсин.

Таъриф. $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}$ йиѓиндига $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ векторларнинг чизиќли комбинацияси деб аталади.

Таъриф. $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ векторлар системаси учун камида биттаси нолдан фарќли шундай n та $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ сонлар мавжуд бўлсинки, векторларнинг чизиќли комбинацияси нолга тенг, яъни $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$ бўлса, у система *чизиќли боѓлиќ* система деб аталади. Акс холда $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ векторлар *чизиќли эркли* деб аталади.

Чизиќли эркли векторлар учун $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$ тенглик фаќат $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ бўлганда ўринли бўлади.

Агар $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ векторлар чизиќли боѓлиќ бўлиб, $\alpha_1\neq 0$ бўлса, у холда

$$\overrightarrow{a_1}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{a_2}-\ldots-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overrightarrow{a_n}$$

тенглик ўринли бўлади.

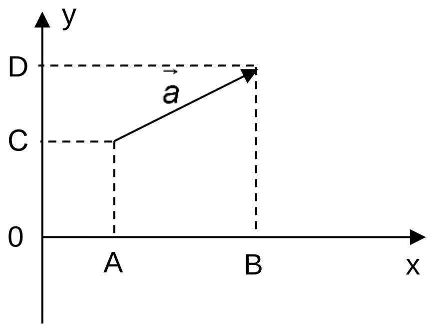
Бу ерда $\beta_2=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$, … , $\beta_n=-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}$ деб белгилаш киритсак, у холда

$$\overrightarrow{a_1} = \beta_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \beta_n \overrightarrow{a_n}$$

га эга бўламиз. Бу тенглик $\overrightarrow{a_1}$ векторнинг $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_n}$ векторлар орќали чизиќли комбинациясини ифодалайди.

Таъриф. Ихтиёрий $\vec{a}$ векторни n та $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, …, $\overrightarrow{e_n}$ векторларнинг чизиќли комбинацияси орќали ифодалаш мумкин бўлса, у холда бу векторлар фазонинг базиси деб аталади.

Декарт координаталар системасида $\vec{a}$ вектор берилган бўлсин. |AB| ва |CD| кесмалар мос равишда $\vec{a}$ векторнинг Ох ва Оу ўќларидаги проекциялари деб аталади. Декарт координаталар текислигида берилган хар ќандай $\vec{a}$ векторни



$$\vec{a} = a_x i + a_y j$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ерда a_x ва a_y лар мос равишда $\vec{a}$ векторнинг Ох ва Оу ўќлардаги проекциялари. i ва j лар эса мос равишда Ох ва Оу ўќлар бўйича йўналган бирлик векторлар.

Агар $\vec{a}$ векторни уч ўлчовли Декарт координаталар системасида ќарасак, у холда бу векторни $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ кўринишда тасвирлаш мумкин.

Фазода бирор l ук ва бирор фазода жойлашган АВ вектор берилган булсин. А1 ва В1 нукталар А ва В нукталарнинг l укдаги проекцияси булсин. Айтайлик А1(х1) ва В1(х2) l укдаги координатаси булсин. А1В1 вектор АВ векторнинг l укдаги ташкил этувчиси ёки компонентаси дейилади.

А В

А1 В1

l

х1 х2

Агар АВ вектор l ук билан уткир бурчак хосил килса, у холда х2-х1>0 булади;

АВ вектор l уки билан утмас бурчак хосил килса, у холда х2-х1<0 булади;

АВ _!_ l булади, агар х2-х1=0 булса.

Векторни l укдаги проекциясини Прl АВ шаклида белгиланади.

Мисол: 1) А(6; -1; 2), В(-3; 1; 4); булса, АВ= -9i + 2j +2k.

2) ***а*** = 2i - 4j + 5k; ***в*** = -4i + 3j + 8k.

а* + *в = (2 - 4) i+ (-4+3) j + (5+8)k=-2i -j +13k.

а - в = (2-(-4)) i + (-4-3) j+(5-8)k = 6i -7j -3k.
5**а** = 5*2i - 5*4j + 5*5k= 10i -20j +25k

Уз-узини текшириш учун саволлар:

1. Кандай векторлар коллениар векторлар, компланар, тенг деб аталади?
2. Векторнинг модули нима?
3. Векторлар устидаги кайси амаллар чизикли амаллар деб аталади?
4. Кандай векторлар чизикли боглик ва кандай векторлар чизикли эркли деб аталади?

10 — МАЪРУЗА

РЕЖА

1. Векторларни скаляр купайтмаси.
2. Вектор купайтма ва хоссалари.
3. Аралаш купайтма ва хоссалари. Уларни геометрик ва физик маънолари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Скаляр купайтма, вектор узунлиги, орасидаги бурчак, вектор купайтма, аралаш купайтма, параллелопипед, пирамида хажми.

Таъриф. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб, бу векторлар узунликларини улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига айтилади, яъни

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

Скаляр кўпайтманинг хоссалари:

1) Ўрин алмаштириш хоссаси: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) Сонга кўпайтиришга нисбатан гуруҳлаш хоссаси: $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
3) Векторларни қўшишга нисбатан тақсимот хоссаси: $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Вектор узунлиги.

$\vec{a}$ векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмасини қараймиз. Бу кўпайтма векторнинг скаляр квадрати деб аталади:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скаляр кўпайтма $\vec{a}^2$ кўринишда ҳам белгиланади, яъни $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Бу ердан $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Агар $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ эканлигини хисобга олсак, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ га эга бўламиз. Бу вектор узунлигини ҳисоблаш формуласи бўлади.

Икки вектор орасидаги бурчак

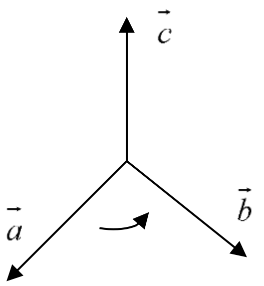
Агар $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$ формуладан фойдалансак, $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ га эга бўламиз. Бу ердан $\alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$ га, яъни икки вектор орасидаги бурчакни ћисоблаш формуласига эга бўламиз.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар координаталари билан берилган бўлса, яъни $\vec{a}=a_x i+a_y j+a_z k$ ва $\vec{b}=b_x i+b_y j+b_z k$ кўринишда берилган бўлса, у ћолда бу икки вектор орасидаги бурчак $\alpha=arccos\left(\dfrac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}\right)$ формула ёрдамида аниќланади.

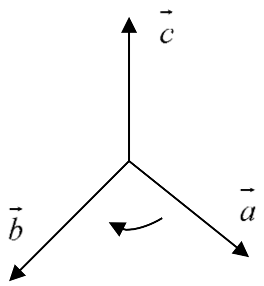
Мисол. $\vec{a}=i+k$ ва $\vec{b}=i+2j+2k$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

Векторларнинг вектор кўпайтмаси

Учта $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ вектор берилган бўлсин. Бу векторларни умумий бошланиш нўќтасига келтирамиз. Компланар бўлмаган тартибланган векторлар учлугида учинчи вектор учидан кузатилганда биринчи вектордан иккинчи векторга энг ќисќа бурилиш масофаси соат мили айланишига тескари йўналишда бўлса, у ўнг учлик деб аталади. Акс холда векторлар учлиги чап учлик деб аталади(расм).



$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларнинг ўнг учлиги



$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларнинг чап

Таъриф. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси деб шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, у ќуйидаги шартларни ќаноатлантиради:

1. $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр;
2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар ўнг учлик ташкил ќилади;
3. $\vec{c}$ вектор узунлиги $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\varphi$ га, яъни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограмнинг юзига тенг.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси $\vec{a}x\vec{b}$ ёки $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ кўринишда белгиланади.

Вектор кўпайтма ќуйидаги хоссаларга эга:

1. Ўрин алмаштириш хоссаси: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;
2. Векторларни ќўшишга нисбатан таќсимот ќонуни: $\left[\vec{a},(\vec{b}+\overrightarrow{c)}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$;

Агар векторлар ўзининг координаталари билан берилган бўлса, яъни $\vec{a}=a_x i+a_y j+a_z k$ ва $\vec{b}=b_x i+b_y j+b_z k$ кўринишда берилган бўлса, у ћолда бу векторларнинг вектор кўпайтмаси ќуйидаги

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} i & \text{j} & \text{k} \\ \text{a}_\text{x} & \text{a}_\text{y} & \text{a}_\text{z} \\ \text{b}_\text{x} & \text{b}_\text{y} & \text{b}_\text{z} \end{vmatrix}.$$

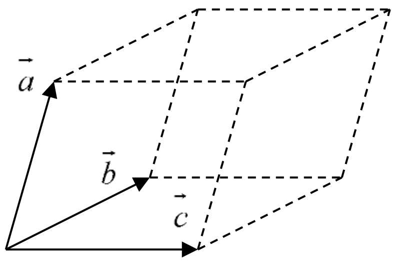
Мисол. $\vec{a}=3i-4j+k$ ва $\vec{b}=i+2j-2k$ векторларнинг вектор кўпайтмасини топинг.

Векторларнинг аралаш кўпайтмаси

Таъриф. $\vec{a},\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси деб $\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг вектор кўпайтмасидан ћосил бўлган $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ векторга скаляр кўпайтмасига айтилади.

$\vec{a},\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ кўринишда белгиланади.

$\vec{a},\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмасининг сон ќиймати шу векторларга ќурилган параллелипепед хажмига тенг бўлади.



Аралаш кўпайтма ќуйидаги хоссаларга эга.

1-хосса: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$

2-хосса: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$

Мисол: 7. Учлари A(1;1;1), B(4;4;4), C(3;5;5), Д(-2;-4;-7) нукталарда булган пирамиданинг хажмини топинг.

Ечиш: Элементар геометриядан маълумки, пирамиданинг хажми параллелепипед хажмининг олтидан бирига тенг.

Vпир = 1/6 Vпар-д =1/6 !АВ АС АД!

АВ = 3i + 3j + 3k; ***АС*** = 2i + 4j + 4k; ***АД***= -3i -5j - 8k;

Шундай килиб,

$$V_{пир} = \pm 1/6\,(\boldsymbol{AB}\ \boldsymbol{AC}\ \boldsymbol{AД}) = \pm 1/6 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \pm 1/6\,(-18)$$

Vпир = 1/6 18 = 3 куб. бир.

Агар уч векторнинг аралаш купайтмаси нолга тенг булса, у холда бу векторлар компланарлик шартида булади.

$$a\ в\ c = 0 \quad ёки \quad \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

Уз-узини текшириш учун саволлар.

1. Икки векторнинг вектор купайтмаси нима?
2. Вектор купайтманинг геометрик маъноси нима?
3. Проекциялари билан берилган векторларнинг вектор купайтмаси кандай ифодаланади?
4. Уч векторнинг аралаш купайтмаси деб нимага айтилади?
5. Аралаш купайтма кандай хоссаларга эга?
6. Аралаш купайтма кандай геометрик маънога эга?
7. Проекциялари билан берилган уч векторнинг аралаш купайтмаси кандай ифодаланади?
8. Уч векторнинг компланарлик шарти нимадан иборат?

Фазода аналитик геометрия

11-мавзу. **Фазода текислик тенгламалари**

Режа

1. **Фазода Декарт координатлар системаси ва асосий масалалар.**
2. **Фазода сирт ва унинг тенгламаси.**
3. **Берилган нуқтадан ўтиб, берилган векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси.**
4. **Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.**
5. **Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси.**
6. **Берилган учта нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси.**

Таянч ибора ва тушунчалар

Фазода нуқтанинг ўрни, апликата, октантлар, координат текисликлари, икки нуқта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш, сирт ва унинг тенгламаси, сиртнинг тартиби, сферик сирт, фазода текислик, нормал вектор, текисликнинг умумий тенгламаси, текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси, берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик, икки текислик орасидаги бурчак, нуқтадан текисликкача бўлган масофа, икки текисликнинг параллеллиги ва перпендикулярлиги.

1. Фазода Декарт координатлар системаси ва асосий масалалар. Текисликдаги Декарт координатларига ўхшаш фазодаги координатлар ҳам аниқланади, ўзаро перпендикуляр OX, OY, OZ сон ўқлари, умумий 0 нуқтадан ўтсин. Фазода A ***нуқтага учта ҳақиқий сон*** (x, y, z) ва аксинча учта ҳақиқий сонга битта нуқта мос келади. Бу мослик ҳам бир қийматлидир. Бу сонларга нуқтанинг фазодаги координатлари дейилади. x абциссаси, y ординатаси, z ***апликатаси*** деб аталади. Координат ўқларидан ўтувчи текисликларга ***координат текисликлари*** дейилади ва улар фазони 8 та бўлакларга - **октантларга** ажратади. $A\,(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг координатлари OA радиус векторнинг ҳам координатлари бўлади.

Фазодаги аналитик геометрияда ҳам қуйидаги содда масалалар қаралади:

1) фазодаги берилган $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофа,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

формула билан аниқланади;

2) AB кесмани $\lambda = AC:CB$ нисбатда бўлувчи $C\,(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг координатлари

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

формулалар ёрдамида топилади.

2. Фазода сирт ва унинг тенгламаси. Маълумки, текисликда

$$F\ (x,\ y)=0$$

тенглама бирор чизиқни ифодалайди.

$$F\ (x,\ y,\ z)=0 \qquad (1)$$

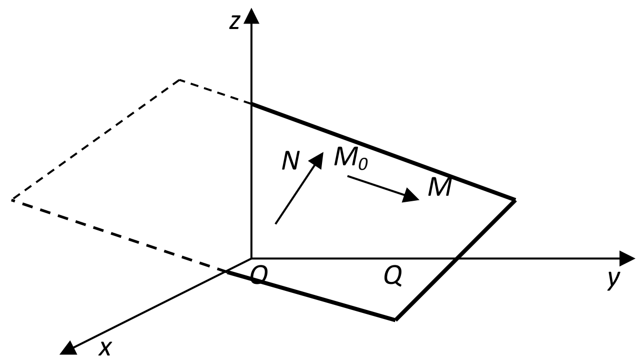
тенглама $OXYZ$, R^3 фазода координатлари (1) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами, бирор ***сиртни аниқлайди***. Бу тенгламага ***сирт тенгламаси*** дейилади. (1) тенглама даражасига ***сиртнинг тартиби*** деб аталади. Масалан, OYZ координат текислигида ётган исталган $A(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг абсциссаси $x=0$ бўлади ва аксинча $A\,(0,\ y,\ z)$ нуқта OYZ координат текислигида ётади. Демак, OYZ координат текислигининг тенгламаси $x=0$ бўлиб, у биринчи тартибли бўлади. Худди, юқоридагидек

$y=0\,, z=0$ мос равишда OXZ ва OXY координат текисликлари тенгламаларини ифодалайди.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R$$

тенглама маркази $C\,(a,\,b,\,c)$ нуқтада радиуси R бўлган сферик сирт тенгламаси иккинчи тартиблидир.

3. <u>Берилган нуқтадан ўтиб, берилган векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси.</u> $OXYZ$ тўғри бурчакли координатлар системасида $M_0\ (x_0,\,y_0,\,z_0)$ нуқта ва $\vec{N}=A\,\vec{i}+B\,\vec{j}+C\,\vec{k}$ вектор берилган бўлсин. M_0 нуқтадан ўтувчи, $\vec{N}$ векторга перпендикуляр Q текисликнинг фазодаги вазияти аниқ бўлади. Унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Q текисликда ихтиёрий $M\,(x,\,y,\,z)$ нуқта оламиз(1-чизма).



1-чизма.

$\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{N}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина M нуқта Q текисликда ётади. Маълумки $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг координатлари $(x-x_0),\ (y-y_0),\ (z-z_0)$ бўлади. Икки векторнинг перпендикулярлик шартига асосан:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

бўлади. Бу Q ***<u>текислик тенгламаси</u>*** бўлади.

Таъриф. Q текисликка перпендикуляр $\vec{N}=A\,\vec{i}+B\,\vec{j}+C\,\vec{k}$ векторга бу текисликнинг ***<u>нормал</u>*** вектори дейилади.

1-мисол. $M_0\ (4,\,-3,\,5)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{N}=2\,\vec{i}-3\,\vec{j}+4\,\vec{k}$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш. (2) формулага асосан,
$2(x-4)+(-3)\ (y+3)+4(z-5)=0$, $2x-8-3y-9+4z-20=0$
ёки

$$\underline{2x-3y+4z-37=0}$$

<u>бўлиб, бу изланаётган текислик тенгламасидир.</u>

<u>4. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.</u>
(2) тенгламадан

$$Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0 \text{ ёки } Ax_0-B\mathbf{y}_0-Cz_0=D$$

билан белгилашдан кейин

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (3) тенгламага фазода текисликнинг ***<u>умумий тенгламаси</u>*** дейилади.

Умумий тенгламанинг хусусий ҳолларини қараймиз:

1) $D=0$ бўлса, $Ax+By+Cz=0$ бўлиб, текислик координатлар бошидан ўтади;
2) $C=0$ бўлса, $Ax+By+D=0$ бўлиб, текислик OZ ўқига параллел; худди шундай $Ax+Cz+D=0$, $By+Cz+D=0$ текисликлар мос равишда OY ва OX ўқларига параллелдир;
3) 2-ҳолда $D=0$ бўлса, текислик тенгламалари $Ax+By=0$, $Ax+Cz=0$, $By+Cz=0$бўлиб, улар мос равишда OZ, OY, OX координат ўқларидан ўтади;
4) $B=C=0$, бўлса, $Ax+D=0$ текислик YOZ координат текислигига параллел, худди шундай $By+D=0$, $Cz+D=0$ текисликлар мос равишда XOZ, XOY координат текисликларига параллел бўлади;
5) $B=C=D=0$ бўлса, $Ax=0$ бўлиб, YOZ координат текислиги билан устма-уст тушади, яъни $x=0$, YOZ координат текислигининг тенгламаси бўлади. Худди шундай $y=0$ ва $z=0$, мос равишда XOZ ва XOY координат текисликларининг тенгламасини ифодалайди .

<u>5. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси.</u> (3) тенгламада A, B, C, D коэффициентлар ҳаммаси 0 дан фарқли бўлса, текислик координат ўқларидан OL, ON ва OP кесмалар ажратади(2-чизма). (3) тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$Ax+By+Cz=D, \qquad \frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1.$$

Охирги тенгламада

$$-D/A=a, \quad -D/B=b, \quad -D/C=c$$

белгилаш критсак,

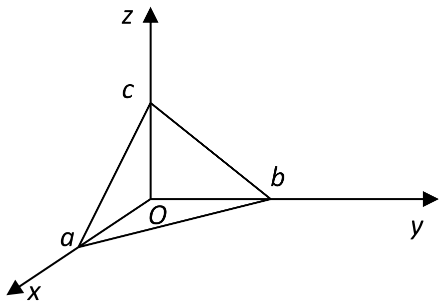
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенгламага фазода ***<u>текисликнинг кесмаларга нисбатан</u>*** тенгламаси дейилади.

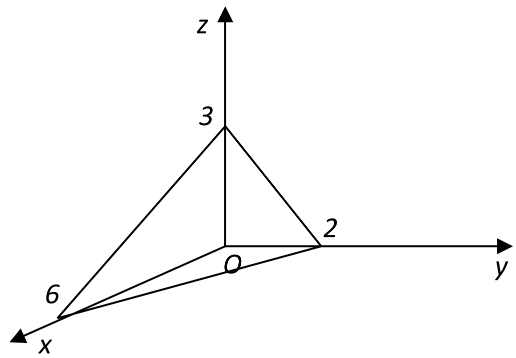
2-мисол. Текисликнинг $x+3y+2z-6=0$ умумий тенгламаси берилган, бу текисликни ясанг.

Ечиш. Тенгламани текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламасига келтирамиз:

$$x+3y+2z=6, \qquad \frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$



2-чизма



3-чизма

Охирги тенгламадан маълумки, текислик координат ўқларидан мос равишда 6, 2, 3 кесмалар ажратади. Бу кесмаларнинг охиридан текисликни ўтказамиз (3-чизма).

<u>6. Берилган учта</u> $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ **ва** $C\,(x_3;\, y_3;\, z)$ **<u>нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси</u>**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

кўринишда бўлиб, учта векторнинг компланарлигидан келиб чиқади. $M\,(x,\, y,\, z)$ текисликдаги ихтиёрий нуқта. $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ векторлар компланардир.

<u>7. Икки текислик орасидаги бурчак. Нуқтадан текисликкача масофа.</u>

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\,,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

текисликлар орасидаги бурчак уларнинг нормал $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлари орасидаги бурчакка тенг бўлиб,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5)$$

формула њринли бњлади. (5) га иккита текислик орасидаги бурчак косинусини топиш формуласи дейилади.

$\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлар коллинеар бўлса,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

бўлиб**, *<u>бу икки текисликнинг параллеллик шарти дейилади.</u>***.

$\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлар перпендикуляр бўлса,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

бўлиб, *<u>бу икки текисликнинг перпендикулярлик шарти</u>* бўлади. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ <u>нуқтадан</u> $Ax + By + Cz + D = 0$ <u>текисликкача бўлган масофа</u>

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6)$$

формула билан топилади.

3-мисол. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ ва $2x + 3y + z + 8 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $n_1\ (1,\ 2,\ -3)$ ва $n_2\ (2,\ 3,\ 1)$ мос равишда берилган текисликларнинг нормал векторлари бўлганлиги учун (5) формулага асосан,

$$\cos\varphi \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}, \qquad \varphi \approx 69^0 05^1$$

бўлади.

4-мисол. $2x - y - 2z + 4 = 0$ ва $2x - y - 2z - 8 = 0$ текисликларнинг параллеллигини кўрсатинг ва улар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Берилган текисликларнинг нормал векторлари $n_1\ (2,\ -1,\ -2)$ ва $n_2\ (2,\ -1,\ -2)$ параллеллик шартини қаноатлантиради, демак берилган текисликлар ҳам параллелдир. Энди биринчи текисликда бирор нуқтани аниқлаб ундан иккинчи текисликкача бўлган масофани топамиз. $x = z = 0$ бўлса, биринчи текислик тенгламасидан $y = 4$ бўлиб, $M_0\ (0;\ 4;\ 0)$ нуқта биринчи текисликдаги нуқта бўлади. (6) формулага асосан,

$$d = \frac{|2\cdot 0 - 1\cdot 4 - 2\cdot 0 - 8|}{\pm\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4.$$

Демак, параллел текисликлар орасидаги масофа $d = 4$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. R^3 фазода нуқтанинг ўрни қандай аниқланади?
2. Қандай мосликка бир қийматли мослик дейилади?
3. R^3 фазодаги координатлар қандай аниқланади?
4. Координат текисликлари нима?
5. Координат текисликлари R^3 фазони нечта бўлакка ажратади?
6. R^3 фазода икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?
7. R^3 фазода сирт ва унинг тенгламаси қандай аниқланади?
8. Сиртнинг тартиби деб нимага айтилади?
9. Сферик сирт нечанчи тартибли?
10. Берилган нуқтадан ўтиб ва берилган векторга перпендикуляр текислик тенгламаси қандай бўлади?
11. Қандай векторга текисликнинг нормал вектори дейилади?
12. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий холлари қандай бўлади?
13. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси қандай ёзилади?
14. Берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси детерминант орқали қандай бўлади?
15. Иккита текислик орасидаги бурчак қандай топилади?
16. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа нима ва у қандай топилади?
17. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари нима?

Мустақил бажариш учун топшириљлар

1. $A(2, 5, 0)$ ва $B(5, 1, 12)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.
2. Учлари $A(5, 2, 6)$, $B(6, 4, 4)$, $C(4, 3, 2)$ ва $D(3, 1, 4)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканлигини кўрсатинг.
3. $A(3, 7, 4)$ ва $B(8, 2, 3)$ нуқталарни туташтирувчи AB кесмани $\lambda = 2:3$ нисбатда бўлувчи $C(x, y, z)$ нуқтани топинг.
4. AB кесманинг бошланғич нуқтаси $A(-1, 2, 4)$ ва уни $\lambda = 1:2$ нисбатда бўлувчи $C\ (2, 0, 2)$ нуқта берилган. $B\ (x, y, z)$ нуқтани топинг.
5. Учлари $A(5, 3, -10)$, $B(0, 1, 4)$ ва $C(-1, 3, 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг AE медианасининг узунлигини топинг.

6. $A(3,\ 6,\ -5)$ ва $B(1,\ -1,\ 2)$ нуқталарга параллел йњналган F_1 ва F_2 кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси F қўйилган $N(x,\ y,\ z)$ нуқтани топинг. $|F_1| = 5H$ ва $|F_2| = 2H$. Кўрсатма: Физикадан маълумки параллел кучларни қўшганда AN ва NB елкалар унга қўйилган кучларга тескари пропорцианалдир, яъни $AN : NB = |F_2| : |F_1| = 2:5 = \lambda$ бўлади.

