ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI
ÁJINIYAZ ATÍNDAǴÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ INSTITUTÍ

«Fizika-Matematika» fakulteti

«Matematika oqıtıw metodikası» kafedrası

5110100- «Matematika oqıtıw metodikası» tálim baǵdarı 4-B topar talabası Jetpisbayeva Nilufar Kuanishbayevnanıń

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

TEMA: FUNKCIYANÍŃ QÀSIYETLERI JÀRDEMINDE TEŃSIZLIKLERDI DÁLILLEW USÍLLARÍ

Talaba:	_____	Jetpisbayeva N
Ilimiy basshı:	_____	p.i.f.d.(PhD)Berdibaev M
Kafedra baslıǵı:	_____	doc. Prenov B

2021-jıl may ayınıń 21- sánesindegi kafedra májilisiniń qararı menen qorǵawǵa ruxsat berildi (№ 10 - protokol)

Nókis-2021

M A Z M U N Í

	Kirisiw…….	3
I-BAP.	**Teńsizlikler haqqında**.....	6
1-§.	Sanlı teńsizlikler haqqında.....	6
2-§.	Kvadrat teńsizlikler……..	7
3-§.	Irracional teńsizlikler……...	12
4-§.	Kórsetkishli teńsizlikler……..	17
5-§.	Logarifmlik teńsizlikler.....	22
6-§.	Orta mánisler hám olar arasındaǵı qatnaslar……	28
7-§.	Ulıwmalasqan Koshi teńsizligi……	32
8-§.	Ulıwmalasqan Yung teńsizligi…….	33
9-§.	Gelder teńsizligi……...	34
II-BAP.	**Funkciyanıń qásiyetleri járdeminde teńsizliklerdi dálillew usılları**…….	36
1-§.	Funkciyanıń monotonlıq qásiyeti járdeminde dálillenetuǵin teńsizlikler.....	36
2-§.	Funkciyanıń dóńeslik qásiyeti járdeminde dálillenetuǵın teńsizlikler.....	41
	Juwmaqlaw…….	46
	Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi…….	48

Kirisiw

Ózbekstan Respublikasın rawajlandırıwdıń tiykarǵı bes baǵdarı boyınsha qabıl etilgen Háreketler strategiyasında hám pedagog kadrlardı tayarlaw, xalıq bilimlendiriw xızmetkerlerin qayta tayarlaw hám olardıń mamanlıǵın arttırıw sistemasın bunnan bılay da jetilistiriw ilajları haqqında Ózbekstan Respublikası Prezidentiniń qararı menen joqarı hám orta oqıw orınları máselelerinde zamanǵa say ilim, mádeniyat, óndiris hám olardıń aldaǵı waqıtlardaǵı rawajlanıwın esapqa alǵan halda qánigeler tayarlaw sapasın túp-tamırdan jaqsılaw máselesin alǵa súrdi. Usı maqsettegi baslı qádem oqıw – tárbiya procesiniń ámeliyat penen óz-ara nátiyjeli birge islesiwin támiyinlew, xalıq bilimlendiriw xızmetkerlerin qayta tayarlaw hám mamanlıǵın arttırıw procesin kóshpeli shınıǵıwlar arqalı zamanagóy texnika hám texnologiyalar menen úskenelengen bilimlendiriw mekemelerinde shólkemlestiriw, pedagog kadrlardı bolıp atırǵan ózgerisler menen júz berip atırǵan jańalıqlardı házirgi kóz-qaras penen oylawǵa, analizlewge úyretiwden ibarat.

Pitkeriw qánigelik jumısı temasınıń aktuallıǵı: Bizge málim funkciyaníń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillew kóplegen máselelerdi sheshiwde keńnen qollanıladı. Sonıń ushın da, teoriyalıq alǵan bilimlerdi tereń ózlestiriw hám onı bekkemlewdiń eń áhmiyetli kreteriyası, ótilgen teoriyalıq bilimdi ámeliy máselelerdi sheshiw arqalı kónlikpeler beriw bolıp esaplanadı. Burınnan beri qaray matematika joqarı hám orta bilimlendiriwdiń zárúrli elementi bolıp kelmekte.

Ilim menen texnikanıń rawajlanıwı, sociallıq tarawdaǵı alǵa ilgerilewshilik matematikalıq usıllardıń búgingi kúnde de jámiyette kórnekli orın tutatuǵınlıǵın kórsetpekte.

Matematikalıq bilimdi bakalavrdıń fundamentallı tayarlıǵınıń eń áhmiyetli jasawshısı dep qaraw kerek. Bul matematikanıń ámeliy máseleler sheshiwde kúshli qural hám ilimniń universal tili bolıp qalmastan, al onıń ulıwmalıq mádeniyattıń elementi ekenligi menen túsindiriledi. Hár bir mádeniyatlı adamnıń san, funkciya, algoritm, sheksiz úlken, sheksiz kishi shamalar, úzliksiz shamalar uqsaǵan tiykarǵı matematikalıq túsinikler haqqında túsinigi bolıwı kerek. Sonıń menen birge matematikalıq metodlardı qollanıw hár bir qániygeniń múmkinshiligin keńeytedi.

