ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ АВИАЦИЯ ИНСТИТУТИ

Абдукаримов А.

ЧИЗИҚЛИ ВА ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ

(УСЛУБИЙ КЎРСАТМА)

Тошкент 2006

Чизиқли ва векторлар алгебраси- услубий кўрсатма.
Тузувчи: ф.м.-ф.н. А.Абдукаримов.
Тошкент Давлат авиация институти; Тошкент, 2006.

Мазкур услубий кўрсатма “Олий математика” курсининг “Чизиқли ва векторлар алгебраси” мавзусига бағишланган бўлиб, Тошкент давлат авиация институти биринчи босқич талабалари учун мўлжалланган.

Кўрсатмада матрицалар устида амаллар, детерминантларни ҳисоблаш, бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар тизимини ечишнинг асосий усуллари ва векторлар алгебраси қаралган. Ҳар бир бўлимда мисоллар ечимлари билан берилган.

Ўтилган мавзуларни мустаҳкамлаш мақсадида 30 та вариантдан иборат мустақил иш топшириқлари ҳам келтирилган.

Ушбу услубий кўрсатмадан институтнинг барча мутахассисликдаги биринчи босқич талабалари фойдаланишлари мумкин.

Тақризчилар: ТДТУ “Олий математика” кафедрасининг мудири доц. Э.Қ.Қаюмов,
ТДАИ “Олий математика ва информатика” кафедрасининг мудири проф. Ғ.Шодмонов

Тошкент Давлат авиация институтининг илмий-услубий Кенгашнинг қарорига мувофиқ нашр қилинаётир
(Қарор №_____,_____июнь 2006 й.)

Тошкент-2006.

Матрица ва улар устида амаллар.

Матрица деб сонларнинг тўғри бурчакли жадвалига айтилади.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Белгилашлар: A - матрица; a_{ij} - матрица элементлари; i - берилган элемент жойлашган сатр рақами; j - унга мос устун рақами; m - матрицадаги сатрлар сони; n - ундаги устунлар сони.

Агар $m=n$ бўлса матрица квадрат матрица деб аталади. n - сони матрицанинг тартиби дейилади.

Бир хил ўлчамга эга бўлган матрицаларнинг мос элементлари ўзаро тенг бўлса, бундай матрицалар ўзаро тенг матрицалар деб аталади.

Агар матрицанинг барча элементлариноллардан иборат бўлса, бундай матрица нолли матрица деб аталади.

Агар квадрат матрицанинг асосий диагоналидаги барча элементлари 1, қолганлари 0 бўлса, бундай матрица бирлик матрица деб аталади.

1. Матрицалар устида чизиқли амаллар.

Матрицаларни қўшиш.

Бир ҳил $m\times n$ ўлчамли A ва B матрицаларнинг йиғиндиси деб, худди шундай ўлчамли C матрицага айтиладики, бу матрицанинг ҳар бир элементи A ва B матрицаларнинг мос элементларининг йиғиндисидан иборат бўлади:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$$

1-мисол.

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ матрицаларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. Берилган матрицаларнинг бир хил жойда турган элементларини қўшиб, $C = A + B$ матрица элементларини ҳисоблаймиз.

$c_{11}=a_{11}+b_{11}=2-1=1;\ c_{12}=-3+4=1;\ c_{13}=1+0=1;\ c_{14}=1-1=0;$

$c_{21}=0+2=2;\ c_{22}=4-2=2;\ c_{32}=-2+5=3;\ c_{14}=8+7=15.$

Шундай қилиб,C $=A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$

Матрицани сонга кўпайтириш.

Матрицани сонга кўпайтириш деб, ўлчами берилган матрица ўлчамига тенг бўлган, ҳар бир элементи берилган матрица элементини берилган сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган матрицага айтилади.

2-мисол.

Агар $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ бўлса, $5A-2B$ матрицани топинг.

Ечиш.

$$5A=\begin{pmatrix}10 & -15 & 5\\ -5 & 0 & -10\end{pmatrix},\ 2B=\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ -6 & 2 & -8\end{pmatrix},$$

$$5A-2B=\begin{pmatrix}10-8 & -15-6 & 5-4\\ -5+6 & 0-2 & -10+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -21 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, $5A-2B=\begin{pmatrix}2 & -21 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$

2. Матрицаларни кўпайтириш.

Ўлчами $m\times p$ бўлган A матрица ва улчами $p\times n$ бўлган B матрицаларнинг кўпайтмаси деб ўлчами $m\times n$ бўлган шундай C матрицага айтиладики, унинг ҳар бир элементи C_{ij} қуйидаги формула билан аниқланади:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj},\, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$$

Шундай қилиб, c_{ij} элемент A матрицанинг i - чи сатрини B матрицанинг унга мос j - чи устунига кўпайтмасининг йиғиндисидан иборат экан.

Матрицаларни кўпайтириш амали коммутатив эмас, яъни $AB\neq BA.$ Ҳақиқатдан ҳам, AB кўпайтма мавжуд бўлса, ўлчамлари тўғри келмаслиги сабабли BA кўпайтма умуман мавжуд бўлмаслиги мумкин. Агар AB ва BA лар мавжуд бўлса ҳам, уларнинг ўлчамлари ҳар ҳил бўлиши мумкин.

Бир ҳил ўлчамли квадрат матрицалар учун AB ва BA кўпайтмалар мавжуд ва улар бир ҳил ўлчамга эга бўлади, аммо умуман олганда мос элементлари тенг бўлмайди.

3-мисол.

Қуйидаги матрицаларни бир-бирига кўпайтириш мумкинми ёки йўқми? Шуни аниқланг. Агар кўпайтма мавжуд бўлса, уни ҳисобланг.

$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}.$

Ечиш. A ва B матрицаларнинг ўлчамларини таққослаймиз. $A[3\times 2]$, $B[2\times 2]$. Бундан $n=l$, $m\neq k$, шунинг учун $AB[3\times 2]$ мавжуд, кўпайтма BA эса мавжуд эмас.

AB кўпайтма элементларини топамиз:

$(ab)_{11}=0\cdot 5+3\cdot 7=21$; $(ab)_{12}=0\cdot 6+3\cdot 8=24$; $(ab)_{21}=4\cdot 5-2\cdot 7=6$;
$(ab)_{22}=4\cdot 6-2\cdot 8=8$; $(ab)_{31}=1\cdot 5-1\cdot 7=-2$; $(ab)_{32}=1\cdot 6-1\cdot 8=-2$.

Шундай қилиб, $AB=\begin{pmatrix}21 & 24\\ 6 & 8\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, BA мавжуд эмас.

4-мисол.

Агар $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ бўлса, AB ва BA ни топинг.

Ечиш. матрицаларни кўпайтириш мумкинми ёки йўқлигини билиш учун уларнинг ўлчамларини аниқлаймиз.

$A[2\times 4]$, $B[4\times 2]$. Бундан $n=l=4$, $m=k=2$, шунинг учун AB ва BA матрицалар мавжуд, ҳамда $AB[2\times 2]$, $BA[4\times 4]$.

$C = AB$ матрицанинг элементларини ҳисоблаш учун A матрицанинг сатр элементларини унга мос булган B матрицанинг устун элементларига кўпайтирилади.

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(A нинг биринчи сатр элементларининг B нинг биринчи устун элементларига купайтмасининг йиғиндиси; ҳисобланаётган элементнинг биринчи индекси A матрицанинг сатрини, иккинчи индекси эса B матрица устунини билдиради).

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$
$$c_{21} = -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$
$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1\_ \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Шундай қилиб, $C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

$D = BA$ матрица элементларини ҳисоблаётганда B нинг сатр элементлари А нинг устун элементларига кўпайтирилади.

$d_{11} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$; $d_{12} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4$; $d_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$;
$d_{14} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$; $d_{21} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2$; $d_{22} = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2$;
$d_{23} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1$; $d_{24} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$; $d_{31} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1$;
$d_{32} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1$; $d_{33} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$; $d_{34} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$;
$d_{41} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8$; $d_{42} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0$; $d_{43} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2$;
$d_{44} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$.

Шундай қилиб, $D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Транспонирланган матрица деб, уларнинг жойланишлари сақланган ҳолда сатр ва устунларини алмаштиришдан ҳосил бўлган матрицага айтилади. Натижада A матрицага нисбатан транспонирланган A' матрица ҳосил бўлади, унинг элементлари A матрица элементлари билан қуйидаги муносабатда боғланади:
$a'_{ij} = a_{ji}.$

3. Детерминантлар.

Иикинчи тартибли детерминант деб, иккинчи тартибли квадрат матрица элементлари ёрдамида аниқланувчи қуйидаги сонга айтилади.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Детерминантнинг бош диагоналида жойлашган элементлар кўпайтмасидан, ёрдамчи диагоналда жойлашган элементлар кўпайтмаси айирилади.

5-мисол.

