O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

AJINIYOZ NOMIDAGI NUKUS DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

«Fizika-matematika» fakulteti

«Matematika o‘qitish metodikasi» kafedrasi

5110100-«Matematika o’qitish metodikasi» bakalavr ta’lim yo’nalishi
4-v kurs talabasi
Babanazarov Maqsad Amanboyevichning

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

MAVZU: AKADEMIK LITSEYLARDA SONLI KETMA-KETLIKLAR VA ULARNING LIMITINI O’QITISH METODIKASI

Talaba:	____________	M.Babanazarov
Ilmiy raxbari:	___________	dotsent N.Djumabaev
Kafedra mudiri:	____________	dotsent B.Prenov

2021-yil may oyining   21 - sanasidagi kafedra majilisining qarori bilan himoyaga ruxsat berildi (№ 10 - protokol)

Nukus-2021

Mundarija:

Kirish

2017-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini rivojlantirishning ustuvor yo’nalishlaridan bo’lgan harakarlar strategiyasining 4- ustuvor yo’nalishi Ishtimoiy sohani rivolarish yo’nalishi asosida ta‘lim islohotini to‘la amalga oshirish uchun qator ishlarni amalga oshirish zarurligi alohida ta‘kidlangan. Shuningdek, maktabda fan asoslarini o‘qitilishini izchillik bilan chuqurlashtirish, yangi texnologiyalar to‘g‘risida asosiy tasavvurlarni, zamonaviy, iqtisodiy, huquqiy, ekologik bilimlarni berish, umumiy o‘rta va o‘rta maxsus ta‘limning darajasini fan-texnika va ma‘naviy taraqqiyot talablariga doim muvofiq bo‘lishini ta‘minlash eng dolzarb vazifalardan qilib qo‘yildi. Bu esa o‘z navbatida matematika ta‘limning mazmuni nimalardan iboratligini to‘la aniqlashtirib olish imkoni beradi.

Prezdentimizning 2017 yil 7 fevraldagi PF 4947-sonli Farmoni ijrosini taminlash maqsadida yurtimizda bir qancha ishlar olib borilmoqdan.Ayniqsa ta’lim sohasiga ham katta e’tibor berilmoqda.Yurtimiz matematika faniga ham katta e’tibor berilmoqda.Misol uchun matematika instituti ochilishi har bir tumanlar kesimda matematika maktablarning ochilishini milliy sertifikatga matematika o’qtuvchilarga oylik ustamalarni berilishini aytish mumkin.Prezdentimiz Shavkat Mirziyoyevning “Matematikani yaxshi bilgan bola aqlli,keng tafakkurli bo’ladi va istalgan sohada ishlab ketadi” deganlar O’zbekistondan matematika faniga bo’lgan e’tibor naqadar yuqori ekanligini anglash mumkin.

Bitiruv malakaviy ishi ikki bob, kirish qism, malakaviy ishining mazmunini o‘z ichiga oladigan olti paragrafdan, xulosa bo‘limi va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Har bir bob uchta rejadan iborat

Birinchi bobidan qisqacha nazariy bilimlar va har teoremalarning isbotlarni ko’rastib o’tganimiz. Birinchi bobning birinchi rejasi sonlar ketma-ketligi va progressiyalar haqida tushunchalar bo’lib bu rejada ketma-ketlikga tarifalar berib shulardan ketib chiqadigan natijlar va biz arifmetik va geometrik progressiyalar tushintiriladi.Birinchi bobning ikkinchi rejasi sonlar ketma-ketligining limiti bo’lib bu rejada biz ketam-ketliklarni limitga o’tishni va limitlar bo’yicha teoremalar va misollar kelib o’tganmiz.Birinchi bobning uchinchi rejasi chegaralangan , cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar bo’lib biz bu rejada monoton ketma ketliklar va ketma ketliklarni yaqinlashishga har misollar yordamida tekishirib ko’rsatganmiz. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar bo’yicha teoremaralar va ularning iborlari va natijalari ko’rsatilgan.

Ikkinchi bob ketma ketlikning teoremalari limit hisoblash texnikasi va cheksiz kichik miqdorlarni taqqoslash va ekvivalenti almashtirish prinsiplar keltirio’tilgan. Ikkinchi bobning birinchi rejasi Akademik litseylarda sonli ketma -ketligini o’qitish metodikasi bo’lib bu rejada ketma-ketlik bo’yicha ta’riflar ketma -ketlik xossalarni ,teoremalar va ularning isbotlarini ko’rsatib o’tgan.Ikkinchi bobning ikkinchi rejasi Sonlar ketma-ketligi va limitga misollar yechish bo’lib bu rejada ajoyib limitlar haqida tushincha berilib limit hisoblash bo’yicha misollar yechib ko’rsatgan.Ikkinchi bobning uchunchi rejasi Cheksiz kichik miqdorlarni taqqoslash va ekvivalent almashtirish bo’lib bu rejada cheksiz kichik miqdorlar bo’yicha tariflar berib taqqoslamalarga misollar yechib ko’rsatgan .Bu bobga ketma ketlikning teoremalari limit hisoblash texnikasi va cheksiz kichik miqdorlarni taqqoslash va ekvivalenti almashtirish prinsiplar keltirib o’tilgan.

Bitiruv malakaviy ishi maqsad va vazifalari:

- Bitiruv malakaviy ishi akademik litsey matematika kursida Sonli ketma-ketlik va uning limiti mavzusi bo’yicha o’quv materiallarini yaritishda Sonli ketma-ketlik bo’yicha o’quv qo’llanma yaratish

-Akademik litsey o’quvchilariga limitlar mavzusi bo’yicha asosiy tushinchalarni berish va har xil metodlar yordamida mavzuni tushintirib borish

-Ushbu mavzu bo’yicha o’quvchilarning amaliy bilmlarini mustahkamlash uchun misollar va masalarni turi metdolar yordamida yechib ko’rsatish.

-Ushbu mavzu orqali o’quvchilarning matematika faniga bo’lgan qiziqshini yanada oshirib borish asosiy maqsad qilib qo’yilgan.

I bob. Sonlar ketma-ketligi va limiti

§1. Sonlar ketma-ketlik va progressiyalar haqida tushunchalar

Ketma-ketlik tushunchasi. Har bir natural son ga biror qoida bo'yicha x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin.U holda

$$x_1 \ ; x_2 \ \ ; x_3 \ \ ; \ldots\ldots ; x_n ; \ldots . \qquad (1)$$

sonli ketma ketlik berilgan deyiladi va bu ketma ketlik $\{x_n\}$ $(n \in N)$ ko'rinishda belgilanadi. $x_1 \ ; x_2 \ \ ; x_n$ sonlar,mos ravishda, (1) ketma-ketlikning birinchi hadi,ikkinchi hadi va $n-$hadi deyiladi $.x_n$ ketma-ketlikning umumiy hadi deb ataladi.

Ketma-ketlikning aniqlanishidan ko'rinadiki,ketma-ketlik natural sonlar to'plamida berilgan $f(n)$ funksiyadir.Shuning uchun ketma-ketlik natural argumentli funksiya deb ham yuritiladi

1-misol. $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ Umumiy hadi bo'yicha sonli ketma-ketlik tuzing

Yechish.Agar $n=1$ bo'lsa, $x_1 = 1; n = 2$ bo'lsa, $x_2 = \dfrac{1}{4};\ldots\ x_n = n$ bo'lsa

$x_n = \dfrac{1}{n^2}$;u holda $1; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{16}; \dfrac{1}{25}; \dfrac{1}{n^2}; \dfrac{1}{(n+1)^2}$ ketma-ketlik paydo bo'ladi.

2-misol.Har bir toq natural songa 3 ni har bir juft natural songa esa 5 ni mos keltiramiz:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	……..
x_n	3	5	3	5	3	5	3	5	…….

Natijada $3;5;3;5;3;5;\ldots$ cheksiz sonli ketma-ketlikka ega bo'lamiz.Uning umumiy hadini bir necha formula bilan, masalan, $a_n = 4 + (-1)^n$ yoki

$$a_n = 4 + (-1)^n + sin\pi n$$

formula bilan berish mumkin.

Cheksiz sonli ketma-ketliklar turli xil usullarda berilishi mumkin.Shu usullarda ayrimalarini keltiramiz.

1.Ketma-ketlikning umumiy had formulasi bilan berilishi.Bu usulda n-hadning qiymatini shu hadning tartib nomeri bilan bog'lovchi formula beriladi(1-misol).Umumiy had formulasi yordamida ketma-ketlikning istalgan hadini topsh mumkin,ya'ni bu formula ketma-ketlikni to'la aniqlaydi.

2.Ketma-ketlik o'z hadining tartib nomeri bilan shu hadining qiymati orasidagi moslikni so'zlar orqali ifodalash yordamida berilishi mumkin(2-misol)

3.Ketma-ketlikning rekurrent usulda berilishi.Agar ketma-ketlikning dastlabki bitta yoki bir nechta hadlari berilgan bo'lib keyingi hadlarni shu berilgan hadlar yordamida topish imkonini beruvchi formula(rekurrent) formula ko'rsatilgan bo'lsa,ketma-ketlik rekurrent usulda berilgan deyiladi.(Rekurrent so'zi lotin tilida qaytish degan ma'noni beradi)

3-misol $a_1 = 3; a_n = 2^n a_{n-1} - 4(n \geq 2)$ bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning hadlarini topamiz.

Yechish.Bu yerda $\{a_n\}$ ketma-ketlik rekurrent usulda berilgan $a_1 = 3$ bo'lgani uchun rekurrent formula $a_n = 2^n a_{(n-1)} - 4$ ga asosan

$$a_2 = 2^2 a_1 - 4 = 43 - 4 = 8$$

$$a_3 = 2^3 a_2 - 4 = 8 \cdot 8 - 4 = 60,$$

$$a_4 = 2^4 a_3 - 4 = 8 \cdot 60 - 4 = 476$$

ekanligini topamiz.

Ketma-ketlik jadval yoki grafik ko'rinishida berilishi ham mumkin.

Ketma-ketlikning grafigi diskret nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi (loticha –discretus-uzlikli alohida qismlardan iborat).

Agar ketma-ketlikning dastlabki bir nechta hadlari berilgan bo'lib,keyingi hadlarni berilgan hadlar orqali ifodalash usuli aytilmagan bo'lsa,bu hadlarning berilishi ketma-ketlikning to'liq aniqlanishi uchun yetarli bo'lmaydi.

