ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ

BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

ÁJINIYAZ ATÍNDAĞÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ

INSTITUTÍ

«Fizika-Matematika» fakulteti

«Matematika oqıtıw metodikası» kafedrası

5110100- «Matematika oqıtıw metodikası» tálim bağdarı 4^{B} topar

talabası REYMOVA DILARAM ABDULLA qızı

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

TEMA: «TENZORLAR ALGEBRASÍ HÁM TENZORLÍQ ANALIZ ELEMENTLERI»

Talaba:	___________	Reymova D
Ilimiy basshı:	__________	doc. Tanirbergenov S
Kafedra baslığı:	___________	doc. Prenov B

2021-jıl may ayınıń 21 - sánesindegi kafedra májilisiniń qararı

menen qorǵawǵa ruxsat berildi (№ 10 - protokol)

Nókis-2021

Mazmunı

Kirisiw 3

I B A P. Tenzor esap elementleri. Koordinatalar sistemasın burıwda vektorlardı almastırıw 6

1-§. Dekart koordinatalar sistemasında bazis ………………….. 6

2-§. Ortlardı almastırıw... 8

3-§. Vektordıń koordinataların túrlendiriw............................... 10

II B A P. Tenzorlar algebrası... 13

4-§. Tenzor túsinigine alıp keletuǵın fizikalıq másele................. 13

5-§. Tenzor túsinigi... 16

6-§. Tenzor ústinde ámeller.. 19

III B A P. Tenzor analiz elementleri... 32

7-§. Sızıqlı keńislikte tenzorlar 35

8-§. Betlerde tenzor maydanlar.. 42

Juwmaqlaw.. 48

Ádebiyatlar.. 49

Kirisiw

Temanıń aktuallıǵı. Jaslarǵa bilim beriwdiń hár qıylı jańa usılların islep shıǵıwımız hám bul tiykarında jaslardı sanalı, bilimli, óziniń jeke pikirlewlerine iye hám miynetkesh, watanǵa súyispenshilikke tárbiyalawımız kerek. Bunday jaǵdaylarda matematikanıń, sonıń ishinde geometriyanıń tutqan ornı ullı bolıp esaplanıladı. Sebebi, geometriyalıq figuralar arkalı balalar keńislik haqqındaǵı túsiniklerge iye bolıp baradı. Figuralardıń keńislilik jaylasıwların úyreniwi arqalı ózleriniń logikalıq pikirlewlerin rawajlandırıp baradı.

Geometriyada vektor túsinigi baǵıtlanǵan kesindiler klassı túrinde anıqlanıp, ol fizika, matematika, ximiya hám taǵı basqada tábiyiy pánlerde qollanıladı. Biraq, matematikalıq túsiniklerdiń ulıwmalasıwına hám tábiyiy pánlerdiń bir-biri menen baylanıslı rawajlanıwı zárúrligi payda boladı. Sonıń nátiyjesinde tenzor túsinigi kelip shıqtı. Sebebi, tenzor túsinigi vektor túsinigin ulıwmalastırıwshı shama bolıp esaplanıladı. Dara jaǵdayda, vektorlıq shama tenzorlıq shama boladı. Tenzorlar matematikanıń júdá kóp bólimlerindegi izertlewlerde qollanıladı. Sonday-aq tenzorlar mexanikada, kvant fizikasında ámeliy qollanıwlarǵa iye. Usılardı esapqa alıp pitkeriw qániygelik jumıstıń temasın «Tenzorlar hám olar ústinde ámeller» dep belgilep aldıq.

Jumıstıń maqseti hám wazıypaları. Tenzorlar hám olar ústinde orınlanatuǵın ámellerdi koordinatalar sistemasın túrlendiriw arqalı kórip shıǵıw.

Izertlew ob`ekti hám predmeti. Koordinatalar sisteması hám tenzorlar.

Izertlew metodikası hám usılları. Pitkeriw qániygelik jumısta máseleler teoremalar hám formulalardan paydalanıladı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń quramı hám dúzilisi. Pitkeriw qánigelik jumıs kirisiw, tiykarǵı hám juwmaqlaw bólimlerinen turadı. Jumıstıń tiykarǵı bólimi segiz paragraften dúzilgen. Birinshi paragrafte Dekart koordinatalar sistemasında bazis túsinigi kórip ótiledi. Bul jerde birlik ortlar alınǵan bolıp, keńisliktiń hár qanday vektorı berilgen bazis arqalı sızıqlı ańlatılıwı kórip ótilgen.

Usı jumıstıń ekinshi paragrafinde bir bazisten ekinshi baziske ótiw, yaǵnıy ortlardı túrlendiriw boyınsha máseleler kórip ótiledi. Bul paragrafte bir bazisten ekinshi baziske ótiw matritsasınıń determinantı +1 ge teń bolǵanda birinshi túr ortogonal túrlendiriw, al -1ge teń bolǵan jaǵdayda ekinshi túr ortogonal túrlendiriw ekenligi aytılǵan. Bakalavr baǵdarı boyınsha pitkeriw qánigelik jumıstıń úshinshi paragrafinde vektordıń koordinataların túrlendiriw formulaları kórilip ótiliwi menen bir qatarda, oǵan arnalǵan bir-qansha mısallar sheship kórsetilgen. Bul jumıstıń ekinshi babı tórtinshi paragraften baslanadı. Tórtinshi paragrafte tenzor túsinigine alıp kelinetuǵın fizikalıq másele kórip ótilgen. Bul másele aylanba háreket etip atırǵan deneniń kinetikalıq energiyasına arnalǵan. Bul shama da tenzor túsinigine keledi. Usı jumıstıń besinshi paragrafinde joqarıda kórip ótilgen skalyar, vektor hám kinetikalıq energiyanı túsiniklerin ulıwmalastırıwshı tenzor túsinigine anıqlama berilgen. Bul túsinik ortogonal túrlendiriw orınlaǵanımızda qandayda bir nızamlılıq boyınsha ózgeretuǵın ob`ekt arqalı beriledi. Tenzor – vektor túsinigin ulıwmalastırıp, birneshe mánide qollanılıp kiyatırǵan matematikalıq atama. Bul atama tenzorlar esabı koordinatalarınıń bir sistemadan ekinshi sistemaǵa ótkende arnawlı nızam boyınsha ózgeretuǵın shamalarǵa aytıladı. Bakalavr jumısınıń altınshı paragrafi tenzorlar ústinde ámellerge arnalǵan. Bul jerde tenzorlardı qosıw hám kóbeytiw ámelleri kórip ótilgen. Sonıń menen bir qatarda tenzordı indeksi boyınsha jıynaw ámeli hám tenzordı simmetriyalaw, antisimmetriyalaw ámelleri kórilgen. Bul jumıstıń úshinshi babı jetinshi hám segizinshi paragraflerden turadı.Bul bapta tenzor maydan haqqında anıqlama berilgen hám tiyisli formulalar keltirilgen. Jetinshi paragrafte sızıqlı keńisliktegi tenzorlar haqqındaǵı maǵlıwmatlar berilgen. Segizinshi paragrafte betlikler boyınsha tenzor maydanlar haqqında túsinik berilip, ol jerde differenciallanıwshı tenzorǵa anıqlama berilgen hám ol jerde tenzor maydanlarına baylanıslı mısallar kórip ótilgen.

I BAP. Tenzor esap elementleri. Koordinatalar sistemasın burıwda vektorlardı almastırıw

1-§. Dekart koordinatalar sistemasında bazis

Tenzorlar bóliminde ortonormallasqan bazis vektorlardı belgilew ushın $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorların qaraymız. Bul vektorlar ortonormallasqan bolǵanı ushın

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1; \qquad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0 \tag{1}$$

boladı.

Eger Dekart koordinatalar sisteması ortları

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3, \quad [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1 \quad [\vec{e}_3, \vec{e}_1] = \vec{e}_2 \tag{2}$$

teńlikler menen baylanǵan bolsa, bunday koordinatalar sisteması oń sistemanı payda etedi, deyiledi.

Bunday belgilewlerde bazıbir $\vec{a}$ vektor $\vec{e}_k$ dekart bazisler arqalı

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e}_k \tag{3}$$

kóriniste jazıladı. Noqattıń raius vektorı bolsa

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k \tag{4}$$

kóriniste boladı.

(3) hám (4) ańlatpalarda indeks k jıynaw indeksi onı ózgertiriw menen (3) hám (4) ańlatpalardıń mánisi ózgermeydi:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e}_k = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = \sum_{m=1}^{3} a_m \vec{e}_m .$$

Tenzorlardı bayan qılıwda **Eynshteyn qaǵıydası** isletiledi: eger ańlatpada indeks takirarlanıp kelse, sol indeks boyınsha jıynaladı. Σ belgisi túsirilip jazıladı (úsh ólshemli keńislikte indeks mánisi 1 den 3 ge shekem ózgeredi). Bul kelisiwden keyin (3) hám (4) ańlatpalar tómendegishe jazıladı:

$$\vec{a} = a_i\vec{e}_i, \vec{r} = x_i\vec{e}_i \tag{5}$$

Mısal. $(\vec{e}_k, \vec{e}_k)$ ańlatpanı esaplań.

▹ Indeks takirarlanıp kelgeni ushın

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_k) = \sum_{k=1}^{3}(\vec{e}_k, \vec{e}_k) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 3$$

boladı.◀

Kroneker belgisi. Bul belgi tómendegishe anıqlanadı:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{eger} \quad \mathrm{i = k} \quad \text{bolsa}, \\ 0, & \text{eger} \quad \mathrm{i \neq k} \quad \text{bolsa}. \end{cases} \tag{6}$$

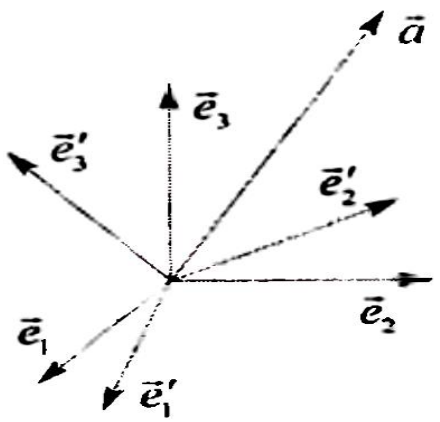
Kroneker belgisi 9 elementten ibarat birlik matritsanı beredi:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Kroneker belgisinnen paydalanıp, ortonormallasqan bazis (1) qısqasha

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik} \tag{1}$$

kóriniste jazıw múmkin.



Mısal. $\delta_{ik}x_k$ ańlatpanı ápiwayılastırayıq.