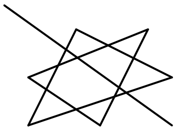
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$$

Учинчи тартибли детерминант деб, учинчи тартибли квадрат матрица элементлари ёрдамида қуйидагича аниқланувчи сонга айтилади.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

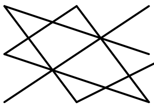
Бу формулани эслаб қолиш учун учбурчаклар қоидасидан фойдаланиш мумкин. У қуйидагилардан иборат:

кўпайтмаси детерминантга «+» белгиси билан кирувчи элементлар қуйидагича жойлашади:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Бош диагоналга симметрик бўлган иккта учбурчак ҳосил қилинади. Кўпайтмаси детерминантга «-» белгиси билан кирувчи элементлар ҳам, худди шу каби, ёрдамчи диагоналга нисбатан жойлашади.



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6-мисол.

Детерминантни ҳисобланг.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ечиш. 3-чи тартибли детерминантни унинг қоидасидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\Delta = 2\cdot 0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot(-3) =$$
$$= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$$

Детерминантларнинг asосий хоссаларини беришдан олдин транспонирланган матрица тушунчасининг таърифини келтирамиз.

Детерминантларнинг асосий хоссалари.

1. Транспонирлаш натижасида детерминант ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Детерминантнинг сатр(ёки устун) элементлари бирор сонга кўпайтирилса, детерминантнинг қиймати шу сонга кўпайтирилади, яъни

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Нолли сатр(ёки устун)га эга бўлган детерминант нолга тенг

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Иккита бир ҳил сатр(ёки устун)га эга бўлган детерминант нолга тенг

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Иккита сатр(ёки устун)и ўзаро пропорционал бўлган детерминант нолга тенг

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Детерминантда иккита сатр(ёки устун)и ўзаро алмаштирилса, унинг қиймати (-1)га кўпайтирилади.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7.

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Детерминантнинг бирор сатр(ёки устун) элементларини бирор сонга кўпайтириб, иккинчи сатр(ёки устун)нинг мос элементларига қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Детерминатни сатр ёки устун бўйича ёйиш.

Детерминантнинг бирор элементининг **минори** деб, шу элемент турган сатр ва устунни ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантга айтилади ва M_{ij} билан белгиланади.

7- мисол.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ учун $a_{21} = -5$, $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8+3 = 11.$

Детерминантнинг a_{ji} элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб шундай минорга айтиладики, агар $i+j$ жуфт бўлса, у минорнинг ўзига тенг, $i+j$ тоқ бўлса, минорга қарама-қарши бўлган сонга тенг, яъни $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Шу билан бирга қуйидаги тасдиқ ўринлидир: Детерминатнинг қиймати унинг иҳтиёрий сатр ёки устун элементларининг уларга мос алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтмасининг йиғиндисига тенг, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij},$$ бу ерда i=1,2,3.

Шундай қилиб, детерминатни ҳисоблаш учун қандайдир устун ёки сатр элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топиб, уларни детерминантнинг мос элементларига кўпайтмасининг йиғиндисини ҳисоблаш етарлидир.

8-мисол.

6 мисолдаги детерминантни сатрга ёйиш ёрдамида ҳисоблаймиз. Қулайлик учун 2-чи сатрни танлаймиз, чунки $a_{22} = 0$ бўлганлигидан

$$a_{22} \cdot A_{22} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(-3\cdot(-1)-5\cdot1)=2;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot(2\cdot1-(-3)\cdot2)=-8$$

У ҳолда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1\cdot 2 + (-4)(-8) = 34$.

Юқори тартибли детерминантлар.

n - чи тартибли детерминант деб n - та сатр ва n – та устундан иборат бўлган қуйидаги детерминантга айтилади.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Учинчи тартибли детерминантнинг барча хоссалари n-чи тартибли детерминант учун ҳам ўринлидир.

Амалиётда юқори тартибли детерминантларни сатр ёки устун бўйича ёйишдан фойдаланиб хисобланади. Устун ёки сатр бўйича ёйиш натижасида детерминантнинг тартиби пасайтирилади ва натижада уни учинчи тартибли детерминантга олиб келиш мумкин.

Мисол 9.

4-чи тартибли детерминантни ҳисобланг.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Ечиш. Детерминантни шундай алмаштирамизки, натижада бир устун ёки сатрда тўртта элементдан учтаси нолга айлансин. Бунинг учун 8-хоссадан фойдаланамиз. Агар детерминантда ±1га тенг элемент бўлса, бу хоссани қўллаш жуда ўринли бўлади. Шундай элемент сифатида a_{13} = 1 элементни танлаймиз ва унинг ёрдамида 3-чи устуннинг қолган барча элементларини нолга айлантирамиз.

Шу мақсадда:

а) 2-чи сатр элементларига уларга мос 1-чи сатр элементларини қўшамиз;

б) 1-чи стар элементларини 2 га кўпайтириб 3-чи сатр элементларидан айирамиз.

в) 4-чи сатр элементларидан 1-чи сатр элементларини айирамиз.

Натижада қуйидаги детерминантни ҳосил қиламиз.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

Ҳосил қилинган детерминантни 3-чи устун бўйича ёйамиз.

$$\Delta=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

Бу детерминантнинг 2-чи сатр элементларини 2-га кўпайтириб, 1-чи сатр элементларидан айирамиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Бу детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб натижани ҳосил қиламиз.

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

4. Тескари матрица.

Агар $\Delta_A = 0$ бўлса A квадрат матрица хос матрица, $\Delta_A \neq 0$ бўлса, хосмас матрица дейилади.

Агар $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ каби бўлса, A^{-1} квадрат матрица, ўшандай тартибли A квадрат матрицага тескари матрица дейилади. Берилган матрицага тескари матрица мавжуд бўлиши учун, берилган матрицанинг хосмас бўлиши зарур ва етарлидир. Тескари матрица қуйидаги формуладан топилади:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta_A} & \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta_A} & \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta_A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta_A} & \frac{A_{2n}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta_A} \end{pmatrix}.$$

10-мисол.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Биринчи устун бўйича ёйиб A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз.

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Демак, A матрицага тескари матрица мавжуд.

A матрицанинг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Натижада:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Чизиқли алгебраик тенгламалар тизими.

Чизиқли тенглама деб,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$

кўринишдаги тенгламага айтилади, бу ерда a_i ва b – сонлар, x_i - номаълумлар. Шундай қилиб, чизиқли тенгламанинг чап томонида ноъмалумларнинг чизиқли комбинацияси, ўнг томонида эса сон туради.

Агар $b = 0$ бўлса, чизиқли тенглама **бир жинсли**, акс ҳолда, яъни $b \neq 0$ бўлса, **бир жинсли бўлмаган** тенглама дейилади.

Чизиқли тенгламалар тизими деб қуйидаги кўринишдаги тизимга айтилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

бу ерда a_{ij}, b_i - сонлар, x_j - номаълумлар, n – номаълумлар сони, m – тенгламалар сони ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$).

Чизиқли тенгламалар тизимининг ечими деб шундай $x_1, x_2,..., x_n$, сонларга айтиладики, бу сонларни номаълумлар ўрнига қуйилганда, тизимнинг ҳар бир тенгламаси ўринли тенгликка айланади.

Агар чизиқли тенгламалар тизими ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлса **биргаликда бўлган**, акс ҳолда, яъни ечимга эга бўлмаса, **биргаликда бўлмаган** тенгламалар тизими дейилади.

Шунингдек, агар биргаликда бўлган тенгламалар тизими ягона ечимга эга бўлса **аниқланган**, биттадан кўп ечимга эга бўлса, **аниқланмаган** тенгламалар тизими деб юритилади.

1. Гаусс усули

Фараз қилайлик (1) тизимда $a_{11} \neq 0$ бўлсин (бунга тенгламалар ўрнини алмаштириш ёрдамида доимо эришиш мумкин). Биринчи тенгламани ҳар иккала томонини аввал a_{11}га бўламиз, сўнгра a_{i1}га кўпайтирамиз, бу ерда i – навбатдаги тенглама тартиби.

Ҳосил бўлган тенгламаларни тизимнинг қолган ҳар бир мос тенгламасидан айирамиз. Маълумки, ҳосил бўлган янги тенгламалар тизими берилган тенгламалар тизимига тенг кучлидир. Ҳосил бўлган янги тизимда биринчи тенгламадан бошқа барча тенгламаларда $x_1 = 0$ бўлади, яъни тизим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + ... + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + ... + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad .... \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + ... + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Агар янги ҳосил бўлган тенгламалар тизимида x_2нинг олдидаги коффициентлар ҳаммаси нолга тенг бўлмаса шу аснода x_2ни ҳам йўқотиш мумкин.