Masalan, $3; 5; 7; \ldots.$

Ketma-ketlikni 2 dan katta toq sonlar yoki 2 dan katta tub sonlar ketma-ketligi sifatida, shuningdek $x_n = 2n + 1 + sin\pi n$ formula bilan berilgan ketma-ketlik sifatida ham qarash mumkindir.

Dastlabki hadlariga ko'ra ketma-ketlik uchun biror umumiy had tanlash usullaridan birini keltiramiz.

4-misol.Ushbu jadval bilan berilgan sonli ketma-ketlikning umumiy hadini topamiz:

N	*2*	*4*	*6*	*8*
a_n	*-6*	*6*	*26*	*54*

Jadvalda ketma- ketlikning $2,4,6,8-$hadlari berilgan.

Yechish. Bu holda jadvalni oddiy kuzatishing o'zi yetarli emas.
Shuning uchun chekli ayirmalar usuli,ya'ni $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ dan foydalanamiz:

N	2	4	6	8
a_n	-6	6	26	54
Δa_n	12	20	28	
$\Delta^2 a_n$	8	8		

Birinchi Δa_n chekli ayirmalar a_n ning ketma-ket joylashgan qiymatlari ayirmasidan: $6-(-6)=12$; $26-6=20$; $54-26=28$.

Shu kabi $\Delta^2 a_n$ ikkinchi ayirmalar Δa_n ning ketma-ket joylashgan qiymatlaridan iborat: 20-12=8; 28-20=8 $\Delta^2 a_n$ayirmalar bir xil.Demak , (a_n) ketma-ketlik $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funkisiya qiymatlaridan iborat.Formulada a,b,c-noma'lum. Ular topish uchun jadvaldan ixtiyoriy (n, a_n) juftlik bo'yicha tenglamalar sistemasini tuzamiz.

Masalan, (2,-6), (4;6), (6;26) juftliklar bo'yicha:

$$\begin{cases} -6 = 2^2 a + 2b + c, \\ 6 = 4^2 a + 4b + c, \\ 6 = 6^2 a + 6b + c, \end{cases}$$ bundan $a=1, b=0, c=-10$.

Demak,izlanayotgan umumiy had formulasi $a_n = n^2 - 10$ dan iborat bo'ladi.

Chegaralangan ketma-ketliklar. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday bir a haqiqiy son topilib,barcha n natural sonlar uchun $x_n \geq a, (x_n \leq a)$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan (yuqoridan) chegaralangan deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun ikkita a va b haqiqiy sonlar topilib, barcha n natural sonlar uchun $a \leq x_n \leq b$ tengsizliklar bajarilsa, x_n ketma-ketlik quyidan (yuqoridan) chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

1-Misol. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik ekanligini isbot qilamiz.

Isbot.Barcha n natural sonlar uchun quyidagi tengsizliklar to'g'ridir;

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \geq \frac{n-n}{n+1} = 0;$$

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Demak $0 \leq x_n \leq 1$tengsizlik barcha n natural sonlarda o'rinli.Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'rsatadi.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa,u holda shunday $M \geq 0$ son topiladiki,barcha n natural sonlar uchun $M \geq 0$tengsizliklar bajariladi va aksincha x_n ketma-ketlik uchun shunday bir son topilib,barcha n natural sonlarda $x_n \leq M$ tengsizlik bajariladi, x_n etma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Isbot. x_n ketma-ketlik chegaralangan bo'lsin.U holda shunday $|a| va |b|$ haqiqiy sonlar topiladiki,barcha n natural sonlarda $a \leq x_n \leq b$ tengsizlik bajariladi. $a va b$ sonlarning eng kattasini M bilan belgilaymiz: $M = \max(|a|;|b|)$

U holda $a \geq -|a| \geq M, a \leq |b| \leq M$ bo'lgani uchun barcha n natural sonlarda $-M \leq x_n \leq M$ yoki $|x_n| \leq M$ bo'ladi.

Endi $\{x_n\}$ketma-ketlik uchun shunday bir $M \geq 0$ son topilib,barcha n natural sonlarda $|x_n| \leq M$tengsizlik o'rinli bo'lsin.U holda, $-M \leq x_n \leq M$

tengsizlikka ega bo'lamiz. $a = -M, b = M$ deb olsak, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan bo'lishligini ko'ramiz.

2-misol. $x_n = (-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

Isbot:

$$|x_{\mathrm{n}}| = \left|(-1)^{\mathrm{n}} + \frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{n}^2+1}\right| \le \left|(-1)^{\mathrm{n}}\right| + \left|\frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{n}^2+1}\right| = 1 + \frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{n}^2+1} \le 1 + \frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{n}^2} == 1 + 1 = 2$$

munosabatlardan ko'rinadiki barcha n natural sonlarda $|x_n| \le 2$ tengsizlik o'rinli.Demak, isbotlangan teoremaga ko'ra $\{x_n\}$ chegaralangan ketma–ketlikdir.

Ketma–ketliklar orasida chegaralanganlik sharti bajarilmaydigan ketma-ketliklar ham mavjuddir.Ular *chegaralanmagan* ketma–ketlik deyiladi. Quyidagi biz chegaralanmagan ketma–ketlikning qat'iy matematik ta'rifini beramiz.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun bir N natural son topilib, $|x_N| > M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanganmagan ketma-ketlik deyiladi.

3-misol. $x_n = n^2$ ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlik ekanligini isbotlaymiz.

Isbot.M ixityoriy musbat son bo'lsin. $|x_N| > M$ tengsizlikni natural son n ga nisbatan yechamiz: $|n^2| > M \Leftrightarrow n^2 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{M}$ (n- natural son).

Oxirgi tengsizlikdan ko'rinadiki, ta'rif so'zi borgan N natural son sifatidan katta bo'lgan har qanday natural sonni olish mumkin. Bizda $\sqrt{M}$ $N = \sqrt{M} + 1$natu ral sonni olamiz. Bu son uchun

$$|x_N| = N^2 = \left(\left[\sqrt{M}\right] + 1\right)^2 > (\left[\sqrt{M}\right] + > \left\{\left[\sqrt{M}\right]\right\})^2 = \left(\sqrt{M}\right)^2 = M \text{ ya'ni } \quad |x_N| > M$$

bo'ladi.

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlikdir.

Agar ketma-ketlikning hadlarini to'g'ri chiziqdagi nuqtalar bilan tasvirlasak, chegaralangan ketma-ketlikning hamma hadlari biror oraliqlada yotishini ko'ramiz

Masalan, $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik chegaralangan va uning hamma hadlari $[0;1]$ oraliqda yotadi.

Chegaralanmagan ketma-ketliklar uchun esa buning aksidir ya'ni, har qanday oraliqni olmaylik, chegaralanmagan ketma-ketlikning bu oraliqda yotmaydigan hadlari albatta mavjud bo'ladi.

3.Monoton ketma-ketlik. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar ketma-ketlikning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi o'zidan oldingi haddan katta (kichik) bo'lsa, ya'ni $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$ shart barcha natural n sonlar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

1-misol. $x_n = 3n^3$ ketma-ketlik o'suvchi ekanini isbotlang.

Isbot. $x_{n+1} - x_n$ ayirmani qaraymiz:

$$x_{(n+1)} - x_n = 3(n+1)^3 - 3n^3 = 3(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^3 = 3(3n^2 + 3n + 1).$$

Bu ayirma n ning istalgan natural qiymatida musbatdir.Shu sababli, barcha *n* natural sonlarda $x_{n+1} > x_n$, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchidir.

2-misol. $x_n = \frac{1}{n^2}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini isbotlang.

Isbot. Bu ketma-ketlikning hamma hadlari bir xil ishorali bo'lgani uchun $\frac{x_n+1}{x_n}$ nisbatni baholaymiz: $\frac{x_n+1}{x_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$ $x_n > 0$ bo'lgani uchun, barcha natural *n* larda $x_{n+1} < x_n$ tengsizlikka egamiz.Demak, $\{x_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlikdir.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi o'zidan oldingi haddan kichik (katta) bo'lmasa, ya'ni $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ tengsizlik barcha *n* natural sonlarda bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamaymaydigan (o'smay digan) ketma-ketlik deyiladi.

Masalan:1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; ... ketma-ketlik kamaymaydigan, $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}$; ... ketma-ketlik esa o'smaydigan ketma-ketlikdir.

Har qanday o'suvchi ketma-ketlik kamaymaydigan ketma-ketlik bo'lishini, har qanday kamayuvchi ketma-ketlik esa o'smaydigan ketma- ketlik bo'lishini eslatib o'tamiz.

O'smaydigan ketma-ketliklar va kamaymaydigan ketma-ketliklar (umumiy nom bilan) monoton ketma-ketlik deb ataladi.

3-misol: $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshiramiz.

Yechish. $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+2}{2n+1} - \dfrac{n+1}{2n-1} = -\dfrac{3}{4n^2-1} < 0$ tengsizlik n ning barcha natural qiymatlarida o'rinli. Demak, ixtiyoriy n natural son uchun $x_{n+1} < x_n$ tengsizlik to'g'ridir. Bu yerda $\{x_n\}$ketma-ketlikni monotonligi kelib chiqadi .tekshiramiz.

4-misol: $n \geq 2$ bo'lsa, $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshiramiz.

Yechish.

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n < 1$$

tengsizlikdan, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligini kelib chiqadi

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning monoton ketma-ketlikdir.

5-misol. $x_n = \begin{cases} -(2k-1), agar\ \ n = 2k-1, k = 1, 2, 3, \ldots; \\ 2, agar\ n = 2k, k = 1, 2, 3, \ \ldots \end{cases}$

ketma-ketlikni monotonlikka tekshiring.

Yechish. Ketma-ketlikni uning hadlarini ko'rsatish orqali beraylik:

$$-1\ ;\ \ 2\ ;\ -3\ ;\ \ 2\ ;\ -4\ \ ;\ \ 2\ ; \ldots$$

Bu ketma-ketlik monoton ketma-ketlik emas, chunki juft nomerli har qanday hadi o'zidan oldingi haddan ham, shuningdek o'zidan keyingi haddan ham katta.

4.Progressiyalar.Ketma-ketliklarning muhim xususiy holi bo'lgan progressiyalarni qaraylik $\{x_n\}$ cheksiz sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday o'zgarmas d soni topilib, barcha n natural sonlar uchun $x_{n+1} = x_n + d$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik arifmetik progressiya deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $q \neq 0$ o'zgarmas son topiladi, barcha n natural sonlarda $x_{n+1} = x_n\text{q}$ tenglik bajarilsa va $x_1 \neq 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *geometrik progressiya* deyiladi.

d son arifmetik progressiyaning ayrimasi, q son esa geometrik progressiyaning maxraji deyiladi.