▹ $$\delta_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}x_k = \sum_{k\neq i}^{3}\delta_{ik}x_k + \delta_{ii}x_i$$

bolǵanı ushın (6) ǵa qaraǵanda

$$\delta_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}x_k = \sum_{k\neq i}^{3} 0\cdot x_k + 1\cdot x_i = x_i$$

boladı.Sonıń ushın, $\delta_{ik}x_k = x_i$. ◄

§2 Ortlardı túrlendiriw

$\vec{e}_k$ hám $\vec{e}_k\,'$ Dekart bazis vektorlar berilgen bolsın (sızılmaǵa qarań). Bul bazis vektorlar arasında baylanıstı tabamız. Bunıń ushın $\vec{e}_k\,'$ bazisti $\vec{e}_k$ arqalı hám kerisinshe qoyıwdı kóreyik:

$$\vec{e}_k\,' = \alpha_{km}\vec{e}_m \tag{9}$$

$$\vec{e}_k = \beta_{km}\vec{e}_m\,' \tag{10}$$

Bul jayılmalarda k indeks erkin, m indeks bolsa jıynaw indeksi boladı.(9) ǵa ortlardı **tuwrı túrlendiriw** (10) ǵa bolsa **keri túrlendiriw** delinedi. (10) dı (9) ǵa qoysaq

$$\vec{e}_k\,' = \alpha_{km}(\beta_{mn}\,\vec{e}_n\,') = (\alpha_{km}\beta_{mn})\vec{e}_n\,' \tag{11}$$

(11) ańlatpanıń shep hám oń tárepindegi birdey ortlardaǵı koeffitsientlerin teńlep

$$\alpha_{km}\beta_{mn} = \delta_{kn} \tag{12}$$

teńlikke kelemiz. (12) tuwrı hám keri túrlendiriw koeffitsientleri arasındaǵı baylanıstı ańlatadı. (9) dıń eki tárepin $\vec{e}_l$ vektorǵa, (10) dı bolsa $\vec{e}_l$ ǵa skalyar kóbeytirsek

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \alpha_{km}(\vec{e}_m, \vec{e}_l) = \alpha_{km}\delta_{ml} = \alpha_{kl}, \tag{13}$$

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_l\,') = \beta_{km}(\vec{e}_m\,', \vec{e}_l\,') = \beta_{km}\delta_{ml} = \beta_{kl}, \tag{14}$$

tuwrı hám keri túrlendiriw koeffitsientlerin anıqlaw imkaniyatı payda boladı.(13) te indeksti túrlendirsek $k \leftrightarrow l$

$$(\vec{e}_l\,', \vec{e}_k) = \alpha_{lk} = (\vec{e}_k, \vec{e}_l\,'), \tag{15}$$

hám bunı (14) menen salıstırsaq, tuwrı hám keri túrlendiriwlerdiń koeffitsientleri arasındaǵı baylanıstı tabamız:

$$\beta_{kl} = \alpha_{lk} \tag{16}$$

(16) dan paydalanıp,(9) hám (10) tómendegishe jazıw múmkin:

$$\vec{e}_k\,' = \alpha_{km}\vec{e}_m \tag{17}$$

$$\vec{e}_k = \alpha_{km}\vec{e}_m\,' \tag{18}$$

(12) baylanıstı bolsa

$$\alpha_{km}\alpha_{nm} = \delta_{kn} \tag{19}$$

kóriniste jazıw múmkin.Aqırǵı teńlikti matritsa kóriniste ańlatıw qolay boladı. Bunıń ushın teńliktiń shep tárepin túrlendiremiz:

$$\alpha_{km}\alpha_{nm} = \alpha_{km}\alpha^T_{mn} = (\alpha \cdot \alpha^T)_{kn}.$$

Sonıń ushın

$$(\alpha \cdot \alpha^T)_{kn} = \delta_{kn} \Rightarrow \alpha \cdot \alpha^T = E \tag{20}$$

Bul jerde E birlik matritsa. (20) dan sonı kóriw múmkin

$$\alpha^{-1} = \alpha^T. \tag{21}$$

Yaǵniy, tuwrı túrlendiriw matritsası (α) ǵa keri matritsa transponirlengen matritsaǵa teń boladı eken.

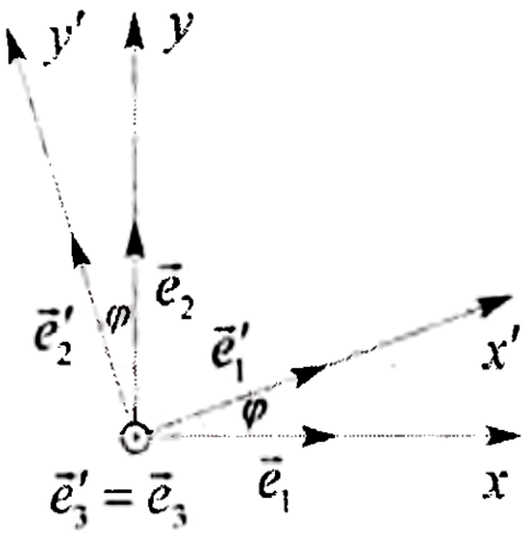
$\det\alpha = \alpha^T$ hám $\det E = 1$ bolǵanı ushın (20) dan $\det\alpha = \pm 1$ kelip shıǵadı. Yaǵniy ortogonal túrlendiriw determinantı +1 yamasa -1 ge teń boladı.

$\det\alpha = +1$ bolǵan ortogonal túrlendiriwlerge **birinshi tur** $\det\alpha = -1$ bolǵan túrlendiriwlerge bolsa **ekinshi tur** túrlendiriwler delinedi. Bunday túrlendiriwlerge inversiya mısal boladı.

§3. Vektordıń koordinataların túrlendiriw

(17) hám (18) qatnaslar menen baylanǵan $\vec{e}_k$ hám $\vec{e}_k\,'$ Dekart bazis vektorlar berilgen bolsın. Bazıbir $\vec{a}$ vektordı qarayıq. Bul vektordıń $\vec{e}_k$ bazistegi jayılması $\vec{a} = a_k\vec{e}_k$, $\vec{e}_k\,'$ bazistegi jayılması bolsa, $\vec{a} = a_k'\vec{e}_k\,'$ bolsın. Óz-ózinnen belgili bolǵanınday

$$a_k\vec{e}_k = a_k'\vec{e}_k\,'. \tag{22}$$



(17) den paydalanıp, $\vec{e}_k\,'$ bazisten $\vec{e}_k$ baziske ótemiz:

$$a_k\vec{e}_k = a_k'\alpha_{km}\vec{e}_m,$$

Bul ańlatpanıń shep tárepindegi indekslerdi túrlendirip $k \leftrightarrow l$, ortlardıń sızıqlı baylanıspaǵanlıǵın esapqa alsaq,

$$\alpha_m = \alpha_{km}\alpha_k' \tag{23}$$

qatnas kelip shıǵadı. Tap sonday, keri túrlendiriw ushın bolsa,

$$\alpha_m' = \alpha_{mk}\alpha_k \tag{24}$$

(17), (18) qatnaslardı (23) hám (24) ler menen salıstırsaq, vektor koordinataları da bir bazisten ekinshisine ótkende ortlar sıyaqlı túrlendiriwi kelip shıǵadı. (23) túrlendiriwdi tómendegishe de jazıw múmkin:

$$\alpha_m = \alpha^T_{mk}\alpha_k{}' \tag{25}$$

1-*mısal.* Dekart koordinatalar sistemasın qálegen múyeshke burıwda skalyar kóbeymeniń ózgermewin kórseteyik.

▹ Bunı dálillew ushın (24) hám (19) qásiyetlerden paydalanamız:

$$(\vec{a}\,',\vec{b}\,') = a'_i\, b'_i = \alpha_{ij} a_j \alpha_{ik} b_k = \alpha_{ij}\alpha_{ik} a_j b_k = \delta_{jk} a_j b_k = a_k b_k = (\vec{a},\vec{b})\ .◄$$

2-*mısal.* Koordinatalar sistemasın z kósheri átirapında φ múyeshke burıwdaǵı múyesh matritsasın qurıń.

▹ Anıqlama boyınsha

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\vec{e}\,'_1,\vec{e}_1) & \cos(\vec{e}\,'_1,\vec{e}_2) & \cos(\vec{e}\,'_1,\vec{e}_3) \\ \cos(\vec{e}\,'_2,\vec{e}_1) & \cos(\vec{e}\,'_2,\vec{e}_2) & \cos(\vec{e}\,'_2,\vec{e}_3) \\ \cos(\vec{e}\,'_3,\vec{e}_1) & \cos(\vec{e}\,'_3,\vec{e}_2) & \cos(\vec{e}\,'_3,\vec{e}_3) \end{pmatrix}$$

Bunnan,*z* kósheri átirapında φ múyeshke burǵanda (sızılmaǵa qaraań)

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kóriniske kelemiz.◄

3-*mısal*. Bazıbir K sistemada $\vec{a} = \left\{0,\sqrt{2},2\right\}$ vektordıń koordinataları belgili bolsın. K sistemanı z kósheri átirapında 45^0 qa burıw nátiyjesinde K' sistema kelip shıqqan bolsın. K' sistemada $\vec{c}\,'=\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2},1\}$ vektordıń koordinataları belgili bolsın. Bul vektorlardıń skalyar kóbeymesi tabılsın.

$\triangleright$ Skalyar kóbeyme koordinatalar sistemasına baylanıslı bolmaǵanlıǵınan, mısaldı eki usılda sheshiw múmkin. Birinshi usılda $\vec{c}$ vektor koordinataların K sistemada tawıp, $(\vec{a},\vec{c})$ skalyar kóbeymeni esaplaw; ekinshi usılda $\vec{a}\,'$ tawıp, soń $(\vec{a}\,',\vec{c}')$ skalyar kóbeymeni esaplaw. Skalyar kóbeyme koordinatalar sistemasına baylanıslı bolmaǵanlıǵı ushın $(\vec{a},\vec{c})=(\vec{a}\,',\vec{c}')$ boladı. Esaolawdı birinshi usılda ámelge asırayıq.

K sistemadaǵı $\vec{c}$ vektor koordinataların tabamız. Bunıń ushın keri túrlendiriw qaǵıydasınnan paydalanamız: $c_k=\alpha_{kt}^{T}c'_t$. Túrlendiriw qaǵıydasın matritsa kóriniste jazıw qolay boladı:

$$c_k=\alpha_{kt}^{T}c'_t \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\left(\alpha^{T}\right)\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}.$$

α matritsa aldıngı mısalda esaplanǵan, sonnan paydalansaq

$$\vec{c}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demek, skalyar kóbeyme $(\vec{a},\vec{c})=0\cdot(-2)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+2\cdot 1=4$ boladı.◀

II bólim. Tenzorlar algebrası

4-§. Tenzor túsinigine alıp kelinetuǵın fizikalıq másele

Sonday fizikalıq protsessler bar, olardaǵı tekserilip atırǵan obiekttiń xarakteristikaları tenzor túsinigine alıp keledi. Belgili bolǵanınday obiekttiń xarakteristikası invariantlıq qásiyetke iye bolıwı kerek, yaǵniy koordinatalar sistemasın tańlawǵa baylanıslı bolmawı lazım. Fizikadaǵı skalyar shamalar qatarına kiriwshi massa, zaryad hám t.b. lar invariantlıǵı óz- ózinnen belgili.Tezlik, tezleniw sıyaqlı shamalar vektor ólshemler bolıp,koordinata sistemasına salıstırmalı úshlik san arqalı beriledi hám bul sanlar koordinatalardi burıwda (24), (25) nızamlar boyınsha ózgeredi. Bul shamalardıń invariantlıǵı sol menen ańlatıladı vektor koordinataları ózgergeni menen vektor kórsetkishke iye bolǵan kesindi ózgermes boladı.

Fizikada skalyar hám vektor shamalardan tısqarı qıyınıraq bolǵan obiektler de ushıraydı. Mısal sıpatında aylanba háreket qılıp atırǵan denenıń kinetikalıq energıyasın esaplawdı kóreyik.

