ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI
ÁJINIYAZ ATÍNDAǴÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ INSTITUTÍ

«Fizika-Matematika» fakulteti

«Matematika oqıtıw metodikası» kafedrası

5110100- «Matematika oqıtıw metodikası» tálim baǵdarı 4-B topar talabası Kuanıshbayeva Guljamal Baxtyarovnanıń

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

TEMA: RACIONAL SANLAR MAYDANINDA KÓPAǴZALILARDIŃ KORENLERIN IZERTLEW USILLARI

Talaba:	___________	Kuanıshbayeva G
Ilimiy basshı:	__________	doc. Asqarov M
Kafedra baslıǵı:	___________	doc. Prenov B

2021-jıl may ayınıń 21 - sánesindegi kafedra májilisiniń qararı menen qorǵawǵa ruxsat berildi (№ 10 - protokol)

Nókis-2021

Mazmunı

Kirisiw.

Bul pitkeriw qánegelik jumısı racional sanlar maydanında berilgen kóp aǵzalılardı oqıtıwdıń bazı bir usılların úyreniwge baǵıshlanǵan.

Temanıń aktuallıǵı. Kópaǵzalılar túsinigi mektep programmasında ózine sáykes ózgeshe usılda kiritilip orta arnawlı hám joqarı oqıw orınlarında rawajlandırılıp dawam etedi. Biraq ol jaǵdaylarda sanlar maydanında kópaǵzalılardı anıqlaw tusinigi úyrenilmeydi. Maydanlar hám maydan ústinde anıqlanǵan kópaǵzalılardıń qásiyetlerin hám korenlerine baylanıslı izleniwler temanıń aktuallıǵın bildiredi.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń maqseti. Mektepler, orta arnawlı hám joqarı oqıw orınlarında matematikanı oqıtıwdıń tiykarǵı maqseti oqıwshılar keleshekte keleshekte jetik kadrler bolıwdan ibarat. Sol sebepli olardıń maydan úatinde anıqlanǵan kópaǵzalılardıń qásiyetlerine baylanıslı ámeliy hám teoriyalıq bilimlerin asırıwdı maqset etip qoyılǵan.

Pitkeriw qánigelik jumısıniń mazmunı: Pitkeriw qániygelik jumısı tiykarǵı eki baptan, kirisiw hám juwmaqlaw bólimleri, paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Jumıstıń birinshi babında maydanlar ústinde kópaǵzalılar háqqında maǵlıwmatlar keltirilip, birinshi paragrafta berilgen maydan ústinde kópaǵzalılar kolcosın dúziwge, ekinshi paragrafta bolsa haqıyqıy hám kompleks sanlar maydanında kópaǵzalılarǵa baylanıslı teoriyalıq hám ámeliy materiallar keltirilip.sáykes mısallar menen bekkemlengen.

Ekinshi bapta kóp racional sanlar maydanında kópaǵzalılardıń korenlerin izertlew usılları qaralıp, birinshi paragrafte kópaǵzalılardıń kvadratlıq radikallarda sheshiliwi túsinigi úyrenilip, ekinshi paragraf bolsa pútin koefficientli kópaǵzalınıń pútin hám racional korenlerin izertlewge arnalgan bolıp, birqatar teoremalar keltirilgen hám dálilengen. Sonıń menen birge kópaǵzalılardıń racional hám pútin korenlerin tabıwǵa mısallar keltirilgen.

I bap. Maydanlar ústinde kópaǵzalılar.

1-§. Berilgen maydan ústinde kópaǵzalılar kolcosın dúziw.

1. Kolconıń ápiwayı transcendent keńeytpesi. Kópaǵzalılar ústinde ámeller.

Meyli H hám L kommutativ kolcolar bolsın.

Anıqlama-1. Eger tómendegi eki shárt orınlansa, onda L kolco x element boyınsha H kolconıń ápiwayı keńeytpesi delinedi:

1) H kolco L kolconıń úles kolcosı,

2) L daǵı qálegen a element

$$a = a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n \, (a_i \in H, i = \overline{0, n})$$

kórinisinde ańlatıladı.

Aldımızda L kolco x element boyınsha H kolcosınıń ápiwayı keńeytpesi ekenligi $L = H[x]$ kórinisinde ańlatıladı.

Anıqlama-2. Eger $L = H[x]$ ápiwayı keńeytpede H kolconıń qálegen $a_0, a_1, ..., a_n$ elementlerı ushın $a = a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n = 0$ teńlikten $\grave{a}_0 = 0, \grave{a}_1 = 0, ..., \grave{a}_{\ddot{\imath}} = 0$ ekenligi kelip shıqsa, onda $L = H[x]$ kolco H kolconıń ápiwayı transcendent keńeytpesi dep ataladı.

Anıqlama-3. Eger $L = H[x]$ kolco x element boyınsha H kolconıń ápiwayı keńeytpesi bolsa hám onda x element ekinshi anıqlamadaǵı shártti qanaatlandırsa, onda x element H qa qaraǵanda L diń transcendent elementi dep ataladı.

Anıqlama-4. Eger $H[x]$ kolco x element boyınsha H kolconıń ápiwayı transcendent keńeytpesi bolsa, onda $H[x]$ kolco H ústinde x element boyınsha dúzilgen kópaǵzalılar kolcosı dep ataladı. $H[x]$ kolconıń elementleri H ústinde x tiń kópaǵzalıları yamasa H ústinde kópaǵzalılar dep ataladı hám onıń elementleri

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$
$$(a_i \in H, i = \overline{0, n}, \forall n \in N)$$

kórinisinde jazıladı.

Meyli H pútinlik oblastı berilgen bolsın. H ǵa tiyisli bolmaǵan x elementti alıp, mına ańlatpanı dúzemiz:

$$a_0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \left(a_{\nu i} \in H,\ \ \nu = \overline{0,n};\ \ \forall n \in N\right) \tag{1}$$

Anıqlama-1. Eger $a_n \neq 0$ bolsa, onda (1) ańlatpa bir belgisizli n -dárejeli kópaǵzalı dep ataladı, bunda $a_\nu x^\nu, \left(\nu = \overline{0,n}\right)$ ler kópaǵzalınıń aǵzaları, $a_\nu \left(\nu = \overline{0,n}\right)$ ler bolsa kópaǵzalınıń koefficientleri dep ataladı.

Anıqlamaǵa tiykarlanıp $7x^3 - 5\sqrt{x} + 2x^2 - 3$ jáne $\frac{1}{x^5} - 3x^2 + 7x - 5$ ańlatpaları kópaǵzalı bolmaydı.

Kópaǵzalılar geyde belgisiz dárejelerdiń páseyiwi tártibinde

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$$

sıyaqlı da jazıladı. Bir ózgeriwshili kópaǵzalılar ádette $f(x), g(x),\ \varphi(x)$ sıyaqlı belgilenedi.

Aytayıq, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ bazı bir kópaǵzalı bolsın.

Anıqlama-2. $a_n \neq 0$ bolǵanda a_nx^n aǵza $f(x)$ kópaǵzalıniń bas aǵzası, a_0 bolsa erkin aǵza dep ataladı.

Endi eki kópaǵzalınıń formal-algebralıq mánidegi teńlik túsinigin kiritemiz.

Eki kópaǵzalınıń nolli (koefficientleri nolge teń) aǵzalardan basqa bárshe birdey nomerli aǵzaları bir-birine teń bolǵanda hám tek sonday jaǵdayda ǵana óz ara teń dep ataladı.

Máselen, $3 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + x^4 + 2x^5$, $3 + x^4 2x^5$ kópaǵzalılar óz ara teń.

Kópaǵzalılar teńligi simbolik sıyaqlı tómendegishe jazıladı.

$$\left(\forall a_\nu, b_\nu \in \mathrm{H}\right) a_\nu = b_\nu \Leftrightarrow \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu\right)$$

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n = \sum_{\kappa=0}^{n} a_k x^k\ ,$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x^1 + ... + b_sx^s = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

kópaǵzalınıń qosındısı dep

$$f(x) + \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{t} c_\nu x^\nu$$

kópaǵzalısın túsinemiz, bul jerde $t = \max(n; s)$, $c_\nu = a_\nu + b_\nu$ bolıp, eger $n > s$ bolsa $b_{s+1} = b_{s+2} = ... = b_n = 0$. Eger $s > n$ bolsa, $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = a_s = 0$ dep alınadı.

Jáne sonı aytıwımız kerek, $a_\nu b_\nu \in H \Rightarrow a_\nu + b_\nu \in H$ hám qosındı kópaǵzalınıń dárejesi qosılıwı kópaǵzalılardıń dárejesinen úlken emes. Eger $a_n \neq -b_n$ $(n \geq s)$ bolsa, qosındınıń dárejesi qosılıwshı kópaǵzalılardıń dárejesinen úlken emes, sonday-aq, hátteki kishi bolıwı da múmkin, máselen, $a_n = -b_n$, $(n = s)$ bolǵan jaǵdayı.

Kópaǵzalılar kópliginde alıw ámeli orınlı. Bul kóplikte nol element dep barlıq koefficientleri nollerden ibarat kópaǵzalı alınadı. $f(x)$ kópaǵzalı ushın

$$-f(x) = -a_0 - a_1 x - .... - a_n x^n$$

kópaǵzalı qarama-qarsı kópaǵzalı delinedi.

Endi $f(x)$ hám $\varphi(x)$ kópaǵzalılarınıń kóbeymesi túsinigin kiritemiz.

$f(x)$ hám $\varphi(x)$ kópaǵzalılar kóbeymesi dep koefficientleri

$$d_\nu = \sum_{k+i=\nu} a_k b_i \qquad \left(\nu = \overline{0; n+s}\right)$$

teńligi menen anıqlanıwshı kópaǵzalıǵa aytıladı. Bul jerde

$$d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad d_2 = a_0 b_2 +$$
$$+ a_1 b_1 + a_2 b_0, ..., d_s = a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + ... + a_s b_0, ...$$

kópaǵzalılardıń koefficientleri H pútinlik oblastına tiyisli bolǵanı ushın $a_n \neq 0$ hám $b_s \neq 0$ bolǵanda $a_n b_s = d_{n+s} \neq 0$ bolıp, kópaǵzalılar kóbeymesiniń dárejesi olar dárejeleriniń $n + s$ qosındısına teń boladı.

Teorema. Kópaǵzalılar kópligi kolco boladı.

Dálilleniw. Eki kópaǵzalınıń qosındısı hám kóbeymesi jáne kópaǵzalı ekenligin biz joqarıda kórip óttik. Endi kópaǵzalılar kópligi ushın kolconıń qalǵan shártleri orınlanıwın kórsetemiz, haqıyqatında da

1) eger a_v hám b_v lar $f(x)$ hám $\varphi(x)$ kópaǵzalılardıń koefficientleri bolsa, onda $(a_v, b_v \in H)$ $a_v + b_v = b_v + a_v$ bolǵanı ushın

$$f(x)+\varphi(x)=\sum_{v=0}^{s}(\quad a_v+b_v)x^v=\sum_{v=0}^{t}(b_v+a_v)\,x^v=$$

$$=\sum_{v=0}^{s}b_v x^v+\sum_{v=0}^{n}a_v x^v=\varphi(x)+f(x)$$

boladı, yaǵnıy kópaǵzalılardı qosıw kommutativ.

2) $f(x)\varphi(x)=\varphi(x)f(x)$ (kóbeytiw ámeli kommutativ). Kópaǵzalılardıń koefficientleri H pútinlik oblastına tiyisli bolǵanlıǵı hámde $\sum\limits_{k+l=v}a_k b_l=\sum\limits_{l+k=v}b_l a_k$ bolǵanı ushın $f(x)\varphi(x)=\varphi(x)f(x)$ teńligi orınlı.

