

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTIRLIGI**

**ÁJINIYAZ ATÍNDAGÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ
INSTITUTÍ**

**MATEMATIKA-INFORMATIKA FAKULTETI
«Matematikanı oqıtıw metodikası» kafedrası**

Matematika oqıtıw metodikası tálim baǵdarınıń 4^G -kurs talabası
Shagataeva Altinaydıń

**«Parametrge iye máseleler hám olardı sheshiw»
atamasındaǵı**

PITKERIW QÁNIGELIK JUMISI

Kafedra baslıǵı:

docent B.B.Prenov

Ilimiy basshı:

f-m.i.k A.Xodjaniyazov

Nókis-2018

Parametrge iye máseleler hám olardı sheshiw Mazmunı

Kirisiw		3
1-Bap. Parametrge iye teńlemelerdi sheshiw		
§1. Parametrge iye teńlemeler		6
§2. Parametrge baylanıslı kórsetkishli, logorifmlik hám trigonometriyalıq teńlemeler		19
2-Bap. Tuwıddı járdeminde sheshiletuǵın parametrli máseleler		
§3. Parametrge baylanıslı kvadrat funksiyalardıń nolleri		27
§4. Tuwındı járdeminde sheshiletuǵın Parametrge baylanıslı hár túrli máseleler		33
Juwmaqlaw		39
Ádebiyatlar		40

Kirisiw

Kóplegen fizikalıq protsesslerdi hám geometriyalıq nızamlardı úyreniw parametrge baylanıslı máselelerdi sheshiwge alıp kelinedi. Bunday máselelerdi sheshiwdiń eń qıyın hám eń áhmiyetli bólimi úyrenilip atırǵan protsesstń parametrge baylanıslı nızamların tekseriw hám onı anıqlawdan ibarat. Usı sebepli mektep matematikasında ushıraytuǵın parametrge iye máselelerdi sheshiw, sheshimniń parametrden baylanıslı nızamların úyreniwdi talap etedi.

Parametrge iye máseleler haqqında kóp túsiniqlerdi aytıp ótsek boladı. Bunday máseleler qatarına parametrge iye teńlemeler hám teńsizlikler, parametrge iye funksiya kiredi hám taǵı basqa [1,2,4,6,7,10]. Parametrge iye teńlemelerdi aytatuǵın bolsaq, bunday teńlemelerdi ratsional hám irratsional, kórsetkishli, logarifmlik hám trigonometriyalıq teńlemeler arasında ushıratıwǵa boladı [3,5,8,9].

Ayrım teńlemeler tek bir parametrge baylanıslı bolsa, ayrımları bir neshe parametrge baylanıslı boladı.

Usı sebepli parametrge baylanıslı máselelerdi úyreniw usı tiptegi parametrge baylanıslı bolmaǵan máselelerdi úyreniwdiń hár qıylı usılların jaqsı úyreniwdi talap etedi.

Parametrge iye máselelerdiń bir túri, parametrge iye teńlemeler bolıp, olardıń ulıwma kórinisi

$$f(x, a, b, \dots, k) = \varphi(x, a, b, \dots, k)$$

túrge iye boladı, bul jerde tiykarǵı másele x ózgeriwshi muǵdarınıń $a, b, \dots, k$ parametrge baylanıslı bóliw nızamın anıqlaw bolıp, bul másele parametrge iye teńlemenı tekseriwdiń tiykarǵı mazmunın beredi.

Teńlemedegi f hám φ funksiyaları qabıl etetuǵın parametrlardıń $a = a_0, b = b_0, \dots, k = k_0$ mánisleri usı parametrlardıń bar bolǵan mánisler kópligi dep ataladı. Parametrlardıń bar bolǵan mánisler kópligin anıqlaw, bul parametrge iye teńlemenı tekseriwdiń tiykarǵı formalarınń biri bolıp esaplanadı. Sebebi bul

tenlemeniń sheshimi parametrlardıń bar bolǵan mánisler kópliginen alınǵan hár bir parametr mánisine baylanıslı boladı.

Parametrge baylanıslı bolǵan kvadrat funktsiyalardıń korenleri tuwrısındaǵı máselelerdi úyrenw parametrge iye máseleler arasında úlken áhmiyetke iye. Bul másele mektep kursı matematikasınan tanıs Viet teoremasın tereń paydalanıwǵa hám usı teorema járdeminde kvadrat funktsiyalardıń korenleri menen parametr ortasındaǵı baylanıstı úyreniwge alıp keledi. Bunday baylanıslı ayırım máselelerdi berilgen teńlemenıń korenleri $x=0$ noqatqa qarata tekserilse, ayırım máselelerde basqa noqatlarǵa qarata yaki bolmasa bir neshe noqatlarǵa qarata tekseriledi. Aytayıq teńlemenıń koreni parametrdıń qanday mánislerinde berilgen p sanınan kishi yamasa úlken, kishi emes yaki úlken emes, korenleri berilgen p hám q sanları arasında jaylasadı, korenleri berilgen p hám q sanları ortasında jatpaydı hám taǵı basqa parametrge baylanıslı bolǵan máseleler tek teńleme yaki teńsizliklerde ushırasıp qalmay, bálki matematikanıń basqada máselelerinde ushırasadı.

Parametrge iye matematikalıq analiz máseleleri ishinde úlken áhmiyetke iye máselelerdiń biri tuwındı járdeminde sheshiletuǵın máseleler bolıp, bul máseleler kóplikına iymek sızıqqa júrgiziletuǵın urınba máseleleri. Parametrge iye funktsiyalardıń statsionar noqatların tabıw máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń monoton intervalların tekseriw máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń eń úlken hám eń kishi mánislerin anıqlaw máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń grafiklerin jasaw máseleleri kiredi.

Pitkeriw qániygelik jumısı usı ayılǵan parametrge iye máselelerdi úyrenwge baǵishlangan. Bul jerde tiykargı máseleler qatarına parametrge iye teńlemeler menen parametrge iye funktsiyalardı tekseriw máseleleri jatadı. Parametrge iye máseleler boyınsha bul pitkeriw qániygelik jumısında bir hám kóp parametrlerge iye ratsional hám irratsional tenlemelerdi, kórsetkishli, logorifmlik hám trigonometriyalıq teńlemelerdi tekseriwde tereń úyrenw máseleleri keltiriledi. Usı máseleler menen birgelikte parametrge iye funktsiyalardı tekseriwde olardıń ósiwi

hám kemeyiwı jaǵdayların, ekstremumların, eń úlken hám eń kishi mánislerin parametrge baylanıslı anıqlaw máseleleri úyreniledi.

Pitkeriw qániygelik jumısı kirisiw bóliminen, qániygelik jumısınıń mazmunı óz ishine alatuǵın tórt paraǵraftan, juwmaqlawshı hám paydalanǵan ádebiyatlar diziminen turadı.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń birinshi paraǵrafı **«Parametrge iye teńlemeler»** dep atalıp, onda bir hám kóp parametrge iye ratsional hám irratsional tenlemelerdi sheshiw máseleleri qaralıp, sheshimniń parametrge baylanıslı nızamların úyrenw máseleleri qaraladı.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń ekinshi paraǵrafı **«Parametrge baylanıslı kórsetkishli, logarifmlik hám trigonometriyalıq teńlemeler»** dep atalıp, onda tiykarınan bir hám kóp parametrge iye trigonometriyalıq teńlemelerdi sheshiw máseleleri úyreniledi.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń úsh inshi paraǵrafı **«Parametrge baylanıslı kvadrat funktsiyalardıń korenleri»** dep atalıp, onda parametrge baylanıslı bolǵan kvadrat funktsiyalardıń korenleri tuwrısındaǵı máseleler úyreniledi.

Pitkeriw qániygelik jumısınıń tórtinshi paraǵrafı **«Tuwındı járdeminde sheshiletuǵın parametrge baylanıslı hár qıylı máseleler »** dep atalıp, iymek sıızıqqa júrgiziletuǵın urınba máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń statsionar noqatların tabıw máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń monoton intervalların tekseriw máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń eń úlken hám eń kishi mánislerin anıqlaw máseleleri qaraladı.

§1. Parametrge iye teńlemeler

Bir parametrge baylanıslı rattsional tenlemeler. Meyli bizge parametrge iye

$$f(x, a) = g(x, a) \quad (1)$$

teńlemesi berilgen bolsın. Eger bizge usı qoyılǵan teńlemenıń (x, a) túrdegi sheshimler kopligin tabıw talap etilse, ol jaǵdayda biz eki ózgermeli teńlemelerge iye bolar edik. Biraq ayırım waqıtları (1) túrdegi teńleme ushın másele basqasha formada qoyıladı. Mısal ushın a ózgeriwshige fiksirlengen bazı bir mánislerin bersek, ol jaǵdayda (1) teńlemenı tek bir x ózgeriwshisiniń teńlemesi sıpatında qarawǵa boladı, usınıń menen birge bul teńlemenıń sheshimi a nıń saylap alǵan mánisleri ushın anıqlanadı. Eger biz bazı bir sanlı A kópligindegi a nıń hár bir mánisi ushın (1) teńlemenı x qa qatnas retinde sheshiw talap etilse, ol jaǵdayda (1) teńleme bir parametrge iye bir ózgeriwshi teńleme bolıp esaplanadı. A kópligi a parametrniń mánisler kópligi bolıp tabıladı. (1) kórinisindegi teńleme, bul mánisi boyınsha a parametriniń qısqa jazılıwı bolıp tabıladı.

(1) kórinisindegi parametrge iye teńlemelerdi sheshiw protsessinde ushıraytuǵın qıyınshılıq tómendegi máselelerge baylanıslı bolıp, a parametriniń bazı bir mánislerinde bul teńleme sheshimge iye bolmasa, bazı mánislerde teńleme sheshimge iye boladı yamasa bazı mánislerde teńleme kóp sheshimge iye boladı yamasa bazı bir mánislerde teńleme bir formula menen sheshiledi. Mısal ushın meyli

$$3a(a - 4)x = a - 4$$

teńlemesin alayıq. ádette $bx = c$ teńlemesi $x = \frac{c}{b}$ kórinisinde sheshiledi,

sebebi bizge berilgen teńlemede $b \neq 0$. a biz qarap atırǵan teńlemede x tıń aldındaǵı koeffitsienti $3a(a-4)$ bolıp, ol hár qıylı mánislerdi qabıl etiw múmkin. Eger $a=4$ bolsa, ol jaǵdayda teńleme $0x=0$ kórinisine iye bolıp, ol sheshimge iye bolmaydı. Eger $a \neq 4$ bolsa, ol jaǵdayda teńleme $0x=0$ kórinisine iye bolıp, bul teńleme ushın ıqtıyarlı san sheshimi boladı. Eger $a \neq 0$ $a \neq 4$ bolsa, ol jaǵdayda x tıń aldındaǵı koeffitsient nolden ózgeshe bolıp, teńleme

$$x = \frac{a-4}{3a(a-4)} = \frac{1}{3a}$$

túrdegi sheshimge iye boladı. Meyli endi

$$3a(a-4)x > a-4$$

teńlemesin alayıq. Teńsizlikti sheshiw waqtında bizge x tiń aldındaǵı koeffitsienttiń belgisi kerek boladı. Usı máselege baylanıslı aldınǵı teńlemeni sheshiw waqtında biz a parametriniń úsh jaǵdayın óz aldına kórgen bolsa, endi a parametriniń $a=0$; $a=4$; $a<0$; $0<a<4$; $a>4$ mánislerin óz aldına kóriwge tuwrı keledi.

$a=0$ bolǵan jaǵdayda berilgen teńsizlik $0x > -4$ bolıp, bul teńsizlikti x tiń barlıq mánisleri qanaatlandıradı.

$a=4$ bolǵan jaǵdayda berilgen teńsizlik $0x > 0$ bolıp, bul teńsizlik sheshimge iye bolmaydı.

$a<0$ hám $a>4$ bolǵan jaǵdayda x tiń aldındaǵı koeffitsient $3a(a-4)$ oń bolıp, berilgen teńsizliktiń sheshimi tómendegishe boladı

$$x > \frac{a-4}{3a(a-4)} = \frac{1}{3a}$$

$0<a<4$ bolǵan jaǵdayda x tiń aldındaǵı koeffitsienti $3a(a-4)$ teris bolıp, sheshimi

$$x < \frac{a-4}{3a(a-4)} = \frac{1}{3a}$$

boladı.

Parametrge iye (1) teńlemeni sheshiw dep parametrdiń hár túrli mánislerinde (1) teńlemeden aldınǵı teńlemeler jıyınǵınıń haqıyqıy sanlar kópligindegi sheshimin tabıw máselesin túsinemiz.