Dene inertsiya orayına bekkemlengen bolıp, $\vec{\omega}$ múyesh tezlik penen aylanıp atıǵan bolsın.Eger deneniń tıǵızlıǵı $\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$ bolsa,

$$E = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})[\vec{\omega}, \vec{r}]^2 \, dv \tag{1}$$

Kólemlik integral kinetikalıq energiyaǵa teń boladı.Integral astındaǵı vektor kóbeymeni jayıp Eynshteyn simvolikasınan paydalansaq,

$$[\vec{\omega}, \vec{r}]^2 = \vec{\omega}^2 \vec{r}^2 - (\vec{\omega}, \vec{r})^2 = \omega_i \omega_i r^2 - \omega_i x_i \omega_k x_k,$$

Boladı. δ simvoldı isletip

$$[\vec{\omega}, \vec{r}]^2 = \omega_i \omega_k \left(\delta_{ik} r^2 - x_i x_k\right), \tag{2}$$

kóriniste jazıw múmkin. (1) hám (2) ańlatplardı kinetikalıq energiya ańlatpasına qoysaq,

$$E = \frac{1}{2}\left[\int_V \left(\delta_{ik} r^2 - x_i x_k\right) dv\right]\omega_i \omega_k, \tag{3}$$

Boladı.Tómendegishe belgilew kiritip

$$\mathrm{I}_{ik} = \int_V \rho(\vec{r})\left(\delta_{ik} r^2 - x_i x_k\right) dv, \tag{4}$$

(3) ti

$$E = \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k, \tag{6}$$

kóriniste jazıw múmkin..

Sonday qılıp,kinetikalıq energiya múyeshlik tezlikten tısqarı deneniń inertlik qásiyetin anıqlawshı

$$(I)_{ik} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

matritsa kórinistegi shamalarǵa da baylanıslı boladı. I_{ik} shamalardıń mánisin ańlaw ushın dene radiusı R ge teń bolǵan shardan ibarat hám $\rho(\vec{r}) = const$ bolǵanda matritsa

$$(I)_{ik} = \frac{2}{5} MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

kóriniste boladı. Bul jerde $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$ shar massası. (8) kóre (6) nı

$$E = \frac{2}{5}MR^2\omega^2,$$

Kóriniste jazıladı, $I = \frac{2}{5}MR^2$ qa shardıń inertsiya momenti delinedi, hám ol sferalıq kórinistegi bir jınıslı shardıń aylanba hárekettegi inertsion xarakteristikasın ańlatadı.

Sonı aytıp ótiw kerek, kinetikalıq energiyanıń ańlatpası onıń invariantlıǵın kórsetedi, sebebi bul ańlatpanı qurawshılar skalyar shamalar boladı.

Ulıwma jaǵdayda I_{ik} nıń mánisin ańlaw ushın jańa sistemaǵa ótilgende bul shamalar qanday ózgeriwin gúzetiw kerek. (x', y', z') sistema (x, y, z) ti burıwdan kelip shıqqan bolsın:

$$I'_{ik} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left(\delta_{ik} r'^2 - x'_i x'_k\right)dv, \tag{9}$$

Eski hám jańa sistemalar (23) nızam boyınsha baylanısqan:

$$x'_i = \alpha_{im} x_m. \tag{10}$$

$\delta_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{km} = \alpha_{im}\alpha_{kn}\delta_{mn}$ bolǵanı ushın (10) túrlendiriwdiń Yakobianı $J = det(\alpha_{mn}) = 1$ bolǵanı ushın

$$I'_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kn}\int_V \rho(\vec{r})\left(\delta_{mn} r^2 - x_m x_n\right)dv, \tag{11}$$

(11) di (4) penen salıstırıw nátiyjesinde

$$I'_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kn} I_{mn}, \tag{12}$$

qatnasqa kelemiz. (12) den

$$I'_{ik}\,\omega'_i\,\omega'_k = \alpha_{im}\alpha_{kn} I_{mn}\omega'_i\,\omega'_k = I_{mn}\left(\alpha_{im}\omega'_i\right)\left(\alpha_{kn}\omega'_k\right)$$

(23)ke kóre bunnan

$$I'_{ik}\,\omega'_i\,\omega'_k = I_{mn}\omega_m\omega_n \qquad (13)$$

(13) ten koordinatalar sistemasın burıwda energiyanıń ózgermewi, yaǵniy invariantlıǵın ańlatadı. Sol menen birge (12) ańlatpa dene inertsiyasın anıqlawshı I_{ik} shamalardıń koordinatalar sistemasın burıwda qanday ózgeriwin kórsetedi.

I_{ik} shamalar deneniń aylanba háreketinde onıń energiyasın kórsetiwshi shama boladı. I_{ik} shamalardıń birlespesi onıń **inertsiya tenzorı** dep atalıwshı shamanıń koordinatalarınnan ibarat boladı.

5-§. Tenzor túsinigi

Aldınǵı temada koordinatalar sistemasın burıw protsessinde vektordıń koordinataların qanday túrlendiriw qaǵıydaları menen tanıstıq.Matematika, mexanika hám fizikada sonday quramalı obiektler bar, olardıń koordinataları bazis almasıw protsessinde arnawlı qaǵıyda menen ózgeredi.Máselen, eki vektor koordinatalarınıń kóbeymesinnen kelip shıqqan 9 A_iB_j shamadan ibarat bolǵan obiektti qarayıq. Vektor koordinataların tútlendiriw qaǵıydası (24) ten bul 9 shama usı

$$A'_i\,B'_j = \alpha_{in}\alpha_{jm}A_nB_m$$

Qaǵıyda boyınsha túrlenedi. $A_iB_j = T_{ij}$ belgilew kiritiw nátiyjesinde $T'_{ij} = \alpha_{in}\alpha_{jm}T_{nm}$ teńlikke kelemiz. Úsh ólshemli keńislikte koordinata sistemasın burıw protsessinde 9 shamanıń bunday túrleniw qaǵıydasına **2-rang tenzor** dep ataladı. Tap sonday, 27 shamadan ibarat kóplik

$$T'_{ijk} = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}T_{nml}$$

kóriniste boladı. T_{ijk} shamalar úsh ólshemli keńislikte *úshinshi rang tenzorlar* delinedi. Bul jerde tenzor anıqlamanı biz túsiniw qolay bolıwı ushın vektorlar arqalı keltirdik. Tenzorlardıń vektorǵa baylanıssız ulıwma anıqlaması tómendegishe boladı:

Anıqlama. Eger úsh ólshemli keńislikte 3^R shamalar ortogonal koordinatalar sistemasın burıwda eski hám jańa bazislerde

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_R} = \alpha_{i_1 k_1} \alpha_{i_2 k_2} \cdots \alpha_{i_R k_R} T_{k_1 k_2 \cdots k_R} \tag{14}$$

qaǵıyda boyınsha barlanısqan bolsa, bunday shamalarǵa *R-rang tenzorlar* delinedi. Anıqlamaǵa kóre nolinshi rang tenzor skalyar bolıp, ol koordinatalar sistemasın túrleniwinde ózgermeydi.Birinshi rang tenzor vektordan ibarat bolıp, onıń koordinataları (23) yamasa (24) nızam menen ózgeredi:

$$A'_i = \alpha_{ij} A_j \quad \text{yamasa} \quad A_j = \alpha'_{ki} A'_i \tag{15}$$

2-rang tenzor úsh ólshemli keńislikte 3^2 koordinataları bar boladı. Olardıń tuwrı hám keri túrlendiriw nızamları tómendegishe boladı:

$$B'_{ij} = \alpha_{in} \alpha_{jm} B_{nm}, \qquad B_{ij} = \alpha^T_{in} \alpha^T_{jm} B'_{nm} \tag{16}$$

3-rang tenzordıń túrleniw nızamına úsh burıw matritsası qatnasadı.

(16) ańlatpalardı matritsa kóriniste ańlatıw esaplawlarda qolaylıq tuwdıradı.

$$B'_{ij} = \alpha_{in} \alpha_{jm} B_{nm} = \alpha_{in} B_{nm} \alpha_{jm} = \alpha_{in} B_{nm} \alpha^T_{mj} = \left(\alpha \cdot B \cdot \alpha^T \right)_{ij} \Rightarrow B' = \alpha \cdot B \cdot \alpha^T \tag{17}$$

Tap sonday,(17) den keri túrlendiriw nızamın keltirip shıǵarıw múmkin

$$B = \alpha^T \cdot B' \cdot \alpha \tag{18}$$

1-*mısal.*(6) formula járdeminde anıqlanǵan Kroneker belgisiniń tenzorlıǵın kórseteyik.

⊳ Kroneker belgisin Dekart koordinatalardaǵı ortlardıń skalyar kóbeymesi kórinisinde ańlatıw múmkin: $\delta_{mk} = (\vec{e}_m, \vec{e}_k), \delta'_{mk} = (\vec{e}'_m, \vec{e}'_k)$. Ortlardıń túrlendiriw nızamınnan

$$\delta'_{mk} = (\vec{e}_{in}, \vec{e}_k) = \alpha_{mn}\alpha_{kl}(\vec{e}_n, \vec{e}_l) = \alpha_{mn}\alpha_{kl}\delta_{nl}.$$

Demek, Kroneker belgisi ekinshi rang tenzor eken.Esaplawdı dawam ettirsek

$$\delta'_{mk} = \alpha_{mn}\alpha_{kn} = \delta_{mk}$$

teńlikke iye bolamız.Kroneker belgisi ekinshi rang tenzor bolıwınnan tısqarı óz kórinisin de saqlap qaladı eken. Bunnan tenzorlarǵa **invariant** tenzorlar delinedi.◀

2-*mısal*. Baslanǵısh koordinatalar sistemasında 2-rang B tenzordıń koordinataları berilgen bolsın:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

z kósheri átirapında Dekart koordinatalar sistemasın 135^0 qa burıw nátiyjesinde kelip shıqqan sistemada tenzor koordinataların tabıń.

⊳ (17) den paydalansaq

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -2\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

6-§.Tenzorlar ústinde ámeller

1.Tenzorlardı qosıw. Tek birdey rangli tenzorlardı qosıw múmkin hám qosıwda sáykes koordinataları qosıladı. Tenzorlardı qosıw nátiyjesinde onıń rangi ózgermeydi.

Mısal. Máselen,úshinshi rang tenzor tómendegishe qosıladı:

$$C_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk}$$

$\triangleright$ C nıń úshinshi rang tenzor ekenligin kórsetemiz. A hám B úshinshi rang tenzor bolǵanı ushın olardıń hár biriniń elementler sanı $3^3 = 27$ ge teń. A hám B tenzorlardıń sáykes elementleri qosılǵannan soń qosındıda jáne 27 element kelip shıǵadı. Endi C tenzor koordinatalarınıń túrlendiriw nızamın kóreyik.

$$\alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}\left(A_{nml} + B_{nml}\right) = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}C_{nml}.$$

Sonday qılıp,

$$C'_{nml} = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}C_{nml}.$$

Bul qatnas C nıń úshinshi rang tenzorlıǵın kórsetedi. Belgili bolǵanınday, qálegen rangli tenzorlar ushın da bul qaǵıydanıń orınlı bolıwın kórsetiw qıyın emes. $\blacktriangleleft$

2. Tenzorlardı kóbeytiw. A tenzorı R_1 rangli bolıp, B tenzor R_2 rangli bolsın.Bul tenzorlardı kóbeytiw nátiyjesinde $R_1 + R_2$ rangli C tenzor kelip shıǵadı.