Бу жараённи тизимдаги барча номаълумлар учун давом эттириб, берилган тенгламалар тизимини қуйидаги учбурчак шаклига келтириш мумкин:

$$\begin{cases} x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + ... + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ \quad x_2 + ... + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \quad .... \\ \quad\quad x_n = \hat{b}_n \end{cases} \qquad (2)$$

Бу ерда $\tilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ ва $\hat{b}_i$ белгилар билан алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлган сонли коэффициентлар ва озод хадлар белгиланган. (2) тизимнинг охирги тенгламасидан x_nни топамиз. Сўнгра кетма-кет ўрнига қўйиш ёрдамида қолган номаълумларни топамиз.

11-мисол.

Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Ечиш. Гаусс усули берилган тенгламалар тизимидаги номаълумларни кетма-кет йўқотишдан иборатдир. Бу усулни қўллаш осон бўлиши учун 1-чи ва 2-чи тенгламаларнинг ўрнини алмаштирамиз.

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ 3x-y+2z=9 \\ 2x-3y+3z=11 \end{cases}.$$

Энди 2-чи ва 3-чи тенгламалардан x ни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани 3га кўпайтириб, иккинчи тенгламадан, 2 га кўпайтириб, 3-чи тенгламадан айирамиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -11y+z=3 \end{cases}\cdot$$

2-чи тенгламага 3-чи тенгламани қўшиб, 3-чи тенгламадан z ни йўқотамиз:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -24y=0 \end{cases}\cdot$$

Охирги тенгламадан $y=0$ эканлиги келиб чиқади. Бу қийматни 2-чи тенгламага қўйиб z ни аниқлаймиз. Топилган y ва z ни 1-чи тенгламага қўйиб топамиз. $z = 3$, $x = 1$.

Шундай қилиб, $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

2. Крамер усули

Ноъмалумлар сони тенгламалар сонига тенг бўлган қуйидаги чизиқли тенгламалар тизимини қарайлик:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{3}$$

Элементлари номаълумлар олдидаги коэффициентлардан иборат Δ детерминатни **асосий детерминант** деб атаймиз.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

детерминантда x_j номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган устунни озод ҳадлардан иборат устун билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантни Δ_{x_j} билан белгилаймиз.

У ҳолда:Агар $\Delta\neq 0$ бўлса, (3) тизим қуйидаги формулалар билан аниқланувчи ягона ечимга эга: $x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2=\dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta},..., x_n=\dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

1) Агар $\Delta=\Delta_{x_j}=0$ бўлса, тизим чексиз кўп ечимга эга.
2) Агар $\Delta = 0$, ва Δ_{x_j} лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, тизим ечимга эга эмас.

12-мисол.

Тенгламалар тизимини Крамер усулида ечинг:

$$\begin{cases} 4x-y+z=2 \\ x+y-2z=1 \\ 2x+3y-4z=6 \end{cases}$$

Ечиш. Асосий детерминантни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

демак, тенгламалар тизими ягона ечимга эга.

Δ_x, Δ_y и Δ_z – ларни топамиз.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Бундан

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

3. Чизиқли тенгламалар тизимини тескари матрица ёрдамида ечиш.

Чизиқли тенгламалар тизими (3)-ни қарайлик ва қуйидагича белгилашлар киритайлик:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - тизимнинг матрицаси,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - номаълумлар устуни,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$ - озод ҳадлар устуни. У ҳолда (3) тизимни матрицавий тенглама кўринишида

қуйидагича ёзиш мумкин:

$$AX = B. \tag{5}$$

Фараз қилайлик A - хосмас матрица бўлсин, у ҳолда унга тескари A^{-1} матрица мавжуд бўлади. (5) тенгламанинг ҳар икки томонини A^{-1} га чапдан кўпайтирайлик.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Маълумки $A^{-1}A = E,$ у ҳолда $EX = A^{-1}B$, $EX = X$ эканлигидан $X = A^{-1}B.$

Шундай қилиб, (5) – матрицавий тенгламанинг ечими, A матрицага тескари матрицанинг (3) тизимнинг озод ҳадларидан иборат устун матрицага кўпайтмасига тенг экан.

13-мисол.

Тенгламалар тизимини тескари матрица ёрдамида ечинг.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}$$

Ечиш. Тизимнинг матрицасини тузамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Δ_A = -51 $\neq$ 0, демак, тенгламалар тизими ягона ечимга эга.

A^{-1} матрицани топамиз:

$$A_{11} = -11 \quad A_{21} = -25 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = 9 \quad A_{22} = -12 \quad A_{32} = 3$$

$$A_{13} = -13 \quad A_{23} = -11 \quad A_{33} = 7$$

У холда $A^{-1} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$

Агар $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ‘эканлигини эътиборга олсак, берилган тенгламалар тизими ечими $X = A^{-1}B$ бўлган $AX = B$ матрицавий тенгламага айланади.

Шундай қилиб,

$$X = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

яъни $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

Чизиқли алгебра бўлимидан топшириқ вариантлари

Вариант № 1

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 9 & 0 \\ 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2 - BA + 3A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 4x - y + 10z = 11. \\ 5x + 3y - 5z = 9 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 4x - y + 10z = 11. \\ 5x + 3y - 5z = 9 \end{cases}$$

Вариант № 2

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 + BA + 2A$ матрицали кўп ҳадни ҳисобланг

3.

4. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -46 \\ 2 & 1 & -12 \\ 3 & 2 & 25 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x - 3z + 4t = -4 \\ 2x + y + 10z - 15t = 10 \\ 2y + 3z - 6t = 7 \\ 3x + 4y - z + 2t = 4 \end{cases}.$$

6. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Вариант № 3

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ матрицаларучун $A^2 - 2BA + A$ матрицавий кўпҳадни ҳисобланг

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 27 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x - y + 5t = 6 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z + t = 10 \\ -y - z + 3t = 0 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини матрица усулида ечинг:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y - 3z = 3 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Вариант № 4

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $2A^2 + BA + 3A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 14 \\ 4 & 2 & 13 \\ 3 & 5 & 26 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани ҳисобланг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 4x + 4y - 5z = -2 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + 10z = 20 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 4y - 3z = 7 \end{cases}.$$

Вариант № 5

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2-BA+4A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 27 \\ 4 & -1 & 35 \\ 5 & -2 & 43 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани ҳисобланг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x+3y-4z+5t=3 \\ -y-t=-1 \\ x-3z+8t=-1 \\ x+2y-4z+3t=0 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-3 \\ x_1+2x_2-3x_3=-5 \\ 5x_1+x_2-6x_3=-16 \end{cases}$$

Вариант № 6

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2+BA+3B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ x + y - 5z = 7 \\ 3x - y - 8z = 16 \end{cases}.$$

Вариант № 7

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун

$A^2 - BA + 4B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 12 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$ матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} 7x - 2y + 4z = 13 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Вариант № 8

1. Детерминантни ҳисобланг : $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун

$B^2 - BA + 3A$. матрицали кўпҳадни ҳисобланг

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x - y + 5t = 6 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z + t = 10 \\ -y - z + 3t = 0 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ x - y + 2z - 2t = -4. \\ 2y - z - t = 3 \end{cases}$$

Вариант № 9

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2 + 3BA + 2B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг :

$$\begin{cases} 2x+3y-4z+5t=3 \\ -y-t=-1 \\ x-3z+8t=-1 \\ x+2y-4z+3t=0 \end{cases}.$$

6. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} \mathrm{x}-2\mathrm{y}-\ \mathrm{z}=2 \\ -2x-4y+2z=4 \\ 2x+y-3z=-2 \end{cases}$$

Вариант № 10

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2 - BA + 3A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=4. \\ x+z=6 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}.$$

Вариант № 11

1. Детерминантни ҳисобланг : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 - BA + 2A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг

3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x-z=-2 \\ 2x-y-z=4. \\ y-z=-6 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}.$$

Вариант № 12

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $3A^2 - BA + +B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг

3. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3t = -6 \\ -10z + 2t = -2 \\ 2x + 2y - 5z - 2t = 8 \\ x + y - z = 3 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг :

$$\begin{cases} 4x - y + z = 1 \\ -3x + 2y + 5z = -20. \\ -4x - 2y + z = -18 \end{cases}$$

Вариант № 13

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2 + 4BA + B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = -1. \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} 5x + y - 4z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x - 3y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Вариант №14

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2 - BA + 2B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + 2y - z = 2. \\ -y + 4z = 0 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ z - y - z + t = 1 \end{cases}$$

Вариант №15

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 - BA + 5A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 13 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + 3z = 3. \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} x + 2y - z - 2t = 5 \\ -2x - y + 2z + t = -4 \\ -x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = -1 \end{cases}$.

Вариант №16

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2 - BA + 3A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 17 & 4 \\ 5 & 16 & 3 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 12x_1 + 13x_2 - 10x_3 - 11x_4 = 6 \\ 10x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 1 \\ 11x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 1 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$.

