O’ZBEKSTAN RESPUBLIKASI XALIQ

BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

A’JINIYAZ ATINDAG’I NO’KIS MA’MLEKETLIK

PEDAGOGIKALIQ INSTITUTI

FIZIKA MATEMATIKA FAKUL’TETI
«Informatika ha’m xabar texnologiyaları» kafedrası

«Fizika-matematika» fakul’tetinin’ matematika-informatika qa’nigeligi pitkeriwshisi Biysenova Jarqınaydın’

PITKERIW QA’NIGELIK JUMISI

Tema: « MATRITSANIN’ MENSHIKLI MA’NISLERIN HA’M VEKTORLARIN TABIW USILLARI»

qa’nigeligi: 5140100- Matematika ha’m informatika

Ilimiy basshı ___________ **dots. A.Xojametov**

Kafedra baslıg’ı ___________ **dots. A.Abdullaev**

No’kis-2011

MAZMUNI

KIRISIW……………………………………………………………………….3

I BAP. MATRITSALARDIN' MENSHIKLI MA'NISLERIN HA'M MENSHIKLI VEKTORLARIN KRILOV USILI MENEN ESAPLAW………………………..5

1.1. Da'slepki tu'sinikler ha'm anıqlamalar ………………………………………5

1.2. Matritsanın' menshikli ma'nislerinin' ha'm menshikli vektorlarının' ma'selelerin sheshiw usılları haqqında …………………..………………………………………9

1.3. A.N.Krılov usılı……………………………………………………………….11

1.3.1. Matritsanın' nol'ge aylandırıwshı ha'm en' kishi (minimal) ko'pag'zalıları…….12

1.3.2. Matritsanın' menshikli ko'pag'zalısın jasaw………………………………….15

1.3.3. Matritsanin' menshikli vektorlarin tabiw………………………….………..19

II BAP. MATRITSALARDIN' MENSHIKLI MA'NISLERIN HA'M MENSHIKLI VEKTORLARIN LANTSOSH USILI MENEN ESAPLAW…………………………26

2.1. K. Lantsosh usılı…………………………………………………………….26

2.1. Lantsosh usılının' tiykarg'ı esaplaw algoritmi……………………………………...26

2.3. Usıldın' biortogonallıq algoritmi……………………………………………..30

2.4.Matritsanın' menshikli vektorların tabıw……………………………………34

JUWMAQLAW………………………………………………………………..43

PAYDALANG'AN A'DEBIYATLAR……………………………………………..45

KIRISIW

Ko’plegen texnikalıq ha’m ekonomikalıq ma’seleler sızıqli algebralıq ten’lemeler sistemasına (SATS) alip kelinedi. Bul SATSlardı izertlewdin’ en’ jaqsi usıllarınan biri spektral analiz yag’nıy matritsanın’ menshikli ma’nislerin h’am de menshikli vektorların tabıw bolıp esaplanadı. Biz bul pitkeriw qa’nigelik jumısında matritsanın’ menshikli ma’nislerin h’am de menshikli vektorların tabıw ma’selesin qaraymız.

$A=\left(a_{ij}\right)\left(i,\,j=1,2,...,n\right)$ kvadrat matritsasının’ menshikli ma’nisi (menshikli sanı) dep, bazı bir $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)'\neq 0$ vektorı ushın,

$$Ax=\lambda x \tag{1}$$

ten’ligin qanaatlandıratug’ın λ sanın’a aytıladı. Al (1) ten’ligin qanaatlandıratug’ın qa’legen nol’den o’zgeshe vektor, *A* matritsasının’ *X* menshikli ma’nisine sa’ykes (derek), *menshikli vektorı* dep ataladı. Matritsanın’ *x* menshikli vektorın bazı bir $\alpha\neq 0$ sanın’a ko’beytiwden kelip shıqqan $\overline{x}=\alpha x$ vektorı da, sol matritsanın’ menshikli vektorı bolatug’ınlıg’ı (1) ten’liginen ko’rinip tur. Usı sebepli matritsanın’ barlıq menshikli vektorları san ko’beytiwshisine shekemgi da’llik penen anıqlang’an. Sonlıqtan olardı normalawg’a boladı. Dara jag’dayda, menshikli vektordın’ ha’r bir koordinatasın olardın’ en u’lkenine yamasa bul vektordın’ uzınlıg’ına bo’liwge boladı. Son’g’ı jag’dayda birlik menshikli vektorı kelip shıg’adı.

SATS lardı sheshiwdin’ iteratsiyalıq usıllarının’ jıynaqlılıg’ın u’yrengenimizde, matritsanın’ menshikli ma’nisleri haqqındag’ı mag’lıwmatlar qanshelli bahalı bolatug’ınına isendik. Ma’selen,

$$x = Vx + d$$

ko’rinisindegi SATS lardı sheshiwge qollanılg’an a’piwayı iteratsiyalar usılının’ jıynaqlı bolıwı ha’m jıynaqlılıq tezligi, *V* matritsasının’ moduli boyınsha en’ u’lken menshikli ma’nisinin’ shamasınan tikkeley g’a’rezli boladı.

Matritsanın’ menshikli ma’nislerin ha’m menshikli vektorların anıqlaw ma’selesi tek ja’rdemshi ma’sele esabında g’ana a’hmiyetke iye bolmaydı. Ko’plegen ilimiy-texnikalıq ma’seleler, a’sirese fizikanın’, mexanikanın’ astronomiyanın’ ko’p sanlı ma’seleleri, (1) ko’rinisindegi bir tekli SATS lardın’ nol’den o’zgeshe sheshimin ha’m bunday sheshiminin’ bar bolıwın ta’miyinleytug’ın λ parametrinin’ sa’ykes ma’nislerin tabıw ma’selesine keltiriledi. Barlıq turaqsız (o’zgermeli) terbelis qubılıslarında menshikli ma’nisler ma’selesi og’ada u’lken rol’ oynaydı. O’ytkeni, terbelislerdin’ jiyiligi bazı bir matritsanın’ menshikli ma’nisleri menen, al bul terbelislerdin’ sırtqı ko’rinisi sol matritsanın’ menshikli vektorları menen anıqlanadı. Matritsalardın’ menshikli ma’nislerin ha’m menshikli vektorların tallaw ko’p sanlı ilmiy-texnikalıq izertlewlerdin’ a’hmiyetli teması boladı.

Pitkeriw qanigelik jumisi eki baptan ibarat bolip jumıstın’ birinshi babinda Krılov usılı boyinsha matritsanın’ menshikli ha’m menshikli vektorların tabıw ma’selesi al ekinshi babinda bolsa Lantsosh usılı boyinsha matritsanın’ menshikli ha’m menshikli vektorların tabıw ma’selesi qaralg’an.

Biz tek ga’na usı eki usıl menen g’ana sheklendik. Matritsanın’ menshikli ha’m menshikli vektorların tabıw ma’selesinin’ ko’plegen usıllari bizge ma’lim. Biraqta keleshektegi jumislarımızda iteratsiyalıq usıllarda matritsanın’ moduli boyınsha en’ kishi menshikli ma’nislerin tabıw ma’selelerin qarap o’temiz.

I BAP. MATRITSALARDIN’ MENSHIKLI MA’NISLERIN HA’M MENSHIKLI VEKTORLARIN ESAPLAW

1.1. Da’slepki tu’sinikler ha’m anıqlamalar

$A=\left(a_{ij}\right)\left(i,\, j=1,2,...,n\right)$ kvadrat matritsasının’ menshikli ma’nisi (menshikli sanı) dep, bazı bir $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)'\neq 0$ vektorı ushın,

$$Ax=\lambda x \tag{1.1}$$

ten’ligin qanaatlandıratug’ın λ sanın’a aytıladı. Al (1) ten’ligin qanaatlandıratug’ın qa’legen nol’den o’zgeshe vektor, *A* matritsasının’ *X* menshikli ma’nisine sa’ykes (derek), *menshikli vektorı* dep ataladı. Matritsanın’ *x* menshikli vektorın bazı bir $\alpha\neq 0$ sanın’a ko’beytiwden kelip shıqqan $\overline{x}=\alpha x$ vektorı da, sol matritsanın’ menshikli vektorı bolatug’ınlıg’ı (1.1) ten’liginen ko’rinip tur. Usı sebepli matritsanın’ barlıq menshikli vektorları san ko’beytiwshisine shekemgi da’llik penen anıqlang’an. Sonlıqtan olardı normalawg’a boladı. Dara jag’dayda, menshikli vektordın’ ha’r bir koordinatasın olardın’ en u’lkenine yamasa bul vektordın’ uzınlıg’ına bo’liwge boladı. Son’g’ı jag’dayda birlik menshikli vektorı kelip shıg’adı.

SATS lardı sheshiwdin’ iteratsiyalıq usıllarının’ jıynaqlılıg’ın u’yrengenimizde, matritsanın’ menshikli ma’nisleri haqqındag’ı mag’lıwmatlar qanshelli bahalı bolatug’ınına isendik. Ma’selen,

$$x = Vx + d$$

ko’rinisindegi SATS lardı sheshiwge qollanılg’an a’piwayı iteratsiyalar usılının’ jıynaqlı bolıwı ha’m jıynaqlılıq tezligi, *V* matritsasının’ moduli boyınsha en’ u’lken menshikli ma’nisinin’ shamasınan tikkeley g’a’rezli boladı.

Qolaylılıq ushın (1.1) bir tekli sistemasın

$$\left(A-\lambda E\right)x=0 \tag{1.2}$$

ko’rinisinde jazamız. Bul bir tekli sisteması, anıqlawshısı nol’ge ten’ bolg’anda g’ana, nol’den o’zgeshe sheshimge iye boladı. Sonlıqtan bul talaptın’ orınlanıwınan, *A* matritsasının’ *xarakteristikalıq ten’lemesi* dep atalatug’ın,

$$\left|A-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.3)$$

ten'lemesine kelemiz. Bundag'ı $\left|A-\lambda E\right|$ anıqlawshısı λ parametrinin'in', u'lken-koeffitsienti $(-1)^n$ ne ten' bolg'an, n-da'rejeli algebralıq, ko'pag'zalısı boladı. Bul anıqlawshını elementleri boyınsha jiklep, ashıp shıqsaq, onda ol

$$\left|A-\lambda E\right| = (-1)^n \left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n\right) \qquad (1.4)$$

ko'rinisine iye boladı ha'm ol A matritsasının' *xarakteristikalıq ko'p ag'zalısı* dep ataladı. Geyde (4) xarakteristikalıq ko'pag'zalısının' ornın'a, bul -ko'pag'zalıdan $(-1)^n$ ko'beytiwshisi menen parq qılatug'ın

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n \qquad (1.5)$$

ko'pag'zalısınan paydalanadı. Bul ko'pag'zalını A matritsasının' *menshikli ko'pag'zalısı* dep ataydı. Matritsanın' menshikli ma'nisleri, onın' menshikli ko'pag'zalısının' koren'leri boladı. Bunnan, p -ta'rtipli ha'r qanday kvadrat matritsa, eseligin esapqa alg'anda, p sandag'ı $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ menshikli ma'nislerine iye bolatug'ını kelip shıg'adı. A matritsasının' barlıq $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ menshikli ma'nislerinin' ko'pligi, bul *matritsanın' spektri* dep ataladı.

A matritsasının' menshikli vektorları, λ parametrinin' ornın'a matritsanın' λ_i- menshikli ma'nisleri qoyılg'an, (1.1) yamasa (1.2) bir tekli sistemasının' nol'den o'zgeshe sheshimleri boladı. Egerde, berilgen menshikli ma'nisi ushın (1.1) siteması bir neshe sızıqlı baylanıssız sheshimlerge iye bolsa, onda matritsanın' bul menshikli ma'nisine bir neshe menshikli vektorlar sa'ykes keledi. Sonday aq, haqıyqıy matritsa berilgen jag'dayında, onın' kompleks menshikli ma'nisine, koordinataları kompleks sanlar bolg'an, menshikli vektorlar sa'ykes keledi. Koordinataları, haqıyqıy matritsanın' menshikli vektorlarının' koordinataları menen kompleks-tuyinles bolg'an vektor da, bul matritsanın' kompleks-tu'yinles menshikli ma'nisine sa'ykes keletug'ın, menshikli vektorı boladı. Bunın' durıslıg'ına (1.1) ten'lemesindegi barlıq sanlardı kompleks-tu'yinles sanlar menen almastırıp, an'sat iseniwge boladı.

A matritsasının' menshikli ma'nislerin ha'm menshikli vektorların esaplaw ma'selesin to'mendegi u'sh basqıshqa ajıratıwg'a boladı:

1) matritsanın' $P_n(\lambda)$ menshikli ko'pag'zalısın jasaw;

2) $P_n(\lambda)=0$ ten'lemesin sheshiw ha'm matritsanın' $\lambda_i\ (i=1,2,...,n)$ menshikli ma'nislerin anıqlaw;

3) Bir tekli

$$(A-\lambda_i E)x=0 \quad (i=1,2,...,n) \tag{1.6}$$

sistemalarının' nol'den o'zgeshe sheshimlerin tabıw, yag'nıy matritsanın' menshikli vektorların anıqlaw.

Ayırım jag'daylarda, matritsanın' menshikli ma'nislerin ha'm olarg'a sa'ykes menshikli vektorların, onın' menshikli ko'pag'zalısın jasamay aq, anıqlaw mu'mkin boladı. Bunı, matritsanın' menshikli ma'nislerinin' ha'm menshikli vektorlarının' anaw yamasa mınaw qa'siyetlerinen paydalanıp, ha'r qıylı qosımsha uyg'arıwlardın' ja'rdeminde iske asırıwg'a boladı. Bul ma'sele to'mende tiyisli orınlarında tolıg'ıraq bayanlanadı.