7. $M_1\ (4,\ 2,\ -6)$ ва $M_2\ (2,\ -2,\ 4)$ нуқталарга P_1 ва P_2 параллел кучлар қўйилган. $|P_1| = 2$, $|P_2| = 6$ бўлса тенг таъсир этувчи P кучнинг қўйилган нуқтасини топинг.

8. $M(2;\ -3;\ 2)$ нуқтадан ўтиб, $N(5,\ 4,\ 3)$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

9. $M_0(2;\ 5;\ 4)$ нуқтадан ўтиб, ординат ўқидан $b=-6$, апликата ўқидан $c=3$ кесма ажратиб ўтган текислик тенгламасини ёзинг.

10. OX ўқига параллел ва $P(4;\ 0;\ -2)$, $Q(5,\ 1,\ 7)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

12-мавзу. Фазода тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари

Режа

1. Фазода берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган йўналтирувчи векторга эга бўлган тўғри чизиқ векторли тенгламаси.

2. **Фазода тўғри чизиқ(ФТЧ)нинг параметрик ва каноник тенгламалари.**

3. Фазода умумий ва проекцияларга нисбатан ҳамда берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари.

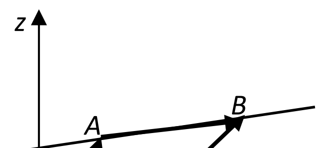
4. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак.

5.Фазода тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак.

Таянч ибора ва тушунчалар

Йўналтирувчи вектор, векторли, параметрик, каноник, умумий, проекцияларга нисбатан тенгламалар, икки текисликнинг кесими, фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак ҳамда уларнинг параллеллиги ва перпендикулярлиги, фазода тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак ҳамда уларнинг параллеллиги,перпендикулярлиги, фазода тўғри чизиқнинг координат текисликларидаги излари.

1. **Фазода берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган йўналтирувчи векторга эга бўлган тўғри чизиқ векторли тенгламаси.** Фазода тўғри чизиқнинг ҳолати у ўтадиган бирор $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқта ва тўғри чизиқ параллел бўлган $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ **йўналтирувчи вектор**нинг берилиши билан тўла аниқланади. Унинг тенгламасини ёзиш учун унда ихтиёрий $B(x,\ y,\ z)$ нуқта оламиз (1-чизма).



1-чизма

Маълумки, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ бўлиб, $\vec{AB}$ вектор $\vec{s}$ векторга коллинеар, яъни $\vec{AB} = t\,\vec{s}$, $t-$ скаляр параметр. $\vec{OA} = \vec{r}_0$, $\vec{OB} = \vec{r}$ десак,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s} \qquad (1)$$

бўлади. (1) тенгликка **фа*зода тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси*** дейилади.

2. **Фазода тўғри чизиқ(ФТЧ)нинг параметрик ва каноник тенгламалари.**

$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$, $\vec{s} = m\,\vec{i} + n\,\vec{j} + p\,\vec{k}$ бўлганлиги учун (1) тенгламадан векторларнинг тенглигига асосан,

$$\begin{cases} x = x_1 + tm, \\ y = y_1 + tn, \\ z = z_1 + tp \end{cases} \qquad (2)$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бунга ***тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси*** дейилади, бунда $t-$ параметр.

(2) тенгламадан t параметрни йўқотсак,яъни

$x - x_1 = tm, \quad \dfrac{x - x_1}{m} = t, \quad$ *худди шундай* $\dfrac{y - y_1}{n} = t, \quad \dfrac{z - z_1}{p} = t$ *,булиб,охирги 3*

тенгликларнинг унг томонлари тенг булганлиги учун

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (3)$$

тенглама келиб чиқади. (3) тенгламага тўғри чизиқнинг ***каноник тенгламаси*** дейилади.

1-мисол. $M_0\ (2;\ -3;\ 5)$ нуқтадан ўтиб координат ўқлари билан $\alpha = \pi/4,\ \ \beta = \pi/3,\ \ \gamma = \pi/3$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.

Ечиш.Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида

$$s = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k\ = \frac{\sqrt{2}}{2}i\ + \frac{1}{2}j\ + \frac{1}{2}k$$

векторни оламиз.

(3) тенгламага асосан,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z-5}{1/2}$$

тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини ҳосил қиламиз.

Охирги тенгликларнинг ҳар бирини t билан белгилаб,

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}/2} = t \qquad \frac{y+3}{1/2} = t \qquad \frac{z-5}{1/2} = t$$

ёки

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2;$$

$$y = \frac{1}{2}\ t - 3;$$

$$z = \frac{1}{2}\ t + 5$$

тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини ҳосил қиламиз.

3. Фазода умумий ва проекцияларга нисбатан ҳамда берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари. Фазода тўғри чизиқни **икки текисликнинг кесими**дан иборат деб ҳам қараш мумкин. Шунинг учун тўғри чизиқни аналитик ҳолда қуйидаги система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

орқали ҳам ифодалаш мумкин. (4) тенгламада A_1, B_1, C_1 коэффициентлар мос равишда A_2, B_2, C_2 коэффициентларга пропорционал бўлмаса у тўғри чизиқни ифодалайди. Бунга тўғри чизиқнинг ***умумий тенгламаси*** дейилади.

(4) системадан биринчи y номаълумни, кейин x номаълумни йўқотсак,

$$\begin{cases} x = x_1 + mz, \\ y = y_1 + nz \end{cases} \qquad (5)$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бундаги биринчи тенглама OY ўққа параллел бўлган текислик, иккинчиси OX ўққа параллел бўлган текислик бўлиб, берилган тўғри чизиқни XOZ ва YOZ координат текисликларига проекциялайди. (5) системага тўғри чизиқнинг ***проекцияларга*** нисбатан тенгламаси дейилади.

$M_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ **берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ** тенгламаси текисликда берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидагидек ушбу кўринишда

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (6)$$

бўлади.

2-мисол. $\begin{cases}2x+y-5z+3=0,\\3x+2y-4z+2=0\end{cases}$

тўғри чизиқнинг проекцияларга нисбатан ва каноник тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. Берилган тенгламалар системасидан олдин y ни йўқотамиз, бунинг учун биринчи тенгламани (-2) кўпайтириб тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшиб $-x+0+6z-4=0$, ёки $x=6z-4$ тенгламани ҳосил қиламиз. Энди x номаълумни йўқотамиз, бунинг учун биринчи тенгламани (3)га иккинчи тенгламани (-2) га кўпайтириб ҳадма - ҳад қўшиб $-y-7z+5=0$ ёки $y=-7z+5$ тенгламани келтириб чиқарамиз. Шундай қилиб,

$$\begin{cases}x=6z-4,\\y=-7z+5\end{cases}$$

система тўғри чизиқнинг проекцияларга нисбатан тенгламаси бўлади.

Охирги тенгламалар системасини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{matrix}x+4=6z\\y-5=-7z\end{matrix} \quad \text{ёки} \quad \frac{x+4}{6}=z\ , \qquad \frac{y-5}{-7}=z\ .$$

Демак, $$\frac{x+4}{6}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z-0}{1}\ .$$

Бу тўғри чизиқнинг каноник тенгламасидир.

3-мисол. Учбурчакнинг учлари $A\,(3,\ -2,\ 1)$, $B\,(6,\ 5,\ -7)$ ва $C\ (5,\ -4,\ 3)$ берилган. BD медиананинг каноник тенгламасини ёзинг.

Ечиш. D нуқта AC томонни тенг иккига бўлади. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласига асосан:

$$x_D=\frac{3+5}{2}=4, \qquad y_D\frac{-2-4}{2}=-3, \qquad z_D=\frac{1+3}{2}=2\ .$$

Демак, $D(4,\ -3,\ 2)$ бњлади. Медиана B ва D нуқталардан ўтади. (6) формулага асосан:

$$\frac{x-6}{4-6}=\frac{y-5}{-3-5}=\frac{z+7}{2+7} \quad \text{ёки} \quad \frac{x-6}{-2}=\frac{y-5}{-8}=\frac{z+7}{9}\ .$$

Бу BD медиананинг каноник тенгламасидир.

<u>4. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак.</u> Фазода иккита тўғри чизиқ каноник тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}; \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Бу **тўғри чизиқлар орасидаги бурчак**, уларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка тенг бўлиб,

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\cdot\sqrt{m_2{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}} \qquad (7)$$

формула ёрдамида топилади.

Берилган тўғри чизиқлар параллел бўлса,

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (8)$$

бўлиб, бу фазода **икки тўғри чизиқнинг *<u>параллеллик</u>* шарти** дейилади.

Тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, йўналтирувчи векторлар ҳам перпендикуляр бўлиб,

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0 \qquad (9)$$

бўлади, бу **икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шарти**дир.

4-мисол. $\frac{x-5}{7}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-2}{1}$ *ва* $\frac{x-8}{7}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-4}{-1}$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Олдин тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларини топамиз:

$$\vec{s}_1=7\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}, \qquad \vec{s}_2=7\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}.$$

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак уларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка тенг. (7) формулага асосан:

$$\cos\varphi=\frac{7\cdot7+5\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{\sqrt{7^2+5^2+1^2}\cdot\sqrt{7^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{28}{15\sqrt{22}}\approx 0.3127,$$

$\cos\alpha\approx0.3127$.

Жадвалдан $\varphi\approx71^0 48^1$ эканлигини топамиз.

5-мисол. $M_0\ (2,\ -1,\ 3)$ нуқтадан ўтиб,

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{4}$$

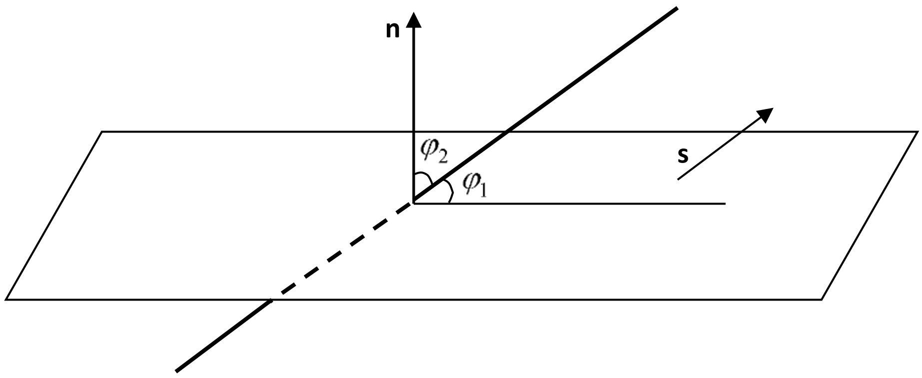
тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Изланаётган тўғри чизиқ йўналтирувчи вектори учун берилган тўғри чизиқ йўналтирувчи векторини олиш мумкин, чунки улар шартга кўра параллел, яъни $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ йўналтирувчи вектор бўлади. Берилган нуқтадан ўтиб, $\vec{s}$ йуналтирувчи векторга эга бўлган, изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси (3) га асосан,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

бўлади.

5.Фазода тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак. Фазода тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак деб, тўғри чизиқнинг текисликдаги проекцияси билан тўғри чизиқ орасидаги қўшни бурчаклардан бири олинди (2-чизма).



2-чизма.

Тўғри чизиқ $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ каноник тенгламаси билан текислик $Az + By + Cz + D = 0$ умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. φ_1 бурчакни топиш учун тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ вектор билан текисликнинг нормал вектори орасидаги φ_2 бурчакни ҳисоблаймиз:

$$\cos\varphi_2 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}}.$$

φ_1 бурчак φ_2 бурчакни $\pi/2$ гача тўлдиради. Демак,

$$\cos\varphi_2 = \cos(\pi/2 - \varphi_1) = \sin\varphi_1$$

Шундай қилиб,

$$\sin\varphi_1 = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}} \qquad (10)$$

бўлади. (10) фазода тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчакни топиш формуласи бўлади.

Тўғри чизиқ текисликка параллел бўлса $\vec{s}(m,n,p)$ ва $\vec{n}(A,B,C)$ векторлар перпендикуляр бўлиб,

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (11)$$

тенглик ўринли бўлади. (11) тенгликка **тўғри чизиқ ва текисликнинг *<u>параллеллик шарти</u>*** дейилади. Тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, $\vec{s}(m,n,p)$ ва $\vec{n}(A,B,C)$ векторлар параллел бўлади ва

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (12)$$

муносабат келиб чиқади. (12) тенглик **тўғри чизиқ ва текисликнинг *<u>перпендикулярлик</u>* шарти** бўлади.

(11) шарт бажарилмаса тўғри чизиқ ва текислик кесишади. Кесишиш нуқтасини топиш учун, ушбу

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

уч номаълумли тенгламалар системасини ечиш керак бўлади.

6-мисол. $A(5,\ 1,\ -4)$ ва $B(6,\ 1,\ -3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ билан $2x - 2y + z - 3 = 0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. AB нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида $\vec{s} = \vec{AB}(1,0,1)$ ни оламиз. Текисликнинг нормал вектори $\vec{n}(2,-2,1)$ бўлганлиги учун (10) формулага асосан:

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2}\ \cdot\ \sqrt{4+4+1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{2/2}\ , \qquad \varphi = 45^0.$$

7 –мисол. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 7 = 0, \\ x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ тўғри чизиқни ясанг.

Ечиш. Маълумки тўғри чизиқни ясаш учун у ўтадиган иккита нуқтани аниқлаш етарли. Бунинг учун тўғри чизиқнинг координат текисликлари билан кесишиш нуқталарини топамиз. Бу нуқталарга **тўғри чизиқнинг координат текисликларидаги <u>излари</u>** дейилади.

Тўғри чизиқнинг XOY текисликдаги **изини** топиш учун берилган системада $z = 0$ деб оламиз, яъни

$$\begin{cases} 2x+3y-7, \\ x+2y-4=0. \end{cases}$$

Бу системани $x,\ y$ номаълумларга нисбатан ечсак, $x=2,\quad y=1$ бўлади. Демак, берилган тўғри чизиқнинг XOY координата текислигидаги изи $M_1\ (2, 1, 0)$ нуқта бўлади.

Энди тўғри чизиқнинг XOZ текисликдаги изини топамиз. Бунинг учун берилган тенгламалар системасида $y=0$ деб, ҳосил бўлган системани ечиб, $x=2,\quad z=1$ топамиз. Демак, тўғри чизиқнинг XOZ текисликдаги изи $M_2\ (2, 0, 1)$ бўлади. Топилган M_1 ва M_2 нуқталардан тўғри чизиқ ўтказамиз.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. R^3 фазода тўғри чизиқ қандай аниқланади?
2. Тўғри чизиқнинг векторли, параметрик ва каноник тенгламалари қандай ёзилади?
3. Тўғри чизиқнинг умумий ва проекцияларга нисбатан тенгламалари нималардан иборат?
4. R^3 фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак қандай топилади?
5. Фазода икки тўғри чизиқнинг параллеллик шарти қандай?
6. Фазода икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шарти нима?
7. Фазода тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак деб қайси бурчак олинади?
8. Фазода тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик шарти нимадан иборат?
9. Фазода тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлик шарти қандай?

Мустақил иш учун топшириқлар

1. $M_0\,(2,\ 5,\ -4)$ нуқтадан ўтиб $\vec{s}(3,6,7)$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.
2. $M\,(1,\ -3,\ -5)$ нуқтадан ўтиб, координат ўқлари билан $\alpha=\pi/4$, $\beta=2\pi/3$, $\gamma=\pi/3$ бурчаклар ташкил этувчи тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.

3. $M_1(3,\ -2,\ 5)$ ва $M_2(6,\ 1,\ 7)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ каноник ва параметрик тенгламаларини ёзинг.

4. 1) $\begin{cases} 5x+y-3z-3=0, \\ 4x+y-2z-2=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x-5y+3z+4=0, \\ x-2y-z+3=0 \end{cases}$.
тўғри чизиқларнинг проекцияларга нисбатан ва каноник тенгламаларини ёзинг.

5. Учлари $A(1,\ 4,\ 2)$, $B(3,\ 5,\ 4)$ ва $C(-1,\ 1,\ 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак AD медианасининг каноник тенгламасини ёзинг.

6. $\begin{cases} 2x-3y+5z-2=0, \\ 3x-5y-4z-2=0 \end{cases}$
тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини ёзинг.

7. $3x-2y+5z-4=0$ текисликка координатлар бошидан ўтказилган перпендикулярнинг каноник тенгламасини ёзинг.

13-мавзу. Сонли кетма-кетликлар

Режа

1. Сонли кетма-кетлик таърифи ва умумий тушунчалар.
2. Чегараланган ва чегараланмаган сонли кетма-кетликлар.
3.Чексиз катта ва чексиз кичик кетма-кетликлар ҳамда уларнинг хоссалари.
4. Сонли кетма-кетликнинг лимити ва унинг хоссалари.

Таянч ибора ва тушунчалар

Сонли кетма-кетлик, умумий ҳад, чегараланган ва чегараланмаган кетма-кетликлар, қуйидан чегараланган, чексиз катта ва чексиз кичик кетма-кетликлар, кетма-кетликнинг лимити, яқинлашувчи кетма – кетлик, нуқтанинг атрофи, чексиз лимит, чекли лимит.

1. Сонли кетма-кетлик таърифи ва умумий тушунчалар

1-таъриф. Натурал сонлар қаторидаги

$$1,2,3,\ \dots,\ n,\ \dots$$

ҳар бир n сонга ҳақиқий x_n сон мос қўйилган бўлса,

$$x_1, x_2\ ,\dots,\ x_n\ ,\dots \qquad (1)$$

(1) ҳақиқий сонлар тўпламига сонли кетма-кетлик ёки қисқача кетма-кетлик дейилади.

$x_1, x_2\ ,\dots,\ x_n\ ,\dots$ сонларга сонли кетма-кетликнинг ҳадлари дейилиб, x_n га кетма – кетликнинг умумий ҳади ёки n – ҳади деб аталади, (1) сонли кетма-кетликни қисқача $\{x_n\}$ символ билан белгиланади. Масалан, 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сонлар кетма-кетлиги

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}\ldots$$

бўлади;

2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ сонлар кетма-кетлиги $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$ бўлади.

Сонли кетма-кетликнинг умумий ҳадини олиш усули кўрсатилган бўлса, у берилган дейилади. Мисол учун, 1) $x_n = 2+(-1)^n$ бўлса, у 1, 3, 1, 3, 1, 3, ..., 1, 3, ... ;

3) $\frac{2}{3}$ касрни ўнли касрга айлантирганда вергулдан кейин битта, иккита, учта ва ҳоказо рақамларни олиб,

$$x_1 = 0,6,\ x_2 = 0,66,\quad x_3 = 0,666,\ ...$$

сонлар кетма-кетлигини олиш мумкин;

4) $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,...,\ a_1+(n-1)d,\ ...$

арифметик прогрессия ҳам сонли кетма-кетликдир, бунда a_1 биринчи ҳад, d арифметик прогрессия айирмаси;

4) $b_1, b_1q, b_1q^2,\ldots, b_1\,q^{n-1},\ldots$

сонлар кетма-кетлиги ҳам кетма-кетликка мисол бўлади, бу биринчи ҳади b_1 махражи q бўлган геометрик прогрессиядир.

Сонли кетма-кетликнинг таърифидан маълумки, у чексиз сондаги элементларга эга бўлиб, улар ҳеч бўлмаганда ўзларининг тартиб рақами билан фарқ қилади.

Сонлар кетма-кетлигининг геометрик тасвири сонлар ўқидаги нуқталар билан ифодаланади.

Сонли кетма-кетликлар устида ушбу арифметик амалларини бажариш мумкин: 1) $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлигини сонга кўпайтириш,

$$m\,x_1,\ m\,x_2,\ m\,x_3,...,mx_n,....$$

кўринишда бўлади;

2) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг йиғиндиси

$$x_1+y_1,\ \ x_2+y_2,...,x_n+y_n,...;$$

кўринишда аниқланади;

3) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетилигини айирмаси

$$x_1 - y_1,\ x_2 - y_2, ..., x_n - y_n, ...$$
кўринишда бўлади;

4) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлиги кўпайтмаси

$$x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2, ..., x_n \cdot y_n, ...;$$
каби аниқланади;

5) иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг нисбати, махраж 0 дан фарқли бўлганда,

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}, ...$$

кўринишда бўлади ҳамда мос равишда $\{mx_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ символлар билан белгиланади.

2. Чегараланган ва чегараланмаган сонли кетма-кетликлар. 1-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма – кетлиги учун шундай M (m сон) сон мавжуд бўлиб, кетма-кетликнинг исталган элементи учун $x_n \le M\ (x_n \ge m)$ тенгсизлик бажарилса $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.

2-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги қуйидан ва юқоридан чегараланган бўлса, яъни шундай m ва M сонлар мавжуд бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг исталган элементи учун $m \le x_n \le M$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган дейилади.

3-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги учун шундай A мусбат сон мавжуд бўлиб, x_n элемент мавжуд бўлиб, $|x_n| > A$ (яъни $x_n > A$ ёки $x_n < -A$) тенгсизлик бажарилса $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги чегараланмаган дейилади.

Юқоридаги таърифлардан келиб чиқадики, $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлса, унинг ҳамма элементлари $(-\infty,\ M]$ оралиққа тегишли, $\{x_n\}$ кетма-кетлик қуйидан чегараланган бўлса, унинг ҳамма элементлари $[m,\ +\infty)$ оралиққа тегишли, юқоридан ва қуйидан чегараланган бўлса, $[m,\ M]$ оралиққа тегишли бўлади.

Мисоллар:

1) 1, 2, 3, ..., n, ... сонлар кетма-кетлиги қуйидан чегараланган, лекин юқоридан чегараланган;

2) -1, -2, -3, ..., -n, ... сонлар кетма-кетлиги юқоридан чегараланган;

3) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n},...$ сонлар кетма-кетлиги чегараланган, чунки унинг ҳамма элементлари учун $0 \le x_n \le 1$ тенгсизлик бажарилади, бунда $m = 0$ $M = 1$ бўлади;

4) -1, 2, -3, 4, -5, ..., $-(-1)^n n$,... сонлар кетма-кетлиги чегараланмаган, чунки қандай А сон олмайликки, бу кетма-кетлик ичида $|x_n| > A$ тенгсизликни қаноатлантирувчи элементлари мавжуд бўлади.

3.Чексиз катта ва чексиз кичик кетма-кетликлар ҳамда уларнинг хоссалари

1-таъриф. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги исталган A сон учун, шундай N рақам мавжуд бўлиб, ҳамма $n > N$ лар учун $|x_n| > A$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги чексиз катта кетма-кетлик дейилади.
$\{x_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик чегараланмаган бўлади.

2-таъриф. Исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N рақам мавжуд бўлиб, $n > N$ лар учун $|x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз кичик сонлар кетма-кетлиги дейилади.

Мисоллар:

1) натурал сонлар кетма-кетлиги $\{n\}$ чексиз катта кетма-кетликдир;

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ сонлар кетма-кетлиги чексиз кичикдир, ҳақиқатан ҳам, исталган $\varepsilon > 0$ сон олсак, $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ дан $n > \frac{1}{\varepsilon}$ бўлиб, N учун $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ бутун қисми) олиб, ҳамма $n > N$ лар учун $\frac{1}{n} = |x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. 2-таърифга асосан $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик бўлади. Чексиз кичик ва чексиз катта кетма-кетликлар орасида ушбу боғлиқлик бор.

1-теорема. $\{x_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик ва унинг ҳамма элементлари 0 дан фарқли бўлса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетлик ва аксинча $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик ва $\alpha_n \ne 0$ бўлса, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз катта кетма-кетлик бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик бўлсин. Исталган $\varepsilon > 0$ сон олиб, $A = \frac{1}{\varepsilon}$ дейлик. 1-таърифдан шу А сон учун шундай N рақам мавжудки, $n > N$ лар учун $|x_n| > A$ бўлади. Бундан ҳамма $n > N$ учун $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$ келиб чиқади. Бу $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичиклигини билдиради. (Теореманинг иккинчи қисмини исбот қилишни ўқувчига ҳавола этамиз).

Чексиз кичик кетма-кетликлар қуйидаги хоссаларга эга.

2-теорема. Иккита чексиз кичик кетма-кетликларнинг алгебраик йиғиндиси яна чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

Исбот. $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликлар бўлсин. Бу чексиз кичик кетмк-кетликлар учун, исталган ε сон учун N_1 рақам топиладики, $n > N_1$лар учун, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик, N_2 рақам топиладики, $n > N_2$ Лар учун $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар бажарилади. $N = \max\{N_1,\ N_2\}$ десак, $n > N$ лар учун бирданига $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар бажарилади. Шундай қилиб,

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бњлади.

Бу $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичик эканлигини билдиради.

Натижа. Исталган чекли сондаги чексиз кичикларнинг алгебраик йиғиндиси яна чексиз кичик кетма-кетликдир.

