МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
НУКУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени АЖИНИЯЗА

Физико-математический факультет

Кафедра методики преподавания математики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

студента 4-Д курса образовательного направления 5110100-«Методика преподавания математики» Кеунимжаева Мухамедали Куанышбаевича
на тему

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Студент:	Кеунимжаев М.
Научный руководитель:	к.ф.-м.н. Ходжаниязов А.
Заведующий кафедрой:	доц. Пренов Б.

Допускается к защите решением кафедры от 21- мая 2021 г. (протокол № 10)

Нукус – 2021

Содержание

Введение

В настоящее время рассматриваются дифференциальные уравнения, то есть соотношения между неизвестной функцией, ее производными и независимыми переменными. Уравнения, содержащие производные по многим независимым переменным, называются *уравнениями в частных производных.* Уравнения, содержащие производные лишь по одной из независимых переменных, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями.*

Независимую переменную, производная по которой входит в обыкновенное дифференциальное уравнение, обычно обозначают буквой x (или буквой $t,$ поскольку во многих случаях роль независимой переменной играет время). Неизвестную функцию обозначают через $y \quad x$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение можно записать в виде соотношения

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{1}$$

В уравнение (1), помимо неизвестной функции, ее производных по независимому переменному x и самого независимого переменного $x,$ могут входить и дополнительные переменные $\mu_1, \dots, \mu_k.$ В этом случае говорят, что неизвестная функция зависит от переменных $\mu_1, \dots, \mu_k$ как от параметров.

Порядок старшей производной, входящий в уравнение (1), называется *порядком уравнения.* Уравнение первого порядка имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} \tag{2}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2}$$

и связывает три переменные величины – неизвестную функцию, ее производную и независимую переменную. Часто это соотношение удается записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3}$$

Уравнение (3) называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Наряду с дифференциальными уравнениями (1) – (3) для одной неизвестной функции в теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются системы уравнений. Система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

называется *нормальной системой.* Вводя векторные функции

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n), \quad \boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n),$$

можем записать систему (4) в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}). \tag{5}$$

Легко видеть, что уравнение n-го порядка (1), разрешенное относительно старшей производной

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{6}$$

может быть сведено к нормальной системе. Действительно, введем обозначения

$$y(x) = y_1(x), \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2(x), \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n(x). \tag{7}$$

Тогда, вследствие очевидного равенства

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dy_n}{dx},$$

уравнению (6) можно сопоставить нормальную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \cdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n\right). \end{cases} \tag{8}$$

В уравнениях (1) - (5) независимую переменную будем полагать действительной. Неизвестные функции могут быть как действительными, так и комплексными функциями действительной переменной.

Очевидно, если

$$y\left(x\right) = y_1\left(x\right) + iy_2\left(x\right), \tag{9}$$

где $y_1\left(x\right)$ и $y_2\left(x\right)$ - соответственно действительная и мнимая части функции $y\left(x\right)$, уравнение (3) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений для действительных функций:

$$\frac{dy_1}{dx} = \operatorname{Re} f\left(x, y_1, y_2\right), \quad \frac{dy_2}{dx} = \operatorname{Im} f\left(x, y_1, y_2\right). \tag{10}$$

Решением системы дифференциальных уравнений (4) называется *всякая совокупность функций* $y_i\left(x\right)$ $\left(i = 1, \ldots, n\right)$, которые при подстановке в уравнения обращают их в тождества. Как правило, если дифференциальное уравнение разрешимо, то оно обладает бесчисленным множеством решений. Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

Глава I.

§1. Исторические сведения о дифференциальных уравнениях.

Теория дифференциальных уравнений возникла в конце XVII в. под влиянием потребностей математики, механики и научно-технического прогресса одновременно с дифференциальным и интегральным исчислением. Но с задачами, относящимися к дифференциальным уравнениям математики встретились уже на рубеже XVI– XVII вв.: Дж. Непер (1550–1617) – при создании логарифмических таблиц; Г. Галилей (1564–1642) – исследуя падение тел; Р. Декарт (1596–1650) – изучая оптические явления. Основой теории дифференциальных уравнений стало дифференциальное исчисление, созданное Лейбницем и Ньютоном (1642–1727).

Сам термин «дифференциальное уравнение» был предложен в 1676 году Лейбницем. Из огромного числа работ XVIII века по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера (1707–1783) впервые записал уравнения аналитически и Лагранжа (1736–1813). В этих работах была прежде развита теория малых колебаний, а следовательно – теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной алгебры (собственные числа и векторы в n-мерном случае). Вслед за Ньютоном Лаплас и Лагранж, а позже Гаусс (1777–1855) развивают также методы теории возмущений. Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, Жозеф Лиувилль (1809–1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в частности таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратуре. Позже Софус Ли (1842–1899), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришёл к необходимости подробно исследовать группы диффеоморфизмов (получившие впоследствии имя групп Ли) – так по теории дифференциальных уравнений возникла одна из самых плодотворных областей современной математики, дальнейшее развитие которой было тесно связано совсем с другими вопросами (алгебры Ли ещё раньше рассматривали Симеон–Дени Пуассон (1781–1840), Фурье (1768–1830) и, особенно, Карл Густав Якоб Якоби (1804–1851).

Интересно то, что многие из них были не только математиками, но и астрономами, механиками, физиками. Разработанные ими при исследовании конкретных задач математической физики идеи и методы оказались применимыми к изучению широких классов дифференциальных уравнений, что и послужило в конце XIX века основой для развития общей теории дифференциальных уравнений. Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Анри Пуанкаре (1854–1912), созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексных переменных легла в основу современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как теперь её чаще называют, *теория динамических систем*, сейчас активно развивается и имеет важные применения в естествознании. Большую роль в развитии теории и методов решения дифференциальных уравнений сыграли французские ученые – Ж. Даламбер, О. Коши, Ж. Лагранж и 4 российские ученые – Н.Н. Лобачевский, М.В. Остроградский и др. Типы уравнений и методы, как правило, носят имена их создателей: уравнение Бернулли, метод численного решения уравнений Эйлера и т.д. Из теории дифференциальных уравнений отдельно выделились такие разделы как уравнения в частных производных, уравнения математической физики. В связи с появлением паровых машин было получено и решено уравнение теплопроводности. Д. Максвелл вывел свои знаменитые уравнения электромагнитных колебаний.

В наше время большой вклад в технический прогресс внесли советские ученые А.Н. Крылов, С.А. Чаплыгин, Н.Н. Моисеев, В.В. Степанов, М.А. Лаврентьев, М.В. Келдыш. Ими были решены важнейшие инженерные задачи с применением теории дифференциальных уравнений в таких областях как авиация, судостроение, космонавтика, машиностроение т.д. А так, же в настоящее время важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений играет применение современных электронных вычислительных машин. Исследование дифференциальных уравнений часто облегчает возможность провести вычислительный эксперимент для выявления тех или иных свойств их решений, которые потом могут быть теоретически обоснованы и послужат фундаментом для дальнейших теоретических исследований

§2. Применение дифференциальных уравнений в практических целях

Большинство задач по физике приводят к необходимости решения дифференциальных уравнений. Это можно объяснить тем, что многие физические законы являются дифференциальными уравнениями, относительно некоторых функций, которые характеризуют эти процессы. Физические законы представляют собой теоретическое обобщение многих экспериментов и описывают эволюцию искомых величин, как в пространстве, ток и во времени. К примеру второй закон Ньютона является дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} = F(r,v,t)\,.$$

Учитывая огромную важность дифференциальных уравнений в общей и теоретической физики, рассмотрим основные понятия и приёмы интегрирования некоторых видов, которые часто встречаются в задачах.