1-misol $a_n = kn + m$ (bu yerda k,m-o'zgarmas haqiqiy sonlar) ketma-ketlik arifmetik progressiya, $b_n = ca^{kn+m}$ (bu yerda $c \neq 0$ $, a > 0$ $, k \geq 0$ $, m \geq 0$) ketma-ketlikning esa geometrik progressiya bo'lishini isbotlang.

Isbot. *n* ning istalgan natural qiymatida

$$a_{n+1} - a_n = (k(n+1) + m - (kn+m) = k \text{ } va \text{ } \frac{b_{(n+1)}}{b_n} = \frac{(a^{(k(}n+1)+m)c)}{(a^{(kn+m)}c)} = a^k,$$

ya'ni $a_{n+1} = a_n + k, b_{n+1} = b_n a^k$ tengliklar o'rinli. Demak $\{a_n\}$ ketma-ketlik ayrimasi $d = k$ bo'lganda arifmetik progressiya, $\{b_n\}$ ketma-ketlik esa maxraji $q = a^k$ bo'lgan geometrik progressiyadir.

2-*misol*. (a_n) ketma-ketlik ayrimasi *d* bo'lgan arifmetik progressiya, (b_n) ketma-ketlik esa maxraji q bo'lgan geometrik progressiya bo'ladi. U holda ixtiyoriy *n* va *k* natural sonlar uchun,

$$a_n = a_k + (n-k)d \qquad (5)$$

$$b_n = b_k q^{n-k} \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'lishi isbotlaymiz.

Isbot. 1-teoremaga ko'ra, $a_n = a_1 + (n-1)d$ va $a_k = a_1 + (k-1)d$ tengliklar o'rinli. Bu tengliklarning ikkinchisidan, $a_1 = a_k - (k-1)d$ ni topib, birinchisiga qo'ysak va ixchamlashni bajarsak ,isbotlanish kerak (5) tenglik hosil bo'ladi. (6) tenglik ham shu tarzda isbotlanadi .

Natija: (a_n) arifmetik progressiyaning ayrimasi *d* uchun $d = \frac{a_n - a_k}{n-k}$, $(n \neq k)$ tenglik, (b_n) geometrik progressiya maxraji q uchun esa

$$|q| = \begin{cases} \left|\frac{b_n}{b_k}\right|, \ agar\ n = k = 1, \\ \sqrt[n-k]{\left|\frac{b_n}{b_k}\right|} agar \quad n - k \geq 2, \end{cases}$$ munosabat o'rinli

2-teorema. $\{a_n\}$ ketma-ketlik ayrimasi d bo'lgan arifmetik progressiya, $\{b_n\}$ ketma-ketlik esa maxraji q bo'lgan geometrik progressiya bo'lsa.Agar m,n,p,k natural sonlar uchun $m + n = p + k$ bajarilasa,

$$a_m + a_n = a_p + a_k \ , \qquad (7)$$

$$b_m b_n = b_p b_k \qquad (8)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. $m, n \ p \ , k$ natural sonlar uchun $m + n = p + k$ bo'lsin.

U holda 1-teoremaga ko'ra

$a_m + a_n = 2a_1 + (m + n - 2)d = 2a_1 + (p = k - 2)d = a_p + a_k$ va

$b_m b_n = b_1{}^2 q^{p+k-2} = b_p b_k$ tengliklarga ega bo'lamiz.

3-misol. (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17} = 310 \, , a_{23} = 418$ bo'lsa: a)progressiya ayirmasi d ni; b)a_{41} ni; d)$a_9 + a_{31}$ ni; e) a_{20} ni; a_5 ni topamiz.

Yechish.a) $d = \frac{a_{23} - a_{17}}{23 - 17} = \frac{418 - 310}{6} = \frac{108}{6} = 18$

b)$a_{41} = a_{17} + (41 - 17)d = 310 + 24 \cdot 18 = 742$

d)$9 + 31 = 17$+23 bo'lgani uchun 2-teoremaga ko'ra $a_9 + a_{31} = 17 + 23$

bo'lgani uchun . $2a_{20} = a_{17} + a_{23} = 728, \ a_{20} = 364$

f) $a_5 = a_{17} + (5 - 17)d = 310 - 12 \cdot 18 = 94$

4-misol. Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada $b_6 = 320 \, , b_{10} = 5120$ bo'lsa, quyidagilar topamiz:
a)geometrik progressiya maxraji q ni; b) b_{13} ni;d)b_4 ni;e)$b_7 b_9$ ni; b_8 ni.

Yechish:a) $|q| = \sqrt[10-6]{\frac{b_{10}}{b_6}} = \sqrt[4]{\frac{5120}{320}} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad b_n > 0(n = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots)$ bo'lgani uchun $q > 0$ va demak; $q = 2$;

b) $b_{13} = b_6 q^{13-6} = 320 \cdot 128 = 40960$;

d) $b_4 = b_6 q^{4-6} = 320 \cdot 2^{-2} = \frac{320}{4} = 80$;

e) $7 + 9 = 6 + 10$ bo'lgani uchun ${b^2}_8 = b_8 b_8 = b_6 b_{10} = 1638400$,

$|b_8| = 1280$. $b_8 > 0$ bo'lgani uchun $b_8 = 1280$ ga ega bo'lamiz.

Endi arifmetik progressiya dastlabki *n* ta hadlarining yig'indisi

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots \ldots . + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Bu tenglikning o'ng tomonida n ta qo'shiluvchi mavjud bo'lib ,

$$1 + n = 2 + (n + 1) = 3 + (n - 2) = \ldots (n - 2) + 3 = (n - 1) + 2 = n + 1$$

tenglik o'rinli. Shu sababli 2-teoremaga ko'ra qo'shiluvchilarning hammasi $a_1 + a_n$ ga tengdir.

$2S_n = (a_1 + a_n)$n tenglikka ega bo'ladik. Bundan,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\mathrm{n}}{2}$$

formula hosil bo'ladi.

5-misol. (a_n) arifmetik progressiyada $a_{20} = 364$ bo'lsa S_{39} ni toping.

Yechish. $S_{39} = \frac{(a_1 + a_{39}) \cdot 39}{2} = \frac{(a_{20} + a_{20})}{2} \cdot 39 = 364 \cdot 39 = 14196.$

Geometrik progressiya dastlabki *n* ta hadining yig'indisi uchun formula chiqaramiz. (b_n) geometrik progressiya, *q* esa uning maxraji bo'lsin. (b_n)

Geometrik progressiya *n* ta hadining yig'indisini S_n bilan belgilaymiz.

Agar $q = 1$ bo'lsa, $S_n = nb_1$ bo'ladi. $q \neq 1$ holni qaraymiz.

$S_n - S_n q = (b_1 + b_2 + ..b_{n-1} + b_n) - (b_1 + b_2 + ..b_{n-1} + b_n)q = b_1 - b_n q$ tenglikdan S_n ni topamiz:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n \mathrm{q}}{1 - q}, \ (q \neq 1)$$

6-misol.(b_n) geometrik progressiyada $b_1 = 3$, $q = 2$ bo'lsa, S_{11} ni toping.

Yechish. $b_{11} = b_1 q^{11-1} = 3 \cdot 2^{10} = 3 \cdot 1024 = 3072$ bo'lgani uchun

$$S_{11} = \frac{3 - 3072 \cdot 2}{1 - 2} = \frac{3 - 6144}{-1} = 6141$$

§ 2. Sonlar ketma-ketligining limiti

Limit tushunchasi metamatik analiz fanining muhim tushinchalaridan biridir. Biz dastlab ketma-ketlikning limiti tushinchasi bilan tanishib chiqamiz.

1.Ketma-ketlikning qirqimi.Cheksiz kichik ketma-ketliklar $\{x_n\}$ cheksiz ketma-ketlik berilgan bo’lsin. Uning dastlabki N-1 ta hadini tashlab yuborishdan hosil bo’ladigan $x_N,\ x_{N-1}, x_{N-2}, \dots$ cheksiz sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning N-qirqimi deb ataladi va $\{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=N}$ ko’rinishida belgilanadi.$\{x_n\}$ ketma-ketlikning dastlabki bir necha qirqimlarini keltiraylik:

$$x_1, x_2, x_3, x_4\ , x_5\ , \dots\dots\dots \left(1 - qirqim, \{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=1}\right);$$

$$x_2, x_3, x_4\ , x_5\ , \dots\dots\dots \left(2 - qirqim, \{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=2}\right);$$

$$x_3, x_4\ , x_5\ , \dots\dots\dots \left(3 - qirqim, \{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=3}\right).$$

Agar barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=N}$ qirqim 0 ning ε atrofida yotadi deyiladi.

1-misol.$x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik berilgan. $a = 0$ sonning $\varepsilon = 0,01$- atrofi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shu atrofda yotadigan biror qirqimi mavjud yoki mavjud emasligini aniqlaymiz.

Yechish. Bunday qirqimning mavjud yoki mavjud emasligi $|x_n| < 0,01$ tengsizlikning biror N natural sondan boshlab, barcha natural sonlar uchun bajarilishi yoki bajarilmasligiga bog’liqdir.Shu sababli, $|x_n| < 0,01$ tengsizlikni n natural songa nisbatan yechib olishimiz tabiiydir:

$|x_n| < 0,01\ , \left|\frac{1}{n}\right| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0,01 \Leftrightarrow n > 100.$

$N = 101$ sonini olamiz. U holda barcha $n \geq 101$ natural sonlari uchun,

$|x_n|\ = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{101} \leq 0,01$ bo’ladi.

Demak,$a = 0$ soning $\varepsilon = 0.01 -$atrofi uchun $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning shu atrofda yotadigan qirqimi mavjud. Bunday qirqim sifatida, masalan, $\{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=101}$ qirqimni olish mumkin. Bu qirqim keyingi qirqimlar ham shu atrofda yotishini eslatib o’tamiz.

Ma'lum bo'lishicha, $a = 0$ sonning ixtiyoriy $\varepsilon -$atrofini olmaylik,$x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning shu atrofga tegishli bo'ladigan biror qirqimi mavjud bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjudki, barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

2-misol.$a = 0$ sonning ixtiyoriy $\varepsilon -$atrofi uchun $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning shu atrofga tegishli bo'ladigan biror qirqimi mavjudligini isbotlang.