Mısal. A 1-rang. B 2-rang tenzorlar bolsın. Bul tenzorlardı kóbeytiw nátiyjesinde 3- rang tenor kelip shıǵadı.

$$A_i \cdot B_{jk} = C_{ijk}$$

▹ Haqıyqattan da C nıń elementler sanı 27 ge yaǵniy 3-rang tenzor elementler sanına teń boladı. Endi koordinatalar sistemasın burıwdaǵı túrlendiriw nızamın tekseremiz.

$$C'_{ijk} = A'_i \cdot B'_{jk} = \alpha_{in} A_n \cdot \alpha_{jm} \alpha_{kl} B_{kl} = \alpha_{in} \alpha_{jm} \alpha_{kl} A_n B_{kl} = \alpha_{in} \alpha_{jm} \alpha_{kl} C_{nml}.$$

Bunnan C nıń tenzorlıǵı kelip shıǵadı.◀

3. Tenzordı jıynaw. A R -rang tenzor bolsın A tenzor koordinataların eki indeksi boyınsha qosıwǵa tenzordı jıynaw delinedi. R- rang tenzordı jıynaw nátiyjesinde R -2 rangli tenzor kelip shiǵadı. Tenzordı jıynaw ámeli tenzordı Kroneker simvolına kóbeytiw hám soń eki indeks boyınsha qosıw menen birdey bolǵanı ushın tenzordı jıynaw ámelin tenzordı Kroneker belgisine kóbeytiwden keltirip shıǵarıwǵa boladı.

Mısal . A úshinshi rang tenzor bolsın. Bul tenzordı aqırǵı eki indeksi boyınsha jıynastırayıq, yaǵniy A_{ijj}. Ekinshi tárepten $A_{ijk}\delta_{jk} = A_{ijj}$ boladı. Bul jerde j jıynaw indeksi i bolsa erkin indeks, sonıń ushın $A_{ijj} = B_i$ boladı. Yaǵniy úshinshi rang tenzordı jıynaw nátiyjesinde 1- rang tenzor kelip shıǵadı. Haqıyqattan da,

$$A'_{ijj} = \alpha_m \alpha_{jn} \alpha_{kl} A_{mnk} = \alpha_{im} \delta_{nk} A_{mnk} = \alpha_{im} A_{mkk} = \alpha_{im} B_m.$$

Mısal. C 4- rang tenzordı aqırǵı eki indeksi boyınsha jıynawdı kóreyik. Juwmaqlawshı tenzordı ekinshi rangliǵin dálilleyik.

$\triangleright$ $C'_{ijkk} = D'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kl}\alpha_{kh}C_{mnlh} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{lh}C_{mnlh} = \alpha_{im}\alpha_{jn}C_{mnll} = \alpha_{im}\alpha_{jn}D_{mn}$. ◀

Tenzordı jıynaw ámelin qollaw ushın tenzor rangi 2 hám onnan joqarı bolıwı kerek.2- rang tenzordı jıynaw ámeline **tenzordıń izi** delinedi hám tómendegishe belgilenedi:

$$Sp\left(A_{ij}\right) = Tr\left(A_{ij}\right) = A_{ii} \tag{20}$$

Koordinata sistemasın burıwǵa salıstırǵanda tenzordıń izi invariant boladı. Haqıyqattanda

$$Sp\left(A'_{ij}\right) = A'_{ii} = \alpha_{ij}\alpha_{ik}A_{jk} = \delta_{jk}A_{jk} = A_{kk} = Sp\left(A_{ij}\right) \Rightarrow Sp\left(A'_{ij}\right) = Sp\left(A_{ij}\right)$$

Simmetriyalıq hám antisimmetriyalıw tenzorlar

Ekinshi rang T_{ij} tenzordı qarayıq. Eger indeksler ornın almastırǵanda koordinataları ózgermese, bunday tenzorlarǵa **simmetriyalıq tenzorlar** delinedi. Indeksler ornın almastırǵanda tenzor koordinataların belgii kerige almassa, bunday tenzorǵa **antisimmetriyalıq tenzorlar** delinedi:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} \text{ - simmetriyalıq tenzor,}$$

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} \text{ - antisimmetriyalıq tenzor.}$$

Joqarı tártipli tenzorlarda simmetriyalıq hám antisimmetriyalıq túsinikler jup indekslerge salıstırılıp qaraladı. Máselen,

$$F_{ijkn} = F_{jikn} \text{ hám } F_{ijkn} = -F_{kjin}$$

Teńlikler orınlı bolsa, 4- rang F tenzor birinshi jup indeks boyınsha simmetriyalıq bolıp, 1- hám 3- indeksleri boyınsha antisimmetriyalıq delinedi.

Tenzorlardıń simmetriyalıq qásiyeti tenzordıń óz-ara baylanısı bolmaǵan elementler sanınıń kemeyiwine alıp keledi. 2-rang tenzordı 3×3 matritsa menen salıstırıw múmkin.Simmetriyalıq tenzorlar bas dioganal hám onnan joqarıda jaylasqan elemenler menen tolıq anıqlanadı.Bunday elementler bolsa, altıǵa teń boladı.

Ekinshi rang antisimmetriyalıq tenzor koordinataları bas dioganaldan joqarıda jaylasqan hám bul dioganaldan tómende jaylasqan koordinataları menen ózgeshelenedi.Bas dioganalda jaylasqan elementler nolge teń boladı. Haqıyqattan da, A_{ij} antisimmetriyalıq tenzor bolsın: $A_{ij}=-A_{ji}$. Bul teńlikte $i=j$ dep alsaq, $A_{jj}=-A_{jj}$ (bul teńlikte *j* boyınsha qosındı joq) boladı, bunnan $A_{jj}=0$ ekenligi kelip shıǵadı.Sonıń úsh ólshemli keńislikte antisimmetriyalıq tenzordıń baylanıslı bolmaǵan elementleri úshke teń boladı.

Tenzorlardıń simmetriylıq hám antisimmetriyalıq qásiyetleri invriantlıǵın kórsetiw múmkin. Haqıyqattan da, simmetriyalıq T_{ij} tenzordı kóreyik: yaǵniy $T_{ij}=T_{ji}$. Dekart koordinatalar sistemasın bazı bir múyeshke burıwdan payd bolǵan sistemada da $T'_{ij}=T'_{ji}$ bolıwın kórsetemiz:

$$T'_{ij}=\alpha_{in}\alpha_{jm}T_{nm}=\alpha_{in}\alpha_{jm}T_{mn}=\alpha_{jm}\alpha_{in}T_{mn}=T'_{ji}\,.$$

Antisimmetriyalıq qásiyeti de sonday dálillenedi.

Teorema.Hár qandy ekinshi rang tenzordı simmetriyalıq hám antisimmetriyalıq tenzorlar qosındısı kórinizinde ańlatıw múmkin.

Dálill. Ekinshi rang T_{ij} tenzor berilgen bolsın. Bul tenzordıń qálegen elementi ushın

$$T_{ij}=\frac{T_{ij}}{2}+\frac{T_{ij}}{2}=\frac{T_{ij}}{2}+\frac{T_{ij}}{2}+\frac{T_{ji}}{2}-\frac{T_{ji}}{2}=\frac{T_{ij}+T_{ji}}{2}+\frac{T_{ij}-T_{ji}}{2},$$

Teńlikti jazıw múmkin. $S_{ij} = \left(T_{ij} + T_{ji}\right)/2,\ \ A_{ij} = \left(T_{ij} - T_{ji}\right)/2$ belgilewler kiritsek, berilgen tenzordı

$$T_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} + \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} = S_{ij} + A_{ij},$$

Kórinisinde jazı múmkin boladı. S_{ij} hám A_{ij} tenzorlardıń simmetriyalıq hám antisimmetriyallıǵı tómendegilerden kórinedi.

$$S_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} = \frac{T_{ji} + T_{ij}}{2} = S_{ji},$$

$$A_{ij} = \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} = -\frac{T_{ji} - T_{ij}}{2} = -A_{ji}.$$

1-*mısal.* Bazıbir Dekart koordinatalar sistemasında tómendegi tenzor berilgen bolsın.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bul tenzordıń simmetriyalıq hám antisimmetriyalıq bóleklerin hám $Sp(S_{ij}A_{jk})$ nı tabayıq.

▹ Simmetriyalıq hám antisimmetriyalıq elementlerdi tabıw formulasınnan

$$S_{ij} = \frac{C_{ij} + C_{ji}}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_{ij} = \frac{C_{ij} - C_{ji}}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$S_{ij}\ A_{jk} = D_{ik}$ belgilew kiriteyik. Bul belgilewdi matritsa kóriniste ańlatsaq $D = S \cdot A$ boladı. Onda D tenzor elementleri

$$D_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$Sp(\ S_{ij}\ A_{jk}) = \ S_{kj}\ A_{jk} = D_{kk}$ bolǵanı ushın, D tenzordıń dioganal elementler qosındısı nolge teń. Sonıń ushın, $Sp(\ S_{ij}\ A_{jk}) = 0$.◄

2-*mısal*. Aldıńǵı mısalda ekilengen jıynaw $S_{kj}A_{jk}$ nıń nolge teńligin kórdik. Endi ulıwma jaǵdaydı kóremiz. Qálegen simmetriyalıq hám antisimmetriyalıq tenzorlardıń ekilengen jıynawı barlıq waqıt nolge teńligin kórsetemiz.

$$\triangleright \qquad S_{kj}A_{jk} = S_{jk}(-A_{kj}) = -S_{jk}A_{kj}.$$

Bul teńliklerde k da j da jıynaw indeksi bolǵanı ushın k nı j ǵa, j di k ǵa almastırsaq,

$$S_{kj}A_{jk} = -S_{jk}A_{kj} = -S_{kj}A_{jk},$$

teńlikke iye bolamız. Bunnan $S_{kj}A_{jk} = 0$ kelip shıǵadı.◄

Tenzordıń sáykes hám sáykes vektorları

2- rang tenzordı vektorǵa kóbeytip jıynaw nátiyjesinde vektor payda boladı: $T_{ij}A_i = B_i$. Eger $\vec{A}$ vektor $\vec{B}$ vektorǵa kollinear bolsa, yaǵniy

$$T_{ij}A_j = \lambda A_i \tag{1}$$

bolsa, λ ǵa tenzordıń **sáykes sanı,** $\vec{A}$ vektorǵa tenzordıń λ sáykes sanǵa tuwrı kelgen sáykes vektorı delinedi. (1) den

$$T_{ij}A_j = \lambda A_i \Rightarrow T_{ij}A_i - \lambda\delta_{ij}A_j = 0, \Rightarrow \left(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)A_j = 0.$$

Aqırǵı teńleme $\vec{A}$ vektor elementlerine qarata bir jınıslı sızıqlı teńlemeler sisteması boladı. Bul sistema nolden ózgeshe sheshimge iye bolıwı ushın, determinant nolge teń bolıwı kerek:

$$\det\left(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = 0. \qquad (2)$$

Bul teńlemege tenzordıń **xarakteristikalıq teńlemesi** delinedi.Úsh ólshemli keńislikte xarakteristikalıq teńleme úshinshi tártipli boladı hám onıń úsh koreni $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ bolıp, hár bir sáykes sanǵa tuwrı $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(3)}$ sáykes vektorlar tabıladı.

Teorema. Simmetriyalıq tenzordıń sáykes sanları haqıyqıy bolıp, olarǵa tuwrı sáykes vektorları ortogonal boladı.