Дифференциальное уравнение–это уравнение, которое помимо независимых переменных и неизвестных функции данных переменных, содержит ещё и производные неизвестных функции.

Наивысший порядок производных неизвестной функции, входящих в дифференциальное уравнение называется *порядком дифференциального уравнения.*

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется *уравнение, которое связывает независимую переменную, искомую функцию и её производную 1-го порядка.*

Для составления дифференциальных уравнении часто применяют эти способы:

1) Записать условие на производную искомой величины, используя известные законы физики и физический смысл производной;

2) Определить, какая их величин будет независимой переменной, а какая зависимой;

3) Затем находят линейное приближение для приращения dy, когда независимая величина переменная получила приращение dx;

4) Разделив dy на dx и переходя к пределу при $d_x \to 0$, получают дифференциальное уравнение.

Рассмотрим конкретный пример применения дифференциального уравнения 1-го порядка:

Чаша в форме параболоида вращения в начальный момент заполнена водой. В самой нижней части чаши имеется отверстие радиуса r_1, через которое вытекает вода. Найти зависимость $h(t)$ уровня воды в чаше от времени, если известно, что высота чаши H, радиус верхнего края R. За какой промежуток времени t из чаши вытечет вся вода?

Решение.

Зависимость между уровнем h воды и в чаше радиусом r горизонтальной поверхности воды имеет вид

$$h = \frac{H}{R^2} r^2 .$$

Пусть за промежуток времени $(t; t + d_1)$ уровень воды изменится на dh, тогда изменение объёма воды в чаше

$$dV = pr^2 dH = p\frac{R^2}{H} hdh . \tag{1.2.1}$$

С другой стороны, это изменение равно

$$dV = -vpr_1^2 dt = -0,6\sqrt{2gh}pr_1^2 dt , \tag{1.2.2}$$

где $v = 0,6\sqrt{2gh}$ – скорость истечения воды из отверстия.

Приравнивая уравнения (1.2.1) и (1.2.2) и переходя к пределу при $d_1 \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{R^2}{H} hdh = -0,6\sqrt{2gh}r_1^2 dt . \tag{1.2.3}$$

После разделения переменных в 3 и интегрирования, имеем:

$$\frac{2R^2}{3H} h^{1,5} = -0,6\sqrt{2gh}r_1^2 t + C . \tag{1.2.4}$$

Найдём константу C из начальных условий. Так как $h(0) = H$, то

$$C = \frac{2R^2}{3H} H^{1,5} ,$$

поэтому уравнение (1.2.4) будет иметь вид

$$\frac{2R^2}{3H} \quad H^{1,5} - h^{1,5} \quad = 0,6\sqrt{2g}r_1^2 t . \tag{1.2.5}$$

Выражая h из формулы (1.2.5), получим искомую зависимость:

$$h(t) = \sqrt[3]{\left(H^{1,5} - \frac{0,9\sqrt{2g}r_1^2 tH}{R^2}\right)^2}\ .$$

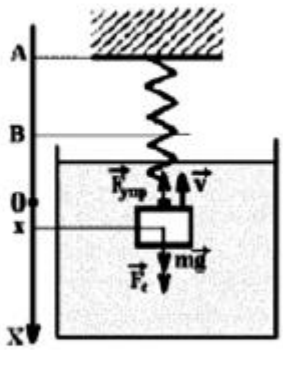
Поскольку $h\ \ t_1\ \ = 0$, то из формулы (1.2.5) найдём время, за которое вытечет вся вода:

$$t_1 = \frac{R^2\sqrt{H}}{0,9\sqrt{2g}r_1^2}.$$

Дифференциальное уравнение 2-го порядка – это уравнение, в которое входят независимая переменная, неизвестная функция, первая и вторая производные этой функции.

Рассмотрим пример задачи, который приводит к решению линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Тело массы 5 кг подвешено к концу пружины жёсткости $20\frac{Н}{м}$ и помещено в вязкую среду. Период его колебаний в этом случае равен 10 с. Найти постоянную демпфирования, логарифмический декремент колебаний и период свободных колебаний.



Решение. Выберем начало координат в положении статического равновесия тела и расставим силы, действующие на тело в процессе колебаний. Если AB

обозначает длину не растянутой пружины, то отрезок OB представляет статическое удлинение пружины под действием силы тяжести.

По закону Гука:

$$mg = kOB\,.$$

Записываем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \rightarrow = \overline{F_{упр}} + \overline{F_c} + mg\,.$$

Проектируем это равенство на ось Ox, учитывая, что

$$F_{xc} = -av_x = -ax\,,\ F_{x\,упр} = -k\ \ x + OB\ \ .$$

В результате получим уравнение колебаний

$$mx'' = -ax' - k\ \ x + OB\ \ + mg = -ax' - kx$$

или $$x'' + 2nx'' + \omega_0^2 x = 0\,, \qquad (1.2.6)$$

где $n = \dfrac{a}{2m}$; $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Уравнение (1.2.6) – это дифференциальное уравнение второго порядка.

Составляем характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2nr + \omega_0^2 = 0\,. \qquad (1.2.7)$$

Вычисляем дискриминант уравнения (1.2.7):

$$D = n^2 - \omega_0^2. \qquad (1.2.8)$$

Поскольку в данном случае движение тела носит колебательный характер, то его координата должна изменяться по гармоническому закону:

$$x = e^{-\lambda t} \left(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \right) . \tag{1.2.9}$$

В случае отсутствия затухания, $\omega = \omega_0$, и тело совершает свободные колебания с периодом:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}.$$

Выражаем отсюда

$$n = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

и определяем постоянную деформирования a:

$$a = 2mn = 2m\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}.$$

Подставляя данные задачи, получим ответ

$$a = 19\,\frac{Н \cdot с}{м}.$$

Логарифмический декремент затухания есть натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд,

$$\Delta = n\frac{T}{2}.$$

Вычисляя n и подставляя значение T, получим

$$\Delta = 9{,}5.$$

§3. Общие понятия дифференциального уравнения

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (1.3.1)$$

Здесь $x-$ независимая переменная; $y = y(x)$ неизвестная функция аргумента $x; F \ \ x, y, y'\ -$ заданная функция переменных $x, y, y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Уравнение (1.3.1) не разрешено относительно производной, а уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f \ \ x, y \qquad (1.3.2)$$

где $f(x, y) -$ заданная функция двух переменных, называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.* Часто встречается и такая запись дифференциального уравнения первого порядка:

$$P \ \ x, y \ \ dx + Q \ \ x, y \ \ dy = 0$$

Здесь $P(x, y)$ и $Q(x, y) -$ заданные функции переменных x и y

Решением дифференциального уравнения (1.3.1) или (1.3.2) на интервале *I* называется непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$ превращающая это уравнение в тождество на *I*, т.е.