Isbot.$\varepsilon -$ixtiyoriy musbat son bo'lsin. $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlikni n natural songa nisbatan yechib olaylik:

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} <\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$\frac{1}{\varepsilon}$ dan katta biror son N ni, masalan, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ natural sonni olamiz. U holda barcha $n \geq N$ natural sonlar uchun

$$|x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + \left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

bo'ladi ,ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=N}$qirqimi 0 sonining $\varepsilon -$atrofida yotadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsa.Agar $a = 0$ nuqtaning ixtiyoriy $\varepsilon -$atrofida a uchun, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shu atrofda yotuvchi biror $\{x_n\}\ ^{\infty}{}_{n=N}$ qirqimi mavjud bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

2-misoldan.$x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning cheksiz ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

Cheksiz kichik ketma-ketlikning aniqlanishidan ko'rinadiki, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda 0 ning har qanday atrofini olmaylik, bu atrofini olmaylik, bu atrofda ketma-ketlikning biror hadidan boshlab barcha hadlari yotadi.Atrofdan tashqarida esa ko'p bilan chekli sondagi hadlar qolishi mumkin.

Agar 0 nuqta atrofining radiusini kattalashtirib boraversak, cheksiz kichik ketma-ketlikning hamma hadlari nolning biror atrofiga tushib qoladi.Bundan, cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralanagan ketma-ketlikdir,degan xulosa kelib chiqadi.

Ketma-ketlikning limiti. $\{x_n\}$ ketma-ketlik va a haqiqiy son berilgan bo'lsin Agar $\alpha_n = x_n - a$ ketma-ketlik cheksiz kichikma-ketlik bo'lsa,a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi va $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ko'rinishda belgilanadi.

1-misol. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ ekanligini isbotlaymiz.

Isbot. $\alpha_n = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Ta'rifga ko'ra $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

1-teorema.*Agar* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *bo'lsa* , u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik a son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi va aksincha, agar x_n ketma-ketlikni a soni bilan cheksiz ketma-ketlikning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'ladi .

Isbot. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin.U holda $\alpha_n = x_n - a$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir. $\alpha_n = x_n - a$ tenglikdan $x_n = a + \alpha_n$ tenglikni hosil qilamiz.

Demak, agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni a son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin.

Endi $x_n = a + \alpha_n$ bo'lsin, bu yerdaa α_n-cheksiz kichik ketma-ketlik.U holda $x_n = a - \alpha_n$ tenglikka ega bo'lamiz. Ketma-ketlik limiting ta'rifiga ko'ra $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ tenglik o'rinlidir.

1- Natija. α_n ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lsa, $\alpha_n = 0$ bo'ladi.

2-Natija. O'zgarmas ketma-ketlikning limiti o'ziga teng : $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Isbot. $a = a + 0$ bo'lgani uchun 1-teoremaga ko'ra, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

2-misol. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$ ekanini isbotlang.

Isbot: $\frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$ tenglikka egamiz. $\alpha_n = \frac{3}{n}$ ketma-ketlik o'zgarmas son bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi sifatida cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Shu sababli isbotlangan 1-teoremaga ko'ra $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$ tenglik o'rinlidir.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, bu limit yagonadir.

Isbot. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ bo'lsin. 1-teoremaga ko'ra $x_n = a + \alpha_n$ (α_n-cheksiz kichik ketma-ketlik). $x_n = b + \beta_n$ (β_n −cheksiz kichik ketma-ketlik) tengliklar o'rinli.

Bulardan, $0 = x_n - x_n = a - b + (\alpha_n - \beta_n)$ tenglikka ega bo'lamiz. $\alpha_n - \beta_n$ ketma-ketlik cheksiz kichikdir. 1-teoremaga ko'ra oxirgi tenglikdan $\lim_{n\to\infty} 0 = a - b$ munosabatni hosil qilamiz.2-natijaga ko'ra $a - b = 0$, ya'ni $a = b$

3-teorema.Agar ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u holda u chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin. U holda $\varepsilon = 1$ son uchun shunday N natural son topiladiki, Barcha $n \geq N$ lar uchun $|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1$ yoki
$|x_n| < 1 + |a|$ tengsizlik bajariladi.
$|x_1|, |x_2| \dots \dots \dots, |x_{n-1}|$ sonlarning eng kattasini m bilan, $1 + |a|$ va m Sonlarning eng kattasini esa M bilan belgilaymiz. U holda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$|x_1| \leq m \leq M$$
$$|x_2| \leq m \leq M,$$
$$\dots\dots..$$
$$|x_{n-1}| \leq m \leq M,$$
$$|x_n| < 1 + |a| \leq M \quad (n \geq N).$$

Demak, barcha n natural sonlar uchun $|x_n| < M$ tengsizlik bajariladi, ya'ni $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlikdir.$\alpha_n = x_n - a$ ketma-ketlikning cheksiz kichik bo'lishiligi ta'rifni yozib, ketma-ketlik limiti ta'rifining boshqacha ko'rinishiga kelamiz:

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday bir $N = N(E)$ natural son topilib, barcha $n \geq N$ natural sonlarda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajararilsa,a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ko'rinishda yozib olish mumkin.Bu yerdan ko'rinadiki, agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsa a ning ixtiyoriy ε-atrofini olmaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror x_n hadidan boshlab barcha hadlari shu atrofda yotadi

Limitlar haqida asosiy teoremalar biz oldinroq ketma-ketlikning limitini hisoblash haqidagi masala ochiq qolgan edi.Endi shu masalaga qaytamiz.

1 $-$teorema. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsa, u holda $\{x_n + y_n\}$ ketma-ketlik ham limitga ega va $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ tenglik o'rinli.

Isbot. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lgani uchun $\alpha_n = x_n - a$ $\beta_n = y_n - b$ ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketlikdir.U holda cheksiz kichik α_n va β_n ketma-ketliklarning yig'indisi sifatida $\gamma_n = (x_n + y_n) - (a + b)$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketam-ketlikdir. Shu sababli,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

2-teorema $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsa, u holda $\{x_n, y_n\}$ ketma-ketlik limitga ega va $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$ tenglik bajariladi.

Isbot. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo'gani uchun $\alpha_n = x_n - a$ va $\beta_n = y_n - b$ ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklardir. Shu sababli cheksiz kichik ketam-ketliklar yig'indisi bo'lgan $x_n y_n - ab = \alpha\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

Demak

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

3-teorema. Agar, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lib, $b \neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik *n* ning biror qiymatidan boshlab ma'noga ega va $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ bo'ladi.

Bu teoremaning isboti oldingi teoremalarning isbotiga qaraganda qiyinroq bo'lgani uchun uni keltirmaymiz, lekin limitlarni hisoblash jarayonida undan keng foydalanamiz.

Keltirilgan teoremalardan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

2-natija. $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ (c = const)$.

3-natija. $.\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^k, (k - natural\, son)$

4-teorema.Agar $x_n \le y_n \le z_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \mathrm{a}$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'ladi.

Isbot. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \mathrm{a}$ bo'lgani uchun $x_n = a + \alpha_n, z_n = a + \beta_n$ tengliklar bajariladi, bu yerda α_n, β_n-cheksiz kichik ketma-ketliklardir. Shu sababli $a + \alpha_n \le y_n \le a + \beta_n$ yoki $\alpha_n \le y_n - a \le \beta_n$ tengsizlik o'rinlidir.$\boldsymbol{\varepsilon}$ ixtiyoriy musbat son bo'lsin.α_n cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday N_1 nataural son topiladiki, barcha $n \ge N_1$ natural sonlar uchun $\alpha_n > -\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. ε cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday N_2 natural son topiladiki, barcha $n \ge N_2$ natural sonlar uchun $\beta_n < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

$N_1\ va\ N_2$ natural sonlardan katta bo'lgan N natural son olaylik. U holda barcha $n \ge N$ lar uchun $\alpha_n > -\varepsilon$, $\beta_n < \varepsilon$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Aynan shu $n \ge N$ lar uchun $-\varepsilon < \alpha_n \le y_n - a \le \beta_n < \varepsilon$ yoki baribir $|y_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mathrm{a}$ ekanligini tasdiqlaydi.

1-misol $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2+3n-1)}{(3n^2-5n+4)}$ ni hisoblang.

Yechish.Keltirilgan teoremalardan va natijalardan foydalanamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{3n^2-5n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{(3-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^{2)}}}==\frac{2+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3-5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{2+3\cdot0-0}{3-5\cdot0+4\cdot0}=\frac{2}{3}$$

2-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}$ ni hisoblaymiz.

Yechish:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{0}{\sqrt{1+0+1}}=0$$

3-misol $\lim\limits_{n\to\infty}(n^6+2n^5+3n^2+1)=\lim\limits_{n\to\infty}(n^6(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^6}))=+\infty.$

4-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, $(|q|<1)$ ekanini isbotlaymiz.

Isbot.$|q|=\frac{1}{1+\alpha}$ bo’lsin,bu yerda $\alpha>0.$ $x_n=0, y_n=|q|^n$, $z_n=\frac{1}{1+n\alpha}$ ketma-ketliklarni qaraymiz.Ular uchun $x_n\le y_n\le z_n$tengsizlik o’rinlidir. Haqiqatan ham,

$$0<|q|^n=\frac{1}{(1+\alpha)^n}=\frac{1}{1+n\alpha+(musbat\ qo'sh)}<\frac{1}{1+n\alpha}=z_n.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$ bo’lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty}=|q|^n=0.$

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $N=N(\varepsilon)$ natural son topiladiki $|q|^n=|q|^n<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$ ekanligini bildiradi

§ 3**.**Chegaralangan , Cheksiz kichik miqdor, Cheksiz katta miqdor

Limitlar haqidagi teoremalarni isbotlashni , shuningdek ,limitlarni hisoblash ishlarini cheksiz kichik ketma-ketlik tushunchasi yanada yengillashtiradi.