Matritsanın' menshikli ma'nislerinin' ha'm vektorlarının' ma'selelerin sheshiwdin' joqarıda ko'rsetilgen etaplarının' ha'r biri a'dewir quramalı esaplaw ma'seleleri boladı. Haqıyqatında da, ma'selen $P_n(\lambda)$ menshikli ko'pag'zalısın jasaw (1.3) nin' shep jag'ındag'ı anıqlawshını ashıp shıg'ıw menen baylanıslı. Bul jetkilikli qıyın ma'sele. Tiykarg'ı qıyınshılıq λ parametrinin' anıqlawshının' ha'r bir qatarında ha'm bag'anasında bar bolıwınan kelip shıg'adı. Ulıwma jag'dayda, algebra kursınan ma'lim bolg'anın'day, $P_n(\lambda)$ menshikli ko'pag'zalısının' p_i koeffitsientleri, $(-1)^n$ belgisi menen alıng'an, A matritsasının' i-ta'rtipli barlıq bas minorlarının' (yag'nıy bas diagonalına simmetriyalı jaylasqan minorlarının') qosındısına ten' boladı. Bunday minorlardın’ sanı ha’r bir i ushın p elementten i element boyınsha jasalg’an teriwlerdin’ sanın’a ten’. Demek, n-ta’rtipli kvadrat matritsanın’ $P_n(\lambda)$ menshikli ko’pag’zalısın jasaw ha’r qıylı ta’rtiptegi $C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n - 1$ sandag’ı anıqlawshılardı esaplaw menen baylanıslı. Ta’rtibi jetkilikli u’lken bolg’an matritsalar ushın, son’g’ı ma’seleni sheshiw, og’ada u’lken ko’lemdegi esaplaw jumısların orınlawdı talap etedi.

Ko’pag’zalının’ koeffitsientleri menen koren’lerinin’ arasında baylanıs ornatatug’ın, Viettin’ belgili teoremasınan paydalanıp, mına ten’liklerdi jazıwg’a boladı:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = p_1,$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 ... \lambda_n = (-1)^{n-1} p_n$$

Biraqta, joqarıda aytılg’an boyınsha (1.5) degi p_1 koeffitsienti A matritsasının’ birinshi ta’rtipli barlıq diagonal’ minorlarının’ qosındısına ten’ boladı:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

Bunnan paydalanıp,

$$p_n = (-1)^{n-1} |A|$$

ten’liginde jazıwg’a boladı, Sonlıqtan

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = p_1 = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}, \tag{1.7}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n = (-1)^{n-1} p_n = |A| \tag{1.8}$$

boladı. Bundag’ı $p_1 = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ shaması *A matritsasıpın’ izi* dep ataladı ha’m SpA yamasa TrA dep belgilenedi. (Bul belgilewler nemistin’ «Spur» ha’m inglizdin’ «Tgase», bizin’she «iz» degen so’zlerinen qısqartılıp alıng’an). Biz bul pitkeriw jumısta olardın’ birinshisinen paydalanamız.

Solay etip, matritsanın’ barlıq menshikli ma’nislerinin’ qosındısı, onın’ izine ten’, al olardın’ ko’beymesi bul matritsanın’ anıqlawshıs’gna ten’ boladı degen juwmaqqa kelemiz.

Dara jag'dayda, bunnan, A matritsası tek $\det A = |A| = 0$ bolg'anda g'ana, en' keminde bir nol'ge ten' menshikli ma'niske iye bolatug'ını kelip sh'ıg'adı.

Menshikli ma'nislerdin' ha'm vektorlardın' ma'selelerin sheshiwdin' ekinshi ha'm u'shinshi etapların tikkeley iske.asırıw, joqarı ta'rtipli algebralıq ten'lemeni sheshiw ha'm sızıqlı algebralıq ten'lemelerinin' p bir tekli sistemalarının' nol'den o'zgeshe sheshimlerin tabıw sıyaqlı, esaplaw sıpatındag'ı a'dewir quramalı ma'selelerdi sheshiwge alıp qeledi.

1.2. Matritsanın' menshikli ma'nislerinin' ha'm menshikli vektorlarının' ma'selelerin sheshiw usılları haqqında

Ha'zirgi waqıtta matritsanın' menshikli ma'nislerin ha'm menshikli vektorların tabıwdı an'satlastırıwg'a mu'mkinshilik beretug'ın, ko'plegen *arnawpı esaplaw usılları* islenip shıg'ılg'an. Bul usıllardı, SATS lardı sheshiw ma'selesi jag'dayındag'ı sıyaqlı, *tuwrı (da'l)* ha'm *iteratsiyalıq (juwıq) usıllar* dep, u'lken eki toparg'a ajıratıwg'a boladı. Tuwrı usıllarg'a, da'slep matritsanın' menshikli ko'pag'zalısı jasalatug'ın (yag'nıy onın' $p_1, p_2, ..., p_n$ koeffitsientleri esaplanatug'ın), son'ınan onın' koren'leri anıqlanıp, matritsanın' menshikli ma'nisleri tabılatug'ın ha'm olar boyınsha sa'ykes menshikli vektorları anıqlanatug'ın, usıllar jatadı. Basqasha aytqanda, tuwrı usıllar dep, matritsanın' menshikli ma'nislerin ha'm vektorların anıqlawdın' joqarıda ko'rsetilgen u'sh etabı izbe-iz iske asırılatug'ın usıllarg'a aytıladı. Bul usıllardı qollang'anda, ayırım jag'daylarda, esaplawlardın' aralıq na'tiyjelerinen paydalanıp, matritsanın' menshikli ma'nislerin anıqlaw ha'm son'ınan, bir tekli ten'lemelerdin' sistemaların sheshpesten, olarg'a sa'ykes menshikli vektorların tabıw mu'mkin boladı. Bul topardag'ı usıllardın' tuwrı usıllar dep atalıwının' tiykarg'ı sebebi: matritsanın' elementleri da'l sanlar bolıp, esaplawlar da'l orınlansa, onda bunday usıllar menen menshikli ko'pag'zalının' koeffitsientleri da'l anıqlanadı ha'm menshikli vektorlardın' koordinataları sa'ykes menshikli ma'nisleri menen an'latıladı.

Iteratsiyalıq usıllarda, matritsanın' menshikli ma'nisleri, onın' menshikli ko'pag'zalısın jasamastan, tikkeley anıqlanadı. Sonın' menen birge, matritsanın' menshikli ma'nisleri ha'm olarg'a sa'ykes menshikli vektorları, bir waqıtta esaplanadı. Bunday usıllardın' esaplaw algoritmleri iteratsiyalıq sıpatqa iye boladı. Olarda matritsanı vektorg'a ko'beytiw ko'p ret orınlanadı. Bunday usıllar, shegi matritsanın' menshikli vektorı bolg'an vektorlardın' izbe-izligin ha'm shegi matritsanın' sa'ykes menshikli ma'nisi bolg'an sanlar izbe-izligin jasawg'a alıp keledi. Iteratsiyalıq protsesstin' barısı, matritsanın' xaqıyqıy yamasa kompleks menshikli ma'nislerge iye bolıwınan a'dewir g'a'rezli boladı. Bul protsesstits jıynaklı bolıwı ha'm onın' jıynaqlılıq tezligi, ha'r qıylı qon'sı menshikli ma'nislerinin' modullerinin' katnasının' shaması menen anıqlanadı.

Ko'plegen ilimiy ha'm texnikalıq ma'selelerdi sheshkende matritsanın' barlıq menshikli ma'nislerin tabıw talap etiledi. Bunday ma'sele *menshikli mo'nislerdin' tolıq ma'selesi* dep ataladı. Sonday aq, ayırım ma'selelerde matritsanın' menshikli ma'nisleri ha'm menshikli vektorları hakqında tolıq mag'lıwmatlardı biliw talap etilmeydi. Ma'selen, terbelis kublıslarının' turaqlılıg'ın yamasa turaqsızlıg'ın u'yrengende, matritsanın' barlıq menshikli ma'nisleri jatatug'ın shegaralardı ko'rsetiw yamasa berilgen sang'a jaqın bolg'an menshikli ma'nisin tabıw jetkilikli boladı. Usınday tu'rdegi barlıq ma'seleler menshikli ma'nislerdin' *jeke ma'seleleri* dep ataladı. Artıqmash miynet jumsamaw ma'qsetinde, bunday ma'selelerdin' xa'r birin sheshiwdin' o'zine ta'n usılları islenip shıg'ılg'an.

A'dette, iteratsiyalıq usıllar matritsanın' tek g'ana bir neshe (ma'selen, moduli boyınsha en' kishi yamasa en' u'lken) menshikli ma'nislerin ha'm olarg'a sa'ykes menshikli vektorların jetkilikli da'llik penen anıqlawg'a mu'mkinshilik beredi. Sonlıqtan bunday usıllar ko'binese menshikli ma'nislerdin' jeke ma'selelerin sheshiw ushın beyimlesken. Al tuwrı usıllar, menshikli ma'nislerdin' tolıq ma'selesin sheshiw ushın, yag'nıy matritsanın' barlıq menshikli ma'nislerin ha'm olarg'a sa'ykes menshikli vektorların tabıwg'a mu'mkinshilik beredi.

Menshikli- ma'nislerdin' tolıq ma'selesi ayırım jag'daylarda arnawlı tu'rde islenip shıg'ılg'an iteratsiyalıq usıllar menen de sheshiliwi mu'mkin. A'dette, bunday usıllardın' esaplaw algoritmleri, menshikli ma'nislerdin' jeke ma'selesin sheshiwdin' iteratsiyalıq ha'm tolıq ma'selesin sheshiwdin' tuwrı usıllarının' algoritmleri menen salıstırg'anda, a'dewir quramalı boladı. Olardı is ju'zinde qollanıw tek tez esaplag'ısh esaplaw mashinalarının' payda bolıwı menen g'ana mu'mkin boldı.

Menshikli ma'nislerdin', tolıq ma'selesin sheshiwdin' tuwrı usıllarının' aldında iteratsiyalıq usıllar mınaday artıqmashlıqqa iye: matritsanın' menshikli ko'pag'zalısın jasamastan aq, onın' barlıq menshikli ma'nislerin anıqlawg'a mu'mkinshilik beredi. Bul og'ada u'lken a'hmiyetke iye. Sebebi matritsanın' menshikli ko'pag'zalısının' koeffitsientlerin esaplawda payda bolg'an qa'telikler, onın' koren'lerin, yag'nıy berilgen matritsanın' menshikli ma'nislerin anıqlawdın' da'lligine jaman ta'sir jasaydı. Bunnan tısqarı, iteratsiyalıq usıllardın' tuwrı usıllardan u'lken artıqmashılıg'ı: olardı qollang'anda orınlanatug'ın a'meller ko'binese og'ada a'piwayı ha'm bir qıylı bolıp keledi. Bul qa'siyeti, a'sirese esaplawlardı EEM de orınlag'anda og'ada bahalı boladı.

Menshikli ma'nislerdin' tolıq ha'm jeke ma'seleleri, sheshiw usılları ha'm qollanıw tarawları boyınsha da bir-birinen u'lken parq qıladı. O'ytkeni, menshikli ma'nislerdin' tolıq ma'selesin, ha'tte ta'rtibi joqarı bolmag'an matritsalar beri lgen jag'daylarında da sheshiw og'ada u'lken ko'lemdegi esaplaw jumısların orınlaw menen baylanıslı boladı. Sonlıqtan, menshikli ma'nislerdin' tolıq ma'selesin sheshiwdin' qıyınshılıqlarınan qutılıp, menshikli ma'nislerdin' jeke ma'selesin iteratsiyalıq usıllar menen sheshiw mumkinshiligi esaplaw praktikası ushın og'ada bahalı boladı.

Menshikli ma'nislerdin' ma'selelerin sheshiwdin' esaplaw usılların tuwrı usıllardın' bir toparın u'yreniwden baslaymız. Aldag'ı waqıtları tek haqıyqıy elementli matritsalardı g'ana qaraymız.

1.3. A.N.Krılov usılı

Akademik A.N.Krılov ta'repinen 1931-jılı matritsalardın' menshikli ma'nislerin ha'm menshikli vektorların anıqlawdı a'dewir qolaylı usılı islenip shıg'ıldı. Bul usıl son'ın ala, matritsanın' xarakteristikalıq ten'lemesin p -da'rejeli algebralıq ten'leme ko'rinisine keltiriwge arnalg'an, ko'p sanlı ilimiy miynetlerdin' payda bolıwına sebepshi boldı.

Ha’zirgi waqıtta A.N.Krılov usılının’ esaplaw sxeması a’dewir o’zgertilip, praktikada qollanıw ushın qolaylastırılg’an. Biraq usıldın’ tiykarg’ı ma’nisi u’lken o’zgeriske ushıramadı. Bul usılda matritsanın’ menshikli ko’pag’zalısının’ koeffitsientleri p -ta’rtipli bazı bir sızıqlı algebralıq ten’lemelerinin’ sistemasının’ sheshimi esabında tabıladı. Bunda, aralıq algebralıq tu’rlendiriwlerdin’ na’tiyjeleri matritsanın’ menshikli vektorların anıqlaw ushın paydalanıladı. Bul usıldı bayanlawg’a o’tpesten burın, algebradan geypara kerekli mag’lıwmatlardı keltiremiz.

1.3.1. Matritsanın’ nol’ge aylandırıwshı ha’m en’ kishi (minimal) ko’pag’zalıları

Egerde A matritsası ushın

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + ... + a_nE = 0$$

ten’ligi orınlansa, onda

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$$

ko’pag’zalısı A matritsasının’ *nol’ge aylandırıwshı ko’pag’zalısı* dep ataladı. Nol’ge ten’ bolg’an ko’pag’zalını itibarg’a almaw ushın, aldag’ı waqıtları $f(\lambda)$ ko’pag’zalısının’ u’lken koeffitsienti $a_0 = 1$ dep uyg’arıladı, yag’nıy matritsanın’, tek keltirilgen nol’ge aylandırıwshı ko’pag’zalıları g’ana qaraladı. Ha’r bir kvadrat matritsa ushın bunday ko’pag’zalılardın’ ko’pligi bos ko’plik bolmaydı. Haqıyqatında da, matritsalar algebrasınan Gamil’ton- Kelidin’ mına og’ada a’hmiyetli teoreması ma’lim: egerde $P_n(\lambda)$ A matritsasının’ menshikli ko’pag’zalısı bolsa, onda $P_n(A) = 0$ boladı, yag’nıy sha’rtli tu’rde aytqanda, ha’r qanday kvadrat matritsa o’zinin’ menshikli ko’pag’zalısının’ koren’i boladı.