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0 \ \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} = f \ \ x, \varphi(x) \ \ \right)$$

для всех $x \in I$ Соотношение $\Phi(x, y) = 0$ *называется решением уравнения* (1.3.2) *в неявной форме* (или *интегралом уравнения* (1.3.2)), если оно определяет y как функцию от $x : y = \varphi(x)$, которая есть решение уравнения (1.3.2).

График решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.3.2) называется *интегральной кривой этого уравнения.* Проекция графика решения на ось ординат называется *фазовой кривой* (*или траекторией*) дифференциального уравнения.

Задача о нахождении решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.3.2), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши.*

Через каждую точку (x, y) из области определения уравнения (1.3.2) проведем прямую, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен $f(x, y)$. Это семейство прямых называется *полем направлений,* соответствующим уравнению (1.3.2) (или полем направлений функции $f(x, y)$).

Интегральная кривая каждой своей точке касается поля направлений функции $f(x, y)$. Всякая кривая, касающаяся в каждой своей точке направления, имеющегося в этой точке, является интегральной кривой.

Изоклиной называется кривая, во всех точках которой направление поля одинаково. Все интегральные кривые, пересекающие данную изоклину, в точках пересечения наклонены к оси абсцисс под одним и тем же углом.

Пример 3.1. Убедиться, что функция $y = cx + \dfrac{x}{\sqrt{1+c^2}}$ при каждом $c \in \mathbb{R}$ является решением уравнения $y - xy' = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Решение. Так как производная данной функции $y' = c$ то, подставляя в данное уравнение вместо y и y' их значения, имеем

$$cx + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - x \cdot c = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}},$$

т.е. получаем тождество. Следовательно, данная функция y при каждом $c \in \mathbb{R}$ является решением указанного уравнения.

Пример 3.2. Показать, что функция $y = \sqrt{\left(\int \frac{dx}{x}\right)^2 - 1}$ является решением уравнения $xy\frac{dy}{dx} - \sqrt{y^2 + 1} = 0$.

Решение. Вычислим производную данной функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}\left(\int \frac{dx}{x} + 1\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{x} - 1\right)}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - 1}} = \frac{\int \frac{dx}{x}}{x\sqrt{\left(\int \frac{dx}{x}\right)^2 - 1}}.$$

Имеем

$$xy\frac{dy}{dx} - \sqrt{y^2 + 1} = x \cdot \sqrt{\left(\int \frac{dx}{x}\right)^2 - 1} \cdot \frac{\int \frac{dx}{x}}{x \cdot \sqrt{\left(\int \frac{dx}{x}\right)^2 - 1}} -$$

$$-\sqrt{\left(\sqrt{\left(\int \frac{dx}{x}\right)^2 - 1}\right)^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x} = 0$$

Данная функция обращает исходное уравнение в тождество и, следовательно, является решением этого уравнения.

Пример 3.3. Решить дифференциальное уравнение $y' ctgx + y = 2;\ y(x) \to -1$ при $x \to 0$.

Решение. Приведем уравнение на разделяющиеся переменные:

$$\frac{dy}{2 - y} = tgx dx.$$

Отсюда вычислим интеграл

$$\ln(2-y) = \ln(\cos x) + \ln C$$

Находим y

$$y = 2 + C\cos x$$

По условию $y(x) \to -1$ при $x \to 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0}(2 - C\cos x) = -1$$

$$C = -3$$

Получим ответ: $y = 2 - 3\cos x$.

Пример 3.3. Решить данное уравнение, также найти решения удовлетворяющие условия $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0,5$.

Решение. Приведем уравнение к следующему виду

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$$

интегрируя обе стороны уравнения получим

$$\frac{y-1}{y} = Cx.$$

Находим y

$$y = \frac{1}{1 - Cx}$$

по вышеуказанным условиям имеем

$$c = -1.$$

Ответ. $y = \dfrac{1}{1+x}$;

Глава II

§1. Интегрирование дифференциальных уравнении первого порядка

Составить дифференциальное уравнение, описывающее изучаемый эволюционный процесс или зависимость между характеристиками исследуемого явления, часто оказывается не проще, чем решить его. Универсального метода составления дифференциального уравнения не существует, поэтому можно лишь дать некоторые общие указания. Пусть $y = y(x) -$ искомая зависимость между характеристиками x и y изучаемого процесса. При составлении дифференциального уравнения, решением которого является функция $y(x)$, необходимо выразить, насколько изменится эта функция, когда независимая переменная x получит приращение Δx, т.е. выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, т.е. зависимость скорости изменения величины y в точке x (производной $y'(x)$ от x и $y(x)$). Во многих случаях указания зависимость определяется на основании закона или экспериментального факта, установленного в той или иной области естествознания. При этом, в частности, используется геометрический смысл производной (тангенс угла наклона касательной) и ее физический смысл (скорость протекания процесса).

При решении некоторых задач получается уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла. Такие уравнения называется *интегральными*. Они возникают при использовании геометрического смысла определенного интеграла как площади криволинейной трапеции и других интегральных формул (длина дуги кривой, площадь поверхности и объема тела вращения, работа силы и т.д.). В простейших случаях удается путем дифференцирования преобразовать интегральные уравнения в дифференциальные.

1.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимся переменными.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.1.1}$$

называется *уравнением с разделяющимся переменными* или же могут быть даны в следующем виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0\,. \tag{2.1.2}$$

Если $g(c_0) = 0$ в точке $y = c_0$, то функция $y = c_0$ является решением уравнения (2.1.1). Решения уравнения (2.1.1), вдоль которых $g(y) \neq 0$, удовлетворяют соотношению

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = c\,.$$

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точек $x = x_0, y = y_0$ соответственно, причем $g(y_0) \neq 0$. Тогда решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.1.1) с начальным условием $\varphi(x_0) = y_0$ существует в некоторой окрестности точки $x = x_0$, единственно и удовлетворяет соотношению

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx\,.$$

Уравнение вида $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ приводится к уравнениям с разделяющимся переменными заменой $ax + by + c = z$.

С дифференциальным уравнением $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ связано понятие векторного поля на прямой. Каждой точке y из области определения функции $f(y)$ поставим в соответствие вектор, длина которого равна $\left|f(y)\right|$, а направление совпадает с положительным направлением на оси Oy, если $f(y) > 0$, и противоположно ему, если $f(y) < 0$; тогда множество указанных векторов образует векторное поле. Точки, в которых направление поля не определено, т.е. в которых $f(y) = 0$, называется *особыми точками векторного поля (или положениями равновесия)*. Нарисовав векторное поле, нетрудно схематически изобразить поведение интегральных кривых данного уравнения.

Пример 1.1. Решить дифференциальное уравнение $2x^2yy' + y^2 = 2$.