3) Kópaǵzalılardı kóbeytiw associativ, yaǵnıy

$$f(x)(\varphi(x)\cdot g(x))=(f(x)\cdot\varphi(x))\cdot g(x) \tag{3}$$

Bul teńlikti dálillew ushın jáne bir $g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_ix^i$ $(c_i\neq 0)$ kóp-aǵzalısın alamız. $f(x)$, $\varphi(x)$ hám $g(x)$ sáykes túrde n, s hám t dárejeli bolǵanlıǵınan $(f(x)\cdot\varphi(x))\cdot g(x)$ kópaǵzalıdaǵı $x^i=(i=0,1,2,\ldots n+s+t)$ dıń koefficienti

$$\sum_{l+m=i}\left(\sum_{k+l=j}a_k b_l\right)\cdot c_m=\sum_{k+l+m=i}a_k b_l c_m$$

qosındı arqalı anıqlanadı. $f(x)\cdot(\varphi(x)\cdot g(x))$ kópaǵzalıdaǵı $x^i(i=0,1,2,3,\ldots., n+s+t)$ nıń koefficienti

$$\sum_{k+j}a_k\left(\sum_{l+m=j}b_l c_m\right)=\sum_{k+l+m=i}a_k b_l c_m$$

Qosındı arqalı anıqlanadı. Olardıń teńligine tiykarlanıp (2) teńlik te orınlanadı.

4) Sonday-aq, $f(x)(\varphi(x)+g(x))=f(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot g(x)$ boladı, yaǵnıy kóp-aǵzalılardıń kóbeytiw ámeline qarata distributiv. Bul tastıyıqlawdıń tuwrılıǵı

$$\sum_{v+k=\mu}(b_v+c_v)a_k=\sum_{k+v=\mu}a_kb_v+\sum_{k+v=\mu}a_kc_v$$

teńlik orınlı ekenliginen kelip shıǵadı. Sebebi, bul teńliktiń oń tárepi $f(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot g(x)$ kópaǵzalınıń x^i aldındaǵı koefficientinen dúzilgen.

Demek, koefficientleri H pútinlik oblastına tiyisli bolǵan bir belgisizli kópaǵzalılar kópligi kolco boladı eken. Bul kolco ádette $H[x]$ kibi belgilenedi.

1. Mısal. $g(x)\in Z[x], f(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+4$ ushın $f(x)=(g(x)^2$ shártin qanaatlandırıwshı barlıq a hám b pútin sanların tabıń.

Sheshiliwi: $f(x)$ kópaǵzalınıń dárejesi 4-ke teń. Demek, $g(x)$ tiń dárejesi 2 ge teń. $g(x)=mx^2+nx+p, m\neq 0$ bolsın. Bunnan

$$(g(x))^2=(mx^2+nx+p)^2=m^2x^4+2mn(x^3+2mp+n^2)x^2+2np+p^2$$

$f(x)=(g(x))^2$ dan tómendegi sistemanı payda etemiz.

$$\begin{cases} m^2=1 \\ 2mn=a \\ 2mp+n^2=b \\ 2np=-8 \\ p^2=4 \end{cases}$$

sistemadan $m=\pm1$ hám $p=\pm2$ lerdi payda etsek, ol tómendegi sistemalarǵa ajıraladı:

$$1.\begin{cases} m=1 \\ p=2 \\ n=-2 \\ a=-4 \\ b=8 \end{cases}\quad 2.\begin{cases} m=1 \\ p=-2 \\ n=2 \\ a=4 \\ b=0 \end{cases}\quad 3.\begin{cases} m=1 \\ p=2 \\ n=-2 \\ a=4 \\ b=0 \end{cases}\quad 4.\begin{cases} m=-1 \\ p=-2 \\ n=2 \\ a=-4 \\ b=8 \end{cases}$$

Demek, eger $a=-4$ hám $b=8$ bolsa, $g_1(x)=-x^2+2x-2$ hám $g_2(x)=x^2-2x+2$. Eger $a=4$ hám $b=0$ bolsa, $g_1(x)=x^2+2x-2$ hám $g_2(x)=-x^2-2x+2$ boladı.

<u>2-mısal:</u> $R[x]$ da $f(x)=(x-2)^{100}+(x-1)^{50}+1$ kópaǵzalını $g(x)=x^2-3x+2$ kópaǵzalıǵa bólgendegi qaldıqtı tabıń.

Sheshiliwi: Qaldıqlı bóliw haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp $f(x)=g(x)h(x)+r(x)$ hám $\deg r(x)<2,$ yaki $r(x)=ax+b.$ Bunnan

$$(x-2)^{100}+(x-1)^{50}+1=(x^2-3x-2)h(x)+ax+b$$

$g(1)=g(2)=0$ ekenliginen paydalanıp, $x=1$ hám $x=2$ mánislerin teńlikke qoyamız hám tómendegi sistemanı payda etemiz.

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$$

Demek, $r(x)=2.$

2. Kóp aǵzalılar kolcosında qaldiqli bóliw.

Meyli, $\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$ kópaǵzalı berilgen bolsın. Dárejesi n-ge teń hám bas koefficienti $b_n\neq 0$ bolǵan hár qanday $\varphi(x)$ kópaǵzalınıń bas koefficientin bárqulla 1 ge keltirip alıw múmkin. Bunıń ushın $\frac{\varphi(x)}{b_n}g(x)$ kópaǵzalısın qaraw jeterli.

$g(x)$ kópaǵzalıdan basqa bas koefficienti qálegen $m\geq n$ dárejeli $f(x)=a_0+a_1x^1+...+a_mx^m$ kópaǵzalı berilgen bolsın.

Eger $f(x)$ kópaǵzalı n-dárejeli kópaǵzalı bolsa, onda olar $darf(x)=n$ kibi jazıladı.

Teorema. Hár qanday $f(x)$ hám $g(x)\neq 0$ kópaǵzalılar ushın sonday jalǵız $h(x)$ hám $r(x)$ kópaǵzalıları bar bolıp, olar ushın $darr(x)<darg(x)$ hám $darh(x)<darg(x)$ bolıp, usı teńlik orınlanadı:

$$f(x)=g(x)h(x)+r(x) \qquad (1)$$

Dálilleniwi: Eger $f(x)$ kópaǵzalıdan $a_mx^{m-n}g(x)$ kópaǵzalısın ayırsaq, $f(x)-a_mx^{m-n}g(x)=r_1(x)$ kópaǵzalıda a_mx^m aǵza bolmaydı. Bul jerde tómendegi-she eki jaǵday bolıwı múmkin.

a) $r_1(x)$ niń dárejesi $g(x)$ niń dárejesinen kishi.

b) $r_1(x)$ niń dárejesi $g(x)$ dárejesinen úlken yaki oǵan teń.

Eger a) Halı júz berse, $h(x)=a_m x^{m-n}$; $r(x)=r_1(x)$ bolıp teorema dálillengen boladı.

Biz b) halı ústinde toqtap ótemiz. Eger $darr_1(x)\geq darg(x)$ bolıp, $r_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_kx^k$ kórinisine iye bolsın.

Endi $g(x)$ kópaǵzalını c_kx^{k-n} ǵa kóbeytip nátiyjesin $r_1(x)$ dan ayıramız. Onda $r_1(x)-c_kx^{k-n}g(x)=r_2(x)$ bolıp, $r_2(x)$ kópaǵzalıda c_kx^k aǵza bolmaydı.

$r_2(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+...+d_lx^l$ bólsin. Bul jerde joqarıdaǵı eki haldıń birewi júz beriwi múmkin.

1) eger $l\geq n$ bolsa, tómendegi ayırmanı dúzemiz:

$$r_2(x)-d_lx^{l-n}\cdot g(x)=r_3'(x),$$

processti dawam ettirip, bazı bir v qádemnen soń $darr_v(x)<darg(x)$ qa erisemiz. Basqasha aytqanda, $r_{v-1}(x)-t_\mu x^{\mu-n}g(x)=r_v(x)$ teńlikte $darr_v(x)<darg(x)$ boladı.

Endi usı teńliklerdi aǵzama-aǵza qosamız:

$$\begin{aligned}
&f(x)-a_mx^{m-n}g(x)=r_1(x),\\
&r_1(x)-c_kx^{k-n}\cdot g(x)=r_2(x),\\
&r_2(x)-d_lx^{l-n}\cdot g(x)=r_3(x),\\
&..........\ ....\ ....\ ....\\
&r_{v-1}(x)-t_\mu x^{\mu-n}\cdot g(x)=r_v(x).
\end{aligned}$$

Onda $f(x)-a_м x^{m-n}+c_kx^{k-n}+d_lx^{l-n}+....+t_\mu x^{\varpi-n})\times g(x)=r_v(x)$ payda boladı. Bul jerde $a_mx^{m-n}+c_kx^{k-n}+...+t_\mu x^{\mu-n}=h(x)$ hám $r_v(x)=r(x)$ desek, $f(x)=g(x)\cdot h(x)+r(x)$ teńlik payda boladı. $f(x)=g(x)\cdot h(x)+r(x)$ teńliktegi $f(x)$ bóliniwshi, $g(x)$ bóliwshi, $h(x)$ shala tiyindi, $r(x)$ qaldıq kópaǵzalılar dep ataladı.

Endi (1) teńliktiń jalǵız ekenligin dálilleymiz.

Meyli, (1) shártti qanaatlandırıwshı jáne bir jup $h'(x)$ hám $r'(x)$ kópaǵzalı bar, yaǵnıy

$$f(x)=g(x)h'(x)+r'(x) \tag{2}$$

teńlik orınlı bolsın. (1) hám (2) teńliklerin aǵzama-aǵza ayırıp

$$0=g(x)(h(x)-h'(x))+(r(x)-r'(x))$$

yaki

$$g(x)\cdot(h(x)-h'(x))=r'(x)-r(x) \tag{3}$$

payda etemiz. Bul jerde $r(x)$ hám $r'(x)$ tıń anıqlanıwına tiykarlanıp $\partial ap(r'(x)-r(x))<\partial apg(x)$ boladı. Eger shep tárepinde $h(x)-h'(x)\neq 0$ bolsa, $r'(x)-r(x)$ tiń dárejesi (3) ge tiykarlanıp $g(x)$ tiń dárejesinen kishi emes. Bul $r(x)$ hám $r'(x)$ tiń anıqlanıwına qarama-qarsı. Sonıń ushın $h(x)=h'(x)$ boladı. Bunnan (e) den $r(x)=r'(x)$ kelip shıǵadı.

Bul teoremanı bazıda $f(x)$ kópaǵzalını $g(x)$ kópaǵzalıǵa qaldıqlı bóliw teoreması dep te aytıladı.

Meyli, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ kópaǵzalınıń koefficientleri bazı bir P maydanǵa tiyisli bolsın. Bunday jaǵdayda $f(x)$ kópaǵzalı P maydan ústinde berilgen kópaǵzalı dep ataladı.

Máselen, $f(x)=3x^3-7x^2-\sqrt{5}x-3,\quad g(x)=ix^7-3x^2+ix-7$ kópaǵzalılarǵa sáykes túrde haqıyqıy sanlar maydanı ústinde hám kompleks sanlar maydanı ústinde berilgen kópaǵzalılar boladı. Eger kópaǵzalılardıń qaldıqlı bóliniwi degen temadaǵı (1) teńlikte $r(x)=0$ bolsa, onda

$$f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$$

teńlik payda boladı. Bul $f(x)$ diń $\varphi(x)$ qa qaldıqsız bóliniwin kórsetedi. Biz onı qısqasha $f(x)/\varphi(x)$ sıyaqlı belgileymiz. Qaralıp atırǵan kópaǵzalılardı bir P

maydanı ústinde berilgen dep alsaq, kópaǵzalılardıń bóliniwi tómendegi qásiyetlerge iye.