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг :

$$\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}.$$

Вариант №17

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $A^2 - BA + 2B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 28 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & -1 \\ 14 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x-2y+5z=20 \\ 3x+4y+4z=-13. \\ x+2y+z=-8 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4=5 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4=6 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4=7 \end{cases}$

Вариант №18

1. Детерминантни ҳисобланг : $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 14 & 0 \\ 4 & 2 & 13 & -1 \\ 3 & 5 & 26 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун

$A^2 - 2BA + 3B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 4x + y + 5z = 10 \\ -x + 10y - z = 8 \end{cases}$.

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}.$$

Вариант №19

1. Детерминантни ҳисобланг : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 - BA + 3A$ матрицали

кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ 4x - y = 0 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=5 \\ -2x_1-x_2+2x_3+x_4=-4 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=-1 \end{cases}$.

Вариант №20

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2-BA+4B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 10 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y-z=2. \\ 2x+z=0 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2+2x_4=1 \\ -x_1+3x_2-x_3-3x_4=-1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}.$$

Вариант №21

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & -15 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 + BA + 3B$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 10 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг: $\begin{cases} 8x-7y+10z-18t=17 \\ 3x+4y+9z-10t=7 \\ 2x-5y+7z-10t=11 \\ 9x+8y+4z-7t=2 \end{cases}$.

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 5x_1+x_2-8x_3+10x_4=-5 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=1 \\ -3x_1-2x_2+2x_3+x_4=-4 \\ x_1+2x_2+2x_3-7x_4=8 \end{cases}$..

Вариант №22

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 - 2BA + 4A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x+3y-4z=3. \\ -x+2y-2z=1 \end{cases}$

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг: $\begin{cases} 12x_1+14x_2-15x_3+24x_4=22 \\ 16x_1+18x_2-22x_3+29x_4=27 \\ 18x_1+20x_2-21x_3+32x_4=30 \\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4=18 \end{cases}$

Вариант №23

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 + 2BA + A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$ матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -9 \\ -x - 3y + 6z = 13. \\ 2x + 5y - z = -4 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 7x_2 + 30x_3 = 65 \\ -5x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 5 \end{cases}$

Вариант №24

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 12 & 13 & -10 & -11 \\ 10 & -5 & 7 & -3 \\ 11 & -5 & 10 & -5 \\ 7 & 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 - 5BA + 2A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$ матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} x-3z+4t=-4 \\ 2x+y+10z-15t=10 \\ 2y+3z-6t=7 \\ 3x+4y-z+2t=4 \end{cases}$.

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x+2y-z-2t=5 \\ -2x-y+2z+t=-4 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=-1 \end{cases}.$$

Вариант №25

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ матрицалар учун $B^2 + BA + 4A$ матрицали кўпҳадни ҳисобланг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ -4x + 5y + 6z = -10 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$.

Вариант №26

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Агар $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. бўлса, X матрицани топинг.

3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11. \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1. \cdot \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Вариант №27

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Агар $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. бўлса, X матрицани топинг.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4. \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 6x + 2y - 3z = 5. \\ 9x + 4y - 4z = 9 \end{cases}$.

Вариант №28

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Агар $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -15 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -10 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. бўлса, X матрицани топинг.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$.

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=8 \\ 5x-8y+2z=17 \\ 7x-5y+4z=25 \end{cases}.$$

Вариант №29

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Агар $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 10 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. бўлса, X матрицани топинг.

3. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29. \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$$

5. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 15 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ x + 3y - 5z = 8 \end{cases}$..

Вариант №30

1. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Агар $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. бўлса, X матрицани топинг.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. матрицага тескари матрицани топинг.

4. Тенгламалар тизимини матрицалар усулида ечинг: $\begin{cases} 3x - y + z = 8 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 5x + 5y - 3z = 9 \end{cases}$.

5. Тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 4x+2y+3z=10 \\ 2x+3y-2z=7 \\ 2x-y+5z=3 \end{cases}.$$

Векторлар алгебраси

Вектор тушунчаси. Векторнинг узунлиги. Ўзларининг сон қиймати ва йўналиши билан аниқланадиган миқдорлар векторлар деб аталади. $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ва $M_2(x_2,y_2,z_2)$ нуқталар мос равишда $\overline{a}$ векторнинг боши ва охири бўлсин. У ҳолда $\overline{a}$ векторнинг координаталари қуйидагича аниқланади.

$$\overline{a}=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

$\overline{a}$ векторнинг узунлигига тенг бўлган сон унинг модули дейилади ва қуйидагича аниқланади.

$$|\overline{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Агар $\overline{a}$ вектор координата ўқлари билан мос равишда α,β ва γ бурчаклар ҳосил қилса, у ҳолда $\cos\alpha,\cos\beta$ ва $\cos\gamma$, $\overline{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади ва қуйидагича аниқланади:

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\overline{\alpha}|};\ \cos\beta=\frac{Y}{|\overline{\alpha}|};\ \cos\gamma=\frac{Z}{|\overline{\alpha}|}$$

Бу ерда: $X=x_2-x_1, Y=y_2-y_1, Z=z_2-z_1$

Векторнинг ўққа проекцияси.

$\overline{a}$ векторнинг U ўққа проекцияси, унинг модули ва U ўқ билан ташкил қилган бурчаги φ орқали қуйидагича аниқланади. $np_U\,\overline{a}=|\overline{a}|\cos\varphi$

Ихтиёрий $\overline{a}$ векторнинг берилган координаталар системасига проекциясини X,Y,Z орқали белгилайлик. У ҳолда $\overline{a} = X, Y, Z$ ва $\left|\overline{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\right|$ бўлади.

1-Мисол. $\overline{a}$ =(6;3;-2) векторнинг модулини топинг.

Ечиш: Модулни топиш формуласига асосан

$$\overline{a} = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

2-Мисол. A(3;-1;2) ва B(-1;2;1) нуқталар берилган. $\overline{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

Ечиш: $\overline{AB}$ векторнинг координаталарини топиш учун мос равишда B нуқтанин координаталаридан A нуқтанинг координаталарини айирамиз.

$\overline{AB} = (-1-3; 2-(-1); 1-2) = (-4; 3; -1)$

3-Мисол.

3-Мисол. $\overline{a} = (12; -15; -16)$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини аниқланг.

Ечиш: $\overline{a} = \sqrt{(12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 225 + 256} = 25$

Энди x=12; y=-15; z=-16 эканлигини эътиборга олиб йўналтирувчи косинусларни аниқлаймиз.

$\cos\alpha = \frac{12}{25}$; $\cos\beta = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}$; $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$

Векторлар устида амаллар.

Векторларни қўшиш ва айириш:

Агар $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлар координаталари берилган бўлса, яъни $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ва $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ у ҳолда

$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$

$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$

Векторларни сонга кўпайтириш.

Агар $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай a сон учун қуйидаги формула ўринли $\alpha\overline{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Векторларнинг колленеарлик шарти.

Бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётувчи векторлар колленеар векторлар деб аталади.

$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ва $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторларнинг колленеарлик шарти қуйидагича бўлади:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Векторларни базис координаталари бўйича ёйиш.

$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ учлик векторлар базис координаталари дейилади, агар қуйидаги учта шарт бажарилса,

1) $\bar{i}$ вектор OX ўқида, $\bar{j}$ вектор OY ўқида, $\bar{k}$ вектор OZ ўқида ётади.

2) ҳар бир $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ векторлар ўз ўқларида мусбат томонга йўналган бўлади.

3) $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ векторлар, бирлик векторлар, яъни $|\bar{i}| = 1$; $|\bar{j}| = 1$, $|\bar{k}| = 1$

$\bar{a}$ вектор қандай бўлишидан қатъий назар уни ҳар доим $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ базислар бўйича ёйиш мумкин,

яъни $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$

Бу ерда x_1, y_1, z_1 - $\bar{a}$ векторнинг координаталари.

4-Мисол. $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ ва $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$ векторлар берилган $2\bar{a} + 3\bar{b}$ векторлар йиғиндисини топинг.

Ечиш: $\bar{a}$ координаталари , $\bar{a} = (1;3;-2)$ худди шунингдек $\bar{b} = (2;1;4)$. Энди $2\bar{a}$ ва $3\bar{b}$ векторларни аниқлаймиз.

$$2\bar{a} = (2;\ 6;\ -2);\quad 3\bar{b} = (6;\ 3;\ 12)$$

Демак, $2\bar{a} + 3\bar{b}$ =(2+6; 6+3; -2+12) =(8; 9; 10).

5-Мисол. $\bar{a} = (4,2,0)$ векторни $\bar{p} = (1,-1,2), \bar{q} = (2,2,-1)$ ва $\bar{r} = (3,7,-7)$ векторлар бўйича ёйинг.

Ечиш. $\bar{a}$ векторни $\bar{p}, \bar{q}$ ва $\bar{r}$ векторлар бўйича ёйиш, $\bar{a}$ векторни чизиқли комбинация кўринишида ифодалаш демакдир.

$$\bar{a} = c_1\bar{p} + c_2\bar{q} + c_3\bar{r}\ ,$$

бу ерда c_1, c_2 ва c_3 - топилиши керак бўлган сонлар.