Bul teoremadan ha’r qanday p -ta’rtipli kvadrat matritsa p -da’rejeli nol’ge aylandırıwshı ko’pag’zalıg’a iye bolatug’ını kelip shıg’adı. Basqasha aytqanda, matritsanın’ menshikli ko’pag’zalısı, onın’ nol’ge aylandırıwshı ko’pag’zalısı boladı.

Bunday ko’pag’zalı tek birew g’ana bolmaydı. O’ytkeni, ma’selen, $\varphi(\lambda)$ usınday ko’pag’zalı bolsa, onda $\varphi(\lambda)$ ge bo’linetug’ın ha’r qanday ko’pag’zalı bunday qa’siyetke iye boladı. A kvadrat matritsası koren’i bolatug’ın, en’ kishi da’rejeli $\psi(\lambda)$ ko’pag’zalısı bul matritsanın’ *eq kishi (minimal) kopag’zalısı* dep ataladı. Bul ko’pag’zalının’ ayırım baslı qa’siyetlerin atap o’temiz.

1. Egerde $f(A)=0$ bolsa, onda $f(\lambda)$ ko’pag’zalısı A matritsasının’ *en’ kishi* $\psi(\lambda)$ ko’pag’zalısına bo’linedi. Hakıyqatında da, meyli

$$f(\lambda)=\psi(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$$

bolsın. Bunda qaldıq $r(\lambda)$ ko’pag’zalısının’ da’rejesi $\psi(\lambda)$ ko’pag’zalısının’ da’rejesinen kishi. Bul ten’lik tek $r(\lambda)\equiv 0$ bolg’anda g’ana mu’mkin bolatug’ının ko’rsetemiz. Bunın’ ushın son’g’ı ten’likke λ nın’ ornın’a A matritsasın qoyamız:

$$f(A)=\psi(A)q(A)+r(A)=0$$

Bunnan $r(A)=0$ boladı, yag’nıy A matritsası $r(\lambda)$ ko’pag’zalısının’ da koren’i boladı. Bul tek $r(\lambda)\equiv 0$ bolg’anda g’ana mu’mkin boladı. O’ytkeni, uyg’arıwımız boyınsha $\psi(\lambda)$ ko’pag’zalısı A matritsasının’ en’ kishi da’rejeli nol’ge aylandırıwshı ko’pag’zalısı boladı.

2. Matritsanın’ en’ kishi ko’pag’zalısının’ barlıq koren’leri, bul matritsanın’ menshikli ma’nisleri boladı.

Bul qa’siyetinin’ durıslıg’ı 1-qa’siyetinen tikkeley kelip shıg’adı. O’ytkeni, 1-qa’siyeti boyınsha matritsanın’ menshikli ko’pag’zalısı onın’ en’ kishi ko’pag’zalısına pu’tinley bo’linedi. Sonlıqtan matritsanın’ en’ kishi ko’pag’zalısının’ koren’leri, onın’ menshikli ma’nisleri boladı. Sonday aq, matritsanın’ o’z ara ha’r qıylı barlıq menshikli ma’nisleri, onın’ en’ kishi ko’pag’zalısının’ koren’leri bolatug’ının da an’sat tekserip ko’riwge boladı.

3. Matritsanın’ en’ kishi ko’pag’zalısı tek birew (jalg’ız) g’ana boladı.

Meyli, kersinshe, $\psi_1(\lambda)$ ha'm $\psi_2(\lambda)$ *A* matritsasının' eki ha'r qıylı en' kishi ko'pag'zalıları bolsın. Sonda da'rejesi olardın' da'rejelerinen kishi bolg'an $q(\lambda)=\psi_1(\lambda)-\psi_2(\lambda)$ ko'pag'zalısıda bul matritsanın' nol'ge aylandırıwshı ko'pag'zalısı boladı. Bul tek $q(\lambda)=0$ bolg'anda, yag'nıy $\psi_1(\lambda)\equiv\psi_2(\lambda)$ bolg'anda g'ana mu'mkin boladı.

O'ytkeni, $\psi_1(\lambda)$ ha'm $\psi_2(\lambda)$ keltirilgen ko'pag'zalıları, *A* matritsası koren'i bolatug'ın ko'pag'zalılardın' arasında en' kishi da'rejege iye ko'pag'zalılar boladı.

Aldag'ı waqıtları paydalanılatug'ın ja'ne bir jan'a tu'sinikti kirgizemiz. Meyli, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ bazı bir nol'den o'zgeshe vektor bolsın. Sonda $g(A)y=0$ ten'ligin qanaatlandıratug'ın, barlıq keltirilgen $g(\lambda)$ ko'pag'zalılarının' ko'pligin qaraymız. Bul ko'plikke, dara jag'dayda, *A* matritsasının' nol'ge aylandırıwshı barlıq ko'pag'zalıları derek boladı. Sonın' menen birge, $g(A)\neq 0$ sha'rtin qanaatlandıratug'ın $g(\lambda)$ ko'pag'zalıları da derek bolıwı mu'mkin. Ko'pag'zalılardın' bunday ko'pliginen en' kishi da'rejeli $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısın saylap alamız. Bunday $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısı, *A* matritsasının' *y* vektorın *nol'ge aylandırıwshı en' kishi ko'pag'zalısı* dep ataladı. Bul ko'pag'zalı, matritsanın' en' kishi $\psi(\lambda)$ ko'pag'zalısı qanday qa'siyetlerge iye bolsa, tap sonday qa'siyetlerge iye boladı.

1. Egerde $g(A)=0$ bolsa, onda $g(\lambda)$ ko'pag'zalısı $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalına pu'tinley bo'linedi.

2. $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısının' barlıq koren'leri *A* matritsasının' menshikli ma'nisleri boladı.

Haqıyqatında da, 1-qa'siyeti boyınsha *A* matritsasının' menshikli ko'pag'zalısı $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısına eseli boladı. *A* matritsasının' en' kishi $\psi(\lambda)$ ko'pag'zalısınan o'zgeshe, $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısının' koren'lerinin' ko'pligi, *ulıwma* jag'dayda, *A* matritsasının' o'z ara ha'r qıylı menshikli ma'nislerinin' ko'pliginin' *tek bir u'lesin* g'ana duziwi mu'mkin.

3. *A* matritsasının' *u* vektorın nol'ge aylandırıwshı en' kishi ko'pag'zalısı tek birew g'ana boladı.

Algebra kursınan keltirilgen bul mag'lıwmatlar to'mende A.N.Krılov usılının' esaplaw algoritmin tiykarlag'anda ken' paydalanıladı.

1.3.2. Matritsanın' menshikli ko'pag'zalısın jasaw

Da'slep, o'lshemi berilgen *A* kvadrat matritsası menen sa'ykeslengen, qa'legen $y = y^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)},\right)' = 0$ vektorı saylap alınadı. Ko'pshilik jag'daylarda bunday vektor esabında $(1, 0, 0, ..., 0)'$ vektorın aladı. Bul $y^{(0)}$ vektorı boyınsha $y^{(1)} = Ay^{(0)}, y^{(2)} = Ay^{(1)} = A^2 y^{(0)}, y^{(3)} = A^3 y^{(0)}$ h.t.b. vektorlarının' izbe-izligi jasaladı. Ko'rsetilgen protsess, usılayınsha jasalg'an sızıqlı baylanıssız vektorlardın' sızıqlı birikpesi (kombinatsiyası) bolg'an vektor kelip shıqqansha, yag'nıy

$$y^{(m)} = q_1 y^{(m-1)} + q_2 y^{(m-2)} + ... + q_m y^{(0)} \quad \left(\sum_{i=1}^{m} q_i^2 > 0, m \le n\right) \tag{1.3.1}$$

ten'ligi durıs bolg'ansha dawam etedi. Is ju'zinde (I) degi *t* sanın' ha'm $q_1, q_2, ...q_m$ koeffitsientlerin anıqlaw ushın to'mendegilerdi orınlaydı.

Ba'rinende burın (1.3.1) de m=n dep uyg'arıp, sheginde mumkin bolg'an mına sızıqlı birikpe alınadı:

$$y^{(n)} = q_1 y^{(n-1)} + q_2 y^{(n-2)} + ... + q_n y^{(0)} \tag{1.3.2}$$

Bul vektorlıq ten'lik mına *p* san ten'liklerine ten' ku'shli boladı;

$$\begin{aligned}
&q_1 y_1^{(n-1)} + q_2 y_1^{(n-2)} + \ldots + q_n y_1^{(0)} = y_1^{(n)},\\
&q_1 y_2^{(n-1)} + q_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + q_n y_2^{(0)} = y_2^{(n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&q_1 y_n^{(n-1)} + q_2 y_n^{(n-2)} + \ldots + q_n y_n^{(0)} = y_n^{(n)},
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Bunda $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ sanları $y^{(i)}$ vektorının' sa'ykes koordinataları. Sonda (1.3.3) ten'likleri $q_1, q_2, \ldots, q_n$ belgisizli sızıqlı algebralıq ten'lemelerinin' bir tekli emes sistemasın du'zedi. Bul sistemanın' anıqlawshısı

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_2^{(0)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(0)} \end{vmatrix}$$

tek $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(0)}$ vektorları sızıqlı baylanıssız bolg'anda g'ana nol'den o'zgeshe boladı. O'ytkeni, bul anıqlawshının' bag'anaları ko'rsetilgen vektorlardın' koordinatalarınan du'zilgen. Usı ha'm tek usı jag'dayda g'ana (1.3.3) sisteması tek bir sheshimge iye boladı. A'dette Δ anıqlawshısının' nol'den o'zgeshe yamasa nol'ge ten' bolatug'ının anıqlaw ushın (1.3.3) sistemasın Gauss usılı menen sheshedi.

Egerde Gauss usılının' tuwrı ju'risinin', barlıq *p* adımın orınlaw mumkin bolsa, onda (1.3.3) sisteması to'mendegi u'shmu'yeshli ko'rinisine keltiriledi:

$$\begin{aligned}
q_1 \quad + c_{12} q_2 \quad + c_{13} q_3 \quad + \ldots \quad + c_{1n} q_n \quad &= d_1,\\
q_2 \quad + c_{23} q_3 \quad + \ldots \quad + c_{2n} q_n \quad &= d_2,\\
\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad &\ldots\ldots\ldots\\
q_n \quad &= d_n
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Bunnan $\Delta \neq 0$ ha'm $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots., y^{(n-1)}$ vektorlarının' sızıqlı baylanıssız bolatug'ını kelip shıg'adı. Bul jag'dayda, Gauss usılının' keri ju'risinde son'g'ı sistemadan, (1.3.2) sızıqlı birikpesinin’ barlıq $q_n, q_{n-1}, ..., q_1$ koeffitsientleri izbe-iz bir ma’nisli anıqlanadı.

Egerde Gauss usılının’ tek $t<p$ adımın g’ana orınlaw mu’mkin bolsa, onda tek da’slepki $y^{(0)}, y^{(1)}, ..., y^{(m-1)}$ vektorları g’ana sızıqlı baylanıssız boladı. Bul jag’dayda $y^{(m)}$ vektorı (1.3.1) sızıqlı birikpesi tu’rinde ko’rsetiledi. Sonda (1.3.1) vektorlıq ten’lik to’mendegi p san ten’diklerine ten’ ku’shli boladı:

$$\begin{aligned} &q_1 y_1^{(m-1)} + q_2 y_1^{(m-2)} + ... + q_m y_1^{(0)} = y_1^{(m)}, \\ &q_1 y_2^{(m-1)} + q_2 y_2^{(m-2)} + ... + q_m y_2^{(0)} = y_2^{(m)}, \\ &.. \\ &q_1 y_n^{(m-1)} + q_2 y_n^{(m-2)} + ... + q_m y_n^{(0)} = y_n^{(m)}, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Uslayınsha kelip shıkqan (1.3.5) ten’lemeleri $q_1, q_2, ..., q_m \quad (m < n)$ belgisizli sızıqlı algebralıq ten’lemelerinin’ sistemasın du’zedi. Bul sistemanın’ matritsasının’ rangi t ge ten’ boladı. Sonlıqtan og’an Gauss usılının’ tuwrı ju’risin qollanıp, onı mına u’shmu’yeshli ko’rinisine keltiriwge boladı:

$$\begin{array}{llllll} q_1 & +c_{12}q_2 & +c_{13}q_3 & +... & +c_{1m}q_m & = d_1, \\ & \quad q_2 & +c_{23}q_3 & +... & +c_{2m}q_m & = d_2, \\ ... & .... & .... & ..... & .... & .... \\ & & & & q_m & = d_m \end{array} \tag{1.3.6}$$

Gauss usılının’ keri ju’risinde (1.3.6) sistemasınan (1.3.1) sızıqlı birikpesinin’ $q_m, q_{m-1}, ..., q_1$ koeffitsientleri izbe-iz bir ma’nisli tabıladı.