1^0.$((f(x)/\varphi(x)) \wedge (\varphi(x)/\psi(x))) \Rightarrow (f(x)/\psi(x))$.

Dálilleniwi: $f(x)/\varphi(x)$ ekenliginen

$$f(x) = \varphi(x) \cdot g_1(x) \qquad (1)$$

$\varphi(x)/\psi(x)$ ekenliginen

$$\varphi(x) = \psi(x) \cdot g(x) \qquad (2)$$

(1) hám (2) den $f(x) - \psi(x)g_9(x)g(x) = \psi(x)h(x)$ bunda $g_1(x)g(x) = h(x)$ dep alınadı.

$$f(x) = \psi(x)h(x)$$

teńlik $f(x)$ tıń $\psi(x)$ qa bóliniwin kórsetedi.

2^0. $f_i(x)/\varphi(x) \qquad (i = \overline{1,m}) \Rightarrow (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_m(x))/\varphi(x)$.

Dálilleniwi:

$$(f_1(x) = \varphi(x)g_1(x)) \wedge (f_2(x) = \varphi(x)g_2(x) \wedge ... \wedge (f_m(x) = \varphi(x)g_m(x))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_m(x)) = \varphi(x)(g_1(x) \pm g_2(x) \pm ...$$
$$... \pm g_m(x)) \Rightarrow (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_m(x))/\varphi(x).$$

3^0. $f_i(x)$ $i = \overline{1,m}$ kópaǵzalılardan keminde birewi $\varphi(x)$ qa bólinse, onda olardıń kóbeymesi de $\varphi(x)$ qa bólinedi.

Dálilleniwi: Meyli, $f_1(x)/\varphi(x)$ bolsın. Onda $f_1(x) = \varphi(x) \cdot g_1(x)$ bolıp, bul teńlikten $f_1(x)f_2(x)....f_m(x) = \varphi(x) \cdot g_1(x) \cdot f_2(x)...f_m(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$, bunnan 3-qásiyetiniń dálili kórinip turıptı.

4^0. Eger $f_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ kópaǵzalılardıń hár biri $\varphi(x)$ qa bólinip, $g_i(x)$ lar qálegen kópaǵzalılar bolsa, onda

$$f_1(x)g_1(x) \pm f_2(x)g_2(x) \pm ... \pm f_m(x)g_m(x)/\varphi(x).$$

Dálilleniwi: 3-qásiyetke tiykarlanıp hár bir $f_i(x)g_i(x)$ $i=\overline{1,m}$ aǵza $\varphi(x)$ qa bólinedi. 2-qásiyetke tiykarlanıp bolsa, olardıń algebralıq qosındısı da $\varphi(x)$ qa bólinedi.

5^0. Qálegen $f(x)$ kópaǵzalı hár qanday nolinshi dárejeli kópaǵzalıǵa bólinedi.

Eger $\varphi(x)=a\neq 0$ desek, $f(x)=a\cdot g(x)$ teńlik qásiyetti dálilleydi, bunda $(0\neq a\in P)$.

6^0. $f(x)/\varphi(x)\Rightarrow f(x)/a\varphi(x)$ $(0\neq a\in P)$.

Dálilleniwi: $f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)\Rightarrow f(x)=a\cdot\varphi(x)\cdot a^{-1}g(x)$. Dara jaǵdayda $f(x)\neq 0$ óz-ózine bólingenligi ushın $af(x)$ qa bólinedi.

7^0. $f(x)\neq 0$ hám $\varphi(x)\neq 0$ kópaǵzalılar bir-birine bólinse, olar biri-birinen ózgermes $a\neq 0$ kóbeytiwshi menen parıqlanadı.

Dálilleniwi: Shárt boyınsha $f(x)=\varphi(x)\cdot g_1(x)$ hám $\varphi(x)=f(x)\cdot g_2(x)$ berilgen.

Bul teńliklerden $f(x)=f(x)\cdot g_1(x)g_2(x)$ yaki $1=g_1(x)g_2(x)$ teńlik payda boladı. Sońǵı teńlik $g_1(x)g_2(x)$ kóbeymeniń nolinshi dárejeli kópaǵzalı eken-ligin kórsetedi. Bul jaǵday $g_1(x)$ hám $g_2(x)$ tıń hár qaysısı nolinshi dárejeli kópaǵzalı bolǵanda ǵana júz beriwi múmkin. Demek, kópaǵzalılardıń óz ara teńlik shártinen $g_2(x)=a\neq 0$ hám $\varphi(x)=af(x)$ boladı.

3. Kóp aǵzalınıń koreni. Bezu teoreması. Gorner sxeması.

H birlik elementke iye bolǵan pútinlik oblastı berilgen bolsın.

Anıqlama-1. Eger H pútinlik oblastınıń bazı bir a elementi ushın $f(\alpha)=0$ teńligi orınlansa, onda a element $f(x)$ kópaǵzalınıń koreni dep ataladı.

Q maydan ústinde bir ózgeriwshili birinshi dárejeli $f(x)=ax+b$ kópaǵzalı $a\neq 0$ bolǵanda racional sanlar kópliginde bárqulla korenge iye, sebebi $f\left(-\frac{b}{a}\right)=-b+b=0$ yaǵnıy $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ boladı.

Dárejesi $n\geq 1$ bolǵan hár qanday korenlerge iye bolǵan keńeytpe maydan bárqulla bar boladı. Biz bunı keyinirek dálilleymiz.

Nolinshi dárejeli $f(x)=a\neq 0$ kópaǵzalınıń koreni joq, sebebi x qa qanday mánisti bermeyik, bári bir $f(\alpha)=a\neq 0$ boladı. Biz nol kópaǵzanı itibirǵa almaymız, bunday kópaǵzalı x -tıń hár bir mánisinde nolge teń.

Teorema-1. (Bezu teoreması). $f(x)$ kópaǵzalını $x-a$ eki aǵzalıǵa bóliwden kelip shıqqan qaldıq $f(\alpha)$ ǵa teń.

Dálilleniwi: Bóliwshi $x-a$ nıń dárejesi 1-teń bolǵanı ushın qaldıq $r(x)$ yaki nolinshi dárejeli kópaǵzalı, yaki nol bolıwı kerek, yaǵnıy

$$f(x)=(x-\alpha)h(x)+r \tag{1}$$

bolıp, bul teńlikte $x=\alpha$ desek, $f(\alpha)=r$ di payda etemiz.

Teorema-2. $x-a$ element $f(x)$ kópaǵzalınıń koreni bolıwı ushın $f(x)$ tiń $x-a$ ekiaǵzalıǵa bóliniwi zárúrli hám jeterli.

Dálilleniwi: *1.* Zárúrli shárti. $x=\alpha$ nı $f(x)$ tıń koreni deyik. Bul jaǵdayda $f(\alpha)=0$ boladı. 1-teoremaǵa tiykarlanıp $f(x)$ tı $x-\alpha$ ǵa bóliwden kelip shıqqan qaldıq $f(\alpha)$ ǵa teń. Lekin $f(\alpha)=0$ bolǵanı ushın $r=0$ boladı. Demek, $f(x)$ kópaǵzalı $x-a$ ǵa qaldıqsız bólinedi.

2. Jeterli shárti. $f(x)$ kópaǵzalı $x-\alpha$ ǵa qaldıqsız bólinsin ~ $f(x)=(x-\alpha)h(x)$, yaǵnıy qaldıq $r=0$ bolǵanı ushın $f(\alpha)=0$. Demek, $x=\alpha$ mánisi $f(x)$ kópaǵzalınıń koreni boladı eken.

Teorema-3. Eger $\alpha_1,\ \alpha_2,...,\alpha_k$ lar $f(x)$ kópaǵzalınıń hár túrli korenleri bolsa, onda $f(x)$ kópaǵzalı $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)....(x-\alpha_k)$ kóbeymege bólinedi.

Dálilleniwi: Teoremanıń dálilleniwin matematikalıq indukciya principi tiykarında alıp baramız, $k=1$ de teoremanıń durıslıǵın biz joqarıda kórip óttik.

Meyli, teorema $n=k-1$ jaǵdayı ushın durıs, yaǵnıy

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_{k-1})g(x) \tag{2}$$

bolsın.

Bul teńlikke $x=\alpha_k$ nı qoyamız. Onda α_k koren bolǵanı sebepli $f(\alpha_k)=0$. Demek, $x=\alpha_k$ da

$$0=(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)....(\alpha_k-\alpha_{k-1})g(\alpha_k)$$

payda boladı. H pútinlik oblastı noldiń bóliwshilerine iye bolmaǵanlıǵınan hám $\alpha_1\neq\alpha_2\neq....\neq\alpha_k$ shártine tiykarlanıp $g(a_k)=0$, yaǵnıy a_k san $g(x)$ kóp-aǵzalınıń koreni eken. Onda 1-teoremaǵa tiykarlanıp

$$g(x)=(x-\alpha_k)h(x) \tag{3}$$

boladı. Endi (1) ni (2) ge qoyamız. Onda

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)....(x-\alpha_k)h(x)$$

bolıp, bul $f(x)$ tıń $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)....(x-\alpha_k)$ ǵa bóliniwin bildiredi.

Esletpe: Bazı bir jaǵdaylarda bir neshe yaki barlıq korenler ústpe-úst túsip qalıwı múmkin. Onda (2) formula tómendegi kóriniste boladı.

$$f(x)=(x-\alpha)^1(x-\beta)^m h(x) \quad (l+m=k)$$

Bunday jaǵdaydaǵı α hám β korenlerin sáykes túrde l hám m eseli korenler dep ataymız.

Nátiyje: Nolden m ózgeshe m dárejeli kópaǵzalı $(m\geq 1)$ H pútinlik oblastında m nen artıq korenge iye emes.

Bul pikir noldiń bóliwshilerine iye bolǵan kolcosında orınlı emes. Máselen, 16 modul boyınsha dúzilgen shegirmeler klasları kolcosında $f(x)=x^2$ kópaǵzalı 0, r, i, 1 2 korenlerge iye.

Teorema. P sanlar maydanı ústinde berilgen kópaǵzalılar bas ideallar kolcosı boladı.

Dálilleniwi: P sanlar maydanı bolǵanı ushın $P[x]$ kolco noldiń bóliwshile-rine iye bolmaǵan kommutativ kolco, yaǵnıy pútinlik oblastı boladı. Bul pútin-lik oblastı óz ishine birlik $f(x)=a^0x^0=1$ elementin aladı. Endi $P[x]$ kolcodaǵı hár bir idealdıń bas ideal ekenligin kórseteyik.

Kópaǵzalılar kolcosınıń idealın I háribi menen belgileymiz hám onı $I\neq 0$ dep alamız. Endi I idealdaǵı eń kishi dárejeli kópaǵzalını $d(x)$ dep belgileymiz. I daǵı qálegen $f(x)$ tı $d(x)$ ǵa bólemiz.

$$f(x)\in I, d(x)\in I \Rightarrow f(x)-d(x)g(x)=r(x)\in I$$

(bul jerde $dapd(x)>dapr(x)$). $r(x)\in I$ tiykarlanıp, $r(x)=0$ teńligi orınlı. Kerisinshe, $d(x)$ kópaǵzalı I daǵı eń kishi dárejeli kópaǵzalı bolmay, bunday kópaǵzalı $r(x)$ bolar edi. Demek, I idealdaǵı qálegen $f(x)$ kópaǵzalı $d(x)$ qa qaldıqsız bólingeni ushın I degi bas ideal eken, yaǵnıy $I=(d(x))$ bolıp, kolco bas ideallar kolcosı boladı.