Координата кўринишида бу қуйидагича бўлади.

$$4i + 2j + 0\cdot k = (c_1 + 2c_2 + 3c_3)i + (-c_1 + 2c_2 + 7c_3)j + (2c_1 - c_2 - 7c_3)k$$

Натижада қуйидаги тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 4 \\ -c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 2 \\ 2c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \end{cases}$$

Буни ечиб, $c_1 = 3; c_2 = -1; c_3 = 1$эканлигини топамиз. Демак, $\bar{a} = 3\bar{p} - \bar{q} + \bar{r}$.

6-Мисол. $\bar{a} = (6;-2;-3)$ векторнинг бирлик векторини топинг.

Ечиш:

Бирлик векторни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\overline{a^0} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ларни топамиз

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a_x}}{|\bar{a}|};\ \cos\beta = \frac{\overline{a_y}}{|\bar{a}|};\ \cos\gamma = \frac{\overline{a_z}}{|\bar{a}|}$$

$$|\bar{\alpha}| = \sqrt{(6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Бундан $\cos\alpha$ =6/7; $\cos\beta$ =-2/7; $\cos\gamma$ =-3/7.

Демак, $\overline{a^0}=(\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7})$.

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси.

$\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб, бу векторлар узунликлари кўпайтмаси билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига айтилади ва $(\overline{a},\overline{b})$ шаклда белгиланади.

$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$

$\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин.

$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}$ ёки $(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$

Агар $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлар координаталари билан берилган бўлса, яъни $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$ ва $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$, у ҳолда уларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги формула билан ҳисобланади.

$(\overline{a},\overline{b})=(x_1\cdot x_2;y_1\cdot y_2;z_1\cdot z_2)$

Бундан векторларнинг **перпендикулярлик** шарти келиб чиқади, яъни $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$

Координаталари билан берилган $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$ ва $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$ векторлар орасидаги f бурчак қуйидагича аниқланади:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$$

Ёки координаталар шаклида

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

7-Мисол. Агар $\overline{p}=\overline{a}-\overline{b};\overline{q}=\overline{a}+2\overline{b};|\overline{a}|=1;|\overline{b}|=3;(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=\frac{2}{3}\pi$ бўлса, $\overline{p}+2\overline{q}$ векторнинг узунлигини топинг.

Ечиш. Векторнинг модули таърифига кўра: $|\overline{p}+2\overline{q}|=\sqrt{(\overline{p}+2\overline{q})^2}$. $(\overline{p}+2\overline{q})^2$ ни ҳисоблаймиз.

$$(\overline{p}+2\overline{q})^2=(\overline{a}-\overline{b}+2\overline{a}+4\overline{b})^2=$$

$$9(\overline{a^2}+2\overline{ab}+\overline{b^2})=9(1+2\cdot3\cos\frac{2}{3}\pi+9)=63$$

Бундан $|\overline{p}+2\overline{q}|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$.

8-Мисол. $\overline{x}=(2,1,-2)$ векторга коллинеар ва $(\overline{x}\cdot\overline{a})=27$ шартни қаноатлантирувчи $\overline{a}$ векторни топинг.

Ечиш:

Коллинеарлик шартидан фойдаланиб $\overline{a}$ векторни қуйидагича ёзиш мумкин. $\overline{a} = \lambda \overline{x}$, бу ерда λ - номаълум кўпайтувчи. $\overline{a}$ векторни топиш учун қуйидаги шартдан фойдаланамиз:

$(\overline{x}\overline{a}) = \lambda \overline{a}^2 = \lambda(4+1+4) = 9\lambda = 27$.

Бундан $\lambda = 3$ ва $\overline{x} = 3\overline{a} = (6,3,-6).$

9-Мисол. Агар $\overline{a}$ =(1,-3,4) , $\overline{b}$ =(3,-4,2) ва $\overline{c}$ =(-1,1,4) бўлса, $\overline{a}$ векторнинг $\overline{b} + \overline{c}$ векторга проекциясини ҳисобланг.

Ечиш: Қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$Пр_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a} = \frac{\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})}{\left|\overline{b}+\overline{c}\right|}$$

$\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})$ ва $\overline{b}+\overline{c}$ ифодаларни ҳисоблаймиз.

$$\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = 1(3-1) - 3(-4+1) + 4(2+4) = 35$$

$\left|\overline{b}+\overline{c}\right| = \sqrt{(3-1)^2 + (-4+1)^2 + (2+4)^2} = 7$

Бундан $Пр_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a} = 5$

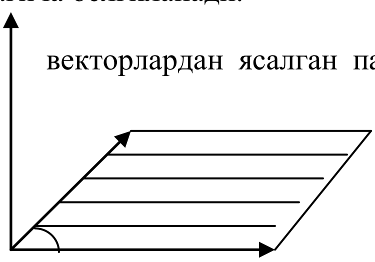
Икки векторнинг вектор кўпайтмаси

Икки $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторнинг вектор кўпайтмаси деб шундай $\overline{c}$ векторга айтиладки, бу вектор $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларга пернпендикуляр бўлиб, унинг модули $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлардан ясалган параллелограмм юзига тенг, йўналиши эса $\overline{c}$ учидан қараганда $\overline{c}$ вектор атрофида $\overline{a}$ вектордан $\overline{b}$ векторга энг кичик бурчак билан айланиши соат стрелкасига тескари бўлиши керак.

$\overline{a}$ вектор билан ва $\overline{b}$ векторнинг вектор кўпайтмаси $\overline{a}\times\overline{b}$ ёки $\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]$ шаклида ёзилади ва қуйидагича белгиланади.

$\overline{c} = \left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]$. Бу вектор узунлиги $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлардан ясалган параллело[illegible]нинг юзига тенг; яъни

$\overline{c} = \left|\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b})$



Вектор кўпайтманинг хоссалари:

1. Вектор кўпайтмадаги кўпайтувчилар ўрнини алмаштирса, вектор кўпайтма (-1) га кўпаяди.

$\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]$=-$\left[\overline{b}\cdot\overline{a}\right]$

2. Скаляр кўпайтувчига нисбатан вектор кўпайтма группалаш қонунига бўйсунади, яъни :

$\left[\lambda a, b\right] = \left[\overline{a}, \lambda\overline{b}\right] = \lambda\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]$

Проекциялари билан берилган векторларнинг вектор кўпайтмаси.

$\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ ва $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг вектор кўпайтмаси қуйидагича бўлади.

$$\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

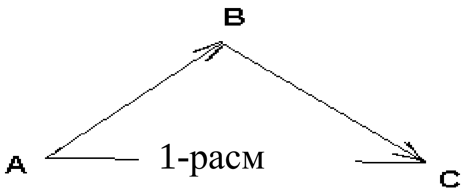
Бу тенгламадан $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ вектор кўпайтмани тасвирловчи векторларнинг координата ўқларидаги проекциялари

$y_1 z_2 - z_1 y_2;\quad z_1 x_2 - x_1 z_2;\qquad x_1 y_2 - y_1 x_2;$

бўлишини кўрамиз.

Агар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар коллиенар(бир-бирига параллел) бўлса, уларнинг мос проекциялари пропорционал бўлади, яъни $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

10-мисол. Агар A (1,1,1), B (2,0,1) ва C (1,2,-1) бўлса, ABC учбурчакнинг юзини ҳисобланг (1.расм).



1-расм

Ечиш: Вектор кўпайтманинг модули сон жиҳатдан, томонлари шу векторлардан қурилган учбурчак юзининг иккиланганига тенг:

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right|$$

$\bar{a}=\overline{\mathrm{AB}}=\left(-1{,}1{,}0\right)$ ва $\bar{b}=\overline{AC}=(0{,}1{,}-2)$

векторларни киритамиз.

Бу векторларнинг вектор кўпайтмаси.

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$$

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right]=\sqrt{4+4+1}=3$$

Бундан S=1,5 кв.бир.

11-мисол. Агар $\left|\bar{x}\right|=\sqrt{6}$ бўлса, $\bar{a}=(1{,}1{,}1)$ ва $\bar{b}=(2{,}0{,}1)$ векторларга перпендикуляр ва OX ўқи билан ўтмас бурчак ҳосил қилувчи $\bar{x}$ векторни ва $\bar{c}=\left[\bar{a}\bar{b}\right]$ векторни топинг.