Zamanagóy matematika informatika menen úyleskenlik halda predmetler aralıq instrument wazıypasın atqarmaqta. Sonıń ushın da matematikanı mekteplerde hám joqarı oqıw orınlarında oqıtıw máselelerin jaqsılaw áhmiyetli mámleketlik maǵanaǵa iye.

Hámme waqıtta matematikanı úyretiwdiń ózine tán ózgeshelikleri hám onıń menen baylanıslı bolǵan qıyınshılıqları bolǵan.

Funkciyaníń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillew matematikanıń basqa tarawları ushın álipbe sıpatında xızmet atqarıp qoymastan, óziniń payda bolıw dáwirinen baslap-aq, birqansha ámeliy máselelerdi sheshiwge baǵdarlandı. Mine sonıń ushın da analiz baslamalarınıń mektep kursına engiziliwi mektep matematika kursına ámeliy-praktikalıq baǵdarlar beriwdi názerde tutadı.

Demek, matematikanı oqıtıw processinde oqıwshılarǵa Funkciyaníń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillewdi oqıtıw usılları haqqında úyretiw hám onı ámeliyatta qollanıw kónlikpesin hám uqıplılıqların rawajlandırıwdı óz-ishine alıwshı metodikalıq qollanba islep shıǵıw, bul aktual máselelerden biri bolıp esaplanadı.

Jumıstıń izertleniw dárejesi: Oqıwshılardıń Funkciyaníń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillew túsinikleri hám usılları menen tanıs bolıwı olar ushın júdá zárúr ekenligin, sonday-aq, matematikalıq analizdiń tiykarǵı túsiniklerinıń ózine tán bolǵan qatańizbe-izliklerin biliw hár bir oqıwshı ushın áhmiyetli ekenligin ayrıqsha atap kórsetti.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń maqseti hám wazıypaları.

1. Matematikalıq analiz hám algebranıń bazı bir máselelerin sheshiwde, máselen, teńsizliklerdi dálillewde tiykarǵı elementar funkciyalardan esaplanǵan kórsetkishli hám logarifmlik funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıwǵa baylanıslı bolǵan úyreniletuǵın material tańlaw hám hár qıylı dárejedegi shınıǵıwlar sistemasın islep shıǵıw.

2. Orta mánisler hám olar arasındaǵı qatnaslar, Ulıwmalasqan Koshi teńsizligi, Ulıwmalasqan Yung teńsizligi, Gelder teńsizligi.

3. Funkciyanıń monotonlıq qásiyeti járdeminde dálillenetuǵin teńsizlikler.

4. Funkciyanıń dóńeslik qásiyeti járdeminde dálillenetuǵın teńsizlikler.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń obekti hám predmeti: funkciyaníń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillew usıllarına baylanıslı bolǵan bazı bir máselelerge arnaladı.

Izertlew predmeti hám maqseti tómendegi máselelerdi sheshiwdi talap etti:
Jumıstıń temasına baylanıslı tiykarǵı oqıw hám arnawlı ádebiyatlardı úyrenip shıǵıw;
Máseleler sheshiwde kórsetkishli hám logarifmlik funkciyalardıń elementar qásiyetlerin biliw;

Matematikalıq analiz hám algebranıń bazı bir máselelerinde, máselen, teńlemeler sistemasın sheshiwde, teńsizliklerdi dálillewde tiykarǵı elementar funkciyalar bolǵan kórsetkishli hám logarifmlik funkciyalardıń qásiyetlerin qollanıwǵa baylanıslı bolǵan úyreniletuǵın material tańlaw hám hár qıylı dárejedegi shınıǵıwlar sistemasın islep shıǵıw.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń dúzilisi hám strukturası:

Birinshi bap teńsizliklerge arnalǵan bolıp, ol toǵız paragraftan turadı: birinshi paragrafında Sanlı teńsizlikler haqqında bolsa, ekinshi paragrafde ─Kvadrat teńsizlikler, úshinshi paragrafında Irracional teńsizlikler, tórtinshi paragrafında Kórsetkishli teńsizlikler, besinshi paragrafında Logarifmlik teńsizlikler, altınshı paragrafında Orta mánisler hám olar arasındaǵı qatnaslar, jetinshi paragrafında Ulıwmalasqan Koshi teńsizligi, segizinshi paragrafında Ulıwmalasqan Yung teńsizligi, toǵızınshı paragrafında Gelder teńsizligi anıq Mısallarda keltirilgen.