Eger $x=\alpha$ san $f(x)$ kópaǵzalınıń korenı bolsa, Bezu teoremasına kóre tiykarınan $f(x)$ kópaǵzalınıń $x=\alpha$ daǵı mánisi $r=f(\alpha)=0$ bolar edi. Qaldıqlı bóliw teoremasına kóre $f(x)=(x-\alpha)\varphi(x)+r$ teńliktegi $\varphi(x)$ diń koefficientlerin hám r qaldıq aǵzanı esaplawdıń bir usılı menen tanısayıq. Bunıń ushın $\varphi(x)$ hám r di belgisiz koefficientler járdeminde tómendegishe jazıp alamız.

$$\begin{gathered} a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x_1+a_h= \\ =(x-\alpha)(A_0x^{n-1}+A_1x^{n-2}+\ldots+A_{n-2}x+A_{n-1})+r. \end{gathered}$$

Teńliklerdiń oń tárepindegi qawıslardı ashıp, eki kópaǵzalınıń teńligi táripine tiykarlanıp, tómendegilerge iye bolamız.

$$a_0 = A_0, a_1 = A_1 - \alpha A_0, a_2 = A_2 - \alpha A_1, \ldots, a_k =$$
$$= A_k - \alpha A_{k-1}, \ldots, a_{n-1} = A_{n-1} - \alpha A_{n-2}, \quad a_n = r - \alpha A_{n-1}.$$

Bul teńliklerden $A_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ lardı hám r di tómendegishe anıqlaymız.

$$A_0 = a_0, A_1 = a_1 + \alpha A_0, A_2 = a_2 + \alpha A_1, \ldots, A_k =$$
$$= a_k + \alpha A_{k-1}, \ldots, A_{n-1} = a_{n-1} + \alpha A_{n-2}, r = a_n + \alpha A_{n-1}.$$

Bul esaplawlardı tómendegishe Gorner sxeması dep atalıwshı sxema járdeminde de orınlaw múmkin:

	a_0	a_1	a_2	....	a_k	....	a_{n-1}	a_n
α	A_0	A_1	A_2	....	A_k	....	A_{n-1}	r

Hár bir A_k koefficientin tabıw ushın sxemada onıń joqarısındaǵı a_k ǵa A_k dan aldın turǵan A_{k-1} di α ǵa kóbeytip qosıw kerek. Eger $\varphi(x)$ kópaǵzalını jáne bazı bir $x-\beta$ ekiaǵzalıǵa bóliw talap etilse, bul sxemanı tómenge qarap dawam ettiriw múmkin. Ulıwma alǵanda, kópaǵzalınıń eseli korenlerin tabıw-da da usı usıldan paydalanıladı.

1-mısal: $Q[x]$ kolcoda $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ kópaǵzalı tuwındılarınıń $x_0 = 1$ tochkadaǵı tuwındıların tabıń hám berilgen kópagzalılardı $x-1$ ekiaǵzalı dárejelerine jayıń.

Sheshiliwi: Gorner sxeması jádeminde tabamız:

	1	-2	3	-5	1

1	1	-1	2	-3	-2
1	1	0	2	-1	
1	1	1	3		
1	1	2			
1	1				
1					

Tablicadan $f(1)=-2;\ f'(1)=-1;\ \frac{f''(x)}{2!}=3;\ \frac{f'''(x)}{3!}=2;\ \frac{f^{IV}(x)}{4!}=1$ lerdi anıqlaymız.

Bunnan, $f(x)=(x-1)^4+2(x-1)^3+3(x-1)^2-(x-1)-2$ hám $f'(1)=-1;\ f''(x)=6;\ f'''(1)=12$ lerdi tabamız.

2-§. Haqıyqıy hám kompleks sanlar maydanında kópaǵzalılar.

1.Kompleks sanlar maydanınıń algebralık tuyıqlıǵı. Algebranıń tiykarǵı teoreması.

Teorema (algebranıń tiykarǵı teoreması). Dárejesi 1 den kishi bolmaǵan kompleks koefficientli hár qanday kópaǵzalı keminde bir kompleks korenge iye.

Nátiyje-1. Kompleks sanlar maydanındaǵı n dárejeli kópaǵzalınıń n koreni bar.

Dálilleniwi: 4-teoremaǵa tiykarlanıp $f(x)$ diń tek bir kompleks koreni bar, Bezu teoremasına kóre $f(x)$ kópaǵzalı $x-\alpha_1$ ge bólinedi, yaǵnıy

$$f(x)=(x-\alpha_1)f(x_1) \qquad (1)$$

teńlik orınlı.

$(n-1)$ dárejeli $f_1(x)$ kópaǵzalıǵa qarata joqarı pikirdi qollap,

$$f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x) \qquad (2)$$

teńlik payda etemiz, bunda $f_2(x)$ kópaǵzalı (n-2)-dárejeli h.t.b. Bul processti dawam ettirip, aqırı, birinshi dárejeli $f_{n-1}(x)$ kópaǵzalıǵa kelemiz hám

$$f_{n-1}(x)=(x-\alpha_n)r_0 \tag{3}$$

teńlikke iye bolamiz, bunda r_0 ózgermeytuǵın san.

Payda bolǵan (10),(11),(12) h.t. teńliklerden

$$f(x)=r_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) \tag{4}$$

jayılmaǵa kelemiz. Bul (13) ańlatpaǵa qarap $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ sanlar $f(x)$ kópaǵza-lınıń korenleri ekenin kóremiz, sebebi $\alpha_i(i=\overline{1,n})$ di x diń ornına qoysaq, $f(\alpha_i)=0$ kelip shıǵadı.

(13) jayılmadaǵı $x-\alpha_i$ ekiaǵzalılar birinshi dárejeli hám olar keltirilmey-tuǵın kópaǵzalılar bolǵanı ushın $f(x)$ di keltirilmeytuǵin kópaǵzalılar kóbey-mesine jayıw haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp bul $x-\alpha_i$ ekiaǵzalılar ózgermes kóbeytiwshiler anıqlıǵında jalǵız.

Bul jaǵday $f(x)$ kópaǵzalınıń $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ den basqa korenleri joq ekenligin bildiredi.

(13) jayılmadaǵı $x-\alpha_i$ ekiaǵzalılardı bir-birine hám r_0 ge kóbeytip shıqsaq, payda bolǵan kópaǵzalınıń bas koefficienti r_0 ge teńligin kóremiz. Lekin bul kópaǵzalı $f(x)$ diń ózindey bolǵanı ushın $r_0=a_0$ degen nátiyjege kelemiz, bunda a_0 arqalı $f(x)$ diń bas koefficientin belgiledik. Solay etip, (13) teńlik tómendegishe jazıladı:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) \tag{5}$$

Bul jayılma $f(x)$ kópaǵzalınıń sızıqlı (birinshi dárejeli) kóbeytiwshilerge jayılması delinedi.

Ulıwma alǵanda, korenleriniń bazıları óz ara teń bolıwı da múmkin. Sol sebepli, hár qıyılı korenlerdi $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ menen belgilep (14) teńlikti mına kóriniste jaza alamız:

$$f\left(x(x-\alpha_1)^{m_1}\right)=a_0(x-\alpha_2)^{m_2}...(x-\alpha_k)^{m_k},$$

bunda $m_1+m_2+...+m_k=n,\ m_1 m_2,...,m_k$ pútin oń sanlarǵa sáykes ráwishte korenleriniń eselik belgileri dep ataladı. Basqasha aytqanda a_1 di m_1 eseli koren dep ataymız. Demek, n -dárejeli $f(x)$ kópaǵzalınıń korenleri bir eseli, eki eseli h.t.b. k eseli bolıwı múmkin. Solay etip, kompleks sanlar maydanı ústindegi dárejesi birden joqarı hár bir $f(x)$ kópaǵzalı bul maydan ústinde keltiriletuǵınlar esaplanadı. Haqıyqatında da, α_i bunday kópaǵzalınıń qálegen koreni bolsa. $f(x)$ di $x-\alpha_i$ ge bólip, tómendegini payda etemiz:

$$f(x)=(x-\alpha_i)\varphi(x)$$

Nátiyje-2. n -dárejeli $f(x)$ kópaǵzalı x diń n nen artıq hár qıylı mánislerinde nolge teń bolsa. $f(x)$ nol kópaǵzalı boladı.

Dálilleniwi: n -dárejeli

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^{n-1}x+a_n$$

kópaǵzalı $f(x)=a_n$ diń tómendegi $m(m>n)$ hár qıyılı

$$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\ \alpha^{n+1},...,\alpha_m \tag{6}$$

mánislerinde nolge teń dep oylayıq. Onda bul sanlardan, máselen, dáslepki n i $f(x)$ diń korenleri bolıp, (13) teńlik orınlı:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$$

Berilgen boyınsha, $f(a_i)=0$, yaǵnıy

$$a_0(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)...(\alpha_i-\alpha_n)=0$$

boladı. Bunda α_i qalǵan $\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},...,\alpha_m$ sanlardan qálegenin ańlatadı.

Endi $\alpha_i-\alpha_k\neq 0\ \ (k=1,2,...,n)$ bolǵanı ushın $a_0=0$ degen nátiyjege kelemiz. Demek, kópaǵzalı tómendegi kórinisin aladı:

$$f(x)=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n.$$

Bul kópaǵzalı da n nen kishi dárejeli bolıp, x diń mánislerinde nolge aylanadı hám sol sebepli, joqarıdaǵı pikirdi tákirarlap, $a_1 = 0$ ekenligin tawamız h.t.b. Bul protsesti aqırına deyin dawam ettirip, $f(x) = a_n$ ge kelemiz. Shárt boyınsha $f(a_i) = a_n = 0$. Demek, $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = a_n = 0$ bolǵanı ushın $f(x) = 0$ eken.

Nátiyje-3. Dárejeleri n nen joqarı bolmaǵan $f(x)$ hám $\varphi(x)$ kópaǵzalılar x diń n nen artıq hár qıyılı mánislerinde bir-birine teń bolsa, $f(x)$ hám $\varphi(x)$ óz ara teń kópaǵzalılar boladı.

Dálilleniwi: Dárejesi n nen joqarı bolmaǵan $g(x) = f(x) - \varphi(x)$ kópaǵzalı x diń n nen artıq hár qıyılı mánislerinde nolge aylanadı. Demek, joqarıdaǵı teoremaǵa tiykarlanıp, $g(x) = f(x) - \varphi(x) = 0$ yamasa $f(x) = \varphi(x)$ boladı.

2. Haqıyqıy sanlar maydanında keltirilmeytuǵın kópaǵzalılar. Haqıyqıy koefficientli kópaǵzalınıń kompleks korenleri.

Teorema-1. Haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi $f(x)$ kópaǵzalı x diń qospa kompleks mánislerinde qospa kompleks mánislerin qabıl etedi.