Dálilli. T_{ij} simmetriyalıq bolıp, $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ ler onıń sáykes sanları $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(3)}$ ler olarǵa tuwrı kelgen sáykes vektorları bolsın. Sáykes sanlardı kompleks dep qarayıq.Ol jaǵdayda sáykes vektorlar da kompleks boladı.Ol jaǵdayda (1) menen birge oǵan kompleks qospa teńlemeni de qaraymız:

$$\begin{cases} T_{ij}A_j = \lambda A_i \\ T_{ij}A_j^{\bullet} = \lambda^{\bullet} A_j^{\bullet} \end{cases}.$$

Birinshi teńlemeni $A_i^{\bullet}$ ge, ekinshisin A_i ge kóbeytip soń birinshisinnen ekinshisi ayırsaq

$$0 = \left(\lambda - \lambda^{\bullet}\right)\left|A_i\right|^2$$

Kelip shıǵadı (shep táreptiń nolge teńligi $T_{ij}A_i^{\bullet}A_i = T_{ji}A_j^{\bullet}A_i \underset{(\leftrightarrow)}{=} T_{ij}A_i^{\bullet}A_j$ teńlikke kóre kelip shıǵadı). Bunnan $\lambda = \lambda^{\bullet}$ bolıwı kelip shıǵadı hám sáykes sanlardıń haqıyqıy ekenligi kórinedi.

$\lambda^{(1)}$ hám $\lambda^{(2)}$ ge tuwrı kelgen $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}$ vektorlardı kóreyik. $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ bolsın. Bul shamalar tómendegi teńlemelerdi qaanaatlandıradı:

$$\begin{cases} T_{ij}A_j^{(1)} = \lambda^{(1)}A_i^{(1)} \\ T_{ij}A_j^{(2)} = \lambda^{(2)}A_i^{(2)} \end{cases}$$

Sistemanıń birinshisin $\vec{A}^{(2)}$ ge, ekinshisin $\vec{A}^{(1)}$ ge kóbeytip soń ayırsaq

$$0 = \left(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}\right)\left(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}\right),$$

Bunnan $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ ge tiykarlanıp, $\left(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}\right) \neq 0,$ kelip shıǵadı, yaǵniy sáykes vektorlar ortogonal boladı.

Eger eki yáki úsh sáykes sanlar óz-ara teń bolsa, olarǵa tuwrı keletuǵın vektorlardı bir-birine ortogonal sıpatında tańlap alıw múmkin.

Ortogonal sáykes vektorlar tiykarında qurılǵan sistemada tenzor ápiwayı kóriniste, onıń matritsası dioganal maatritsadan ibarat bolıp, dioganal elementleri sáykes sanlardan ibarat boladı. Jáne sol nárseni aytıp ótiw kerek, sáykes vektorlar oń sistemanı payda etiwi kerek. Bul jaǵdayda tenzordıń sáykes sistemasına ótiw protsessin eski sistemanı burıw járdeminde payda etiw múmkin boladı.

Mısal. Tómendegi tenzordıń sáykes san hám sáykes vektorların tabıń.

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\triangleright$ $\vec{A}=\{a,b,c\}$ M_{ij} tenzordıń λ sáykes sanına tuwrı kelgen sáykes vektorı bolsın. Qolaylıq ushın sáykes vektordı anıqlawshı (1) teńlemeni matritsa kóriniste jazamız.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&10&3\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda&1&0\\1&10-\lambda&3\\0&3&1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Sáykes sanlar xarakteristikalıq teńlemeden tabıladı:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&10-\lambda&3\\0&3&1-\lambda\end{vmatrix}=0,\Rightarrow(1-\lambda)^2(10-\lambda)-10(1-\lambda)=0.$$

Xarakteristikalıq teńlemeniń sheshimleri $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ hám $\lambda_3=11$ ekenligin kóriw qıyın emes. Tabılǵan xarakteristikalıq sanlardı izbe-iz (3) ke qoyıp tenzordıń sáykes vektorların tabamız. $\lambda_1=0$ ushın

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&10&3\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0,\\3b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b,\\c=-3b\end{cases}$$

Sonday qılıp, $\lambda_1=0$ ge tuwrı kelgen sáykes vektor $\vec{A}_1=b\{-1,1,3\}$ ke teń boladı.Tap sonday, qalǵan sáykes vektorlardı da tabıwǵa boladı: $\vec{A}_2=c\{-3,0,1\}$ hám $\vec{A}_3=a\{1,10,3\}$.

Tabılǵan áykes vektorlardıń ortogonallıǵın tekseriw qıyın emes. Tenzordıń bas kósherlerin anıqlaymız:

$$\vec{e}\,'_1=\frac{\vec{A}_1}{|\vec{A}_1|}=\frac{1}{\sqrt{11}}\{-1,1,-3\},\vec{e}\,'_2=\frac{\vec{A}_2}{|\vec{A}_2|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\{-3,0,1\},\ \vec{e}\,'_3=\frac{\vec{A}_3}{|\vec{A}_3|}=\pm\frac{1}{\sqrt{110}}\{1,10,3\}.$$

Bul jerde biz $\vec{e}\,'_1$ hám $\vec{e}\,'_2$ ni tabıwda b hám c nıń belgilerin oń qılıp aldıq, $\vec{e}\,'_3$ degi a nıń belgisi belgisiz qılıp alındı. Onıń belgisin $\vec{e}\,'_i$ vektorlar oń sistemanı payda etiwden tabıladı, yaúniy $\vec{e}\,'_3 = [\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2]$ teńlikten tańlanadı. Vektor kóbeymeden

$$[\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2] = \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{vmatrix} \vec{e}\,'_1 & \vec{e}\,'_2 & \vec{e}\,'_3 \\ -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{110}} \left(\vec{e}\,'_1 + 10\vec{e}\,'_2 + 3\vec{e}\,'_3 \right),$$

$\vec{e}\,'_3$ tegi a nıń belgisin «+» belgi menen alıw kerekligi kelip shıǵadı.◄

Tenzordıń xarakteristikalıq beti

Simmetriyalıq tenzordı geometriyalıq súwretlew ushın **tenzordıń xarakteristikalıq beti** túsinigi kiritiledi. Bul bet ekinshi tártipli bet bolıp, onıń teńlemesi

$$T_{ij} x_i x_j = 1 \qquad (4)$$

Kóriniste boladı.

Tenzordıń bas kósherleri tenzor xarakteristikalıq teńlemesiniń bas kósherlerinnen ibarat boladı. Eger tenzordıń sáykes sanları teń bolsa, $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$ bunday tenzorǵa **shártli tenzor** delinedi. Shártli tenzordıń xarakteristikalıq beti sferadan ibarat boladı. Eger $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ bolsa, bunday tenzorǵa **simmetriyalıq tenzor** delinedi hám onıń xarakteristikalıq beti aylanba betten ibarat boladı. Eger $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ bolsa, bunday tenzorǵa **assimetriyalıq tenzor** delinedi.

Eger tenzordıń barlıq sáykes sanları oń bolsa, tenzor oń anıqlanǵan delinedi. Eger barlıq sáykes sanları teris bolsa, tenzor teris anıqlanǵan delinedi. Eger tenzordıń bazı sáykes sanları oń bazıları teris bolsa, bunday tenzorǵa belgisi anıqlanbaǵan tenzor delinedi. Bunday tenzordıń xarakteristikalıq beti giperboloidtan ibarat boladı.

Tenzordıń bas kósherleri boyınsha alınǵan X_1, X_2, X_3 sistemada tenzordıń xarakteristikalıq teńlemesi

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 = 1 \Rightarrow \frac{X_1^2}{1/\lambda_1} + \frac{X_2^2}{1/\lambda_2} + \frac{X_3^2}{1/\lambda_3} = 1$$

kóriniste boladı.

Mısal. Tómendegi M_{ij} tenzor ushın tenzorlı betti hám bas kósherleri boyınsha alınǵan tenzor betlerdi tabıwdı kóreyik.

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\triangleright$ (4) ke kóre tenzor bet $x^2 + 2xy + 10y^2 + 6yz + z^2 = 1$ kóriniste boladı. Tenzordıń bas kósherleri boyınsha alınǵan sistemada bolsa,

$$M'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2^2 + 11X_3^2 = 1$$

ápiwayı kóriniske iye bolıp, cilindrlıq betten ibarat boladı.◄

Ekinshi rang tenzordıń invariantları

I BAP- ta vektor uzınlıǵı Dekart koordinatalar sistemasın burıwda ózgermeytuǵınlıǵın, yaǵniy invariantlıǵın keltirgen edik. 2- rang tenzor ushın da óziniń invariantları bar. Bunday invariantlardı anıqlaw ushın (2) xarakteristikalıq teńlemeni keńeytip jazayıq:

$$\lambda^3-\lambda^2\left(T_{11}+T_{22}+T_{33}\right)+\lambda\left(\begin{vmatrix}T_{22} & T_{23}\\ T_{32} & T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11} & T_{13}\\ T_{31} & T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{vmatrix}\right)-\begin{vmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Tenzordı hár qıylı koordinatalar sistemasında jazıw múmkin. Tenzordıń sáykes sanları (xarakteristikalıq teńleme korenleri) koordinatalar sistemasına baylanıslı emes, yaǵniy skalyar shamalar boladı. Bul bolsa, xarakteristikalıq teńlemeniń koeffitsientleri koordinatalar sistemasın burıwda ózgermeytuǵınlıǵı, yaǵniy invariantlıǵın bildiredi. Bul invariantlar tómendegishe boladı:

$$I_1=T_{11}+T_{22}+T_{33}=Sp\left(T_{ij}\right),$$

$$I_2=\left(\begin{vmatrix}T_{22} & T_{23}\\ T_{32} & T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11} & T_{13}\\ T_{31} & T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{vmatrix}\right),\quad I_3=\begin{vmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Invariantlardı tenzordıń sáykes sanları arqalı ańlatıw múmkin:

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1,\quad I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Bul invariantlardan paydalanıp, jańa invariantlardı qurıw múmkin:

$$I_1^2=2I_2=T_{11}^2+T_{22}^2+T_{33}^2+2T_{12}T_{21}+2T_{13}T_{31}+2T_{23}T_{32}=T_{ij}T_{ji}.$$

Tenzor shamalardıń inversiyada túrlendiriliwi

Ortogonal túrlendiriw matritsası ushın $\det\alpha=+1$ bolsa, birinshi tur túrlendiriw dep aytılǵan edi. $\det\alpha=-1$ bolǵanda ekinshi tur túrlendiriw delinip, bunday túrlendiriwler sistemanı burıw hám inversiyalaw protsessinde júz beredi.

Psevdovektor túsinigi sıyaqlı **psevdotenzor** túsinigi kiritiledi.

Anıqlama. Eger úsh ólshemli keńislikte 3^R shamalar ortogonal koordinatalar sistemasın burıwda eski hám jańa bazislerde

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_R} = \det\alpha \cdot \alpha_{i_1 k_1}\alpha_{i_2 k_2}\cdots\alpha_{i_R k_R} T_{k_1 k_2 \cdots k_R} \qquad (1)$$

qaǵıyda boyınsha baylanısqan bolsa, bunday shamalarǵa *R*-rang *psevdotenzorlar* delinedi.

Psevdotenzorlardıń túrleniw nızamı $\det\alpha = 1$ bolǵanda ápiwayı tenzorlardan ózgeshelenbeydi.

Psevdotenzor ushın ámeller tómendegishe keńeytiriledi:

➢ Birdey rangdegi psevdo tenzorlardı qosıw múmkin, nátiyjede sol rangdegi tenzor kelip shıǵadı.

➢Tenzordı psevdotenzorǵa kóbeytiw múmkin. Juwmaqlawshı tenzor rangi kóbeytiwshi tenzorlar rangleri qosındısına teń boladı.