Ечиш: $\bar{c}$ векторни киритамиз

$$\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$$

$\bar{x}$ вектор $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторларга перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\bar{c}$ векторга коллинеар бўлади. Бундан келиб чиқадики, $\bar{x}=\lambda\bar{c}=(\lambda,\lambda,-2\lambda)$

$$\left|\bar{x}\right|=\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2}=\sqrt{6}\lambda=\sqrt{6}\rightarrow\sqrt{\lambda}=\pm 1$$

$\bar{x}$ вектор OX ўқ билан ўтмас бурчак ташкил қилади, шунинг учун унинг OX ўқдаги проекцияси манфий бўлиши керак. Бундан $\lambda=-1$ ва $\bar{x}=-c=(-1,-1,2)$

12-мисол. В (5,1,0) нуқтага қўйилган $\overline{F}=(1,-1,1)$ куч векторининг йўналтирувчи косинусларини ва шу кучнинг А(3,2,-1) нуқтага нисбатан моментини топинг.
Ечиш: куч векторининг йўналтирувчи косинусларини топамиз.

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{|\overline{F}|}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos\beta=\frac{F_y}{|\overline{F}|}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos\gamma=\frac{F_z}{|\overline{F}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Куч моменти $\overline{AB}=(2,-1,\ 1)$ ва $\overline{F}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси каби аниқланади.

$$\overline{m}=\left[\overline{AB}\,\overline{F}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\overline{j}-\overline{k}$$

яъни $\overline{m}=(0,-1,-1)$.

Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси

Учта $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторлар берилган бўлсин. $\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]$ вектор кўпайтма билан $\overline{c}$ векторни скаляр кўпайтириш аралаш кўпайтма дейилади ва $[\overline{a}\cdot\overline{b}]\overline{c}$ ёки $\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c}$ ёки $(\overline{a}\times\overline{b}\times\overline{c})$ кўринишда ёзилади.
Аралаш кўпайтманинг хоссалари.
1. Кўпайтмада икки қўшни вектор ўрни алмаштирилса, аралаш кўпайтма ишорасини алмаштиради.

$[\overline{a}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{c}=-[\overline{c}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{a}$

$[\overline{a}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{c}=-[\overline{a}\cdot\overline{c}]\cdot\overline{b}$ ва ҳ.к.

2. Агар $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторлардан исталган иккитаси бир-бирига тенг ёки параллел (коллиенар) бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, хусусий ҳолда

$$[\overline{a}\cdot\overline{a}]\cdot\overline{c}=[\overline{a}\cdot\overline{b}]\cdot\overline{a}=[\overline{b}\cdot\overline{a}]\cdot\overline{a}=0$$

3.Агар $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторлар компланар (бир текисликда ётувчи) векторлар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.

Проекциялари билан берилган векторларнинг аралаш кўпайтмаси.

$\overline{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{b}(x_2,y_2,z_2)$ ва $\overline{c}(x_3,y_3,z_3)$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг вектор кўпайтмаси қуйидагича бўлади.

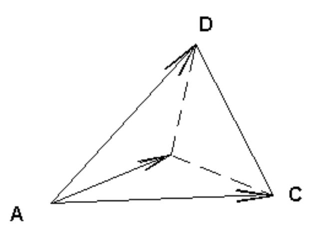
$$\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

$\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторлар компланар бўлишининг зарурий ва етарли шарти.

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0$$

Тенглик бажарилиши билан ифодаланади.

13-мисол. Агар A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7) ва D(-5,-4,8) нуқталар пирамиданинг учлари бўлса, (2-расм) D учидан ABC ёққа туширилган баландликнинг узунлигини топинг.
Ечиш: $\overline{AB}=(2,-2,-3)$; $\overline{AC}=(4,0,6)$; ва $\overline{AD}=(-7,-7,\ 7)$.



B

Векторларни топамиз. $\overline{AB}, \overline{AC}$ ва $\overline{AD}$ векторларга қурилган пирамиданинг ҳажми, шу векторлар аралаш кўпайтмаси модулининг олтидан бир қисмига тенг. 2-расм

$$V = \frac{1}{6}\left| \overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} \right| \text{ ва } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

Бу ерда $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB} \cdot \overline{AC}]\right|$ бундан $h = \frac{\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\right|}{\left|[\overline{AB} \cdot \overline{AC}]\right|}$

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -7 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 308$$

$$\left[\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12i + 24\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$\left|\left[\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right]\right| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 28$$

Бу ердан $h = \frac{308}{28} = 11$

Ҳисоб топшириқларини қабул қилишда бериладиган назарий саволлар .

1. Векторнинг таърифи. Векторлар устида чизиқли амаллар, бу амалларнинг хоссалари.
2. Текисликдаги векторни берилган иккита вектор бўйича ёйиш.
3. Фазодаги векторни берилган учта вектор бўйича ёйиш.
4. Векторнинг ўққа проекцияси. Проекциянинг хоссаси.
5. Векторни бирлик векторлар бўйича ёйиш. Векторнинг коррдинаталари ва компоненталари.
6. Векторларнинг вектор ва координаталар кўринишидаги коллениарлик ва компланарлик шартлари.
7. Нуқтанинг радиус вектори. Векторларнинг модули. Икки нуқта орасидаги масофа.
8. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласи
9. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва унинг физик талқини. Скаляр кўпайтманинг хоссалари.
10. Векторнинг векторга проекцияси. Векторлар орасидаги бурчак. Векторлар перпендикулярлигининг етарли ва зарурий шартлари.
11. Координаталари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси.
12. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси ва унинг физик талқини.
13. Координаталари билан берилган векторларнинг вектор кўпайтмаси.
14. Вектор кўпайтманинг геометрик қўлланилиши.
15. Вектор кўпайтманинг хоссалари.
16. Учта векторнинг координата кўринишидаги аралаш кўпайтмаси.
17. Векторлар компланарлигининг зарурий ва етарли шарти.
18. Координаталари билан берилган векторларнинг аралаш кўпайтмаси.
19. Аралаш кўпайтманинг хоссалари.

1-Топшириқ .

$\bar{x}$ векторнинг $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ векторлар бўйича ёйилмасини топинг.

№	$\bar{x}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{r}$
1.1.	(-2, 4, 7)	(0, 1, 2)	(1, 0, 1)	(-1, 2, 4)
1.2.	(6, 12, -1)	(1, 3, 0)	(2, -1, 1)	(0, -1, 2)
1.3.	(1, -4, 4)	(2, 1, -1)	(0, 3, 2)	(1, -1, 1)
1.4.	(-9, 5, 5)	(4, 1, 1)	(2, 0, -3)	(-1, 2, 1)
1.5.	(-5, -5, 5)	(-2, 0, 1)	(1, 3, -1)	(0, 4, 1)
1.6.	(13, 2, 7)	(5, 1, 0)	(2, -1, 3)	(1, 0, -1)
1.7.	(-19, -1, 7)	(0, 1, 1)	(-2, 0, 1)	(3, 1, 0)
1.8.	(3, -3, 4)	(I, 0, 2)	(0, 1, 1)	(2, -1, 4)
1.9.	(2, 2, -1)	(3, II, 0)	(-1, 2, 1)	(-1, 0, 2)
1.10.	(-1, 7, -4)	(-1, 2, 1)	(2, 0, 3)	(1, 1, -1)
1.11.	(6, 5, -14)	(1, 1, 4)	(0, -3, 2)	(2, 1, -1)
1.12.	(6, -1, 7)	(1, -2, 0)	(-1. 1, 3)	(1, 0, 4)
1.13.	(5, -15, 0)	(1, 0, 5)	(-1, 3, 2)	(0, -1, 1)
1.14.	(2, -1, 11)	(1, 1, 0)	(0, 1, -2)	(1, 0, 8)
1.15.	(11, 5, -3)	(1, 0, 2)	(-1, 0, 1)	(2, 5, -3)
1.16.	(8, 0, 5)	(2, 0, 1)	(1, 1, 0)	(4, 1, 2)
1.17.	(3, 1, 8)	(0, 1, 3)	(1, 2, -1)	(2, 0, -1)
1.18.	(8, 1, 12)	(1, 2, -1)	(3, 0, 2)	(-1, 1, 1)
1.19.	(-9, -8, -3)	(1, 4, 1)	(-3, 2, 1)	(1, -1, 2)
1.20.	(-5, 9, -13)	(0, 1, -2)	(3, -1, 1)	(4, 1, 0)
1.21.	(-15, 5, 6)	(0, 5, 1)	(3, 2, -1)	(-1, 1, 0)
1.22.	(8, 9, 4)	(1, 0, 1)	(0, -2, 1)	(1, 3, 0)
1.23.	(23, -14, -30)	(2, 1, 0)	(1, -1, 0)	(-3, 2, 5)
1.24.	(3, 1, 3)	(2, 1, 0)	(1, 0, 1)	(4, 2, 1)
1.25.	(-1, 7, 0)	(0, 3, 1)	(1, -1, 2)	(2, -1, 0)
1.26.	(11, -1, 4)	(1, -1, 2)	(3, 2, 0)	(-1, 1, 0)
1.27.	(-13, 2, 18)	(1, 1, 4)	(-3, 0, 2)	(1, 2, -1)
1.28.	(0, -8, 9)	(0, -2, 1)	(3, 1, -1)	(4, 0, 1)
1.29.	(8, -7, -13)	(0, 1, 5)	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)
1.30.	(2, 7, 5)	(1, 0, 1)	(1, -2, 0)	(0, 3, 1)

2-Топшириқ.