Dálilleniwi: a haqıyqıy sandı alamız hám Teylor formulasına tiykarlanıp $f(a+h)$ dı h dıń dárejeleri boyınsha tómendegini jazamız:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) = A_1,\ \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}h^n.$$

Bul jayılmanıń koefficientleri haqıyqıy sanlar bolıp, biz olardı mına kóriniste belgileyik:

$$f(a) = A_0,\ f'(a) = A_1,\ \frac{f''(a)}{2!} = A_2, ..., \frac{f^n(a)}{n!} = A_h$$

Onda joqarıdaǵı jayılma

$$f(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + ... + A_n h^n$$

kórinisin aladı. Eger óz ishine x dıń jup hám taq dárejelerin alǵan aǵzalardı bólek-bólek gruppalarǵa ajıratsaq,

$$f(a+h)=\left(A_0+A_2h^2+A_4h^4+\ldots\right)+\left(A_1+A_2h^2+A_5h^4+\ldots\right)h \qquad (1)$$

teńlik payda boladı. Endi bul teńlikke $h=bi$ (b -haqıyqıy san) mánisin qoyıp tómendegini payda etemiz:

$$f(a-bi)=(A_0-A_2b^2+A_4b^4-\ldots)-bi(A_1-A_3b^2+A_5b^4-\ldots)$$

yaki $f(a-bi)=M-Ni$ teńlik kelip shıǵadı.

Solay etip, x diń $a+bi$ hám $a-bi$ mánislerinde $f(x)$ kópaǵzalı $M+Ni$ hám $M-Ni$ mánislerin qabıl etedi.

Nátiyje-1. Haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi $f(x)$ kópaǵzalı ushın $a+bi$ kompleks san koren bolsa, onda oǵan qospa $a-bi$ $(b\neq 0)$ kompleks san da koren boladı.

Dálilleniwi: $a+bi$ kompleks san $f(x)$ diń koreni bolǵanı ushın $f(a+bi)=M+Ni=0,\ \ M+Ni=0$. Demek, $M=N=0$. Sonıń ushın $f(a-bi)=M-Ni=0-0i=0,\ \ f(a-bi)=0$. Bul bolsa $a-bi$ san $f(x)$ diń koreni ekenin kórsetedi.

Nátiyje-2. Haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi $f(x)$ kópaǵzalınıń jormal korenleri sanı jup boladı.

Haqıyqatında da, 1-nátiyjege qaray, hár bir $a+bi$ kompleks koreni ushın jáne $a-bi$ koreni bar.

Nátiyje-3. Haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi jup dárejeli $f(x)$ kópaǵza-lınıń haqıyqıy korenler sanı jup boladı. Haqıyqatında da, $f(x)$ diń dárejesin n hám jormal korenleriniń sanın m desek, haqıyqıy korenleriniń sanı $k=n-m$ boladı. n hám m jup sanlardı ańlatqanı ushın k da jup san. Bul m hám k sanlardan birewi 0 ge teń bolıwı, yaǵnıy $f(x)$ diń ya jormal, yaki haqıyqıy korenleri bolmawı múmkin.

Nátiyje-4. Haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi taq dárejeli $f(x)$ kópaǵzalınıń haqıyqıy korenler sanı taq boladı.

Haqıyqatında da, n taq hám m jup bolsa, $k = n - m$ taq boladı. Solay etip, $f(x)$ diń eń keminde bir koreni haqıyqıy boladı. $m = 0$ bolsa, onıń hámme korenleri haqıyqıy boladı.

Nátiyje-5. Haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi hár bir $f(x)$ kópaǵzalı sol maydan ústindegi birinshi hám ekinshi dárejeli keltirilmeytuǵın kópaǵzalılar kóbeymesine jayıw múmkin. Haqıyqatında da, $f(x)$ diń korenlerin $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ desek,

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$$

jayılma payda boladı, bunda a_0 - haqıyqıy san. Eger α_1 haqıyqıy koren bolsa, $x - \alpha_1$ haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi birinshi dárejeli (demek keltirilmeytuǵın) kópaǵzalını ańlatadı. Eger $\alpha_2 = a + bi$ kompleks korenin bildirse, $f(x)$ diń korenlerinen biri $a - bi$ qospa kompleks sannan ibarat boladı. Aytayıq $\alpha_3 = a - bi$ bolsın. Onda haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi ekinshi dárejeli keltirilmeytuǵın

$$(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = (x - a - bi)(x - a + bi) =$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

kópaǵzalını payda etemiz.

Demek, $f(x)$ kópaǵzalı haqıyqıy sanlar ústindegi birinshi hám ekinshi dárejeli keltirilmeytuǵın kópaǵzalı kóbeymesine jayıladı. Kópaǵzalı haqıyqıy (yaki jormal) korenlerge iye bolmasa, bul jayılmada birinshi (yaki ekinshi) dárejeli keltirilmeytuǵın kóbeytiwshiler bolmaydı.

Juwmaq. Haqıyqıy sanlar maydanı ústinde ekinshiden joqarı dárejeli hár bir $f(x)$ kópaǵzalı usı maydan ústinde keltirilmeytuǵın kópaǵzalıdur.

Haqıyqatında da, joqarıda aytılǵan jayılmanı haqıyqıy sanlar maydanı ústindegi hám dárejeleri $f(x)$ tiń dárejesinen kishi eki kópaǵzalı kóbeymesine keltiriw múmkin. Máselen, $f(x) = x^4 + 1$ kópaǵzalını alayıq.

Onda,

$$x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{2k+1}{4} + i\sin\frac{2k+1}{4}\pi$$

bolıp, onıń korenleri tómendegiler boladı:

$$\alpha_1 = cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Usı sebepli $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ boladı. Bunda

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_4) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = x^2 - \sqrt{2}x + 1,$$

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = (x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = x^2 + \sqrt{2}x + 1,$$

Solay etip, $f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ tórtinshi dárejeli teńleme payda etemiz.

3. Úshinshi dárejeli teńlemeler. Haqıyqıy koefficientli úshinshi dárejeli teńlemeler korenlerin izertlew.

Kompleks sanlar maydanı ústindegi mına,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \tag{1}$$

kórinistegi teńleme úshinshi dárejeli bir belgisizli teńleme dep ataladı. (1) teńlemeniń hár eki tárepin a ǵa bólip, mına teńlemege iye bolamız:

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0 \qquad (2)$$

(2) de $x = y-\frac{3b}{a}$ almastırıwdı kiritip,

$$\left(y-\frac{3b}{a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(y-\frac{3b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y-\frac{3b}{a}\right)+\frac{d}{a}=0 \qquad (3)$$

teńlemeni payda etemiz. Teńlemeni ápiwayılastırǵannan keyin

$$y^3+py+q=0 \qquad (4)$$

kórinisindegi teńlemege iye bolamız. (4) teńlemedegi y ózgeriwshi ornına eki u hám υ ózgeriwshini $y=u+\upsilon$ teńlik járdeminde kiritemiz.

Nátiyjede $(u+\upsilon)^3+p(u+\upsilon)+q=0$ yamasa,

$$u^3+\upsilon^3+q+(3u\upsilon+p)\cdot(u+\upsilon)=0 \qquad (5)$$

teńlemege iye bolamız. (5) de u hám υ nı sonday tańlaymız, nátiyjede

$$3u\upsilon+p=0 \qquad (6)$$

shárt orınlansın. Bunday talap qoyıwımız orınlı, sebebi

$$\begin{cases} u+\upsilon=y \\ u\upsilon=-\frac{p}{3} \end{cases}$$

teńlemeler sisteması y berilgende jalǵız sheshimge iye boladı. (6) shártti itibarǵa alsaq, (5) teńleme tómendegi kóriniske iye boladı:

$$u^3 + \upsilon^3 = -q \qquad (7)$$

(6) dan $u^3\upsilon^3 = -\frac{p^3}{27}$ bolǵanı ushın u^3 hám υ^3 Viet teoremasına tiykarlanıp bazı bir $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ kórinisindegi kvadrat teńlemeniń korenleri boladı. Bul kvadrat teńlemeni sheshiwden

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad z_2 = \upsilon^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (8)$$

di payda etemiz. (8) den

$$u = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad \upsilon = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

tawılıp, u hám υ nıń hár birine úsh mánis, y ózgeriwshi ushın bolsa toǵız mánis tawıladı. Olardan (6) shártti qanaatlandırǵanlardı alamız. Onday bolsa (4) teńliktiń barlıq sheshimleri tawıladı.

Eger $u, u\varepsilon, u\varepsilon^2$ (bunda ε san q den shıǵarılǵan koren, yaǵnıy $\varepsilon^3 = 1$) z_1 diń úshinshi dárejeli korenleriniń mánisleri bolsa, oǵan sáykes z_2 niń úshinshi dárejeli korenleri mánisleri $\upsilon^2, \upsilon\varepsilon^2, \upsilon\varepsilon$ boladı. Nátiyjede (4) teńleme mına

$$y_1 = u + \upsilon, y_2 = u\varepsilon + \upsilon\varepsilon^2, y_3 = u\varepsilon^2 + \upsilon\varepsilon \qquad (9)$$

korenlerine iye bolıp, onda $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolǵanınan

$$y_1 = u + \upsilon, \quad y_2 = -\frac{1}{2}(u+\upsilon) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-\upsilon),$$
$$y_3 = -\frac{1}{2}(u+\upsilon) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-\upsilon) \qquad (10)$$

sheshim payda boladı.

(10) hám $x=y-\frac{3b}{a}$ ni názerge alıp, (1) teńlemeniń $x_1=y_1-\frac{3b}{a}$, $x_2=y_2-\frac{3b}{a}$ hám $x_2=y_3-\frac{3b}{a}$ korenleri tawıladı.

Endi haqıyqıy koefficientli úshinshi dárejeli teńleme korenlerin teksereyik. Tómendegi teorema úshinshi dárejeli teńlemeniń haqıyqıy hám jormal korenleri sanın anıqlaydı.

Teorema. Eger

$$x^2+px+q=0 \tag{11}$$

teńlemeni haqıyqıy koefficientli teńleme bolıp, $\nabla=\frac{q^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ bolsa, onda tómendegi pikirler orınlı boladı:

a) eger $\nabla>0$ bolsa, (11) teńleme bir haqıyqıy hám eki óz ara qospa jormal korenlerge iye boladı;

b) eger $\nabla=0$ bolsa, (11) teńlemeniń barlıq korenleri haqıyqıy hám keminde bir koreni eseli boladı;

c) Eger $\nabla<0$, bolsa, (11) teńlemeniń barlıq korenleri haqıyqıy hám túrlishe boladı.

Dálilleniwi: a) $\nabla>0$ bolsa, onda z_1 hám z_2 korenleri haqıyqıy hám hár túrli boladı. Demek, korenlerden keminde birewi, máselen, z_1, nolden parıqlı boladı. $u=\sqrt[3]{z_1}$ san z_1 diń arifmetik koreni bolsın. Sonıń ushın u haqıyqıy san boladı. $u\upsilon=-\frac{p}{3}$ teńlikke tiykarlanıp, υ da haqıyqıy san boladı $z_1\neq z_2$ bolǵanı ushın $u^3\neq\upsilon^3$ boladı. Bunnan $u\neq\upsilon$ qatnas orınlı ekenligi anıq. (10) tiykarlanıp

$$\begin{gathered} x_1=u+\upsilon, x_2=-\frac{1}{2}(u+\upsilon)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-\upsilon), \\ x_3=-\frac{1}{2}(u+\upsilon)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-\upsilon) \end{gathered} \tag{12}$$

bolıp, u hám υ haqıyqıy hám de túrli sanlar bolǵanı ushın (12) de x_1 haqıyqıy, x_2

hám x_3 ler óz ara qospa jormal sanlar boladı.

b) $\nabla = 0$ bolsın. Eger $\nabla = 0$ hám $q \neq 0$ bolsa, onda $z_1 = z_2 = -\frac{q}{2} \neq 0$ boladı.