3-теорема. Иккита чексиз кичик кетма-кетликнинг кўпайтмаси, чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

Исбот. $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ лар чексиз кичик кетма-кетликлар бўлсин. $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичиклигини исботлаш талаб этилади. $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик бўлганлиги учун, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N_1 рақам топиладики, $n > N_1$ лар учун $|\alpha_n| < \varepsilon,$ $\{\beta_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик бўлганлиги учун $\varepsilon = 1$ учун шундай N_2 топиладики $n > N_2$ лар учун $|\beta_n| < 1,$ бажарилади. $N = \max\{N_1,\ N_2\}$ деб олсак, $n > N$ лар учун иккала тенгсизлик ҳам бажарилиб,

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| \le |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

бўлади. Бу $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичиклигини билдиради.
Натижа. Исталган сондаги чексиз кичикларнинг кўпайтмаси яна чексиз кичик бўлади.
Эслатма. Иккита чексиз кичикларнинг нисбати чексиз кичик бўлмаслиги мумкин, масалан, $\alpha_n = \frac{1}{n}, \beta_n = \frac{1}{n}$ чексиз кичикларнинг нисбати ҳамма элементлари 1 лардан иборат чегараланлан кетма-кетликдир. $\alpha_n = \frac{1}{n}, \beta_n = \frac{1}{n^2}$ чексиз кичик кетма-кетликларнинг нисбати $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \{n\}$ бўлиб, чексиз катта кетма-кетлик ҳосил бўлади. $\alpha_n = \frac{1}{n^2}, \beta_n = \frac{1}{n}$ бўлса, уларнинг нисбати $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ чексиз кичик бўлади.
4-теорема. Чегараланган кетма-кетликнинг чексиз кичик кетма-кетликка кўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетлик бўлади. (Бу теореманинг исботини ўқувчига ҳавола қиламиз).

4. Сонли кетма-кетликнинг лимити ва унинг хоссалари

1-таъриф. Исталган $\varepsilon > 0$ сон учун унга боғлиқ бўлган N сон топилсаки, барча $n > N$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, a сонга $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $n \to \infty$ даги лимити дейилади ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{ёки} \quad n \to \infty \text{ да } x_n \to a$$

символлар билан белгиланади. Чекли лимитга эга сонли сонли кетма-кетликка, яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Лимитнинг таърифига мисол қараймиз.
Лимитнинг таърифидан фойдаланиб, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ эканлигини кўрсатамиз. Исталган $\varepsilon > 0$ сон оламиз.

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

бўлганлиги учун, $|x_n - 1| < \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи n ларнинг қийматини топиш, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ тенгсизлик билан боғлиқ ва $1 < \varepsilon(n+1)$ *ёки* $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ бўлади. Шунинг учун N сифатида $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ соннинг бутун қисмини олиш мумкин, яъни $N=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ бњлади. Бу ҳолда $|x_n-1|<\varepsilon$ тенгсизлик ҳамма $n>N$ лар учун бажарилади. Масалан, $\varepsilon=0{,}1$ бўлсин, бу ҳолда

$$N=\left[\frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right]=\left[\frac{0{,}9}{0{,}1}\right]=9. \quad n=10>N=9$$

бўлсин. Бунда

$$x_{10}=\frac{10}{10+1}=\frac{10}{11}$$

бўлиб,

$$|x_{10}-1|=\left|\frac{10}{11}-1\right|=\frac{1}{11}<\varepsilon=0{,}1.$$

Шундай қилиб n=10 дан бошлаб, ҳамма n лар учун $|x_{10}-1|<0{,}1$ тенгсизлик бажарилади.

Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ тенглик ўринли бўлади.

Бошқа бир неча $\varepsilon>0$ лар олиб, қайси рақамлардан бошлаб, тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатишни ўқувчига ҳавола этамиз.

Эслатма 1. $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги бирор a лимитга эга бўлса, уни $\alpha_n=x_n-a$ чексиз кичик миқдор кўринишида ифодалаш мумкин, чунки $\varepsilon>0$ сон учун шундай N топиладики, $n>N$ лар учун

$$|\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Шунинг учун a лимитга эга бўлган $\{x_n\}$сонлар кетма-кетлигини

$$x_n-a=\alpha_n$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда α_n чексиз кичик кетма-кетлик.

2-таъриф. $\varepsilon>0$ бирор мусбат сон бўлсин. $|x_n-a|<\varepsilon$ тенгсизлик ҳамма n лар учун бажарилса, $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги a нуқтанинг ε атрофида дейилади.

2-эслатма. Маълумки $|x_n-a|<\varepsilon$ тенгсизлиги

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \text{ ёки } a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

тенгсизлик билан тенг кучли бўлиб, x_n элемент a нуқтанинг ε атрофида бўлади. Шунинг учун, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин:- a нуқтанинг ε атрофи учун шундай N рақамни кўрсатиш мумкин бўлсаки, ҳамма $n > N$ лардан бошлаб, ҳамма x_n элементлар a нуқтанинг ε атрофида бўлса, a сонга $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

3-эслатма. Маълумки чексиз катта кетма-кетлик лимитга эга эмас ёки уни чексиз лимитга эга дейилади ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

билан белгиланади. Кетма-кетликнинг лимитини чексиз лимитдан фарқ қилиши учун чекли лимит ҳам деб юритилади.

Эслатма. Тушунарлики, ҳар бир чексиз кичик кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити $a = 0$ га тенг.

Яқинлашувчи кетма-кетликлар қуйидаги хоссаларга эга

1.Яқинлашувчи кетма-кетликнинг лимити ягонадир.

2. Яқинлашувчи кетма-кетлик чегараланган.

Эслатма. Чегараланган кетма-кетлик яқинлашувчи бўлмаслиги мумкин. Масалан,

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

кетма-кетлик, чегараланган, лекин лимитга эга эмас.

3. $\{x_n\}$ва $\{y_n\}$ соли кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, мос равишда a ва b лимитларга эга бўлса, уларнинг алгебраик йиғиндиси ҳам яқинлашувчи бўлиб, $a \pm b$ лимитга эга бўлади.

4. $\{x_n\}$ва $\{y_n\}$ соли кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, мос равишда a ва b лимитларга эга бўлса, уларнинг кўпайтмаси ҳам яқинлашувчи бўлиб, лимити $a \cdot b$ га тенг бўлади.

5. $\{x_n\}$ва $\{y_n\}$ соли кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, мос равишда a ва b лимитларга эга бўлса, уларнинг нисбати ҳам махражнинг лимити нолдан фарқли бўлганда, яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $\frac{a}{b}$ га тенг бўлади.

Бу хоссаларни, кетма-кетликнинг лимити ва чексиз кичик кетма-кетликларнинг хоссаларидан фойдаланиб исботлаш мумкин. Масалан, 4-хоссани исботлайлик. Кетма-кетликлар яқилашувчи бўлганлиги учун

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

кўринишда ифодаланади, бунда α_n, β_n лар чексиз кичик кетма-кетликлар. Бу ҳолда

$$x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

бўлади. $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$ ифода чексиз кичик кетма-кетликнинг хоссаларига асосан чексиз кичик кетма-кетликдир. Демак $x_n y_n - ab$ ҳам чексиз кичикдир, яъни

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = 0 \quad \text{ёки} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу лимитни ҳисобланг.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{4n^2-5}$$

Ечиш. $n\to\infty$ сурат ҳам махраж ҳам чексиз катта бўлиб, нисбатнинг лимити ҳақидаги хоссани қуллаш мумкин эмас, чунки бу хоссада сурат ва махражнинг лимити мавжуд бўлиши керак эди. Шунинг учун, бу кетма-кетликларни n^2 га бўлиб, шаклини ўзгартирамиз ҳамда лимитларнинг хоссаларини кўллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{4n^2-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{5}{n^2})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}} = \frac{3+0-0}{4-0} = \frac{3}{4}.$$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Сонли кетма-кетлик деб нимага айтилади?
2. Сонли кетма – кетликнинг умумий ҳади нима?
3. Сонлар кетма – кетлиги қандай белгиланади?
4. Нуқтанинг атрофи нима?

Мустақил иш учун топшириқлар

1. Ушбу

$$x_n = \frac{1}{3n},\ x_n = \frac{n}{5n-1},\ x_n = \frac{1}{4n-1},\ x_n = 3n$$

сонли кетма-кетликларнинг n=1,2,3,4,5, бўлгандаги қийматларини ёзинг?

2. $x_n = \dfrac{n}{n+2}$ сонли кетма-кетликнинг чегараланганлигини кўрсатинг.

3. $x_n = \dfrac{3}{n},\ x_n = \dfrac{3(-1)^n}{2n},\ x_n = 3+(-1)^n$ сонлар кетма-кетлигининг геометрик тасвирини n=1,2,3,4,5,6 бўлганда кўрсатинг.

4. Бир неча арифметик ва геометрик прогрессияларнинг умумий (n-ҳади)ни ёзинг ва n=1,2,3,4,5,6 бўлгандаги қийматларини ёзинг.

5. Ушбу

$$x_n = 3n, \quad x_n = -5n+1, \quad x_n = \frac{1}{y_n+1}, \quad x_n = (-1)^n 3n$$

сонлар кетма-кетликлари чегаралангани ва қандай?

6. Бир неча чексиз катта ва чексиз кичик сонлар кетма-кетликларини ёзинг.

14-16-мавзу. Функция ҳақида асосий тушунчалар

Режа

1. Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар.
2. Функция тушунчаси.
3. Функциянинг берилиш усуллари.
4. Функциянинг айрим ҳоллари
5. Функциянинг лимит ива унинг асосий хоссалари.
6. Аниқмасликлар ва уларни очиш.

Таянч иборалар ва тушунчалар

Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар, функция тушунчаси, функция аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, аналитик усул, график усул, жадвал усул, ошкор ва ошкормас функциялар, функциянинг алгоритмик берилиши, мураккаб функция, тескари функция, функция лимити ва унинг хоссалари, кетма-кетлик, чексиз катта миқдор, чап ва ўнг лимитлар, чексиз кичик функция, кўпайтманинг ва бўлинманинг лимити, биринчи ажойиб лимит, аниқмасликларни очиш,

1. Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар. Қаралаётган жараёнда бир хил сон қийматларини қабул қиладиган миқдорларга ***ўзгармас миқдорлар*** дейилади. Масалан, қандай радиусли айлана олмайлик, унинг узунлигининг деаметрига нисбати бир хил π сондан иборат бўлади. Бу ҳолда нисбат ўзгармас миқдордир.

Қаралаётган жараёнда ҳар хил сон қийматлари қабул қиладиган миқдорларга ***ўзгарувчи миқдорлар*** дейилади. Масалан, ҳаво ҳарорати (температураси), вақт, ҳаракатнинг тезлиги ўзгарувчи миқдорлардир. Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Ҳамма ўзгарувчи миқдорларни бирданига ўрганиб бўлмайди. Энди иккита ўзгарувчи миқдорлар орасидаги боғланишни қараймиз.

2. Функция тушунчаси. ***Функция тушунчаси*** математиканинг энг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, унинг ёрдамида табиат ва жамиятдаги кўп жараён ва ҳодисалар моделлаштирилади.

Математик таҳлилда элементлари ҳақиқий сонлардан иборат, бўлган тўпламларни қараймиз. X ва Y лар ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. $x \in X$ тўпламда, $y \in Y$ тўпламда ўзгарсин.

Таъриф. $x \in X$ ҳар бир x га бирор қоида ёки қонун бўйича $y \in Y$ дан битта y мос қўйилса, X тўпламда ***функция берилган*** **(аниқланган)** деб аталади ва у

$$y = f(x)$$

символ билан белгиланади. Айрим ҳолларда $y = xf$ ҳам деб белгиланадики, бунда компьютерда олдин x қиймати олиниб, кейин ҳисобланадиган символ олинади. Бунда X тўпламга функциянинг **<u>аниқланиш соҳаси</u>,** Y тўпламга ўзгариш соҳаси ёки ***<u>қийматлар тўплами</u>*** дейилади. Одатда функция аниқланиш соҳасини D, қийматлар тўпламини E билан белгиланади.

Шундай қилиб, ҳар бир элемент $x \in X$ га битта ва фақат битта $y \in Y$ мослик ўрнатилган бўлса, бу мосликка X тўпламда функция аниқланган дейилади. x га **эркли ўзгарувчи** ёки **аргумент,** y га эса **эрксиз ўзгарувчи** ёки x **нинг функцияси** дейилади.

Шундай қилиб, функция берилган бўлиши учун: 1) X тўплам берилиши керак (кўп ҳолларда уни x билан y ўзгарувчиларнинг боғланишига кўра топилади); 2) x ўзгарувчининг X тўпламдан олинган ҳар бир қийматига унга мос қўйиладиган y ни аниқлайдиган қоида ёки қонун берилиши керак. (таърифда уни f символ билан белгиладик).

Масалан; 1) f $X = (-\infty,\ +\infty)$ тўпламга тегишли бўлган ҳар бир сонга унинг ўзини ўзига кўпайтириб, яъни квадратга кўтариб мос қўйувчи қоида бўлсин. Бу ҳолда $y = x^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $(-\infty,\ +\infty)$ оралиқда аниқланган; 2) f ҳар бир $x \in [0,\ +\infty)$ сонга шу сондан олинган квадрат илдизни мос қўйсин. Бу $y = \sqrt{x}$ функцияни ифодалайди. Унинг аниқланиш соҳаси $[0,\ +\infty)$бўлади.

1-мисол. $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.
Ечиш. Маълумки, функциянинг аниқланиш соҳаси x нинг шундай қийматлари тўпламики, бунда y функция ҳақиқий сон қийматларга эга бўлиши керак. Берилган функцияда

$$x - 3 \geq 0,$$

$$4 - x > 0$$

бўлгандагина x нинг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати ҳақиқий бўлади. Бу тенгсизликлар системасидан, $x \geq 3, \quad x < 4$ бњлиб, яъни $3 \leq x < 4$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $[3,\ 4)$ бўлади.

<u>3. Функциянинг берилиш усуллари.</u> Функция таърифида келтирилган x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос қўйиладиган y ни аниқловчи қоида ёки қонун турлича бўлиши мумкин. Демак, функциянинг берилиши ҳам турличадир. Функция ***<u>аналитик</u>*,** ***<u>жадвал</u>*** **ва** ***<u>график</u>*** **ҳамда компьютер** усуллари ёрдамида берилиши мумкин:

1) функцияинг ***аналитик усул*** билан берилишида, x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати, x аргумент устида алгебраик амалларнинг бажарилиши натижасида, яъни формулалар ёрдамида берилади. Масалан,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

2) њзгарувчилар орасидаги боғланиш **жадвал** кўринишида берилиши мумкин. Масалан, кузатиш натижасида сутни ёпиқ идишда қиздирилганда P_1 босим остида унинг қайнаш температураси t_1, P_2 босим остида қайнаш температураси t_2 ва ҳ.к. бўлишини топганда қўйидаги жадвал келиб чиқади.

Босим P	P_1	P_2	$\cdots$	P_n
Температура t	t_1	t_2	$\cdots$	t_n

Бундан кўринадики P босим билан t температура орасида боғланиш бўлиб, P аргумент, t функция бўлади. Функциянинг бундай берилишига ***жадвал усулда*** берилган дейилади. Бундай усул кўпроқ тажрибаларда ишлатилади.

3) Функциянинг ***график усулида*** берилишида, x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликдаги бирор чизиқ ёрдамида берилади. Бунда X ва Y тўпламлар орасидаги мослик график билан берилади. XOY текисликда l чизиқ берилган бўлсин. x нинг қийматига мос келган y нинг қийматини, топиш учун x нуқтадан OX ўқига перпендикуляр ўтказамиз. У l чизиқни битта A нуқтада кесиб ўтади. A нуқтадан OY ўқига перпендикуляр ўтказамиз, бу перпендикулярнинг OY ўқи билан кесишиш нуқтаси, y нинг x га мос қиймати бўлади. Маълумки, бундай мослик l чизиқ ёрдамида бажарилади. Функциянинг бундай берилиши, **график усулда берилган** дейилади. Функциянинг график усулида берилишидан, уни аналитик усул билан ифодалаш қийин бўлган ҳолларда ва функциянинг сифат ўзгариши график усулда яхши кўринадиган ҳолларда фойдаланилади. Масалан, физикавий тажрибалар жараёнида осциллографдан олинадиган график.

4) ***алгоритмик ёки компьютер усули*.** Функциянинг бундай усулда берилишида x нинг ҳар бир қиймати учун, $y = f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблайдиган алгоритим ёки программа берилган бўлади. Бундай программа ЭҲМга қўйилган бўлиб функциянинг қиймати автоматик ҳисобланади.

4. Функциянинг айрим ҳоллари

1. Ошкор ва ошкормас функциялар. Функция $y = f(x)$ кўринишда, яъни y га нисбатан ечилган бўлса, унга ***ошкор функция*** дейилади. Функция $F(x,\ y) = 0$ кўринишда берилган бўлса, яъни y га нисбатан ечилмаган бўлса, ***<u>ошкормас</u>*** ***<u>функция</u>*** кўринишда берилган дейилади. Масалан, $y=3x^2+5,\quad y=\sin x,\quad y=4^x$ функциялар ошкор кўринишда; $2x-3y+6=0,\qquad x^2+e^{xy}+3=0$ функциялар ошкормас кўринишда берилган. Шуни таъкидлаймизки ҳамма $F(x,\ y)=0$ кўринишдаги тенглик ҳам функцияни ифодалай бермайди. Масалан, $x^2+y^2+4=0$ тенглама функцияни ифодаламайди, чунки x нинг ҳар бир қийматига y нинг ќаљиљий сон қийматини мос қўйиш мумкин эмас.

2. Мураккаб функция. $y=f(u)$ бўлиб, $u=\varphi(x)$ функция берилган бўлса, y <u>функцияга</u> $\varphi(x)$ **функциянинг функцияси** ёки y га x нинг ***<u>мураккаб функцияси</u>*** дейилади. Масалан, $y=\lg(x^2+1)$ функцияда $u=x^2+1$ бўлиб. y x нинг мураккаб функцияси бўлади. Бундан ташқари $y=\sin(x^2+1),\quad y=3^{x+5},\quad y=\sqrt[3]{(x^3-1)^2}$ ва ҳ.к. лар ҳам, мураккаб функцияга мисол бўлаолади.

3. ***<u>Тескари функция</u>*****.** $y=f(x)$ функция берилган бўлсин. y функциянинг қийматлар тўпламидаги ҳар бир қийматига x аргументнинг аниқланиш соҳасидан битта қиймати мос қўйилган бўлса, берилган функцияга ***тескари*** $x=d(y)$ ***функция*** берилган бўлади ва $D(f)=E(d)$ ва $E(f)=D(d)$ ҳар бир $x_0\in D(f)=E(d)$ ва $y_0=E(f)=D(d)$ бўлиб. $y_0=f(x_0)$ фақат $x_0=d(y_0)$ учун бажарилади. Масалан $y=2x-3$ функцияга тескари функция $2x=y+3$, $x=(y+3)/2$ бўлади. $y=x^3$ функция $x=\sqrt[3]{y}$ тескари функцияга эга бўлади. Ўзаро тескари бўлган функцияларнинг графиклари $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади.

5. Функциянинг лимити ва унинг асосий хоссалари

1. 1-таъриф. $y=f(x)$ функция $x=a$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон мавжуд бўлсаки, $|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $x\neq a$ нуқталар учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A чекли сон $y=f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги лимити деб аталади ва қуйидагича ёзилади

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad ёки \quad x\to a \quad да \quad f(x)\to A \tag{1}$$

Функция лимитининг таърифидан келиб чиқадики $x-a=\alpha$ чексиз кичик бўлганда $f(x)-A$ ҳам чексиз кичик бўлади.

2-таъриф. $y = f(x)$ функция, x нинг етарлича катта қийматларида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай, $N > 0$ мавжуд бўлсаки, $|x| > N$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, ўзгармас A сон, $y = f(x)$ функциянинг $x \to \infty$ даги лимити дейилади, ва

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad (2)$$

билан белгиланади.

1-таърифда фақат $x < a$ ёки $x > a$ бўлган қийматлар қаралса, функциянинг ***<u>чап ёки ўнг лимит</u>*** тушунчаси келиб чиқади ва

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

, (3)

билан бегиланади.

3-таъриф. Лимити $A = 0$ бўлган функцияга **чексиз кичик функция (ч. кич. ф.)** дейилади.

4-таъриф. Лимити $A = +\infty$ ёки $A = -\infty$ бўлган функцияларга **чексиз катта функция (ч. кат. ф.)** дейилади ва

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad (4)$$

билан белгиланади.

Лимитнинг таърифидан келиб чиқадики $y = C$ ўзгармас миқдорнинг лимити ўзига тенг.

<u>Функция лимитининг асосий хоссалари:</u>

1) *<u>йиғиндининг лимити</u>*. Чекли сондаги функциялар алгебраик йиғиндисининг лимити, қўшилувчи функциялар лимитларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг $x \to a$ даги лимитлари мавжуд бўлса,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (5)$$

2) чекли сондаги функциялар *<u>кўпайтмасининг лимити</u>* функциялар лимитларининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (6)$$

Натижа: Ўзгармас кўпайтувчини лимит белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни,

$$\lim_{x\to a}\left[cf_1(x)\right]=c\lim_{x\to a} f_1(x)$$

(7)

3) Иккита функция ***<u>нисбатининг лимити,</u>*** махражнинг лимити нњлдан фарқли бўлса, бу функциялар лимитларининг нисбатига тенг, яъни $\lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} \tag{8}$$

бўлади.

Лимитларни ҳисоблашда қуйидаги лимитлардан фойдаланилади:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1; \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e,\qquad e=2{,}71828\ldots \tag{10}$$

Бу лимитларга мос равишда ***<u>биринчи</u>*** **ва** ***<u>иккинчи</u>*** **ажойиб** лимитлар дейилади.

6. Аниқмасликлар ва уларни очиш

1.Аниқмасликлар. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ лимитни ҳисоблашда $f(x),\ \varphi(x)$ функциялар ч.кич.ф. лар бўлса, $f(x)/\varphi(x)$ нисбатга $x\to a$ да **<u>(0/0)</u>** **<u>кўринишдаги аниқмаслик</u>** <u>дейилади</u>. $f(x),\ \varphi(x)$ функциялар ч.кат.ф. лар бўлса, $f(x)/\varphi(x)$ нисбатга $x\to a$ да (∞/∞) ***<u>кўринишидаги аниқмаслик</u>*** *<u>дейилади</u>*. Худди шунга ўхшаш $\infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$ аниқмасликлар

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)-\varphi(x)\right],\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]\quad \textit{ва}\ \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$$

лимитларни ҳисоблашда келиб чиқади. Бундай ҳолларда лимитларни ҳисоблашга **<u>аниқмасликларни очиш</u>** <u>дейилади</u>.

$(0/0)$ ва (∞/∞) кўринишдаги аниқмасликларни очишда қуйидаги хоссадан фойдаланилади: $f(x)$ва $\varphi(x)$ функциялар $x=a$ нуқтанинг бирор атрофидаги ҳамма нуқталарда ўзаро тенг бўлса, уларнинг $x\to a$ даги лимити ҳам тенг бўлади.

Масалан, $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}$ ва $\varphi(x)=\dfrac{x+3}{2}$ функциялар x нинг $x=3$ дан бошқа ҳамма қийматлари учун тенг, чунки

$$\frac{x^2-9}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{x+3}{2}$$

Юқоридаги хоссага асосан,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x)$$

бўлади, яъни

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

натижага эга бњламиз.

Функцияларнинг лимитини топишга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}$$

эканлигини функция лимитининг таърифидан фойдаланиб исботланг.

Ечиш. Буни исботлаш учун $f(x) = (5x+6)/6x$ ўзгарувчи миқдор ва $A = 5/6$ ўзгармас миқдор орасидаги фарқ $x\to\infty$ да чексиз кичик функция эканлигини кўрсатиш кифоя. Демак,

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x+6-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ ўзгарувчи миқдор $x\to\infty$ да чексиз кичик функциядан иборат. Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to\infty}(5x+6)/6x = 5/6.$$

.

2-мисол.

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4) = 7$$

эканлигини исботланг ҳамда x ва $(2x^2-5x+4)$ларнинг қийматлари жадвали билан тушунтиринг.

Ечиш. $x\to 3$ бўлганлиги учун $x-3=\alpha$ чексиз кичик миқдордир.

$x = 3+\alpha$ ни $(2x^2-5x+4)-7$ айирмага қўйиб,

$$2(3+\alpha)^2 - 5(3+\alpha) + 4 - 7 = 2(9+6\alpha+\alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 =$$

$$= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha$$

натижага эга бњламиз.

α чексиз кичик функция бўлганлиги учун $2\alpha^2 + 7\alpha$ ҳам чексиз кичик

$$\lim_{x\to 3}(2x^2 - 5x + 4) = 7$$

бўлади. Шундай қилиб, исбот бўлди.