➢ Psevdotenzorlardı jup indeksi boyınsha jıynaw múmkin. Juwmaqlawshı tenzor rangi berilgen psevdotenzor rangide 2 birlik kem boladı.

1-*mısal*.Delart koordinatalar sistemasın z kósheri átirapında 90^0 qa burıw hám inversiyalaw nátiyjesindegi túrlendiriw matritsasın tabıń.

▹ Izlenip atırǵan matritsa inversiya $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ hám Oz kósheri átirapında φ múyeshke burıw $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalarınıń kóbeymesine teń boladı. Demek, $\varphi = 90$ ushın izlenip atırǵan matritsa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kóriniste boladı.◄

2-*mısal*. Psevdovektor koordinatalarınıń inversiya nátiyjesinde ózgeriwin anıqlań.

▷ Inversiyada psevdo vektor koordinataları $c'_i = \det\alpha_0 \cdot (\alpha_0)_{ij} \cdot c_j$ nızam boyınsha ózgeredi. Bul jerde $(\alpha_0)_{ij} = -\delta_{ij}$ hám $\det\alpha_0 = -1$ bolǵanı ushın $c'_i = \delta_{ij}c_j = c_i$. Demek, psevdovektor koordinataları inversiyada turaqlı eken (vektorlar koordinataları inversiyada belgisin ózgertedi).◄

3-*mısal.* a_i hám b_i vektorlar hám ε_{ijk} Levi-Chivita simvolı berilgen bolsın. $\varepsilon_{ijk}a_jb_k$ shama qanday shama?

▷ Eki indeks jıynaw nátiyjesinde 1-rang psevdovektor kelip shıǵadı. Sonı tekseremiz. Vektor hám Levi-Chivita simvolınıń túrlendiriw nızamınan $\varepsilon'_{ijk}\, a'_j\, b'_k = \det\alpha \cdot \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\varepsilon_{lmn}\alpha_{jp}\alpha_p\alpha_{kq}b_q$. $\alpha_{jm}\alpha_{jp} = \delta_{mp}, \alpha_{kn}\alpha_{kq} = \delta_{nq}$, bolǵanı ushın

$$\varepsilon'_{ijk}\, a'_j\, b'_k = \det\alpha \cdot \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\varepsilon_{lmn}\alpha_{jp}\alpha_p\alpha_{kq}b_q = \det\alpha \cdot \alpha_{il}\varepsilon_{lmn}\alpha_{in}b_n.$$

$c_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$ belgilep teńlikti $c'_i = \det\alpha \cdot \alpha_{il}c_l$ kóriniste jazıw múmkin.◄

III bap. Tenzor analiz elementleri

Eger keńislikte yamasa onıń bazı bir bóliminde n- rang tenzor sáykes qoyılǵan bolsa, n- rang **tenzor maydan** berilgen delinedi.

Tenzor maydanlar ushın da tenzorlar algebrasınıń barlıq qaǵıydaları saqlanadı.

Dekart koordinatalar sistemasın túrlendiriwde $\vec{r}\left(x_1, x_2, x_3\right)$ radius vektorınıń túrlendiriw qaǵıydası hár qanday vektordıń túrlendiriw qaǵıydası sıyaqlı boladı:

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j. \tag{1}$$

$\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ koordinatalardı $\{x_1, x_2, x_3\}$ lerdiń funkciyası dep qarasaq, yaǵniy $x'_i = x'_i\left(x_1, x_2, x_3\right)$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \alpha_{ij}, \tag{2}$$

boladı. Keri túrlendiriw matritsası bolsa,

$$\alpha_{ij}^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j},$$

α_{ij} matritsanıń ortogonallıǵınan $\alpha_{ij}^{-1} = \alpha_{ij}^{1} = \alpha_{ji}$ boladı. Sonıń ushın ,

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}.$$

Tenzor maydannıń ápiwayı qásiyetlerin keltiremiz.

- Tenzor maydandı skalyar argument boyınsha differenciyallaw tenzor rangin ózgertirmeydi. Bunıń dálilli tuwındı anıqlamasınan kelip shıǵadı

$$\frac{dT_{\dots i \dots k \dots}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T_{\dots i \dots k \dots}(t+\Delta t)-T_{\dots i \dots k \dots}(t)}{\Delta t}$$

➢Tenzor maydandı radius vektor koordinataları boyınsha bir márte differenciyallawda onıń rangi birge artadı.

Haqıyqattan da, ekinshi rang $T_{ik}(x_1,x_2,x_3)$ tenzor berilgen bolsın. Múmkin bolǵan barlıq dara jaǵdaylardı qarayıq - $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$ hám onıń túrlendiriw nızamına itibar bereyik

$$\frac{\partial T_{ik}(x)}{\partial x_m}=\alpha_{i'i}\alpha_{k'k}\frac{\partial T'_{i'k'}(x')}{\partial x_m}=\alpha_{i'i}\alpha_{k'k}\frac{\partial T'_{i'k'}(x')}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial x_m}.$$

(1) hám (2) lerden $x'_n=\alpha_{nn'}x_{n'}, \frac{\partial x'_n}{\partial x_m}=\alpha_{nm}$. Sonıń ushın,

$$\frac{\partial T_{ik}(x)}{\partial x_m}=\alpha_{i'i}\alpha_{k'k}\alpha_{nm}\frac{\partial T'_{i'k'}(x')}{\partial x'_n}.$$

Yaǵniy ekinshi rang tenzordan radius vetor koordinatası boyınsha tuwındı alınǵanda úshinshi rang tenzordıń túrlendiriw nızamı boyınsha ózgeriwin kórsetedi.

Sonnan, nolinshi rang tenzor – skalyar $\varphi(\vec{r})$ maydannıń koordinataları boyınsha dara tuwıındısın kóreyik.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\left(\alpha^T_{jk}x'_k\right)}{\partial x'_i}=\alpha^T_{jk}\delta_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=\alpha_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}.$$

1-*mısal*. $\varphi(\vec{r})=r$ maydannıń grdientin tenzor qaǵıydaları boyınsha tabayıq.

$$\triangleright\ (\mathrm{grad}r)_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_n x_n} = \frac{1}{2\sqrt{x_n x_n}}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_m x_m) = \frac{1}{2r}2x_m\frac{\partial x_m}{\partial}x_i = \frac{x_m}{r}\partial_{mi} = \frac{x_i}{r}.$$

Bunnan $\mathrm{grad}r = \vec{r}/r$ kelip shıǵadı.◀

Tenzor belgisi járdeminde $\vec{a}(\vec{r})$ vektor maydannıń divergenciyası

$$\mathrm{div}\vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

hám rotorın

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \vec{e}_i\left[\vec{\nabla}, \vec{a}\right]_i = \vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}a_k,$$

kóriniste jazıw múmkin.◀

7-§. Sızıqlı keńislikte tenzorlar

Sızıqlı V keńislik hám oǵan irgeles $V^{\bullet}$ keńislik ushın

$$T: \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{r} \times \underbrace{V^{\bullet} \times V^{\bullet} \times \ldots \times V^{\bullet}}_{s} \to R^1$$

funkciyanı qarayıq.Bul funktsiya $r+s$ argumentli bolıp, r argumenti vektorlar, s argumenti sızıqlı formalar boladı.

Anıqlama. Berigen $T(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_r, \omega^1, \omega^2, \cdots \omega^s)$ funkciya hár bir argumenti boyınsha sızıqlı bolsa (basqa argumentleri fiksirlengen jaǵdayda), ol (r, s) tiptegi tenzor dep ataladı.

Mısallar.

1. Bizge $\vec{x}$ vektor berilgen bolsa, hár bir $\omega \in V^{\bullet}$ sızıqlı forma ushın $\omega(\vec{x})$ skalyar shama boladı. Demek $\vec{x}$ vektordı $\vec{x}: V^{\bullet} \to R^1$ funkciya sıpatında

qarawımız múmkin. Sonıń ushın vektor $(0,1)$ tiptegi tenzor boladı.

2. Hár bir

$$\omega : V \to R^1$$

sızıqlı forma $(1,0)$ tiptegi twnzor boladı. Sızıqlı forma kovektor depte ataladı.

3. Regulyar Φ bettiń $p(u_0,v_0)$ noqatındaǵı birinshi kvadratlıq forması $\{g_{ij}\}$ matritsa menen, ekinshi kvadratlıq forması $\{q_{ij}\}$ matritsa menen berilse,

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) \in T_p\Phi \times T_p\Phi \to g_{ij}a^i b^j,$$
$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) \in T_p\Phi \times T_p\Phi \to q_{ij}a^i b^j$$

funktsiyalar $(2,0)$ tiptegi tenzorlar boladı. Bul jerde $\{a^i\},\{b^j\}$ sanları sáykes ráwishte $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń koordinataları boladı.

Hámme (r,s) tipli tenzorlar kópligin $T_s^r(V)$ dep belgileymiz.

Teorema. Barlıq (r,s) tiptegi tenzorlar kópligi shekli ólshemli sızıqlı keńislik boladı.

Aldın ala eki (r,s) tiptegi *T,S* tenzorlar hám haqıyqıy λ san ushın sızıqlı ámeller tómendegishe anıqlanadı:

$$(T+S)\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s\right) = T\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s\right)+$$

$$+S\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s\right),$$

$$(\lambda T)\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s\right) = \lambda T\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s\right).$$

Endi $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ vektorlar sızıqlı *V* keńislikte bazisti, $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n$ kovektorlar $V^\bullet$ keńislikte qospa bazisti anıqlasın.

$T_s^r(V)$ keńislikte

$$\Omega_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s}\right)=\delta_{k_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2}\ldots\delta_{k_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{l_1}\delta_{j_2}^{l_2}\ldots\delta_{j_s}^{l_s}$$

qaǵıyda boyınsha $\Omega_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$ tenzorlardı anıqlaymız. Bul jerde $1\le i_1,i_2,\cdots i_r,\ j_1,\ j_2\cdots j_s\le n$ bolıp, bul tenzorlar sanı n^{r+s} ke teń. Bul tenzorlardıń sızıqlı erkli ekenligin kórseteyik.Bunıń ushın

$$\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\ldots,i_r\le n\\ 1\le j_1,j_2,\ldots,j_s\le n}}\alpha_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}\Omega_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}=0$$

teńlikten $\alpha_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}=0$ teńlik indekslerdiń barlıq mánislerinde orınlı ekenligin kórseteyik. Sol maqsette

$$\sum\alpha_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}\Omega_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s}\right)$$

ti esaplaymız hám nátiyjede

$$\sum\alpha_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}\Omega_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_r\\ j_1,j_2,\ldots,j_s}}\alpha_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}\delta_{k_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2}\ldots\delta_{k_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{l_1}\delta_{j_2}^{l_2}\ldots\delta_{j_s}^{l_s}=\alpha_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}=0$$

Teńlikti payda etemiz. Demek, $\Omega_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$ tenzorlar sızıqlı erkli semiyanı quraydı.