Решение. Приведем уравнение к виду (2.1.2):

$$2x^2y\frac{dx}{dy} = 2 - y^2; \qquad 2x^2ydy = \ 2 - y^2 \ dx\,.$$

Делим обе части уравнения на $2x^2 \ 2 - y^2$:

$$\frac{y}{2 - y^2}dy = \frac{dx}{2x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{y}{2 - y^2}dy = \int \frac{dx}{2x^2}; \, y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}.$$

При делении на $2x^2 \ 2 - y^2$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $2 - y^2 = 0$, т.е. $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Но эти выражения не являются решениями данного уравнения.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 0$

Решение. Уравнение приводится к виду (2.1.2):

С помощью деления обе частей уравнения на $\sqrt[3]{y^2}$

$$\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3dx\,.$$

Проинтегрируем обе части уравнения и получим:

$$y = \quad x + C \quad ^{3}.$$

По данным $y(2) = 0$ находим C

$$2 + C = 0 \Rightarrow C = -2\,.$$

Теперь сможем записать ответ:

$$y = \quad x - 2 \quad ^{3}.$$

При делении на $\sqrt[3]{y^2}$ мы потеряли корень уравнения $y = 0$ и действительно $y = 0$ является корнем уравнения.

1.2. Однородные уравнения.

Функция $F(x,y)$ называется *однородной степени* k, если для всех $\lambda > 0$ выполняется равенство $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x,y)$. Примером однородной функции может служить любая форма (однородный многочлен) степени k. Функции

$$\frac{x-y}{x+y},\ \frac{x^2+xy}{x-y},\ x^2+y^2-xy\,,\ x^{k-1}y+y^k$$

Являются однородными соответственно степени 0, 1, 2, k.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x.y) \qquad (2.1.3)$$

Называется *однородным*, если $f(x,y) -$ однородная функция степени нуль.

Уравнение $M(x.,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ однородные функции одной и той же степени.

Областью определения однородного уравнения не обязательно должна быть вся координатная плоскость без точки O. Однородные уравнения можно рассматривать в любой однородной (инвариантной относительно растяжений) области, например в угле с вершиной O, и т. д.

Замена $y = zx$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимся переменными. Однородное уравнение к уравнению с разделяющимся переменными. Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимся переменными также в полярной системе координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

К однородным уравнениям приводится уравнения вида $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. Это достигается линейной заменой $x = x_0 + t$, $y = z + y_0$, где $x_0, y_0 -$ координаты точки пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если же указанные прямые не пересекаются, то в этом случае $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ и уравнение приводится к уравнению с разделяющимся переменными с помощью замены $a_1x + b_1y + c_1 = z$.

Функция $g(x,y)$ называется *квазиоднородной степени* k, если при некоторых α и β имеет место равенство $g(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^k g(x,y)$ для всех $\lambda > 0$.

Квазиоднородные степени складываются при умножении функций, эти степени называются *весами*. Таким образом, x имеет вес α, y – вес β, $3xy^2$ – вес $\alpha + 2\beta$ и т. д.

Дифференциальное уравнение (2.1.3) называется *квазиоднородной (с весами α и β)*, если функция $f(x,y)$ является квазиоднородной (с весами α и β) степени $\beta - \alpha$, т.е. $f(\lambda^{\alpha}x, \lambda^{\beta}y) = \lambda^{\beta-\alpha}f(x,y)$.

Заменой $y = z^{\beta/\alpha}$ квазиоднородное уравнение приводится к однородному, однако практически более удобно пользоваться заменой $y = ux^{\beta/\alpha}$, приводящей квазиоднородное уравнение к уравнению с разделяющимся переменными.

§2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n-ого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

или, если оно разрешено относительно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{2.2.1}$$

Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения (2.2.1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \ \ldots, \quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{2.2.2}$$

называется задачей Коши для уравнения (3.2.1).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Если в уравнении (3.2.1) функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$

а) непрерывна по всем своим аргументам $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области D их изменения,*

б) имеет ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *по аргументам* $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$*, то найдется интервал* $x_0 - h0 < x < x_0 + h$*, на котором существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения (2.2.1), удовлетворяющее условиям (2.2.2) где значения* $x = x_0, y = y_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ *содержатся в области D.*

Для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ начальные условия имеют вид

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0',$$

где x_0, y_0, y_0'— данные числа. В этом случае теорема существования и единственности *геометрически* означает, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy с данным тангенсом угла наклона касательной y_0 проходит единственная кривая.

Рассмотрим, например, уравнение $y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}$ и начальные условия

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0'.$$

В данном случае $f(x, y, y') \equiv \sin y' + e^{-x^2 y}$. Эта функция определена и непрерывна при всех значениях x, y, y'. Ее частные производные по y и y' равны соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

и являются всюду непрерывными и ограниченными функциями своих аргументов. Следовательно, каковы бы ни были начальные условия

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0\,, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Существует единственное решение данного уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка (2.2.1) называется множество всех его решений, определяемое формулой $y = \varphi \;\; x, C_1, C_2, ..., C_n \;\;$, содержащей n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ таких, что если заданы начальные условия (2.2.2), то найдутся такие значения $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n$, что $y = \varphi\left(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n \right)$ будет являться решением уравнения (3.2.1), удовлетворяющим этим начальным условиям.

Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ называется *частным решением* дифференциального уравнения (3.2.1).

Уравнение вида $\Phi \;\; x, y, C_1, C_2, ..., C_n \;\; = 0$ которое определяет неявно общее решение дифференциального уравнения, называется *общим интегралом уравнения.* Давая постоянным $C_1, C_2, ..., C_n$ конкретные допустимые числовые значения, получим *частный интеграл* дифференциального уравнения. График частного решения или частного интеграла называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

2.1. Линейные дифференциальные уравнения n -ого порядка.

Пусть имеем конечную систему из n функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, определенных на интервале $\;\; a, b \;\;$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не все равные к нулю, такие, что для всех значений x из этого интервала справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 .$$

Если же тождество выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называют *линейно независимым* интервале a, b .

Пример. Показать, что система функций $e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x$, где $\beta \neq 0$, линейно независима на интервале $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Определим значения α_1 и α_2, при которых будет выполняться тождество

$$\alpha_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + \alpha_2 e^{\alpha x}\cos\beta x \equiv 0 . \qquad (2.2.3)$$

Разделим обе его части на $e^{\alpha x} \neq 0$:

$$\alpha_1 \sin\beta x + \alpha_2 \cos\beta x \equiv 0 \qquad (2.2.4)$$

Подставляя в (2.2.4) значение $x = 0$, получаем $\alpha_2 = 0$ и, значит, $\alpha_1 \sin\beta x \equiv 0$; но функция $\sin\beta x$ не равна тождественно нулю, поэтому $\alpha_1 = 0$. Тождественно (2.2.4), а следовательно, и (2.2.3) имеют место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т.е. данные функции линейно независимы в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Замечание. Попутно доказана линейная независимость тригонометрических функций $\sin\beta x$, $\cos\beta x$.

Пусть n функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ имеют производные $n-1$ -го порядка. Определитель

$$W\left[y_1, y_2, \dots, y_n\right] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots\dots\dots & y_n(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) & \dots\dots\dots & y_n{}'(x) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots\dots\dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для этой системы функций. Определитель Вронского вообще является функцией от x, определенной в некотором интервале.

Теорема. Если система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима на отрезке $\left[a, b\right]$, то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом отрезке.