Parametrge iye teńlemelerdi qaraǵan waqtında parametrdiń hár-bir sanlı mánisinen kelip shıqatuǵın teńlemelerdiń sheksiz kóp jıyındısın ayırım túrde jazıp shıǵıw múmkin emes, usı sebepli barlıq haqıyqıy sanlardıń R kópligin (yaki parametrdiń berilgen ózgeriw baǵdarın) shekli sandaǵı bir-biri menen

kesilispeytuǵın úles kóppliklerdiń birikpesi, yaǵnıy $R = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ túrde kórsetiwge urınamız. Bunday jaǵdayda R kópligi usınday $A_1, A_2, \dots$ úles kóppliklerge ajıralıw kerek, $a \in A_1$ ushın teńlemeler jıyındısı óz aldına qásiyetlerge iye boladı, $a \in A_2$ ushın bul teńlemeler jıyındısı basqasha bir qásiyetlerge iye bolıwı kerek. Bul kópplikler tómendegi qásiyetlerge iye:

a) bul kóppliklerdiń hár qaysısı haqıyqıy sanlar kópligi, yaǵnıy parametrdiń ózgeriw tarawı bolıp tabıladı; b) berilgen jıyındını quraytuǵın hár bir teńlemenıń, teńsizliktiń hám sistemaniń sheshimleri sáykes bir-biri menen kesilispeydi; v) berilgen jıyındını quraytuǵın hár bir teńlemenıń, teńsizliktiń hám sistemaniń sheshimleri parametrdiń usınday mánisler kóplikın dúzedi, bul kóppliklerdiń hár qaysısında berilgen teńlemeler birdey qásiyetlerge iye, birdey ózgeshilikke iye boladı.

Haqıyqıy sanlardıń bunday ajratılıwı parametrdiń arnawlı mánisleri ámelge asırıladı, bul jerde parametrdiń arnawlı mánisleri dep, usı mánisi arqalı ótkende teńleme sıpatın ózǵertetuǵın parametrdiń mánislerine aytamız. Parametrdiń bunday arnawlı mánisleri hám bul arnawlı mánisler arqalı R kópliginiń úles kóppliklerge ajratılıwı qanday ámelge asırılıwı haqqında mısallar qarap óteyik:

$$(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9 \quad (2)$$

teńlemesin alatuǵın bolsaq ol jaǵdayda (2) teńleme ushın parametrdiń arnawlı mánisleri sıpatında x tıń aldındaǵı koeffitsienti nolge aylanatuǵın jaǵdayda alınadı. Parametrdiń bunday mánisleri ushın qarap atırǵan teńlemenıń eki tárepin x tıń aldındaǵı koeffitsientine bólip bolmaydı, parametrdiń basqa mánisleri ushın bul bóliw ámelge asırıladı. (2) teńlemenı sheshiw ushın R dı $R = A_1 \cup A_2$ túrde jazıwǵa tuwrı keledi, bul jerde $A_1 = \{a; a^2 - a - 6 = 0\}$, $A_2 = \{a; a^2 - a - 6 \neq 0\}$. Bul jaǵdayda A_1 kópligi eki noqattan, yaǵnıy $a = -2, a = 3$ noqatlardan turatuǵın $A_1 = \{a / a = -2; a = 3\}$ kópligin hám A_2 kópligin $a \neq -2, a \neq 3$ ushın $A_2 = \{a / a \neq -2; a \neq 3\}$ túrde kórsetiwge boladı.

Bul teńleme $a = 3$ ushın $0x = 0$ kóriniske iye bolamız, yaǵnıy sheshim ıqtıyarlı haqıyqıy san boladı. $a = -2$ ushın teńleme $0x = -1$ kóriniske iye bolıp, bul teńleme sheshimge iye emes. Nátiyjede $a \neq -2, a \neq 3$ ushın teńleme

$$x = \frac{a^2 - 9}{a^2 - a - 6} = \frac{a + 3}{a + 2}$$

sheshimge iye bo`ladi. Usınday qılıp, bul jaǵdayda tómendegi juwmaqqa iye bolamız; eger $a = 3$ bolsa, ol jaǵdayda ıqtıyarlı haqıyqıy san sheshim boladı; eger $a = -2$ bolsa, ol jaǵdayda teńleme sheshimge iye emes; eger $a \neq -2, a \neq 3$ bolsa, ol jaǵdayda sheshim $x = \frac{a + 3}{a + 2}$ boladı.

Meyli endi

$$\frac{3x^2 - 2}{a^2 + 3a} + \frac{x - 1}{a + 3} + \frac{2}{a} = 0 \quad (3)$$

teńlemesin qarayıq. Bul teńleme ushın a parametriniń arnawlı mánisleri sıpatında $a(a + 3) = 0$ teńlemeniniń korenlerin alamız. a nıń bunday mánislerinde teńlemeniniń usı tárepi mániske iye bolmaydı. Bul jaǵdayda A_1 kópligin $A_1 = \{a / a = 0; a = -3\}$ hám A_2 kópligin $A_2 = \{a / a \neq 0; a \neq -3\}$ túrde kórsetiwge boladı.

Bul teńleme $a = 0$ ushın mániske iye emes. Egerde parametrdiń qandayda-bir mánislerinde teńleme mániske iye bolmasa, ol jaǵdayda parametrdiń bunday mánislerinde teńlemenini sheshimge iye emes dep qabıl etiwge boladı. Demek $a = 0$ ushın (3) teńleme sheshimge iye emes. Aqırında aytıp ótiw kerek, eger parametrdiń bazı-bir mánislerinde teńlemeniniń mániske iye bolıwı shárt emes, biraq parametrdiń qálegen mánislerinde bul teńleme mániske iye. $a = -3$ ushın (3) teńleme mániske iye emes, yaǵnıy teńleme sheshimge iye emes. $a \neq -3, a \neq 0$ ushın teńleme bir qatar túrlengennen soń

$$3x^2 + ax + a + 4 = 0 \quad (4)$$

túrge iye boladı. Bul teńleme kvadrat teńleme bolıwdan, ol barlıq waqıt sheshimge iye bola bermeydi. Eger a parametriniń bazı-bir mánislerinde bul teńlemeniniń diskriminantı teris bolmasa, ol jaǵdayda teńleme sheshimge iye boladı. Demek, ol

jaǵdayda a parametriniń aldınǵı arnawlı mánislerinen ózgeshe jáne bir arnawlı mánisleri payda boladı. Bul arnawlı mánislerin aldınǵı arnawlı mánislerinen ayırıw ushın keyingisi payda bolatuǵın arnawlı mánislerin ekinshi arnawlı mánisleri dep ataymız.

Endi parametrdiń ekinshi arnawlı mánislerin tabamız. Onıń ushın teńlemenıń $D = a^2 - 12(a + 4)$ diskriminantın nolge teńlestirip, a parametriniń $a_1 = 6 + 2\sqrt{21}$, $a_2 = 6 - 2\sqrt{21}$ mánislerin anıqlaymız. Ol jaǵdayda $6 - 2\sqrt{21} < a < 6 + 2\sqrt{21}$ ushın $D < 0$ boladı. Usınday etip (4) teńlemenı parametriniń mánisler kópligine qaray ótip

$$a \neq -3, \quad a \neq 0, \quad 6 - 2\sqrt{21} < a < 6 + 2\sqrt{21}; \quad a \leq 6 - 2\sqrt{21}; \quad a \geq 6 + 2\sqrt{21}$$

tarawınıń hár qaysısın jeke qarawǵa tuwrı keledi. Birinshi jaǵdayda (4) teńleme, usınıń menen birge (3) teńlemenıń ózi haqıyqıy sheshimge iye emes. Ekinshi hám úsh inshi jaǵdaylarda (4) teńleme ushın

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 12a - 48}}{6}$$

túrdegi sheshimge iye bolamız.

Usınday etip (3) teńlemenı sheshiw protsessinde parametrdiń mánisler kópliginiń jáne bir jeterli bólistiriliwine iye boldıq;

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6 - 2\sqrt{21} < a < 6 + 2\sqrt{21} \\ a \neq 0 \\ a \neq -3 \end{cases}, \quad a \leq 6 - 2\sqrt{21}, \quad a \geq 6 + 2\sqrt{21}$$

Dáslepki úsh jaǵdayda (3) teńleme sheshimge iye emes, keyingi eki jaǵdayda biz

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 12a - 48}}{6} \quad \text{túrdegi sheshimge iye boldıq.}$$

Alınǵan nátiyjelerdi juwmaqlap aytqanda tómendegi pikirge kelemiz; eger $6 - 2\sqrt{21} < a < 6 + 2\sqrt{21}$ bolsa sheshim joq; eger $a \leq 6 - 2\sqrt{21}$, $a \geq 6 + 2\sqrt{21}$ bolsa ol jaǵdayda sheshim joqarıdaǵı kóriniske iye boladı

Meyli endi

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0 \quad (5)$$

teńlemenı qarayıq. Parametrdiń arnawlı manisi $a=1$ bolıp tabıladı, sebebi $a \neq 1$ ushın berilgen teńleme kvadrat teńleme bolıp tabıldı, $a=1$ ushın teńleme kvadrat teńleme bolıp esaplanbaydı, bul jaǵdayda teńlemede sıpatı boyınsha ózgeris payda boladı. Demek, bul jaǵdayda parametrdiń mánisler kóplikin $a=1; a \neq 1$ túrge ajıratıwǵa boladı. Bul teńleme $a=1$ ushın $6x+7=0$ kóriniske iye boladı, bunnan $x = -\frac{7}{6}$. $a \neq 1$ jaǵdayında (5) kvadrat teńleme ushın bolatuǵın mánislerin alamız, bul mánisler a parametriniń ekinshi arnawlı mánisleri bolıp esaplanadı. Endi (5) teńlemenin diskriminantın dúzemiz: $D = (2a+1)^2 - (a-1)(4a+3)$, bunda $D = 5a+4$. Demek $D=0$ bolıw shártinen $a = -\frac{4}{5}$ boladı. Eger $a < -\frac{4}{5}$ bolsa, ol jaǵdayda $D < 0$ boladı, eger $a \geq -\frac{4}{5}$ yaki $a \neq 1$ bolsa, ol jaǵdayda $D \geq 0$.

Demek (5) teńlemenı sheshiw, bul $a < -\frac{4}{5}; a \geq -\frac{4}{5}$ yaki $a \neq 1$ jaǵdaylarınin hár birinde bul teńlemenı tekseriw bolıp esaplanadı. Eger $a < -\frac{4}{5}$ bolsa, ol jaǵdayda (5) teńleme sheshimge iye emes, eger $a \geq -\frac{4}{5}$ yaki $a \neq 1$ bolsa, ol jaǵdayda sheshim $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$ boladı. Olingan natijalarnı yakunlab aytganda quyidagi xulosaga kelimiz; eger $a < -\frac{4}{5}$ bolsa, ol jaǵdayda sheshim bolmaydı; eger $a=1$ bolsa ol jaǵdayda $x = -\frac{7}{6}$; eger $a \geq -\frac{4}{5}$ yaki $a \neq 1$ bolsa ol jaǵdayda $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$

Kóp parametrge baylanıslı teńlemeler. Bul paragrafta bir erikli ózgeriwshi argumentke baylanıslı, parametrleriniń sanın birewden kóp bolǵan, aytayıq eki parametrge baylanıslı bolǵan

$$f(x, a, b) = g(x, a, b)$$

túrdegi teńlemelerdi ham úyrenemiz, bul jerde parametrlerdiń (a,b) juplıq jaǵdayda bir A kópligine tiyisli. Bul kóplik parametrleriniń ózgeriw túri dep ataladı. Egerde qosımsha shártler berilmegen bolsa, ol jaǵdayda parametrleriniń ózgeriw túri R^2 , eki parametrge iye teńlemenı sheshiw, bul a hám b parametrleriniń usı kópliktegi hár qıylı mánisleri ushın bul teńlemeleriniń haqıyqıy sanlar kópligindegi sheshemin tabıw bolıp esaplanadı.

Bir neshe parametrge iye teńlemelerdi sheshiw, bir parametrge iye teńlemelerdi sheshiwge uqsas boladı. Parqı usınnan ibarat bolıp, R^2 kóplikti jeterli dárejede bólistiriwde bul a hám b parametrleriniń hár biriniń arnawlı mánislerdi ǵana esapqa alıp qoymay, bálki parametrleriniń bir-biri menen arnawlı baylanıslıǵın ham esapqa alamız.