Solay etip, (1.3.1) ha’m (1.3.2) sızıqlı birikpelerinin’ ja’rdeminde matritsanın’ menshikli ko’pag’zalısın *(t = p* bolg’anda) ha’m bul ko’pag’zalının’ bo’liwshisi bolatug’ın ko’pag’zalını($t < p$ bolg’anda) tikkeley jazıwg’a boladı. Da’slep $t = p$ bolg’an jag’daydı qaraymız. Bul jag’dayda (1.3.2) sızıqlı birikpesinin’ $q_1, q_2, ..., q_n$ koeffitsientleri A matritsasının’

$$P_n(A) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - ... - p_n$$

menshikli kopag'zalısının' sa'ykes $p_1, p_2, \ldots p_n$ koeffitsientlerine ten', yag'nıy $q_i = p_i \ (i=1,2,\ldots,n)$ boladı. Haqıyqatında da, Gamil'ton-Keli teoreması boyınsha

$$P_n(A) = A^n - p_1 A^{n-1} - p_2 A^{n-2} - \ldots - p_n E = 0$$

boladı. Bul ten'liktin eki jag'ın on' jag'ınan $y^{(0)}$ vektorına ko'beytemiz ha'm jasawımız boyınsha kelip shıg'atug'ın

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)} \quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{1.3.7}$$

ten'liginen paydalanamız. Sonda mına na'tiyjege kelemiz:

$$y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y^{(0)}$$

Ekinshi jaqtan, (1.3.2) boyınsha

$$y^{(n)} = q_1 y^{(n-1)} + q_2 y^{(n-2)} + \ldots + q_n y^{(0)}$$

boladı. Demek, bulardan

$$(p_1 - q_1) y^{(n-1)} + (p_2 - q_2) y^{(n-2)} + (p_n - q_n) y^{(0)} = 0$$

ten'digi kelip shıg'adı. Biraqta $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ vektorları sızıqlı baylanıssız bolg'anlıqtan, son'g'ı ten'lik tek $q_i = p_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$ bolg'anda g'ana mu'mkin boladı.

Solay etip, *t=p* bolg'an jag'dayda jasalg'an (1.3.2) sızıqlı birikpesinin' ko'rinisi boyınsha, *A* matritsasının' $P_n(\lambda)$ menshikli ko'pag'zalısın tikkeley jazıwg'a boladı. Bunnan son' $P_n(\lambda) = 0$ ten'lemesin sheship, bul matritsanın' barlıq menshikli ma'nislerin tabadı.

Egerde *t<p* bolsa, onda (1.3.1) sızıqlı birikpesi alınadı. Bul jag'dayda (1.3.7) ni esapqa alıp, (1) vektorlıq ten'ligin to'mendegishe jazıwg'a boladı:

$$\left(A^m - q_1 A^{m-1} - q_2 A^{m-2} - \ldots - p_m E\right) y^{(0)} = 0$$

yamasa

$$\varphi(A)y^{(0)}=0,$$

bunda

$$\varphi(\lambda)=\lambda^m-q_1\lambda^{m-1}-q_2\lambda^{m-2}-...-q_m$$

ko'rinisindegi ko'pag'zalı boladı. Bul $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısının' A matritsasının' $y^{(0)}$ vektorın nol'ge aylandırıwshı ko'pag'zalısı bolatug'ınına an'sat iseniwge boladı. Haqıyqatında da, egerde da'rejesi s<m bolg'an ha'm $g(A)y^{(0)}=0$ ten'ligin qanaatlandıratug'ın $g(\lambda)$ ko'pag'zalısı bar bolsa, onda bul sha'rt $y^{(0)}, ..., y^{(s-1)}, y^{(s)}$ vektorlarının' sızıqlı baylanıslı bolatug'ının an'latadı. Al bul $y^{(0)}, ..., y^{(m-2)}, y^{(m-1)}$ vektorlarının' sızıqlı baylanıssızlıg'ına qarama-qarsı keledi.

Demek, $t<p$ bolg'anda A matritsasının' menshikli ko'pag'zalısının' bo'liwshisi bolg'an, $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısına iye bolamız. Sonlıqtan, bul jag'dayda, $\varphi(\lambda)=0$ ten'lemesin sheship, A matritsasının' menshikli ma'nislerinin' tek bir u'lesin g'ana taba alamız. Baslang'ısh $y^{(0)}$ vektorın o'zgertip alıp, bul usıl menen matritsanın' basqa menshikli ma'nislerin de anıqlawg'a boladı.

1.3.3. Matritsanin' menshikli vektorlarin tabiw

A matritsasının' λ_i menshikli ma'nisi tabılg'annan son', bul matritsanın' og'an sa'ykes keletug'ın menshikli vektorın esaplaw ma'selesi, sızıqlı algebralıq ten'lemelerinin' bir tekli

$$(A-\lambda_i E)x=0 \tag{1.3.8}$$

sistemasın sheshiwge keltiriledi. A.N.Krılov usılında, ayırım jag'daylarda, (1.3.8) sistemasın sheshpesten, esaplawlardın' aralıq na'tiyjelerinen paydalanıp, matritsanın' λ_i menshikli ma'nisine sa'ykes keletug'ın menshikli vektorların anıqlawg'a mu'mkinshilik tuwadı. Sonlıqtan, bunday jag'daylarda, menshikli ma'nisler ma'selesinin' son'g'ı etabın sheshiwge kerekli bolg'an esaplaw jumıslarının' ko'lemi a'dewir azayadı.

Meyli, *A* matritsasının' $y^{(0)}$ vektorın nol'ge aylandırıwshı

$$\varphi(\lambda)=\lambda^m-q_1\lambda^{m-1}-q_2\lambda^{m-2}-\ldots-q_m$$

ko'pag'zalısının' λ_i koreni tabılg'an bolsın (bunnan bılayg'ı talqılawlar $t = p$ ha'm $t<p$ jag'dayları ushın da durıs boladı). Sonda, *A* matritsasının' bul menshikli ma'nisine sa'ykes keletug'ın $x^{(i)}$ menshikli vektorın, $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısın jasag'anda tabılg'an, sızıqlı baylanıssız $y^{(0)}, \ldots, y^{(m-2)}, y^{(m-1)}$ vektorlarının' sızıqlı birikpesi esabında izleymiz:

$$x^{(i)}=\beta_{i1}y^{(m-1)}+\beta_{i2}y^{(m-2)}+\ldots+\beta_{im}y^{(0)} \tag{1.3.9}$$

Bundag'ı β_{ij} $(j=1, 2,\ldots,m)$ koeffitsientleri

$$Ax^{(i)}=\lambda_i x^{(i)} \tag{1.3.10}$$

ten'ligi orınlang'anday etip saylap alınadı.

Bunnan son', (1.3.9) vektorlıq ten'ligin shep jag'ınan *A* matritsasına ko'beytip ha'm (1.3.7), (1.3.10) ten'liklerin esapka alıp, mına na'tiyjege kelemiz:

$$\begin{gathered}\lambda_i\left(\beta_{i1}y^{(m-1)}+\beta_{i2}y^{(m-2)}+\ldots+\beta_{im}y^{(0)}\right)\\=\beta_{i1}y^{(m)}+\beta_{i2}y^{(m-1)}+\ldots+\beta_{im}y^{(1)}\end{gathered} \tag{1.3.11}$$

Bunnan tısqarı, $\varphi(A)y^{(0)}=0$ ekenligine, yag'nıy

$$y^{(m)}=q_1y^{(m-1)}+q_2y^{(m-2)}+\ldots+q_my^{(0)}$$

ten'ligine itibar berip, (1.3.11) ni to'mendegishe jazıwg'a boladı:

$$\lambda_i\left(\beta_{i1}y^{(m-1)}+\beta_{i2}y^{(m-2)}+\ldots+\beta_{im}y^{(0)}\right)=\beta_{i1}\left(q_1y^{(m-1)}+q_2y^{(m-2)}+\ldots+q_my^{(0)}\right)+$$
$$+\beta_{i2}y^{(m-1)}+\beta_{i3}y^{(m-2)}+\ldots+\beta_{im}y^{(1)}$$

yamasa

$$\begin{gathered}\left(q_m\beta_{i1}-\lambda_i\beta_{im}\right)y^{(0)}+\left(q_{m-1}\beta_{i1}+\beta_{im}-\lambda_i\beta_{im-1}\right)y^{(1)}+\\\left(q_{m-2}\beta_{i1}+\beta_{im-1}-\lambda_i\beta_{im-2}\right)y^{(2)}+\ldots+\left(q_1\beta_{i1}+\beta_{i2}-\lambda_i\beta_{i1}\right)y^{(m-1)}=0\end{gathered}$$

Bunda $y^{(0)}, y^{(1)}, ..., y^{(m-1)}$ vektorları sızıqlı baylanıssız bolg'anlıqtan, son'g'ı ten'liktin' barlıq koeffitsientleri nol'ge ten' bolıwı kerek, yag'nıy mına ten'likler orınlanıwı kerek:

$$\begin{aligned}
&q_m\beta_{i1} - \lambda_i\beta_{im} = 0,\\
&q_{m-1}\beta_{i1} + \beta_{im} - \lambda_i\beta_{im-1} = 0,\\
&q_{m-2}\beta_{i1} + \beta_{im-1} - \lambda_i\beta_{im-2} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&q_1\beta_{i1} + \beta_{i2} - \lambda_i\beta_{i1} = 0
\end{aligned}$$

Bul ten'liklerdin' en' son'g'ısınan baslap, izbe-iz (1.3.9) β_{ij} $(j = 1, 2, ..., m)$ koeffitsientlerin anıqlaw ushın mına ten'liklerge iye bolamız:

$$\begin{aligned}
&\beta_{i2} = (\lambda_i - q_1)\beta_{i1},\\
&\beta_{i3} = (\lambda_i^2 - q_1\lambda_i - q_2)\beta_{i1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\beta_{im} = (\lambda_i^{m-1} - q_1\lambda_i^{m-2} - q_2\lambda_i^{m-3} - ... - q_{m-1})\beta_{i1},\\
&(\lambda_i^m - q_1\lambda_i^{m-1} - q_2\lambda_i^{m-2} - ... - q_m)\beta_{i1} = 0
\end{aligned}$$

Son'g'ı ten'lik β_{i1} din' qa'legen shekli ma'nisleri ushın durıs boladı. O'ytkeni,

$$\varphi(\lambda_i) = \lambda_i^m - q_1\lambda_i^{m-1} - q_2\lambda_i^{m-2} - ... - q_m = 0$$

boladı. Ma'selen, $\beta_{i1} = 1$ dep uyg'arıp, (1.3.9) sızıqlı birikpesinin' izlenip atırg'an koeffitsientlerin anıqlaw ushın to'mendegi formulalarg'a kelemiz:

$$\begin{aligned}
&\beta_{i1} = 1,\\
&\beta_{i2} = \lambda_i - q_1,\\
&\beta_{i3} = \lambda_i^2 - q_1\lambda_i - q_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\beta_{im} = \lambda_i^{m-1} - q_1\lambda_i^{m-2} - q_2\lambda_i^{m-3} - ... - q_{m-1}.
\end{aligned}$$

Joqarıda ko'rsetilgen esaplawlardı $\varphi(\lambda)$ ko'pag'zalısının' barlıq koren'leri ushın orınlap, *A* matritsasının' bir neshe menshikli vektorların tabıwg'a boladı. Egerde olar A matritsasının’ sızıqlı baylanıssız menshikli vektorlarının’ tolıq sistemasın du’zbese, onda jetpey turg’an menshikli vektorların anıqlaw ushın jan’a $y^{(0)}$ baslang’ısh vektorın saylap alıp, ko’rsetilgen esaplawlardı bastan baslap, qaytadan orınlaw kerek boladı.

Mısalı. A.N.Krılov usılın qollanıp, to’mendegi matritsanın’ menshikli ma’nislerin ha’m olarg’a sa’ykes menshikli vektorların tabın’:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.3.13}$$

SHeshiliwi. 1)Da’slep

$$P_4(\lambda)=\lambda^4-p_1\lambda^3-p_2\lambda^2-p_3\lambda-p_4 \tag{1.3.14}$$

menshikln ko’pag’zalısının’, koeffitsientlerin anıqlaymız. Bul koeffitsientler (1.3.3) sistemasının’ sheshimi boladı. O’z gezeginde, onın’ koeffitsientleri ha’m saltan’ ag’zaları (1.3.7) formulası boyınsha anıqlanadı. Baslang’ısh vektor esabında, ma’selen $y^{(0)}=(0,0,0,1)'$ vektorın saylan alıp, (1.3.7) formulası boyınsha izbe-iz mına vektorlardı jasaymız:

$$y^{(1)}=Ay^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}=(2,-4,-2,-1)', \tag{1.3.15}$$

$$y^{(2)}=Ay^{(1)}=(6,-4,4,1)',\ y^{(3)}=Ay^{(2)}=(4,4,-4,3)',$$

$$y^{(4)}=Ay^{(3)}=(10,8,10,5)'.$$

2) Saylap alıng’an $y^{(0)}$ vektorınan ha’m jasalg’an (1.3.15) vektorlarınan paydalanıp, mına matritsalıq ten’lemeni du’zemiz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Bunnan, (1.3.14) menshikli ko'pag'zalısının' koeffitsientlerin anıqlaw ushın sızıqlı ten'lemelerdin' mına sistemasına iye bolamız:

$$\begin{aligned} &4p_1 + 6p_2 + 2p_3 = 10, \\ &4p_1 - 4p_2 - 4p_3 = 8, \\ &-4p_1 + 4p_2 - 2p_3 = 10, \\ &3p_1 + p_2 - p_3 + p_4 = 5. \end{aligned}$$

3) Bul sistemanı Gauss usılının', birden-bir bo'liw sxeması boyınsha sheshemiz. Esaplawlardın' na'tiyjeleri to'mendegi 1-kestede keltirilgen.

Kesteden $p_1 = -1,\ p_2 = -2,\ p_3 = 3,\ p_4 = -1$ ekenligi kerinip tur. Sonlıqtan berilgen matritsanın' menshikli ko'pag'zalısı

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 + \lambda - 1)$$

ko'rinisinde jazıladı. Bunnan $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 \approx 0{,}618,\ \lambda_4 \approx -1{,}618$ ma'nislerine iye bolamız.

Ulıwma jag'dayda, matritsanın' menshikli ko'pag'zalısının' koren'lerin tabıw ushın juwıq usıllardın' birewi (a'piwayı iteratsiyalar usılı, N'yuton usılı, xordalar usılı h.t.b.) qollanıladı.

4) (1.3.13) matritsasının' tabılg'an mekshikli ma'nislerene sa'ykes keletug'ın menshikli vektorların tabıw ushın (1.3.9), (1.3.12) formulalarınan paydalanamız.

a) (1.3.12) formulasında $p_i = q_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ ekenligin esapqa alıp, $i = 1$ bolg'anda $\beta_{11} = 1,\ \beta_{12} = 0,\ \beta_{13} = -2,\ \beta_{14} = 1$ ma'nislerine iye bolamız.