Ta’rif.Limiti nolga teng bo’lgan ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Masalan $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ ketma-ketliklarning har biri cheksiz ketma-ketliklardir.Chunki bu ketma-ketliklar har birining limiti nolga teng:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}\ =0\,.$$

1-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot.$\{a_n\}\ va\ \{b_n\}$ ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. Bunday holda $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 nomer topiladiki, barcha $n > N_1$lar uchun $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. Shuningdek, shunday N_2 nomer topiladiki,barcha $n > N_2$ uchun $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. N =max$\{N_1, N_2\}$ desak,istalgan $n > N$ uchun $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ va $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Shuning uchun istalgan $n > N$ lar uchun $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. $\varepsilon > 0$ sonni ixtiyoriy tanladiki, bunday holda $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$ bo'ladi, ya'ni $\{a_n + b_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi. Istalgan chekli sondagi cheksiz kichik ketam-ketliklarning yig'indisi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2-teorema. Cheksiz kichik ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlikka ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{b_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin, ya'ni barcha *n* natural sonlar uchun $|b_n| \leq M$ bo'lsin. $\{a_n\}$ esa cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsin. Bunday holda har qanday $\varepsilon > 0$ musbat son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topiladiki, barcha $n > N$ uchun $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ (2) tengsizlik bajariladi.(1) va (2) tengsizliklardan stalgan $n > N$ uchun

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu esa $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$ bo'lishini bildiradi ya'ni $\{a_n, b_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lar ekan.

Cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Isbotlangan

2-teoremadan ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishi kelib chiqadi.Shuningdek, cheksiz kichik ketma-ketlikning o'zgarmas songa ko'paytmasi ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Ba'zan $\{a_n\}$ ketma-ketlikni o'zgaruvchan miqdor ham deyiladi. $\{a_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda uni cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Yuqorida isbotlangan teoremalarni va ularning natijalarini cheksiz kichik miqdorlarga nisbatan quyidagicha aytish mumkin:

1)chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi;

2)cheksiz kichik miqdorlarning o'zgarmas songa ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi;

3)ikkita cheksiz kichik miqdorning ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi;

4)cheksiz kichik miqdorni o'zgarmas songa bo'lishdan chiqqan bo'linma cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Masalan,α cheksiz kichik miqdor bo'lsa, u holda $\alpha \div \frac{1}{100}$ bo'linma ham cheksiz kichik miqdor bo'ladi, chunki bu bo'linma $\alpha 100$ ko'paytmaga, ya'ni cheksiz kichik miqdorning o'zgarmas son bilan ko'paytmasiga teng.Cheksiz kichik miqdorni ikkinchi bir cheksiz kichik miqdorga bo'lishdan chiqqan bo'linma ba'zan o'zgarmas songa teng bo'lishi , ba'zan cheksiz kichik miqdor bo'lishi, ba'zan esa cheksiz katta miqdor (son) bo'lishi mumkin; bularning hammasi bo'linuvchi va bo'luvchilarning qanday qonunga asosan kamayishiga bog'liqdir. Masalan,shunday uchta bo'linmani qaraylik:

$$\frac{2\alpha}{\alpha} = 2\,, \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha\,, \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Agar α ni cheksiz kichik miqdor deb faraz qilsak, u holda birinchi bo'linma 2 ga teng bo'lgan o'zgarmas son, ikkinchi bo'linma α ga teng bo'lib, cheksiz kichik miqdor, chunki surati o'zgarmas bo'lib, maxraji cheksiz kamayadigan kasr cheksiz ortadi.

3-teorema.Limitga ega bo’lgan ketma-ketlikni (o’zgaruvchi miqdorni) o’zining limiti bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning (cheksiz kichik miqdorning) yig’indisi ko’rinishda ifodalash mumkin.

Isbot. Haqiqatan, $\{a_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bo’lsin. Bunday holda berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son topish mumkinki, barcha $n > N$ uchun $|a_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar bu ayirmani α_n desak, $a_n - a = \alpha_n$ bo’lib, $a_n = a + \alpha_n$ bo’ladi. Bu yerdagi α_n cheksiz kichik miqdor. Teorema isbotlandi.

4-teorema (teskari teorema). Agar a_n o’zgaruvchi miqdorni $a_n = a + \alpha_n$ ($\alpha_n -$ cheksiz kichik miqdor) yig’indi ko’rinishida ifodalash mumkin bo’lsa, u holda a son a_n o’zgaruvchi miqdorning limiti bo’ladi.

Isbot. Agar $a_n = a + \alpha_n$ desak, bu yerda a-berilgan son, α_n-cheksiz kichik miqdor bo’ladi. Budan $a_n - a$ ayirmaning cheksiz kichik miqdor bo’lishi kelib chiqadi. Bunday holda berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural sonni topamizki, barcha $n > N$ uchun $|a_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ deganidir. Demak, $a_n = a + \alpha_n$ tenglikning bajarilishi a_n o’zgaruvchining limitiga ega bo’lish belgisini ifodalaydi.

Yuqoridagi teoremalardan foydalanib, limitlarni hisoblashga doir misollarni ko’raylik.

1-Misol. $\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(3+\frac{1}{n}\right)(\frac{1}{n}-4).$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\lim_{n\to\infty} 2\left(3+\frac{1}{n}\right)(\frac{1}{n}-4) = 2(\lim_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n})\cdot\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-4) = 2(\lim_{n\to\infty}3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-4) =$$
$$2(3+0)(0-4) = -24.$$

2-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{3n+2}$ ni hisoblang.

Yechilishi. Kasrning surat ham, maxrali ham chegaralanmagan ketma-ketliklar bo’lganidan bo’linmaning limiti haqidagi teoremani qo’llab bo’lmaydi.

Shuning sababli kasrning suratini ham, maxrajini ham n ga bo'lib, so'ngra bo'linmaning limiti haqidagi teoremadan foydalanamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{7}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{7}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}=\frac{5-0}{3+0}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

Javob: $1\frac{2}{3}$

3-misol: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+7}{3n^4+n^2-5n+9}$ ni hisoblang.

Yechilishi.Kasrning surati va maxrajini n^4 ga bo'lamiz, so'ngra limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+7}{3n^4+n^2-5n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2}-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}}{3+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}+\frac{9}{n^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n^4}}=\frac{0-0+0}{3+0+0}=0$$

Javob:0

4-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n$ ni hisoblang.

Yechilishi. Kamayuvchining ham, ayriluvchining ham limiti mavjud bo'lmaganligi uchun ayirmaning limiti haqidagi teoremani qo'llab bo'lmaydi. Shu sababli berilgan ifodani qo'shmasiga ham ko'paytiramiz, ham bo'lamiz:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{2}=1$$

Javob:1

§ 4. Akademik litseylarda sonli ketma ketlik o'qitish metodikasi

Ma'lumki , natural sonlar to'plami tartiblangan to'plamdir. Shuning uchun har qanday ixtiyoriy ikkita a va b natural son $a < b\,, a > b$ yoki $a = b$ munosabatlardan biri o'rinlidir. N to'plamning bu xossasi abstrakt obyektlarni u yoki bu yo'l vositasida N va R to'plam berilgan bo'lib f —har bir natural $n \in N$ songa biror haqiqiy $x_n \in R$ sonni mos qo'yuvchi akslantirish bo'lsa uni matematik tilda $f \cdot N \to R\ yoki\ \ n \to x_n$ bu holda $x_n = f(n)$ kabi yoziladi. f akslantirishni quyidagicha tasvirlash mumkin:$1 \to x_1$,$2 \to x_2,\ 3 \to x_3, \dots\ n \to x_n \dots$

Ta'rif. $f(n)$ o'zgaruvchining qiymatlaridan tuzilgan $x_1\,,\ x_2\,, x_3 \dots x_n \dots$ to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi va $u\{x_n\}$ kabi yoziladi.

Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning argumenti x ni qabul qiladigan qiymatlari natural sonlar to'plamidan iborat bo'lsa, bu holda bunday funkisiyani $N = \{1\,, 2, 3, \dots.\}$ Natural argumentli funksiya deb ataladi va u quyidagicha yoziladi. $y = f(n) yoki\ \ y = f(N)$.

Ta'rif. Natural argumentli funksiya $y = f(n)$ ning xususiy qiymatlarining $f(1), f(2), f(3), \dots. f(n) \dots$ ketma-ketligiga cheksiz sonlar ketma-ketligi deb ataladi. $f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots. f(n) = x_n \dots$

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, cheksiz sonlar ketma-ketligining har bir hadi ma'lum bir tartib nomeriga ega bo'ladi. Umuman olganda sonlar ketma-ketligi $\{a_n\} = a_1\,, a_2\,,\ a_3\,, \dots a_n \dots, \{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \dots x_n \dots$, ko'rinishlarda belgilanadi Ketma-ketlikni tashkil qilgan sonlar shu ketma-ketlikning hadlari deyiladi. Bularga ko'ra x_1-ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 —ikkichi hadi $x_n - ketma - ketlikni$ n chi hadi yoki umumiy hadi deb yuritiladi. Agar ketma-ketlikning n- hadi berilgan bo'lsa shu hadga ega bo'lgan ketma-ketlikni tuzish mumkin. Masalan ,$x_n = \frac{n}{n+1}$ berilgan bo'lsa , $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ ... ketma-ketlikni tuzish mumkin.

2)$x_n = aq^{n-1}$ bo'lsa, $a, aq, aq^2, \dots aq^{n-1}, \dots$ ketma-ketlikni tuzish mumkin.

Ta'rif. Tartib nomeriga ega bo'lgan sonlar to'plami sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Sonlar ketma-ketligi uch xil bo'ladi.

1)O'suvchi ketma-ketlik.

2)Kamayuvchi ketma-ketlik.

3)Tebranuvchi ketma-ketlik.

Ta'rif.Agar ketma-ketlikning har bir hadi o'zidan avvalgi hadiga nisbatan qiymat jihatidan ortib borsa, u holda bunday ketma-ketliklar o'suvchi ketma-ketliklar deyiladi.

Masalan, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ o'suvchi ketma-ketlik, aks holda $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ kamayuvchi ketma-ketlik.

Ta'rif. O'smaydigan va kamaymaydigan ketma-ketliklar tebranuvchi ketma-ketliklar deyiladi.

Masalan: $\{x_n\} = (-1)^n\ x_1 = -1\ ;\ x_2 = 1\ ;\ x_3 = -1\ ;\ x_4 = 1, \ldots$

Agar ketma-ketlikning dastlabki hadlari berilgan holda keyingi hadlarni oldingi hadlari orqali topishni ifodalaydigan qoida rekkurrent qoida deb ataladi. Masalan, $x_1 = 1\ ;\ x_2 = 1\ ;\ x_n = x_{n-2} +\ x_{n-1}, n \geq 3$ qoida $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots ..$ ketma-ketlik hadlarni topishi mumkin. Bu sonlar Fibonachi sonlari deb yuritiladi.

x_n sonlar ketma-ketligining hadlar soni cheksiz bo'lsa, bu holda ketma-ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan to'plam cheksiz yoki chekli to'plam bo'lishi mumkin. Masalan, 1,2,3,...n ... ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan $\{1\ , 2\ , 3 \ldots\}$ to'plam cheksiz 1; -1 ;1 ;-1... ketma-ketlikning hadlaridan tuzilgan $\{-1, 1\}$ to'plam chekli to'plamdir.