Mısal ushın kóp parametrge baylanıslıǵı $kx - p = 0$ túrdegi sızıqlı teńlemelerdi qarayıq. Bul teńleme $kx = p$ túrine iye bolıp, bunnan $k \neq 0$ ushın $x = \frac{p}{k}$ túrdegi birden-bir sheshimge iye boladı, $p = 0, k = 0$ ushın sheksiz kóp sheshimge iye, $p \neq 0, k = 0$ ushın sheshimge iye bolmaydı. Dara jaǵdayda $k = (a-b)(a-3)$ hám $p = (a-b)(a+2)$ bolsa, bul teńleme

$$(a-b)(a-3)x = (a-b)(a+2)$$

túrine iye boladı. $a = 3$ parametrdiń arnawlı mánisi $a-b=0$ parametrleriniń arnawlı erikli mánisi bolıp esaplanadı. Sol sebepli a hám b parametrleriniń mánisleriniń R^2 kópligin jeterli dárejede bólistiriwdi tómendegishe dúziwge boladı:

$$R^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

bul jerde

$$A_1 = \{(a,b) \in R^2; a = 3, a = b\}, \quad A_2 = \{(a,b) \in R^2; a \neq 3, a = b\},$$

$$A_3 = \{(a,b) \in R^2; a = 3, a \neq b\}, \quad A_4 = \{(a,b) \in R^2; a \neq 3, a \neq b\}.$$

Birinshi hám ekinshi jaǵdaylarda teńleme sheksiz kóp sheshimge iye boladı, yaǵnıy ıqtıyarlı haqıyqıy san teńlemenıń sheshimi bolıp tabıladı. Úshinshi

jaǵdayda teńleme sheshimge iye bolmaydı, tórtinshi jaǵdayda teńleme

$$x = \frac{a+2}{a-3} \text{ túrdegi sheshimge iye boladı.}$$

Alınǵan nátiyjelerdi juwmaqlap aytqanda tómendegi pikirge kelemiz eger $a=b$ bolsa, ol jaǵdayda $-\infty < x < \infty$, eger $a \neq 3$, $a=b$ bolsa, ol jaǵdayda sheshimge joq, eger $a \neq 3$, $a \neq b$ bo`lsa, ol jaǵdayda $x = \frac{a+2}{a-3}$ Meyli jáne bir mısal sıpatında eki parametrgе iye

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2$$

kórinisindegi teńlemenі qarayıq. Bul berilgen teńlemeden parametrleriniń arnawlı mánislerin yaqi olardıń óz-ara erikliligin túsinemiz. Teńlemenі túrlendirip, onı

$$2x^2 - 3(a+b)x + (a+b)^2 = 0$$

túrge alıp kelemiz. Bul jerde x^2 tıń aldınǵı koeffitsienti nolden ózgeshe hám ıqtıyarlı a, b ushın diskriminant teris emes. Demek, bul jaǵdayda parametrlер arnawlı mánislerge yaqi arnawlı eriklilikke iye emes. Keyingi teńlemeden $x_1 = a+b$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ boladı.

Endi sheshimdi tekserip kóremiz. Onıń ushın tabılǵan sheshimlerdi berilgen teńlemedegi orınlargа qoyamız:

$$\frac{a}{x_1-b} + \frac{b}{x_1-a} = \frac{a}{a+b-b} + \frac{b}{a+b-a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{b}$$

$\frac{a}{a} + \frac{b}{b} = 2$ teńligi tek ǵana $a \neq 3$, $a \neq b$ ushın orınlanadı, demek $x_1 = a+b$ berilgen teńlemenіń tek $a \neq 0$, $b \neq 0$ ushın sheshimi bolıp esaplanadı. Eger $a=0$, $b=0$ bolsa ol jaǵdayda $x_1 = a+b$ shet koreni bolıp qaladı.

Endi berilgen teńlemege $x_2 = \frac{a+2}{2}$ ni qoyıp kóremiz:

$$\frac{a}{x_2-b} + \frac{b}{x_2-a} = \frac{2a}{a-b} + \frac{2b}{a-b} = \frac{2(a+b)}{a-b}$$

$\frac{2(a-b)}{a-b} = 2$ teńligi tek $a-b \neq 0$ ushın orınlanadı, demek $x_2 = \frac{a+2}{2}$ berilgen teńlemenin tek $a \neq b$ ushın sheshimi bolıp tabıladı. Eger $a=b$ bolsa, ol jaǵdayda shet koreni bolıp qaladı.

Nátiyjede mina sheshimge iye bolamiz: eger $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ bo`lsa, ol jaǵdayda $x_1 = a+b; x_2 = \frac{a+2}{2}$, eger $a=0, b \neq 0$ bolsa, ol jaǵdayda $x = \frac{b}{2}$, eger $a \neq 0, b=0$ bolsa, ol jaǵdayda $x = \frac{a}{2}$, eger $a=b \neq 0$ bolsa, $x=2a$ yaki $x=2b$, eger $a=b=0$ bolsa, ol jaǵdayda teńleme sheshimge iye emes.

Parametrlerdin (a, b) jup tegisliktegi noqat penen bir mánisti anıqlanıwdan, tegislikte Oa hám Ob perpendikulyar tuwrılar júrgizilip, parametrler tegisligin dúziwge boladı. Ol jaǵdayda joqarıdaǵı alınǵan juwaplardı bul parametrler tegisliginde grafik túrde kórsetiwge boladı.

Parametrge baylanıslı irratsional teńlemeler. $f(x, a) = g(x, a)$ teńleme bir erikli ózgeriwshi x tın irratsional teńlemesi dep ataladı, egerde teńlik belgisinin bir yaki eki tárepinde x qa qarata irratsional anlatpalar bolsa. Irratsional teńlemelerdi sheshiw teńlik belgisinin eki tárepini dárejege kóterip, payda bolǵan ratsional teńlemenin teńlemenin sheshiwge alıp kelinesi. Biraq bul jaǵdayda shet korenler payda bolıp ketiwi múmkin. Sol sebepli alınǵan sheshim álbette tekserilip kórulesi.

Kópshilik irratsional teńlemeler dárejege kóteriw arqalı ózine teń kúshli bolmaǵan kvadrat teńlemelerge alıp keledi. Sol sebepli juwmaqlawshı esapta berilgen teńlemenin qaysı sheshimlerin hám parametrleriniń qanday mánislerinen alınǵanlıǵın anıqlaw zárúr boladı. Eger

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{1-(x+a)} \quad (6)$$

teńlemenin qaraytuǵın bolsaq, $a=0$ parametrdin arnawlı mánisi bolıp tabıladı, sebebi $a < 0$ ushın teńleme mániske iye emes, $a \geq 0$ ushın ol mániske iye boladı. Sol sebepli (6) teńleme ushın R kópligin parametrdin mánisleri boyınsha

$a < 0; a \geq 0$ türde bólistiriw maqsetke muwapıq boladı. $a \geq 0$ ushin (6) teńlemenin eki tárepın kvadratqa kóterip, túrlendiriwden keyin

$$2\sqrt{ax} = 1 - 2x - 2a$$

kórinistegi teńlemege iye bolamız. Bul jerde biz parametrdin jańa arnawlı mánislerin sezbeymiz. Aqırǵı teńlemenin eki tárepın kvadratqa kóterip, túrlendirgennen keyin

$$4x^2 + 4x(a-1) + 4a^2 - 4a + 1 = 0$$

túrdegi kvadrat teńlemege iye bolamız. Bul teńlemenin diskriminantın anıqlasaq

$$D = 4(a-1)^2 - 4(4a^2 - 4a + 1) \text{ bolıp, bunda nolge teńlestirsek } a_1 = 0, a_2 = \frac{2}{3} \text{ boladı.}$$

Parametrdin bul mánisleri ekinshi arnawlı mánisler bolıp tabıladı. Bunnan $a > \frac{2}{3}$

bolsa, $D < 0$ boladı. Parametrdin birinshi arnawlı mánisleri $a \geq 0$ edi. Solay etip kvadrat teńleme ushın parametrdin óń emes

$$a > \frac{2}{3}; \quad 0 \leq a \leq \frac{2}{3}$$

túrdegi bólistiriwge iye bolamız. Bullardin birinshi jaǵdayda teńleme sheshimge

$$\text{iye emes, ekinshi jaǵdayda } x_{1,2} = \frac{1-a \pm \sqrt{2a-3a^2}}{2}. \text{ Joqarıda aytqanday (6)}$$

teńleme $a < 0$ ushın sheshimge iye emes edi. Endi bul teńleme ushın tómendegishe

juwmaqqa; eger $a < 0; a > \frac{2}{3}$ bolsa, teńleme sheshimge iye emes, $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ ushın ol

joqarıdaǵı kórinistegi sheshimge iye. Teńleme irratsional bolǵanlıqtan, teńlemenin sheshiw protsesinde shet korenler payda bolıwı múmkin, sol sebepli alınǵan nátiyjeni tekserip kórgen maqul. Tekseriw sheshimleriniń múmkin bolǵan túri járdeminde ámelge asırıladı. Teńlemenin anıqlanıw oblastı

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - (x + a) \geq 0 \end{cases}$$

teńsizlikler sisteması járdeminde anıqlanadı. Kvadrat teńleme boyınsha $1-2x-2a \geq 0$ bolıwı kerek. Demek (6) teńleme ushın sheshimleriniń múmkin bolǵan túri

$$x \geq 0, 1-(x+a) \geq 0, 1-2x-2a \geq 0$$

teńsizlikler sisteması menen yaki $x \geq 0, x+a \leq \frac{1}{2}$ teńsizlikler sisteması menen anıqlanadı. Ol jaǵdayda tabılǵan x_1 sheshiminiń usı teńsizlikti qanaatlandırıwın tekserip kóremiz:

$$\frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2} \geq 0, \frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2} + a \leq \frac{1}{2} \quad (7)$$

Bul sistemanıń ekinshi teńsizligi $\sqrt{2a-3a^2} \leq -a$ teńsizligine teń kúshli hám ol qaralıp atırǵan $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ tarawda birden-bir $a=0$ sheshimge iye. Usınıń menen birge $a=0$ aqırǵı sistemadaǵı birinshi teńsizlikti qanaatlandıradı. Demek (7) sistema birden-bir $a=0$ sheshimge iye. Demek $x_1 = \frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}$. $a=0$ ushın (6) teńlemeniniń $x_1 = \frac{1}{2}$ túrdegi sheshimi bar bolıp, eger $a \neq 0$ bolsa, ol jaǵdayda x_1 shet koreni payda boladı.

Endi (7) ni x_2 niń qanday qanaatlandırıwın tekserip kóremiz

$$\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} \geq 0, \frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} + a \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Bul sistema } \begin{cases} \sqrt{2a-3a^2} \leq 1-a \\ \sqrt{2a-3a^2} \geq a \end{cases}$$

sistemasına teń kúshli. Bul sistemanı sheshsek $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Solay etip parametrdiń

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ mánisleri ushın sheshim $x_2 = \frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$ boladı.

Juwmaqlap tómendegi nátiyjege iye bolamız: eger $a < 0, a > \frac{1}{2}$ bolsa, ol jaǵdayda sheshim joq; eger $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ bolsa, ol jaǵdayda sheshim keyingi formula menen anıqlanadı.

Meyli mısál járdeminde jáne bir

$$\sqrt{x-a} = x-b \quad (8)$$

teńlemenı qarayıq, $\sqrt{x-a} \geq 0, x \geq a$ bolıwınan, bul teńlemenıń korenleri $x \geq b, x \geq a$ shártlerin qanaatlandıratuǵın sanlar boladı.

Teńlemenıń eki tárepın kvadratqa kóterip $x-a = (x-b)^2$ kvadrat teńlemege iye bolamız. Bul teńlemenıń ıqtıyarlı koreni $x \geq a$ shártin qanaatlandıradı. Sol sebepli (8) teńleme $x \geq b$ ushın $x-a = (x-b)^2$ yaki $x^2 - (2b+1)x + a + b^2 = 0$ teńlemesine teń kúshli boladı.

Meyli $D = 4b - 4a + 1$ aqırǵı teńlemenıń diskriminantı bolsın. Ol jaǵdayda $b = a - \frac{1}{4}$ ushın $D = 0$ bolıp $x_1 = x_2 = b + 0.5$ boladı. $b > a - \frac{1}{4}$ ushın $D > 0$ bolıp

$$x_1 = \frac{1}{2}(2b+1 - \sqrt{4b-4a+1}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(2b+1 + \sqrt{4b-4a+1})$$

boladı, usınıń menen birge $x_1 < x_2$,

Endi tabılǵan korenlerdiń qaysı biri qanday shártler ortasında $x \geq b$ teńsizligin qanaatlandıırıwın anıqlaymız. Onıń ushın

$$f(x) = x^2 - (2b+1)x + a + b^2$$

funktsiyasın kiritemiz hám $f(b)$ nı esaplaymız:

$$f(b) = b^2 - (2b+1)b + a + b^2 = a - b$$

Ol jaǵdayda $a - \frac{1}{4} < b < a$ ushın $f(b) > 0$ hám bunıń ushın $b < b + \frac{1}{2}$, bul jerde $b + \frac{1}{2}$ qosındısı $f(x)$ niń korenleriniń yarım qosındısı. Ol jaǵdayda $b < x_1 < x_2$.

Bunnan $a - \frac{1}{4} < b < a$ bolsa, ol jaǵdayda x_1 hám x_2 lar berilgen (8)

teńlemenin korenleri bolıwı kelip shıqadı. Eger $b = a$ bolsa, teńleme

$$\sqrt{x-b} = x-b$$

bolıp, bunnan

$$\sqrt{x-b}(1-\sqrt{x-b})=0$$

Yaǵnıy $x_1 = b$, $x_2 = b+1$ boladı. Ol jaǵdayda $b > a$ ushın $f(b) < 0$ boladı, usı sebepli $x_1 < b < x_2$ bolıp, sheshim x_2 boladı. Solay etip nátiyjede tómendegishe sheshimge

ıye bolamız: $b = a - \frac{1}{4}$ bolsa, $x = b + 0.5$, $a - \frac{1}{4} < b \leq a$ bolsa,

$x = \frac{1}{2}(2b+1 \pm \sqrt{4b-4a+1})$, $b > a$ bolsa, $x = \frac{1}{2}(2b+1 + \sqrt{4b-4a+1})$, $b < a - \frac{1}{4}$ bolsa,

sheshim joq.