Энди юқоридаги ҳолатни x аргумент, $2x^2 - 5x + 4$ функция қийматлари жадвали билан кўрсатайлик. Маълумки $x \to 3$ интилади.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to 3$
$2x^2 - 5x + 4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to 7$

Бу жадвалдан кўринадики, аргументнинг 3 га яқинлашиб борувчи қийматлари учун, функциянинг мос қийматлари 7 га яқинлашиб боради, яъни $x - 3$ чексиз кичик миқдорга $2x^2 - 5x + 4 - 7$ айирманинг ҳам чексиз кичик миқдори тўғри келади. Юқоридаги жадвалда $x < 3$ бўлиб, $x \to 3$ ҳолни қарадик. $x > 3$ бўлиб, $x \to 3$ ҳолни ўқувчига мустақил кўрсатишни тавсия қиламиз.

3-мисол.

$$\lim_{x\to 2}(4x^2 - 6x + 3)$$

лимитни ҳисобланг.

Ечиш. Алгебраик йиғиндининг лимити, (5) формула, ўзгармас кўпайтувчини лимит ишорасидан чиқариш (7) формулаларга асосан:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2 - 6x + 3) = \lim_{x\to 2} 4x^2 - \lim_{x\to 2} 6x + \lim \lim_{x\to 2} 3 = 4\lim_{x\to 2} x^2 - 6\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 =$$

$$= 4(\lim_{x\to 2} x)^2 - 6\lim_{x\to 2} x + 3 = 4\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 3 = 7$$

ҳосил бњлади.

Юқоридаги мисолда, лимитларнинг хоссаларига асосан, аргумент x нинг ўрнига унинг лимитик қийматини қўйишга олиб келди.

4-мисол.

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 4x + 7)/(2x^2 - 5x + 6)$$

лимитни ҳисобланг.

Ечиш. Иккита функция нисбатининг лимити (8) формула ҳамда олдинги мисолда фойдаланилган лимитларнинг хоссаларини қўлласак,

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6} = \frac{\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim\limits_{x\to1}\left(2x^2-5x+6\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to1}3x^2-\lim\limits_{x\to1}4x+\lim\limits_{x\to1}7}{\lim\limits_{x\to1}2x^2-\lim\limits_{x\to1}5x+\lim\limits_{x\to1}6}=$$

$$=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to1}x\right)^2-4\left(\lim\limits_{x\to1}x\right)+7}{2\left(\lim\limits_{x\to1}\right)^2-5\lim\limits_{x\to1}x+6}=\frac{3\cdot1^2-4\cdot1+7}{2\cdot1^2-5\cdot1+6} = \frac{6}{3} =2$$

бўлади.

Рационал функцияинг лимитини ҳисоблаш шу функциянинг аргумент x нинг лимитик қийматидаги, қийматини ҳисоблашга келтирилди.

Эслатма. $f(x)$ элементар функцияларнинг $x\to a$ интилгандаги лимити (a аниқланиш соҳасига тегишли) функциянинг $x=a$ нуқтадаги қийматига тенг бўлади. Масалан,

$$\lim_{t\to1}\left[\lg\left(t+\sqrt{t^2+80}\right)+\sqrt{t^2+8}\right]=\lg(1+\sqrt{t^2+80})+\sqrt{1+8}=\lg10+3=1+3=4$$

.

5-мисол. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x=1$ да сурат ҳам, махраж ҳам нолга айланиб $(0/0)$ кўриниш-даги аниқмаслик ҳосил бўлади.

Сурат ва махражни $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ формула ёрдамида чизиқли кўпайтувчиларга ажратамиз. Бунда x_1 ва x_2 лар $ax^2+ba+c=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари. Демак,

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1} = \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} =$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3$$

бњлади.

6-мисол. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x\to\infty$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмас ифодага эга бўламиз. Бундай аниқмасликни очиш учун касрнинг сурат ва махражини x нинг энг юқори даражалисига, яъни x^2 га бўламиз, ҳамда лимитларнинг хоссаларидан фойдалансак

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x+4/x^2}{3+7/x-2/x^2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6+5/x+4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+7/x-2/x^2)} = \frac{6+0+0}{3+0+0} = 2$$

бўлади. Бунда $5/x,\ 4/x^2\ \ 7/x,\ 2/x^2$ лар $x\to\infty$ да чексиз кичик функциялардир.

7-мисол. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x=3$ да сурат ва махраж 0 га тенг бўлади. Махражда $\sqrt{x+1}$ иррационал ифода мавжуд, уни суратга ўтказамиз, бунинг учун касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{x+1}+2$ га кўпайтирамиз.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{(x+1)^2-2^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2) = (3+3)(\sqrt{x+1}+2) = 6\cdot 4 = 24.$$

8-мисол. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ бўлганлиги учун

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} = -\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x} =$$

$$= -\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

натижани оламиз.

9-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ лимитни биринчи ажойиб лимитдан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. $5x=\alpha$, деб алмаштирсак, бундан $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ бўлади.
Шунинг учун,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5,$$

чунки

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

10-мисол. $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ лимитни иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. $x\to\infty$ да лимитга ўтсак, 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. $3/x=\alpha$ билан алмаштирсак, бу ердан $x=3/\alpha$ ҳамда $x\to\infty$ да $\alpha\to 0$ бўлади..Демак,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3 = e^3$$

келиб чиқади.

Шундайқилиб, $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = e^3$.

11-мисол. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш: $x\to 1$да $1/(x-1)\to\infty$ ва $2/(x^2-1)\to\infty$ бўлиб, $(\infty-\infty)$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Охирги ифода $x\to 1$ да $(0/0)$ аниқмас ифода бўлади. Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

12-мисол. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x\to+\infty$ да $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. Қуйидаги шакл алмаштиришни бажарамиз:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Охирги ифода $x \to \infty$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, 11-мисолдагидек x нинг юқори даражалисига сурат ва махражини бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

бунда $x \to +\infty$ да $3/x \to 0$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1.. Қандай миқдорлар ўзгарувчи деб аталади?

2. Қандай ҳолда функция аниқланган дейилади?

3. Функционал боғланиш қандай белгиланади?

4. Функциянинг аниқланиш соҳаси деб нимага айтилади?

5. Функциянинг қийматлар тўплами нима?

6. Қандай мослик функцияни ифодалаши мумкин?

7. Функция қандай ўзгарувчи?

8. Аргумент қандай ўзгарувчи?

9. Функция қандай усулларда берилиши мумкин?

10. Ошкор ва ошкормас функциялар қандай?

11. Иккинчи ажойиб лимит нимага тенг?

Мустақил иш учун топшириқлар

1. $f(x)=x^2+1$ функция берилган:1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$; 4) $f(2a)$ ларни ҳисобланг.

2. Қуйидаги функцияларнинг $D(f)$ аниқланиш соҳасини ва $E(f)$ қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x)=\ln(x+3)$; 2) $f(x)=\sqrt{5-2x}$; 3) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$.

3. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x)=(a+x)/(a-x)$;

3) $f(x)=\lg(5x-x^2-6)$; 4) $f(x)=2^{\arccos(1-x)}$.

4. Ҳажми $v=1$ бирликка тенг бўлган цилиндр асосининг радиуси r ва баландлиги h орасидаги функционал боғланишни топинг.

5. 1) $f(u)=1-u,\ u=x^2$; 2) $f(u)=1/(1-u),\ u(x)=x-1/x$;

3) $f(u)=u^2,\ u(x)=4x$

функциялардан x нинг мураккаб функцияларини тузинг.

6. Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг ва топилган функцияларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини аниқланг:

1) $f(x)=x^2-1,\ x\in[0,+\infty)$; 2) $f(x)=2x+3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 3) $f(x)=(x-1)^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $f(x)=x^2-1,\ x\in(-\infty,0]$.

7. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг ва уларнинг графикларини ясанг.

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=-\frac{3}{x}$; 3) $y=2-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{2}{x-1}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+3}{5x}=\frac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to3}(4x-7)=5$,

3) $\lim\limits_{x\to-1}(5x+8)=3$, 4) $\lim\limits_{x\to2}(3x^2)-4x+6=10$

эканлигини функция лимити таърифидан фойдаланиб исботланг хамда x ва берилган функциялар кийматлари жадвали билан тушунтиринг.

9. Қуйидаги лимитларни, лимитларнинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисобланг:.

1) $\lim\limits_{x\to3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right]$.

10. Ушбу $(0/0)$ ва (∞/∞) кўринишдаги аниқмасликларни очинг:

1) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

11. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

12. Қуйидаги лимитларни биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлардан фойдаланиб ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

17,18-мавзу. Функциянинг узлуксизлиги ва узилиши

Режа

1. **Функция орттирмаси.**

2. **<u>Функция узлуксизлиги таърифлари</u>.**

3. <u>Функциянинг узилиш ва унинг турлари.</u>

4. <u>Иқтисодиётда қўлланиладига айрим асосий функциялар.</u>

Таянч ибора ва тушунчалар

Аргумент орттирмаси, функция орттирмаси, функция узлуксизлиги, функциянинг узулиши, оралиқда узлуксиз, иккита узлуксиз функция йиғиндиси , кўпайтмаси ва нисбати узлуксизлиги, кесмада узлуксиз функциялар хоссалари, функциянинг узилиши, 1-тур узилиш, 2-тур узилиш, бартараф этиладиган(йўқотиладиган) узилиш, элементар функцияларнинг узуксизлиги ва узилиши.

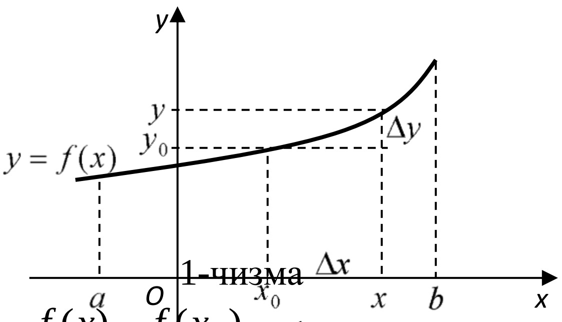
1. ***<u>Функция орттирмаси</u>***

<u>Узлуксизлик</u> математик таҳлилнинг асосий тушунчаларидан биридир. Математика узлуксиз функция тушунчасига биринчи навбатда турли ҳаракат қонунларини ўрганиш натижасида келди. Фазо ва вақт узлуксиз, масалан: ҳаракатдаги нуқтанинг босиб ўтган йўли s нинг t вақтга боғланишини ифодаловчи $s = f(t)$ қонун узлуксиз функцияга мисол бўлади.

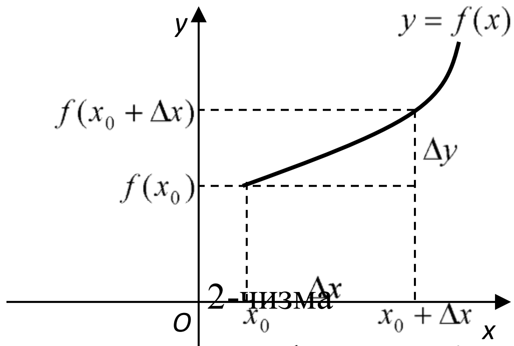
Қаттиқ жисмлар, суюқлик ва газлардаги ҳолатлар ҳамда жараёнлар узлуксиз функциялар ёрдамида тавсифланади. Бундай узлуксиз жараёнлар иқтисодиёт моделларида ҳам мавжуд. Бундай жараёнлар механика физика ва бир қанча махсус фанларда муайян ҳолда ўрганилади.

Математикада узлуксиз жараённи умумий ҳолда ўрганамиз.

<u>Функция орттирмаси</u>. $y = f(x)$ функция бирор $[a,\ b]$ кесмада аниқланган ва x_0 шу кесмадаги бирор нуқта бўлсин. x аргументнинг кейинги қиймати бўлса, $x - x_0 = \Delta x$ га ***<u>аргумент орттирмаси</u>*** дейилади (1-чизма).



1-чизма



2-чизма

$f(x) - f(x_0)$ функциянинг қийматлари орасидаги фарққа ***<u>функция орттирмаси</u>*** дейилади ва одатда Δy билан белгиланади. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ ёки

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

1-чизмадан кўринадики $\Delta x \to 0$ да $\Delta y \to 0$ бўлади.

1-мисол. $y = f(x) = x^3$ функциянинг $x_0 = 2$ нуқтада аргумент $\Delta x = 0,5$ орттирма олгандаги функция Δy орттирмасини топинг.

Ечиш. $f(x_0) = 2^3 = 8$ функциянинг бошланғич нуқтадаги қиймати. $f(x_0 + \Delta x) = f(2 + 0,5) = (2 + 0,5)^3$ функциянинг кейинги қиймати, демак, функция орттирмаси

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + 0,5)^3 - 2^3 =$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 2 \cdot 0,5^2 + 0,5^3 - 8 = 7,625$$

бњлади.

Шундай қилиб, $\Delta y = 7,625$.

2. **__Функция узлуксизлиги таърифлари__.** 1-таъриф. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, аргументнинг x_0 нуқтадаги чексиз кичик орттирмасига функциянинг ҳам чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$$

бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ***__узлуксиз дейилади__*** (2-чизма). Бу таърифга қўйидаги таъриф ҳам тенг кучлидир.

2-таъриф. x_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган $y = f(x)$ функция шу нуқтада чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит функциянинг x_0 нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ***__узлуксиз__*** дейилади.

Функция узлуксизлиги таърифлари қуйидаги ***__шартларни__*** ўз ичига олади:

1) функция x_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида аниқланган;

2) функциянинг x_0 нуқтадаги чап ва ўнг лимитлари

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

мавжуд;

3) x_0 нуқтада чап ва ўнг лимитлар ўзаро тенг, яъни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

4) чап ва ўнг лимитлар функциянинг x_0 нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

2-мисол. $y = x^3$ функциянинг $x_0 = 2$ нуқтада узлуксизлигини текширинг.

Ечиш. Маълумки, $y = x^3$ функция $x_0 = 2$ нуқтада ва унинг исталган атрофида аниқланган. Узлуксизликни 1-таърифга асосан текширамиз. Бунинг учун $x_0 = 2$ нуқтадаги функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3 = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 =$$

$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot 2 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3$$

аргумент орттирмаси $\Delta x \to 0$ га интилганда лимитга ўтамиз.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (12 \cdot \Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) = 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 + 0^3 = 0.$$

Шундай қилиб, $\Delta x \to 0$ да $x_0 = 2$ нуқтада $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, бу эса 1-таърифга асосан функция узлуксиз эканлигини билдиради. Бу мисолда x_0 нуқта ўрнига ихтиёрий нуқтани олиш мумкин(масалан, $x_0 = 3$ учун узлуксизликни текширинг).

Функция оралиқнинг ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлса, у шу **оралиқда** узлуксиз дейилади.

2-мисолда $y = x^3$ функция $(-\infty, \ +\infty)$ оралиқнинг ҳамма нуқталарида узлуксизлиги равшан. Демак, $y = x^3$ функция $(-\infty, \ +\infty)$ оралиқда узлуксиз функциядир.

Элементар функцияларнинг ҳаммаси ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиздир.

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(x)/\varphi(x)$ $(\varphi(x_0) \neq 0$ бўлганда) лар ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

<u>Кесмада узлуксиз функциянинг хоссалари</u>. $f(x)$ функция $[a, \ b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у: 1) шу кесмада чегараланган; 2) шу кесмада энг кичик ва энг катта қийматларга эришади; 3) кесманинг учларида турли ишорали қийматлар қабул қилса, шу кесманинг бирор нуқтасида 0 га тенг бўлади; 4) $f(a)$ ва $f(b)$ орасидаги барча қийматларни қабул қилади.

$y = f(z)$ ва $z = \varphi(x)$ функциялар ўз аргументларининг узлуксиз функциялари бўлса, $y = f[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам узлуксиз бўлади. $y = f(x)$ узлуксиз бўлиб, $x = \varphi(y)$ тескари функция мавжуд бўлса, у ҳам узлуксиздир.

3. <u>Функциянинг узилиш ва унинг турлари</u>

Таъриф. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган, лекин бу нуқтанинг ўзида узлуксизлик шартларидан бирортаси бажарилмаса, функция x_0 нуқтада **<u>узилишга эга дейилади</u>.**

$f(x)$ функция учун

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ чекли лимитлар мавжуд бўлса, чап ва ўнг лимитлар ҳамда $f(x_0)$ сонлар ўзаро тенг бўлмаса, x_0 нуқта ***<u>1-тур узилиш нуқтаси</u>*** дейилади.

Хусусан, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ бўлса x_0 ***бартараф қилинадиган (йўқотиладиган) узилиш*** нуқтаси дейилади.

1-тур узилиш нуқтаси бўлмаган узилиш нуқталарига ***<u>2-тур узилиш нуқталари</u>*** дейилади. Бундай нуқталарда, ақалли битта томонли лимит қиймати чексиз ёки мавжуд бўлмайди.

1-мисол. $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ функция $x_0 = 2$ нуқтада 1-тур узилишга эга эканлигини исботланг.

Ечиш. функция $x_0 = 2$ нуқтада аниқланмаган. Абсолют қиймат таърифидан $x - 2 < 0$ ёки $x < 2$ ва $x - 2 > 0$ ёки $x > 2$бњлганда мос равишда

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \quad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

бўлади.

Демак, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 1$.

Шундай қилиб, $x_0 = 2$ нуқта 1-тур узилиш нуқтаси бўлади. Бу узилиш нуқтаси **бартараф** қилиб (йўқотиб) бўлмайдиган узилиш нуқтасига киради.

2-мисол. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, функция $x_0 = 0$ нуқтада аниқланмаган, лекин $x \neq 0$ ҳамма нуқталарда аниқланган.

Бир томонли лимитлар ўзаро тенг, яъни

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Шундай қилиб, берилган функция учун $x_0 = 0$ нуқта ***<u>бартараф қилинадиган (йўқотиладиган) узилиш</u>*** нуқтаси бўлади.

3-мисол. $f(x) = 6/(x-3)^2$ функциянинг $x = 3$ нуқтада узилишга эга эканлигини кўрсатинг:

Ечиш. Берилган функция $x = 3$ нуқтадан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. $x < 3$ бўлганда $f(x) > 0$ ва $x > 3$ бўлганда ҳам $f(x) > 0$.

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = +\infty \quad \text{ва} \quad \lim_{x \to 3+0} f(x) = +\infty .$$

Бу 2-тур узилишдир .

4. <u>Иқтисодиётда қўлланиладига айрим асосий функциялар</u>

1. **Чизиқли функция.** Маълумки,

$$y = ax + b \qquad (1)$$

формула билан аниқланган функцияга чизиқли функция дейилади. Бу бурчак коэффициенти $k = a$, бошланғич ординатаси b бўлган тўғри чизиқ тенгламасидир.

1-мисол. Бирор корхонада ишлаб чиқарилаётган бир хил маҳсулот харажатини икки гуруҳ:

1) маҳсулот ҳажмига, пропорционал ўзгарувчи харажат, масалан, материаллар сарфи;

2) ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмига боғлиқ бўлмаган ўзгармас харажатлар, масалан, маъмурият биноси ижарасига, уни иситишга кетадиган ва бошқа харажатлар деб қараш мумкин.

Ўзгармас харажатларни b билан, ўзгарувчи харажатларни, маҳсулотнинг ҳир бир бирлиги учун a билан белгиласак, бирор даврда x бирлик ҳажмдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган умумий харажат

$$y = b + ax$$

бўлиб, бу чизиљли функциядир.

2-мисол. Маҳсулотнинг умумий баҳоси унинг сонига пропорционал бўлсин. a битта маҳсулот нархи бўлса, x бирлик маҳсулотнинг умумий баҳоси

$$y = ax$$

чизиқли функция билан ифодаланади, маълумки бу координатлар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасидир.

Чизиқли функция ва унинг графиги, иқтисодий миқдорлар орасида пропорционаллик мавжуд бўлган боғланишларда ишлатилади.

2. Даражали функция. Бундай функция

$$y = x^{\alpha} \qquad (2)$$

формула билан ифодаланади, бунда α 0 дан фарқли ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси α кўрсатгичга боғлиқ. α натурал сон бўлса, ҳамма ҳақиқий сонлар учун аниқланган, α бутун манфий сон бўлса,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

бўлиб, $x \neq 0$ бўлган ҳамма x лар учун аниқланган (бунда n натурал сон). $\alpha = 1/n$ кўринишдаги сон бўлса,

$$y = f(x) = x^{\alpha} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

бўлиб, n тоқ сон бўлса, $(-\infty, \ +\infty)$ интервалда, n жуфт сон бўлса, $[0, \infty)$ интервалда аниқланган.

Умуман олганда даражали функция ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиздир.

3-мисол. Италян иқтисодчиси Парето жамиятда фойдани тақсимлашнинг қуйидаги қоидасини таклиф этди: y билан x дан кичик бўлмаган фойдага эга бўлган шахслар сонини белгиласак,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

бњлади, бунда a ва m ўзгармаслар.

Парето қонуни катта фойдага эга бўлганда, тақсимотни етарли даражада аниқлик билан ифодалайди, паст даражадаги фойдага эга бўлганда аниқ эмас.

Бирор жамиятда фойдани тақсимлаш

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

формула билан аниқлансин:

1) 100000 дан кўп фойдага эга бўлган шахслар сони;

2) 100 нафар энг бой шахслар орасида, энг кам фойдани топинг.

Ечиш. 1) масала шарти бўйича, $x = 100000$, уни тақсимот формуласига қўйсак:

$$y = \frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

бўлади. Охирги тенгликни логарифмласак:

$$\lg y = \lg \frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1{,}5 \lg 100000 = \lg 2 \cdot 10^9 - 1.5 \lg 10^5 =$$
$$= 9 + 0{,}301 - 1{,}5 \cdot 5 = 9{,}301 - 7{,}5 = 1{,}801,$$

яъни $\lg y = 1.801$ бўлади. Логарифмлар жадвалидан $y = 63{,}2$ ни топамиз. Шундай қилиб, Парето тақсимоти бўйича 63 киши 100000 дан кўп фойдага эга бўлади;

2) масала шарти бўйича $y = 100,$ тақсимот формуласидан

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан $x = 73700$ эканлигини аниқлаш мумкин (уни бажаришни ўқувчига ҳавола этамиз).

Шундай қилиб, 100 нафар энг бой кишилар ичида энг кичик фойда 73700 ни ташкил этади.

Функцияларнинг иқтисодда қўлланилишига мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Бу мавзу бўйича талабаларнинг шуғулланишини таклиф этамиз.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Қандай жараён узлуксиз бўлади?
2. Функция орттирмаси нима?
3. Қандай функция узлуксиз дейилади?
4. Қандай функцияга оралиқда узлуксиз дейилади?
5. Иккита узлуксиз функция йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?
6. Кесмада узлуксиз бўлган функциялар қандай хоссаларга эга?
7. Қандай функцияга узилишга эга дейилади?

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $y = x^2$ функциянинг узлуксизлигини, $x_0 = 3,\ x = 5$ нуқталарда, орттирмалар орқали кўрсатинг.

2. 1) $y = 3x^3 + 5x^2 - 7$, 2) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5$ функциялар узлуксизлигини $x_0 = 2;\ x_1 = -3$ нуқталарда, орттирмалар орқали кўрсатинг.

Кўп узгарувчили функциялар

1-мавзу. Куп узгарувчили функциялар хакида умумий тушунчалар

Режа

1. <u>Кўп ўзгарувчили функциялар</u> ҳақида умумий тушунчалар.
2. <u>Икки ва кўп аргументли функция лимити</u>.
3. <u>Икки ва кўп аргументли функциянинг узлуксизлиги ва узилиши.</u>

Таянч ибора ва тушунчалар

Куп узгарувчили функция, икки узгарувчили функция, икки ўзгарувчили функция аникланиш ва узгариш сохалари, аникланиш сохаси, узгариш сохаси, берилиш усуллари, геометрик тасвири, лимити, узлуксизлиги ва узилиши.

1. <u>Кўп ўзгарувчили функциялар</u> ҳақида умумий тушунчалар

Табиат ва жамиятда жуда кўп масалалар борки ўзгарувчи миқдорлар боғланишларида биттасининг сонли қиймати бошқа бир нечасининг қиймати билан аниқланади. Масалан, томонларининг узунликлари x va y дан иборат бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи, унинг томонларининг узунликлари ўзгариши билан ўзгариб боради; параллелепипеднинг ҳажми унинг учала ўлчовининг ўзгариши билан ўзгаради; бирор ер майдонидан олинаётган ҳосилдорлик ернинг тузилишига, унга ўғит беришга, суғоришга, деҳқоннинг малакасига ва бошқа жуда кўп факторларга; сигирдан соғиб олинаётган сут миқдори, сигир зотига, унинг қандай ем-хашак билан боқилишига ва ҳакозоларга боғлиқ. Бундай мисолларни исталганча келтириш мумкин.

Бундай боғланишларни текшириш учун ***кўп ўзгарувчили (аргументли) функциялар*** тушунчасини киритамиз ва уларни текшириш аппарати амалларини ўрганамиз.]