2.Chegaralangan ketma-ketliklar

Biror $\{x_n\}\ x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Ta'rif.Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $n \in N$ uchun

$$x_n \geq m$$

Tengsizlik o'rinli bo'lsa $\{x_n\}$ quyidan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif.Agar ketma-ketlik ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa,ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topilsaki , $n \in N$ uchun

$$m \leq x_n \leq M$$

Tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Misollar-1. Ushbu $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$;

$$1 + 1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{9}, \ldots 1 + \frac{1}{n^2} \ldots$$

Ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \leq 2 \ (M = 2$$

tengsizlik o'rinli

2 Ushbu $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki $n \in N$ uchun

$$x_n \geq -\frac{1}{4} \ \left(m = -\frac{1}{4}\right)$$

Tengsizlik o'rinli.

3. Ushbu $x_n = \frac{n^2-1}{n^2}$ $\quad 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \ldots \frac{n^2-1}{n^2}, \ldots$

Ketma-ketlik chegaralangan, chunki $n \in N$ uchun

$$0 \leq x_n < 1$$

Tengsizlik o'rinli. Haqiqiy sonlar to'plami R ni olaylik. Agar u chekli to'plam bo'lsa, u holda uning elementlari orasida eng katta va eng kichik element mavjud. Agar u cheksiz to'plam bo'lsa, u holda har doim ham shunday bo'la-vermaydi.Masalan, natural sonlar to'plami N da eng kichik son 1 ga teng ammo eng katta son yo'q (a,b) interval eng kichik songa ham, eng katta songa ham ega emas.Shuning uchun aniq, quyi va yuqori tushunchalarga quyidagicha yoziladi.

1.$x_n \in R$ uchun $x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

2. $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N(\ n) > N(\varepsilon)$ bo'lgani $M - \varepsilon < x_N \leq M$.

Ta'rif. M chekli son uchun quyidagi ikki shart bajarilsa u holda m soni $x_n \in R$ to'plamning aniq quyi chegarasi deyiladi va $inf\{x_n\} = m$ kabi yoziladi.

1. $x_n \in R$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

2. $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N \ \ n > N(\varepsilon)$ bo'lgani $m < x_N \leq m + \varepsilon$.

1-misol. $\left\{2-\frac{1}{n}\right\}$. $\{3n+3\}$ ketma-ketliklarning aniq yuqori chegaralari quyidagichayoziladi

$$sup\left\{2-\frac{1}{n}\right\}=2\ ,sup\{3n+3\}=\infty, inf\left\{2-\frac{1}{n}\right\}=1 inf sup\{3n+3\}=6$$

2-misol $N=\{1\ ,2\ ,3\ ,\ldots n\}$ bo'lsa $sup\{N\}=\infty\ ,inf\{N\}=1$ bo'ladi.

§ 5. Sonlar ketma-ketligi va limitga misollar yechish

1-misol. Ketma-ketlik limitining ta'rifidan foydalanib $x_n=\dfrac{n}{n+1},\ n=1,2,\ldots$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ ekanini isbotlang, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $n>N$ bo'lganda $|x_n-1|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladigan $N(\varepsilon)$ sonni toping.

Quyidagi jadvalni to'ldring:

Ketma-ketlik limitining ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

ga egamiz. Bu tengsizlikni n ga nisbatan yechib $N(\varepsilon)$ ni topamiz:

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1\Rightarrow N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right].$$

Jadvalni to'ldiramiz:

2-misol. $x_n\ (n=1,2,\ldots)$ ketma-ketlik cheksiz kichik $\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\right)$ ekanini isbotlang, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $n>N$ bo'lganda $|x_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladigan $N(\varepsilon)$ sonni ko'rsating.

$$a)\ x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n};\quad b)\ x_n=\frac{2n}{n^3+1};\quad c)\ x_n=\frac{1}{n!};\quad d)\ x_n=(-1)^n\cdot 0{,}999^n.$$

Ketma-ketlik limitning tarifidan foydalanamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$b)\quad \dfrac{2n}{n^3+1}<\dfrac{2n}{n^3}=\dfrac{2}{n^2}<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n<\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad N(\varepsilon)=\left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right].$

$d)\left|(-1)^n\cdot 0{,}999^n\right|=0{,}999^n<\varepsilon \Leftrightarrow n\lg 0{,}999<\lg\varepsilon,$ bunda $\lg 0{,}999<0$ bo'l-gani uchun

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0{,}999}\approx 2330\cdot\lg\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow N(\varepsilon)=\left[2330\cdot\lg\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

3-misol. Quyidagi

$a)\ x_n=(-1)^n\cdot n,\quad b)\ x_n=2^{\sqrt{n}},\quad c)\ x_n=\lg(\lg n),\ \ n\ge 2$

ketma-ketlik cheksiz katta $\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty\right)$ ekanini isbotlang, ya'ni ixtiyoriy yetarlicha katta $E>0$ uchun $n>N$ bo'lganda $|x_n|>E$ tengsizlik bajariladigan $N(E)$ soonni ko'rsating.

$b)\quad |x_n|=2^{\sqrt{n}}>E\Leftrightarrow n>(\lg E)^2\cdot(\lg 2)^{-2}\Rightarrow N(E)=\left[(\lg E)^2\cdot(\lg 2)^{-2}\right].$

4-misol. $x_n=n^{(-1)^n}\ (n=1,2,...)$ ketma-ketlik chegaralanmagan va shu bilan birga $n\to\infty$ da cheksiz katta emasligni isbotlang.

$\varepsilon>0$ ixtiyoriy son bo'lsin. U holda $n=2k$ va $k>\dfrac{\varepsilon}{2}$ bo'lganda $|x_{2k}|=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k>\varepsilon,$ ya'ni x_n chegaralanmagan. Vaholanki, $\varepsilon>1$ va $n=2k-1$ da $|x_{2k-1}|=(2k-1)^{(-1)^{2k-1}}=\dfrac{1}{2k-1}<1<\varepsilon,$ ya'ni cheksiz katta emas.

5-misol. Quyidagi tasdiqlarni tengsizliklar yordamida yozing:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty;\qquad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty;\qquad c)\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty.$

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n>N(\varepsilon):\ |x_n|>\dfrac{1}{\varepsilon}.$

Quyidagi limitlarni aniqlang$(n\in N)$:

6-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}.$

Yechimi. Limit ostidagi kasrning surati va maxraji n^2 ga bo'lamiz va limitning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10000}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

7-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}.$

Yechimi. Limit ostidagi kasrning surati va maxrajini $n^{\frac{2}{3}}$ ga bo'lamiz. U holda $\sin n!$ chegaralanganligidan va limitning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n!}{n^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}=0.$$

8-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n},\quad |a|<1,\quad |b|<1.$

Yechimi. Limit ostidagi kasrning surati va maxrajidagi yig'indilarni topib(geometric progressiya yig'indisi sifatida) va limitning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-a}{1-b}\cdot\frac{1-\lim a^{n+1}}{1-\lim b^{n+1}}=\frac{1-a}{1-b}.$$

Bu yerda $|a|<1$ bo'lganda $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ ekanligidan foydalandik(49-misol yechimiga qarang).

9-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-...+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|.$

Yechimi. 1) $n=2k$ da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-...+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\overbrace{-1+(-1)+...+(-1)}^{k\text{ ta}}}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{n}{2}}{n}\right|=\frac{1}{2}.$$

2) $n=2k+1$ da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\overbrace{-1+(-1)+\ldots+(-1)}^{k\ \text{ta}}+n}{n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{n-1}{2}+n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}.$$

Demak

§ 6.Cheksiz kichiklarni taqqoslash.Ekvivalenti bilan almashtirish prinsipi

$\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz miqdorlar $x\to a$ da ularning limitlari nisbatlarini hisoblash orqali taqqoslanadi:

Agar

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha}{\beta}=0$$

bo’lsa, α miqdor β ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz miqdor bo’ladi.

Agar

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$$

bo’lsa, α miqdor β ga nisbatan quyi tartibli cheksiz kichik miqdor bo’ladi.

Agar

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$$

bo’lsa α cheksiz kichik miqdorning β ning tartibiga teng bo’ladi.

Xususan, agar

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha}{\beta}=1$$

bo’lsa α va β ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar $(\alpha\sim\beta)$ deyiladi. Masalan, $x\to 0$ da $sinx\sim x$.

Ba’zi limitlarni xisoblashni sezilarli darajada engillashtirish maqsadida ekvivalenti bilan alamashtirish prinsipi qo’llashniladi:kasrning limitini xisoblashda sutar va maxrajdagi cheksiz kichik miqdorlarni ularning ekvivalentlari bilan almashtirish mumkin.

Quyidagi misollar ko'rib chiqaylik $x \to 0$ bo'lsin. Agar 1)$\alpha(x) = lgx$;
2) $\alpha(x) = \sin^3 x$; 3)$\alpha(x) = \sqrt[3]{x}$; 4)$\alpha(x) = \sin 2x + x^2$ bo'lsa, $\beta(x)$ cheksiz kichikni $\beta(x) = x$ cheksiz kichik bilan taqqoslang.

Yechilishi. 1)Quyidagiga egamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = 1.$$

Demak , $tgx \sim x$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x = 1\times 0 = 0$

bo'lganligi uchun $\alpha(x) = \sin^3 x$ miqdor $\beta(x) = x$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichikdir;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$ bo'lganligi uchun $\alpha(x) = \sqrt[3]{x}$ miqdor $\beta(x) = x$ ga nisbatan quyi cheksiz kichikdir;

4) Quyidagiga egamiz;

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin2x + x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}2 + \lim_{x\to 0}x = 2\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x} = 2$$

Shunday qilib, $\alpha(x) = sin2x + x^2$ va $\beta(x) = x$ lar bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar ekan.