§2. Parametrge baylanışlı kórsetkishli, logorifmlik hám trigonometriyalıq teńlemeler

Meyli

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)} \quad (1)$$

teńlemesi berilgen bolsın. Eger a hám b lar anıq túrde óziniń san mánisine iye bolmasa, ol jaǵdayda bul mánisler parametrler bolıp, (1) teńleme parametrge iye kórsetkishli teńleme bolıp tabıladı.

Bul kórsetkishli teńlemenin anıqlanıw oblastı $f(x)$ hám $\varphi(x)$ funktsiyalarınin anıqlanıw oblastınıń ulıwma bólimi bolıp esaplanadı. Meyli bul kópliklardı R dep belgileyik. Eger $a = b = 1$ bolsa, ol jaǵdayda (1) teńlemenin sheshimi usı R kópliknıń ózi bolıp esaplanadı. Eger $a = 1$, $b \neq 1$ bolmasa, ol jaǵdayda (1) teńleme

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ x \in R \end{cases}$$

sistemaǵa teń kushli boladı.

Eger $a \neq 1$, $b = 1$ bolsa, ol jaǵdayda (1) teńleme

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in R \end{cases}$$

sistemasına teń kúshli

Eger $a = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ bolsa, ol jaǵdayda (1) teńleme $f(x) = \varphi(x)$ teńlemesine teń kúshli boladı. (1) teńlemenin sheshiw ushın $a \neq b$, ($a \neq 1$, $b \neq 1$) jaǵdayda

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)}$$

hám

$$\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{\varphi(x)} \quad (2)$$

teńlemeleriniń teń kúshliligin paydalanamız, bul jerde $c > 0$, ($c \neq 1$) ba`zi óń san.

Iqtıyariy teńlemenı sheshiw ápiwayı kórsetkishli teńlemenı sheshiwge alıp kelinedi. Mısal ushın

$$\frac{e^{-(x+0.5)}}{\sqrt{a}} = a \cdot a^{-2x} \quad (3)$$

teńlemesi $a > 0$ ushın mániske iye bolıp barlıq haqıyqiy sanlar kópligi teńlemenıń anıqlanıw oblastı bolıp esaplanadı. Onı

$$a^{-x-1} = a^{-2x+1}$$

túrge alıp kelsek, bunnan $x = 2$ boladı.

Mısal 1. $a > 0$ ushın a hám b parametrlerge baylanıslı

$$a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{3 \cdot 0.6x} = b \quad (4)$$

teńlemesin esaplayıq.

$a = b = 1$ ushın iqtıyarlı haqıyqiy san, bul teńlemenıń sheshimi bolıp tabıladı, $a = 1, b \neq 1$ ushın sheshim joq. $0.6 = \frac{2}{3}$ teńligin paydalanıp, (4) teńlemenı

$$a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{2x} = b$$

yaki

$$a^{2x-3}(a^3 - a + 1) = b \quad (5)$$

túrge alıp kelemiz. Bul teńlemenıń korenin tabıw ushın dáslep teńliktiń eki tárepin $a^3 - a + 1$ ğa bóliw kerek. Onıń ushın dáslep $a > 0, (a \neq 1)$ bolǵanda $a^3 - a + 1$ ańlatpası nolge teń bolıwın yaki bolmaslıǵın anıqlawımız kerek. Bunıń ushın $a^3 - a + 1 = 0$ yaki

$$a^3 = a - 1 \quad (6)$$

teńlemeiniń sheshimin tabamız.

$y = a^3$ hám $y = a - 1$ funksiýalarınıń grafiklerin sızıp (6) teńlemenıń korenleri absissa kósheri teris baǵdarında jaylasqanlıǵın anıqlaymız. $a > 0$ ushın $a^3 > a - 1$, yaǵnıy $a^3 - a + 1 > 0$.

Demek $a^{2x-3} > 0$ ekenligin esapqa alıp, $b > 0$ boladı degen juwmaqqa kelemiz.

Solay etip $a > 0, (a \neq 1), b > 0$ ushın (5) teńleme

$$a^{2x-3} = \frac{b}{a^3 - a + 1}$$

teńlemesine teń kúshli boladı. Bunnan

$$2x - 3 = \log_a \frac{b}{a^3 - a + 1}$$

Yáǵnıy

$$x = \frac{1}{2} \left(\log_a \frac{b}{a^3 - a + 1} + 3 \right)$$

Solay etip biz tómendegi juwmaqqa erisemiz:

$$\text{a) } a > 0, (a \neq 1), b > 0 \text{ ushın } x = \frac{1}{2} \left(\log_a \frac{b}{a^3 - a + 1} + 3 \right)$$

$$\text{b) } a = b = 1 \text{ ushın } x \text{ iqtıyarlı san,}$$

$$\text{v) } a = 1, b \neq 1 \text{ hám } b < 0 \text{ ushın sheshim joq.}$$

$$\log_a f(x) = \log_a F(x) \quad (7)$$

teńlemesi ápiwayı logarifmlik teńleme dep ataladı, bul jerde $a > 0, (a \neq 1), b > 0, (b \neq 1)$. Bul teńlemenıń anıqlanıw oblastı

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ F(x) > 0 \end{cases}$$

bolıp, $a = b$ ushın

$$f(x) = F(x)$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńleme (7) teńlemege teń kúshli boladı.

Eger $a \neq b$ bolsa, ol jaǵdayda (4) teńlemenı sheshiw

$$\log_a f(x) = \frac{1}{\log_a b} \log_a F(x)$$

teńlemenı sheshiwge alıp keledi, bul teńleme

$$[f(x)]^{\log_a b} = F(x)$$

teńlemege teń kúshli. Bul jerde $N > 0$, $a > 0$, $(a \neq 1)$, $b > 0$, $(b \neq 1)$ ushın orınlı bolatuǵın

$$\log_a N = \frac{1}{\log_a b} \log_a N$$

formulası qollanılǵan.

Iqtıyarlı logarifmlik teńlemenı sheshiw (7) túrdegi ápiwayı logarifmlik teńlemenı sheshiwge alıp keledi. Mısal ushın

$$3\lg^2(x-a) - 10 \cdot \lg(x-a) + 3 = 0$$

teńleme ápiwayı logarifmlik teńlemelerge teń kúshli:

$$a) \lg(x-a) = 3 \quad b) \lg(x-a) = \frac{1}{3}$$

Bulardıń birinshisinen $x = a + 1000$, ekinshisinen $x = a + \sqrt[3]{10}$

Meyli parametrge baylanıslı kórsetkishli hám logarifmlik teńlemelerge baǵışlangan jáne bir qatar mısallar qarayıq.

Mısal 2. Meyli a hám b parametrlerine baylanıslı

$$\lg(x-a) - \lg 2 = \frac{1}{2} \lg(x-b)$$

teńlemesin qarayıq.

Bul teńlemenıń anıqlanıw oblastı $x > a$, $x > b$ teńsizlikler sistemasınıń sheshimi bolıp tabıladı. Bul jaǵdayda teńleme

$$\lg \frac{x-a}{2} = \lg \sqrt{x-b}$$

teńlemesine, yaki

$$x-a = 2\sqrt{x-b}$$

teńlemesine teń kúshli boladı. $a = b$ ushın bul teńleme

$$x-a = 2\sqrt{x-a}$$

kóriniske iye boladı. $\sqrt{x-a} \neq 0$ bolıwınan keyingi teńleme $\sqrt{x-a} = 2$ teńlemesine teń kúshli, yaǵnıy $x = a + 4$ boladı.

Endi $a \neq b$ jaǵdayın qaraymız. Bul jaǵdayda teńlemenıń eki tárepi kvadratqa kóterip hám ápiwayılastırıp

$$x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4a = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemenıń D diskriminantı ushın $\frac{1}{4}D = 4(a-b+1)$ teńligi orınlı. $D=0$ yaǵnıy $a=b-1$ ushın $x_1 = x_2 = a+2$, $D>0$ yaǵnıy $a>b-1$ ushın teńleme

$$x_1 = a+2 - \sqrt{a-b+1}, \quad x_2 = a+2 + \sqrt{a-b+1}$$

túrdegi hár qıylı korenlerge iye. Endi a hám b nıń x_1 hám x_2 lar $x > a$ shártin qanaatlandıratuǵın mánislerin tabamız, $x > b$ shárti óz-ózinen orınlanadı, sebebi x_1 hám x_2 lar $(x-a)^2 = 4(x-b)$ teńlemesiniń korenleri. Onıń ushın $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4b$ dep belgilep $f(a)$ nı esaplaymız:

$$f(a) = a^2 - 2(a+2)a + a^2 + 4b = 4(b-a), \quad b-1 < a < b, \quad a < b < x_1 < x_2,$$

Sol sebepli x_1 hám x_2 lar teńlemenıń koreni boladı. Eger $a > b$ bolsa, $f(a) < 0$ bolıp, $b < x_1 < a < x_2$ yaǵnıy $x > a$ teńsizligin tek x_2 qanaatlandıradı.

Endi parametrge baylanıslı bolǵan trigonometriyalıq teńlemelerdi qaraymız. Egerde belgisiz muǵdar trigonometriyalıq funktsiyalar belgisi astında qatnasıp kelse onda onı trigonometriyalıq teńleme dep ataladı. Bunday teńlemelerdi sheshiw **1ıwayı** trigonometriyalıq teńlemelerdi sheshiwge alıp keledi. Usınday teńlemelerdiń biri

$$\sin f(x) = a$$

teńlemesi bolıp, bul teńleme $|a| \leq 1$ ushın $f(x) = \arcsin a + 2\pi n$ yaki $f(x) = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ teńlemesine teń kúshli boladı, yaki bunnan

$$f(x) = (-1)^k \arcsin a + \pi k$$

boladı. Usıqan uqsas

$$\cos f(x) = a$$

teńlemesin qarayıq

$$f(x) = \pm \arccos a \pm 2\pi k$$

boladı, bul jerde $|a| \leq 1$.

$$\operatorname{tg} f(x) = a \text{ hám } \operatorname{ctg} f(x) = a$$

teńlemeleri sáykes

$$f(x) = \arctg a \pm \pi k \text{ hám } f(x) = \operatorname{arcc}tg a \pm \pi k$$

teńlemelerge teń kúshli boladı. Endi parametrge baylanıslı usınday trigonometriyalıq teńlemelerge mısallar keltireyik.

Mısal 3. $(a-1)\cos x + (a+1)\sin x = 2a$ teńlemesin qarayıq. Bul teńlemenı sheshiw ushın onı

$$(3a-1)\sin^2 \frac{x}{2} - 2(a+1)\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + (a+1)\cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

túrge alıp kelemiz. Bunnan $a = \frac{1}{3}$ ushın

$$-\frac{8}{3}\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{4}{3}\cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

bolıp, bunnan

$$a) \cos \frac{x}{2} = 0, x = \pi(2k+1)$$

hám

$$b) \cos \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} = 0, x = 2\arctg \frac{1}{2} + 2\pi k$$

túrdegi sheshimlerge iye bolamız.

Eger $a \neq \frac{1}{3}$ bolsa, ol jaǵdayda berilgen teńleme

$$(3a-1)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2(a+1)\operatorname{tg} \frac{x}{2} + a+1 = 0$$

teńlemesine teń kúshli bolıp, bunnan $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ǵa qarata

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a+1-\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a+1+\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}$$

túrdegi sheshimge iye bolamız. Onda $-1 \leq a \leq 1$, $a \neq \frac{1}{3}$ ushın

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{a+1 \pm \sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1} + 2\pi k$$

boladı, $|a| > 1$ ushın teńleme sheshimge iye emes.

Mısal 4. Meyli endi

$$a \sin^2 x + \cos x = 0$$

teńlemesin alayıq. $\cos x = z$, $|z| \leq 1$ dep belgilep, berilgen teńlemeni

$a \cos^2 x - \cos x - a = 0$ túrde jazıp alıp, bunda z ge qarata $az^2 - z - a = 0$ túrdegi kvadrat teńlemege iye bolamız.

a) $a = 0$ ushın $z = 0$ bolıp, bunnan $\cos x = 0$ yaki $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ boladı.

b) $a \neq 0$ ushın $z_1 = \frac{1}{2a}(1 - \sqrt{1+4a})$, $z_2 = \frac{1}{2a}(1 + \sqrt{1+4a^2})$

shárt boyınsha $|z| \leq 1$ teńsizligin qanaatlandıruw kerek. Bul shártti qanaatlandıratuǵın a parametrleriniń mánislerin tabıw ushın

$$f(z) = az^2 - z - a$$

dep belgileymiz hám $af(-1)$, $af(1)$ lardı esaplaymız:

$$af(-1) = a(a+1-a) = a$$

$$af(1) = a(a-1-a) = -a$$

Bunnan $a > 0$ bolsa, ol jaǵdayda $af(-1) > 0$ hám $af(1) < 0$ bolıp, $-1 < \frac{1}{2a}$

teńsizligi o`rinli boladı, yaǵnıy $f(z)$ niń korenleriniń qosındısıniń yarımı -1 den úlken boladı. Ol jaǵdayda $-1 < z_1 < 1 < z_2$ bolıp, bunnan

$$z_1 = \frac{1}{2a}(1 - \sqrt{1+4a^2}) \text{ boladı.}$$

Eger $a < 0$ bolsa, ol jaǵdayda $af(-1) < 0$, $af(1) > 0$ bolıp, bunnan $z_2 < -1 < z_1 < 1$ boladı, yaǵnıy bul jagdayda sheshim z_1 diń ózi boladı. Solay etip:

$a = 0$ ushın $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $a \neq 0$ ushın

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2a} \left(1 - \sqrt{1 + 4a^2} \right) + 2\pi k$$

túrdegi sheshimlerge iye bolamiz.