1-таъриф. R^2 фазода бирор D тўпламнинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган x va y ўзгарувчилари ҳар бир (x,y) ҳақиқий сонлари жуфтлигига бирор қоидага кўра E тўпламдаги бита z ҳақиқий сон мос қўйилган бўлса, D тўпламда ***икки*** x va y ***ўзгарувчиларнинг функцияси*** z ***аниқланган*** дейилади. Икки ўзгарувчининг функцияси символик тарзда қуйидагича белгиланади:
z = f(x,y) z = F(x,y) (функция U yoki y билан ўзгарувчилар мос равишда x,t yoki x_1 x_2 лар билан белгиланган бўлса U= f (x,y) yoki y = f (x_1,x_2) тарзда ифодаланиши ҳам мумкин ва ҳ.к.). Бунда x,y ўзгарувчиларга эркли ўзгарувчилар ёки аргументлар, Z га эрксиз ўзгарувчи ёки функция деб аталади.

D тўпламга *функциянинг аниқланиш* соҳаси, E тўпламга ўзгариш ёки қийматлар соҳаси дейилади. Ҳар бир жуфт ҳақиқий сонга бирор тайин координат системасида битта M нуқта ва битта нуқтага бир жуфт ҳақиқий сон мос келганлиги учун икки аргументли функцияни M нуқтанинг функцияси ҳам деб қаралади, ҳамда $y = f(x_1, x_2)$ ўрнига $y = f(M)$ ҳам деб ёзиш мумкин.

Икки ўзгарувчили функция берилиш усуллари ҳам, бир ўзгарувчили функцияга ўхшаш ҳар хил бўлиши мумкин. Кўпроқ функциянинг ***аналитик усулда*** берилишини қараймиз. Масалан. 1) бу функция аналитик усулда бўлиб, OX_1X_2 текисликнинг ҳамма нуқталари учун аниқланган. Ўзгариш соҳаси $[0,+\infty)$ дан иборат бўлади. 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ функция аниқланган бўлиши учун $4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad yoki \;\; x^2 + y^2 \leq 4$ бўлиши керак, бундай нуқталар тўплами маркази координатлар бошида радиуси 2 га тенг бўлган доирадан иборат. Қийматлар тўплами $[0,2)$ бўлади. 3)
$u = 1\Big/\sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ функция $x^2 + y^2 - 9 > 0$, яъни маркази координатлар

бошида радиуси 3 га тенг бўлган доирадан ташқарида аниқланган. Қийматлар тўплами $(0,+\infty)$.

Икки аргументли функциянинг геометрик тасвири фазода тенгламаси z=f(x,y) бўлган сиртни ифодалайди. Масалан: 1) z= 2x +3y -12 икки аргументли функция фазода 2x+3y-12=0 текисликни тасвирлайди.

2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера тенгламаси бўлиб, $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ икки аргументли функциялар графиклари сферани ифодалайди.

2-таъриф . D тўпламнинг ҳар бир (x_1, x_2, x_3) ҳақиқий сонлар учлигига бирор қоида бўйича E тўпламдаги битта y ҳақиқий сон мос қўйилган бўлса, D тўпламда уч ўзгарувчининг функцияси аниқланган дейилади.

Бунда x_1, x_2, x_3 эркли ўзгарувчилар ёки аргументлар, y эса эрксиз ўзгарувчи ёки функция деб аталади. Уч ўзгарувчининг функцияси $y = f(x_1, x_2, x_3),\quad u = f(x, y, z),\quad u = A(x, y, z)$ ва ҳ.к. белгиланади.

Геометрик нуқтаи назардан тўғри бурчакли координатлар системасида ҳақиқий сонларнинг ҳар бир (x, y, z) учлигига фазонинг ягона $P(x, y, z)$ нуқтаси мос келади ва аксинча. Шунинг учун уч ўзгарувчининг фукциясини $P(x, y, z)$ нуқтанинг функцияси сифатида қараш мумкин. Шундай қилиб, $u = f(x, y, z)$ ўрнига, $u = f(P)$ деб ёзиш ҳам мумкин. Уч ўзгарувчили функция аниқланиш соҳаси R^3 фазонинг бирор нуқталар тўплами ёки бутун фазо бўлиши мумкин. Масалан: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ функция аниқланиш соҳаси: $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ ёки $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ шартда аниқланганлиги учун $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ сфера ва унинг ичида аниқланган.

Тўрт ўзгарувчили ва умуман n ўзгарувчили функцияга хам юқоридагидек таъриф бериш мумкин. Бундай функциялар мос равишда $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad yoki \quad u = f(x, y, z, t), \quad y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ билан белгиланади.

Тўрт ва ундан ортиқ ўзгарувчига боғлиқ функцияларнинг аниқланиш соҳасини чизмаларда кўргазмали намойиш этиш мумкин эмас. Аммо, уни тасвирлаш мумкин бўлмаса y йўқ дейиш мумкин эмас. Масалан, тўртинчи ўзгарувчи фазодаги температура, бешинчиси зичлик ва ҳ.к бўлиши мумкин. Лекин, геометрик атамаларни давом эттириб n ўзгарувчининг функциясини бирор n ўлчовли фазо $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ нуқтасининг функцияси сифатида қараш мумкин.

2. **Икки ва кўп аргументли функция лимити**.y= f(x) функция учун нуқтанинг атрофи шу нуқтани ўз ичига олган оралиқ бўлар эди. Икки аргументли z=f(x,y) функция қаралганда ***нуқтанинг атрофи*** дейилганда маркази $P_0(x_0,y_0)$ нуқтада радиусли доиранинг ичида ётувчи барча P(x,y) нуқталар тушунилади.

Фазодаги нуқтанинг атрофи ҳам шунга ўхшаш аниқланиб маркази $P_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқтада радиуси бўлган шарнинг ички нуқталари бўлади.

$_n$ ўлчовли (n.3) фазода $P_0(x_1,x_2\ldots x_n)$ нуқтанинг атрофи шунга ўхшаш аниқланади.

1-таъриф. Икки ўзгарувчили $z = f(x,y) = f(P)$ функция P_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлса (P_0 нуқтада аниқланмаган бўлиши мумкин) ва ихтиёрий е > 0 учун шундай топилсаки

$\rho(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча P(x,y) нуқталар учун

$$\left|f(x,y) - A\right| < \varepsilon \quad yoki \quad \left|f(P) - A < \varepsilon\right|$$

тенгсизлик бажарилса, А ***ўзгармас сон z=f(x,y) функциянинг*** P--P_o даги лимити дейилади, ва

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A \ yoki \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

билан белгиланади.

Лимитнинг таърифидан келиб чиқадики, A сон $z = f(x,y)$) функциянинг лимити бўлса, $\left|f(x,y) - A\right|$ айирма $x \to x_0$, $y \to y_0$ да чексиз кичик миқдор бўлади. Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчи функциясининг лимити ҳам юқоридагига ўхшаш аниқланади.

Бир неча ўзгарувчили функциянинг лимити 0 га тенг бўлса, бундай функцияга чексиз кичик функция ёки чексиз кичик миқдор дейилади.

$y = f(x)$ функция учун лимитлар ҳақидаги барча асосий теоремалар бир неча ўзгарувчининг функцияси учун ҳам ўринли эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

1-мисол. $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. P_0 (2;0) нуқтада $\dfrac{\sin xy}{y}$ функция аниқланмаган.Лимитнинг хоссаларидан

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}} x\frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}} x \lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2$$

чунки $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

3. <u>Икки ва кўп аргументли функциянинг узлуксизлиги ва узилиши.</u> 1-таъриф z= f (x,y) =f(P) функция $P_0(x_0.y_0)$ нўқтада ҳамда унинг бирор атрофида аниқланган ва

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0) \ \ yoki \ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

бўлса, яъни функциянинг $P_0(x_0,y_0)$ нуқтадаги лимити функциянинг шу нуқтадаги қийматига тенг бўлса, ***функция*** $P_0(x_0,y_0)$ ***нуқтада узлуксиз*** дейилади.

Бу таърифга тенг кучли 2-тарифни ҳам келтирамиз.

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ функциянинг $P_0(x_0,y_0)$ нуқтадаги тўлиқ орттирмаси бўлсин.

2-таъриф. $z=f(x,y)=f(P)$ функция $P_0(x_0,y_0)$ нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлса, аргументларнинг $\Delta x \quad va \quad \Delta y$ чексиз кичик орттирмаларига функциянинг ҳам Δz чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0$$

бўлса, ***функция P_0 (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз*** дейилади.

3-таъриф. Узлуксизлик шартлари бажарилмаган нуқталар **узилиш нуқталари** дейилади. Икки ўзгарувчили функция узилиш нуқталари бутун чизиқни ҳосил қилиши мумкин.

1-мисол. $z=x^2+y^2$ функциянинг $P_0\,(2;3)$ нуқтада узлуксизлигини кўрсатинг.

Ечиш: Бу нуқтада функциянинг тўлиқ орттирмасини топамиз:

$$\Delta z=(2+\Delta x)^2+(3+\Delta y)^2-(2^2+3^2)=2^2+2\Delta x+\Delta x^2+$$

$$+3^2+6\Delta y+\Delta y^2-2^2-3^2=2\Delta x+\Delta x^2+6\Delta y+\Delta y^2$$

2-таърифга асосан $\lim \Delta z=\lim\left[2\Delta x+(\Delta x)^2+6\Delta y+\Delta y\right]=2\cdot 0+0+6\cdot 0=0$.

Шундай қилиб, $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0 \ \ da \quad \Delta z\to 0.$ Демак, $P_0\,(2;3)$ нуқтада берилган функция узлуксиздир. Бу ҳолатни исталган $P_0\,(x_0\,;y_0)$ учун кўрсатиш мумкин. (Бу ўқувчига ҳавола этилади). $z=f(x,y)$ функция бирор тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, унга бу тўпламда узлуксиз дейилади.

2-мисол. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

Ечиш. Функция координаталари $z^2-y^2=0$ тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарда узилишга эга. Бу у=х ва у= -х тўғри чизиқлар бўлиб, бу тўғри чизиқларга тегишли ҳар бир нуқтада функция узилишга эга бўлади.

Икки ўзгарувчининг узлуксиз функцияси ҳам бир ўзгарувчининг узлуксиз функцияси эга бўлган асосий хоссаларга эга бўлади. (Бу хоссаларни такрорлаш ўқувчига тавсия этилади).

Мустақил иш учун топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини аниқланг ва унинг қандайлигини изоҳланг:

1) $u=\sqrt{1-x^2-9y^2}$; 2) $u=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$; 3) $u=\ln(x+y)$;

; 5) $z=\sqrt{xy}$; 6) $z=\dfrac{xy}{y-x}$.

2. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4.}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Кўп аргументли функциялар назариясига нималар олиб келади?
2. Қандай функцияларга икки аргументли функциялар дейилади?
3. Уч аргументли функция деб нимага айтилади?
4. 2 ва 3 аргументли функцияларнинг аниқланиш соҳалари нима?
5. Икки ва ундан кўп ўзгарувчили функциялар лимити деб нимага айтилади?
6. Нуқтанинг атрофи тушунчаси нима?
7. Икки ва ундан кўп ўзгарувчили функциялар лимити қандай хоссаларга эга?
8. Икки ва кўп аргументли функциялрнинг нуқтада узлуксизлигини таърифланг?

2,3-мавзу. Икки узгарувчили функциянинг хусусий ҳосиласи ва тўла дифференциали

Режа

1. **2-ўзгарувчили функция хусусий ва тўла орттирмалари.**
2. **2-ўзгарувчили функция хусусий ҳосилалари.**
3. **Тўла дифференциал**.
4. **Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар**.

Таянч ибора ва тушунчалар

Хусусий орттирма, хусусий хосила, тула дифференциал, иккинчи тартибли хусусий хосила, иккинчи тартибли тула дифференциал, такрибий хисоблаш.

1. 2-ўзгарувчили функция хусусий ва тўла орттирмалари.

1. 1-таъриф.z =f (x,y) функцияда x ўзгарувчига бирор орттирма бериб, y ни ўзгаришсиз қолдирсак, функция орттирма олиб, бу орттирмага z функциянинг x ***ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси*** дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Худди шундай, y ўзгарувчига орттирма бериб x ўзгаришсиз қолса, унга z функциянинг **y** ***ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси*** дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

2-таъриф.x va y ўзгарувчилар мос равишда орттирмалар олса, z = f(x,y) функция $\Delta z = f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ тўлиқ орттирма олади.

2. 2-ўзгарувчили функция хусусий ҳосилалари.*1-таъриф.* $a)\ \lim \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ чекли лимит мавжуд бўлса, унга $z = f(x,y)$ функциянинг x ***ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи*** дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ёки $z'_x = f'_x(x,y)$ билан белгиланади.

$b)\ \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ чекли лимит мавжуд бўлса, унга $z = f(x,y)$ функциянинг y ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ёки $z'_y = f'_y(x,y)$ билан белгиланади.

Хусусий ҳосилалар таърифларидан кўринадики бир аргументли функцияни дифференциаллашнинг ҳамма қоида ва формулалари ўз кучида қолади.

Исталган чекли сондаги ўзгарувчилар функциясининг хусусий ҳосилалари ҳам юқоридагидек аниқланади.

1-мисол. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ хусусий ҳосилаларни топинг.

Ечиш: Олдин y ни ўзгармас деб z'_x ни топамиз:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y\ ,$$

энди x ни ўзгармас деб $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топамиз:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

2-мисол. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш: Ҳосила олиш қоидалари ва формулаларидан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$u'_x = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x (x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

(u'_y, u'_z ларни мустақил топинг).

3. *<u>Тўла дифференциал</u>*. Маълумки, x va y ўзгарувчилар мос равишда орттирмалар олса, z = f (x,y) функция $\Delta z = f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ тўла орттирма олади. Бу тўла орттирманинг ларга нисбатан чизиқли бўлган бош қисми функциянинг ***<u>тўла дифференциали</u>*** дейилади ва dz билан белгиланади. z = f (x,y) функциянинг тўла дифференциали

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (1)$$

формула билан ҳисобланади, бу ерда Тўла дифференциалдан функциянинг тақрибий қийматларини ҳисоблашда фойдаланиш мумкин,

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz,$ бундан

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \qquad (2)$$

Уч аргументли $u = F(x, y, z)$ функциянинг тўла дифференциали

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \qquad (3)$$

формула билан ҳисобланади.

1-мисол. $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциянинг тўла дифференциалини топинг.

Ечиш: Хусусий ҳосилаларни топамиз;

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(1) формулага асосан, $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ бўлади.

2-мисол. $u = x^2 y z^2$ функциянинг тўла дифференциалини топинг.

Ечиш: Хусусий ҳосилаларни топамиз;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 y z^2)'_x = yz^2 (x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 y z^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 y z^2)'_z = yx^2 (z^2)'_z = 2x^2 yz.$$

(3) формулага асосан, $du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yz dz$ бўлади.

1-мисол. Ўлчовлари a=8m b= 6m c= 3m бўлган параллелепипеднинг узунлиги ва эни мос равишда 10 см ва 5 см га кўпайтирилса, баландлиги эса 15 см камайса унинг ҳажми қандай ўзгаради.

Ечиш. Параллелепипеднинг ҳажми v =xyz x,y,z унинг ўлчамлари. Ҳажм орттирмасини тақрибан формуладан ҳисоблаш мумкин.

$$dV = yxdx + xzdy + xydz$$

$$\Delta V \approx dV = 66\cdot 3\cdot 0.1 + 8\cdot 3\cdot 0.05 + 8\cdot 6(-0.15) = -4{,}2.$$

Шундай қилиб, ҳажм тахминан 4.2 m^3 га камаяди.

4-мисол. Тўла дифференциал формуласидан фойдаланиб:

1) $arcctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$, 2) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$

ларни тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: Тўла дифференциал формуласидан тақрибий ҳисоблашда фойдаланиш учун, олдин қиймати тақрибий ҳисобланадиган функциянинг аналитик ифодасини танлаш зарур, кейин бошланғич нуқтани шундай танлаш керакки функциянинг ва хусусий ҳосилаларнинг бу нуқтадаги қийматларини жадвалсиз ҳисоблаш мумкин бўлсин. Шундан кейин (2) формуладан фойдаланиш керак.

1) $arcctg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right)$ ифода $f(x,y) = arcctg(\frac{x}{y} - 1)$ функциянинг $P_1(1.97;1.02)$ нуктадаги киймати дейиш мумкин. Бошланғич нуқта учун $P_0 = (2;1)$ ни олсак, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03, \quad \Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ бўлади.

Энди хусусий ҳосилаларни топиб, уларнинг P_0 нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x,y) = \left[arcctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x \right] = -\frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x^2 - y^2)}{y^2}} = -\frac{y}{y^2 + (x-y)^2};$$

$$f'_y(x,y) = \left[arcctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_y \right] = -\frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{\left(y^2 + (x^2 - y^2)\right)}{y^2}} = \frac{x}{y^2 + (x-y)^2};$$

$$f'_x(2;1) = -\frac{1}{1 + (2-1)^2} = -0.5; \qquad f'_y(2;1) = \frac{2}{1 + (2-1)^2} = 1.$$

(2) дан фойдалансак,

$$arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)\approx arcctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+(-0.5)(-0.03)+1\cdot 0.02=\frac{\pi}{4}+0.015+0.02=0.82$$

бўлади.

2) $\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02}$ ни $f(x,y,z)=\sqrt{x^y+\ln z}$ функциянинг $P_1(1.04;\ 1.99;\ 1.02)$

нуктадаги қиймати деб қараймиз: бошланғич нукта учун $P_0(1;\ 2;\ 1)$ ни танлаймиз. Бу ҳолда

$$\Delta x=1.04-1=0.04,\quad \Delta y=1.99-2=-0.01,\ \Delta z=1.02-1=0.02.$$

Хусусий ҳосилаларни топамиз ва уларнинг $P_0(1;\ 2;\ 1)$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$f_x{}'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_x'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_x{}'(1;2;1)=\frac{2\cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=1;$$

$$f_y{}'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_y'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{x^y.\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_y{}'(1;2;1)=\frac{1^2\cdot 0}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=0;$$

$$f_z{}'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_z'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\quad \boldsymbol{f_z{}'(1;2;1)=\frac{1}{2}}.$$

(2) формуланинг уч аргументли функция учун умумлашганидан фойдаланиб,

$$\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02}\approx\sqrt{1^2+\ln 1}+1\cdot 0,04+0\cdot(-0,01)+\frac{1}{2}\cdot 0,02=1,05$$

натижани оламиз.

4. **<u>Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва дифференциаллар</u>**.

1. $z=f(x,y)$ **функциянинг *<u>иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари</u>*** деб биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилаларга айтилади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар қўйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}{}''=f_{xx}{}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}{}''=f_{xy}{}''(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}{}''=f_{yx}{}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}{}''=f_{yy}{}''(x,y);$$

$f_{xy}{}''(x,y)$ ва $f_{yx}{}''(x,y)$ хусусий ҳосилалар аралаш хусусий хосилалар дейилади. Аралаш хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлган нуқталарда улар ўзаро тенг бўлади.

Учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам юқоридагидек аниқланади.

Ушбу $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ ёзув z функцияни m марта x ўзгарувчи бўйича ва ($n-m$) марта y ўзгарувчи бўйича дифференциаллашни билдиради.

1-мисол. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топинг.

Ечиш. Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1\right)_x' = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1\right)_y' = 4x^2.3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Топилган ҳосилалардан яна хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{dx^2} = \left(4x^3 + 8xy^3 + 7y\right)_x' = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{dx\partial y} = \left(4x^3 + 8xy^3 + 7y\right)_y' = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{dy\partial x} = \left(12x^2y^2 + 7x\right)_x' = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{dy^2} = \left(12x^2y^2 + 7x\right)_y' = 24x^2y.$$

2. ***<u>Иккинчи тартибли тўла дифференциал</u>*** $d(dz) = d^2z$ каби аниқланиб, хусусий ҳосилалар орқали қуйидагича топилади.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \tag{1}$$

2-мисол. $z = x^2y^3$ функциянинг иккинчи тартибли тўла дифференциалини топинг.

Ечиш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$z_x' = \left(x^2y^3\right)_x' = 2xy^3; \quad z_y' = 3x^2y^2; \quad z_{xx}'' = 2y^3, \quad z_{xy}'' = 6xy^2, \quad z_{yx}'' = 6xy^2, \quad z_{yy}'' = 6xy^2,$$

(1) формулага асосан иккинчи тартибли тўла дифференциал

$$d^2z = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2.$$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Функциянинг хусусий орттирмаси деб нимага айтилади?
2. Икки аргументли функциянинг хусусий хосиласи деб нимага айтилади?

3. Уч аргументли функциянинг хусусий хосилалари нечта бўлади?

4. Икки аргументли функциянинг тўла дифференциали деб нимага айтилади?

5. Функциянинг тўлиқ орттирмаси ва тўла дифференциали орасида боғланиш борми?

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$; 2) $z = \dfrac{xy}{x-y}$; 3) $u = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}$;

4) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

2. Қуйидаги функцияларнинг тўла дифференциалларини топинг:

1) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 2) $u = x^{y^2 z}$; 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$; 5) $s = x\ln t$.

3. $z = xy$ функция учун $P_0(5;4)$ нуқтада $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = -0{,}2$ бўлганда $dz\ \ va\ \ \Delta z$ ларни ҳисобланг.

4-мавзу. <u>Икки аргументли функция экстремуми</u>

Режа

1. **<u>Икки аргументли функция экстремуми</u>**.

2. Икки ўзгарувчили функциянинг ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.

Таянч ибора ва тушунчалар

Экстремумга эга бўлишининг зарурий ва етарли шартлари, энг кичик ва катта қийматлар, харажат функцияси, фойда функцияси, товарнинг лимитик баҳоси, лимитик харажат, фойда функцияси максимуми.

1. **<u>Икки аргументли функция экстремуми</u>**. 1-таъриф. z= f(x,y) функциянинг $P_0(x_0,y_0)$ нуқтадаги қиймати унинг бу нуқтанинг бирор атрофи исталган P(x,y) P(x,y) нуқтасидаги қийматларидан катта, яъни

$f(x_0;y_0) > f(x,y)$ бўлса, $z = f(x,y)$ функция $P_0(x_0,y_0)$ нуқтада максимумга эга дейилади.
2-таъриф. z= f (x,y) функциянинг $P_1(x_1,y_1)$ нуқтадаги қиймати унинг бу нуқтанинг бирор атрофи исталган P(x,y) нуқтасидаги қийматларидан кичик бўлса, яъни $f(x_1;y_1)$,f(x,y) бўлса, z= f(x,y) функция $P_1(x_1,y_1)$ нуқтада минимумга эга дейилади.

Функциянинг максимум ёки минимуми унинг экстремуми дейилади. Функция экстремумга эга бўлган нуқта унинг экстремум нуқтаси дейилади. Функция экстремумини хусусий ҳосилалар ёрдамида текширилади.

<u>Экстремумнинг зарурий шартлари</u>**:** $P_0(x_0,y_0)$ нуқтада узлуксиз z= f(x,y) функциянинг экстремум нуқтаси бўлса,

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{aligned}\right\}$$

бўлади, ёки бу нуқтада ҳосилаларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси мавжуд бўлмайди.

Бундай нуқталарга экстремум учун критик (стационар) нуқталар дейилади. Шуни такидлаймизки ҳамма критик нуқталар ҳам экстремум нуқталар бўлавермайди. Критик нуқтада экстремум бўлмаслиги ҳам мумкин.

<u>Экстремумнинг етарли шартлари</u>**:**

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг критик нуқтадаги қийматларини

$$A = f''_{xy}(x_0,y_0); B = f''_{xy}(x_0,y_0); C = f''_{yy}(x_0,y_0);$$

билан белгилаймиз ва $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ ни тузамиз.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ бўлса, $z = f(x,y)$ функция $P_0(x_0,y_0)$ нуқтада экстремумга эга бўлиб: 1) A<0 бўлганда $P_0(x_0,y_0)$ нуқтада максимумга,
2) A>0 бўлганда минимумга эга бўлади.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ бўлса, $P_0(x_0,y_0)$ нуқтада экстремум йўқ:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ бўлса, экстремум бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин.

1-мисол. $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ функция экстремумини текширинг.