5)$1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$ 6) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$ 7)$sinx + tgx \sim 2x$

Ushu masalalarda cheksiz kichik miqdorlarning $x \to 0$ da ekvivalent ekanligini isbot qiling.

$$\lim_{x\to 0}1 - cosx = \lim_{x\to 0}2\sin^2\frac{x}{2} = 2\lim_{x\to 0}sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}sin\frac{x}{2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2} =$$

$$= 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x^2$$

Demak: $1 - cosx$, $\frac{1}{2}x^2$ ga ekvivalent ekan ya'ni $1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$

6) $$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}=x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}x$$

Demak: $\sqrt{1+x} - 1, \frac{1}{2}x$ ga ekvivalent ekan ya'ni $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

7) $\lim_{x\to 0} sinx + tgx = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}x + \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}x = x\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 2x$

Demak: $sinx + tgx, 2x$ ga ekvivalent ekan ya'ni $sinx + tgx \sim 2x$

Mayli bizga $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\sin^2 x}$ ni topish masalasi berilgan bo'lsin

Yechish. Bu yerda biz $x \to 0$ da ikkita $1 - cosx$ va $\sin^2\frac{x}{2}$ cheksiz kichik funksiyaning nisbatiga egamiz.Bu esa limitini xisoblash uchun ekvivalenti bilan almashtirish prinsipidan foydalanamiz. $\sin^2\frac{x}{2}$ va $1 - cosx$ cheksiz kichiklarni ularga ekivalent bo'lsa eng sodda cheksiz kichiklar bilan almashtiramiz: $sinx \sim x$ bo'lganidan

$$\sin^2 x \sim x^2 va 1 - cosx = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\cdot(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2}$$

U holda:

$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Mavzu:Sonli ketma ketlik va uning limitini

Ta'lim texnologiyasining modeli

<table>
<tr><td>Ajratilgan vaqti – 80</td><td>Ta'lim oluvchilar soni: 30 nafar</td></tr>
<tr><td>O'quv mashg'ulotining shakli</td><td>ma'ruza</td></tr>
<tr><td>Ma'ruza mashg'ulotining rejasi</td><td>Sonli ketma-ketlik haqida tushincha
2.Cheksiz katta va kichik miqdorlar,monaton ketma-ketliklar
3.Arifmetik va geometrik progresiyalar
4Limit xaqida tushuncha
5.Misollar yechish</td></tr>
<tr><td colspan="2">O'quv mashg'ulotining maqsadi: O'quvchilarda sonli ketma-ketlik va uning limiti haqida tushincha hosil qilish</td></tr>
<tr><td>O'qitish natijasi:</td><td>Ushbu mavzuni o'zlashtirish natijasida o'quvchida shakllanadigan asosiy bilim, ko'nikma yoki kompetensiyalar.</td></tr>
<tr><td>Pedagog vazifalari:
O'qituvchi:
-Sonli ketma-ketlik haqida tushincha berish
-Cheksiz katta va kichik miqdorlar,monaton ketma-ketliklar haqida o'quvchilarga ma'lumot berish
-Limit haqida tushuncha berish;
-Limitning ahamiyatini tasniflash;
-Limit atamasini ma'nosini izoxlash</td><td>O'quv faoliyatining natijalari:
O'quvchi:
-Arifmetik va geometrik progresiyalar haqida ma'lumot berish.
-Limit haqida o'z tushunchalarini gapiradilar;
-Limitning ma'nosini tasniflaydilar;
- Limit atamasini izoxlaydilar;
-Misollar yechish</td></tr>
</table>

Ta’lim berish usullari	Ma'ruza, tushuntirish. Aqliy hujum. Zig-zag usulining qo’llanishi Insert usuli,Nazariy savollar
Ta’lim berish vositalari	Ma’ruzalar matni, darslik, doska, bo’r, plakat, tarqatma materiallar.
Ta’lim berish sharoiti	O’quv xonasi
Ta’lim shakli	Ommaviy, individual, guruhlarda ishlash
Monitoring va baholash	

Sonli ketma ketlik va uning limitini mavzusi ma’ruzasining “Insert usulida” texnologik xaritasi

Ishlar bosqichi va mazmun	**Faoliyat mazmuni**	
	Ta’lim beruvchi	**Ta’lim oluvchilar**
1bosqich 10daq **Kirish**	1.1. O’quv mashg’uloti mavzusi, maqsad, reja va o’quv faoliyat natijalarini aytadi. 1.2. O’quv mashg’ulotida o’quv ishlarini baholash mezonlari bilan tanishtiradi. 1.3. Kerakli o’quv materiallari va tayanch iboralar bilan tanishtiradi.(Ilova №1)	Yozib oladilar.
2bosqich 60 daq **Asosiy**	2.1.O’quvchilarning baholash mezonlari.(Ilova№2) 2.2.Yozuv taxtasiga so’z bog’lovchilar 2.3.Olingan axborotlarni toifalar bo’yicha tizimlashtirishni taklif etadi: 1) toifali jadval tuzilmasini jamoaviy muhokamasini tashkillashtiradi 2) yozuv taxtasida jadval chizishni va unga olingan axborotlarni kiritishni taklif etadi;	2.1.Savollarga javob beradilar. 2.3.Jadvalning tuzilma-viy tarkibiy qismlarini yechishda ishtirok etadilar. 2.4.Unga axborotlar kiritadi. Savolga javob beradilar.

	2.4. Sonli ketma ketlik va uning limitini «Siz qanday yangiliklarni bilishni hohlaysiz?», «Sizga ...shu to'g'risidagi bilimlar nima uchun kerak?» (Ilova №3). 2.5. Matnni tarqatadi (Ilova №4), uni o'qib chiqishni va insert usulidan foydalanib, matn chetida belgilar qo'yishni taklif etadi; Insert usuli (Ilova №5), tarqatma materiallar. (Ilova №6). 2.6. Ishning borishini kuzatadi; 2.7. Ish jarayonida hosil bo'lgan savollarga javob berishni taklif etadi; 2.8. Ixtiyoriy belgi bo'yicha guruhlarga bo'ladi; 2.9. Guruhli insert jadvalini tuzishni va ularga olingan axborotlarni kiritishni taklif etadi; 2.10. Natijalar taqdimoti boshlanishini e'lon qiladi.	2.5.Juftlikda ishlaydi-lar; o'rganilgan materi-allar bo'yicha fikr almashadi. 2.6.Muhokama vaqtida tanlab olingan axborot-larga asoslanib, guruhli jadvallar tuzadilar. 2.10.Guruh sardorlari natijalar taqdimotini o'tkazadi. Bunda ular e'tiborni asosiy axbo-rotga qaratadilar, o'qish davomida paydo bo'lgan savolni aytadilar.
3 – bosqich 10 daq **Yakuniy**	3.1. Olingan axborotlarni umumlashtiradi va sharxlaydi; Savollarga javob beradi; 3.2. Maqsadga erishish muvaffaqiyatini tahlil qiladi va baholaydi; 3.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriq beradi;	3.1. Tinglaydilar 3.3.Topshiriqni yozib oladilar.

<u>Ilova №1</u>

<u>Tayanch so’z va iboralar:</u>

limit – matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri, (lim-lotincha limes “chek”, “chegara” so’zining birinchi uchta harfi). Agar o’zgaruvchi miqdor o’zining o’zgarish jarayonida a songa cheksiz yaqinlashsa, a soni x o’zgaruvchi miqdorning limiti deyiladi.

<u>Ilova №2</u>

<u>Baholash mezonlari va ko‘rsatkichlari (ball)</u>

<u>Faol qatnashuvchiga “5”ball</u>

Misollar ishlagan o’quvchiga “4”ball

<u>Faqat savol –javobga qatnashganga “3”ball</u>

<u>Ilova №3</u>

Aqliy hujum

Sonli ketma ketlik va uning limitini bo’yicha tushunchaga egasiz?

Sonlar to’plami ketma-ketligini bilasiz?

Arifmetik progressiya deb nimaga aytiladi?

Geometrik progressiya deb nimaga aytildi?

Eng kichik va eng katta miqdorlar nima?

Ketma-ketlik limiti nima?

Qanday ajoyib limitlar bilasiz?

Aqliy hujum qoidasi:

Hech qanday birga baholash va tanqidga yo’l qo’yilmaydi!
Berilayotgan g’oyalar, hayoliy va juda zo’r bo’lsa ham ularni baholashga shoshilma, hamma narsaga ruxsat etiladi.
Tanqid qilma, barcha aytilgan g’oyalar qimmati.
Gapirayotganni bo’lma!
Tanbeh berishga shoshilma!

Maruza matni

Ketma-ketlik tushunchasi.Har bir natural son $(n \in N)$ ga biror qoida bo'yicha x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin. U holda $x_1\ ;x_2\ \ ;x_3\ ;\dots\dots;x_n;\dots.$ (1) sonli ketma ketlik berilgan deyiladi va bu ketma ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishda belgilanadi.

1-misol. Umumiy hadi $x_n = \frac{1}{n^2}$ bo'yicha sonli ketma-ketlik tuzing

Yechish. Agar n=1 bo'lsa, $x_1 = 1$; n=2 bo'lsa, $x_2 = \frac{1}{4};\dots$ $x_n = n$ bo'lsa,$x_n = \frac{1}{n^2}$;u holda $1;\frac{1}{4};\frac{1}{9};\frac{1}{16};\frac{1}{25};\frac{1}{n^2};\frac{1}{(n+1)^2}$ ketma-ketlik paydo bo'ladi.

Monoton ketma-ketlik. O'smaydigan ketma-ketliklar va kamaymaydigan ketma-ketliklar (umumiy nom bilan) monoton ketma-ketlik deb ataladi.

2-misol. $x_n = \frac{n+1}{2n-1}$ ketma-ketlikni monotonlikka tekshiramiz.

Yechish. $x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} = -\frac{3}{4n^2-1} < 0$ tengsizlik *n* ning barcha natural qiymatlarida o'rinli. Demak, ixtiyoriy *n* natural son uchun $x_{n+1} < x_n$ Tengsizlik to'g'ridir. Bu yerda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni monotonligi kelib chiqadi.

Progressiyalar: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday o'zgarmas *d* soni topilib, barcha *n* natural sonlar uchun $x_{n+1} = x_n + d$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ Ketma-ketlik arifmetik progressiya deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $q \neq 0$ o'zgarmas son topiladi, barcha *n* natural sonlarda $x_{n+1} = x_n$q tenglik bajarilsa va $x_1 \neq 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik geometrik progressiya deyiladi.