§3. Parametrge baylanıslı kvadrat funktsiyalardıń nolleri

Viet teoreması. Bul paragrafta parametrge baylanıslı bolǵag kvadrat funktsiyalardıń korenleri tuwrısındaǵı máselelerdi úyrenw waqtında mektep kursı matematikasınan tanıs Viet teoremasın tereń paydalanamız hám usı teorema járdeminde kvadrat funktsiyalardıń korenleri menen parametr arasındǵı baylanısın úyrenemiz. Bul máselede bizge qandayda bir kóz qarastı keltirip ótiwdiń zárúrligi bolmay, teoremanı tek anıq máselelerde paydalanıw usılların úyrenemiz.

Mısal 1. a parametriniń qanday mánislerinde

$$x^2 - x\sqrt{a^2 - 12a} - 3a - 2 = 0$$

teńleme korenleriniń kvadratlarınıń qosındısı eń kishi boladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Dáslep berilgen kvadrat teńlemeniniń $D = a^2 + 8$ diskriminantın tabamız. Bul diskriminanttan kórinip turıptı, berilgen teńleme $a^2 - 12a \geq 0$ ushın, yaǵnıy $a \leq 0$ hám $a \geq 12$ ushın hámme waqıt eki korengge iye boladı.

Viet teoremasın paydalanıp

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\sqrt{a^2 - 12a})^2 - 2(-3a - 2) = a^2 - 12a + 6a + 4$$

teńligine iye bolamız. Máseleni sheshiw ushın endigi másele $f(a) = a^2 - 6a + 4$ kvadrat funktsiyanıń $(-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ oblastındaǵı eń kishi mánisti anıqlaymız. $a \leq 0$ ushın $f(a) \geq f(0) = 4$ hám $a \geq 4$ ushın $f(a) \geq f(4) = 12$ bolıwı sebepli $f(a) = a^2 - 6a + 4$ funktsiyasınıń $(-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ oblastındaǵı eń kishi mánisi $a = 4$ noqatta boladı.

Mısal 2. a parametriniń qanday mánislerinde

$$(a^2 - 2a + 2)x^2 + 2(a - 1)ax - 3a^2 = 0$$

teńlemeniniń eki x_1 hám x_2 korenleri bul $x_1x_2 < |ax_1| - |ax_2|$ teńsizlikti qanaatlandıradı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Teńlemeniniń shep tárepin $f(x)$ arqalı belgileymiz. Bul teńlemeniniń korenleriniń bar bolıw shártin diskriminantı esaplamay anıqlaw múmkin. $f(x)$ kvadrat úsh aǵzasınıń bas koeffitsienti iqtıyarlı

a ushın óń hám $f(0) = -3a^2 \leq 0$ bolıwı sebepli $f(x) = 0$ teńleme hámme waqıt korengge iye boladı. $a \neq 0$ ushın teńleme eki korengge iye boladı. Bul fakt geometriyalıq kóz qarastan hám anıq, sebebi parabolanıń eki ushı joqarı qaraǵan hám onıń teris mánisleri qabıl etetuǵın noqatlar bar. Eger $a \neq 0$ bolsa, bul jaǵdayda teńleme eki hár qıylı korenlerge iye boladı.

Eger $a = 0$ bolsa, bul jaǵdayda teńleme bir-birine teń bolǵan $x = 0$ túrdegi eki korengge iye boladı, bul korenler $x_1 x_2 < |ax_1| - |ax_2|$ teńsizlikti qanaatlandırmaydı. Eger $a \neq 0$ bolsa, bul jaǵdayda Viet teoreması boyınsha eki korenniń kóbeymesi

$$x_1 x_2 = \frac{-3a^2}{a^2 - 2a + 2} < 0$$

teńsizlikti qanaatlandırıp, olar hár qıylı belgilerge iye boladı. Bul jaǵdayda

$$|x_1| - |x_2| = x_1 + x_2 = \frac{-2(a-1)a}{a^2 - 2a + 2}$$

yaki

$$|x_1| - |x_2| = -(x_1 + x_2) = \frac{2(a-1)a}{a^2 - 2a + 2}$$

boladı. Endi tekserilip atırǵan teńsizlikti

$x_1 x_2 < |a| (|x_1| - |x_2|)$ kórinisinde jazıp, a parametrdiń mánislerin

$$\begin{cases} \frac{-3(a-1)a}{a^2 - 2a + 2} < \frac{-2|a|(a-1)a}{a^2 - 2a + 2} \\ \frac{-3(a-1)a}{a^2 - 2a + 2} < \frac{2|a|(a-1)a}{a^2 - 2a + 2} \end{cases}$$

sistemasın sheshiw arqalı anıqlaymız. Eger $a \neq 0$ ekenligin esapqa alsaq, bul jaǵdayda bul sistemadan

$$\begin{cases} 3|a| > 2a(a-1) \\ 3|a| > 2a(1-a) \end{cases}$$

sistemasın alamız hám bunnan a parametriniń $-\frac{1}{2} < a < 0$ hám $0 < a < \frac{5}{2}$ mánislerine iye bolamız.

Berilgen noqatlarǵa qarata kvadrat funktsiyalardıń korenleriniń jaylasıwı. Aldıńǵı punkttegi ayırım máselelerde berilgen teńlemenin korenleri $x=0$ noqatqa qarata esapqa alıńǵan edi, aytayıq ekinshi máselede korenlerdin belgileri esapqa alıńǵan edi. Bul punktte bul esaptı ulıwmalastırıp, tek $x=0$ noqatqa emes, basqa noqatlarǵa qarata yaki bolmasa bir neshe noqatlarǵa qarata jumıs alıp baramız. Anıq aytqanda berilgen teńlemenin koreni parametrdin qanday mánislerinde berilgen p sanınan kishi yaki úlken, kishi emes yaki úlken emes, korenleri berilgen p hám q sanları ortasında jaylasadı, korenleri berilgen p hám q sanları ortasında jatpaydı, Tómendegi mäseleni qarastıramız.

Mısal 3. a parametrdin qanday mánislerinde

$$x^2 + 2(a-2)x + 3a + 15 = 0$$

teńlemenin bir korenleri ekiden úlken boladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Teńlemenin eki $x_1 = 3$ hám $x_2 = a-5$ korenleri tabıladı. Bul tabılǵan korenlerdin birewi 2 sanınan úlken ekenligi kórinip tur, ol jaǵdayda ekinshi koren 2 sanınan kishi bolıwı zárúr, yaǵnıy $x_2 = a-5 < 2$ teńsizliginiń orınlanıwı zárúr.

Bunnan $a < 7$. Eger $x_2 = 3$ dep alsaq, ol jaǵdayda $x_1 = a-5 = 3$ bolıwı kerek. Bunnan $a = 8$. Parametrdin bul barlıq mánislerin ulıwmalastırıp $a < 7$ yaki $a = 3$ türdegi sheshimge iye bolamız.

Mısal 4. a parametrdin qanday mánislerinde

$$ax^2 - (4a+4)x + 3a + 13 = 0$$

kvadrat teńlemenin

- a) hár bir koreni birden úlken boladı?
- b) hár bir koreni birden kishi boladı?
- c) bir koreni birden úlken, ekinshisi birden kishi boladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. a). Eger $a = 0$ bolsa, teńleme $-4x + 13 = 0$ kóriniske iye bolıp, bunnan $x = \frac{13}{4}$ boladı. Eger $a \neq 0$ bolsa, ol jaǵdayda teńleme

$$x^2 - \frac{4a+4}{a}x + \frac{3a+13}{a} = 0$$

kóriniske iye boladı. $y = x^2 - \frac{4a+4}{a}x + \frac{3a+13}{a}$ kvadrat funksiyanıń grafigi

shaqası joqarı qaraǵan parabola bolıp, $a = 0$ bolsa, ol jaǵdayda $x = \frac{13}{4}$ koreni bizdi

qanaatlandıradı, sebebi bul koren 1 den úlken. Eger $a \neq 0$ bolsa, ol jaǵdayda teńlemenıń koreni 1 den úlken bolıwı ushın bul parabola abtsissa kósheri $(1; a)$ noqattan oń tárepte kesip ótiwi kerek. Sonıń ushın birinshiden kvadrat teńlemenıń diskriminantı $D \geq 0$ bolıwı kerek bolsa, ekinshiden parabola kósheri $(1; a)$ noqattan oń tárepke ótiwi kerek hám úshinshiden $f(1) > 0$ bolıwı kerek. Bizıń jaǵdayda

$$D = \left(\frac{4a+4}{a} \right)^2 - 4 \cdot \frac{3a+13}{a} = \frac{4a^2 - 20a + 16}{a^2}$$

parabola kósheri $x = \frac{2a+2}{a}$, hám $f(1) = 1^2 - \frac{4a+4}{a} \cdot 1 + \frac{3a+13}{a} = \frac{9}{a}$ bolǵanlıǵı

sebepli, joqarıdaǵı shártlerdi jıynap

$$\begin{cases} \frac{4a^2 - 20a + 16}{a^2} \geq 0 \\ \frac{2a+2}{a} > 1 \\ \frac{9}{a} > 0 \end{cases}$$

Bul sistemanı sheship $0 < a \leq 1$, $a \geq 4$ túrdegi sheshimge iye bolamız. Bizdi $a = 0$ ham qanaatlandıradı usı sebepli bul sheshimdi keńeytip $0 \leq a \leq 1$, $a \geq 4$ túrde jazıp boladı.

b). Endi a parametrдің qanday mánislerinde teńlemenіń korenleri 1 den kishi bolıwın anıqlaymız. Eger $a = 0$ bolsa, ol jaǵdayda teńlemenіń koreni 1 den úlken bolǵanlıǵı sebepli endi a parametrдің bul mánisi bizdi qanaatlandırmaydı.

Eger $a \neq 0$ bolsa, ol jaǵdayda teńlemenіń koreni 1 den kishi bolıwı ushın bul parabola abtsissa kósheri $(1; a)$ noqattan shep tárepte kesip ótiwi kerek. Bunıń ushın birinshiden kvadrat teńlemenіń diskriminantı $D \geq 0$ bolıwı kerek bolsa, ekinshiden parabola kósheri $(1; a)$ noqattan shep tárepke ótiwi kerek hám úsh inshiden $f(1) > 0$ bolıwı kerek. Bul jaǵdayda sistema

$$\begin{cases} \frac{4a^2 - 20a + 16}{a^2} \geq 0 \\ \frac{2a + 2}{a} < 1 \\ \frac{9}{a} > 0 \end{cases}$$

túrge iye bolıp, bul sistema sheshimge iye bolmaydı.

c). Teńlemenіń bir koreni birden úlken, ekinshisi birden kishi bolıwı ushın tek $f(1) < 0$ shárti orınlansa boladı, yaǵnıy $\frac{9}{a} < 0$, bunnan $a < 0$ boladı.

Bul juwaplardı ulıwmalastırıp tómendegi nátiyjege iye bolamız:

- a) korenleri birden úlken bolıwı ushın $0 \leq a \leq 1, a \geq 4$;
- b) korenleri birden kishi bolıwı ushın a parametrдің mánisi joq;
- c) bir koreni birden úlken, ekinshisi birden kishi bolıwı ushın $a < 0$ bolıwı kerak.

Kvadrat funktsiyalardıń korenleriniń jaylasıwın tekseriwge alıp keletuǵın máseleler. Bul punkte qaraytuǵın máseleler aldınǵı punktge nátiyjelerdi esapqa alǵan jaǵdayda sheshiledi.

Mısal 5. a parametrдің qanday mánislerinde

$$\begin{cases} (a-1)y^2 - 2(3a+1)y + 9a = 0 \\ y = -\sqrt{x-3} + 2 \end{cases}$$

teńlemeler sisteması sheshimge iye boladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Teńlemeler sistemasınıń ekinshiden $y \leq 2$ kelip shıqadı. Ol jaǵdayda sistemadaǵı birinshi teńlemeninń tek bir koreni 2 den kishi bolsa, másele sheshilgen boladı.

Eger $a=1$ bolsa, ol jaǵdayda teńlemeninń koreni $y=\frac{9}{8}$ boladı hám bul koren 2 den kishi bolǵanlıǵı sebepli parametrdin bul $a=1$ mánisi sheshimge kiredi. Eger $a \neq 1$ bolsa, ol jaǵdayda teńlemenin

$$y^2 - \frac{2(3a+1)}{a-1}y + \frac{9a}{a-1} = 0$$

túrde jazıp boladı hám bul teńleme ushın $\frac{D}{4} = 15a+1$ bolıp, $a = -\frac{1}{15}$ ushın $y = -\frac{3}{2}$

boladı. Demek a parametrdin $a = -\frac{1}{15}$ mánisi ham bizdi qanaatlandıradı. Eger

$D > 0$ bolsa, yaǵnıy $a > -\frac{1}{15}$ bolsa, ol jaǵdayda parametrdin kerekli mánisi

$$f(2) \leq 0$$

yaki

$$f(2) > 0 \text{ hám } x_0 < 2$$

teńsizlikler sistemasın sheshiw arqalı anıqlanadı, bul jerde x_0 parabola ushınıń absissasi.