Ечиш. Бу функция бутун XOY текисликда аниқлаган. Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; \; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

экстремумга эга бўлишнинг зарурий шартидан:

$$\left.\begin{array}{l}4x^3-4x+4y=0\\4y^3+4x-4y=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x^3-x+y=0\\y^3+x-y=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}y=x-x^3=x\left(1-x^2\right)\\y^3+x-y=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[x\left(1-x^2\right)\right]^3+x-x^{+x^3}=0,\\\left(1-x^2\right)^3=-1,1-x^2=-1,x^2=2\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x_1=0;x_2=-\sqrt{2},x_3=\sqrt{2}\\y_1=0;y_2=\sqrt{2},y_3=-\sqrt{2}\end{array}\right\}.$$

Демак, учта O(0,0), $P_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ ва $P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ критик нуқталарга эга бўламиз, бошқа критик нуқталар йўқ, чунки $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ хусусий ҳосилалар ХОУ текисликнинг ҳамма нуқталарида мавжуд.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2-4;\ f''_{xy}(x,y)=4;\ f''_{yy}(x,y)=12y^2-4;$$

O(0,0) нуқтада экстремумнинг етарли шартини текширамиз: $A=-4,\quad B=4,\quad C=-4$; $\Delta=AC-B^2=$-4·(-4)-4²=0 бўлиб, юқоридаги етарли шарт жавоб бермайди. Бу нуқта атрофида берилган функция мусбат ҳам, манфий ҳам бўлишини кўрамиз, масалан OX ўқи бўйича ($y=0$)

$$f(x,y)_{y=0}=f(x,0)=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0.$$

$y=x$, биссектриса бўйича

$$f(x,y)\Big|_{y=x}=f(x,x)=2x^4>0$$

бўлади. Шундай қилиб, O(0,0) бирор атрофида $\Delta f(x,y)$ орттирма ишорасини бир хил сақламайди, демак экстремум йўқ.

$P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ нуқтада етарли шартни текширамиз:

$AC-B^2=$400-16>0 ва A=20>0 демак $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ нуқтада функция минимумга эга. $f_{\min}=-8$;

$P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ нуктада етарли шартни текширамиз: бу нуқта учун A=20, B=4, C=20 бўлиб $\Delta=AC-B^2=$400-16>0 ва A=20>0 бўлганлиги учун $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ нуқтада ҳам берилган функция минимумга эга бўлади, $f_{\min}=-8$

2-мисол. $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ функциянинг экстремумини текширинг.
Ечиш.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}.$$

$P_0(1;1)$ нуқтада хусусий ҳосилалар мавжуд эмас. Демак, P_0 (1;1) нуқта критик нуқта бўлади. Бу нуқтада экстремумни текшириш учун Δz орттирманинг P_0 нукта атрофида ишорасини текширамиз:

$\Delta z = \sqrt{(1+\Delta x-1)^2+(1+\Delta y-1)^2} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} > 0,$

бу ишора P_0(1;1) нуктанинг исталган атрофида сақланади яъни P_0(1;1) нуктада функция минимумга эга $z_{\min} = f$ (1;1)=0;

2. Икки ўзгарувчили функциянинг ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш. Чегараланган ёпиқ соҳада дифференциаллан-увчи функция ўзининг ***<u>энг катта ва энг кичик қийматига</u>*** ё соҳада ётувчи критик нуқтада, ё бу соҳа чегарасида эришади.

1-мисол. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ функциянинг $x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3$ соҳадаги энг катта ва энг кичик кийматларини топинг.

Ечиш. Соҳа AOB учбурчакдан иборат. Соҳа ичидаги критик нуқталарни топамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

бундан $x = -1, y = -1$ бўлиб, P_0 (-1,-1) критик нуқтага эга бўламиз. Функцияни соха чегарасида текширамиз: А0 чегарада $y = 0$ булиб, $z = x^2 + x$ функция хосил булади. Бу функциянинг экстремуми:

$z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

булади.

Демак, P_1(-0,5, 0) AO чегарадаги критик нуқта. Тенгламаси $x = 0$, BO чегарада $z = y^2 + y$ функция хосил бўлиб, $z'_y = 2y + 1 = 0$ y=-1/2.

Демак, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO чегарадаги критик нуқта бўлади. Тенгламаси $y = -3 - x$ бўлган AB чегарада $z = 3x^2 + 9x + 6$ функция ҳосил бўлиб $z'_x = 6x + 9 = 0$ $x = -\frac{3}{2}.$ AB нинг тенгламасидан $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2},$ демак, AB чегарадаги критик нуқта $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ бўлади.

Берилган функциянинг P_0, P_1, P_2, P_3 критик нуқталардаги, ҳамда A, B, O нуқталардаги қийматларни ҳисоблаймиз:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1,-1) = -1\ ;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4}\ ;$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$z_4 = f(0) = f(0,0) = 0;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3,0) = 6;$$

$$z_6 = f(B) = f(0,-3) = 6.$$

Функциянинг топилган барча қийматларини таққослаб $z_{eng\ kat.} = f(A) = f(B) = 6 \quad va \quad z_{eng\ kich.} = f(P_0) = -1$ деган хулосага келамиз

Мустақил бажариш учун топшириқлар

Қуйидаги функцияларнинг экстремумини текширинг.

1. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$
2. $z = xy(12 - x - y).$
3. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$
4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1.$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Икки аргументли функциянинг экстремумга эга бўлишининг зарурий шарти нима?
2. Икки аргументли функциянинг экстремумга эга бўлишининг етарли шарти нима?
3. Критик нуқталар қандай нуқталар?

Дифференциал тенгламалар

5,6-мавзу. Умумий тушунчалар.Биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли дифференциал тенгламалар

Режа

1. **Дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар.**
2. **<u>Биринчи тартибли тенгламалар.</u>**

3. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган биринчи тартибли тенгламалар.

4. <u>Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар</u>.

Мавзунинг таянч тушунчалари

Дифференциал тенглама, оддий дифференциал тенглама, хусусий ҳосилали дифференциал тенглама, дифференциал тенгламанинг тартиби, дифференциал тенглама ечими, интеграл чизиқ, биринчи тартибли дифференциал тенглама, Коши масаласи, бошланғич шартлар, ўзгарувчилари ажралган, ўзгарувчилари ажраладиган, биринчи тартибли бир жинсли, биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар, Бернулли тенгламаси, Риккати тенгламаси, тўла дифференциалли тенглама, интегралловчи кўпайтувчи.

1. Дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар. 1-таъриф. Эркли ўзгарувчи, номаълум функция ҳамда унинг ҳосилалари ёки дифференциаллари орасидаги муносабатга ***<u>дифференциал тенглама</u>*** дейилади.

Номаълум функция фақат битта ўзгарувчига боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенгламага ***<u>оддий дифференциал тенглама</u>*** *<u>дейилади</u>*.

Номаълум функция икки ёки ундан кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенгламаларга, ***<u>хусусий ҳосилали дифференциал</u>*** *<u>тенгламалар</u>* дейилади.

2-таъриф. Дифференциал тенгламага кирган ҳосилаларнинг энг юқори тартибига ***<u>дифференциал тенгламанинг тартиби</u>*** дейилади.

$y'' = 3x^2$, $\quad y''' = \cos x$ тенгламалар мос равишда иккинчи ва учинчи тартибли тенгламаларга мисол бўлади.

Умумий ҳолда n -тартибли дифференциал тенглама

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$$

књринишда белгиланади.

3-таъриф. ***<u>Дифференциал тенгламанинг ечими</u>*** **ёки** ***<u>интеграли</u>*** деб тенгламага қўйганда уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай дифференциалланувчи y = (x) функцияга айтилади.

Дифференциал тенглама ечимининг графигига ***<u>интеграл чизиқ</u>*** дейилади. Масалан, $\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y = x^2$ бу берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлиб, бу ҳолда интеграл чизиқ параболадан иборат бўлади.

Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масаласи берилган тенгламанинг барча ечимларини топиш ва бу ечимларнинг ҳоссаларини ўрганишдан иборат.

Алгебраик тенгламалардагидек ҳамма дифференциал тенгламаларни ечиш мумкин бўладиган умумий усуллар йўқ. Дифференциал тенгламаларнинг ҳар бир турига хос ечиш усулидан фойдаланилади.

2. <u>Биринчи тартибли тенгламалар.</u> **<u>Биринчи тартибли тенглама</u>** <u>*умумий*</u> ҳолда

F(x,y,y) = 0

кўринишда ёзилади. (1) тенгламани y га нисбатан ечсак

$$y' = f(x,y) \quad yoki \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (2)$$

бўлади. (2) тенгламанинг ўнг томони фақат x нинг функцияси бўлса, тенглама

$$y' = f(x) \qquad (3)$$

кўринишида бўлиб, охирги тенгликдан бевосита кўриш мумкинки, бундай тенгламанинг ечимини топиш f(x) функциянинг бошланғич функциясини топишдан иборат бўлади, яъни $y = F(x) + C, \quad [F(x)]' = f(x)$. Шундай қилиб, (3) кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечими чексиз кўп ечимлар тўпламидан иборат бўлади.

1-таъриф. Y=(x,C) x нинг функцияси ҳар бир C ихтиёрий ўзгармас бўлганда (2) тенгламани қаноатлантирса, унинг ***<u>умумий ечими</u>*** дейилади.

2-таъриф. C ихтиёрий ўзгармаснинг муайян қийматида умумий ечимдан олинадиган ечимга ***<u>хусусий ечим</u>*** дейилади.

Умумий ечимдан ягона ечимни олиш учун кўпинча қўшимча

$$y(x_0) = y_0$$

шартдан фойдаланилади, бу ерда x_0, y_0 лар берилган сонлар бўлиб, бу шартга бошланғич шарт деб аталади.

3-таъриф. Y = f (x,y) дифференциал тенгламанинг (4) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига ***<u>Коши масаласи</u>*** дейилади.

1-мисол. $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$, дифференциал тенглама учун $y(0) = 3$ бўладиган бошланғич шартни қаноатлантирувчи Коши масаласини ечинг.

Ечиш. Олдин берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5tgx + C$$

Энди бошланғич шартдан фойдаланиб, $5tg0 + C = 3$, бундан $C = 3$ келиб чиқади. Демак, Коши масаласининг ечими $y = 5tgx + 3$ бўлади.

3. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган биринчи тартибли тенгламалар

4-таъриф. M (x)dx + N(y) dy = 0 кўринишдаги тенгламага ***ўзгарувчилари ажралган*** дифференциал тенглама дейилади.

Бундай дифференциал тенгламани бевосита, тенгликни интеграллаб унинг умумий ечими топилади, яъни

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

бўлади.

2-мисол. Xdx +ydy = 0 дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани бевосита интеграллаб

$$\int xdx + \int ydy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \;\; yoki \;\; x^2 + y^2 = C_1,$$

умумий ечим бўлади .

5-таъриф. $$y' = f_1(x) f_2(y) \qquad yoki \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$$

кўринишдаги тенгламага ***ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама*** дейилади.

Бундай дифференциал тенгламани $f_2(y)$ га бўлиб, dx га кўпайтириб

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенгламага келтириш билан ечими топилади.

3-мисол. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ўзграувчиларини ажратиб $\frac{dy}{1+y^2} = xdx$ тенгламани ҳосил қиламиз. Охирги тенгламани бевосита интеграллаб,

$$arctg\, y = \frac{x^2}{2} + C$$

ликка эга бўламиз. Охирги тенгликдан

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

4. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар.

F(x,y) функция учун $f(kx,ky) = k^a \; f(x,y)$ тенглик бажарилса, f(x,y) функцияга a тартибли бир жинсли функция дейилади, бунда a бирор сон.

Масалан,$f(x,y) = xy - y^2$ функция учун

$f(kx - ky) =kx *ky -(ky)^2 = k^2 (ky - y^2)$ бўлиб, $f(x,y) = xy - y^2$ функция a = 2 тартибли бир жинсли функция бўлади. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}, \alpha = 0$ тартибли бир жинсли функциядир(буни текшириб кўринг).

6-таъриф. $y' = f(x, y)$ дифферециал тенгламада $f(x, y)$ функция нўлинчи тартибли бир жинсли функция бўлса, бундай дифференциал тенгламага ***биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама*** дейилади.

Бир жинсли, тенглама $y = xv(x)$ алмаштириш билан ўзгарувчилари ажраладиган

$$xv' = f(1, v) - v$$

дифференциал тенгламага келтирилади.

4-мисол. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y = x \cdot v$ алмаштириш олиб, $y' = x'v + xv'$ эканлигини ҳисобга олсак, берилган тенгламадан

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

бњлиб, $v + xv' = v + v^2$ ёки $xv' = v^2$, $\dfrac{xdv}{dx} = v^2$

бўлади. Охирги тенгламада ўзгарувчиларини ажратсак,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

бўлади. Охирги тенгликни интеграллсак,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

бўлиб,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

бўлганлиги учун

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad yoki \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

Мустақил бажариш учун мисоллар

1. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1) $(1 + y)dy - (1 - x)dx = 0;$ 2) $(xy^2 + x)dx = (y - x^2 y)dy;$

3) $x^2 dy + (y - 1)dx = 0;$ 4) $2(xy + y)dx = xdy.$

2. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топинг:

1) $x^2dx + ydy = 0,\ \ x = 0\ \ da\ \ y = 1;$

2) $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0,\ \ x = 0\ bo'\lg\, anda\ \ y = -1;$

3) $(1+x)ydx = (y-1)xdy,\ \ x = 1\ da\ y = 1.$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
2. Оддий дифференциал тенглама қандай тенглама?
3. Хусусий хосилали дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
4. Дифференциал тенгламанинг тартиби нима?
5. Дифференциал тенгламанинг ечими ёки интеграли деб нимага айтилади?

7,8-мавзу. Биринчи тартибли чизиқли, Бернулли ва тўла дифференциалли тенгламалар

Режа

1. ***Биринчи тартибли чизиқли дифференциал*** **тенгламалар.**
2. ***Бернулли тенгламаси*.**
3. **Тўла дифференциалли тенгламалар ва интеграллочи кўпайтувчи.**

Таянч ибора ва тушунчалар

Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар, Бернулли тенгламаси, Риккати тенгламаси, тўла дифференциалли тенглама, интеграллочи кўпайтувчи.

1. ***Биринчи тартибли чизиқли дифференциал*** **тенгламалар.**Бундай тенглама

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

кўринишда бўлиб, P(x) va g (x) лар берилган функциялар. Бундай тенгламани ечиш учун z = u (x)y алмаштириш олиб

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \tag{1}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. u(x) функцияни шундай танлаймизки,

$$p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 0$$

бўлсин. Бундан $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ бўлиб, бу ҳолда (1) тенглама

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

кўринишда бўлади. Бевосита интегралласак

$$z = \int g(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

ҳосил бўлади.

Энди изланаётган y функцияга қайтиб

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int g(x) e^{\int p(x)dx} dx\right] \qquad (2)$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

1-мисол. $y' + xy = x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама биринчи тартибли чизиқли тенглама бўлиб $p(x) = x, \quad g(x) = x$ лигини ҳисобга олиб (2) формулага асосан,

$$y = e^{-\int xdx}\left[C + \int x \cdot e^{\int xdx} dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}} d(\frac{x^2}{2})\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C).$$

умумий ечим бўлади.

2. *<u>Бернулли тенгламаси</u>*. Бундай дифференциал тенглама

$$y' + p(x)y = y^n g(x)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламада n=0 ёки n=1бўлса, чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Демак $n \neq 0{,}1$ бўлган ,ўзгармас. Бернулли тенгламасини y^n га бўлиб,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \qquad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

алмаштириш бажарсак,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y'$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \;\; yoki \;\; z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

2-мисол. $y' + xy = xy^3$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани y^3 бўлиб,

$$\frac{y'}{y^3}+x\frac{1}{y^2}=x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $\frac{1}{y^2}=z$ алмаштириш олсак $z'=\frac{2y'}{y^3}$ бўлади. Буларни тенгламага қўйиб,

$$\frac{z'}{2}+xz=x, \quad z'-2xz=-2x$$

чизиқли тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг умумий ечимини (6) формулага асосан топиш мумкин:

$$z=e^{2\int xdx}\left[C+\int(-2x)e^{-2\int xdx}dx\right]=e^{x^2}\left[C-\int 2xe^{-x^2}dx\right]=$$

$$e^{x^2}\left[C+\int e^{-x^2}d(-x^2)\right]=e^{x^2}\left[C+e^{-x^2}\right]=Ce^{x^2}+1.$$

Шундай қилиб

$$z=C\cdot e^{x^2}+1$$

бўлади, z нинг ўрнига $\frac{1}{y^2}$ ни қўйиб,

$$\frac{1}{y^2}=C\cdot e^{x^2}+1, \quad y^2=\frac{1}{Ce^{x^2}+1},$$

ечимни оламиз. Бу берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечими бўлади.

3. Тўла дифференциалли тенгламалар ва интегралловчи кўпайтувчи.

1) Тўла дифференциалли тенглама.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad \textbf{(1)}$$

кўринишдаги тенгламанинг чап қисми бирор $u(x,y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

бўлса, бундай тенглама тўла дифференциалли тенглама дейилади.(1) тенглама тўла дифференциалли тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

шарт бажарилиши керак. Тўла дифференциалли тенглама таърифидан $du=0$ бўлиб, бундан $u(x,y)=C$ келиб чиқади(C ихтиёрий ўзгармас). $u(x,y)$ функцияни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, у ҳолда $dy=0$ эканлигидан $du=M(x,y)dx$ бўлади. Охирги тенгликни x бўйича интегралласак,

$$u=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$$
тенглик ҳосил бўлади. Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x,y)$ га тенглаймиз, чунки $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$ эди.
$$\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$
ёки
$$\varphi'(y)=N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx$$
бўлади. Охирги тенгликни y бўйича интеграллаб, $\varphi(y)$ ни топамиз:
$$\varphi(y)=\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right)dy+C$$
Шундай қилиб,
$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right)dy+C$$
натижага эга бўламиз.
1-мисол. Ушбу
$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2y}{x^3}\,dy=0$$
дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.
Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли бўлиш ёки бўлмаслигини текширамиз: берилган тенгламада
$$M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}\quad,N=\frac{2y}{x^3}$$
бўлганлиги учун
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-6y}{x^4}\quad,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6y}{x^4}$$
бўлиб,
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$
бўлади, яъни берилган дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир. Демак, берилган тенгламанинг чап томони бирор $u(x,y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади. Энди $u(x,y)$ функцияни топамиз:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}$$

бўлганлиги учун

$$u=\int\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\varphi(y)=\int\left(x^{-2}-3y^2x^{-4}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+\varphi(y) \qquad (2)$$

бўлиб, бунда $\varphi(y)$ ҳозирча номаълум функциядир. Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{2y}{x^3}$$

эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{2y}{x^3}+\varphi'(y)=\frac{2y}{x^3}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $\varphi'(y)=0$ бўлиб,

$$\varphi(y)=C_1.$$

бўлади. (2) тенгликдан

$$u=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$du=d\left(-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1\right)=0$$

бўлганлиги учун

$$-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1=C_2$$

бўлиб, ёки

$$-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}=C$$

бўлади, бунда $C=C_2-C_1$.

2) Интегралловчи кўпайтувчи.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлган ҳолни қарадик. Бу тенгламанинг ўнг томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлмасин. Айрим ҳолларда шундай $\mu(x,y)$ функцияни танлаб олиш мумкин бўладики, берилган тенгламани шу функцияга кўпайтирилганда, унинг чап томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлиши мумкин. Ҳосил қилинган дифференциал тенгламанинг умумий ечими Билан дастлабки берилган тенгламанинг умумий ечими бир хил бўлади. Бундай $\mu(x,y)$ функцияга берилган тенгламанинг интеграллавчи кўпайтувчиси дейилади. Интегралловчи кўпайтувчини топиш учун , берилган тенгламани ҳозирча номаълум бўлган μ га кўпайтириб,

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$$

тенгламани оламиз. Охирги тенглама тўла дифференциалли бўлиши учун

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

тенглик ўринли бўлиши керак. Бундан

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

бўлиб,

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

бўлади. Охирги тенгламани μ га бўлсак,

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\mu\,\partial y}$$

бўлганлиги учун

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

бўлади.

Умумий ҳолда μ x, y ларга боғлиқ, яъни $\mu(x,y)$. Берилган тенглама фақат x га боғлиқ интегралловчи кўпайтувчига эга бўлса, $\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = 0$ бўлиб,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ёки} \quad \frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{4}$$

бўлади. Дифференциал тенглама фақат y ўзгарувчига боғлиқ интегралловчи кўпайтувчига эга бўлса, $\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = 0$ бўлиб,

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \tag{5}$$

бўлади. Бу ҳолларда (4) ва (5) тенгликларни бевосита интеграллаб

$$\mu = e^{\int\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/Ndx}, \quad \mu = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/Mdx}$$

интегралловчи кўпайтувчини топамиз. Бунда (4) ва (5) нисбатлар, биринчи ҳолда y ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган, иккинчи ҳолда x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган интегралловчи кўпайтувчиларнинг мавжудлигини билдиради.

2-мисол.

$$(x^2-3y^2)\,dx+2xydy=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли ёки тўла дифференциалли эмаслигини текширамиз. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ шартни текширайлик:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\left(x^2-3y^2\right)_y'=-6y \quad , \frac{\partial N}{\partial x}=\left(2xy\right)_x'=2y .$$

Демак, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилмайди. (4) нисбатни қараймиз:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-6y-2y}{2xy}=-\frac{4}{x}$$

бўлиб,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{4}{x}$$

бўлади. Охирги тенгликни интегралласак,

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{ч}dx}=e^{-4\ln x}=e^{\ln x^{-4}}=\frac{1}{x^4}$$

ҳосил бўлади. Берилган тенгламани $\mu(x)=\frac{1}{x^4}$ функцияга кўпайтирсак,

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2xy}{x^4}dy=0$$

бўлиб, кейинги тенглама учун $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилади, яъни охирги дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир. Бундай дифференциал тенгламаларнинг ечимини топишни юқорида ўргандик.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

1) $y' - \frac{y}{x} = -1$; 2) $y' + y = e^{-x}$; 3) $x^2 y' - 2xy = 3$; 4) $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$;

2. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг:

1) $xy' + y = 3,\ x = 1\ da\ \ y = 1$; 2) $(1+x^2)y' - xy = 2x,\ x = 0\ \ bo'\lg anda\ \ y = 0$;

3) $xy' + y = x + 1,\ \ x = 2\ \ bo'\lg anda\ \ y = 3.$

3. Ушбу тўла дифференциалли тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

1) $\left(x^2 + y\right)dx + \left(x - 2y\right)dy = 0$; 2) $\left(y - 3x^2\right)dx - \left(4y - x\right)dy = 0$;

5. Қуйидаги дифференциал тенгламалар учун интегралловчи кўпайтувчиларни топинг ва тенгламаларнинг умумий ечимларини аниқланг:

1) $\left(x^2 - y\right)dx + x\,dy = 0$; 2) $\left(y + xy^2\right)dx - x\,dy = 0$;

9,10-мавзу. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар

Режа

1. $y^{(n)} = f(x)$ **кўринишдаги дифференциал тенгламалар.**
2. F (x,y,y) = 0 кўринишдаги дифференциал тенгламалар.
3. F (x,y,y) = 0 (эркли ўқзгарувчи ошкор қатнашмаган) кўринишдаги дифференциал тенгламала*р.*
4. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар.
5. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар.

Таянч ибора ва тушунчалар

Юқори тартибли дифференциал тенгламалар, бевосита кетма-кет интегралланиб ечиладиган юқори тартибли тенгламалар, тартибни пасайтириш Билан ечиладиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар, иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар, иккинчи тартибли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар, чизиқли боғланган ва чизиқли боғланмаган функциялар, Вронский детерминанти, иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар, характеристик тенглама, Эйлер формуласи.

.

1. $y^{(n)} = f(x)$ **кўринишдаги дифференциал тенгламалар**

$y^{(n)} = f(x)$ **кўринишдаги дифференциал тенглама *кетма-кет*** *n* марта интеграллаш билан унинг ечими топилади. Ҳар бир интеграллашда биттадан ихтиёрий ўзгармас ҳосил бўлиб, натижада *n* та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ умумий ечим ҳосил бўлади.

1-мисол. $y'' = \cos 2x$ дифференциал тенгламанинг $x = 0$ бўлганда $y = 0,\ y' = 0$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = p(x)$ десак, $y'' = p'$ бўлиб, берилган тенглама

$$p' = \cos 2x \ \ yoki \ \ \frac{dp}{dx} = \cos 2x, \quad dp = \cos 2x dx$$

кўринишда бўлади. Охирги тенгламани интегралаб,

$$p = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

$p = y'$ бўлганлиги учун

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

яъни,

$$dy = \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 dx.$$

Охирги тенгликни интеграллаб,

$$\int dy = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \int \ C_1 dx, \ \ y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x$$

умумий ечимни оламиз.

Энди берилган бошланғич шартларда Коши масаласини ечамиз: $x = 0$ бўлганда $y = 0,\ y' = 0$ бўлганлиги учун,

$$-\frac{1}{4}\cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 0 + C_1 = 0, \ \ C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4} \ .$$

Шундай қилиб, Коши масаласининг ечими

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$$

бўлади.

2. F (x,y,y) = 0 кўринишдаги дифференциал тенгламалар

F (x,y,y) = 0 ***кўринишдаги дифференциал тенглама*** y =p $y'' = \frac{dp}{dx}$ алмаштириш орқали $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ биринчи тартибли дифференциал тенгламани ечишга келтирилади.