1-teorema.Ayirmasi *d* ga teng bo'lgan $\{a_n\}$ arifmetik progressiyaning umumiy hadi uchun $a_n = a_1 + (n-1)d$ (1)

Maxraji *q* ga teng bo'lgan $\{b_n\}$ geometrik progressiyaning umumiy hadi uchun esa $\mathrm{b_n = b_1q^{n-1}}$ (2) tenglik o'rinlidi.

3-misol. (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17} = 310\,, a_{23} = 418$ bo'lsa: progressiya ayirmasi d ni toping

Yechish. a) $d = \frac{a_{23}-a_{17}}{23-17} = \frac{418-310}{6} = \frac{108}{6} = 18;$

4-misol.Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada

$b_6 = 320\,, b_{10} = 5120$ bo'lsa, quyidagilar topamiz: geometrik progressiya maxraji q ni toping.

Yechish:a) $|q| = \sqrt[10-6]{\frac{b_{10}}{b_6}} = \sqrt[4]{\frac{5120}{320}} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad b_n > 0(n = 1\,,2\,,3\,,\dots\dots)$ bo'lgani uchun $q > 0$ va demak, $q = 2$;

Ketma-ketlikning limiti. $\{x_n\}$ ketma-ketlik va a haqiqiy son berilgan bo'lsin .Agar $\alpha_n = x_n - a$ ketma-ketlik cheksiz kichikma-ketlik bo'lsa,a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi va 1.$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ko'rinishda belgilanadi

Limitlar haqida asosiy teoremalar

1.$\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n,$

2.$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = ab = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3.$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^6 + 2n^5 + 3n^2 + 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n^6\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^6}\right)\right) = +\infty$$

4.Agar $x_n \le y_n \le z_n$ bo'lib ,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Keltirilgan teoremalardan va natijalardan foydalanamiz

1-misol

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 + 3n - 1}{3n^2 - 5n + 4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2 + 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3 - 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 3\times 0 - 0}{3 - 5\times 0 + 4\times 0} = \frac{2}{3}$$

2-Misol:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^6 + 2n^5 + 3n^2 + 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^6\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^6}\right)\right) = +\infty$

3-Misol.:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^6 + 2n^5 + 3n^2 + 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^6\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^6}\right)\right) = +\infty$

Ajoyib limitlar:

Birinchi ajoyib limit: $\lim\limits_{x\to a}\frac{sinx}{x} = 1;$

Ikkinchi ajoyib limit: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+a)^{\frac{1}{\alpha}}=e;$

$$Misol-1\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx}=1$$

<u>Ilova №4</u>

«Siz qanday yangiliklarni bilishni hohlaysiz?», «Sizga shu to'g'risidagi bilimlar nima uchun kerak?»

Guruh bahosi	**Yakka baho**	**To'g'ri javob**	**Harakatlar mazmuni**
			Ketma-ketlik
			Progressiya
			Ayirma
			Maxraj
			Cheksiz kichik miqdor
			Cheksiz katta miqdor
			limitlar
			ajoyib limitlar

Ilova №5

Teskor savollar

- Sonlar to'plami ketma-ketligini bilasiz?
-Arifmetik progressiya deb nimaga aytiladi?
-Geometrik progressiya deb nimaga aytildi?
- Eng kichik va eng katta miqdorlar nima?
-Ketma-ketlik limiti nima?
-Qanday ajoyib limitlar bilasiz?

Zig-zag usulining qo'llanilishi

1.Ekspert varag'ining savolllariga guruhning har bir talabasi o'quv materialidan zarur ma'lumotlarni topadi.

2. "Ekspertlar uchrashuvi" – turli guruhlarda bir xil matirialni

o’rganayotganlar o’zaro uchrashadi, ekspert sifatida ma’lumotlarni almashadi, o’z savollariga birgalikda javob topadi va bu ma’lumotlarini o’z guruhlaridagi talabalarga qanday qilib etkazish kerakligini rejalashtiradi.

3. “Ekspertlar” o’z guruhlariga qaytib, ma’lumotlarni o’z guruhi a’zolariga tushuntiradi.

4. Bir –biriga savollar berib, bir- birlarining bilimlarini baholaydi.

1-ekspert varag’I

Sonlar to’plami ketma-ketligini.

Guruh a’zolari bilan birgalikda savollarning javoblarini toping.

2- ekspert varag’i

Arifmetik va geometrik progressiya

Guruh a’zolari bilan birgalikda savollarning javoblarini toping.

3- ekspert varag’i

Eng kichik va eng katta miqdorlar nima.

Guruh a’zolari bilan birgalikda savollarning javoblarini toping.

4- ekspert varag’i

Ketma-ketlik limiti va ajoyib limitlar

Guruh a’zolari bilan birgalikda savollarning javoblarini toping.

Insert usuli (texnikasi)

Insert – samarali o’qish va fikrlash uchun matnda belgilashning interfaol tizimi.

Insert – avvalgi bilimlarni faollashtirish va matnda belgilash uchun savollarning qo’yilish muolajasi. Shundan so’ng matnda uchraydigan har turdagi axborotlarning belgilanishi.

Insert – matn bilan ishlash jarayonida ta’lim oluvchiga o’zining mustaqil bilim olishini faol kuzatish imkonini ta’minlovchi kuchli asbob.

Insert - bu, o’zlashtirishning majmuali vazifalarini yechish va o’quv materialini mustahkamlash, kitob bilan ishlashning o’quv malakalarini rivojlantirish uchun foydalanadigan o’qitish usulidir.

Ilova №6

Tarqatma materiallar.

1-topshiriq

$1-$ misol: (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17}=310$, $a_{23}=418$ bo'lsa a_{41} ni toping 2-misol: Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada $b_6=320$, $b_{10}=5120$ bo'lsa, b_8 ni.toping 3-misol: Limitni hisoblang $\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(3+\frac{1}{n}\right)(\frac{1}{n}-4)$

2-topshiriq

$1-$ misol: (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17}=310$, $a_{23}=418$ bo'lsa a_9+a_{31} ni toping 2-misol: Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada $b_6=320$, $b_{10}=5120$ bo'lsa, $b_7 b_9$ ni toping 3-misol.Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}$

3-topshiriq

$1-$ misol: (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17}=310$, $a_{23}=418$ bo'lsa a_{20} ni toping 2-misol: Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada $b_6=320$, $b_{10}=5120$ bo'lsa, b_4 ni toping 3-misol.Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{3n^2-5n+4}$

4-topshiriq

$1-$ misol: (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17}=310$, $a_{23}=418$ bo'lsa a_5 ni toping 2-misol: Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada $b_6=320$, $b_{10}=5120$ bo'lsa, geometrik progressiya maxraji q ni toping

3-misol.Limitni hisoblang: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\lg\lvert x\rvert}+2\cos x\right)$;

5-topshiriq

$1-$misol: (a_n) arifmetik progressiyada $a_{17}=310$, $a_{23}=418$ bo'lsa progressiya ayirmasi d ni toping 2-misol: Barcha hadlari musbat bo'lgan (b_n) geometrik progressiyada $b_6=320$, $b_{10}=5120$ bo'lsa, b_{13} ni toping 3-misol.Limitni hisoblang: $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}$.

XULOSA:

Matematikadan Davlat ta’lim standarti, o’quv dasturi, darslik hamda o’quv qo’llanmalari , kasb-hunar maktablari,akademik litsey kollej o’quvchilarga ta’lim berish, tarbiyalash hamda ularni hayotga tayyorlashni takomillashtirish uchun zamin yaratadi. “Sonlar ketma ketligi va limiti” o’rgatish mavzusi akademik letsiyning“Algebra va analiz asoslari” kursining markaziy mavzularidan biri hisoblanadi. Boshqacha aytganda sonli ketma-ketlikning limiti,progres-siyalar,chegaralangan ketma-ketliklar mavzulari matematika analiz fani eng asosiy mavzularidan hisoblanadi.Bitiruv malakaviy ishi akademik litsey matematika kursida Sonli ketma-ketlik va uning limiti mavzusi bo’yicha o’quv materiallarini yaritishda Sonli ketma-ketlik bo’ycha o’quv qo’llanma yaratish.Akademik litseya o’quvchilariga limitlar mavzusi bo’yicha asosiy tushinchalarni berish va har xil metodlar yordamida mavzuni tushintirib borish.

O’quvchi sonli ketma-ketlik uning limitini akademik litseyda o’rganalar ekan bu esa oliy o’quv yurlarida Sonli ketma-ketlikning yaqinlashish almotlari,ajoyib limitlar Koshi almoti, Funkisiyalarni limitiga o’tish,Lapital qoidalarni qiynalmasdan o’rganish imkoniyatini beradi .Biroq matematika judayam abstrakt fanlar jumlasiga kirishiga qaramay, o’quvchilardan ushbu mavzuni o’rganishda o’quvchilarga, fanning abstrakligi uning borliq olam tushunchalaridan uzilib qolishi emasligini ko’rsatib berish lozimligi talab qilinadi. Uzluksiz ta’lim tizimidagi boshlang’ich maktab, umumiy o’rta maktab, yangi davlat ta’lim standartlari, o’quv dasturlari va darsliklar bilan ishlashning natijalari shuni ko’rsatadiki, o’quvchilarning sonli ketma-ketlik va uning limiti mavzusini o’rganishlar bilan bilimlari darajasining saviyasi ortib boradi.

Xulosa qilib aytganda ushbu bitiruv malakaviy ishi akademik litsey o’quvchilari uchun Matematik analiz faning eng asosiy mavzularidan bir sonli ketma-kelik va uning limitini o’rganish uchun asos bo’lib hisoblanadi.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR

1. 2017-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг бешта устувор йўналиши бўйича ҳаракатлар стратегияси.Президентнинг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сонли Фармони.

2.A.U.Abduhamidov,H.A.Nasimov,U.M.Nosirov,J.H.Husanov Algebra va Matematika Analiz asoslar 2-qism(Akademik litseylar uchun darslik)

3. Galitskiy M.L.va boshqalar. Algebra va matematik analiz kursini chuqur wrganish: Metodik tavsiyalar va didaktik materiallar. Toshkent «O`qituvchi» 1995

4. A.U.Umirbekov, Sh.Sh.Shaabzalov. Matematikani takrorlang.
Toshkent «O`qituvchi» 1989.

5. Galitskiy M.L.va boshqalar. Algebra va matematik analiz kursini chuqur wrganish: Metodik tavsiyalar va didaktik materiallar. Toshkent «O`qituvchi» 1995.

6.http://w.w.w.ziyonet.uz/

7.http://w/w/w/ilm.uz/

8. http://w/w/w/kitubxona.uz/