$\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларга қурилган $\overline{c_1}$ ва $\overline{c_2}$ векторларнинг ўзаро коллинеарлигини текширинг.

№	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\overline{c_1}$	$\overline{c_2}$
2.1.	(1, -2, 3)	(3, 0, -1)	$2\bar{a}+4\bar{b}$	$3\bar{b}-\bar{a}$
2.2.	(1, 0, -1)	(-2, 3, 5)	$\bar{a}+2\bar{b}$	$3\bar{a}-\bar{b}$
2.3.	(-2, 4, 1)	(1, -2, 7)	$5\bar{a}+3\bar{b}$	$2\bar{a}-\bar{b}$
2.4.	(1, 2, -3)	(2, -1, -1)	$4\bar{a}+3\bar{b}$	$8\bar{a}-\bar{b}$
2.5.	(3, 5, 4)	(5, 9, 7)	$2\bar{a}+\bar{b}$	$3\bar{a}-2\bar{b}$

2.6.	(1, 4, -2)	(1, 1, -1)	$\overline{a}+\overline{b}$	$4\overline{a}+2\overline{b}$
2.7.	(1, -2, 5)	(3, -1, 0)	$4\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.8.	(3, 4, -1)	(2, -1, 1)	$6\overline{a}-3\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.9.	(2, -3, -2)	(1, 0, 5)	$3\overline{a}+9\overline{b}$	$\overline{a}-3\overline{b}$
2.10.	(-1, 4, 2)	(3, -2, 6)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$3\overline{b}-6\overline{a}$
2.11.	(5, 0, -1)	(7, 2, 3)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$3\overline{b}-6\overline{a}$
2.12.	(0, 3, -2)	(1, -2, 1)	$5\overline{a}-2\overline{b}$	$3\overline{a}+5\overline{b}$
2.13.	(-2, 7, -1)	(-3, 5, 2)	$2\overline{a}+3\overline{b}$	$3\overline{a}+2\overline{b}$
2.14.	(3, 7, 0)	(1, -3, 4)	$4\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.15.	(-1, 2, -1)	(2, -7, 1)	$6\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-3\overline{a}$
2.16.	(7, 9, -2)	(5, 4, 3)	$4\overline{a}-\overline{b}$	$4\overline{b}-\overline{a}$
2.17.	(5, 0, -2)	(6, 4, 3)	$5\overline{a}-3\overline{b}$	$6\overline{b}-10\overline{a}$
2.18.	(8, 3, -1)	(4, 1, 3)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$2\overline{b}-4\overline{a}$
2.19.	(3, -1, 6)	(5, 7, 10)	$4\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{a}-2\overline{b}$
2.20.	(1, -2, 4)	(7, 3, 5)	$6\overline{a}-3\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.21.	(3, 7, 0)	(4, 6, -1)	$3\overline{a}+2\overline{b}$	$5\overline{a}-7\overline{b}$
2.22.	(2, -1, 4)	(3, -7, -6)	$2\overline{a}-3\overline{b}$	$3\overline{a}-2\overline{b}$
2.23.	(5, -1, -2)	(6, 0, 7)	$3\overline{a}-2\overline{b}$	$4\overline{b}-6\overline{a}$
2.24.	(-9, 5, 3)	(7, 1, -2)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$3\overline{a}+5\overline{b}$
2.25.	(4, 2, 9)	(0, -1, 3)	$4\overline{b}-3\overline{a}$	$4\overline{a}-3\overline{b}$
2.26.	(2, -1, 6)	(-1, 3, 8)	$5\overline{a}-2\overline{b}$	$2\overline{a}-5\overline{b}$
2.27.	(5, 0, 8)	(-3, 1, 7)	$3\overline{a}-4\overline{b}$	$12\overline{b}-9\overline{a}$
2.28.	(-1, 3, 4)	(2, -1, 0)	$6\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-3\overline{a}$
2.29.	(4, 2, -7)	(5, 0, -3)	$\overline{a}-3\overline{b}$	$6\overline{b}-2\overline{a}$
2.30.	(2, 0, -5)	(1, -3, 4)	$2\overline{a}-5\overline{b}$	$5\overline{a}-2\overline{b}$

3-Топшириқ.

$\overline{AB}$ ва $\overline{AC}$ векторлар орасидаги бурчак косинусини топинг.

№	*A*	*B*	*C*
3.1.	(6, 5, 1)	(0, 1, 2)	(2, 1, 0)
3.2.	(5, 4, 2)	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)
3.3.	(2, 0, 4)	(1, 1, 1)	(3, 2, 1)
3.4.	(1, 2, 3)	(2, -1, 0)	(3, 2, 1)
3.5.	(1, -1, 2)	(5, -6, 2)	(2, 3, -1)
3.6.	(3, -3, 1)	(-3, -2, 0)	(5, 0, 2)
3.7.	(4, 2, 1)	(0, 4, 5)	(1, 2, 7)
3.8.	(1, 0, 2)	(2, 4, 3)	(1, 7, 1)
3.9.	(5, -1, 3)	(2, 0, 1)	(3, 1, -1)
3.10.	(0, 8, 1)	(2, 1, 1)	(-1, 4, 5)
3.11.	(1, 0, 4)	(0, 2, 3)	(-1, 1, 0)
3.12.	(2, 3, 4)	(3, 4, 5)	(-4, 5, 6)
3.13.	(1, -2, 3)	(0, -1, 2)	(3, -4, 5)
3.14.	(0, -3, 6)	(-12, -3, -3)	(-9, -3, -6)
3.15.	(3, 3, -1)	(5, 5, -2)	(4, 1, 1)
3.16.	(-1, 2, -3)	(3, 4, -6)	(1, 1, -1)
3.17.	(-4, -2, 0)	(-1, -2, 4)	(3, -2, 1)
3.18.	(5, 3, -1)	(5, 2, 0)	(6, 4, -1)
3.19.	(-3, -7, -6)	(0, -1, -2)	(2, 3, 0)
3.20.	(2, -4, 6)	(0, -2, 4)	(6, -8, 10)
3.21.	(0, 1, -2)	(3, 1, 2)	(4, 1, 1)
3.22.	(3, 3, -1)	(1, 5, -2)	(4, 1, 1)
3.23.	(2, 1, -1)	(6, -1, -4)	(4, 2, 1)
3.24.	(-1, -2, 1)	(-4, -2, 5)	(-8, -2, 2)
3.25.	(6, 2, -3)	(6, 3, -2)	(7, 3, -3)

3.26.	(0, 0, 4)	(-3, -6, 1)	(-5, -10, -1)
3.27.	(2, -8, -1)	(4, -6, 0)	(-2, -5, -1)
3.28.	(3, -6, 9)	(0, 3, 6)	(9, -12, 15)
3.29.	(0, 2, -4)	(8, 2, 2)	(6, 2, 4)
3.30.	(3, 3, -1)	(5, 1, -2)	(4, 1, 1)

4-**Топшириқ.**

$\overline{F}$ куч векторининг йўналтирувчи косинусларини аниқланг. А нуқтага нисбатан В нуқтага қўйилган $\overline{F}$ куч моментини топинг.

№	$\overline{F}$	B	A
4.1.	(3, 3, 3)	(3, -1, 5)	(4,-2,3)
4.2.	(4, 4, 4)	(4, -2, 5)	(5,-3,3)
4.3.	(8, -8, 8)	(10, -8, 1)	(9,-7,3)
4.4.	(-2, 2, -2)	(11, -9, 1)	(10,-8,3)
4.5.	(5, 5, 5)	(5, -3, 5)	(6,-4,3)
4.6.	(-3, 3, -3)	(12, -10, 1)	(11,-9,3)
4.7.	(6, 6, 6)	(6, -4, 5)	(7,-5,3)
4.8.	(-4, 4, -4)	(13, -11, 1)	(12,-10,3)
4.9.	(7, 7, 7)	(7, -5, 5)	(8,-6,3)
4.10.	(-5, 5, -5)	(14, -12, 1)	(13, -11, 3)
4.11.	(-1, -1, 1)	(8, -6, -5)	(9, -7, 3)
4.12.	(3, 3, -3)	(0, 1, 2)	(2, -1, -2)
4.13.	(-2, -2, -2)	(9, -7, 5)	(10, -8, 3)
4.14.	(4, 4, -4)	(1, 0, 2)	(3, 2, -2)
4.15.	(-3, -3, -3)	(10, -8, 5)	(11, -9, 3)
4.16.	(5, 5, -5)	(2,-1,2)	(4, -3, 2)
4.17.	(-4, -4, -4)	(11,-9,5)	(12, -10, 3)
4.18.	(6, 6, -6)	(3,-2,2)	(5, -4, -2)
4.19.	(-5, -5, -5)	(12,-10,5)	(13, -11, 3)
4.20.	(7, 7, -7)	(4,-3,2)	(6, -5, -2)
4.21.	(3, -3, 3)	(5,-3,1)	(4, -2, 3)
4.22.	(8, 8, -8)	(5,-4,2)	(7, -6, -2)
4.23.	(4, -4, 4)	(6,-4,1)	(5, -4, 3)