2.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \qquad (2.2.5)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — вещественные постоянные, $a_0 \neq 0$.

Для нахождения общего решения уравнения (2.2.5) поступаем так.

Составляем характеристическое уравнение для уравнения (2.2.5):

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad (2.2.6)$$

Пусть $k_1, k_2, \dots, k_n$ корни уравнения (2.2.6), причем среди них могут быть и кратные.

Возможны следующие случаи:

а) $k_1, k_2, \dots, k_n$ — вещественные и различные.

Тогда фундаментальная система решений уравнения (2.2.5) имеет вид

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_3 x}$$

и общим решением однородного уравнения будет

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x};$$

б) корни характеристического уравнения вещественные, но среди них есть кратные. Пусть, например, $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = \tilde{k}$, т.е. $\tilde{k}$ является m-кратным корнем уравнения (3.2.6), а все остальные $n - m$ корней различные. Фундаментальная система решений в этом случае имеет вид

$$e^{\tilde{k} x}, xe^{\tilde{k} x}. x^2 e^{\tilde{k} x}, \ldots, x^{m-1} e^{\tilde{k} x}, e^{k_{m+1} x}, \ldots, e^{k_n x},$$

а общее решение

$$y = C_1 e^{\tilde{k} x} + C_2 x e^{\tilde{k} x} + C_3 x^2 e^{\tilde{k} x} + \ldots + C_m x^{m-1} e^{\tilde{k} x} + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

в) среди корней характеристического уравнения есть комплексные. Пусть для определенности $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $k_3 = \gamma + i\delta$, $k_4 = \gamma - i\delta$, а остальные корни вещественные (так как по предположению коэффициенты a_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$, уравнения (2.2.5) вещественные, то комплексные корни уравнения (2.2.6) попарно сопряженные).

Фундаментальная система решений в этом случае будет иметь вид

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\gamma x}\cos\delta x,\ e^{\gamma x}\sin\delta x,\ e^{k_5 x},\ e^{k_6 x},\ \ldots,\ e^{k_n x},$$

а общее решение

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 e^{\gamma x}\cos\delta x + C_4 e^{\gamma x}\sin\delta x + C_5 e^{k_5 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

г) в случае, если $k_1 = \alpha + i\beta$ является k —кратным корнем уравнения (2.2.6) $\left(k \le \frac{n}{2}\right)$, то $k_2 = \alpha - i\beta$ также будет k-кратным корнем, и фундаментальная система решений будет иметь вид

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,$$

$$\ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ e^{k_{2m+1}x},\ldots,e^{k_n x},$$

следовательно, общее решение

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3xe^{\alpha x}\cos\beta x + C_4xe^{\alpha x}\sin\beta x + \ldots$$

$$\ldots + C_{2m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{2m}x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x + C_{2m+1}e^{k_{2m+1}x} + \ldots + C_ne^{k_n x}.$$

Пример. Исследовать, являются ли данные функции линейно независимыми в их области определения.

$$y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \cos 2x$$

Решение. Для определения на линейную зависимость нам необходимо вычислить определитель Вронского, а для этого мы вычисляем производные первого и второго порядка от функции y_1, y_2, y_3 :

$y_1 = \sin x$	$y_2 = \cos x$	$y_3 = \cos 2x$
$y_1' = \cos x$	$y_2' = -\sin x$	$y_3' = -2\sin 2x$
$y_1'' = -\sin x$	$y_2'' = -\cos x$	$y_3'' = -4\cos 2x$.

Получившие значения подставляем на определитель Вронского:

$$W\left[y_1, y_2, y_3\right] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & -\sin x & -2\sin 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = 4\sin^2 x\cos 2x + 2\sin x\cos x\sin 2x -$$

$$-\cos^2 x\cos 2x - \sin^2 x\cos 2x + 4\cos^2 x\cos 2x - 2\sin x\cos x\sin 2x = 3\sin^2 x\cos 2x$$

.

Так как определитель Вронского отлична от нуля, то вытекает, что система функции линейно независима

Пример. Найти общее решения уравнения.

$$y'' + 4y' + 3y = 0\,.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение, для этого введем обозначение $y = e^{kx}$. где мы имеем $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ отсюда

$$k^2e^{kx} + 4ke^{kx} + 3e^{kx} = 0$$

так как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2e^{kx} + 4ke^{kx} + 3e^{kx} = 0\left|\frac{1}{e^{kx}}\right.,$$

где мы получаем характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 3 = 0$$

разлагаем на множители

$$k + 3 \quad k + 1 \ = 0$$

отсюда видно, что характеристическое уравнение имеет корни

$$k_1 = -3,\ k_2 = -1,$$

итак фундаментальная система решении имеет вид,

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{-3x},\ y_2 = e^{k_2 x} = e^{-x},$$

следовательно, общее решение

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}.$$

Пример. Найти общее решения уравнения.

$$y''' - 8y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - 8 = 0.$$

разлагаем на множители

$$k - 2 \quad k^2 + 2k + 4 \ = 0.$$

корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2,\ k_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i,$$

фундаментальная система решении получает вид

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{2x},$$

$$y_{2,3} = e^{k_{2,3} x} = e^{\ -1 \pm \sqrt{3}i \ x} = e^{-x} \cdot e^{\pm\sqrt{3}ix} = e^{-x} \ \ \cos\sqrt{3}x \pm i \sin\sqrt{3}x \ \ .$$

Проверяем на линейную независимость систему фундаментальных решении по теореме т.е. определитель Ворнского должен приравнятся к нулю. Для этого необходимо найти производные первого и второго порядка

$y_1 = e^{2x}$	$y_2 = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$	$y_3 = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$

$y_1' = 2e^{2x}$	$y_2' = -e^{-x}\ \ \cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x$	$y_3' = -e^{-x}\ \ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x$
$y_1'' = 4e^{2x}$	$y_2'' = 2e^{-x}\ \ -\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x$	$y_3'' = -2e^{-x}\ \ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x$

Вычисляем определитель Вронского

$$W\left[y_1, y_2, y_3\right] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x}\cos\sqrt{3}x & e^{-x}\sin\sqrt{3}x \\ 2e^{2x} & -e^{-x}\ \ \cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x & -e^{-x}\ \ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x \\ 4e^{2x} & 2e^{-x}\ \ -\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x & -2e^{-x}\ \ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x \end{vmatrix}$$

$$= e^{2x}\cdot e^{-x}\ \ \cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\ \ \cdot 2e^{-x}\ \ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x\ \ - 4e^{2x}\cdot e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,\cdot$$

$$\cdot e^{-x}\ \ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x\ \ + 2e^{2x}\cdot e^{-x}\sin\sqrt{3}x\cdot 2e^{-x}\ \ -\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x$$

$$+4e^{2x}\cdot e^{-x}\sin\sqrt{3}x\cdot e^{-x}\ \ \cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\ \ + 2e^{2x}\cdot e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,\cdot$$

$$\cdot 2e^{-x}\ \ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x\ \ + e^{2x}\cdot e^{-x}\ \ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x\ \ \cdot$$

$$\cdot 2e^{-x}\ \ -\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\ \ = 2\sqrt{3} + 4\sin 2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}\cos^2\sqrt{3}x - 2\sin 2\sqrt{3}x -$$

$$-2\sin 2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}\sin^2\sqrt{3}x + 2\sin 2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}\sin^2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}\cos^2\sqrt{3}x +$$

$$+2\sin 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 4\sin 2\sqrt{3}x = 12\sqrt{3}.$$