Bul sistemaların sheship a parametrdin $-\frac{1}{15} < a < 1$ hám $1 < a \leq 8$ mánislerge iye bolamız, leykin joqarıda parametrdin $a = -\frac{1}{15}$ hám $a = 1$ mánisleri hám sheshimge kirgenligi sebepli máselenin juwabı $-\frac{1}{15} \leq a \leq 8$ boladı

§4. Tuwındı járdeminde sheshiletuǵın parametrge baylanıslı hár qıylı máseleler

Parametrge baylanıslı bolǵan máseleler tek teńleme yaqı teńsizliklerde ushırasıp qalmaq, bálki matematikanıń basqada máselelerinde ushırasadı. Parametrge iye matematikalıq analiz máseleleri ishinde úlken áhmiyetke iye máselelerdiń biri tuwındılar járdeminde sheshiletuǵın máseleler bolıp, bul máseleler kóplikına iymek sızıqqa júrgiziletuǵın urınba máseleleri, parametrge iye funksiylardıń statsionar noqatların tabıw máseleleri, parametrge iye funksiylardıń monoton intervalların tekseriw máseleleri, parametrge iye funksiylardıń eń úlken hám eń kishi mánislerin anıqlaw máseleleri, parametrge iye funksiylardıń grafiklerin jasaw máseleleri kiredi hám taǵı basǵa.

Bul paragrafta biz usı ayılǵan máselelerdiń hár birine onsha qıyın bolmaqan jaǵdayda ayırım máselelerdi kórip ótemiz.

Mısal 1. k parametriniń qanday mánislerinde $f(x) = kx^2$ funksiya grafigine júrgizilgen urınba abtsissa kósheri menen $\pi/3$ múyesh jasaydı hám tórtinshi sherekten maydani $8\sqrt{3}/3$ bolǵan úsh múyeshlik ajratıp aladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Meyli (x_0, y_0) noqatı urınbanıń funksiya grafigine urınıw noqatı bolsın. $y = f(x)$ funksiya grafigine (x_0, y_0) noqatta júrgizilgen urınbanıń teńlemesi

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

bolıp, shárt boyınsha $f'(x) = 2kx$, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Ol jaǵdayda $f'(x_0) = 2kx_0 = \sqrt{3}$

bolıp urınbanıń teńlemesi

$$y = \sqrt{3}(x - x_0) + \frac{\sqrt{3} \cdot x_0}{2}$$

bo`ladi.

Endi bul urınbanıń koordinata kósheri menen kesilisiw noqatların anıqlaymız. $x = 0$ ushın $y = -\frac{\sqrt{3} \cdot x_0}{2}$ bolıp, $y = 0$ ushın ese $x = \frac{x_0}{2}$ boladı. Ol

jaǵdayda tórtinshi sherekte katetleriniń uzınlıqları $\frac{x_0}{2}$ hám $\frac{\sqrt{3} \cdot x_0}{2}$ bolǵan tuwrı múyeshli úsh múyeshlik payda bolıp, úsh múyeshtiń maydani ushın $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3} \cdot x_0^2}{8} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ boladı. Bunnan $x_0 > 0$ bolǵanlıǵı sebepli $x_0 = \frac{8}{\sqrt{3}}$ boladı. Sol sebepli $2kx_0 = \sqrt{3}$ teńliginen $k = \frac{\sqrt{3}}{2x_0} = \frac{3}{16}$ boladı.

Mısal 2. $f(x) = x^3 + 3(a-7)x^2 + 3(a^2-9)x + 1$ funktsiyası a parametrdiń qanday mánislerinde oń maksimum noqatǵa iye boladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Dáslepki berilgen funktsiyasınıń tuwındısın tabamız. $f'(x) = 3x^2 + 6(a-7)x + 3(a^2-9)$. Eger bul kvadrat funktsiya korengi iye bolmasa, yaǵnıy $D < 0$ bolsa, ol jaǵdayda berilgen $f(x)$ funktsiyası statsionar noqatlarǵa iye bolmaydı hám usı sebepli $f(x)$ funktsiyası ekstremumǵa iye bolmaydı. Eger $f'(x) = 0$ teńlemesi eseli bir korengi iye bo`lsa, yaǵnıy  $D = 0$  bo`lsa, ol jaǵdayda berilgen $f(x)$ funktsiyası statsionar noqatqa iye boladı, biraq bul statsionar noqat ekstremum noqat bolmaydı hám $f(x)$ funktsiyası ekstremumǵa iye bolmaydı. Endi $D > 0$ jaǵdayın qaraymız. Meyli x_1 hám x_2 noqatlar $f'(x) = 0$ teńlemesiniń korenleri bolsın hám usı menen birge, meyli $x_1 < x_2$ bolsın. Ol jaǵdayda x_1 noqattıń shep tárepinde $f'(x) > 0$ bolıp, oń tárepinde ese $f'(x) < 0$ boladı. Sol sebepli $x = x_1$ noqat berilgen funktsiyanıń maksimum noqatı bolıp, másele a parametriniń $f'(x) = 0$ teńlemesiniń korenleri oń bolatuǵın mánislerin tabıwǵa alıp keledi (sebebi kishi koren shárt boyınsha oń bolıwı kerek, ol jaǵdayda úlkeni ham oń boladı). Eki korende oń bolıwı ushın Viet teoremasına muwapıq

$$\begin{cases} D > 0 \\ a^2 - 9 > 0 \\ 7 - a < 0 \end{cases}$$

teńsizlikler sistemasına iye bolamız. Bul sistemanı sheship a parametrdiń

$a < -3, 3 < a < \frac{29}{7}$ mánislerine iye bolamız.

Mısal 3. a hám b parametrleriniń qanday mánisleri ushın $f(x) = 2x^4 - a^2x^2 + b - 1$ hám $g(x) = 2ax^3 - 1$ funktsiyaları tek eki ulıwma noqatqa iye boladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Máseleniń shárti boyınsha $f(x) = g(x)$ teńlemesi, yaǵnıy

$$2x^4 - a^2x^2 + b - 1 = 2ax^3 - 1$$

yaki onı ápiwayılastırsaq

$$2x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + b = 0$$

teńlemesi eki hár qıylı korenge bo`lishi kerak.

Meyli $\varphi(x) = 2x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + b$ funktsiyasın qarayıq. Bul funktsiyanıń tuwındısı

$$\varphi'(x) = 8x^3 - 6ax^2 - 2a^2x = 8x(x-a)(x+\frac{a}{4}) \text{ boladı.}$$

Bul tuwındı $x=0$, $x=a$ hám $x=-\frac{a}{4}$ ushın nolge aylanadı. Dáslep $a \neq 0$ ushın tuwındınıń belgisin anıqlaymız. $a > 0$ ushın tuwındınıń belgileri $x \in (-\frac{a}{4}, 0) \cup (a, \infty)$ oblastta oń, $x \in (-\infty, -\frac{a}{4}) \cup (0, a)$ oblastta teris, $a < 0$ ushın tuwındınıń belgisi $x \in (-\infty, a) \cup (0, -\frac{a}{4})$ oblata teris, $x \in (a, 0) \cup (-\frac{a}{4}, \infty)$ oblata oń. Bunnan $a \neq 0$ ushın $x=a$ hám $x=-\frac{a}{4}$ noqatlar minimum noqatlar boladı, $x=0$ noqat bolsa maksimum noqat boladı hám usınıń menen birge $\varphi(0) = b$, $\varphi(a) = b - a^4$, $\varphi(-\frac{a}{4}) = b - \frac{3a^4}{128}$ bolıp $\varphi(a) < \varphi(-\frac{a}{4})$ boladı.

Endi $\varphi(x)$ funktsiyasın b parametrge baylanıslı tekseremiz. $b > 0$ ushın $\varphi(0) > 0$ bolıp, $\varphi(a) < 0$ hám $\varphi(-\frac{a}{4}) > 0$ bolsa funktsiya grafigi abtsissa kósheri

tek eki noqatta kesip ótedi. Bul teńsizliklerden bolsa $a^4 > b$ hám $a^4 < \frac{128b}{3}$ bolıp,

$\sqrt[4]{b} < |a| < \sqrt[4]{\frac{128b}{3}}$ qatnas orınlı boladı. $b=0$ ushın $\varphi(0)=0$ bolıp, $\varphi(a) < -a^4 < 0$

hám $\varphi(-\frac{a}{4}) = -\frac{3a^4}{128} < 0$ boladı. Usi sebepli funksiya grafigi abtsissa kósheri úsh

noqatta kesip ótedi. $b < 0$ ushın $\varphi(0) < 0$ bolıp, $\varphi(a) < 0$ hám $\varphi(-\frac{a}{4}) < 0$ bolıp,

funksiya grafigi abtsissa kósheri tek eki noqatta kesip ótedi.

Endi tek $a=0$ ushın tekseremiz. a parametrдің bunday mánisinde teńleme $2x^4 + b = 0$ kóriniske iye bolıp, bul teńleme $b < 0$ ushın eki hár qıylı korenlerge iye boladı.

Juwmaqlap aytqanda berilgen funksiya tek eki ulıwma noqatǵa iye bolıwı

ushın $b < 0$ hám a parametri ıqtıyarlı bolıwı kerek yaki $b > 0$ hám $\sqrt[4]{b} < |a| < \sqrt[4]{\frac{128b}{3}}$

bolıwı kerek.

Мисал 4. b parametrдің qanday mánisleri ushın tómendegi $f(x) = bx^5 - 20x^3 + 5(b+9)x - 7$ funksiya barlıq $x \in R$ ushın monoton funksiya boladı?

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Dáslepki berilgen funksiyanıń tuwındısın tabamız

$$f'(x) = 5bx^4 - 60x^2 + 5(b+9) = 5(bx^4 - 12x^2 + b+9).$$

Berilgen funksiya differentsiyanıwshı bolǵanı sebepli onıq R de monoton funksiya bolıwı ushın $f'(x)$ tuwındı bul oblata tek oń emes yaki teris emes bolıwı kerek. Anıqlanıw oblasti $[0, \infty)$ bolǵan járdemshi $g(t) = bt^2 - 12t + b+9$ funksiyanı kiritemiz. b parametrдің bul funksiya belgisin ózgermeytuǵın $[0, \infty)$ intervaldaǵı mánisleri biz izlep atırǵan sheshim boladı.

Eger $b=0$ bo`lsa, ol jaǵdayda  $g(t) = -12t + 9$  boladı. Bul jaǵdayda  $g(t)$  funksiya óz belgisin  $t \geq 0$  ushın ózgertedi. Eger  $b \neq 0$  bo`lsa, ol jaǵdayda $g(t)$

funktsiyası kvadrat funktsiya bolıp, ol belgisin saqlaw ushın diskriminant oń emes bolıwı kerek, yaǵnıy $D = 36 - b^2 - 9b \leq 0$ bolıwı kerek. Bunnan $b \leq -12$ hám $b \geq 3$ kelip shıqadı. b nıń bunday mánislerinde $g(t)$ funktsiyası barlıq t ushın, usı menen birge $t \geq 0$ ushın yaqı oń emes, yaqı teris emes boladı. Eger $D > 0$ bo`lsa, ol jaǵdayda $g(t)$ funktsiyası $[0, \infty)$ intervalda óz belgisin saqlaw ushın onıń eki koreni hám teris bolıwı kerek yaqı eki korenniń úlkeni nolge teń bolıwı kerek. b nıń bunday mánislerin Viet teoreması járdeminde tabamız

$$\begin{cases} 36 - b^2 - 9b > 0 \\ \frac{12}{b} < 0 \\ \frac{b+9}{b} \geq 0 \end{cases}$$

Bul sistemanı sheship b nıń mánislerin tabamız $-12 < b \leq -9$.

Mısal 5. $f(x) = (b - x^2 + 6x)^{-1}$ funktsiyası $[-4; 2]$ kesiminde anıqlanǵan. Bul funktsiyanıń $[-4; 2]$ kesimindegi eń kishi mánisi 0,02 den úlken bolatuǵın b parametrdiń barlıq mánislerin tabıń.

Bul másele tómendegishe sheshiledi. Dáslep $g(x) = -x^2 + 6x + b$ funktsiyanı qarastıramız. $f(x)$ funktsiyası $[-4; 2]$ kesiminde anıqlaǵanı sebepli $g(x)$ funktsiyası $[-4; 2]$ kesiminde nolge teń bolmaydı. Eger $g(x)$ kvadrat úsh aǵzasınıń D diskriminantı teris bolsa, yaǵnıy $b < -9$ bolsa, ol jaǵdayda $g(x)$ ulıwma korenge iye bolmaydı. Eger $D = 0$ bolsa, ol jaǵdayda berilgen intervalda joytpaytuǵın eseli $x = 3$ korenge iye bolamız. Sol sebepli bul etapta $b \leq -9$ túrdegi sheshimge iye bolamız.