2-мисол. $y'' = \frac{y'}{x} + x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш: $y' = p$ билан алмаштириб олсак

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

биринчи тартибли чизиқли тенгламага келамиз. Бу тенгламани ечиб:

$$P = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[C_1 + \int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{\ln x}\left[C_1 + \int xe^{-\ln x}dx\right] = x(C_1 + \int xe^{-\ln x}dx) =$$

$$= x(C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x}dx) = x(C_1 + x), \quad p = y' = C_1 x + x^2, \quad y = C_1\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2$$

умумий ечимни оламиз.

3. $\underline{F(y, y', y'') = 0}$ ***<u>(эркли ўқзгарувчи ошкор қатнашмаган) бундай дифференциал тенгламанинг</u>*** умумий ечимини $y' = z(y)$ алмаштириш олиб, биринчи тартибли тенгламага келтириб ечим топилади.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y).$$

бўлади.

3-мисол. $yy'' - 2y'^2 = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = z(y)$ алмаштириш олиб, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$yz\dfrac{dz}{dy} - 2z^2 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама:

$$\frac{ydz}{dy} = 2z \quad yoki \quad \frac{dz}{z} = 2\frac{dy}{y},$$

охирги тенгламани интеграллаб,

$$\ln z = 2\ln y + \ln C_1$$

бундан

$$z = C_1 y^2$$

бўлади. $z = \dfrac{dy}{dx}$ ни ҳисобга олсак ,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx$$

бўлади.Охирги тенгликдан

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \quad yoki \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

бўлади.Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

4. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар. Физика, механика, техника ва иқтисоднинг жуда кўп масалаларини ечиш <u>*иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларга*</u> келтирилади.

Дифференциал тенгламада номаълум функция ва унинг ҳосилалари биринчи даражада қатнашса бундай тенгламага чизиқли дейилади. <u>***Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама***</u> қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (1)$$

бу ерда у номаълум функция, p(x), g(x), f(x) лар бирор (a,b) оралиқда берилган узлуксиз функциялар, f(x) = 0 бўлса, (1) тенгламага **бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама** дейилади. $f(x) \neq 0$ **бўлса бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенглама** дейилади.

Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар ечимини топишда чизиқли боғланган ва чизиқли боғланмаган функциялар тушунчасидан фойдаланилади.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ функциялар бирор $[a,b]$ кесмада берилган бўлсин.

1-таъриф. Шундай α_1, α_2 ўзгармас сонлар топилсаки, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси нўлдан фарқли бўлганда

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

айният ўринли бўлса, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ функцияларга **чизиқли боғланган функциялар** дейилади.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ функциялар чизиқли боғланган бўлса, улар пропорцианал бўлади, яъни, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ бўлиб, $\alpha_1 \neq 0$ бўлса,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \;\; yoki \;\; \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \;\; \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

бўлади.

Масалан, $y_1(x) = 4x^2$ va $y_2 = x^2$ функциялар чизиқли боғланган,

чунки $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{4x^2}{x^2} = 4.$

2-таъриф. (2) тенглик фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлгандагина бажарилса, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ функцияларга **чизиқли боғланмаган функциялар** дейилади.

Функцияларнинг чизиқли боғланган ёки чизиқли боғланмаганлигини

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2{}' - y_2 y_1{}'$$

<u>***Вронский детерминанти***</u> ёрдамида текшириш мумкин. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ функциялар (a,b) оралиқда чизиқли боғланган бўлса, улардан тузилган Вронский детерминанти нўлга тенг бўлади. Бу функциялар учун (a,b)

оралиқда тузилган Вронский детерминанти нўлдан фарқли бўлса улар чизиқли боғланмаган бўлади.

5. <u>Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар</u>. Фан ва техника ҳамда иқтисоднинг кўп масалалари (1) тенгламада p(x) va g(x) функциялар ўзгармас сонлар бўлган ҳолдаги тенгламаларга келтирилади. Шунинг учун бу функциялар ўзгармас коэффициентлар бўлган ҳолни алоҳида қараймиз. Бу ҳолда бир жинсли тенглама

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (3)$$

кўринишда бўлиб p,g лар ўзгармас коэффициентлар. Бундай кўринишдаги тенгламага ***<u>иккинчи тартибли, ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли дифференциал тенглама</u>*** дейилади. (3) кўринишдаги тенгламанинг ечимини топиш билан қизиқамиз.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ функциялар (3) тенгламанинг (a,b) оралиқда чизиқли боғланмаган ечимлари бўлса,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (4)$$

функция унинг умумий ечими бўлади, бу ерда c_1 va c_2 ихтиёрий ўзгармаслар. Бу функцияни (3) тенгламага бевосита қўйиб кўрсатиш мумкин (буни бажариб кўринг).

1-мисол. $y'' - y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бевосита қўйиш билан текшириб кўриш мумкинки, $y_1(x) = e^x$ va $y_2(x) = e^{-x}$ берилган тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлар чизиқли боғланмаган ечимлар бўлади, чунки Вронский детерминанти

$$\begin{vmatrix} e^x e^{-x} \\ e^x - e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Демак, (4) формулага асосан, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ функция берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Шундай қилиб, (3) бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиш учун, унинг иккита чизиқли боғланмаган хусусий ечимини топиш кифоя.

(3) тенгламанинг ечимини y =e ^{rx}, кўринишда излаймиз, бу ерда r номаълум сон. y =e ^{rx} , y = r^2 e ^{rx} бўлиб,(3) тенгламадан

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \;\; yoki \;\; r^2 + pr + g = 0, \;\; (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

бњлади. (5) тенглик бажарилса y =e ^{rx}, функция (3) тенгламанинг ечими бўлади.

(5) тенгламага (3) дифференциал тенгламанинг ***<u>характеристик тенгламаси</u>*** дейилади. Характеристик тенгламанинг ечимлари

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

бўлиб, бунда қуйидаги учта ҳол бўлиши мумкин:

1) r_1 va r_2 лар ҳақиқий ва ҳар хил, яъни $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 va r_2 ҳақиқий ва тенг (каррали), яъни $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;

3) r_1 va r_2 комплекс сонлар, яъни $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$ бунда;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Ҳар бир ҳолни алоҳида қараймиз:

1) бу ҳолда $y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$ функциялар чизиқли боғланмаган хусусий ечимлар бўлиб, умумий ечим

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (6)$$

бўлади.

2-мисол. $y'' - 5y' + 6y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламага мос характеристик тенгламани тузамиз:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Характеристик тенгламанинг илдизлари

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \quad r_2 = 3$$

бўлиб, умумий ечим (6) формулага асосан

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

бўлади.

2) Иккинчи ҳолда, характеристик тенгламанинг илдизлари тенг $r_1 = r_2$ va $y_1(x) = e^{r_1 x}$ битта хусусий ечим бўлади. Иккинчи хусусий ечимни $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ кўринишда танлаймиз. Бу функция ҳам (3) тенгламанинг ечими бўлади, ҳақиқатан ҳам

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x}(r_1^2 + 2r_1)$$

ифодаларни (3) тенгламага қўйиб

$$x(r_1^2 + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. r_1 характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун охирги тенгликдаги биринчи қавс айнан нўлга тенг, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ бўлганлиги учун иккинчи қавс ҳам айнан нўлга тенг.

Демак, $y_2(x)=xe^{r_1x}$ функция ҳам (3) тенгламанинг ечими бўлади, ҳамда $y_1(x)$ va $y_2(x)$ ечимлар чизиқли боғланмаган (текшириб кўринг). Шундай қилиб,

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x} \tag{7}$$

умумий ечим бўлади.

3-мисол. $y''+6y'+9y=0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$r^2+6r+9=0$$

бўлиб, илдизлари $r_1=r_2=-3$ бўлади (тенгламани ечиб кўрсатинг). Характеристик тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг, (7) формулага асосан $y(x)=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$ функция берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

3) Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс, қўшма: $r_1=\alpha+i\beta,\ r_2=\alpha-i\beta$ бўлганда хусусий ечимларни

$$y_1(x)=e^{r_1x}=e^{(\alpha+\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\beta x}$$

$$y_2(x)=e^{r_2x}=e^{(\alpha-\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-\beta x}$$

кўринишда олиш мумкин. Бу ифодаларга

$$e^{\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$$

Эйлер формуласини татбиқ этсак,

$$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x,\quad y_2(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Маълумки, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси ҳам бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлади. Шунинг учун

$$y_1=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x \quad va \quad y_2=\frac{y_1-y_2}{2}=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

функциялар ҳам (3) тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлар чизиқли боғланмаган, чунки улардан тузилган Вронский детерминанти нўлдан фарқли (текшириб кўринг).

Демак,

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \tag{8}$$

(3) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

4-мисол. $y''+6y'+13y=0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламага мос характеристик тенгламанинг илдизлари:

$$r_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot13}}{2}=\frac{-6\pm4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i, \quad r_2 = -3 - 2i$ бўлади. Бу илдизлар комплекс қўшма бўлиб учинчи ҳолга мос келади. $\alpha = -3, \ \beta = 2$ эканлигини ҳисобга олиб (8) формулага асосан умумий ечим,

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

бўлади.

Энди иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли тенглама учун берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топишни, яъни Коши масаласини қараймиз.

5-мисол. $y'' - y' - 2y = 0$ дифференциал тенгламанинг $x = 0$ бўлганда $y = 8, \quad y' = 7$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли, бир жинсли, чизиқли тенгламадир. Унга мос характеристик тенглама

$$r^2 - r - 2 = 0$$

бўлиб, $r_1 = -1, \quad r_2 = 2$ унинг илдизлари бўлади. Демак, тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

бўлади. Охирги тенгликдан ҳосила олсак,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

бўлиб , $x = 0$ бўлганда $y = 8, \quad y' = 7$ бошланғич шартларга асосан,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Охирги тенгламалар системасидан $C_1 = 3, \ C_2 = 5$ ларни аниқлаймиз. Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$ тенгламанинг $x = 1$ бўлганда $y = 2, \quad y' = 1, \ y'' = 1$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

2. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1) $x^3y''+x^2y'=1;$ 2) $yy''+y'^2=0;$ 3) $y''+2y(y')^3=0;$ 4) $y''y^3=1;$

5) $(1+x^2)y''+2xy'=x^3;$ 6) $y''+y'tgx=\sin 2x;$ 7) $y''+2y'^2=0;$

8) $xy''-y'tgx=e^x x^2;$ 9) $2yy''=(y^1)^2;$ 10) $t\dfrac{d^2s}{dt^2}+\dfrac{ds}{dt}+t=0.$

3. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

1) $y''+3y'-4y=0;$ 2) $y''-2y'-5y=0;$ 3) $y''-y=0;$

4) $4y''-12y'+9y=0;$ 5) $y''+2\sqrt{2}y+2y=0;$ 6) $y''-2y'+50y=0;$

7) $y''-4y'+7y=0;$ 8) $y''+6y'=0.$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг қандай хиллари бор?

2. Қандай дифференциал тенгламаларнинг тартибини пасайтириш билан ечиш мумкин?

3. Қандай дифференциал тенгламаларга чизиқли дейилади?

4. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар қандай кўринишда бўлади?

5. Характеристик тенглама нимадан иборат?

11-мавзу. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар

Режа

1.Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар .

2. Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқлари.

Таянч ибора ва тушунчалар

Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими, бирорта хусусий ечим, бирорта хусусий ечимни тенгламанинг ўнг томони кўпҳад бўлганда топиш, синус ва косинус функциялар йиғиндиси бўлганда топиш, аниқмас коэффициентлар усули, ишлаб чиқаришнинг раљобатсиз шароитда ўсиш модели, ишлаб чиқаришнинг рақобатли шароитда ўсиши модели, логистик чизиқ, талаб ва таклифни дифференциал тенглама ёрдамида таҳлили.

1.Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар . Бундай тенглама

$$y''+py'+gy=f(x) \qquad (1)$$

кўринишда бўлиб, бу ерда p, g ўзгармас коэффициентлар, $f(x)$ берилган узлуксиз функция.

Чизиқли **бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими,** бундай тенгламанинг бирорта хусусий ечими ва унга мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборат бўлади, яъни $\overline{y}$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими y_1 бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими бўлса, умумий ечим

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_1(x) \qquad (2)$$

кўринишда бўлади. Бу фикрга (2) ечимни (1) тенгламага қўйиб кўриш билан ишониш мумкин (буни бажариб кўринг).

(1) тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $\overline{y(x)}$ ни топишни юқорида ўргандик. Эндиги вазифа бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топишдан иборат бўлади. (1) тенгламада $f(x)$ функция:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P(x),$ бу ерда $P_n(x)$ $n-$ даражали кўп ҳад;

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$

кўринишда бўлганда хусусий ечимни топиш масаласини қараймиз.
Биринчи ҳолда хусусий ечимни

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда k характеристик тенглама илдизларининг α га тенг бўлганлари сони (0,1,2 бўлиши мумкин), $Q_n(x),$ $P_n(x)$ билан бир хил даражали, лекин аниқмас коэффициентли кўпҳад. Бу ҳолга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Олдин берилган тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз: бир жинсли тенглама $y'' + 2y' - 3y = 0$ бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $r^2 + 2r - 3 = 0$ бўлади. Унинг илдизлари

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \qquad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

бўлиб, биржинсли тенгламанинг умумий ечими $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$ бўлади.

Энди берилган биржинсли бњлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз: Уни e^{2x} функция ва берилган кўпҳад даражаси билан бир хил кўпҳад, лекин аниқмас коэффициентли кўпҳад кўпайтмаси кўринишида излаймиз. Шундай қилиб, хусусий ечим

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

кўринишда бўлади. Энди ***аниқмас*** A, B va C ***коэффициентларни*** *топиш* лозим. Шартга кўра $y_1(x)$ берилган тенгламани қаноатлантириши керак. Бунинг учун

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B),$$

$$y''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A$$

ларни берилган тенгламага қўйиб,

$$e^{2x}\left[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)\right] = e^{2x}(25x^2 - 47)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликни e^{2x} га бўлсак,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

бўлади.

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ берилган тенгламанинг ечими бўлиши учун охирги тенгламадаги бир хил даражали x лар коэффициентлари ўзаро тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = 47. \end{cases}$$

Учта номаълум коэффициентларга нисбатан учта чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу системани ечсак $A = 5, \ B = -12, \ C = 3$ бўлади (буни бажариб кўринг).

Демак, $y_1(x) = e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$ берилган тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Берилган тенгламанинг умумий ечими (2) формулага асосан

$$y = \bar{y} + y_1 = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} + e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$$

бўлади.

Юқоридагидек хусусий ечимни топишга ***аниқмас коэффициентлар усули*** дейилади.

2-мисол. $y'' - 4y' = 3x^2$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$r^2 - 4r = 0$ бўлиб, $r_1 = 0; \ r_2 = 4$ унинг илдизлари бўлади ва бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y}(x) = C_1e^{0x} + C^2e^{4x} = C_1 + C_2e^{4x}$$

бўлади. Берилган тенгламанинг ўнг томони $3e^{0x}x^2$ бўлиб, $\alpha = 0$ ва нўл характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун хусусий ечим

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

кўринишда бўлади.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y''_1 = 6Ax + 2B$$

буларни берилган тенгламага қўйсак,

$$-12Ax^2+(6A-8B)x+2B-4C=3x^2$$
тенглама ҳосил бўлади. Бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштириб,
$$\begin{cases} -12A=3, \\ 6A-8B=0, \\ 2B-4C=0 \end{cases}$$
тенгламалар системасини оламиз. Бундан
$$A=-\frac{1}{4}, \quad B=-\frac{3}{16}, \quad C=-\frac{3}{32}$$
бўлади. Шундай қилиб, хусусий ечим
$$y_1(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{16}x^2-\frac{3}{32}x$$
бўлиб, умумий ечим
$$y(x)=C_1+C_2e^{4x}-\frac{1}{4}(x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x)$$
бўлади.

2) $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$ бўлганда хусусий ечим $y_1(x)=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)x^k$ кўринишда бўлиб, k характеристик тенглама илдизларининг $i\beta$ га тенг бўлганларининг сони.

3-мисол. $y''+y=\sin x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенглама $r^2+1=0$ бўлиб, илдизлари $r_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$
бўлади.

$\beta=1; \quad i\beta=i$

бўлганлиги учун $k=1$, яъни хусусий ечимни

$$y_1(x)=(A\cos x+B\sin x)x^1$$

кўринишда излаймиз. A ва B аниқмас коэффициентлар. Бу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топиб,

$$y_1'(x)=(A\cos x+B\sin x)x+A\cos x+B\sin x=(A+Bx)\cos x+(B-Ax)\sin x$$

$$y_1''(x)=B\cos x-A\sin x-Bx\sin x-A\sin x+B\cos x-Ax\cos x=(2B-Ax)\cos x+$$
$$+(-2A-Bx)\sin x$$

берилган тенгламага қўйсак,

$$(2B-Ax)\cos x+(2A-Bx)\sin+Ax\cos x+Bx\sin x=\sin x \qquad yoki$$

$$2B\cos x+(-2A)\sin x=\sin x$$

ҳосил бўлади. Охирги тенгликдан

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

ва $B = 0, \quad A = -\dfrac{1}{2}$ бўлиб, хусусий ечим

$$y_1(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

бўлади.

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

бўлганлиги учун, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

бўлади.

4-мисол. $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Олдин берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз. $y'' + 4y' + 5y = 0$ тенгламанинг характеристик тенгламаси $r^2 + 4r + 5 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $r_1 = -2 - i; \quad r_2 = -2 + i$ бўлади. Бир жинсли тенглама умумий ечими

$$\bar{y}(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

бўлади.

Энди берилган тенгламанинг бирор хусусий ечимини топамиз: уни

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x$$

кўринишда излаймиз. $y'(x), \quad y''(x)$ ҳосилаларни топиб берилган тенгламага қўйсак,

$$(4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = 2\cos x - \sin x$$

бўлиб, $\cos x$ ва $\sin x$ лар коэффициентларини тенглаштириб.

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2. \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, бундан $A = \dfrac{3}{8}, \; B = \dfrac{1}{8}$ эканлигини аниқлаб, хусусий ечимни топамиз.

$$y_1(x) = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

бўлади.

Энди берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқлаймиз, яъни бошланғич шартлар берилганда Коши масаласининг ечиминитопамиз: Умумийечимданхосила

$$y'(x) = -2e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x) - \frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{8}\cos x$$

бўлади, бошланғич шартлардан фойдаланиб,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 va C_2 номаълумларга нисбатан тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, бундан $C_1 = \frac{5}{8}, \quad C_2 = \frac{25}{8}$.

Шундай қилиб, берилган тенгламага қўйилган Коши масаласининг ечими

$$y(x) = e^{-2x}(\frac{5}{8}\cos x + \frac{25}{8}\sin x) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

бўлади.

2. Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқлари

Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқларига бир неча мисоллар келтирамиз.

1). *Ишлаб чиқаришнинг рақобатсиз шароитда (табиий) ўсиш модели.* Бирор турдаги маҳсулот ишлаб чиқарилиб у тайин (белгиланган) P нархда сотилаётган бўлсин. $Q(t)$ вақтнинг t онида (моментида) реализация қилинган маҳсулот миқдори бўлсин. Бу ҳолда маҳсулотни реализация қилишдан олинган даромад

$$PQ(t)$$

модел билан ифодаланади. Бу даромаднинг бир қисми албатта ишлаб чиқариш $J(t)$ инвестициясига сарфлансин, яъни

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

бўлсин, бунда m инвестиция меъёри бўлиб ўзгармас сон, ҳамда $0 < m < 1$.

Ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация қилинаётган бўлса, ишлаб чиқаришни кенгайтириш натижасида даромаднинг ўсиши таъминланиб, бу даромаднинг бир қисми яна маҳсулот ишлаб чиқаришни кенгайтиришга сарфланади. Бу ҳол ишлаб чиқариш тезлигининг ўсиши (акселерация)га олиб келади, ҳамда ишлаб чиқариш тезлиги инвестицияга пропорционал бўлади, яъни

$$Q(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

бунда $\frac{1}{e}$ акселерация меъёри. (1) ва (2) тенгликлардан

$$Q(t) = emPQ \quad yoki \quad Q(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

келиб чиқади, бунда $k = emP$.

(3) дифференциал тенглама биринчи тартибли, ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, унинг умумий ечими

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad yoki \quad Q = ce^{kt}$$

бўлади, бунда c ихтиёрий ўзгармас.

Вақтнинг $t = t_0$ моментида ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори Q_0 бўлсин.

Бу шартда

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad yoki \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

бўлади. (3) тенглама учун Коши масаласининг ечими

$$Q = Q_0 e^{k(t - t_0)} \qquad (4)$$

бўлади.

Шундай қилиб, ишлаб чиқаришнинг табиий ўсиши модели экспоненциал бўлар экан (табиий ўсиш деганимизда рақобат йўқлиги тушунилади).

Математик моделлар **умумийлик хоссасига эга.** Бунинг мисоли сифатида қуйидаги ҳолни келтириш мумкин. Биологик кузатишлардан маълумки бактерияларнинг кўпайиш жараёни ҳам (3) дифференциал тенглама билан ифодаланади. Бундан ташқари радиоактив парчаланиш: радиоактив модда массасининг камайиши жараёни қонуни ҳам (4) формулага мос келади.

2). *Ишлаб чиқаришнинг рақобатли шароитда ўсиши модели*

Олдинги мисолда ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация бўладиган шароитни қарадик. Энди рақобатли, яъни бозорга бу маҳсулотни бошқалар ҳам реализация қиладиган шароитни қараймиз. Бундай шароитда маҳсулот ишлаб чиқариш миқдорини кўпайтириш билан бозорда унинг нархи камаяди. $P = P(Q)$ функция (P маҳсулот нархи, Q маҳсулот миқдори) камаювчи бўлиб

$\frac{dP}{dQ} < 0$ бўлади. Энди (1)-(3) формулалардагидек

$$Q = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда $\alpha = em$. (5) тенгламанинг ўнг томонидаги кўпайтувчилар ҳаммаси мусбат ишорали, демак $Q' > 0$ бўлади, яъни $Q(t)$ ўсувчи функция эканлиги келиб чиқади.

Оддийлик учун $P(Q)$ функционал боғланиш чизиқли, яъни

$$P(Q) = a - bQ, \quad a >, \; b > 0$$

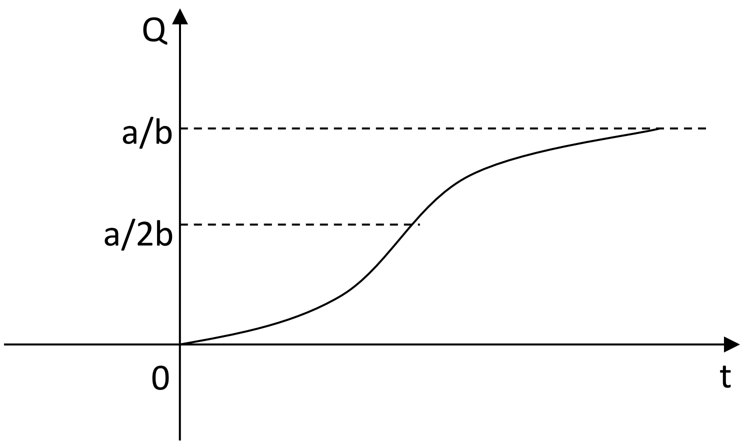
бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (5) тенглама

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

кўринишда бўлади. (6) тенгликни дифференциаллаcак

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \;\; yoki \;\; Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (7)$$

тенглама ҳосил бўлади. (6)-(7) тенгламалардан $Q = 0 \; va \; Q = \frac{a}{b}$ бўлганда, $Q' = 0, \quad Q < \frac{a}{2b}$ бўлганда, $Q'' > 0$ ҳамда $Q > \frac{a}{2b}$ бўлса $Q'' < 0$ келиб чиқади. Булардан $\frac{a}{2b}$ нуқтадан ўтишда Q ишорасини ўзгартирганлиги учун, бу нуқта $Q = Q(t)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади. Бу функция графиги, яъни (6) дифференциал тенглама интеграл чизиқларидан бири, 1-чизмада тасвирланган бўлиб, бу эгри чизиққа иқтисодда ***логистик чизиқ*** деб аталади.



. 1-чизма.

3). ***Талаб ва таклифни таҳлил қилиш.*** Маълумки, бозор моделида маҳсулотга талаб ва таклиф мавжуд ҳолатларда нархнинг ўзгариш суръати билан боғлиқ бўлади. Бундай суръат t вақтнинг $P(t)$ нарх функцияси биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласи билан характерланади.

Қуйидаги мисолни қараймиз. Талаб D ва таклиф S P нархнинг функцияси бўлиб ушбу билан ифодалансин:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 \qquad (1)$$

Бундай боғлиқлик ҳақиқатда мавжуд ҳолатларга мос келади. Ҳақиқатан ҳам, нарх суръати ошса бозорнинг маҳсулотга қизиқиши ортади, яъни $p'' > 0$ бўлади. Нархнинг тез ўсиши харидорни чўчитиб талабнинг пасайишига олиб келади. Шунинг учун, p' биринчи тенгликда манфий ишора билан ифодаланади. Иккинчидан, нарх суръатининг ортиши билан таклиф яна кучаяди, шунинг учун p'' нинг коэффициенти талаб функциясидагига нисбатан катта, нархнинг ўсиши тезлиги таклифнинг ҳам ўсишига олиб келади, яъни p' таклиф функциясида мусбат ишорали бўлади.