Так как определитель Вронского отлична от нуля, то вытекает, что система функции линейно независима

Итак, общее уравнение имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\ \ C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x\ \ .$$

Пример. Найти общее решения уравнения.

$$y'' - 4y' + 5y = 0\,.$$

Решение. Через y обозначим e^{kx} отсюда получим

$$k^2 e^{kx} - 4ke^{kx} + 5e^{kx} = 0\,,$$

так как $e^{kx} \neq 0$ имеем

$$k^2 e^{kx} - 4ke^{kx} + 5e^{kx} = 0 \left| \frac{1}{e^{kx}} \right.,$$

в результате получаем характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 5 = 0\,.$$

Решая квадратное уравнение:

$$k_{1,2} = 2 \pm i\,.$$

Зная корни характеристического уравнения, мы можем записать систему фундаментальных решении

$$y_{1,2} = e^{k_{1,2}x} = e^{(2\pm i)x} = e^{2x} \cdot e^{\pm ix} = e^{2x}\left(\cos x \pm i \sin x\right).$$

А общее решение принимает вид

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

2.3. Линейные неоднородные уравнения.

Линейное неоднородное уравнение n -го по рядка имеет вид

$$L(y) = y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + h_{n-1}(x)y' + h_n(x)y = f(x)\,, \qquad (2.2.7)$$

где функции $f(x) \neq 0$, $h_i(x)$ $(i = 1,\ldots,n)$ непрерывны на $I = (a,b)$. Общее решение уравнения (2.2.7) находится по формуле

$$y = \overline{y} + \tilde{y}\,. \qquad (2.2.8)$$

Здесь $\overline{y}$ —общее решение линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, соответствующего уравнению (2.2.7), а $\tilde{y}$ – какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (2.2.7) .

Если известна фундаментальная система $y_1, y_2, ..., y_n$ решений соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$, то общее решение неоднородного уравнения (2.2.6) может быть всегда найдено с помощью *метода вариации произвольных постоянных (метод Логранжа).* Сущность этого метода состоит в следующем. Общее решение неоднородного уравнения (2.2.7) ищем в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i \,, \tag{2.2.9}$$

где функции $c_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$ определяется из системы уравнений

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + ... + c_n'(x)y_n = 0\,,$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + ... + c_n'(x)y_n' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x)\,. \tag{2.2.10}$$

Относительно $c_i'(x)$ $(i = 1, ..., n)$ система (2.2.10) является системой n линейных неоднородных алгебраических уравнений, причем главный определитель этой системы

$$\Delta = W\left[y_1, y_2, ..., y_n \right] \neq 0 \quad \forall x \in I\,. \tag{2.2.11}$$

Поэтому система (2.2.10) имеет единственное решение:

$$c_i'(x) = \psi_i(x) \qquad (i = 1, ..., n) \tag{2.2.12}$$

откуда

$$c_i(x) = \int \psi_i(x)dx + \alpha_i\,, \tag{2.2.13}$$

где $\alpha_i (i = 1,\dots,n)$–произвольные постоянные. Учитывая равенства (2.2.9) и (2.2.13), общее решение неоднородного уравнения, найденное методом вариации произвольных постоянных, получаем в виде

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + \sum_{i=1}^{n} \int \psi_i(x)dx \cdot y_i\,. \tag{2.2.14}$$

Для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения (2.2.7) может быть использован метод Коши. Согласно методу Коши, частное решение линейного неоднородного уравнения (2.2.7), удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (x \in I), \tag{2.2.15}$$

находится по формуле *Коши*:

$$y = \int_{x_0}^{x} K(x,s)f(s)ds \quad (x_0, x \in I), \tag{2.2.16}$$

где $K(x,s)$— *функция Коши*, являющаяся при каждом значении параметра $s \in I$ решением однородного уравнения $L(y) = 0$ и удовлетворяющая условиям

$$K(s,s) = K'(s,s) = \dots = K^{(n-2)}_{(s,s)} = 0\,, \quad K^{(n-1)}_{(s,s)} = 1\,. \tag{2.2.17}$$

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, то функция Коши $K(x,s)$ может быть найдена в виде

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} c_i(s) y_i(x)\,, \tag{2.2.18}$$

где коэффициенты $c_i(s)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ определяются так, чтобы удовлетворялись условия (2.2.17).

Если известна нормальная фундаментальная система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, то решение линейного неоднородного уравнения (2.2.7), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ может быть найдено по формуле

$$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \dots + y_0^{(n-1)} y_n(x) + \tilde{y}(x) \tag{2.2.19}$$

где $\tilde{y}(x)$ – частное решение уравнения (2.2.7), построенное по методу Коши.

Принцип суперпозиции решений состоит в том, что если y_i является решением линейного неоднородного уравнения

$$L(y) = f_i(x) \quad (i = 1, \dots, m), \tag{2.2.20}$$

то функция $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$L(y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \tag{2.2.21}$$

где α_i–постоянные. Если $f(x)$ представима в виде суммы ряда, т.е. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x)$, а y_i является решением неоднородного уравнения

$$L(y) = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots), \tag{2.2.22}$$

причем ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i y_i$ сходится и допускает n — кратное почленное дифференцирование, то функция $y=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i y_i$ является линейного неоднородного уравнения

$$L(y) = f(x). \qquad (2.2.23)$$

Если линейное неоднородное уравнение

$$L(y) = \varphi(x) + i\psi(x), \qquad (2.2.24)$$

где коэффициенты $h_j(x)$ $(j=1,..,n)$ и функция $\varphi(x),\psi(x)$ действительны, имеет комплексное решение $y=u(x)+iv(x)$, то функции $u=\operatorname{Re}y$, $v=\operatorname{Im}y$ являются соответственно решениями уравнений $L(y)=\varphi(x)$, $L(y)=\psi(x)$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Решение. Применяя метод вариации произвольных постоянных, мы имеем

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

Отсюда корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1,\ k_2 = 3.$$

Итак, фундаментальная система решении имеет вид

$$\overline{y}(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{3x}$$

Для определения функции $C_1(x), C_2(x)$ имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} + 3C_2'(x)e^{3x} = e^{4x} \end{cases}$$

Решая систему получим

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{1}{4}e^{5x} \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{4}e^{x} \end{cases}.$$

Интегрируя находим $C_1(x), C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{4}\int e^{5x}dx \\ C_2(x) = \dfrac{1}{4}\int e^{x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{20}e^{5x} + C_1 \\ C_2(x) = \dfrac{1}{4}e^{x} + C_2 \end{cases}.$$

Значит общее решение дифференциального уравнения принимает вид

$$y(x) = \left(-\frac{1}{20}e^{5x} + C_1\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{4}e^{x} + C_2\right)e^{3x} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} -$$

$$-\frac{1}{20}e^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y'' - y = 2e^{x} - x^2.$$