Ekinshi tiykarǵı bapta Funkciyanıń qásiyetleri járdeminde teńsizliklerdi dálillew usılları qarap shıǵılǵan. Bul bap eki paragraftan ibarat bolıp, birinshi paragrafda Funkciyanıń monotonlıq qásiyeti járdeminde dálillenetuǵin teńsizlikler keltirilgen bolsa, ekinshi paragrafda Funkciyanıń dońeslik qásiyeti járdeminde dálillenetuǵın teńsizlikler jóninde ayırım ápiwayı usılları qarastırılǵan hám anıq mısallar menen úyrenilgen.

I-BAP.Teńsizlikler haqqında

1-§. Sanlı teńsizlikler haqqında.

1.Sanlı teńsizlikler hám olardıń qásiyetleri.

Anıqlama 1.1.1: Eger $a-b$ ayırma oń san bolsa, a sanı b sanınan úlken dep ataladı hám bul qatnas $a>b$ kórinisinde jazıladı. Eger $a-b$ ayırma teris bolsa, a sanı b sanınan kishi dep ataladı hám $a<b$ kórinisinde jazıladı.

Qálegen a hám b sanlar ushın tómendegi úsh qatnastan tek ǵana birewi orınlı:

1. $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$
2. $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$
3. $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

Sanlı teńsizlikler tómendegi qásiyetlerge iye:

1^0. Eger $a>b$ hám $b>c$ bolsa, $a>c$ boladı (teńsizlik qatnasınıń tranzitivlik qásiyeti).

2^0. Eger $a>b$ hám $c\in R$ bolsa, $a+c>b+c$ boladı.

3^0. Eger $a>b$ hám $c>0$ bolsa, $a\cdot c>b\cdot c$ boladı.

4^0. Eger $a>b$ hám $c<0$ bolsa, $a\cdot c<b\cdot c$ boladı.

5^0. Eger $a>b$ hám $c>d$ bolsa, $a+c>b+d$ boladı.

6^0. Eger $a>b>0$ hám $c>d>0$ bolsa, $a\cdot c>b\cdot d$ boladı.

7^0. Eger $a>b>0$ hám $n\in N$ bolsa, $a^n>b^n$ boladı (n - taq san bolǵanda $b>0$ shárt artıqsha).

2. Teńsizliklerdi dálillewlerdiń usılları haqqında.

Mısal 1. Qálegen a,b hám c sanları ushın $2a^2+b^2+c^2\geq 2a(b+c)$ ekenligin dálilleń.

Sheshiliwi. Qálegen a,b hám c sanları ushın $(2a^2+b^2+c^2)-2a(b+c)$ ayırmanı teris emesligin kórsetemiz:

$$(2a^2+b^2+c^2)-2a(b+c)=(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)=$$

$$=(a-b)^2+(a-c)^2.$$

Qálegen sannıń kvadratı teris emes san bolǵanı ushın $(a-b)^2 \geq 0$ hám $(a-c)^2 \geq 0$. Solay eken, $\left(2a^2+b^2+c^2\right)-2a\left(b+c\right)$ qálegen a,b hám c sanları ushın teris emes. Sol sebepli berilgen teńsizlik qálegen a,b hám c sanları ushın orınlı. Atap aytqanda, teńlik belgisi $a=b=c$ bolǵandaǵana orınlanadı. Δ

Teńsizliktiń durıs ekenligin kórsetiw ushın onıń hár eki bóleginiń ayırmasın oń yamasa teris ekenigin anıqlaw, yaǵnıy 1-Mısaldaǵı sıyaqlı anıqlamadan paydalanıp dálillewge háreket qılıw ayırım jaǵdaylarda júdá qıyın boladı. Sonıń ushın teńsizliklerdi dálillewde teńsizliklerdiń qásiyetlerinen paydalanıladı.

Mısal2. Oń a,b hám c sanları ushın $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi: Teńsizliktiń shep bóleginde almastırıw orınlap, onı tómendegi kóriniste jazamız:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 6. \qquad (1.1.1)$$

Eki oń san ushın orta arifmetikalıq hám orta geometriyalıq mánisler arasındaǵı Koshi teńsizliginen paydalanamız:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2, \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2.$$

Bul teńsizliklerdi aǵzama-aǵza qosıp, (1.1.1) teńsizlikti payda etemiz.