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ san $-\frac{q}{2}$ diń arifmetikalıq koreni bolsın. $u\upsilon = -\frac{p}{3}$ haqıyqıy san bolǵanı ushın $\upsilon = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ haqıyqıy san boladı, yaǵnıy $u = \upsilon \neq 0$ boladı.

(12) formulaǵa tiykarlanıp $x_1 = 2u \neq 0,\ x_2 = x_3 = -u$ boladı. Solay etip, $q \neq 0$ bolǵanda, (11) teńleme úsh haqıyqıy korenge iye hám olardan birewi eseli boladı. Eger $\nabla = 0$ hám $q = 0$ bolsa, onda $p = 0$ boladı. Bunday halda (11) teńleme $x^3 = 0$ kórinisinde bolıp, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ boladı.

c) $\nabla < 0$ bolsın. Onda $z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\nabla},\ z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\nabla}$ boladı. Demek, z_1 hám z_2 sanlar óz ara qospa jormal sanlar eken. Sonıń ushın

$$|z_1| = |z_2| \neq 0 \tag{13}$$

hám

$$z_1 \neq z_2 \tag{14}$$

qatnaslar orınlı.

(6) hám (8) ge kóre

$$u^3 = z_1,\ \upsilon^3 = z_2,\ u\upsilon = -\frac{p}{3} \tag{15}$$

bolǵanı ushın (13) hám (14) den $|u|^3 = |\upsilon|^3 \neq 0$ bolıp, bunnan

$$|u| = |\upsilon| \neq 0 \tag{16}$$

kelip shıǵadı. (14) ge tiykarlanıp, $u \neq \upsilon$ qatnas da orınlı. (6) ǵa tiykarlanıp $u\upsilon = -\frac{p}{3}$ bolıp bunnan $|u| \cdot |\upsilon| = -\frac{p}{3}$ kelip shıǵadı (sebebi c shártke tiykarlanıp $p < 0$). (16) ǵa kóre

$$-\frac{p}{3|u|^2} \tag{17}$$

teńlik orınlanadı. (14) hám (17) tiykarlanıp

$$\upsilon = -\frac{p}{3u} = -\frac{p}{3uu} \cdot \bar{u} = -\frac{p}{3|u|^2} \cdot \bar{u} = \bar{u}$$

yaǵnıy

$$\upsilon = \bar{u} \tag{18}$$

teńlik orınlı. (12) formuladaǵı υ nı $\bar{u}$ menen almastırsaq hám $u \neq \upsilon$ ni itibarǵa alsaq, x_1, x_2, hám x_3 korenleri haqıyqıy hám hár qıylı ekeni málim boladı. Haqıyqatında da, (12) formuladan $x_2 \neq x_3$ kelip shıǵadı. Oylayıq, $x_1 = x_2$ bolsın. Onda (9) ǵa tiykarlanıp $u + \upsilon = u\varepsilon + \upsilon\varepsilon^2$ bolıp, bunnan $u(1-\varepsilon) = \upsilon(\varepsilon^2 - 1)$ yaki $u = \upsilon\varepsilon^2$ kelip shıǵadı.

Bunnan $z_1 = z_2$ hám $\nabla = 0$ teńlikler kelip shıǵadı. Bul bolsa $\Delta < 0$ shártke qarama-qarsı. Tap sonday, $x_1 \neq x_3$ ekenligin de kórsetiw múmkin.

1-mısal. $ix^3 - 3ix + 2 = 0$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi: Berilgen teńlemeni keltirilgen kub tenlemege keltiriw ushın eki tárepin $-i$ ge kóbeytemiz. $x^3 + 3x - 2i = 0$. Payda bolǵan teńlemede $p = 3, q = -2i, D = 0.$ Onda $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{d}} = \sqrt[3]{i}.$ $u_1 = -i$ bolsın, $u_1 v_1 = -1$ ekenliginen, $v_1 = -i$. Demek, $x_1 = -2i, x_2 = i, x_3 = i.$

Mısal 2. Teńlemeni sheshiń

$$x^3-9x^2+21x-5=0.$$

Sheshiw. Ózgeriwshi kiritemiz $x=y+3$ hám $y^3-6y+4=0$ teńlemege iye bolamız. Bul teńlemeniń bir korenin anıqlaymız $\alpha=\sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}}=\sqrt[3]{-2+2i}$ yaǵnıy $\alpha_1=1+i$. Sáykes mánisi $\beta_1=\dfrac{-6}{3(1+i)}=1-i$ teń boladı. Bul jaǵdayda

$$y_1=(1+i)+(1-i)=2 \qquad y_2=-\frac{1}{2}\cdot 2+i\frac{\sqrt{3}}{2}(-2i)=-1-\sqrt{3},$$

$$y_3=-\frac{1}{2}\cdot 2-i\frac{\sqrt{3}}{2}(-2i)=-1+\sqrt{3}.$$

Berilden teńlemenıń kórenleri: $x_1=5$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$.

Mısal 3. Teńlemeni sheshiń

$$x^4-4x^3+7x^2-2x-5=0.$$

Sheshiw. Ózgeriwshi kiritemiz $y=x-1$ hám teńlemege iye bolamız:

$$y^4+y^2+4y-3=0.$$

Bul teńlemeniń kublıq rezolventası

$$z^3+2z^2+13z-16=0,$$

Onıń korenleriniń biri $z_0=1$ boladı. Kvadrat teńlemelerdi dúzemiz :

$$u^2-u+3=0 \text{ и } u^3+u-1=0.$$

Olardıń korenleri:

$$u_{1,2}= =\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-3}=\frac{1\pm i\sqrt{11}}{2},\ u_{3,4}-=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Bul jaǵdayda

$$y_1=\frac{1+i\sqrt{11}}{2},\ y_2=\frac{1-i\sqrt{11}}{2},\ y_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ y_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Berilgen teńlemeniń:

$$x_1 = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2},\ x_2 = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2},\ x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ x_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

II bap. Racional sanlar maydanında kópaǵzalılardıń korenlerin izertlew.

1-§. Kópaǵzalılardıń kvadratlıq radikallarda sheshiliwi.

1. Kópaǵzalılardıń kvadrat radikallarda sheshiliwi túsinigi.

1-a n ı q l a m a. Eger $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\alpha)$ $(\alpha \overline{\in} \mathcal{P}, \alpha^2 \in \mathcal{P})$ qatnastı qanaatlandırıwshı α element bar bolsa, onda $\mathcal{F}$ maydan $\mathcal{P}$ maydannıń kvadratlıq keńeytpesi dep ataladı.

Mısallar. 1. $Q[\sqrt{2}]$ maydan Q maydannıń kvadratlıq keńeytpesi boladı.

2. $Q(\sqrt[3]{3})$ maydan Q maydannıń kvadratlıq keńeytpesi emes.

3. $Q(i)$ maydan Q maydannıń kvadratlıq keńeytpesi boladı.

2-a n ı q l a m a. Eger

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (a_i \in Q) \qquad (1)$$

Teńlemeniń korenlerin tómendegishe eki aǵzalı kvadratlıq teńlemeler shınjırlarınıń korenleri arqalı racional (yaǵnıy qosıw,alıw, kóbeytiw, bóliw ámelleri járdeminde) ańlatıw múmkin bolsa, onda $f(x)$ kópaǵzalı kvadrat radikalda sheshiledi delinedi :

$$x^2 - \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 \in Q = \mathcal{P}_0;$$

$$x^2 - \alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 \in \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0(\sqrt{\alpha_0});$$

$$x^2 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 \in \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1(\sqrt{\alpha_1});$$

. . . .

$$x^2 - \alpha_{k-1} = 0, \quad \alpha_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1} = \mathcal{F}_{k-2}(\sqrt{\alpha_{k-2}}).$$

Solay etip, (1) teńlemenin barlıq korenleri$\sqrt{\alpha_0}, \sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{k-1}}$ sanlar arqalı racional ańlatıladı hám $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-1}(\sqrt{\alpha_{k-1}})$ maydanǵa tiyisli boladı. Basqasha aytqanda,

$$Q = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{k-1} \in \mathcal{F}_k$$

ósiwshi sanlı maydanlar bar bolıp, bul shınjırdaǵı hár bir $\mathcal{F}$ maydan ózinen aldıńǵı $\mathcal{F}_{i-1}$ maydannıń kvadratlıq keńeytpesi bolsa hám $\mathcal{F}_k$ maydan (1) teńlemeniń barlq korenlerin óz ishine alsa, onda (1) teńleme kvadrat radikalda sheshiletuǵın teńleme delinedi.

3-a n ı q l a m a. Eger (1) teńleme korenleri tómendegi eki aǵzalı teńlemeler shınjırlarınıń korenleri arqalı ańlatılsa, (1) teńleme radikalda sheshiledi delinedi :

$$x^{n_0}-\alpha_0, \qquad \alpha\in Q=\mathcal{F}_0;$$

$$x^{n_1}-\alpha_1=0, \quad \alpha_1\in\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_0\left(\sqrt[n_0]{\alpha_0}\right);$$

$$x^{n_2}-\alpha_2=0, \ \ \alpha_2\in\ \mathcal{F}\ \ =\mathcal{F}_1\left(\sqrt[n_1]{\alpha_2}\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{n_{k-1}}-\alpha_{k-1}=0, \quad \alpha_{k-1}\in\mathcal{F}_{k-1}=\mathcal{F}_{k-2}\left(\sqrt[n_{k-2}]{\alpha_{n_{k-2}}}\right).$$

Solay etip (1) teńlemeniń barlıq korenleri $\sqrt[n_0]{\alpha_0}, \sqrt[n_1]{\alpha_2}, \ldots, \sqrt[n_{k-1}]{\alpha_{k-1}}$ sanlar arqalı racional ańlatıladı hám $\mathcal{F}_k=\mathcal{F}_{k-1}\left(\sqrt[n_{k-1}]{\alpha_{k-1}}\right)$ maydanǵa tiyisli boladı.

Dárejesi tórtten kishi bolmaǵan teńlemelerdi kvadrat radikallarda sheshiliw shárti menen shuǵıllanayıq. Meyli, $f(x)$ kópaǵzalı bazı bir $\mathcal{P}$ sanlar maydanı ústinde berilgen bolsın.

4-a n ı q l a m a. Eger

$$f(x)=0 \tag{2}$$

teńlemeniń korenleri

$$f_i(x) \qquad (i=\overline{1,k}) \tag{3}$$

teńlemelerdiń korenleri arqalı racional ańlatılsa, onda (2) teńlemeni hár biriniń dárejesi ekiden joqarı bolmaǵan teńlemeler shınjırına keltiriledi delinedi.

(3) tegi hár bir $f_i(x)$ kópaǵzalı ushın tómendegi eki jaǵday bolıwı múmkin.

a) Qálegen $f_i(x)$lar birinshi dárejeli kópaǵzalı;

b) $f_i(x)$ berilgen $\mathcal{P}$ maydan ústindegi keltirilmeytuǵın ekinshi dárejeli kópaǵzalı.

Eger $f_1(x)$ tıń bazı bir korenin α desek, $f_2(x)$ kópaǵzalı $\mathcal{P}(\alpha)$ da keltirilmeytuǵın ekinshi dárejeli kópaǵzalı, $f_3(x)$ bolsa $\mathcal{P}(\alpha)$ǵa $f_2(x)$ nıń bazı bir β korenin kiritiwden payda bolatuǵın $\mathcal{P}(\alpha;\beta)$keltirilmeytuǵın ekinshi dárejeli kópaǵzalı h.t.b.