Bul tenzorlardıń $T_s^r(V)$ keńislikte tolıq semiya ekenligin dálilleyik. Bunıń ushın (r,s) tiptegi qálegen T tenzor ushın

$$T_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_s}=T\left(\vec{e}_{j_1},\vec{e}_{j_2},\ldots,\vec{e}_{j_r},\omega^{i_1},\omega^{i_2},\ldots,\omega^{i_s}\right)$$

beliglewdi kiritip

$$T=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}} T^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_r}\Omega^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_s}$$

teńlikti dálilleyik. Bunıń ushın teńliktiń oń tárepindegi tenzordıń $\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\dots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)$ smiya ushın mánislerin esaplaymız:

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}} T^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_r}\Omega^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_s}\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\dots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}} T^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_r}\delta^{j_1}_{k_1}\delta^{j_2}_{k_2}\dots\delta^{j_r}_{k_r}\delta^{l_1}_{i_1}\delta^{l_2}_{i_2}\dots\delta^{l_s}_{i_s}=$$

$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_s\\ j_1,j_2,\dots,j_r}} T^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_r}\delta^{k_1}_{k_1}\delta^{k_2}_{k_2}\dots\delta^{k_r}_{k_r}\delta^{l_1}_{l_1}\delta^{l_2}_{l_2}\dots\delta^{l_s}_{l_s}=T^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_r}$$

Demek, tenzorlardıń mánisi bazislerdi qurawshı qálegen vektorlar hám kovektorlar semiyası ushın ústpe-úst túsedi. Tenzorlardıń hár bir argument boyınsha sızıqlı ekenliginen olardıń teńligi kelip shıǵadı. Sonday qılıp, (r,s) tiptegi tenzorlar kópligi shekli ólshemli sızıqlı keńislikti quraydı.

Endi sızıqlı V keńislikte bazis ózgergende tenzorlar koordinatalarınıń ózgeriw qaǵıydasın anıqlayıq. Bunıń ushın V keńislikte bazisti $\tilde{\vec{e}}_1,\tilde{\vec{e}}_2,\dots,\tilde{\vec{e}}_n$ menen belgilep, jańa bazis vektorların eski bazis arqalı ańlatayıq:

$$\tilde{\vec{e}}_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i_j e_i$$

Jańa baziske qospa $\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2,\dots,\tilde{\omega}^n$ elementlerin de

$$\tilde{\omega}^i=\sum_{i=1}^{n}\beta^j_i\omega^i$$

kóriniste jazsaq, $\left\{\beta^i_j\right\}$ matritsa $\left\{\alpha^i_j\right\}$ matritsaǵa keri matritsa ekenligin bilemiz.

Bul jańa bazislerge tuwrı keliwshi $T_s^r(V)$ keńisliktiń bazisi

$$\tilde{\Omega}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\left(\tilde{\vec{e}}_{k_1},\tilde{\vec{e}}_{k_2},\dots,\tilde{\vec{e}}_{k_r},\tilde{\omega}^{l_2},\tilde{\omega}^{l_2},\dots,\tilde{\omega}^{l_s}\right)=$$

$$=\delta_{k_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2}\dots\delta_{k_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{l_1}\delta_{j_2}^{l_2}\dots\delta_{k_s}^{l_s}$$

qaǵıyda boyınsha anıqlanadı. Bul jańa bazistiń eski bazistegi koordinataların tabıw ushın

$$\tilde{\Omega}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\dots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_2},\omega^{l_2},\dots,\omega^{l_s}\right)$$

Shamanı esaplayıq. Bunıń ushın

$$\vec{e}_j=\sum_k \beta_j^k\tilde{\vec{e}}_k,\qquad \omega^i=\sum_k \alpha_k^i\tilde{\omega}^k$$

Teńliklerden paydalanamız.Nátiyjede

$$\tilde{\Omega}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\left(\sum_{n_1}\beta_{k_1}^{n_1}\tilde{\vec{e}}_{n_1},\sum_{n_2}\beta_{k_2}^{n_2}\tilde{\vec{e}}_{n_2},\dots,\sum_{n_r}\beta_{k_r}^{n_r}\tilde{\vec{e}}_{n_r},\sum_{m_1}\alpha_{m_1}^{l_1}\tilde{\omega}^{m_1},\dots,\sum_{m_s}\alpha_{m_s}^{l_s}\tilde{\omega}^{m_s}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_r\\ m_1,m_2\cdots m_s}}\beta_{k_1}^{n_1}\beta_{k_2}^{n_2}\dots\beta_{k_r}^{n_r}\alpha_{m_1}^{l_1}\dots\alpha_{m_s}^{l_s}\delta_{n_1}^{i_1}\delta_{n_2}^{i_2}\dots\delta_{n_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{m_1}\delta_{j_2}^{m_2}\dots\delta_{k_s}^{m_s}=$$

$$=\beta_{k_1}^{i_1}\beta_{k_2}^{i_2}\dots\beta_{k_r}^{n_r}\alpha_{m_1}^{l_1}\dots\alpha_{m_s}^{l_s}$$

Teńlikti payda etemiz.Demek,

$$\tilde{\Omega}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r\\ j_1,j_2\cdots j_s}}\beta_{k_1}^{i_1}\beta_{k_2}^{i_2}\dots\beta_{k_r}^{n_r}\alpha_{j_1}^{l_1}\alpha_{m_2}^{l_2}\dots\alpha_{j_s}^{l_s}\Omega_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}$$

Endi T tenzordıń jańa bazistegi koordinataların tabıń:

$$\tilde{T}_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}=T\left(\tilde{\vec{e}}_{i_1},\tilde{\vec{e}}_{i_2},\dots,\tilde{\vec{e}}_{i_r},\tilde{\omega}^{j_2},\tilde{\omega}^{j_2},\dots,\tilde{\omega}^{j_s}\right)=$$

$$= T\left(\sum_{k_1}\alpha_{i_1}^{k_1}\vec{e}_{k_1}, \sum_{k_2}\alpha_{i_2}^{k_2}\vec{e}_{k_2}, \dots, \sum_{k_r}\alpha_{i_r}^{k_r}\vec{e}_{k_r}, \sum_{l_1}\beta_{l_1}^{j_1}\omega^{l_1}, \sum_{l_2}\beta_{l_2}^{j_2}\omega^{l_2}, \dots, \sum_{l_s}\beta_{l_s}^{j_s}\omega^{l_s}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r \\ l_1,l_2\dots l_s}} \alpha_{i_1}^{k_1}\alpha_{i_2}^{k_2}\dots\alpha_{i_r}^{k_r}\beta_{l_1}^{j_1}\beta_{l_2}^{j_2}\dots\beta_{l_s}^{j_s}$$

Demek,

$$\tilde{T}_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s} = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r \\ l_1,l_2,\dots,l_s}} \alpha_{i_1}^{k_1}\alpha_{i_2}^{k_2}\dots\alpha_{i_r}^{k_r}\beta_{l_1}^{j_1}\beta_{l_2}^{j_2}\dots\beta_{l_s}^{j_s}T_{k_1\dots k_r}^{l_1\dots l_s} \tag{1}$$

formula orınlı.Bul formula jańa koordinaatalardı eski koordinatalar menen $\{\alpha_j^i\}, \{\beta_j^i\}$ matritsalar arqalı ańlatadı. Bul formulanı tenzordıń ózgeriw nızamı dep ataymız. $r = 0, s = 1$ hám $r = 1, s = 0$ bolǵanda bul formula sáykes ráwishte vektor hám kovektor koordinatalarınıń ózgeriw qaǵıydasın beredi.

1. Eger T hám S tenzorlardıń koordinataları $T_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_s}$ hám $S_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$ lerden ibarat bolsa, $T + S$ tenzordıń koordinataları

$$T_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_s} + S_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$$

sanlardan, λ haqıyqıy san ushın λT tenzorınıń koordinataları T tenzordıń hár bir koordinatasın sol sanǵa kóbeytiw járdeminde payda boladı, yaǵniy

$$\lambda T_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$$

sanlarǵa teń boladı.

Endi basqa algebralıq ámellerdi kiritemiz. Qolaylıq ushın $0 \le r \le 3$, $0 \le s \le 3$ jaǵdaylardı kóremiz.

2. Tenzorlardı kóbeytiw. Tenzorlardı kóbeytiw ushın olardıń tipleri birdey bolıwı shárt emes. Tenzor kóbeyme koordinataları berilgen eki tenzorlardıń koordinataların kóbeytiw nátiyjesinde kelip shıǵadı. Eger $(2,3)$ tiptegi T

tenozrdıń koordinataları $T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}$, $(1,2)$ tiptegi S tenzordıń koordinataları $S_{\alpha}^{\beta_1 \beta_2}$ bolsa, $T \cdot S$ tenzordıń koordinataları

$$T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3} \cdot S_{\alpha}^{\beta_1 \beta_2}$$

sanlardaan ibarat boladı.Demek kóbeyme

$$\sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 \\ i_1, i_2, i_3}} T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3} \cdot S_{\alpha}^{\beta_1 \beta_2} \Omega_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5}^{i_1 i_2 i_3}$$

kóriniste boladı.

3. Birdey tiptegi indekslerdi almastırıw. Bizge T tenzor berilgen bolsa, onıń koordinatalarında qálegen 2 birdey indeks orınların almastırıw járdeminde basqa tenzordı payda etemiz. Máselen $(3,0)$ tiptegi T tenzordıń koordinataları T_{ijk} sanlardan ibarat bolsa, koordinataları T_{ikj} sanlardan ibarat tenzor

$$R = \sum_{ijk} T_{ikj} \Omega^{ijk}$$

kóriniste boladı.Tap sonday $(0,2)$ tiptegi $\{T^{ij}\}$ tenzor ushın

$$R = \sum_{ij} T^{ij} \Omega_{ij}$$

formula menen basqa tenzordı payda etemiz.

4. Indeksler boyınsha jıynaw. Bizge $(2,3)$ tiptegi $\{T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}\}$ tenzor berilgen bolsa,

$$R_{i_2}^{j_1 j_3} = \sum_{k} T_{k i_2}^{j_1 k j_3}$$

qaǵıyda boyınsha $R_{i_2}^{j_1 j_3}$ sanlardı anıqlasaq, $(1,2)$ tiptegi $\{R_{i_2}^{j_1 j_3}\}$ tenzordı payda etemiz. Bul ámel k-indeks boyınsha jıynaw dep ataladı.

5. Indekslerdi túsiriw hám kóteriw.Bizge $(2,0)$ tiptegi $A=\{a_{ij}\}$ tenzor berilgen hám $\det A\neq 0$ bolsın. Keri A^{-1} matritsa elementlerin a^{ik} menen belgilesek, $\sum a^{ik}a_{kj}=\delta_j^i$ teńlik orınlı boladı.

Endi $(3,2)$ tiptegi $T=\{T_{i_1i_2i_3}^{j_1j_2}\}$ tenzor berilgen bolsa,

$$T_{i_1i_2}^{ij_1j_2}=\sum_k a^{ik}T_{ki_1i_2}^{j_1j_2}$$

qaǵıyda menen $(2,3)$ tiptegi $\{S_{i_1i_2}^{ij_1j_2}\}$ tenzordı anıqlaymız. Bul operatsiya indeksti kóteriw operatsiyası dep ataladı. Tap sonday

$$S_{jii_1i_2}^{j_1}=\sum_k a_{ki}T_{i_1i_2}^{j_1k}$$

qaǵıyda menen $(4,1)$ tiptegi $\{S_{ii_1i_2}^{j_1}\}$ tenzordı anıqlaw múmkin.Bul operatsiya indekslerdi túsiriw operatsiyası delinedi.

Tenzor belgilewler:

Tenzor analizde qolaylıq ushın tómendegi hám joqarıda birdey mártebe tákirarlanıwshı indeksler boyınsha qosındı jazılǵanda qosındı belgisi jazılmaydı.