2-§. Kvadrat teńsizlikler

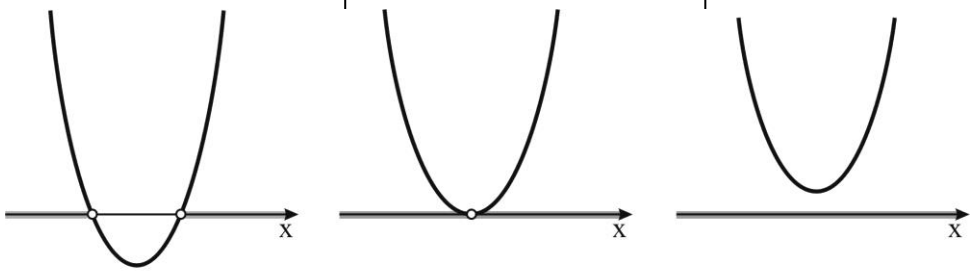
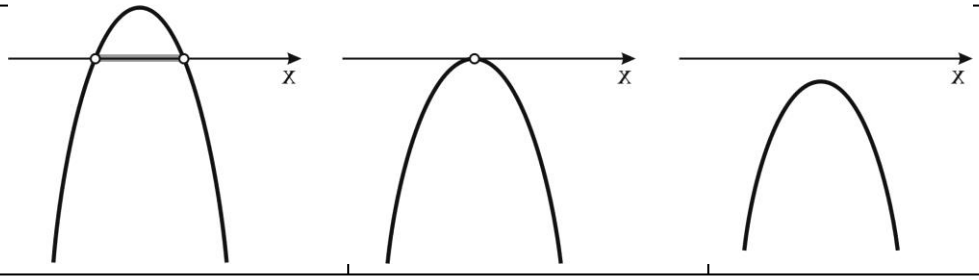
Mektep matematika kursında $ax^2+bx+c \geq 0$ kórinisindegi teńsizlikti sheshiwde kvadrat úshaǵzalınıń qásiyetlerinen kelip shıǵatuǵın nátiyjelerge tiykarlanadı. Bunday usıl óziniń bir qansha qıyınshılıqlarına iye.

Bir ózgeriwshili ekinshi dárejeli teńsizliklerdi sheshiw házirgi kúnde VIII klass oqıw baǵdarlamasına kiritilgen. $ax^2+bx+c \geq 0$ kórinisindegi teńsizliklerdi sheshiwde kvadrat funkciya grafiginiń Ox kósherine salıstırǵanda jaylasıwı haqqındaǵı aytımlarǵa tiykarlanadı. Kvadrat funkciyanıń grafigi tómendegi eki shárt penen anıqlanadı:

1) $ax^2 + bx + c$ kvadrat úshaǵzalınıń diskriminantı D nıń mánisi oń san, nol, teris san boladı;

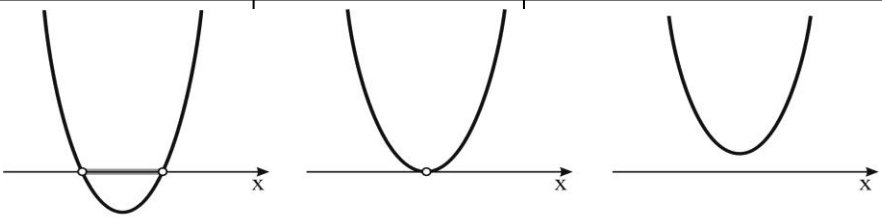
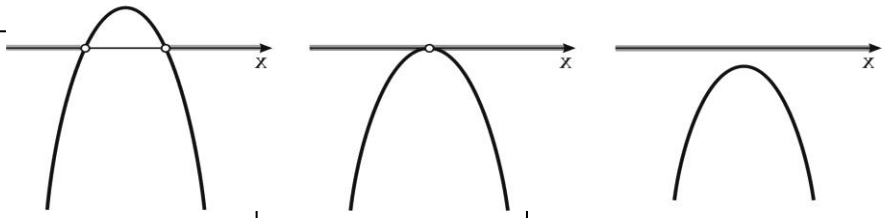
2) a koefficientiniń belgisi qanday. a koefficientiniń hám D diskriminantınıń mánisine baylanıslı $ax^2 + bx + c$ kvadrat funkciyanıń grafiginiń jaylasıw sxemasın keltiremiz.

2-keste

$ax^2 + bx + c > 0$			
	D> 0	D = 0	D < 0
a> 0			
a< 0			

Belgili bir shınıǵıwlar nátiyjesinde oqıwshılar bunday sistemalardı qollanıwdı úyrenedi.

Joqarıdaǵıǵa uqsas $ax^2 + bx + c < 0$ kórinisindegi teńsizliktiń sheshimleri sxemasın dúziw múmkin.

$ax^2 + bx + c < 0$			
	D> 0	D = 0	D < 0
$a > 0$			
$a < 0$			

Mısal 1. Qanday shártler orınlanǵanda $ax^2 + bx + c > 0$ teńsizliktiń sheshimi $ax^2 + bx + c$ kvadrat úshaǵzalınıń korenleri arasında jaylasadı?

Sheshiliwi. $y = ax^2 + bx + c$ funkciyasın qarastıramız. Bul funkciyanıń grafigi paraboladan ibarat boladı.