Eger $D > 0$ bolsa, yaǵnıy $b \geq -9$ bolsa, ol jaǵdayda $g(x)$ kvadrat úsh aǵzasınıń $x \in [-4; 2]$ kesiminde nolge teń bolmaytuǵın shártin tómendegi $g(2) < 0$ hám $g(-4) > 0$ teńsizlikleri támiyinleydi. Bul teńsizliklerden $-9 < b < -8$ yaqı $b > 40$ kelip shıqadı.

Alınǵan nátiyjelerdi ulıwmalastırıp b parametrdiń $b < -8$ hám $b > 40$ mánislerine iye bolamız. b parametrdiń bul mánisleri ishinde biz izlep atırǵan

mánisleri hám bar. Bul mánislerin sheshiw ushın $f(x)$ funktsiyasınıń tuwındısın paydalanamız.

$$f'(x) = \frac{2x - 6}{(b - x^2 + 6x)^2}$$

bolǵanı sebepli $[-4; 2]$ kesiminde $f'(x) < 0$ boladı. Sol sebepli berilgen kesimde $f(x)$ funktsiyası kemeyedi hám

$$\min_{[-4; 2]} f(x) = f(2) = \frac{1}{b + 8}$$

shárt boyınsha $\frac{1}{b + 8} > 0,02$ bolıwı kerek. Ol jaǵdayda bolsa $-8 < b < 42$ bolıwı kerek. Alınǵan bul eki nátiyjelerdi salıstırıp, b parametrdiń $40 < b < 42$ mánisine iye bolamız.

Juwmaqlaw

Bul pitkeriw qániygelik jumısı tiykarınan parametrge baylanıslı máselelerdi sheshiwge tiykarlangan bolıp, bunda parametrge iye máseleler haqqında kóp túsinikler qaralğan. Bunday máseleler qqatarına parametrge iye teńlemeler hám teńsizlikler, parametrge iye funktsiyalar kiredi hám taǵı basqalar.

Pitkeriw qániygelik jumısında parametrge iye teńlemelerdi, usı teńlemeler arasında tiykarınan ratsional hám irratsional, korsetkishli, logarifimlik hám trigonometriyalıq teńlemeler úyrenilip, bunda ayırım teńlemeler tek bir Parametrge baylanıslı bolsa, ayırımları bir neshe parametrge baylanıslı jaǵdaylarda qaralğan.

Pitkeriw qániygelik jumısında parametrge baylanıslı bolǵan kvadrat funktsiyalardıń korenleri tuwrısındaǵı máselelerdi úyrenwde Viet teoremasın tereń paydalanıw hám usı teorema járdeminde kvadrat funktsiyalardıń korenleri menen parametr arasındaǵı baylanısın úyrenw máseleleri qaralıp, keyninen parametrge iye matematikalıń analiz máseleleri ishinde eń áhmiyetke iye máselelerdiń biri bolǵan tuwındılar járdeminde sheshiletuǵın máseleler úyreniledi. Bul máseleler boyınsha iymek sıızıqqa júrgiziletuǵın urınba máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń statsionar noqatların tabıw máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń monoton intervalların tekseriw máseleleri, parametrge iye funktsiyalardıń eń úlken hám eń kishi mánislerin anıqlaw máseleleri qaralğan.

Pitkeriw qániygelik jumısında parametrge baylanıslı bolǵan kópǵana mısallar keltirilgen. Bul mısallarda teńleme sheshimge iye bolatuǵın parametrdiń mánislerin tabıw usılları, parametrge iye funktsiyalardı tekseriw, olardıń statsionar noqatların tabıw, monoton intervalların tekseriw máseleleri, eń úlken hám eń kishi mánislerin anıqlaw máseleleri qaralğan.

Ádebiyatlar

1. Boltyanskiy V.G. i dr. Lektsii i zadachi po elementarnoy matematike. – M.: «Nauka», 1971.
2. Vilenkin N.Ya. i dr. Elementarnaya matematika. – M.: «Prosveshenie», 1970.
3. Gornshteyn P.I., Polonskiy V.B., Yakir M.S. Neobxodimie usloviya v zadachax s parametrami. Khámmt. – 1991. – №11. –s. 44-49.
4. Gornshteyn P.I., Polonskiy V.B., Yakir M.S. Zadachi s parametrami. Kiev. RIA «Tekst», MP «OKO», 1992.
5. Dorofeev G.V. Kak raspolojeni korni trexchlenov. Khant. – 1986. – №7. –s. 45-49.
6. Dorofeev G.V., Zatakahámy V.V. Reshenie zadach, soderjashix parametri. M.: Nauch.-ped. ob-nie «Perspektiva», 1990. –ch. 2. -38 s.
7. Markov V.K. Metod koordinat i zadachi s parametrami. – M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1970. –146 s.
8. Mordkovich A.G., Litvinenko V.N., Kochehám A.A. Vvodniy praktikum. – M.: «Prosveshenie», 1974.
9. Litvinenko V.N., Mordkovich A.G. Praktikum po resheniyu zadach shkol`noy matematiki. – M.: «Prosveshenie», 1976.
10. Yastrebinetskiy G.A. Uravneniya i neravenstva, soderjashie parametri. – M.: «Prosveshenie», 1972.
11. www.ziyonet.uz
12. www.ilm.uz

Tema: Parametrlilik ko'riniside berilgen apiwayi funktsiyalardin' grafiklari

Pan: Algebra

Klass: 10-a klass

Sane: 03.04.2018

1. Sabaqtin' maqseti ham waziypalari

A. Bilim beriwshilikdin' maqseti. Oqiwshilarg'a parametrlilik ko'riniside berilgen apiwayi funktsiyalardin' grafiklari temasina baylanisli mag'liwmatlar beriw, bilimlerin teren'lestiriw.

B. Tarbiyalik maqseti/Oqiwshilarg'a parametrlilik ko'rinite berilgen apiwayi funktsiyalardin' grafiklerinin' qasiyetlerin u'yretiw, olar haqqinda ken'nen tu'snik beriw.

C. Rawajlandiriwshiqtin' maqseti. Oqiwshilar taza tema arqali alg'an bilimlerin kerekli jerde qollay aliwin rawjlandiriw.

2. Oqitiwshinin' waziypalari

Barilq oqiwshilardi sabaqqa jaqsi qatnasiwin ta'miynlew, taza temani oqiwshilarg'a aniq tu'rde tu'sindiriw, temag'a baylanisli maseleler shig'artiw.

3. Oqiw protsessinin' mazmuni

Parametrlilik ko'riniside berilgen a'piwayi funktsiyalardin' grafiklerin qalay u'yrenemiz

Oqitiwshinin' taza tema boyinsha qisqasha pikiri Moddiy noqattin' x, y koordinatalar

t-parametrine baylanisli bolsin $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ t-qandayda bir T araliqta o'zgergende $(\varphi(t), \psi(t))$ noqatlar toplami qanday boladi. Bul toplanin' parametrlilik ko'riniside berilgen funktsiyanin' grafigi dep ataymiz.

Ku'tiletug'in natijeler: Oqitiwshi; Oqiwshilarg'a parametrlilik ko'riniside berilgen a'piwayi funktsiyalardin' grafiklari temasin aniq ham toliq tu'rde tu'sindirip beriw oqiwshilarg'a maseleler isletiw Oqiwshi u'yrenen temag'a baylanisli mag'liwmatlardi o'z ornina qollana aliw ma'selelerdierkin shig'ariw.

Sabaqtin' blok sxemasi

SHo'lkemlestiriw	2-minut
Takirarlaw	2-minut
Taza temani bayani	9-minut
Taza temani bekkemlew	30-minut
Oqiwshilardi bahalaw	1-minut
U'yge tapsirma	1-minut

Sho'lkemlestiriw;

Klassqa kirip oqiwshilar menen sa'lemlesiw, klass tazalig'ina itibar beriw, oqiwshilardi barlaw

Taza temanin' bayani

Iqtiyariy noqattin' (x, y) koordinatalari t -parametrge baylanisli bolsin. $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ qandayda bir T araliqta o'zgerse onda noqatlar topلامي qanday boladi. Bul toplamdi parametrlilik ko'rinishidagi berilgen funktsiyanin' grafigi dep ataymiz.

1-misal. Iqtiyariy noqattin' koordinatalari parametrlilik ko'rinishide $x = 3t + 1$ $y = 5t + 8$ Berilgen bolsin. Bul iqtiyariy noqat ha'reketi dawaminda sizg'an iqtiyariy noqat traektoriasin tabin'.

Ten'lemeni t -parametri boyinsha tabamiz; $t = \frac{x-1}{3}$ ham $t = \frac{y-8}{5}$

Payda bolg'an sanlarimizdan $\frac{x-1}{3} = \frac{y-8}{5}$ ten'lemesine kelemiz. bunnan $5x - 5 = 3y - 24$ yamasa

$5x - 3y + 19 = 0$ Bul tuwri sizig'imizdin' ten'lemsi bolip esaplanadi. Demek izlengen funktsiya $3y = 5x + 19$ yamasa $y = \frac{5}{3}x + \frac{19}{3}$ ekenligi kelip shig'adi.

Juwabi; $y = \frac{5}{3}x + \frac{19}{3}$

2.misal

$$\begin{cases} X = 3 + 5\sin t \\ Y = -7 + 5\cos t \end{cases}$$

Parametrlilik ko'rinishide berilgen funktsiya grafigi qanday siziq boladi. Berilgen ten'liklerden $\sin t = \frac{x-3}{5}$, $\cos t = \frac{y+7}{5}$ ekenin tabamiz.

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ degen birdeylikten paydalanip $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 25$ ten'lemesine kelemiz. Bunnan $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 25$ Bul ten'lemenin' orayi $(3; -7)$ hamde radiusi $r = 5$ ke ten' bolg'an shen'ber ten'lemesi bolip esaplanadi.

3-misal. Iqtiyariy noqat koordinatalari $x = 7t^2 + 1$ ham $y = 3t$ egerde olar o'zgerse, x, y arasindag'I baylanisti tabin', yag'niy aytqanda $t \geq 0$

Berilgen iqtiyariy noqatlardan t ni tawip alamiz; $t = \frac{x-1}{7}$, $t = \frac{y}{3}$. Bulardan ko'rinip turg'aninday $\frac{y}{3} = \frac{x-1}{7}$ ten'lemesine kelemiz. Bunnan aqirinda $y = 3 \frac{x-1}{7}$ funktsiyanini tabamiz demek ko'rinip turg'aninday izlengen funktsiyamiz $y = 3$ koren astinda $x = 1$.

4-misal

$\begin{cases} X = 4\sin t \\ Y = 3\cos t \end{cases}$ parametrlilik ko'rinishide berilgen funktsiya grafigi qanday siziq boladi, bul jerde $0 \leq t \leq 2\pi$

Berilgen ten'liklerden $\sin t = \frac{x}{4}$ ham de $\cos t = \frac{y}{3}$ ekenligin

tabamiz. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ birdeyliginen paydalanip, $x^2 + y^2 = 16 + 9 = 25$ yamasa

$x^2 + y^2 = 25$ ten'lemeni payda qilamiz. Bul ten'leme menen berilgen noqatlar toplaninin' orayi koordinata basinda ham yarim oqlari $a = 4$, $b = 3$ bolg'an ellips dep ataladi.

Taza temani bekkemlew: Oqiwshilarg'a temani bekkemlew ushin Matematikaliq estafeta usilinan ham diskussiya usilinan paydalandim.

Bunda oqiwhshilarimizdi 2-toparg'a bo'lip alamiz. Har topardan 1-oqiwhshi shig'ip tayarlanip kelingan kartochnikalarg'a jazilg'an maseleni alip shig'arip bolg'annan son' 2-oqiwhshig'a pordi beredi. Awhal usi tahilette dawam etedi, qaysi topar duris ham tez shig'arsa sol jen'impaz boladi.

Matematikaliq estafeta basqishinan son' keying basqishimiz <diskussiya> usilinan paydalanamiz.

Oqiwhshilardi 2-toparg'a ajiratqan halda tema boyinsha o'z-ara tartis ha'm pikir almasiw ta'rizinde oqitiw usili bolip esaplanadi.

Misali:

1-toparg'a: Parametrli ten'lemelerdin' neshe tu'rin bilesiz ham olar qanday?

2-toparg'a: Parametrli ten'sizlikler dep nege aytamiz?

Diskussiya usilinin' abzaliqlari sonnan ibarat

1) Oqiwhshilardi erkin pikirlewge u'yretedi

2) Oqiwhshilar o'z pikirlerin durislig'in dalilleydi

3) Oqiwhshilardin' esitiw qabilyetinin' rawajlaniwina jardem beredi.

Oqiwhshilardi bahalaw: Sabaqqa aktiv qatnasqan oqiwhshilardi bahalayman, ham olarg'a o'zlerinin' bahalarin esittiremen.

U'yge tapsirma: Oqiwhshilarg'a u'y tapsirmasi etip parametrli ten'lemege baylanisli 5-esap berildi.