5-a n ı q l a m a. Eger $f(x)$ kópaǵzalı $\mathcal{P}$ nıń bazı bir keńeytpesinde sızıqlı kóbeytiwshiler kóbeymesi kórinisinde jazılsa, onda Q normal maydan delinedi.

1-t e o r e m a. Koefficientleri $\mathcal{P}$ maydanǵa tiyisli $f(x)$ kópaǵzalı ushın Q keńeytpe de normal keńeytpe bolsa, onda $f(x) = 0$ teńleme kvadrat radikallarda sheshiliwi ushın $(Q:\mathcal{P}) = 2^m$bolıwı zárúr hám jetkilikli.

D á l i l i. 1. Z á r ú r l i k   s h á r t i. Meyli, (1) teńleme (2) sıyaqlı teńlemeler shınjırına keltirilgen bolsın. Onda joqarıdaǵı sıyaqlı eki jaǵday bolıwı múmkin. $f_i(x)$ lardıń barlıǵıbirinshi dárejeli. Bunday jaǵdayda birinshi dárejeli teńlemelerdiń korenlerin $\mathcal{P}$ ǵa kiritiw menen bul maydan ózgermeydi, yaǵnıy bunday jaǵdayda $(Q:\mathcal{P}) = 2^0 = 1$ bolǵanı ushın $Q = \mathcal{P}$ boladı.

a) $f_i(x)$ lar arasında dárejesi ekiden kishi bolmaǵan kópaǵzalı bar bolsa, onda $\mathcal{P}$ nıń usı $\mathcal{P}$ ǵa qarata 2^n dárejeli keńeytpesi esaplanǵan $\mathcal{P}_1$ keńeytpe bar boladı. Onda $(Q:\mathcal{P})$ dárejege $(\mathcal{P}_1;\mathcal{P})$ dárejege bólinedi. Bunnan $(Q:\mathcal{P}) = 2^m$ ekenligi kelip shıǵadı.

2. J e t k i l i k l i   s h á r t i. Endi $(Q:\mathcal{P}) = 2^m$ dep alıp, $f(x) = 0$ tı $f_i(x) = 0$ sıyaqlı teńlemeler shınjırına keliwin kóremiz.

Bunda tómendegi úsh jaǵday boladı:

1) $m = 0$. Bunda $(Q:\mathcal{P}) = 1$ bolǵanı ushın $f_i(x)$ kópaǵzalılardıń barlıǵı birinshi dárejeli boladı. Óz-ózinen belgili, bunday jaǵdayda $f_i(x) = 0$ teńlemelerdiń korenleri $\mathcal{P}$ maydanǵa tiyisli boladı.

2) $m = 1$ bolǵanda $(Q:\mathcal{P}) = 2$ bolıp, $f(x)$ tıń norması, yaǵnıy Q maydan $\mathcal{P}$ǵa koefficientleri usı $\mathcal{P}$ maydanǵa tiyisli bolǵan kvadrat teńlemeniń korenin kiritiwden ǵayda boladı. Bunda $f_i(x) = 0$ shınjırdaǵı hár bir teńlemeniń dárejesi álbette ekiden joqarı bolmaydı.

3) $m > 1$ bolsın. Onda $(Q:\mathcal{P}) = 2^m$ bolıp, $\mathcal{P}$ nıń usı $\mathcal{P}$ ǵa qarata ekinshi dárejeli $\mathcal{P}_1$ keńeytpesi bar boladı. Bul keńeytpe $(Q:\mathcal{P}) = 2^{m-1}$ boladı.

Endi $\mathcal{P}$ ornına $\mathcal{P}_1$ di alayıq. Onda $\mathcal{P}_1$ hám Q arasındaǵı sonday $\mathcal{P}_2$ keńetpe bar, onıń ushın $(Q:\mathcal{P}) = 2^{m-2}$ orınlanadı, yaǵnıy $\mathcal{P}_2$ keńeytpe $\mathcal{P}_1$ ge qarata ekinshi dárejeli boladı. Bul processti dawam ettirip, hár bir keyingisi aldıngısı ushın ekinshi dárejeli bolǵan

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_m = Q$$

shekli keńeytpeler izbe-izligine erisemiz. Nátiyjede $f(x) = 0$ teńlemeniń hár biri ekinshi dárejeli bolǵan teńlemeler shınjırına keltirilgenige isenim payda qılamız.

2. Ushinshi darejeli teńlemelerdiń kvadrat radikallarda sheshiliw shartleri.

T e o r e m a. Mına

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

racional koefficientli úshinshi dárejeli teńleme kvadrat teńleme kvadrat radiklada sheshiliwi ushın onıń keminde bir koreni racional san bolıwı zárúr hám jetkiliki.

D á l i l i. 1. J e t k i l i k l i s h á r t i. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ kópaǵzalı d racional korenge iye bolsın. Onda onı tómendegishe jazamız: $f(x) = (x - d)(x^2 + mx + n)$, bunda $m, n \in Q$.

1) $x^2 - d^2 = 0, d \in Q = \mathcal{P}_0$;

2) $\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{m^2}{4}\right) = 0$ yaki $y^2 - \alpha_1 = 0, \alpha_1 = \frac{m^2}{4} - n$ qatnaslar orınlı bolǵanı ushın (1) teńleme kvadrat radikalda sheshiledi.

2. Z á r ú r l i k s h á r t i. (1) teńleme kvadrat radikalda sheshilsin hám onıń koreni joq dep qarayıq. Sonday

$$Q = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k, \tag{2}$$

kvadrat keńeytpeler shınjırı bar, onda (1) teńlemeniń x_1, x_2, x_3 korenlerinen keminde birewi ${}^{\mathcal{F}_k}/_{\mathcal{F}_{k-1}}$ ǵa tiyisli boladı. Máselen,

$x_1 \in {}^{\mathcal{F}_k}/_{\mathcal{F}_{k-1}}$ (3)

hám x_1, x_2, x_3 korenlerden hesh biri $\mathcal{F}_{k-1}$ ǵa tiyisli emes, yaǵnıy

$$\{x_1, x_2, x_3\} \cap \mathcal{F}_{k-1} = \emptyset \quad (4)$$

bolsın.

$\mathcal{F}_k$ maydan $\mathcal{F}_{k-1}$ maydannıń kvadratlıq keńeytpesi bolǵanı ushın sonday $\alpha \in {}^{\mathcal{F}_k}/_{\mathcal{F}_{k-1}}$ element bar, nátiyjede

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-1}(\alpha),\ \alpha \notin \mathcal{F}_{k-1}, \alpha^2 \in \mathcal{F}_{k-1} \quad (5)$$

qatnas orınlanadı. (3) hám (5) ge tiykarlanıp,

$$x_1 = p + q\alpha, (p, q \in \mathcal{F}_{k-1}, q \neq 0) \quad (6)$$

boladı.

Endi $p - q\alpha$ ańlatpa $f(x)$ kópaǵalınıń koreni ekenin dálileymiz. Haqıyqattan da,

$f(p + q\alpha) = (p + q\alpha)^3 + a(p + q\alpha)^2 + b(p + q\alpha) + c = A + B\alpha$,(7)

bunda

$$\begin{cases} A = f(p) + 3pq^2\alpha^2 + aq^2\alpha^2, \\ B = 3p^2q + q^3\alpha^2 + 2apq + bq. \end{cases} \quad (8)$$

$A, B \in \mathcal{F}_{k-1}$ hám $\alpha \notin \mathcal{F}_{k-1}$ bolǵanı sebepli

$$f(p + q\alpha) = A + B\alpha = 0 \quad (9)$$

Teńlikten

$$A = B = 0 \quad (10)$$

kelip shıǵadı. (7), (8), (9) hám $A = B = 0$ ǵa kóre $f(x) = (p - q\alpha) = A - B\alpha$ teńlik kelio shıǵadı. Demek, $p - q\alpha$ hám $f(x)$ tıń koreni eken. $x_2 = p - q\alpha$ bolsın. (6) qatnasa tiykarlanıp, $x_1 - x_2 = 2q\alpha \neq 0$ bolǵanı ushın $x_1 \neq x_2$.

Viet formulasına tiykrlanıp $x_4 + x_2 + x_3 = -a$. (6) ǵa tiykarlanıp $x_1 + {}+x_2 = 2p \in \mathcal{F}_{k-1}, x_3 = -a - 2p \in \mathcal{F}_{k-1}$. Bul bolsa (4) ke qarama-qarsı. Demek, $f(x)$ kópaǵzalı racional korenge iye eken.

2-§. Pútin koefficientli kópaǵzalınıń pútin hám racional korenlerin izertlew.

Racional sanlar maydanı ústindeberilgen hár qanday $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ kópaǵzalınıń koreni

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

Teńlemeniń de koreni boladı. Sonıń ushın bunnan keyin biz tek ǵana n −dárejeli teńlemeniń racional korenlerin tabıw menen shuǵıllanamız.

1°. Bólshek koefficientli teńlemeni pútin koefficientli teńleme menen almastırıw múmkin.

D á l i l i. Bunıń ushın (1) teńlemeniń eki tárepin barlıq $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ koefficientleriniń uluwma bólimine kóbeytiw jetkilikli.

2°. Pútin koefficientli teńlemeni bas koefficienti 1 ge teń pútin koefficientli teńleme menen almastırıw múmkin.

D á l i l i. (1) teńlemeniń koefficientlerin pútin dep esaplaydı,$x = \frac{y}{a_0}$ túrlendiriwdi orınlasaq, (1) teńleme

$$\frac{y^n}{{a_0}^{n-1}} + \frac{a_1y^{n-1}}{{a_0}^{n-1}} + \frac{a_2y^{n-2}}{{a_0}^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}y}{a_0} + a_n = 0$$

Kórinisin aladı. Bunnan tómendegini payda qılamız :

$$y^n + a_0a_1y^{n-1} + a_0a_2y^{n-2} + \cdots + {a_0}^{n-2}a_{n-1}y + {a_0}^{n-1}a = 0.$$

3°. Pútin koefficientli

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2)$$

Teńlemeniń racional korenleri tek ǵana sanlar boladı.

D á l i l i : (2) teńleme $\alpha = \frac{a}{b}$ korenge iye bolsın (a hám b – pútin sanlar, $b \neq 0$); bul bólshekti qısqarmaytuǵın dep esaplaw múmkin; $\alpha = \frac{a}{b}$ korendi (2) teńlemege qoyıp,

$$\frac{a^n}{b^n} + a_1\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{a}{b} + a^n = 0$$

yaki

$$\frac{a^n}{b^n} = -(a_1 a^{n-1} b + \cdots + a_n b^{n-1}) \qquad (3)$$

teńlikti payda etemiz. $\frac{a}{b}$ qısqarmaytuǵın bólshek. Sonıń ushın, (3) teńliktiń bolıwı múmkin emes, sebebi qısqarmaytuǵın bólshek pútin sanǵa teń bola almaydı.

4°. (2) teńlemeniń pútin koreni erkin aǵzanıń bóliwshisi.

D á l i l i. a nı (2) teńlemeniń pútin koreni desek,

$$a^n + a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} + \cdots + a_{n-1} a + a_n = 0$$

yaki

$$a_n = a(-a^{n-1} - a_1 a^{n-2} - \cdots - a_{n-1})$$

teńlikke iye bolamız; bul bolsa a_n niń a ǵa bóliniwin kórsetedi.

5°. (2) teńlemeniń shep tárepin $x - a$ (a —pútin san) ǵa bóliwden shıqqan tıyındı pútin koefficientli kópaǵzalı.