1) Eger $a > 0$ bolsa, onda parabolanıń shaqaları joqarıǵa qaraǵan. Bunnan eki jaǵday kelip shıǵadı:

a) eger $D > 0$ bolsa, onda parabola Ox kósheri menen eki kesilisiw noqatına iye, demek, $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ mánisleri teńsizliktiń sheshimi boladı, biraq olar qoyılǵan másele shártin qanaatlandırmaydı.

b) eger $D < 0$ bolsa, onda parabola Ox kósheri menen kesilisiw noqatına iye emes. Teńsizliktiń sheshimi barlıq haqıyqıy sanlardan ibarat boladı hám bul qoyılǵan másele shártin qanaatlandırmaydı.

2) Eger $a < 0$ bolsa, onda parabolanıń shaqaları tómenge qaraǵan boladı. Bunnan úsh jaǵday kelip shıǵadı:

a) eger $D < 0$ bolsa, onda sheshimi joq.

b) eger $D = 0$ bolsa, onda sheshimi joq.

c) eger $D > 0$ bolsa, onda $x \in (x_1; x_2)$ - bul mánisler máseleniń shártin qanaatlandıradı.

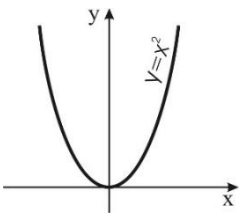
Demek, $D > 0$, $a < 0$ bolǵanda $ax^2 + bx + c > 0$ teńsizliktiń sheshimi $ax^2 + bx + c$ kvadrat úshaǵzalınıń korenleri arasında jaylasadı.

Juwap: $D > 0$, $a < 0$ bolǵanda.

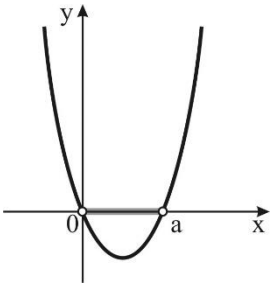
Anıq mısallar keltiremiz.

Endi $y = x^2 - ax$ funkciyasın qarastıramız. Funkciyanıń grafigi shaqaları joqarıǵa qaraǵan parabola boladı.

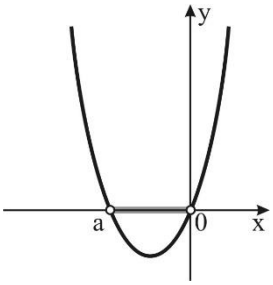
1) Eger $a = 0$ bolsa, onda $x^2 < 0$ $\varnothing$.



2) Eger $a > 0$ hám $D > 0$ bolsa, onda $0 < x < a$

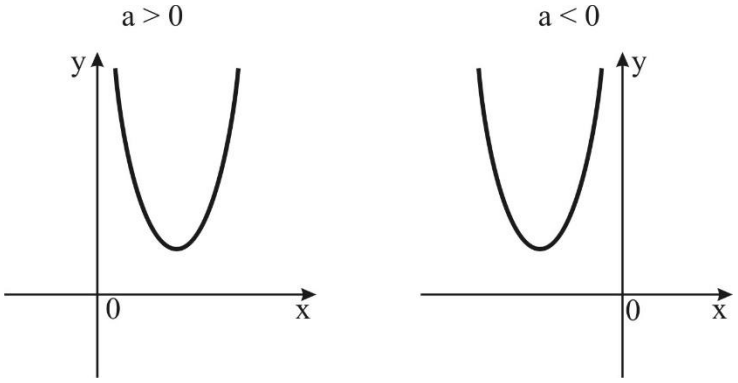


3) Eger $a < 0$ hám $D > 0$ bolsa, onda funkciyanıń grafigi



kórinisinde bolıp, $a < x < 0$ boladı.

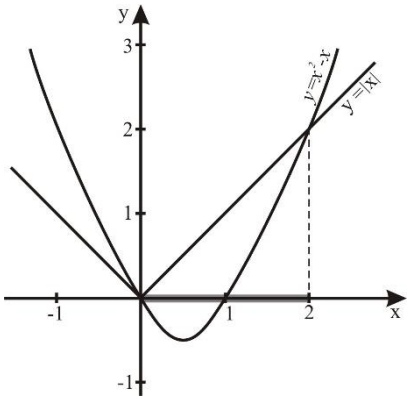
4) Eger $D < 0$ bolsa, onda teńsizlik sheshimge iye bolmaydı



Juwap: $a > 0$ hám $D > 0$ bolǵanda, $0 < x < a$; al $a < 0$ hám $D > 0$ bolǵanda, $a < x < 0$.

Endi quramalıraq kórinisindegi teńsizliklerdi sheshemiz.

Mısal 2. $|x| > x^2 - x$ teńsizlikti sheshiń. $y = f_1(x) = |x|$, $y = f_2(x) = x^2 - x$



Sheshiliwi. 1. $f_1(x)$ hám $f_2(x)$ funkciyalardıń grafiklerin sızamız.