Решение. Решаем характеристическое уравнение однородного уравнения

$$y'' - y = 0$$

или

$$k^2 - 1 = 0$$

корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \pm 1.$$

Итак, фундаментальная система решении

$$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x}$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, для определения функции $C_1(x), C_2(x)$ имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = 2e^{x} - x^2 \end{cases}$$

решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x) = -e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{x} \\ C_2'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} \end{cases}.$$

Интегрируя находим $C_1(x), C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1(x) = \int\left(-e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{x}\right)dx \\ C_2(x) = \int\left(1 - \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{x} - xe^{x} + e^{x} + C_1 \\ C_2(x) = x + \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C_2 \end{cases}$$

Подставляем $C_1(x), C_2(x)$ вместо $y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x}$ и находим

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{x} - xe^{x} + e^{x} + C_1\right)e^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}x^2e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C_2\right)\cdot e^{x} =$$

$$C_1e^{-x} + C_2e^{x} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 + xe^{x} + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 =$$

$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{2} e^{x} + x e^{x} + x^2 + 2\,.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x\,.$$

Решение. Решаем характеристическое уравнение однородного уравнения

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

корни характеристического уравнения равны

$$k_1 = 1,\; k_2 = 2\,.$$

Фундаментальная система решении принимает вид

$$y(x) = C_1(x) e^{x} + C_2(x) e^{2x}\,.$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, для определения функции $C_1(x), C_2(x)$ имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{x} + C_2'(x) e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) e^{x} + 2C_2'(x) e^{2x} = \sin x \end{cases}$$

Интегрируя находим $C_1(x), C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1(x) = \int -e^{-x} \sin x dx \\ C_2(x) = \int e^{-2x} \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x}{2} \\ C_2(x) = \dfrac{-e^{-2x} - 2e^{-2x} \sin x}{3} \end{cases}$$

Подставляя вместо $y(x) = C_1(x) e^{x} + C_2(x) e^{2x}$, $C_1(x), C_2(x)$ находим общее решение

$$y = \frac{1}{2}\ \ e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x\ \ e^{x} - \frac{1}{3}\ \ e^{-2x} + 2e^{-2x} \sin x\ \ e^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + C_1 e^x - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sin x + C_2 e^{2x} =$$

$$= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{7}{6}\sin x - \frac{1}{3}.$$

§3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Решения линейного дифференциального уравнения выше первого порядка с переменными коэффициентами не всегда выражается через элементарные функции, и интегрирование такого уравнения редко приводится к квадратурам.

Наиболее распространенным приемом интегрирования указанных уравнений является представление искомого решения в виде степенного ряда. Рассмотрим уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (2.3.1)$$

Предположим, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (2.3.1) являются аналитическими функциями на интервале $|x - x_0| < a$, т.е. разлагаются в степенные ряды

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \; q(x) = \sum_{k-0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \qquad (2.3.2)$$

сходящиеся при $|x - x_0| < a$.

Теорема. Если функции $p(x)$ и $q(x)$— аналитические при $|x - x_0| < a$, то всякое решение $y = y(x)$ уравнения (3) является аналитическим при $|x - x_0| < a$*, т.е. разлагается в степенной ряд*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

сходящийся при $|x - x_0| < a$.

Это теорема дает возможность проинтегрировать уравнение (2.3.1.), т. е. построить решения этого уравнения в виде степенных рядов. Алгоритм такого построения состоит в следующем. Для простоты положим $x_0 = 0$. Будем искать решение уравнения (2.3.1) в виде ряда по степеням x с неопределенными коэффициентами:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k . \qquad (2.3.3)$$

Подставляя (2.3.3) в уравнение (2.3.1), имеем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 .$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots,$ получаем рекуррентную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, c_2, \ldots,$

$$q_0 c_0 + p_0 c_1 + 1 \cdot 2 c_2 = 0 ,$$

$$q_1 c_0 + (q_0 + p_1) c_1 + 2 p_0 c_2 + 2 \cdot 3 c_0 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (2.3.4)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left[q_{k-i} c_i + (i+1) p_{k-i} c_{i+1} \right] + (k+1)(k+2) c_{k+2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Коэффициенты c_0 и c_1 можно задавать произвольно (хотя бы один из них должно быть отличен от нуля, иначе получим решение $y \equiv 0$). Зафиксировав c_0 и c_1, ищем решение уравнения (3.3.1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$. Из первого уравнения находим c_2, из второго c_3 и т. Д.

Если в уравнении (2.3.1) функции $p(x)$ и $q(x)$— рациональные, т.е.

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)},\ q(x) = \frac{q_1(x)}{q_0(x)},$$

Где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $q_0(x)$, $q_1(x)$— многочлены, то точки, в которых $p_0(x) = 0$ или $q_0(x) = 0$, называются *особыми точками уравнения (2.3.1)*.

Для уравнения второго порядка

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.3.5}$$

в котором $p(x)$ и $q(x)$—аналитические функции в промежутке $|x| < a$, точка $x = 0$ является особой точкой, лишь только один из коэффициентов $p_0(x)$ или $q_0(x)$ в разложении функций $p(x)$ и $q(x)$ в степенной ряд отличен от нуля. Это пример простейшей особой точки, так называемой *регулярной особой точки (или особой точки первого порядка)*.

В окрестности особой точки $x = x_0$ решения в виде степенного ряда может не существовать, в этом случае решения надо искать в виде обобщенного степенного ряда:

$$y = (x - x_0)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{2.3.6}$$

где λ и $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots,\ c_0 \neq 0$ подлежат определению.

Рассмотрим уравнение (2.3.5) при $x > 0$. Подставив в это уравнение выражение (2.3.6) при $x_0 = 0$, имеем

$$\left[\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0\right]c_0 + \ \left[\lambda(\lambda+1)+p_0(\lambda+1)+q_0\right]c_1+(\lambda p_0+q_0)c_0 \ \ x+\ldots$$
$$\ldots+\ \left[(\lambda+n)(\lambda+n-1)+\ldots+p_0(\lambda+n)+q_0\right]c_k+\ldots$$
$$\ldots+(\lambda p_0+q_0)c_0 \ \ x^k+\ldots=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях x, получаем рекуррентную систему уравнений:

$$f_0\ \ \lambda\ \ c_0=0,$$

$$f_0\ \ \lambda+1\ \ c_1+f_1\ \ \lambda\ \ c_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.3.7)$$

$$f_0\ \ \lambda+k\ \ c_k+f_1\ \ \lambda+k-1\ \ c_{k-1}+f_2\ \ \lambda+k-2\ \ c_{k-2}+\ldots+f_k\ \ \lambda\ \ c_0=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где обозначено

$$f_0\ \ \lambda\ \ =\lambda\ \ \lambda-1\ \ +p_0\lambda+q_0,$$

$$f_m\ \ \lambda\ \ =\lambda p_m+q_m,\ \ m\geq 1. \qquad (2.3.8)$$

Так как $c_0\neq 0$, то λ должно удовлетворять уравнению

$$\lambda\ \ \lambda-1\ \ +p_0+q_0=0, \qquad (2.3.9)$$

которое называется *определяющим уравнением.* Пусть λ_1,λ_2—корни этого уравнения. Если разность $\lambda_1-\lambda_2$ не есть целое число, то $f_0\ \ \lambda_1+k\ \ \neq 0$, $f_0\ \ \lambda_2+k\ \ \neq 0$ ни при каком целом $k>0$, а значит, указанным методом можно построить два линейно независимых решения уравнения (2.3.1):

$$y_1=x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(1)}x^k \text{ и } y_2=x^{\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(2)}x^k.$$

Если же разность $\lambda_1 - \lambda_2$ является целым числом, то указанным выше способом можно построить одно решение в виде обобщенного ряда $y_1(x)$. Зная это решение, с помощью формулы Лиувилля-Остроградского можно найти второе линейно независимое с $y_1(x)$ решение:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx .$$

Из этой же формулы вытекает, что решение $y_2(x)$можно искать в виде

$$y_2(x) = Ay_1(x)\ln(x) + x^{\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

(число *A* может оказаться равным нулю).