Sonda $y^{(0)},\ y^{(1)},\ y^{(2)},\ y^{(3)}$ vektorlarının' joqarıda tabılg'an an'latpalarınan paydalanıp, (1.3.9) formulası boyınsha mına na'tiyjege kelemiz:

$$x^{(1)} = x^{(2)} = y^{(3)} + 0\cdot y^{(2)} - 2y^{(1)} + y^{(0)} =$$
$$= (4,4,-4,3)' - 2(2,-4,-2,-1)' + (0,0,0,1)' = (0,12,0,6)'$$

1-keste

p_1	p_2	p_3	p_4	Saltan' ag'zaları	$\sum$
[2]	3	1	0	-5	1
1	-1	-1	0	-2	-3
-2	2	-1	0	-5	-6
3	-1	-1	1	-5	-3
1	1,5	0,5	0	-2,5	0,5
	[-2,5]	-1,5	0	0,5	-3,5
	5	0	0	-10	-5
	-5,5	-2,5	1	2,5	-4,5
	1	0,6	0	-0,2	1,4
		[-3]	0	-9	-12
		0,8	1	1,4	3,2
		1	0	3	44
			[1]	**-1**	**0**
			1	$p_4 = -1$	$\overline{p_4} = 0$
		1		$p_3 = 3$	$\overline{p_3} = 4$
	1			$p_2 = -2$	$\overline{p_2} = -1$

1				$p_1 = -1$	$\overline{p_1} = 0$

b) (1.3.12) formulasında $i = 3$ bolg’anda $\beta_{31} = 1$, $\beta_{32} = -0,382$, $\beta_{33} = -2,236$, $\beta_{34} = 1,618$ ma’nisleri kelip shıg’adı. Sonlıqtan (1.3.9) formulası boyınsha

$$x^{(3)} = y^{(3)} - 0,382 y^{(2)} - 2,236 y^{(1)} + 1,618 y^{(0)} =$$
$$= (-2,764; 14,472; -1,056; 7,236)'$$

menshikli vektorına iye bolamız.

v) (1.3.12) formulasında $i = 4$ bolg’anda $\beta_{41} = 1$, $\beta_{42} = -2,618$, $\beta_{43} = 2,236$, $\beta_{44} = -0,618$ boladı. Sonda, (1.3.9) formulası boyınsha kelesi menshikli vektorı to’mendegishe anıqlanadı:

$$x^{(4)} = y^{(3)} - 2,618 y^{(2)} + 2,236 y^{(1)} - 0,618 y^{(0)} =$$
$$= (-7,236; 5,528; -18,944; 2,764)'$$

Tabılg’an menshikli vektorlardı moduli boyınsha en’ u’lken du’ziwshisine bo’lip normalasaq, onda sa’ykes mına vektorlar kelip shıg’adı:

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(2)} = \left(0;1;0;0,5\right)'; \ \tilde{x}^{(3)} = \left(-0,190989;1;-0,072968;0,500000\right)';$$
$$\tilde{x}^{(4)} = \left(0,381968;-0,291807;1;-0,14904\right)'.$$

II BAP. MATRITSALARDIN' MENSHIKLI MA'NISLERIN HA'M MENSHIKLI VEKTORLARIN LANTSOSH USILI MENEN ESAPLAW

2.1. K. Lantsosh usılı

Bul usıl A.N.Krılov usılına uqsas bolıp, ol erkli tu'rde saylap alıng'an $y^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)' \neq 0$ vektorın da'slepki berilgen A matritsası menen izbe-iz iteratsiyalawdan kelip shıqqan, yag'nıy

$$y^{(1)} = Ay^{(0)},\ y^{(2)} = Ay^{(1)} = A^2 y^{(0)},\ y^{(3)} = A^3 y^{(0)}, \ldots, y^{(m)} = A^m y^{(0)} \quad (2.1)$$

ten'likleri menen anıqlang'an vektorlardın' nol'ge ten' sızıqlı birikpesin jasawg'a tiykarlang'an. Biraqta, Krılov usılında (2.1) vektorlarının' bunday sızıqlı birikpesin jasaw sızıqlı algebralıq ten'lemelerinin' sistemasın sheshiw menen baylanıslı. Al, Lantsosh usılında (2.1) vektorlarının' nol'ge ten' sızıqlı birikpesin jasaw ushın vektorlardı ortogonallastırıw protsessi qollanıladı. Bunda ortogonallastırıw protsessi, sa'ykes vektordı A matritsasına ha'r bir ko'beytiwden son', orınlanadı.

2.1. Lantsosh usılının' tiykarg'ı esaplaw algoritmi

Endi Lantsosh usılının' esaplaw algoritmin bayanlaymız. Qa'legen $y^{(0)} \neq 0$ vektorın saylap alıp, og'an ortogonal' bolg'an

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} - \alpha_{10} y^{(0)} \quad (2.2)$$

vektorı jasaladı. Bunday vektordı jasaw barqulla mu'mkin boladı. Bunın' ushın $y^{(0)}$ ha'm $y^{(1)}$ vektorlarının', ortogonal' bolıw sha'rtinen, yag'nıy $\left(y^{(0)},\ y^{(1)}\right) = 0$ ten'liginin' orınlanıwınan (2.2) degi α_{10} koeffitsienti anıqlanadı:

$$\alpha_{10} = \frac{\left(Ay^{(0)}, y^{(0)}\right)}{\left(y^{(0)}, y^{(0)}\right)}$$

Egerde, dara jag'dayda, $y^{(1)} = 0$ bolsa, onda $y^{(0)}$ ha'm $Ay^{(0)}$ vektorları sızıqlı baylanıslı bolad'g. Sonlıqtan

$$\varphi_1(\lambda)=\lambda-\alpha_{10}$$

ko’pag’zalısı *A* matritsasının’ $y^{(0)}$ vektorın nol’ge aylandırıwshı en’ kishi ko’pag’zalısı boladı. O’ytkeni, saylap alıwımız boyınsha $y^{(0)}\neq 0$ ha’m

$$\varphi_1(A)y^{(0)}=(A-\alpha_{10}E)y^{(0)}=y^{(1)}=0$$

boladı. Bunday ko’pag’zalının’ koren’leri *A* matritsasının’ menshikli ma’nisleri bolatug’ını joqarıdan ma’lim. Al, egerde $y^{(1)}\neq 0$ bolsa, onda $Ay^{(1)}$ vektorı jasalıp, jan’a

$$y^{(2)}=Ay^{(1)}-\alpha_{21}y^{(1)}-\alpha_{20}y^{(0)}$$

vektorı du’ziledi. Bundag’ı α_{21} ha’m α_{20} koeffitsientleri $y^{(2)}$ vektorının’ $y^{(0)}$ ha’m $y^{(1)}$ vektorlarına ortogonal’ bolıw sha’rtlerinen anıqlanadı. Sonda $\left(y^{(2)},\ y^{(1)}\right)=0$, $\left(y^{(2)},\ y^{(0)}\right)=0$ sha’rtlerinen

$$\alpha_{21}=\frac{\left(Ay^{(1)},y^{(1)}\right)}{\left(y^{(1)},y^{(1)}\right)},\quad \alpha_{20}=\frac{\left(Ay^{(1)},y^{(0)}\right)}{\left(y^{(0)},y^{(0)}\right)}$$

ma’nisleri kelip shıg’adı.

Egerde usınday usıl menen jasalg’an $y^{(2)}$ vektorı nol’ge ten’ bolsa, onda

$$Ay^{(1)}-\alpha_{21}y^{(1)}-\alpha_{20}y^{(0)}=0$$

ten’ligi $y^{(0)},y^{(1)}=Ay^{(0)},y^{(2)}=Ay^{(1)}=A^2y^{(0)}$ vektorlarının’ sızıqlı baylanıslı ekenligin an’latadı ha’m

$$\varphi_2(\lambda)=(\lambda-\alpha_{21})(\lambda-\alpha_{10})-\alpha_{20}=(\lambda-\alpha_{21})\varphi_1(\lambda)-\alpha_{20}$$

ko’pag’zalısı *A* matritsasının’ en’ kishi ko’pag’zalısının’ bo’liwshisi boladı. Sonlıqtan bul ko’pag’zalının’ koren’leri *A* matritsasının’ menshikli ma’nisleri boladı. Al, egerde $y^{(2)}\neq 0$ bolsa, onda ortogonallastırıw protsessi dawam ettiriledi.

Meyli, bunday ortogonallastırıw protsessinin' $m-1$ adımı orınlanıp, da'slepki saylap alıng'an $y^{(0)} \neq 0$ vektorı boyınsha

$$\left(y^{(t)}, y^{(j)}\right)=0 \quad \left(i, j=0,1,2,\ldots,m-1; i \neq j\right)$$

ten'liklerin qanaatlandıratug'ın, nol'den o'zgeshe $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m-1)}$ vektorları jasalg'an bolsın. Bunnan son'

$$y^{(m)} = Ay^{(m-1)} - \alpha_{mm-1} y^{(m-1)} - \alpha_{mm-2} y^{(m-2)} - \ldots - -\alpha_{m0} y^{(0)} \qquad (2.3)$$

vektorı jasaladı. Bunın' ushın (2.3) degi $\alpha_{mm-1}, \alpha_{mm-2}, \ldots, \alpha_{m0}$ koeffitsientleri $y^{(m)}$ vektorınının' $y^{(0)}$, $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m-1)}$ vektorlarınının' ha'r birine ortogonal' bolıw sha'rtlerinen tabıladı. Solay etip, $\left(y^{(m)}, y^{(i)}\right)=0 \quad \left(i=0,1,2,\ldots,m-1\right)$ ortogonal' bolıw sha'rtlerinen (2.3) degi α_{mi} koeffitsientleri to'mendegishe anıqlanadı:

$$\alpha_{mi} = \left(Ay^{(m-1)}, y^{(i)}\right) \Big/ \left(y^{(i)}, y^{(i)}\right) \quad \left(i=0,1,2,\ldots,m-1\right) \qquad (2.4)$$

Bunday $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ vektorları menen bir qatarda, to'mendegi ko'pag'zalılar da jasaladı:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(\lambda)=1,\\
&\varphi_1(\lambda)=(\lambda-\alpha_{10})\varphi_0(\lambda),\\
&\varphi_2(\lambda)=(\lambda-\alpha_{21})\varphi_1(\lambda)-\alpha_{20}\varphi_0(\lambda),\\
&\varphi_3(\lambda)=(\lambda-\alpha_{32})\varphi_2(\lambda)-\alpha_{31}\varphi_1(\lambda)-\alpha_{30}\varphi_0(\lambda),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_m(\lambda)=(\lambda-\alpha_{mm-1})\varphi_{m-1}(\lambda)-\alpha_{mm-2}\varphi_{m-2}(\lambda)-\alpha_{m0}\varphi_0(\lambda)
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Biraqta, n o'lshemli vektorlıq ken'islikte n nen artıq emes, o'z ara ortogonal' vektorlar bar bolg'anlıqtan, bunday ortogonallastırıw protsessinin' bazı bir m-adımında *(t* $\leq$ *p)*, minnetli tu'rde $y^{(m)}$ nol' vektorı kelip shıg'adı. Sonlıqtan

$$Ay^{(m-1)} - \alpha_{mm-1} y^{(m-1)} - \alpha_{mm-2} y^{(m-2)} - \ldots - \alpha_{m0} y^{(0)} = 0 \qquad (2.6)$$

ten'ligi $y^{(0)},\ Ay^{(0)},\ A^2y^{(0)},\ ...,\ A^m y^{(0)}$ vektorlarının' sızıqlı baylanıslı bolatug'ının an'latadı. Usı sebepli, bug'an sa'ykes $\varphi_m(\lambda)$ ko'pag'zalısı *A* matritsasının' en' kishi ko'pag'zalısının' bo'liwshisi boladı. Egerde (2.6) ten'ligi tek *t* = *p* bolg'anda g'ana orınlansa, onda $\varphi_m(\lambda)$ ko'pag'zalısı *A* matritsasının' tek menshikli ko'pag'zalısı boladı. Al, (2.6) ten'ligi *t*<*p* bolg'anda orınlansa, onda *A* matritsasının' menshikli ko'pag'zalısının' bo'liwshisine g'ana iye bolamız ha'm bul jag'dayda *A* matritsasının' menshikli ma'nislerinin' tek bir u'lesi g'ana tabıladı. Son'g'ı jag'dayda *A* matritsasının' jetispegen menshikli ma'nislerin tabıw ushın $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(m-1)}$ vektorlarına ortogonal' bolg'an, jan'a baslang'ısh $\overline{y}^{(0)} \neq 0$ vektorın saylap alıp, joqarıda ko'rsetilgen ortogonallastırıw protsessin ta'kirarlaw kerek.