2. $y = f_1(x)$ funkciyasınıń grafigi $y = f_2(x)$ funkciyasınıń grafiginen joqarıda jaylasatuǵın haqıyqıy x sanla rkópligi teńsizliktiń sheshimi boladı.

3. Joqarıdaǵı súwretten belgili $|x| > x^2 - x$ teńsizliktiń sheshimi $0 < x < 2$ intervalınan alınǵan barlıq x lardan ibarat.

Juwap: $x \in (0;2)$.

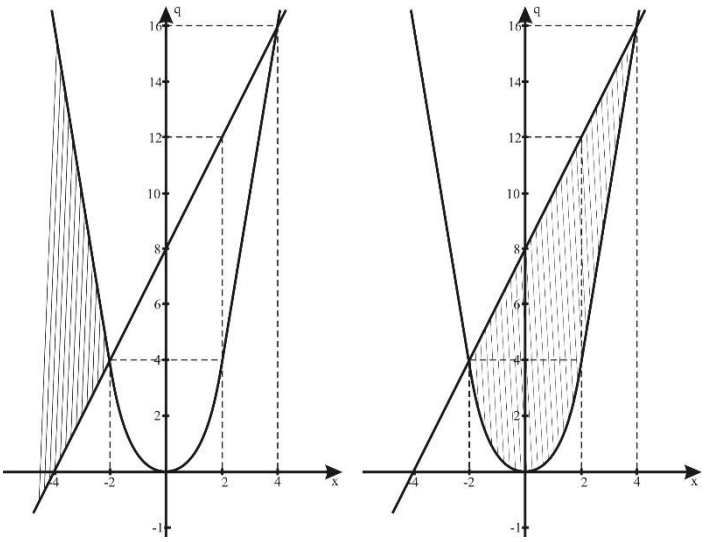
Mısal3. $(x^2 - q)(q - 2x - 8) > 0$ teńsizliktiń sheshimler kópligi $x^2 \le 4$ teńsizliktiń birde-bir sheshimin óz ishine almaytuǵın q parametriniń mánislerin tabıń.

Sheshiliwi. $(x^2 - q)(q - 2x - 8) > 0$ teńsizligi tómendegi eki teńsizlikler sistemasına teń kúshli:

1) $\begin{cases} x^2 - q > 0, \\ q - 2x - 8 > 0; \end{cases}$ hám 2) $\begin{cases} x^2 - q < 0, \\ q - 2x - 8 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} q < x^2, \\ q > 2x + 8; \end{cases}$ $\begin{cases} q > x^2, \\ q < 2x + 8; \end{cases}$

xOq tegisliginde bul sistemanıń sheshimin súwretleymiz (1-súwret).



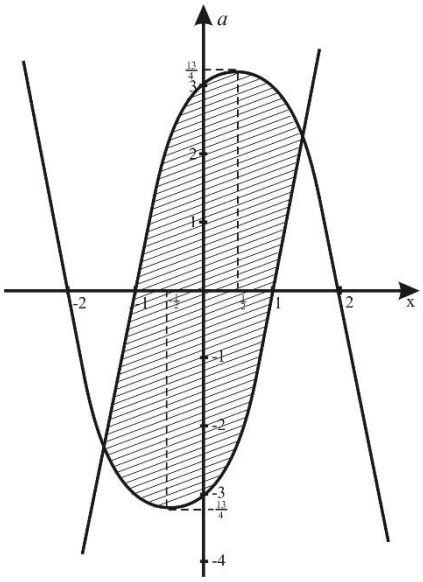
1-súwret

$x \in [-2;2]$ mánisler kópligi $x^2 \le 4$ teńsizliktiń sheshimi boladı. Sonıń ushın joqarıdaǵı teńsizliklerdiń sheshimi $-2 \le x \le 2$ aralıqqa tiyisli bolmawı kerek.

Grafikten (1-súwret) kórinipturǵanınday, $q \le 0$ hám $q \ge 12$ bolǵandateńsizliktiń sheshimi $-2 \le x \le 2$ aralıqqatiyislibolmaydı.

Juwap: $q \in (-\infty;0] \cup [12;+\infty)$ bolǵanda berilgen teńsizliktiń sheshimler kópligi $x^2 \le 4$ teńsizliktiń birde-bir sheshimin óz ishine almaydı.

Mısal 4. $3-|x-a| > x^2$ teńsizligi hesh bolmaǵanda jalǵız teris sheshimge iye bolatuǵın a parametriniń mánislerin tabıń.



Sheshiliwi. Bul teńsizlikti grafik usılda sheshemiz. Bunıń ushın xOa koordinatalar sistemasında funkciyanıń grafigin sızamız:

1) $a = x^2 + x - 3$, ushlarınıń koordinataları $\left(-\frac{1}{2};-\frac{13}{4}\right)$;

2) $a = -x^2 + x + 3$, ushlarınıń koordinataları $\left(\frac{1}{2};\frac{13}{4}\right)$.