Пример (2.3.1). Найти три первых разложения в степенной ряд решения данного дифференциального уравнения для заданного начального условия:

$$y' = 1 - xy , \qquad y\Big|_{x=0} = 0 .$$

Решение. Переведем правую часть уравнения в левую

$$y' + xy - 1 = 0 .$$

Для, начало решения запишем сумму:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

Отсюда находим $y'(x)$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n .$$

Теперь сумму и производную от суммы подставляем на данную задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - 1 = 0$$

разлагаем сумму

$$c_1 x + 2c_2 x^2 + 3c_3 x^3 + 4c_4 x^4 + ... + nc_n x^n + ... +$$

$$+c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + ... + c_n x^{n+1} + ... - 1 = 0$$

собирая подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при всех одинаковых степенях x, получаем ряд уравнений:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & c_1 - 1 = 0 \\ x^1 & 2c_2 + c_0 = 0 \\ x^2 & 3c_3 + c_1 = 0 \\ x^3 & 4c_4 + c_2 = 0 \\ x^4 & 5c_5 + c_3 = 0 \end{array}.$$

Из, начальных условии $y(0) = 0$ и суммы $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ получаем, что $y_0 = 0$ и вытекает решения ряда уравнении:

$$y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = -\frac{1}{3},\ y_4 = 0,\ y_5 = \frac{1}{3 \cdot 5}.$$

Отсюда ясно, что три первых члена разложения принимает вид:

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - ...$$

Пример (2.3.2). Проинтегрировать при помощи рядов следующую дифференциальную уравнению.

$$y'' + xy' + y = 0$$

Решение. Записываем сумму

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,.$$

Находим производные от суммы первого и второго порядка

$$y_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \,,\; y_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \,.$$

Эти же выражения подставляем в заданное уравнение

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

разлогая сумму и собирая подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при всех одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2c_2 + c_0 = 0 \\ 6c_3 + 2c_1 = 0 \\ 12c_4 + 3c_2 = 0 \\ 20c_5 + 4c_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n(n-1)c_n + (n+1)c_{n-2} = 0 \end{cases}$$

так как $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0$ получаем решение уравнении

$$c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{2 \cdot 4},\dots$$

Следовательно,

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots .$$

Аналогично находим

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

здесь мы для начальных условии берем $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ и получаем решение системы уравнении

$$d_0 = 0,\ d_1 = 1,\ d_2 = 0,\ d_3 = -\frac{1}{3},\ d_4 = 0,\ d_5 = \frac{1}{3 \cdot 5},\dots .$$

Следовательно

$$y_2 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} + \dots .$$

Итак, конечное решение примет вид

$$y = C_1 \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots \right] +$$

$$+ C_2 \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} + \dots \right].$$

Пример (2.3.3). Проинтегрировать при помощи рядов следующую дифференциальную уравнению.

$$y'' - xy' + y - 1 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Запишем сумму

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

находим первые и вторые производные от суммы

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

Аналогичным образом запишем систему уравнении для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} c_0 = c_1 = 0 \\ 2c_2 + c_0 - 1 = 0 \\ 6c_3 = 0 \\ 12c_4 - c_2 = 0 \\ c_5 = 0 \\ 30c_6 - 3c_4 = 0 \\ \dots \\ n(n-1)c_n - (n-1)c_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = c_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \\ c_{2n+1} = 0 \\ c_4 = \dfrac{1}{24} \\ c_6 = \dfrac{3}{720} \\ \dots \\ c_n = \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+4)!} \end{cases}$$

следовательно, можем записать решение дифференциальной уравнении

$$y = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{3x^6}{6!} + \dots + \frac{(2n+1)!!\,x^{2n+4}}{(2n+4)!} + \dots.$$

Заключение

В настоящее время появилась возможность решения математических задач без составления компьютерных программ на алгоритмических языках. Причиной этого является разработка специальных математических программ — математических систем. В вузах и научных учреждениях чаще всего применяются математические системы: MATHCAD, MATLAB, Maple, Mathematika. С применением математических систем учебный процесс становится интереснее, студенты понимают содержание занятия быстрее, глубже, а для укрепления преподаваемых понятий и решения задач остаётся больше времени.

Дифференциальный оператор – оператор, определенный некоторым дифференциальным выражением и действующий в пространствах функций на дифференцируемых многообразиях, или в пространствах, сопряженных к пространствам этого типа.

Многие задачи математической физики приводят к вопросам определения собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов и изучения сходимости разложений в ряды по собственным функциям. К таким вопросам приходят всегда, применяя метод Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего начальным данным и краевым условиям.

Данная работа состоит из двух глав. Первая глава состоит из трех параграфов и посвящена ознакомлению дифференциальным уравнением. Также вторая глава состоит из трех параграфов состоящая из, интегрировании дифференциальных уравнении разных порядков, а также интегрировании дифференциальных уравнении при помощи степенных рядов.

Использованная литература

1. Филиппов А. Ф. «Введение в теорию дифференциальных уравнений». М.: КомКнига, 2007.

2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Ц. И. «Обыкновенные дифференциальные уравнения» Едиториал УРСС, 2002.

3. Самойленко А. М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А., «Дифференциальные уравнения» Высшая школа 1989.

4. Азларов Т., Мансуров Х. «Математический анализ». В 2-х частях. Т.: Ўқитувчи, 1994.

5. Наймарк М. А. «Линейные дифференциальные операторы». М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

6. Abell M. L., Braselton J. P. «Introductory Differential Equations». NY: Academic Press, 2014.

7. Abell M. L., Braselton J. P. «Introductory Differential Equations with Boundary Value Problems». NY: Academic Press, 2010.

8. Коллатц Л. «Задачи на собственные значения». М.: Наука, 1968.

9. Агафонов С.А., Герман А. Д., Муратова Т. В. «Дифференциальные уравнения». Учебник для вузов. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2004.

10. Салохиддинов М. С., Насриддинов Г. Н. «Оддий дифференциал тенгламалар». Т.: Ўзбекистон, 1994.

11. Филиппов А.Ф. «Сборник задач по дифференциальным уравнениям» Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» 2000.

12. Егоров А. И. «Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями». М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

www.wikipedia.org

www.twirpx.com

www.ziyonet.uz

www.allmath.ru