Máselen,

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x^i\vec{e}_i=x^i\vec{e}_i$$

demek

$$S_{i_1i_2}^{ij_1j_2}=a^{ik}T_{ki_1i_2}^{j_1j_2}$$

keyinshelik bul qaǵıydadan paydalanǵanımızda bul haqqında esletip otırmaymız.

8-§. Betliklerde tenzor maydanlar

Regulyar Φ betlik berilgen bolıp, ol

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \qquad (u,v) \in G \tag{1}$$

teńleme járdeminde parametrlengen bolsın.

Hár bir $p(u,v)$ noqat ushın betliktiń sol noqattaǵı urınba keńisligin $T_p\Phi$ menen belgilegen edik. Urınba keńislikke qospa keńislikti $T_p^*\Phi$ menen belgilep, (r,s) tiptegi tenzordı

$$R(u,v): \underbrace{T_p\Phi \times T_p\Phi \times \ldots \times T_p\Phi}_{r} \times \underbrace{T_p^*\Phi \times T_p^*\Phi \times \ldots \times T_p^*\Phi}_{s} \to R^1$$

sáwlelendiriw sıpaatında anıqlaymız.

Anıqlama-1. Betliktiń hár bir noqatına

$$(u,v) \to R(u,v)$$

sáwlelendiriw menen (r,s) tiptegi tenzor sáykes qoyılǵan bolsa, Φ betlikte (r,s) ***tiptegi R tenzor maydan*** berilgen delinedi.

Mısallar.

1. Betlikte anıqlanǵan vektor maydan $(0,1)$ tiptegi tenzor maydanǵa mısal boladı.
2. Betlikte anıqlanǵan sızıqlı forma maydanı $(1,0)$ tiptegi tenzor maydan boladı.
3. Betliktiń 1 shi hám 2 shi kvadratik formaları da betlikte $(2,0)$ tiptegi tenzor maydanlardı anıqlaydı.

Eger $\vec{a}=\{a^1,a^2\}$, $\vec{b}=\{b^1,b^2\}$ vektor maydanlar, $\{g_{ij}\},\{q_{ij}\}$ matritsalar sáykes ráwishte 1-shi hám 2-kvadratik formalar matritsaları bolsa,

$$T_1\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sum_{i,j} g_{ij}a^ib^j, \qquad T_2\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sum_{i,j} q_{ij}a^ib^j$$

formualar

$$T_1,T_2: T_p\Phi\times T_p\Phi\to R^1$$

tenzor maydanlardı anıqlaydı.

Bizge belgili $p(u,v)$ noqattaǵı $T_p\Phi$ urınba keńislik ushın $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ vektorlr bazisti dúzedi. Qospa $T_p^*\Phi$ keńisliktegi ω_p^1,ω_p^2 qospa bazis

$$\omega_p^i\left(\vec{r}_{u_j}\right)=\delta_j^i$$

qaǵıyda boyınsha anıqlanadı. Bul jerde $u_1=u,\quad u_2=v$ belgilewler kiritilgen, $1\le i,j\le 2$. Biz bilemiz, eger Φ betlik jeterli dárejede sıypaq bolsa, $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ vektorlar u,v lardıń differenciyallanıwshı funkciyalar boladı. Tap sonday ω_p^1,ω_p^2 sızıqlı formalar hám u,v argumentlerdiń differenciyallanıwshı funkciyaları boladı.Bunı kórsetiw ushın ω_p^1,ω_p^2 formalardıń qálegen sıypaq X vektor maydan ushın mánisleri u,v argumentlerdiń differenciyallanıwshı funkciyaları ekenligin kórsetiwimiz kerek. Eger

$$X(u,v)=\vec{r}_ua^1(u,v)+\vec{r}_va^2(u,v) \text{ bolsa,}$$

$$\omega_p^1(X)=a^1(u,v), \qquad \omega_p^2(X)=a^2(u,v)$$

Teńlikler orınlı boladı. X sıypaq vektor maydan bolǵanlıǵı ushın $a^1(u,v)$, $a^2(u,v)$ funkciyalar differenciyallanıwshı boladı.

Anıqlama-2. Berilgen R tenzor maydan ushın

$$R_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} = R\left(\vec{r}_{u_{j_1}}, \vec{r}_{u_{j_2}}, \ldots, \vec{r}_{u_{j_r}}, \omega_p^{i_1}, \omega_p^{i_1}, \ldots, \omega_p^{i_s}\right)$$

Funkciyalar differenciyallanıwshı bolsa, ***R diffenernciyallanıwshı tenzor*** dep ataladı.

Bul jerde $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_s j_1, j_2, \ldots, j_r \le 2$.

Anıqlamada kiritilgen funkciyalar R tenzordıń koordinata funkciyaları dep ataladı.

Endi geometriyada áhmiyetli rol oynaytuǵın iymeklik tenzorın kiritemiz.Bunıń ushın aldın vektor maydanlar ushın kommutator túsinigin kiritemiz.

Φ betlikte differenciyallanıwshı X hám Y vektor maydanlar berilgen bolsın. Bul vektor maydanlardı

$$X = x^1(u,v)\vec{r}_u + x^2(u,v)\vec{r}_v$$
$$Y = y^1(u,v)\vec{r}_u + y^2(u,v)\vec{r}_v$$

kóriniste jazıp,

$$[X,Y](u,v) = \left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial x^1}{\partial u_i}\right)\right)\vec{r}_u + \left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i} - y^i\frac{\partial x^2}{\partial u_i}\right)\right)\vec{r}_v \qquad (2)$$

qaǵıyda menen jańa $[X,Y]$ vektor maydandı payda etemiz. Bul vektor maydan X hám Y vektor maydanlardıń *kommutatorı* dep ataladı.

Eger $f:\Phi \to R^1$ differenciyallanıwhı funkciya bolsa, hár bir sıypaq X vektor maydan járdeminde

$$X(f)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial u_i}x^i$$

qaǵıyda menen $X(f)$ funkciya anıqlanadı. Bul $X(f)$ funkciyanıń $p(u,v)$ noqattaǵı f funciyanıń $X(p)$ vektor kórsetkishi boyınsha tuwındısı boladı.

Endi kommutator haqqında tómendegi teoremanı dálilleymiz.

Teorema. Sıypaq X,Y vektor hám differenciyallanıwshı f funkciya ushın tómendegi orınlı boladı:

1) $[X,X]=0$;

2) $[X,Y]=-[Y,X]$;

3) $[\lambda X_1+\mu X_2,Y]=\lambda[X_1,Y]+\mu[X_2,Y], \quad \lambda,\mu\in R^1$;

4) $[fX,Y]=f[X,Y]-Y(f)X, \quad [X,fY]=f[X,Y]+X(f)Y$;

5) $[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$;

6) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$.

Dállil. Teorema dállili kommutatordıń anıqlanıwı hám differenciyallaw qaǵıydalarınnan sózsiz kelip shıǵadı.Sonıń ushın tek 4-pukttı dállilep, qalǵan punktlerdi dállilewdi oqıwshılarǵa tapsıramız.

Sıypaq

$$X=x^1(u,v)\vec{r}_u+x^2(u,v)\vec{r}_v$$

vektor maydan hám differenciyallanıwshı f funciya berilgen bolsa,

$$fX=fx^1(u,v)\vec{r}_u+fx^2(u,v)\vec{r}_v$$

Teńlikti esapqa alıp, $[fX,Y]$ kommutatordı esaplaymız:

$$[fX,Y]=\left\{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(fx^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial fx^1}{\partial u_i}\right)\right)\right\}\vec{r}_u+\left\{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(fx^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial fx^2}{\partial u_i}\right)\right)\right\}\vec{r}_v=$$

$$=f\left\{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial x^1}{\partial u_i}\right)\right)\right\}\vec{r}_u+f\left\{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial x^2}{\partial u_i}\right)\right)\right\}\vec{r}_v-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left(y^i\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\left(x^1\vec{r}_u+x^2\vec{r}_v\right)=f[X,Y]-Y(f)X\ .$$

Tap sonday

$$[X,fY]=f[X,Y]+X(f)Y$$

teńlikti payda etemiz.

Juwmaq

Tenzor – vektor túsinigin ulıwmalastırıp, birneshe mánide qollanılıp kiyatırǵan matematikalıq atama. Bul atama tenzorlar esabı koordinatalarınıń bir sistemadan ekinshi sistemaǵa ótkende arnawlı nızam boyınsha ózgeretuǵın shamalarǵa aytıladı. Tenzor ózgeriwshi shama koordinatalardıń hár bir sistemasında bir neshe san menen anıqlanadı. Sistema ózgeriwi menen bul sanlar da ózgeredi hám fizikalıq hádiyse yamasa obiekttiń ózin ańlatıwshı sanlardan tısqarı sonday san – shamalar payda boladı, olar sol obiekt ushın ayırıqsha rol oynaydı. Tenzorlar esabında tap sol shamalar tásirinen qutılıw jollrı kórsetiledi. Tenzordıń sáykes sanları (xarakteristikalıq teńleme korenleri) koordinatalar sistemasına baylanıslı emes, yaǵniy skalyar shamalar boladı.Bul bolsa, xarakteristikalıq teńlemeniń koeffisientleri koordinatalar sistemasın burıwda ózgermeytuǵınlıǵı yaǵniy invariantlıǵın bildiredi.

Ekinshi rang antisimmetriyalıq tenzor koordinataları bas dioganaldan hám bul dioganaldan tómende jaylasqan koordinataları belgileri menen ózgeshelenedi.Bas dioganalda jaylasqan elementler nolge teń boladı.Sonıń ushın ólshemli keńislikte antisimmetriyalıq tenzordıń baylanıslı bolmaǵan elementleri úshke teń boladı.

Ortogonal sáykes vektorlar tiykarında qurılǵan sistemada tenzor ápiwayı kóriniste, onıń matritsası dioganal maatritsadan ibarat bolıp, dioganal elementleri sáykes sanlardan ibarat boladı. Jáne sol nárseni aytıp ótiw kerek, sáykes vektorlar oń sistemanı payda etiwi kerek. Bul jaǵdayda tenzordıń sáykes sistemasına ótiw protsessin eski sistemanı burıw járdeminde payda etiw múmkin boladı.

Tenzor maydandı radius vektor koordinataları boyınsha bir márte differenciyallawda onıń rangi birge artadı. Tenzor maydandı skalyar argumentboyınsha differenciyallaw tenzor rangin ózgertirmeydi.

Ádebiyatlar:

1. Ózbekiston Respublikasining “Ta’lim tóǵrisidagi qonuni” //Toshkent. 1997-yil. 20-30 bet.
2. Ózbekiston Respublikasining “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” //Toshkent. Ózbekiston 1998-yil.8-17 bet.
3. Mallin R.H “Maydan nazariyasi”, T.Óqituvchi, 1965.
4. Борисенко А.И, Тарасов.И.Е “Векторный анализ и начала тензорного исчисления” М.1963.
5. Кочин Н.Е “Векторный анализ и начала тензорного исчисления” М.1961.
6. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. “Теория поля” М. 1982.
7. U.Dalaboyev. “Vektor va tenzor tahlil”, //Toshkent. “Fan va texnologiya” 2015-yil.97-110 ,115 bet.
8. A.Ya.Narmanov “Differenciyal geometriya” //Toshkent. 2010-yil. 200-249 bet.
9. B.A.Fayzullayev “Nazariy fizikaning matematik usulları” //Toshkent. 2016-yil.9-10 bet.
10. https://www.ziyonet.uz/
11. https://www.ilm.uz/
12. https://www.kitubxona.uz/