Shártke kóre teńsizliktiń sheshimi teris bolıwı kerek, onda súwrettegi grafikten belgili, $a \in \left(-3\frac{1}{4};3\right)$.

Juwap: $a \in \left(-3\frac{1}{4};3\right)$.

3-§. Irracional teńsizlikler

Irracional teńsizliklerdi sheshiwde tómendegi teń kúshli teoremalardan paydalanıladı.

Teorema 1.3.1. n natural sanlarda $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x)$ teńleme

$$\begin{cases} f(x) = (\varphi(x))^{2n}; \\ \varphi(x) \ge 0. \end{cases}$$

sistemaǵa teń kúshli.

Teorema 1.3.2. $n \in R$ ushın $\sqrt[2n]{f(x)} < \varphi(x)$ teńsizlik

$$\begin{cases} f(x) < (\varphi(x))^{2n}; \\ f(x) \geq 0; \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

teńsizlikler sistemasına teń kúshli.

Teorema 1.3.3. $n \in R$ ushın $\sqrt[2n]{f(x)} > \varphi(x)$ teńsizligi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0; \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \text{ hám } \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) > (\varphi(x))^{2n} \end{cases}$$

teńsizlikler sistemasına teń kúshli.

Bul teoremalardan irracional teńsizliklerdi sheshiw racional teńlemelerdi sheshiwge alıp kelinetuǵınlıǵı kelip shıǵadı. İrracional teńsizliklerdi sheshiwde funkciyanıń qabıl etiwi múmkin bolǵan oblastqa itibar beriw júdá áhmiyetke iye.

Máselen, tómendegi sistemalardı sheshemiz:

а) $\sqrt{3x+2} < 1$ teńsizligi $\begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ 3x+2 < 1 \end{cases}$ bolǵanda orınlanadı;

б) $\sqrt{4x^2+5x-6} < 0$ teńsizliktiń anıqlanıw oblastı anıqlamasınan x tiń hesh bir mánisinde orınlanbaydı;

в) $\sqrt{x+1} < a$ teńsizlik tek ǵana $a > 0$ hám $x < -1$ bolǵanda orınlı;

г) $\sqrt{x-2} \geq a$ teńsizligi qálegen a da hám $x \geq 2$ bolǵanda orınlı;

д) $\sqrt{15-x} \leq x+5$ kvadrat korenniń anıqlamasınan bul teńsizliktiń shep tárepi teris emes bolıwı kerek, onda anıqlanıw oblastın esapqa alǵan halda berilgen teńsizlik

$$\begin{cases} 15-x \geq 0; \\ x+5 \geq 0; \\ 15-x \leq x^2+10x+25. \end{cases}$$

teńsizlikler sistemasına teń kúshli boladı.

Demek, irracional aǵlatpa qatnasqan teńsizliklerdi sheshiwde teńsizlik quramındaǵı funkciyanıń qásiyetlerin esapqa alıw kerek.

Mısal 1. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$ teńlemeniń barlıq sheshimleri [2;17] kesindige tiyisli bolatuǵın *a*-nıń barlıq mánislerin tabıń.

Sheshiliwi.

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ x = y^2 + 1 \end{cases}$$

almastırıwın kiritemiz.

Shárt boyınsha $2 \le x \le 17 \Leftrightarrow 1 \le x-1 \le 16 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{x-1} \le 4$, yaǵnıy $1 \le y \le 4$.

Almastırıwdan keyin teńleme

$$\sqrt{y^2+4-4y}+\sqrt{y^2+9-6y}=a \Leftrightarrow \sqrt{(y-2)^2+\sqrt{(y-3)^2}}=a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |y-2|+|y-3|=a$$

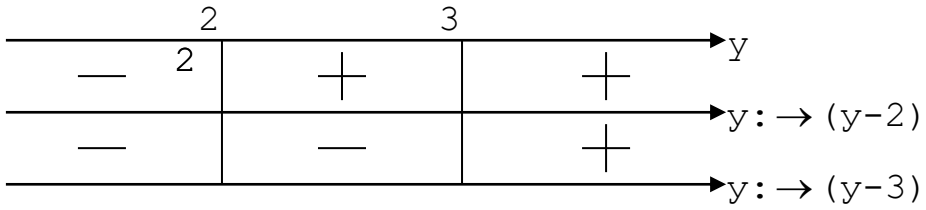
Kóriniske keledi.

Endi qoyılǵan máseleni tómendegishe almastıramız.