Matritsanın' menshikli ma'nislerinin' ma'selesin sheshiwdin' bayanlang'an usılı simmetriyalı matritsalar berilgen jag'dayda a'dewir a'piwayılasadı. Haqıyqatanda da, bunday matritsalar ushın (2.4) den kelip shıg'atug'ın

$$\alpha_{i+1j} = \left(Ay^{(i)}, y^{(j)}\right) \Big/ \left(y^{(j)}, y^{(j)}\right) \quad \left(j = 0,1,2,...,i\right)$$

ten'liklerin to'mendegishe jazıwg'a boladı:

$$\alpha_{i+1j} = \left(Ay^{(i)}, y^{(j)}\right) \Big/ \left(y^{(j)}, y^{(j)}\right) = \left(y^{(i)}, Ay^{(j)}\right) \Big/ \left(y^{(j)}, y^{(j)}\right) =$$
$$= \left(y^{(i)}, y^{(j+1)} + \alpha_{j+1j} y^{(j)} + \alpha_{j+1j-1} y^{(j-1)} + ... + \alpha_{j+10} y^{(0)}\right) \Big/ \left(y^{(j)}, y^{(j)}\right)$$
$$\left(j = 0,1,2,...,i\right)$$

Bunnan,

$$\left(y^{(i)},\ y^{(i-k)}\right) = 0 \quad \left(0 < k \le i\right)$$

ortogonallıq sha'rtinen, $j < i-1$ bolg'anda $\alpha_{j+1j} = 0$ boladı. Sonlıqtan (2.3) den kelip shıg'atug'ın

$$y^{(i+1)} = Ay^{(i)} - \alpha_{i+1i} y^{(i)} - \alpha_{i+1i-1} y^{(i-1)} - ... - \alpha_{i+10} y^{(0)}$$
$$\left(i = 0,1,2,...,m-1;\ m \le n\right)$$

ten'ligi simmetriyalı matritsalar ushın

$$y^{(i+1)} = Ay^{(i)} - \alpha_{i+1i} y^{(i)} - \alpha_{i+1i-1} y^{(i-1)}$$

ko'rinisine iye boladı. Bul jag'dayda (2.5) tiykarında jazılg'an

$$\varphi_{i+1}(\lambda) = (\lambda - \alpha_{i+1i})\varphi_i(\lambda) - \alpha_{i+1i-1}\varphi_{i-1}(\lambda) - \ldots - \alpha_{i+10}\varphi_0(\lambda)$$

ko'pag'zalısı da a'piwayılasıp,

$$\varphi_{i+1}(\lambda) = (\lambda - \alpha_{i+1i})\varphi_i(\lambda) - \alpha_{i+1i-1}\varphi_{i-1}(\lambda)$$

ko'rinisine keledi. Usı jag'daylarg'a baylanıslı, A simmetriyalı matritsa bolg'anda, Lantsosh usılının' esaplaw sxeması a'dewir a'piwayılasıp, qollanıw ushın qolaylı boladı. Sonlıqtan simmetriyalı matritsalarg'a qollanılg'an Lantsosh usılın, a'dette *en' az iteratsiyalar usılı* dep te ataydı.

2.3. Usıldın' biortogonallıq algoritmi

Lantsosh usılının' esaplaw algoritmin simmetriyalı emes matritsalar berilgen jag'daylarda da a'dewir a'piwayılastırıwg'a boladı. Bunın' ushın sa'ykes vektorlardı ortogonallastırıw protsessin, biortogonallastırıw protsessi menen almastırıw jetkilikli. Vektorlardın' eki $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ha'm $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sistemaları

$$(a_i, b_j) = \begin{cases} 1, \text{ егерде} & i = j \quad \text{болса}, \\ 0, \text{ егерде} & i \neq j \quad \text{болса} \end{cases}$$

sha'rtlerin qanaatlandırsa, onda olar *biortogonal' ((qos ortogonal') vektorlar sistemaları* dep ataladı. Vektorlardın' biortogonal' sistemalarının' ha'r biri sızıqlı baylanıssız boladı. Sonlıqtan olardın' ha'r biri p o'lshemli vektorlıq ken'isliktin' bazisin du'zedi. Sonın' menen birge, p o'lshemli ken'isliktin' ka'legen bazisi ushın tek bir biortogonal' bazisi bar boladı. Lantsosh usılının' biortogonallıq algoritminin ma'nisi to'mendegishe. Eki baslang'ısh $y^{(0)} \neq 0$ ha'm $z^{(0)} \neq 0$ vektorların saylap alıp, olardın' ja'rdeminde mına eki vektor jasaladı:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= Ay^{(0)} - \alpha_{10} y^{(0)}, \\ z^{(1)} &= A' z^{(0)} - \beta_{10} z^{(0)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

bunda $A'-A$ matritsasın transpollawdan kelip shıqqan matritsa. Bundag'ı α_{10} ha'm β_{10} koeffitsientleri

$$\left(y^{(1)},z^{(0)}\right)=\left(z^{(1)},y^{(0)}\right)=0$$

ten'likleri orınlang'anday etip anıqlanadı. Egerde baslang'ısh $y^{(0)}$ ha'm $z^{(0)}$ vektorları ortogonal' bolmasa, onda izlenip atırg'an $y^{(1)}$ ha'm $z^{(1)}$ vektorların ba'rqulla jasawg'a boladı ha'm (2.7) degi α_{10} ha'm β_{10} koeffitsientleri to'mendegishe anıqlanadı:

$$\alpha_{10}=\frac{\left(Ay^{(0)},\, z^{(0)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\frac{\left(y^{(0)},\, A'z^{(0)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\beta_{10}$$

Bunda $\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)\neq 0$ dep uyg'arıladı. Bunnan son', (2.7) formulaları boyınsha tabılg'an $y^{(1)}$ ha'm $z^{(1)}$ vektorlarının' ja'rdeminde jan'a

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= Ay^{(1)}-\alpha_{21}y^{(1)}-\alpha_{20}y^{(0)}, \\ z^{(2)} &= A'z^{(1)}-\beta_{21}z^{(1)}-\beta_{20}z^{(0)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

vektorları jasaladı. Bul ten'liklerdin' on jag'ındag'ı an'latpalardın' koeffitsientleri

$$\left(y^{(2)},z^{(1)}\right)=\left(y^{(2)},z^{(0)}\right)=\left(z^{(2)},y^{(1)}\right)=\left(z^{(2)},y^{(0)}\right)=0$$

sha'rtlerinin' orınlanıwınan tabıladı. Sonlıqtan bul koeffitsientler to'mendegi formulalar menen anıqlanadı:

$$\alpha_{21}=\frac{\left(Ay^{(1)},\, z^{(1)}\right)}{\left(y^{(1)},\, z^{(1)}\right)}=\frac{\left(y^{(1)},\, A'z^{(1)}\right)}{\left(y^{(1)},\, z^{(1)}\right)}=\beta_{21},$$

$$\alpha_{20}=\frac{\left(Ay^{(1)},\, z^{(0)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\frac{\left(y^{(1)},\, A'z^{(0)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\frac{\left(y^{(1)},z^{(1)}+\beta_{10}z^{(0)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\frac{\left(y^{(1)},z^{(1)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=$$

$$\frac{\left(Ay^{(0)}-\alpha_{10}y^{(0)},z^{(1)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\frac{\left(Ay^{(0)},z^{(1)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\frac{\left(y^{(0)},A'z^{(1)}\right)}{\left(y^{(0)},\, z^{(0)}\right)}=\beta_{20}$$

Meyli, $\left(y^{(0)},z^{(0)}\right)\neq 0,\ \left(y^{(1)},z^{(1)}\right)\neq 0,\ \left(y^{(2)},z^{(2)}\right)\neq 0$ bolsın xa'm biortogonallastırıw protsessi dawam ettirilsin. Usının' na'tiyjesinde, ko'rsetilgen usıl menen

$$\left(z^{(j)},\ y^{(k)}\right)=0 \quad (j\neq k),$$
$$\left(z^{(j)},\ y^{(j)}\right)\neq 0 \quad (j,k=0,1,2,...,i)$$

sha'rtlerin qanaatlandıratug'ın

$$y^{(0)},\ y^{(1)},\ ...,\ y^{(i)},$$
$$z^{(0)},\ z^{(1)},\ ...,\ z^{(i)}$$

vektorlarının' biortogonal' sistemaları jasalg'an bolsın. Sonda kelesi $y^{(i+1)}$ ha'm $z^{(i+1)}$ vektorlarının' jubı mına formulalar menen jasaladı:

$$\begin{aligned} y^{(i+1)} &= Ay^{(i)}-\alpha_{i+1i}y^{(i)}-\alpha_{i+1i-1}y^{(i-1)}-...-\alpha_{i+10}y^{(0)},\\ z^{(i+1)} &= A'z^{(i)}-\beta_{i+1i}z^{(i)}-\beta_{i+1i-1}z^{(i-1)}-...-\beta_{i+10}z^{(0)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Bul formulalardın' $\alpha_{i+1j},\ \beta_{i+1j}\ \ (j=0,1,2,...,i)$ koeffitsientleri

$$\left(y^{(i+1)},z^{(j)}\right)=\left(z^{(i+1)},y^{(j)}\right)=0 \qquad (j=0,1,2,...,i)$$

ten'likleri orınlang'anday etip saylap alınadı. Son'g'ı sha'rtlerdin' orınlanıwınan (2.9) formulalarının' koeffitsientlerinin' to'mendegi ma'nislerine iie bolamız:

$$\alpha_{i+1j}=\frac{\left(Ay^{(i)},\ z^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}=\frac{\left(y^{(i)},\ A'z^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}=\frac{\left(y^{(i)},z^{(j+1)}+\beta_{j+1j}z^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}=$$

$$=\frac{\left(y^{(i)},z^{(j+1)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}+\beta_{j+1j}\frac{\left(y^{(i)},\ z^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}=$$

$$\begin{cases}\beta_{i+1i},\ \text{егерде}\quad j=i\ \ \text{болса},\\ \left(y^{(i)},z^{(i)}\right)\big/\left(y^{(i-1)},z^{(i-1)}\right),\ \text{егерде}\ j=i-1\ \text{болса},\\ 0,\ \ \text{егерде}\quad j<i-1\ \ \text{болса},\end{cases}$$

$$\beta_{i+1j}=\frac{\left(Az^{(i)},y^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},z^{(j)}\right)}=\frac{\left(z^{(i)},A'y^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},z^{(j)}\right)}=\frac{\left(z^{(i)},y^{(j+1)}+\alpha_{j+1j}y^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}=$$

$$=\frac{\left(z^{(i)},y^{(j+1)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}+\alpha_{j+1j}\frac{\left(z^{(i)},y^{(j)}\right)}{\left(y^{(j)},\ z^{(j)}\right)}=$$

$$\begin{cases}\alpha_{i+1i},\ \text{егерде} \quad j=i \ \text{болса},\\ \left(y^{(i)},z^{(i)}\right)\Big/\left(y^{(i-1)},z^{(i-1)}\right)=\alpha_{i+1i-1},\ \text{егерде}\ j=i-1\,\text{болса},\\ 0,\ \text{егерде} \quad j<i-1\ \text{болса}.\end{cases}$$

Solay etip, na'tiyjede vektorlardın' biortogonal' sistemaların jasawg'a mu'mkinshilik beretug'ın (2.9) ten'lileri a'dewir a'piwayılasadı ha'm mınaday ko'rinislerge iye boladı:

$$\begin{aligned} y^{(i+1)} &= Ay^{(i)}-\alpha_{i+1i}y^{(i)}-\alpha_{i+1i-1}y^{(i-1)},\\ z^{(i+1)} &= A'z^{(i)}-\alpha_{i+1i}z^{(i)}-\alpha_{i+1i-1}z^{(i-1)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Bunday formulalardı jasaw, onın' aldındag'ı adımda tabılg'an $y^{(i)}$ ha'm $z^{(i)}$ vektorları $\left(y^{(i)},z^{(i)}\right)\neq 0$ sha'rtin qanaatlandırg'an jag'dayda g'ana mu'mkin boladı. Bul sha'rt mına eki jag'dayda g'ana buzılıwı mu'mkin: a) $y^{(i)}$ ha'm $z^{(i)}$ vektorları ortogonal' bolsa. Bul, o'z gezeginde, $y^{(0)}$ ha'm $z^{(0)}$ baslang'ısh vektorlarının' qolaysız saylap alıng'anın an'latadı. Sonlıqtan jan'a baslang'ısh vektorlardı saylap alıw jolı menen $\left(y^{(i)},z^{(i)}\right)\neq 0$ sha'rtinin' orınlanıwına erisiwge boladı; b) $y^{(i)}$ ha'm $z^{(i)}$ vektorlarının' birewi nol' vektorı bolsa. Bul jag'dayda A matritsasının' en' kishi ko'pag'zalısı yamasa onın' bo'liwshisi tabıladı.

Egerde matritsanın' en' kishi ko'pag'zalısının' da'rejesi m ge ten' bolsa, onda $y^{(0)},Ay^{(0)},A^2y^{(0)},...,\ A^m y^{(0)}$ ha'm $z^{(0)},A'z^{(0)},A'^2z^{(0)},...,\ A'^m z^{(0)}$ vektorları sızıqlı baylanıslı boladı (A ha'm A' matritsalarının' en' kishi ko'pag'zalıları sa'ykes keledi). Sonlıqtan biortogonallastırıw protsessi $i\leq m$ adımınan keshikpey so'zsiz tamamlanıwı kerek. Egerde, dara jag'dayda, $y^{(i)}$ ha'm $z^{(i)}$ vektorlarının' birewi nol' vektorı bolsa, onda $y^{(0)}, Ay^{(0)}, A^2y^{(0)}, ..., A^my^{(0)}$ ha'm $z^{(0)}, A'z^{(0)}, A'^2z^{(0)}, ..., A'^mz^{(0)}$ vektorları sızıqlı baylanıslı boladı. Bul jag'dayda, ortogonallastırıw protsessi jag'dayındag'ı sıyaqlı, A matritsasının' en' kishi ko'pag'zalısın yamasa onın' bo'liwshisin izbe-iz mına formulalar menen anıqlawg'a boladı:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(\lambda) = 1,\\
&\varphi_1(\lambda) = (\lambda - \alpha_{10})\varphi_0(\lambda),\\
&\varphi_2(\lambda) = (\lambda - \alpha_{21})\varphi_1(\lambda) - \alpha_{20}\varphi_0(\lambda),\\
&\varphi_3(\lambda) = (\lambda - \alpha_{32})\varphi_2(\lambda) - \alpha_{32}\varphi_1(\lambda),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_i(\lambda) = (\lambda - \alpha_{ii-1})\varphi_{i-1}(\lambda) - \alpha_{ii-2}\varphi_{i-2}(\lambda).
\end{aligned}
$$

En' az iteratsiyalar usılı ha'm onın' simmetriyalı emes matritsalar ushın ulıwmalastırılıwı birinshi ret amerikalı matematik Korneliy Lantsosh ta'repinen usınılg'an. Sonlıqtan matritsalardın' menshikli ma'nislerinin' ma'selesin sheshiwdin' bunday usılın *Lantsosh usılı* dep ataydı.