4.24.	(-2, -2, 2)	(6,-5,2)	(8, -7, -2)
4.25.	(5, -5, 5)	(7,-5,1)	(6, -4, 3)
4.26.	(-3, -3, 3)	(7,-6,2)	(9, -8, 2)
4.27.	(6, -6, 6)	(8,-6,1)	(7, -5, 3)
4.28.	(-4, -4, 4)	(8,-7,2)	(10, -9, -2)
4.29.	(7, -7, 7)	(9,-7,1)	(8, -6, 3)
4.30.	(-5, -5, 5)	(9,-8,2)	(11, -10, 2)

5-**Топшириқ.**

$\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларидан қурилган параллелограммнинг юзасини ҳисобланг

№	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\lvert\overline{p}\rvert$	$\lvert\overline{q}\rvert$	$(\overline{p} \wedge \overline{q})$
5.1.	$\overline{p}+2\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.2.	$3\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	4	1	$\frac{\pi}{4}$
5.3.	$\overline{p}-3\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	$1/5$	1	$\frac{\pi}{2}$
5.4.	$3\overline{p}-2\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	4	$1/2$	$\frac{5\pi}{6}$
5.5.	$\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}+\overline{q}$	2	3	$\frac{3\pi}{4}$
5.6.	$\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$\frac{\pi}{3}$
.5.7.	$2\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	3	2	$\frac{\pi}{2}$
5.8.	$4\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	7	2	$\frac{\pi}{4}$
5.9.	$\overline{p}-4\overline{q}$	$3\overline{p}+\overline{q}$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.10.	$\overline{p}+4\overline{q}$	$2\overline{p}-\overline{q}$	7	2	$\frac{\pi}{3}$
5.11.	$3\overline{p}+2\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	10	1	$\frac{\pi}{2}$
5.12.	$4\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	5	4	$\frac{\pi}{4}$
5.13.	$2\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	6	7	$\frac{\pi}{3}$
5.14.	$3\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
5.15.	$2\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$\frac{\pi}{6}$

5.16.	$2\overline{p}-3\overline{q}$	$3\overline{p}+2\overline{q}$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.17.	$3\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}+3\overline{q}$	2	5	$\frac{\pi}{6}$
5.18.	$4\overline{p}-3\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.19.	$\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+\overline{q}$	2	5	$\frac{\pi}{6}$
5.20.	$5\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	5	3	$\frac{\pi}{6}$
5.21.	$3\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
5.22.	$\overline{p}-4\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{6}$
5.23.	$5\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-3\overline{q}$	1	2	$\frac{\pi}{3}$
5.24.	$7\overline{p}-2\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	$1/2$	2	$\frac{\pi}{2}$
5.25.	$6\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+\overline{q}$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
5.26.	$10\overline{p}+\overline{q}$	$3\overline{p}-2\overline{q}$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.27.	$6\overline{p}-\overline{q}$	$3\overline{p}+2\overline{q}$	8	$1/2$	$\frac{\pi}{3}$
5.28.	$3\overline{p}+4\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	2,5	2	$\frac{\pi}{2}$
5.29.	$7\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-3\overline{q}$	3	1	$\frac{3\pi}{4}$
5.30.	$\overline{p}+3\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	3	5	$\frac{2\pi}{3}$

6-Топшириқ.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, ва $\overline{c}$ векторларнинг компланарлигини анқланг.

№	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$
6.1.	(2,3,1)	(-1,0,-1)	(2,2,2)
6.2.	(3,2,1)	(2,3,4)	(3,1,-1)
6.3.	(1,5,2)	(-1,1,-1)	(1,1,1)
6.4.	(1,-1,-3)	(3,2,1)	(2,3,4)
6.5.	(3,3,1)	(1,-2,1)	(1,1,1)
6.6.	(3,1,-1)	(-2,-1,0)	(5,2,-1)
6.7.	(4,3,1)	(1,-2,1)	(2,2,2)
6.8.	(4,3,1)	(6,7,4)	(2,0,-1)
6.9.	(3,2,1)	(1,-3,-7)	(1,2,3)
6.10.	(3,7,2)	(-2,0,-1)	(2,2,1)
6.11.	(1,-2,6)	(1,0,1)	(2,-6,17)
6.12.	(6,3,4)	(-1,-2,-1)	(2,1,2)
6.13.	(7,3,4)	(-1,-2,-1)	(4,2,4)
6.14.	(2,3,2)	(4,7,5)	(2,0,-1)
6.15.	(5,3,4)	(-1,0,-1)	(4,2,4)
6.16.	(3,10,5)	(-3,-2,-3)	(2,4,3)
6.17.	(-2,-4,-3)	(4,3,1)	(6,7,4)
6.18.	(3,1,-1)	(1,0,-1)	(8,3,-2)
6.19.	(4,2,2)	(-3,-3,-3)	(2,1,2)
6.20.	(4,1,2)	(9,2,5)	(1,1,-1)
6.21.	(5,3,4)	(4,3,3)	(9,5,8)
6.22.	(3,4,2)	(1,1,0)	(8,11,6)
6.23.	(4,-1,-6)	(1,-3,-7)	(2,-1,-4)
6.24.	(3,1,0)	(-5,-4,-5)	(4,2,4)
6.25.	(3,0,3)	(8,1,6)	(1,1,-1)
6.26.	(1,-1,4)	(1,0,3)	(1,-3,8)

6.27.	(6,3,4)	(-1,-2,-1)	(2,1,2)
6.28.	(4,1,1)	(-9,-4,-9)	(6,2,6)
6.29.	(-3,3,3)	(-4,7,6)	(3,0,-1)
6.30.	(-7,10,-5)	(0,-2,-1)	(-2,4,-1)

7- Топшириқ

Учлари A, B, C,ва D нуқталарда булган пирамиданинг ҳажмини ва D учидан ABC ёққа туширилган баландлигини топинг.

№	A	B	C	D
7.1.	(0,1,2)	(2,1,7)	(2,7,4)	(0,0,4)
7.2.	(1,2,3)	(2,8,-4)	(0,5,4)	(2,9,4)
7.3.	(1,1,1)	(2,4,-2)	(2,0,2)	(0,1,-1)
7.4.	(1,-1,1)	(0,2,3)	(1,-1,0)	(0,2,2)
7.5.	(2,1,3)	(4,-2,0)	(1,3,-3)	(7,5,2)
7.6.	(-2,0,4)	(1,3,-1)	(4,-1,3)	(2,7,3)
7.7.	(1,2,3)	(0,0,0)	(1,4,3)	(1,8,-1)
7.8.	(-1,2,0)	(1,0,3)	(0,2,2)	(1,8,3)
7.9.	(2,-1,1)	(3,3,2)	(2,1,0)	(4,1,-3)
7.10.	(2,1,-1)	(-3,1,2)	(0,1,2)	(-1,8,3)
7.11.	(-2,1,1)	(5,5,4)	(3,2,-1)	(4,1,3)
7.12.	(0,1,-1)	(3,-1,5)	(1,0,4)	(3,5,7)
7.13.	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)	(-1,0,-2)
7.14.	(2,3,1)	(4,1,-2)	(6,3,7)	(7,5,-3)
7.15.	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)	(5,9,-8)
7.16.	(1,5,-7)	(-3,5,3)	(-2,7,3)	(-4,8,-12)
7.17.	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-6,-2,0)	(2,5,4)
7.18.	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)	(3,4,5)
7.19.	(4,-1,3)	(-2,1,0)	(0,-5,1)	(3,2,-6)
7.20.	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)	(2,-2,-4)
7.21.	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)	(-3,0,1)
7.22.	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)	(2,1,0)
7.23.	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)	(0,-5,-4)
7.24.	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)	(1,-1,2)
7.25.	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)	(7,-3,1)
7.26.	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)	(3,1,-4)
7.27.	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)	(-4,3,5)
7.28.	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(3,1,-4)	(-4,7,3)
7.29.	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)	(-5,2,-8)
7.30.	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)	(-10,-8,7)

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра – М.: Наука, 1999.
2. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах – М.: Физматлит, 2001.
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре – М.: Наука, 1968.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 – М.: Высшая школа, 1996.
5. Привалов И.И. Аналитическая геометрия- М.: Физматгиз. 1992.
6. Камалов М.К., Аналитик геометрия-Т.: Ўқитувчи, 1972.
7. Клетеник Д.В.,Сборник задач по аналитической геометрии.-М.: ГИТТЛ. 1986.
8. Минорский В.П.,Олий математика масалалари туплами.-Т.: Ўрта ва олий мактаб, 1983.