D á l i l i. Gorner sxeması boyınsha tıyındınıń koefficientleri tómendegi pútin sanlarǵa teń:

$$b_0 = a_0 = 1, \qquad b_1 = a_1 + a, \qquad b_2 = a_2 + ab_1, \dots, b_{n-1} = a_{n-1} + ab_{n-1}.$$

6°. Eger a pútin san (2) teńlemeniń koreni bolsa, $\frac{f(1)}{a-1}$ hám $\frac{f(-1)}{a+1}$ de pútin sanlar boladı.

D á l i l i. Haqıyqattan da, $f(x) = (x - a)\varphi(x)$ teńlikten $\frac{f(x)}{a-x} = -\varphi(x)$ payda boladı, bunda 5° —qásiyetke tiykarlanıp, $\varphi(x)$ pútin koefficientli kópaǵzalı. Demek,

$\frac{f(1)}{a-1} = -\varphi(1), \frac{f(-1)}{a+1} = -\varphi(-1)$ – pútin sanlar.

7°. a pútin san (2) teńlemeniń koreni bolıwı ushın

$$q_{n-1} = \frac{a_n}{a}, q_{n-1} = \frac{a_{n-1} + q_{n-1}}{a}, \dots, q_1 = \frac{a_2 + q_2}{a}, q_0 = \frac{a_1 + q_1}{a} = 1 \qquad (4)$$

qatnaslar pútin san bolıwı zárúr hám jetkilikli.

D á l i l i. Z á r ú r l i g i. a —teńlemeniń pútin koreni bolsın. Gorner sxemasınan paydalanıp, $f(x)$ ti $x - a$ ǵa bólemiz. Bunday jaǵdayda bólinbeniń koefficientleri $b_0 = 1, b_1 = a_1 + a,\ b_2 = a_2 + ab_1, \dots, b_{n-1} = a_{n-1} + ab_{n-2}$

teńlikler menen anıqlanıp, qaldıq nolge teń boladı, yaǵnıy $0 = a_n + ab_{n-1}$. Bul teńliklerden

$$-b_{n-1} = \frac{a_n}{a}, -b_{n-2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a}, \dots, -1 = \frac{a_1 - b_1}{a}$$

kelip shıǵadı. Eger $-b_{n-1} = q_{n-1}, -b_{n-2} = q_{n-2}, \dots, -1 = q_0$ dep belgilesek, (4) teńliklerdi payda qılamız.

J e t e r l i l i g i. Endi, a pútin san bolǵanı ushın (4) teńlikler kúshke iye deyik. Bul teńliklerdiń sońǵısınan $a_1 + a = -q_1$ di tabamız. Gorner sxemasına tiykarlanıp, $a_1 + a = b_1$. Demek, $-q_1 = b_1$. Ekinshi teńlikten $-q_2 = a_2 - aq_1 = a_2 + ab$ payda boladı. Demek, jáne Gorner sxeması boyınsha tabılatuǵın $b_2 = a_2 + ab_1$ teńlikke tiykarlanıp, $-q_2 = b_2$. Bul processti dawam ettirip, birinshi teńliktena$a_n - aq_{n-1} = a_n + ab_{n-1} = 0$ di payda etemiz. Biraq Gorner sxeması boyınsha $r = a_n + ab_{n-1}$. Sol sebepli $r = 0$. Demek, $f(x)$ ti $x - a$ ǵa bóliwden shiqqan qaldıq nolge teń bolǵanınan, a pútin san (2) teńlemeniń korenin ańlatadı.

Solay etip, racional sanlar maydanı ústindegi teńlemeniń racional korenlerin esaplaw processi tómendegiden ibarar:

1) Dáslep teńlemeni (2) kóriniske keltiremiz;
2) Erkin aǵzanıń bóliwshelerin alıp tekseremiz;
3) Eger a erkin aǵzanıń bóliwshisi bolsa, $f(1)$ hám $f(-1)$ diń $a - 1$ hám $a + 1$ ge bóliniw bólinbewin tekseremiz;
4) $\frac{f(1)}{a-1}$ hám $\frac{f(-1)}{a+1}$ qatnaslardan birewi pútin san bolmasa, a koren bolmaydı. Sınawdan ótken a nı alıp, 7°- qásiyetiniń orınlanıwın tekseremiz. Bunıń ushın tómendegi sxemanı dúzemiz:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	1
q_{n-1}	q_{n-2}	q_{n-3}	...	q_0	

Bunda q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, ..., q_1, q_0 sanlar (4) teńliklerge tiykarlanıp tabıladı. Eger q_1 pútin san hám $q_0 = -1$ bolǵanda ǵana a koren boladı.

Mısal 1. Usı teńlemeni qarayıq:

$$x^5-\frac{7}{10}x^4+\frac{11}{10}x^3-\frac{17}{10}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{1}{10}=0.$$

Dáslep pútin koefficientli teńlemege túrlendiremiz:

$$10x^5-7x^4+11x^3-17x^2+8x-1=0.$$

Soń teńlemeni $x=\frac{y}{10}$ túrlendiriw menen (2) kóriniske keltiremiz:

$f(y)=y^5-7y^4+110y^3-1700y^2+8000y-10000.$ (5)

Bunda 10000 erkin aǵzanıń bóliwshileri júda kóp. Sonıń ushın esaplawdı qısqartıw ushın dáslep haqıyqıy korenlerdiń shegaraların tabamız.

Oń korenlerdiń shegaraları 0 hám 16 ekenin anıqlaymız. (5) teńlemeniń teris korenleri joq, sebebi $y=-z$ túrlendiriw nátiyjesinde payda bolǵan

$z^5+7z^4+110z^3+1700z^2+8000z+10000=0$

Teńlemeniń shep tárepi z tiń oń mánislerinde nol bolmaǵanı ushın teńlemeniń oń korenleri joq. Solay etip,10000 tiń 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16 bóliwshileri menen shegaralanıwı jetkilikli.

Endi $f(-1)=3596$, $f(1)=19818$ ekenin tabamız.

4 sanı koren bola almaydı, sebebi $f(-1)$ san $a+1=4+1=5, a+1=5$ ke bólinbeydi. Usıǵan uqsas, 8, 10, 16 da koren bola almaydı. 2 hám 5 ti alǵanımızda $f(1)$ hám $f(-1)$, sáykes túrde, $a-1=2-1=1, a-1=1, a-1=5-1=4, a-1=4$ ke hám $a+1=2+1=3, a+1=5+1=6$ ǵa bólinedi. Usı sebepli, 2 hám 5 ushın 7°- qásiyetti tekserip kóremiz.

-10000	8000	-1700	110	-7	1
-5000	1500	-100	5	-1	

-10000	8000	-1700	110	-7	1
-2000	1200	-100	2	-1	

Demek, (5) teńleme $y_1=2$ hám $y_2=5$ ten ibarat eki korenge iye. Sol sebepli, berilgen teńlemeniń racional korenleri $x_1=\frac{1}{5}$ hám $x_2=\frac{1}{2}$ boladı.

Mısal 2. Kópaǵzalınıń barlıq racional korenlerin tabıń

$$. f = 2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21.$$

Sheshiw.

1) 21 sanınıń barlıq bóliwshilerin tabamız: $q = \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$.

2) 2 sanınıń barlıq bóliwshilerin tabamız: $p = \pm 1, \pm 2$.

3) $\frac{p}{q}$ túrdegi bólsheklerdi dúzeviz:

$$\frac{1}{1}; \frac{-1}{1}; \frac{3}{1}; \frac{-3}{1}; \frac{7}{1}; \frac{-7}{1}; \frac{21}{1}; \frac{-21}{1}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{7}{2}; \frac{-7}{2}; \frac{21}{2}; \frac{-21}{2}.$$

(bunda tek q oń mánislerin alamız).

4) Gorner sxemasınan paydalanıp, $\frac{p}{q}$ bólsheklerdiń qaysıları f kópaǵzalınıń koreni ekenin anıqlqyvız. Olar (-3) hám $\frac{1}{2}$ sanları boladı.

Mısal 3. Kópaǵzalınıń barlıq racional korenlerin tabıń.

$$f = x^4 - x^2 + x - 10.$$

Sheshiw. f kópaǵzalınıń bas koefficienti 1 ge teń bolǵanı stbtpli, onıń korenleri saltań aǵzanıń yaǵnıy (-10) sanınıń bóliwshileri boladı. Yaǵnıy korendi $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ sanlardı sınaw arqalı tabamız. Demek f kópaǵzalı tek jalǵız racional -2 korenge iye boladı.

Juwmaqlaw

Bul pitkeriw qánigelik jumısında racional sanlar maydanında berilgen kóp aǵzalılardı korenlerin izertlewdi oqıtıwdıń bazı bir usılların baylanıslı bir qatar usınıslar berilgen .

Kópaǵzalılar túsinigi mektep programmasında ózine sáykes ózgeshe usılda kiritilip orta arnawlı hám joqarı oqıw orınlarında rawajlandırılıp dawam etedi. Mektep kursında kiritiliwinde bir aǵzalı, eki aǵzalı hám kópaǵzalilar dep atalıp, algebralıq ańlatpalar siyaqlı ápiwayılastırıwǵa mısallar islenedi. Jumısta dáslep maydanlarda kópaǵzalilardı anıqlaw túsinigi úyrenilip, haqıyqıy hám kompleks sanlar maydanında kópaǵzalılardı anıqlaw usılları keltirilgen. Sońınan racional sanlar maydanında kópaǵzalılar korenlerin izertlew boyınsha teoriyalıq materiallar berilip ótilgen.

Algebralıq teńlemelerdi sheshiwde kópaǵzalı hám onıń qásiyetlerinen paydalanılıp sheshiwdi ańsatlastırıwshı usıllar keltirilgen. Ayırım standart emes teńlemelerdi sheshiwge de kewil bólingen. Ásirese teńlemelerdi sheshiwde olardıń koefficientlerinen paydalanıp teńlemeni sheshiwdi ańsatlastırıqshı qolaylı usıllarına baylanıslı mısallar islengen hám tiyisli usınıslar berilgen.

Pitkeriw qániygelik jumisin mektep hám orta arnawli oqiw orinlari oqıwshıları hám oqıtıwshıları ushin sabaq procesinde teńlemelerdi sheshige arnalǵan mısallar isleyde, sonıń menen birge joqarı oqıw orınları talabaları metodikaliq qollanba retinde paydalaniwǵa boladi.

Paydalanılǵan ádebiyatlar.

1. Mirziyoev SH.M. Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash- yurt taraqqiyoti va xalq faravonligining garovi.Toshkent, "O'zbekiston", 2017 yil, 48 bet.
2. SH.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiev, F.H.Haydarov, Algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent "Tafakkur bo'stoni" 2019, 295 b. (o'quv qo'llanma)
3. Nazarov R.N.,Toshpo'latov B.T., Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi.T., O'qituvchi. I – qism, 1993 y., 2 - qism, 1995 y. (o'quv qo'llanma)
4. Yunusov A., Yunusova D. Sonli sistemalar. T., «Moliya-iqtisod», 2008. (o'quv qo'llanma)

5. Hojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O'zbekiston», 2001y.

6. YUnusova D., YUnusov A. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. T., "Ilm Ziyo". 2009.

7.А.Г.Курош Курс высшей алгебры. – М.: Изд-во "Наука", 1971 г. – 431с.

8. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука. 1989.

9. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука. 1994.

10.Bortakovskiy A. S., Panteleev A.V.. Lineynaya algebra v primerax i zadachax.M., 2005.

1. http://lib.kruzzz.com/books
2. www. Ziyonet. Uz
3. www. edu. Uz
4. www. tdpu. Uz
5. www. pedagog. Uz