2.4. Matritsanın' menshikli vektorların tabıw

Joqarıda, A matritsasının' $y^{(0)}$ vektorın nol'ge aylandırıwshı en' kishi $\varphi_m(\lambda)$ ko'pag'zalısı ushın, ortogonallastırıw usılı menen jasalg'an, o'z ara ortogonal' $y^{(0)}, y^{(1)}, ..., y^{(m-1)}$ vektorlarının' sisteması, bul matritsanın' menshikli vektorların tabıw ushın da paydalanılıwı mu'mkin.

Meyli, λ_i -(5) degi $\varphi_m(\lambda)$ ko'pag'zalısının' koren'i bolsın. Sonda, Krılov usılında matritsanın' menshikli vektorları qalay tabılg'an bolsa, tap sonday usıl menen A matridasının' λ_i menshikli ma'nisine sa'ykes keletugın $x^{(i)}$ menshikli vektorın $y^{(0)}, y^{(1)}, ..., y^{(m-1)}$ vektorlarının' sızıqlı birikpesi ko'rinisinde izleymiz:

$$x^{(i)} = \gamma_{i1}y^{(m-1)} + \gamma_{i2}y^{(m-2)} + ... + \gamma_{im}y^{(0)} \tag{2.12}$$

Bundag'ı γ_{ij} $(j=0,1,2,...,m)$ koeffitsientleri

$$Ax^{(i)}=\lambda_i x^{(i)} \tag{2.13}$$

sha'rti orınlang'anday etip saylap alınadı. Bunnan son' (2.12) sızıqlı birikpesin shep jag'ınan A matritsasına ko'beytip,

$$Ay^{(j)}=y^{(j+1)}+\alpha_{j+1j}y^{(j)}+\alpha_{j+1j-1}y^{(j-1)}+...+\alpha_{j+10}y^{(0)}$$
$$(j=0,1,2,...,m-1)$$

ten'liklerin xa'm (2.13) sha'rtin esapqa alıp, mına na'tiyjege kelemiz:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i\left(\gamma_{i1}y^{(m-1)}+\gamma_{i2}y^{(m-2)}+...+\gamma_{im}y^{(0)}\right)=\\
&=\gamma_{i1}\left(\alpha_{mm-1}y^{(m-1)}+\alpha_{mm-2}y^{(m-2)}+...+\alpha_{m0}y^{(0)}\right)+\\
&+\gamma_{i2}\left(y^{(m-1)}+\alpha_{m-1m-2}y^{(m-2)}+\alpha_{m-1m-3}y^{(m-3)}+...+\alpha_{m-10}y^{(0)}\right)+\\
&+\gamma_{i3}\left(y^{(m-2)}+\alpha_{m-2m-3}y^{(m-3)}+\alpha_{m-2m-4}y^{(m-4)}+...+\alpha_{m-20}y^{(0)}\right)+\\
&+...+\gamma_{im}\left(y^{(1)}+\alpha_{10}y^{(0)}\right)
\end{aligned}$$

yamasa

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda_i\gamma_{im}-\gamma_{i1}\alpha_{m0}-\gamma_{i2}\alpha_{m-10}-...-\gamma_{im}\alpha_{10}\right)y^{(0)}+\\
&+\left(\lambda_i\gamma_{im-1}-\gamma_{i1}\alpha_{m1}-\gamma_{i2}\alpha_{m-11}-...-\gamma_{im-1}\alpha_{21}-\gamma_{im}\right)y^{(1)}+\\
&+\left(\lambda_i\gamma_{im-2}-\gamma_{i1}\alpha_{m2}-\gamma_{i2}\alpha_{m-12}-...-\gamma_{im-2}\alpha_{32}-\gamma_{im-1}\right)y^{(2)}+\\
&+...+\left(\lambda_i\gamma_{i1}-\gamma_{i1}\alpha_{mm-1}-\gamma_{i2}\right)y^{(m-1)}=0
\end{aligned}$$

Bunnan, $y^{(0)},y^{(1)},...,y^{(m-1)}$ vektorlarının' sızıqlı baylanıssız ekenligin esapqa alıp, mına ten'liklerge iye bolamız:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i\gamma_{im}-\gamma_{i1}\alpha_{m0}-\gamma_{i2}\alpha_{m-10}-...-\gamma_{im}\alpha_{10}=0,\\
&\lambda_i\gamma_{im-1}-\gamma_{i1}\alpha_{m1}-\gamma_{i2}\alpha_{m-11}-...-\gamma_{im-1}\alpha_{21}-\gamma_{im}=0,\\
&\lambda_i\gamma_{im-2}-\gamma_{i1}\alpha_{m2}-\gamma_{i2}\alpha_{m-12}-...-\gamma_{im-2}\alpha_{32}-\gamma_{im-1}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_i\gamma_{i2}-\gamma_{i1}\alpha_{mm-2}-\gamma_{i2}\alpha_{m-1m-2}-\gamma_{i3}=0,\\
&\lambda_i\gamma_{i1}-\gamma_{i1}\alpha_{mm-1}-\gamma_{i2}=0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Matritsanın’ menshikli vektorı turaqlı ko’beytiwshige shekemgi da’llik penen anıqlang’anlıqtan, (2.14) de qolaylılıq ushın, ma’selen $\gamma_{i1}=1$ dep alıwg’a boladı (o’ytkeni, γ_{i1} koeffitsienti nol’den o’zgeshe bolıwı kerek. Keri jag’dayda, (2.14) ten’liklerinen ko’rinip turg’anınday, (2.12) sızıqlı birikpesinin’ qalg’an barlıq γ_{ij} $(j=0,1,2,...,m)$ koeffitsientleri nol’ge ten’ boladı). Sonlıqtan (2.14) ten’lemelerinin’ en’ son’g’ısınan baslap, qalg’an barlıq koeffitsientlerin izbe-iz anıqlawg’a boladı. Bunda (2.14) ten’lemelerinin’ birinshisi paydalanılmaydı. Sebebi, ol (2.14) degi qalg’an ten’lemelerdin’ ha’m $\varphi_m(\lambda_i)=0$ ten’liginin’ saldarı boladı.

Son’g’ı tastıyıqlawdı tekseremiz ha’m sonın’ menen birge γ_{ij} $(j=0,1,2,...,m)$ koeffitsientlerin anıqlaw ushın sa’ykes an’latpalardı keltirip shıg’aramız. Bunın’ ushın da’slep to’mendegi ko’pag’zalılardı jasaymız:

$$\begin{aligned}
&\psi_0(\lambda)=1,\\
&\psi_1(\lambda)=(\lambda-\alpha_{mm-1})\psi_0(\lambda),\\
&\psi_2(\lambda)=(\lambda-\alpha_{m-1m-2})\psi_1(\lambda)-\alpha_{mm-2}\psi_0(\lambda),\\
&\psi_3(\lambda)=(\lambda-\alpha_{m-2m-3})\psi_2(\lambda)-\alpha_{m-1m-3}\psi_1(\lambda)-\alpha_{mm-3}\psi_0(\lambda),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\psi_{m-1}(\lambda)=(\lambda-\alpha_{21})\psi_{m-2}(\lambda)-\alpha_{31}\psi_{m-3}(\lambda)-...-\alpha_{m1}\psi_0(\lambda),\\
&\psi_m(\lambda)=(\lambda-\alpha_{10})\psi_{m-1}(\lambda)-\alpha_{20}\psi_{m-2}(\lambda)-...-\alpha_{m0}\psi_0(\lambda).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Usılayınsha jasalg’an (2.15) ko’pag’zalıları (2.5) ko’pag’zalılarının’ tek basqasha ko’riniste jazılıwları g’ana boladı.

Endi (2.14) ten'lemelerinin' en' son'g'ısınan baslap, izbe-iz mına ten'liklerge kelemiz ($\gamma_{i1}=1$ dep alıng'an);

$$\begin{aligned}
&\gamma_{i1}=1=\psi_0(\lambda_i),\\
&\gamma_{i2}=(\lambda_i-\alpha_{mm-1})\gamma_{i1}=(\lambda_i-\alpha_{mm-1})\psi_0(\lambda_i)=\psi_1(\lambda_i),\\
&\gamma_{i3}=(\lambda_i-\alpha_{m-1m-2})\gamma_{i2}-\alpha_{mm-2}\gamma_{i1}=\\
&\quad=(\lambda_i-\alpha_{m-1m-2})\psi_1(\lambda_i)-\alpha_{mm-2}\psi_0(\lambda_i)=\psi_2(\lambda_i),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\gamma_{im}=(\lambda_i-\alpha_{21})\gamma_{im-1}-\alpha_{31}\gamma_{im-2}-\ldots-\alpha_{m1}\gamma_{i1}=\\
&=(\lambda_i-\alpha_{21})\psi_{m-2}(\lambda_i)-\alpha_{31}\psi_{m-3}(\lambda_i)-\ldots-\alpha_{m1}\psi_0(\lambda_i)=\\
&\psi_{m-1}(\lambda_i).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Sonda (2.14) ten'liklerinin', birinshisi to'mendegishe jazıladı:

$$(\lambda_i-\alpha_{10})\psi_{m-1}(\lambda_i)-\alpha_{20}\psi_{m-2}(\lambda_i)-\ldots-\alpha_{m0}\psi_0(\lambda_i)=0$$

yamasa

$$\psi_m(\lambda_i)=\varphi_m(\lambda_i)=0$$

boladı.

Solay etil *A* matritsasının' λ_i menshikli ma'nisine sa'ykes keletug'ın $x^{(i)}$ menshikli vektorın to'mendegi ko'riniste jazıwg'a boladı:

$$x^{(i)}=\psi_0(\lambda_i)\,y^{(m-1)}+\psi_1(\lambda_i)\,y^{(m-2)}+\ldots+\psi_{m-1}(\lambda_i)\,y^{(0)} \tag{2.17}$$

Lantsosh usılı menen matritsanın' menshikli vektorın tabıw Krılov usılına jaqın bolıp, onı qa'legen $m\le n$ ushın qollanıwg'a boladı.

Mısalı. Alınshg'an na'tiyjelerdi salıstırıw ma'qsetinde, joqarıda Krılov usılı menen menshikli ma'nisleri ha'm menshikli vektorları esaplanılg'an matritsanı qaraymız:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\2&3&0&-4\\1&1&-2&-2\\1&1&0&-1\end{bmatrix}$$

SHeshiliwi. Berilgen matritsa simmetriyalı matritsa bolmag'anlıqtan, onın' menshikli ma'nislerin ha'm olarg'a sa'ykes menshikli vektorların esaplaw ushın, Lantsosh usılının' tiykarg'ı algoritminen yamasa onın' biortogonallıq algoritminen paydalanıwg'a boladı. Bul jerde berilgen matritsanın' menshikli ma'nislerin xa'm olarg'a sa'ykes menshikli vektorların anıqlaw ushın usıldın' tiykarg'ı algoritmi qollanıladı. Bunın' ushın da'slep $y^{(0)}=(1,0,0,0)'$ baslang'ısh vsktorın saylap alıp, izbe-iz to'mendegi esaplawlardı orınlaymız:

1)

$$Ay^{(0)}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\2&3&0&-4\\1&1&-2&-2\\1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}=(1,2,1,1)';$$

a) $\left(Ay^{(0)},y^{(0)}\right)=1,\quad \left(y^{(0)},y^{(0)}\right)=1,\quad \alpha_{10}=\left(Ay^{(0)},y^{(0)}\right)/\left(y^{(0)},y^{(0)}\right)=1;$

b) $y^{(1)}=Ay^{(0)}-\alpha_{10}y^{(0)}=(1,2,1,1)'-(1,0,0,0)'=(0,2,1,1)';$

2)

$$Ay^{(1)}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\2&3&0&-4\\1&1&-2&-2\\1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{bmatrix}=(-1,2,-2,1)';$$

a) $\left(Ay^{(1)},y^{(0)}\right)=-1,\quad \alpha_{20}=\left(Ay^{(1)},y^{(0)}\right)/\left(y^{(0)},y^{(0)}\right)=-1;$

b) $\left(Ay^{(1)},y^{(1)}\right)=4-2+1=3,\quad \left(y^{(1)},y^{(1)}\right)=4+1+1=6,$

$$\alpha_{21}=\left(Ay^{(1)},y^{(1)}\right)/\left(y^{(1)},y^{(1)}\right)=3/6=1/2=0,5;$$

v) $y^{(2)}=Ay^{(1)}-\alpha_{21}y^{(1)}-\alpha_{20}y^{(0)}=(-1,2,-2,1)'-0,5(0,2,1,1)'+$

$+(1,0,0,0)'=(0;1;-2,5;0,5)'$

g) $\left(y^{(0)},y^{(2)}\right)=0,\quad \left(y^{(1)},y^{(2)}\right)=2-2,5+0,5=0,$

yag'nıy $y^{(2)}$ vektorı onın' aldındag'ı $y^{(0)},\ y^{(1)}$ vektorlarına ortogonal' boladı.