Нарх функцияси ва вақт ўзгариши орасидаги боғланишни таҳлил қилайлик. Маълумки, бозор ҳолати $D = S$ мувозанат билан ифодаланади. Бу ҳолда (1) тенгликдан

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

иккинчи тартибли, ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама келиб чиқади.

Бизга маълумки бундай тенгламанинг умумий ечими бу тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва (2) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечими йиғиндисидан иборат. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

бўлади, бунда C_1 ва C_2 лар ихтиёрий ўзгармаслар.

Бир жинсли бўлмаган (2) тенглама хусусий ечими $p_1(t) = A$ ўзгармас, яъни қарор топган нархни оламиз, ҳамда буни (3) тенгламага қўйиб $A = 3$ эканлигини аниқлаш мумкин. Демак, $p_1(t) = 3$ бўлади.

Шундай қилиб (9) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$p(t) = p(t) + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

бўлади.

Бу ечимдан $t \to \infty \;\; da \;\; p(t) \to 3$ бўлади, яъни ҳамма нархлар қарор топган нархга яқинлашади.

Ушбу Коши масаласини қараймиз: $t = 0$ бўлганда, нарх $p(0) = 4$ ва ўсиш майли (тенденцияси) $p'(0) = 1$ бўлсин. $t = 0$ бўлганда $p(0) = 4$ бўлганлиги учун (10) дан $C_1 = 1$ келиб чиқади. (3) тенгликдан ҳосила олиб ва t=0 бўлганда $p(0) = 1$ шартдан фойдалансак C_2=4 келиб чиқади, демак Коши масаласининг ечими

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4\sin t)$$

бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1.Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

1) $y''+6y'+5y=e^{2x}$; 2) $y''+y'+7y=8\sin 2x$; 3) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$;

4) $y''-5y'+6y=3e^{2x}$; 5) $y''+9y=(43+10x-26x^2)e^{2x}$;

6) $y''+6y'+10y=9\cos x+27\sin x$; 7) $y''-6y'+9y=2\sin 2x$

2. $y''+16y=\sin 4x$ тенглама учун $x=0$ бўлганда $y=1,\ y'=\dfrac{7}{8}$ бўладиган бошланғич шартларда, Коши масаласини ечинг.

Мустахкамлаш учун саволлар

1. <u>Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг умумий ечими қандай топилади?</u>

<u>2. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг бирорта хусусий ечими қандай топилади?</u>

3. <u>Аниқмас коэффициентлар усули нимадан иборат?</u>

Қаторлар

12, 13-мавзу. Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашиш белгилари

Режа

1. Сонли қаторлар ҳақида тушунчалар.

2. Қатор йиғиндиси ва унинг яқинлашуви.

3. <u>Қатор яқинлашишининг зарурий белгиси(шарти).</u>

4. Мусбат ҳадли қаторлар яқинлашишининг <u>етарли белгилари.</u>

5. Ишоралари алмашинувчи қаторлар(Лейбниц љатори).

Мавзунинг таянч тушунчалари

Сонли қатор, чексиз йиғинди, умумий ҳад, гармоник қатор, қатор йиғиндиси, қисмий йиғинди, яқинлашувчи қатор, узоқлашувчи қатор, зарурий белги, етарли белги, таққослаш белгиси, Даламбер белгиси, Коши белгиси, интеграл белги, ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлар, ўзгарувчан ишорали қаторлар, Лейбниц белгиси, абсолют ва шартли яқинлашиш.

1. Сонли қаторлар ҳақида тушунчалар

1-таъриф. $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots,\ u_n,\dots$ сонлар кетма-кетлигидан тузилган.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{1}^{\infty}u_n \tag{1}$$

<u>чексиз йиғиндига сонли қатор</u> дейилади.

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ ларга қаторнинг ҳадлари, u_n га эса n ***- ҳади*** ёки ***умумий ҳади*** дейилади.

Қаторларга бир неча мисоллар келтирамиз:

1) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

қаторга ***гармоник қатор*** дейилади;

2) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

қатор биринчи ҳади $a_1 = \frac{1}{2}$, махражи $q = \frac{1}{2}$ бўлган геометрик прогрессияни ифодалайди;

3) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

2. Қатор йиғиндиси ва унинг яқинлашуви. Сонли қатор таърифидан маълумки, унинг ҳадлари чексиз кўп бўлиб, йиғиндисини оддий йўл билан қўшиб, топиб бўлмайди. Шунинг учун қаторнинг йиғиндиси тушунчасини киритамиз. (1) қатор ҳадларидан

$$u_1 = S_1,\quad u_1 + u_2 = S_2,\quad u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \ldots,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = S_n$$

қисмий йиғиндилар тузамиз.

2-таъриф. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ чекли лимит мавжуд бўлса, S га ***қатор йиғиндиси*** дейилади ва ***қатор яқинлашувчи*** деб аталади.

Чекли лимит мавжуд бўлмаса, қаторнинг йиғиндси бўлмайди ва у ***узоқлашувчи*** дейилади.

1-мисол. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторнинг n қисмий йиғиндиси

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Шундай қилиб, берилган сонли қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S=1$ бўлади.

3. <u>Қатор яқинлашишининг зарурий белгиси(шарти).</u>

Теорема. $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ (2)
қатор яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

шарт бажарилади.
Исбот. (2) қатор яқинлашувчи бўлганлиги учун

$$u_n = S_n - S_{n-1}; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ келиб чиқди.

Натижа. Қатор умумий ҳадининг $n\to\infty$ даги лимити 0 га тенг бўлмаса, у узоқлашувчи бўлади. Лекин $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ шартдан қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқмайди. Бу шарт фақат зарурий шарт бўлиб, етарли эмас.

4. Мусбат ҳадли қаторлар яқинлашишининг <u>етарли белгилари</u>

1) <u>Қатор яқинлашишининг таққослаш белгиси</u>.

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (3)$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (4)$$

қаторлар учун $u_1\le v_1,\ u_2\le v_2,\ldots,u_n\le v_n,\ldots$ тенгсизликлар ҳамма n лар учун бажарилиб: (4) қатор яқинлашувчи бўлса, (3) қатор ҳам яқинлашувчи бўлиди ва унинг йиғиндиси (4) қатор йиғиндисидан катта бўлмайди; (3) қатор узоқлашувчи бўлса, (4) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

2-мисол. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$
қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторни

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

қатор билан таққослайимз. Маълумки, кейинги қатор махражи $q=\frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик прогрессия бўлиб, яқинлашувчидир. Ҳамма n лар учун

$$\frac{1}{n\cdot 2^n}\leq\frac{1}{2^n}.$$

тенгсизликлар бажарилади, демак таққослаш белгисига асосан, берилган қаторнинг ҳам яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

2). ***<u>Даламбер белгиси</u>*.** Мусбат ҳадли

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots$$

қатор берилган бўлсин. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$ лимит мавжуд бўлиб: $d<1$ бўлса, қатор яқинлашувчи; $d>1$ бўлса, қатор узоқлашувчи; $d=1$ бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин, бундай ҳолларда қаторни бошқа белгилардан фойдаланиб текшириш керак бўлади.

3-мисол. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$

Демак, берилган қатор Даламбер белгисига асосан яқинлашувчи.

4-мисол. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш.

$$d=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}/\frac{n}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}=\frac{2}{2}=1.$$

Бу ҳолда Даламбер белгиси саволга жавоб бермайди. Берилган қатор учун қатор яқинлашишининг зарурий белгисини текширайлик.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди, демак берилган қатор узоқлашувчи.

3) ***<u>Коши белгиси</u>*.**

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

мусбат ҳадли қатор берилган бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$$

лимит мавжуд ва $k<1$ бўлса, қатор яқинлашувчи; $k>1$ бўлса, қатор узоқлашувчи; $k=1$ бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин, бу ҳолда Коши белгиси саволга жавоб бермайди.

5-мисол. $$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$
қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Коши белгисидан

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Шундай қилиб, берилган қатор Коши белгисига асосан яқинлашувчи бўлади.

4) Қатор *яқинлашишининг интеграл белгиси*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

мусбат ҳадли қатор берилган бўлсин.

$f(n)=a_n$ натурал аргументли функция тузамиз. $f(n)$ узлуксиз, мусбат ва камаювчи функция бўлсин.

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(n)dn$$
хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, берилган қатор ҳам яқинлашувчи, хосмас интеграл узоқлашувчи бўлса, қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

6-мисол. $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$
қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $f(n)=\dfrac{1}{n^2}\quad yoki\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ функцияни тузиб, ушбу хосмас интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)^b\Bigg|_1=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи, интеграл белгига асосан, текширилаётган қатор ҳам яқинлашувчидир.

7-мисол. $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}+\ldots$$
гармоник қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $f(n)=\dfrac{1}{n}\quad yoki\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$ бўлганлиги учун

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

Демак, хосмас интеграл узоқлашувчи, интеграл белгига асосан, гармоник қатор ҳам узоқлашувчи эканлиги келиб чиқади.

5. Ишоралари алмашинувчи қаторлар(Лейбниц љатори). Ишоралари ҳар хил бўлган қаторларга ***ўзгарувчан ишорали*** қаторлар дейилади.

Ўзгарувчан ишорали қаторларнинг хусусий ҳоли ***ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлардир*.**

Масалан, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$

қатор биринчи ҳади мусбат бўлган ишоралари навбат билан алмашинувчи қатордир.

Ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлар яқинлашишини **Лейбниц белгиси** билан текширилади.

Ишоралари навбат билан алмашинувчи

$$a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots \qquad (5)$$

қатор берилган бўлсин. Бу ерда $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_n, \ldots$ мусбат сонлар.

***Лейбниц белгиси*.** Ишоралари навбат билан алмашинувчи қатор ҳадлари абсолют қиймати бўйича камаювчи, яъни 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ ва 2) умумий ҳадининг $n \to \infty$ даги лимити нўлга тенг, яъни $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ бўлса, ишоралари навбат билан алмашинувчи (5) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси биринчи ҳаддан катта бўлмайди. Бу шартлардан биронтаси бажарилмаса қатор узоқлашувчи бўлади.

8 –мисол. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Лейбниц белгиси шартларини текширамиз:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots;$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Демак, Лейбниц белгисининг иккала шарти ҳам бажарилади. Шундай қилиб, берилган қатор Лейбниц белгисига асосан, љатор яқинлашувчи.

9-мисол. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 + \ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш: $1,1 > 1,01 > 1,001 > \ldots$

биринчи шарт бажарилади. Лекин $a_n = 1 + 0,1^n$ бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{10^n}) = 1 \neq 0$$,

Лейбниц белгисининг иккинчи шарти бажарилмайди. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

Қаторлар назариясидан тақрибий ҳисоблашларда кенг қўлланилади. Тақрибий ҳисоблашларда йўл қўйилган хатоликни баҳолаш катта амалий аҳамиятга эга. Ишоралари навбатлашувчи қаторларда хатолик, ҳисобга олинмаётган биринчи ҳад абсолют қийматидан катта бўлмайди, яъни

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

10-мисол. $$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

ни 0,1 аниқликда таърибий ҳисобланг.

Ечиш: Шартга асосан $|r_n| < 0,1$ бўлиши керак.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9. \quad Demak,$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0,74.$$

Бунда $S \approx 0,7$; $0,1$ гача аниқликда ҳисобланди.

Энди ўзгарувчан ишорали қаторларнинг айрим хоссаларини қараймиз.

Абсолют ва шартли яқинлашиш.

1-таъриф. Ўзгарувчан ишорали қатор ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлса, ўзгарувчан ишорали қатор ***абсолют яқинлашувчи*** дейилади.

2-таъриф. Ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлса, ўзгарувчан ишорали қатор ***шартли яқинлашувчи*** дейилади.

11-мисол. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$ қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматидан қатор тузамиз:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

бу қатор махражи $q = \frac{1}{3}$ бўлган геометрик прогрессия бўлиб яқинлашувчидир. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

12-мисол. $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$$

қатор шартли яқинлашувчидир. Чунки, унинг ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

гармоник қатор узоқлашувчи эди.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

қатор яқинлашишининг зарурий шартини текширинг.

2. $$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$$

қатор яқинлашишининг зарурий шартини текширинг.

3. $$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

4. $$1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

5. $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Сонли қатор деб нимага айтилади?
2. Қаторнинг умумий ҳади нима?
3. Гармоник қатор деб қандай қаторга айтилади?
4. Қаторнинг қисмий йиғиндиси нима?
5. Қаторнинг йиғиндиси қандай аниқланади?
6. Қандай қаторга яқинлашувчи дейилади?
7. Қандай қатор узоқлашувчи бўлади?
8. Яқинлашувчи қаторлар қандай хоссаларга эга?
9. Қатор яқинлашишининг зарурий белгиси нима?
10. Қатор яқинлашишининг етарли ва зарурий белгиларининг фарқи нимадан иборат?

14-18-мавзу. Функционал ва даражали қаторлар. Фурье катори

Режа

1. Функционал қаторлар ҳақида тушунчалар.
2. Даражали қаторлар ва уларнинг хоссалари.
3. Тейлор ва Маклорен қаторлари.
4. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш.
5. Қаторларнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқлари.
6. Фурье катори.
7. Жуфт ва ток функциялар учун Фурье катори

Таянч ибора ва тушунчалар

Функционал қатор, яқинлашиш интервали, яқинлашиш радиуси, даражали қатор йиғиндиси, даражали қаторни ҳадлаб интеграллаш ва дифференциаллаш, Тейлор қатори, Маклорен қатори, биномиал қатор, тақрибий ҳисоблаш, яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари, функцияларни даражали қаторларга ёйиш.Фурье катори.

1. Функционал қаторлар ҳақида тушунчалар.

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

функциялар кетма-кетлиги бўлсин.

1-таъриф. $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ (1)

ифодага ***функционал қатор*** дейилади. (1) да $x=x_0$ бирор сон бўлса, қўйидаги сонли қаторни ҳосил қиламиз

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \qquad (2)$$

(2) сонли қатор яқинлашувчи бўлса, (1) функционал қатор $x=x_0$ нуқтада яқинлашувчи дейилади ва $x=x_0$ нуқтага яқинлашиш нуқтаси деб аталади.

1-мисол. $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ (3)

функционал қатор $x=\frac{1}{2}$ нуқтада яқинлашувчидир, чунки

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи.

Берилган (3) функционал қатор $x=2$ нуқтада узоқлашувчи, чунки

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n+\ldots.$$

сонли қатор узоқлащувчи.

Функционал қатор яқинлашувчи бўлган нуқталар тўпламига, унинг ***яқинлашиш соҳаси*** дейилади.

2. Даражали қаторлар ва уларнинг хоссалари.

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a\ )^n + ... \qquad (4)$$

функционал қаторга даражали қатор дейилади. $a_0,\ a_1,\ a_2,...,a_n,...$ ўзгармас сонлар, даражали қаторнинг коэффициентлари деб аталади.

Даражали қатор шундай хоссага эгаки, у $x = b_0$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ тенгсизликни қоноатлантирувчи ҳамма x лар учун ҳам яқинлашувчи бўлади. Даражали қатор учун шундай R сон мавжудки, $|x - x_0| < R$ учун, қатор абсолют яқинлашувчи $|x - x_0| > R$ учун қатор узоқлашувчи, яъни $-x_0 - R < x < -x_0 + R$ ораликда даражали қатор абсолют яқинлашувчи, $x = -x_0 \pm R$ нуқталарда ҳосил бўлган қатор яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин. Ҳар икки нуқтада қатор яқинлашишини алоҳида текшириш керак бўлади. $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ интервалга ***яқинлашиш интервали***, R га даражали қаторнинг ***яқинлашиш радиуси*** дейилади. Яқинлашиш радиуси $R = 0\ \ yoki\ \ R = \infty$ бўлиши мумкин $R = 0$ бўлса, даражали қатор фақат $x = x_0$ нуқтада, $R = +\infty$ бўлса, бутун сонлар ўқида яқинлашувчи бўлади.

Яқинлашиш интервалини, берилган қаторнинг абсолют қийматидан тузилган қатор учун Даламбер ва Коши белгиларидан фойдаланиб топиш мумкин. Даражали қаторнинг ҳамма коэффициентлари 0 дан фарқли бўлса, яқинлашиш радиусини топишда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

формуладан фойдаланилади. Бошқа ҳолларда бевосита Даламбер белгисидан фойдаланиб яқинлашиш интервалини топиш мумкин.

2-мисол. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$ даражали қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш: $a_n = \frac{1}{n},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$. Қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

Демак, $-1 < x < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма x лар учун қатор яқинлашувчи.

Қатор яқинлашишини интервалнинг четки нуқталарида текширамиз: $x=1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....$$

гармоник қатор ҳосил бўлиб, у узоқлашувчидир. $x=-1$ бўлсин, бу ҳолда

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у Лейбниц белгиси шартларини қаноатлантиргани учун яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $-1\le x<1$ дан иборатдир.

3-мисол. $$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+...+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+...$$
даражали қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $a_n=\frac{1}{n^2},\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$ бўлганлиги учун

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2=1.$$

Демак, $-1<x-2<1 \quad yoki \quad 1<x<3$ интервалда қатор яқинлашувчи. Интервалнинг четки нуқталарида қатор яқинлашишини текширамиз. $x=3$ бўлсин, бунда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, интеграл белгидан фойдалансак унинг яқинлашувчилиги келиб чиқади(бажариб кўринг). $x=1$ бўлса,

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у абсолют яқинлашувчидир.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $1\le x\le 3$ бўлади.

3. Тейлор ва Маклорен қаторлари. $y=f(x)$ функция $x=a$ нуқтада $(n+1)$ тартибгача ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қўйидаги Тейлор формуласи ўринлидир:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[a+Q(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ \ (0<Q<1)$$
бу ерда бўлиб, Лагранж шаклидаги қолдиқ ҳади дейилади.

$a=0$ да Тейлор формуласининг хусусий ҳоли - Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),\quad bu\ erda$$

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[Qx\right]}{(n+1)!}x^{n+1},\ \ (0<Q<1).$$

$y=f(x)$ функция a нуқта атрофида исталган марта дифференциалланувчи бўлса ва бу нуқтанинг бирор атрофида

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

бўлса, Тейлор ва Маклорен формулаларидан

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots.+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.\ va$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

қаторлар ҳосил бўлади. Буларнинг биринчиси ***<u>Тейлор қатори</u>*, иккинчисига ***<u>Маклорен қатори</u>*** дейилади.

Бу қаторлар x нинг $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ бўладиган қийматларида $f(x)$ га яқинлашади.

А нуқтани ўз ичига олувчи бирор интервалда исталган n учун $\left|f^{(n)}(x)\right|<M,$ (M бирор мусбат сон) тенгсизлик бажарилса, $\lim\limits_{n\to\infty}R(x)=0$ бўлади ва $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади.

<u>4. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш</u>

Айрим функцияларни даражали қаторга ёйямиз.

1) $f(x)=e^x$, исталган x учун

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ldots,f^{(n)}(x)=e^x,\ldots\quad x=0\quad deb$$

$$f(0)=1,\ \ f'(0)=1,\ \ f''(0)=1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=1,\ldots$$

Буларни Маклорен қаторига қўйиб,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad(-\infty<x<+\infty)$$

ҳосил қиламиз. Охирги тенгликдан $x=1$ десак,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

бўлиб, e сони қатор йиғиндиси кўринишида ифодаланади. Бундан фойдаланиб e сонининг тақрибий қийматини исталган даражадаги аниқликкача ҳисоблаш мумкин.

2) $f(x)=\sin x$. Исталган x учун

$$f'(x)=\cos x,\ \ f''(x)=-\sin x,\ \ f'''(x)=-\cos x,\ \ f''''(x)=\sin x,\ldots.$$

Бундан

$$f(0)=0,\ \ f'(0)=1,\ \ f''(0)=0,\ \ f'''(0)=-1,\ \ f''''(0)=0,\ \ldots$$

бўлиб,буларни Маклорен қаторига қўйсак,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

ҳосил бўлади.

Бу қатор исталган x учун яқинлашувчи $-\infty<x<+\infty$. Охирги қаторни ҳадлаб дифференциалласак,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

қатор ҳосил бўлади, бу $f(x)=\cos x$ функция учун Маклорен қатори бўлади.

3) Худди юқоридагидек усул билан $f(x)=(1+x)^m$ функция учун

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots.+\ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қаторга ***биномиал қатор*** дейилади. У $(-1,1)$ интервалда абсолют яқинлашувчи бўлади.

4) $f(x)=\ln(1+x)$ функция учун юқоридаги усул билан

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.\quad(-1<x\le 1)$$

ёйилмани ҳосил қилиш мумкин.

5-мисол. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Юқоридаги $\cos x$ учун келтирилган қаторда x ни $\sqrt{x}$ билан алмаштирсак,

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - .... + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + ...$$

бўлади. Бу қатор исталган x учун яқинлашувчидир, бироқ $\cos\sqrt{x}$ функция $x<0$ да аниқланмаганлигини ҳисобга олиб, ҳосил қилинган қатор $\cos\sqrt{x}$ функцияга $0 \le x < +\infty$ да яқинлашади.

5. Қаторларнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқлари. Бир неча мисоллар қараймиз.

6-мисол. $\cos x$ нинг ёйилмасидан фойдаланиб $\cos 18^0$ ни $0{,}001$ аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. $\cos x$ функциянинг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб,

$$\cos 18^0 = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - ...$$

қаторни ҳосил қиламиз.

$$\frac{\pi}{10} = 0{,}31416\,; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0{,}09870\,; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}00974\,.$$

ва $\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001$ бўлганлиги учун, тақрибий ҳисоблашда қаторнинг биринчи учта ҳади билан чегараланамиз, демак

$$\cos 18^0 \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24}; \quad yoki \quad \cos 18^0 \approx 0{,}9511\,.$$

7-мисол. $\sqrt[5]{1{,}1}$ ni $0{,}0001$ аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: $\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{\frac{1}{5}}$ деб, биномиал қатордан фойдалансак:

$$\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{1/5\cdot(1/5-1)}{2!}0{,}01 + \frac{1/5\cdot(1/5-1)\cdot(1/5-2)}{3!}0{,}001 +$$

$$+ ... = 1 + 0{,}02 - 0{,}0008 + 0{,}000048 - ....$$

бўлади. Тўртинчи ҳад $0.000048 < 0.0001$ бўлганлиги учун, ҳисоблашда биринчи учта ҳадини олиб, ҳисоблаймиз:

$$\sqrt[5]{1{,}1} \approx 1 + 0{,}02 - 0{,}0008 = 1{,}0192\,.$$

8-мисол. $\sqrt[3]{130}$ ni $0{,}001$ аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. 5^3 130 га энг яқин бутун соннинг куби бўлганлиги учун $130 = 5^3 + 5$ деб олиш қўлай бўлиб,

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3} + 5 = \sqrt[3]{5^3(1+\frac{1}{25})} = 5(1+\frac{1}{25})^{\frac{1}{3}} = 5(1+\frac{1}{3}0{,}04 + \frac{1/3\cdot(1/3-1)}{2!}0{,}0016 +$$

$$+\frac{(1/3(1/3-1)\cdot(1/3-2))}{3!}0{,}000064 + \ldots) = 5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2\cdot\frac{1}{9}\cdot 0{,}0016 + 5\frac{25}{81}\cdot 0{,}000032 - \ldots$$

охирги қаторда тўртинчи ҳад $0{,}001$ дан кичик бўлганлиги учун, биринчи учта ҳад билан чегараланамиз:

$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009 \approx 5{,}066.$

9-мисол. $\ln 1{,}04$ ni $0{,}0001$ гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: $\ln(1+x)$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланиб,

$$\ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} + \ldots,$$

ёки

$$\ln 1{,}04 = 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}000021 - 0{,}00000064 + \ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз, ҳамда учинчи ҳад $0{,}0001$ дан кичик бўлганлиги учун биринчи икки ҳадни ҳисобга олиб ҳисоблаймиз:

$\ln 1{,}04 \approx 0{,}0392.$

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots$

функционал қаторнинг $x=0$ va $x=1$ нуқталарда яқинлашувчилигини текширинг.

2. $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

3. $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

4-8 мисолларда қаторнинг яқинлашиш интервалини аниқланг.

4. $(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \ldots$

5. $x+(2x)^2+(3x)^3+(4x)^4+\ldots$

6. $5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\frac{5^4x^4}{4!}+\ldots$

9. Ушбу функцияларни даражали қаторга ёйинг.

1) $f(x)=3^x$; 2) $f(x)=e^{-2x}$; 3) $f(x)=\cos^2 x$.