1. Misali. a ning har bir manisi ushin to' mendegi ten' lemeni sheshin'.

$$(a-1)(a+2)x = a^3 + 2a^2$$

SHeshiliwii. $(a-1)(a+2) \neq 0$ $a=1$ ham $a=2$ ushin a parametrlarinin' baqlaw manisleri bolip tabiladi

$(a-1)(a+2) \neq 0$ ten' lemenin' 2-jag'inda $(a-1)(a+2)$ ge bo'lip

$$x = \frac{a^3 + 2a^2}{(a-1)(a+2)} = \frac{a^2(a+2)}{(a-1)(a+2)} = \frac{a^2}{a-1} \quad \text{alamiz}$$

$a=1$ bolg'anda ten' leme sheshimge iye emes, sebebi ten' lemenin' shep jag'I 0 ge ten', al on' jag'I 0 den o'zgeshe.

$a=-2$ de ten' lemeni $x \in \mathbb{R}$ qa' legn ma' nisin qanaatlandiradi, sebebi ten' leme to' endegi tu' rge iye bolip $0 \cdot x = 0$

Juwabi: Eger $a=1$ bolsa onda sheshimge iye emes.

Eger $a=-2$ ge ten' bolsa, onda $x \in \mathbb{R}$, eger $a \neq 1$, $a \neq -2$ bolsa onda $x = \frac{a^2}{a-1}$

2. Misali. a parametrinin' qanday manisinde $(a-1)(a-5)x - 2(a+6) = 5x - 12$ ten' lemesi sheshimge iye emes.

SHeshiliwi. ten' lemenin' shep jag'indag' I qawsirmalardi aship uqsas ag' zalardi jiynag' annan keyin ten' leme to' mendegishe ko' riniske keledi

$(a^2 - 6a)x = 2a$ eger $a^2 - 6a \neq 0$ bolsa onda ten' lemenin' sheshimi bar bolip ha' m ol

$$x = \frac{2a}{a^2 - 6a}$$

Eger $a^2 - 6a = 0$ bolsa, onda ten' lemesin ten' lemesinin' on' jag' I o-ge ten' bolmag' anda ten' leme sheshimge iye emes yag' niy aytqanda $2a \neq 0$. Bul jag' daylarda parameter $a=6$ g' a ten' boladi.

Juwabi: $a=6$

3. Misali. a -parametrinin' har bir ma' nii ushin $a(a-2)x = 2-a$ ten' lemesin sheshin'.

SHeshimi: An' latpasi $a(a-2) = 0$ ushin baqlaw ma' nislari bolip a parametrinin'

to' mendegi ma' nislari boladi $a=0$ ha' m $a=2$

$a(a-2) \neq 0$ ushin ten' lemenin' 2 jag'inda $a(a-2)$ ge bo'lip x tin' ma' nislari tabiwg' a boladi.

$$x = \frac{2-a}{a(a-2)} = -\frac{1}{a}$$

$a=0$ ge ten' bolg' anda ten' lemenin' shep jag' I 0-ge ten' emes, sonin' ushin ten' leme $a=0$ bolg' anda sheshimge iye emes

$a=2$ bolg' anda x -tin' qa' legen manisinde ten' lemenin' 2-jag'ida o-ge ten', sonin' ushin $x \in \mathbb{R}$ ge ten' boladi.

Juwabi: eger $a=2$, onda $x \in \mathbb{R}$ $a=0$ de bolsa sheshimi joq eger $a \neq 0$, ham $a \neq 2$. $x = -\frac{1}{a}$

4. Misali. a parametrinin' har bir manisi ushin $a^2x = a(x+2) - 2$ ten' lemesin sheshin'.

SHeshimi: berilgen ten' lemeni $(a^2 - a)x = 2(a-1)$ tu' rine keltiremiz

$a^2 - a$ sha' rtinen a ning baqlaw ma' nislari tabiladi, yag' niy $a=1$ yamasa $a=0$ bolganda ten' leme sheshimge iye emes, sebebi ol $0 \cdot x = -2$ tu' rine iye (ten' lemenin' shep jag' I 0-ge ten', al on' jag' I ten' emes)

$a=1$ bolg'anda ten'leme $0 \cdot x = 0$ tu'rine iye yag'niy onin' 2-jag'ida x -tin'qa'legen ma'nisinde 0-ge ten' bul jag'dayda ten'lemenin' sheshimi bolip qa'legen haqiqiy san tabiladi.

$a \neq 0$ ha'm $a \neq 1$ ten'lemenin' 2-jag'ida $a^2 - a \neq 0$ ge bo'lip

$$x = \frac{2(a-1)}{a(a-1)} = \frac{2}{a} \text{ ni alamiz}$$

Juwabi: eger $a=1$ onda bolsa $x \in \mathbb{R}$ eger $a=0$ bolsa sheshimge emes.

5. Misal. a parametrinin' ha'r bir aniq ma'nisine $ax^2 + 2x + 1 = 0$ kvadrat ten'lemesin sheshin': SHeshimi: Eger $a=0$ bolg'anda da'slepki ten'leme siziqli ten'leme boladi ha'm $2x = -1$ tu'rine iye boladi. Bunday jag'dayda $x = -0,5$ ten'lemenin' koreni esaplanadi.

Eger $a \neq 0$ bolg'anda da'slepki ten'leme kvadratliq boladi. Onin' diskriminanti $D = 4 - 4a$ boladi. Kvadrat ten'lemenin' sheshimge iye eger $D \geq 0$, yag'niy $a \leq 1$ bolg'an jag'dayda. Eger $a=1$, onda $D=0$ ha'm ten'leme $x=-1$ de bir korengiye boladi.

Eger $a \neq 0$ ham $a < 1$ bolsa, onda da'slepki ten'leme 2-korengiye boladi

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \text{ ha'm } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$$

Eger $a > 1$, onda $D < 0$ boladi ha'm ten'leme korengiye bolmaydi

Juwabi: Eger $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, onda ten'leme 2-korengiye boladi

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \text{ ham } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$$

Eger $a=0$, onda $x=-0,5$ eger $a=1$ onda $x=-1$ eger $a > 1$ bolsa onda sheshimge iye emes.

Ratsional ten'lemeler

1. Masele. a parametrinin' qanday ma'nisinde ten'leme sheshimge iye bolmaydi.

$$\frac{x-a}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x-4}$$

SHeshimi: Bunnan BUB ten'lememizde $x \neq 2$ va $x \neq -2$

Bo'lshektin' uliwma bo'limine aldin'g'I ten'lemeni keltiremiz $(x-a)(2x+2) - x(x-2) = 1$ yamasa $(4-a)x = 2a+1$. Eger $a=4$ bolsa $0 \cdot x = 9$ ten'leme sheshimge iye

emes. Eger $a \neq 4$ bolg'anda aniq emes koredi alamiz: $x = \frac{2a+1}{4-a}$.

bul koren 2; -2 ma'nisine iye bolg'anda a parametrinin' ma'nisin tabamiz 1) $\frac{2a+1}{4-a} = 2$

bolg'anda bul jerde $a = \frac{7}{4}$ bolsa a parametrine iye bolamiz.

2) $\frac{2a+1}{4-a} = -2$ bolg'anda sheshimge iye emes

Juwabi: eger $a=4$, $a = \frac{7}{4}$

2. Masele. Ten'lemeni sheshin' $\frac{ax+6-x}{x-9} = 0$

SHeshimi. BUB (bo'lshektin' uliwma bo'limi) $x \neq 9$ ke ten'. Bo'lshektin' alimi nolge ten' bolsa al bo'limi ma'nisin ham nolden o'zgeshe boladi. Ten'lemenin' shshimi $ax+6-x=0$ yamasa $(a-1)x-6=0$

Eger $a=1$ bolg'anda sheshimge iye emes

$a \neq 1$ bolg'anda onda $x = -\frac{6}{a-1}$ BUB esapqa alg'anda $-\frac{6}{a-1} \neq -3$ ti alamiz Bul jerden kelip shig'adi $a \neq 3$ ham $-\frac{6}{a-1} \neq 3$ ($a \neq -1$)

Juwabi: Eger $a=-1$ $a=1$ va $a=3$ bolsa sheshumge iye emes

$X = -\frac{6}{a-1}$ bolsa a nin' basqa ma'nislerine qaray boladi.

Viet teoremasi boyinsha misallar

1. Ma'sele. a parametrinin' qanday ko'rsetkishlerinde 3-ag'zali kvadrat korennin' qosindisi 0 ge ten' ekenligin aniqlan' $x^2 + (2xa - a^2)x - a^2 = 0$

SHeshimi: Eger kvadrat ko'rennin' sheshimi bar bolsa Viet teoremasi boyinsha $X_1 + X_2 = a^2 + a - 2$ korennin' qosindisi nolga ten', eger $a^2 + a - 2 = 0$, solay etip eger $a=1$ ha'm $a=-2$.

Bul ko'rsetkishlerde a $x^2 - a^2 = 0$ ten'lemesi kelip shig'adi ha'm de bul 2-korengi iye boladi.

Juwabi: $a=1$ ha'm $a=-2$

2. Ma'sele. a parametrlerinin' qanday ma'nisinde 3-ag'zali kvadrat korennin' ko'beymesini 2-ge ten' boladi

$$X^2 + 2x + (a^2 - 5a - 6) = 0$$

SHeshimi: Egerde kvadrat korennin' ten'lemesi bar bolg'an jag'dayda Viet teoremasidan $x_1 * x_2 = a^2 - 5a + 6$ g'a ten'. Egerde korennin' ko'beymesini 2-ge ge ten' bolg'anda $a^2 - 5a + 6 = 2$ kvadrat ten'lemege keltiremiz ha'm bunnan $a_1=1$ $a_2=4$.

Bunda a -nin' ma'nisi aldin'g'i ten'lemenin' tu'ri $x^2 + 2x + 2 = 0$ ge iye bolip tabiladi ha'm haqi

3. Ma'sele. $x^2 + (2-a)x - (3+a) = 0$ S kvadrat korennin' qosindisi en' kishi ma'niste bolsa a parametrinin' ma'nisin aniqlan'? ha'm bul qosindi neshege ten'?

SHeshimi: Ten'lemenin' diskriminanti $D = (2-a)^2 + 4(3+a) = a^2 + 16$ ma'nisine iye boladi. Sonday-aq a parametrinin' hamme ma'nisinde $D > 0$ bolg'anda korenni bar boladi

Viet teoremasi boyinsha $x_1 + x_2 = -(2-a)$ $x_1 * x_2 = -(3+a)$ kelip shig'adi.

$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 + 2(3+a) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 9$ kvadrat korennin' qosindisinin' en' kishi ma'nisi 9 g'a ten' boladi ha'm $a=1$ ge shekem jetedi.

Juwabi: $a=1$, $S=9$

Kvadrat ten'sizliklarga misallar

1. Ma'sele. $ax^2 + (a-1)x + a-3 < 0$ bolg'an jag'dayda x tin' har bir aniq ma'nisine sheshkende a parametrinin' barliq ma'nislerin aniqlan'.

SHeshimi: Eger $a=0$, onda ten'leme $-x-3 < 0$ tu'rine iye boladi eger de $x \in (-3; +\infty)$ duris bolg'anda. Eger $a \neq 0$ da'slepki ten'leme kvadratliq boladi ham $x \in \mathbb{R}$ hamme jag'dayda sheshimlari bar boladi.

Eger de parabolaning' shaqalari $y = ax^2 + (a-1)x + a-3$ to'menge bag'dar aladi ha'm abtsissa ko'sherinde kesilispeydi.

Sonliqtan ten'sizlik sistemasin alamiz

$$A < 0 \quad a < 0$$

$$D = (a-1) - 4a(a-3) < 0 \quad 3a^2 - 10a - 1 > 0$$

Aqirg'I ten'sizlik sistemasinin barliq m'nisi sheshimi boladi. $a < \frac{5-2\sqrt{7}}{3}$

$$\text{Juwabi: } a < \frac{5-2\sqrt{7}}{3}$$

2. Ma'sele. a parametrinin' har bir ma'nisine $x^2 - 2ax \geq x - 9$ trn'sizligin sheshin'.

SHeshimi: Barliq ag'zalarin shep ta'repine otkergende ten'sizligimizden to'mendegishe ma'nisti alamiz.

$X^2 - (2a+1)x + 9 \geq 0$. Eger diskriminantimiz $D \leq 0$ bolsa $D = 4a^2 + 4a - 35 \leq 0$ ge ten'. Eger $D \leq 0$ bolg'anda ten'sizligimiz hamme waqitta $x \in \mathbb{R}$. Ten'sizligimizden $4a^2 + 4a - 35 \leq 0$ den $-3,5 \leq a \leq 2,5$ kelip shig'adi.

Eger $D > 0$ bolsa ten'sizligimizdin' aldin'g'I sheshimi to'mendegishe boladi.

$$x \in (-\infty; 2a+1-\sqrt{D}) \cup (2a+1+\sqrt{D}; +\infty) \quad D = 4a^2 + 4a - 35$$

Eger $a \in (-\infty; (2a+1-\sqrt{D}) \cup (2a+1+\sqrt{D}; +\infty)$ eger $a \in (-3,5; 2,5)$ onda $x \in \mathbb{R}$.