3)

$$Ay^{(2)}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\2&3&0&-4\\1&1&-2&-2\\1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-2,5\\0,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2,5\\1\\5\\0,5\end{bmatrix}=\left(2,5;1;5;0,5\right)';$$

a) $\left(Ay^{(2)},y^{(0)}\right)=2,5,\quad \alpha_{30}=\left(Ay^{(2)},y^{(0)}\right)\Big/\left(y^{(0)},y^{(0)}\right)=2,5;$

b) $\left(Ay^{(2)},y^{(1)}\right)=2+5+0,5=7,5;$

$$\alpha_{31}=\left(Ay^{(2)},y^{(1)}\right)\Big/\left(y^{(1)},y^{(1)}\right)=\frac{7,5}{6}=\frac{5}{4}=1,25;$$

v)

$\left(Ay^{(2)},y^{(2)}\right)=1-12,5+0,25=-11,25,\quad \left(y^{(2)},y^{(2)}\right)=1+6,25+0,25=7,5$

$$\alpha_{32}=\left(Ay^{(2)},y^{(2)}\right)\Big/\left(y^{(2)},y^{(2)}\right)=-11,25/7,5=-1,5;$$

g) $y^{(3)}=Ay^{(2)}-\alpha_{32}y^{(2)}-\alpha_{31}y^{(1)}-\alpha_{30}y^{(0)}=(2,5;1;5;0,5)'+$

$$+1,5(0;1;-2,5;0,5)'-1,25(0;2;1;1)'-2,5(1;0;0;0)'=(0;0;0;0).$$

Bul son'g'ı na'tiyje $y^{(0)},y^{(1)}=Ay^{(0)},\ y^{(2)}=A^2y^{(0)},y^{(3)}=A^3y^{(0)}$ vektorlarının' sızıqlı baylanıslı bolatug'ının an'latadı. Sonlıqtan, Lantsosh usılının' joqarıda bayanlang'an tiykarg'ı algoritmi boyınsha, (2.5) degi $\varphi_3\left(\lambda\right)$ ko'pag'zalısı *A* matritsasının' en' kishi ko'pag'zalısının' bo'liwshisi boladı. Usı sebepli, (2.5) ten'likleri tiykarında $\varphi_3\left(\lambda\right)$ ko'pag'zalısı to'mendegishe jasaladı:

$$\varphi_0(\lambda)=1,\quad \varphi_1(\lambda)=(\lambda-\alpha_{10})\varphi_0(\lambda)=\lambda-1,$$
$$\varphi_2(\lambda)=(\lambda-\alpha_{21})\varphi_1(\lambda)-\alpha_{20}\varphi_0(\lambda)=$$
$$=(\lambda-0,5)(\lambda-1)+1=0,5\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)+1=\lambda^2-1,5\lambda+1,5,$$
$$\varphi_3(\lambda)=(\lambda-\alpha_{32})\varphi_2(\lambda)-\alpha_{31}\varphi_1(\lambda)-\alpha_{30}\varphi_0(\lambda)=$$
$$=(\lambda+1,5)\left(\lambda^2-1,5\lambda+1,5\right)-1,25(\lambda-1)-2,5=$$
$$=\lambda^3-2\lambda+1=(\lambda-1)\left(\lambda^2+\lambda-1\right).$$

Bunnan, berilgen matritsanın' to'mendegi menshikli ma'nislerine iye bolamız:

$$\lambda_1=1,\quad \lambda^2-\lambda-1=0,\quad \lambda_{2,3}=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)\big/2=(-1\pm 2,2360679)\big/2,$$

$$\lambda_2=0,6180339\approx 0,618,\quad \lambda_3=-1,6180339\approx -1,618.$$

Berilgen matritsanın' to'rtinshi menshikli ma'nisin esaplaw ushın bul matritsanın' izinen paydalanamız:

$$1+3-2-1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1+0,618-1,618+\lambda_4,\quad \lambda_4=1.$$

Solay etip, berilgen matritsanın' Lantsosh usılı menen tabılg'an menshikli ma'nisleri $\lambda_1=1$, $\lambda_2\approx 0,618$, $\lambda_3\approx -1,618$, $\lambda_4=1$ sanları boladı. Bul na'tiyjeler berilgen *A* matritsasının' Krılov usılı menen esaplanılg'an menshikli ma'nislerine sa'ykes keledi.

Endi *A* matritsasının' tabılg'an menshikli ma'nislerine sa'ykes keletug'ın, onın' menshikli vektorların esaplaymız. Bunın' ushın da'slep (2.16) formulalarınan paydalanıp, (2.12) sızıqlı birikpesinin' γ_{1j} $\left(j=1,2,3\right)$ koeffitsientlerin anıqlaymız.

a) da'slep $\lambda_1=\lambda_4=1$ menshikli ma'nisine sa'ykes keletug'ın menshikli vektorın esaplaymız. Onın' ushın (2.16) formulalarında $\gamma_{11}=1$ dep uyg'arıp, izbe-iz γ_{1j} $\left(j=2,3\right)$ koeffitsientlerinin' mına ma'nislerine iye bolamız:

$$\gamma_{12}=\lambda_1-\alpha_{32}=1+1,5=2,5;\quad \gamma_{13}=(\lambda_1-\alpha_{32})\lambda_1-\alpha_{32}=1+1,5=2,5;$$

Sonda, (2.17) formulası boyınsha A matritsasının’ $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$ menshikli ma’nisine sa’ykes keletug’ın, izlenip atırg’an menshikli vektorı to’mendegishe anıqlanadı:

$$x^{(1)} = x^{(4)} = \gamma_{11} y^{(2)} + \gamma_{12} y^{(1)} + \gamma_{13} y^{(0)} = \left(0;1;-2,5;0,5\right)' +$$
$$+2,5\left(0;2;1;1\right)' = \left(0;6;0;3\right).$$

Bunda $Ax^{(1)} = \lambda x^{(1)} = \left(0;6;0;3\right)'$ ten’liginin’ orınlanatug’ının an’sat tekserip ko’riwge boladı, yag’nıy $x^{(1)} = x^{(4)} = \left(0;6;0;3\right)'$ vektorı berilgen matritsanın’ $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$ menshikli ma’nisine sa’ykes menshikli vektorı boladı. Matritsanın’ menshikli vektorları san ko’beytiwshilerine shekemgi da’llik penen anıqlanatug’ının’ esapqa alıp, bul vektordı moduli boyınsha en’ u’lken du’ziwshisine bo’lip normalasaq, onda $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(4)} = \left(0;1;0;0,5\right)'$ vektorına iye bolamız.

b) $\lambda_2 \approx 0,618$ menshikli ma’nisine sa’ykes menshikli vektorın esaplaymız. Bul jag’dayda (2.16) formulalarında $\gamma_{21} = 1$ dep uyg’arıp, izbe-iz mına na’tiyjelerge kelemiz:

$$\gamma_{22} = \left(\lambda_2 - \alpha_{32}\right)\gamma_{21} = \left(0,618 + 1,5\right)\cdot 1 = 2,118,$$
$$\gamma_{23} = \left(\lambda_2 - \alpha_{21}\right)\gamma_{22} - \alpha_{31}\gamma_{21} = \left(0,618 - 0,5\right)\cdot 2,118 - 1,25 =$$
$$= 0,249924 - 1,25 = -1,000076 \approx -1;$$

$$x^{(2)} = \gamma_{21} y^{(2)} + \gamma_{22} y^{(1)} + \gamma_{23} y^{(0)} = \left(0;1;-2,5;0,5\right)' +$$
$$+2,118\left(0;2;1;1\right)' - \left(1;0;0;0\right)' = \left(-1;5,236;-0,382;2,618\right)'.$$

Esaplawlar $Ax^{(2)} = \lambda_2 x^{(2)} = \left(-0,618;3,236;-0,236;1,618\right)'$ bolatug’ının ko’rsetedi. Bul esallanılg’an $x^{(2)}$ vektorının’ A matritsasının’

$\lambda_2 \approx 0,618$ menshikli ma’nisine sa’ykes keletug’ın menshikli vektorı bolatug’ının an’latadı.

Usınday usıl menen tabılg’an $x^{(2)}$ vektorın moduli boyınsha en’ u’lken du’ziwshisine bo’lip normalag’annan son’, ol mına ko’riniske keledi:

$$\tilde{x}^{(2)} = \left(-0,1909854;1;-0,0729564;0,5\right)';$$

v) endi A matritsasının’ $\lambda_3 \approx -1,618$ menshikli ma’nisine sa’ykes keletug’ın menshikli vektorın esaplaymız.

Bul jag’dayda da (2.16) formulalarında $\gamma_{31} = 1$ dep uyg’arıp, kerekli koeffitsientlerdin’ sa’ykes ma’nislerin esaplap ha’m (2.17) formulasınan paydalanıp to’mendegi na’tiyjelerge iye bolamız:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{32} = \left(\lambda_3 - \alpha_{32}\right)\gamma_{31} = -1,618 + 1,5 = -0,118, \\
&\gamma_{33} = \left(\lambda_3 - \alpha_{21}\right)\gamma_{32} - \alpha_{31}\gamma_{31} = \left(-1,618 - 0,5\right)\cdot\left(-0,118\right) - 1,25 = \\
&= 0,249924 - 1,25 \approx -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^{(3)} = \gamma_{31}y^{(2)} + \gamma_{32}y^{(1)} + \gamma_{33}y^{(0)} = \left(0;1;-2,5;0,5\right)' - \\
&-0,118\left(0;2;1;1\right)' - \left(1;0;0;0\right)' = \left(-1;0,764;-2,618;0,382\right)',
\end{aligned}$$

$$Ax^{(3)} = \lambda_3 x^{(3)} = \left(1,618;-1,236;4,236;-0,618\right)',$$

$$\tilde{x}^{(3)} = \left(0,3819709;-0,2918258;1;-0,1459129\right)'.$$

Juwmag’ında berilgen ma’seleni Lantsosh usılı menen sheshiwdin’ na’tiyjelerinin’, onın’ Krılov usılı menen tabılg’an sheshimlerine joqarı da’llik penen sa’ykes keletug’ının atap o’temiz.

J U W M A Q L A W

Bul pitkeriw qa’nigelik jumısı matritsanın’ menshikli ma’nislerin ha’m menshikli vektorların tabıwdın’ Krilov ha’m Lantsosh usillarina bag’ishlang’an.

Jumıstın’ birinshi babinda Krılov usılında esaplaw sxeması a’dewir o’zgertilip, praktikada qollanıw ushın qolaylistirılg’an. Biraq usıldın’ tiykarg’i ma’nisi u’lken o’zgeriske ushıramadı. Bul usılda matritsanın’ menshikli ko’pag’zalısının’ koeffitsientleri p -ta’rtipli bazı bir sızıqlı algebralıq ten’lemelerinin’ sistemasının’ sheshimi esabında tabıladı. Bunda, aralıq algebralıq tu’rlendiriwlerdin’ na’tiyjeleri matritsanın’ menshikli vektorların anıqlaw ushın paydalanıladı. Bul usıldı bayanlawg’a o’tpesten burın, algebradan geypara kerekli mag’lıwmatlardı keltiremiz.

Jumıstın’ ekinshi babinda Lantsosh usılı qaralıp bul usıl A.N.Krılov usılına uqsas bolıp, ol erkli tu’rde saylap alıng’an $y^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right)' \neq 0$ vektorın da’slepki berilgen A matritsası menen izbe-iz iteratsiyalawdan kelip shıqqan, yag’nıy

$$y^{(1)} = Ay^{(0)},\ y^{(2)} = Ay^{(1)} = A^2 y^{(0)},\ y^{(3)} = A^3 y^{(0)}, ..., y^{(m)} = A^m y^{(0)} \qquad (*)$$

ten’likleri menen anıqlang’an vektorlardın’ nol’ge ten’ sızıqlı birikpesin jasawg’a tiykarlang’an. Biraqta, Krılov usılında (*) vektorlarının’ bunday sızıqlı birikpesin jasaw sızıqlı algebralıq ten’lemelerinin’ sistemasın sheshiw menen baylanıslı. Al, Lantsosh usılında (*) vektorlarının’ nol’ge ten’ sızıqlı birikpesin jasaw ushın vektorlardı ortogonallastırıw protsessi qollanıladı. Bunda ortogonallastırıw protsessi, sa’ykes vektordı A matritsasına ha’r bir ko’beytiwden son’, orınlanadı.

Pitkeriw qa’nigelik jumisının’ teması boyınsha jazılg’an barlıq mag’lıwmatlar bo’limlerge bo’lip u’yrenilgen. Bul bo’limlerde keltirilgen tiykarg’ı tu’sinikler EEM ja’rdeminde mısal ha’m ma’selelerdi sheshiwde paydalanıwshı alg’a sol tiykarg’ı tu’sinik ha’m ko’rsetpelerge tayang’an jag’dayda protsesslerdi basqıshpa-basqısh a’melge asırıw imkaniyatın beredi.

Bul jumısta keltirilgen mag’lıwmatlardan, mısal ha’m ma’selelerden “Esaplaw usılları” ha’m “Sanli usıllar” pa’nlerinin’ a’meliy sabaqlarında paydalanıw mu’mkin. Bul bolsa talaba- oqıwshılardın’ a’meliy sabaqlarındag’ı bilim ha’m ko’nlikpelerdi asırıwg’a ha’m rawajlandırıwg’a sebep boladı.

Pitkeriw qa’nigelik jumisının’ o’z aldına qoyg’an tiykarg’ı maqsetlerinen biri bul ma’selelerdi sheshiw basqıshları ha’m oqıwshılardın’ bilim ha’m ko’nlikpelerin basqıshpa-basqısh asırıp barıwg’a ja’rdem beriwden ibarat edi. Bul maqsettin’ a’melge asıwında keltirilgen mısallarda ha’m berilgen tiykarg’ı tu’siniklerde o’z sa’wleleniwin tapqan.

Bul jumıstan esaplaw usıllarin u’yreniwshiler, til talaplarına ha’m sanlı usillardi sheship na’tiyje alıwg’a qızıg’ıwshılar paydalanıwı mu’mkin.

PAYDALANG’AN A’DEBIYATLAR

1. Babenko K.I. Osnovı chislennogo analiza.M.: Nauka, 1986.
2. Baxvalov N.S., Jidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennıe metodı.- M.: Nauka, 1987.
3. Isroilov M. Hisoblash metodlari.-Toshkent: O’zbekiston, 2003.
4. Kalitkin N.N. Chislennıe metodı. M.: Nauka, 1978.
5. Otarov A.O., Allanazarov J.P. Esaplaw usılları. (II bo’lim) No’kis: Bilim, 2006.
6. Otarov A.O., Allanazarov J.P. Esaplaw usılları.(I bo’lim) No’kis: Bilim, 2001.
7. Sbornik zadach po metodam vichisleniy(pod red.P.I.Monastırnogo).-Minsk: Izd-vo BGU, 1983.
8. Voevodin V.V. Csislennie metodi lineynoy algebrı. Teoriya i algorifmı. - M.: Nauka, 1966.
9. Voevodin V.V., Kuznetsov YU. A. Matritsı vıchisleniya. - M.: Nauka, 1984.

Internet saytlari

1. www.bilimdon.uz
2. www.books.ru
3. www.dissercat.com
4. www.doda.uz
5. www.intuit.ru
6. www.pedagog.uz
7. www.ziyonet.uz