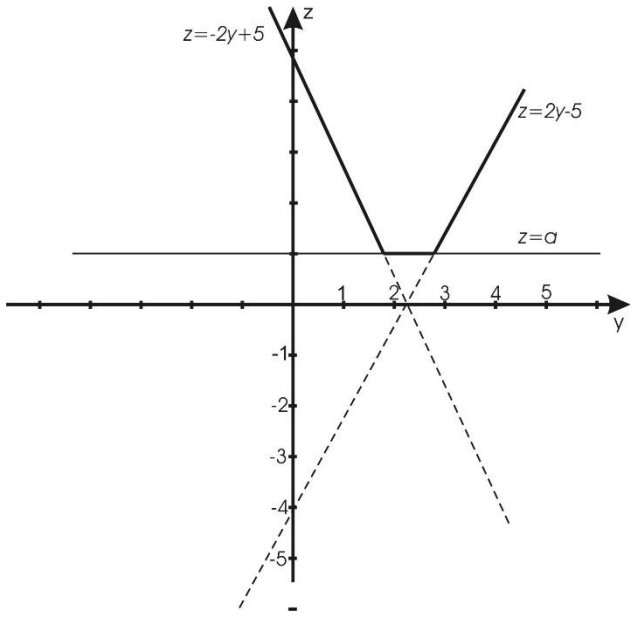
$|y-2|+|y-3|=a$ teńlemeniń sheshimi bar boladı hám $1 \le y \le 4$ kesindisine tiyisli bolatuǵın *a*-nıń barlıq mánislerin tabıń.

Sheshimdi tabıw ushın grafikalıq usıldan paydalanamız. $z=|y-2|+|y-3|$ funkciyasınıń grafigin sızamız. Sonıń ushın belgiler sxemasın dúzemiz hám hár qıylı aralıqlarda *z* funkciyası ushın ańlatpalar dúzemiz.

$y-2=0;\ y_1=2;\ y-3=0;\ y_2=3.$



$$z=|y-2|+|y-3|=\left[\begin{array}{l} -y+2-y+3=-2y+5,\ \ eger\ \ ó<2; \\ y-2-y+3=1,\ \ eger\ \ \le 2\,ó<3; \\ y-y+y-3=2y-5,\ \ eger\ \ ó\ge 3; \end{array}\right.$$



$z(1) = -2 + 5 = 3;$

$z(4) = 2 \cdot 5 - 5 = 3$ mánislerin tabamız.

Eger a nıń hár túrli mánisleri ushın $z = a$ gorizontal tuwrı sızıqlar júrgizsek, onda grafikten belgili, $a \in [1;3]$ mánisleri ushın sonday $z = a$ tuwrısı bar boladı:

1) funkciya grafigi menen kesilisedi;

2) barlıq kesilisiw noqatlarınıń abscissası [1; 4] kesindisine tiyisli boladı, onda máseleniń shárti orınlanadı.

Juwap: $1 \le a \le 3$.

Mısal 2. Tómendegi teńlemeler sistemasın sheshiń

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} = 1; \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1. \end{cases}$$

Sheshiliwi. Birinshi teńlemeden ekinshi teńlemeni ayıramız. Sonda $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{y+a} + \sqrt{y+b}$ teńligine iye bolamız. Endi $f(t) = \sqrt{t+a} + \sqrt{t+b}$ funkciyasın qarastıramız. Bul ósiwshi funkciya hám $f(x) = f(y)$ teńligi orınlı boladı. Nátiyjede, $x = y$. Bunnan $\sqrt{x+a} = \sqrt{x+b} = 1$.

Keyingi teńleme tómendegi sistemaǵa teń kúshli

$$\begin{cases} x \ge -a, \\ x \ge -b, \\ x + a = 1 + 2\sqrt{x+b} + x + b; \end{cases} \begin{cases} x \ge -a, \\ x \ge -b, \\ 2\sqrt{x+b} = a - b - 1; \end{cases} \begin{cases} x \ge b + 1, \\ x \ge -b, \\ x = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b; \end{cases}$$

Sonıń menen birge $x = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b \ge -b$.

Juwap: Eger $a \ge b + 1$ bolsa, onda $x = y = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b$;

Eger $a < b+1$ bolsa, onda sheshimi joq.

Mısal 3. $\dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x+2\sqrt{x-4}-2}$ ańlatpası eń úlken mániske erisetuǵın x tıń mánislerin tabıń.

Sheshiliwi *(1-usıl tuwındı járdeminde).*

Berilgen funkciyanıń tuwındısın tabamız:

$$y=\frac{\sqrt{x-4}+1}{x+2\sqrt{x-4}-2},\ y'=\left(\frac{\sqrt{x-4}+1}{x+2\sqrt{x-4}-2}\right)'=\frac{(\sqrt{x-4}+1)'z-z'(\sqrt{x-4}+1)}{z^2},$$

bunda $z=x+2\sqrt{x-4}-2$.

Tuwındınıń belgisi úlken áhmiyetke iye, berilgen funkciya tuwındısınıń bólimi oń, onda alımınıń belgisin tekseriw jeterli:

$$(\sqrt{x-4}+1)'z-z'(\sqrt{x-4}+1)=\frac{x+2\sqrt{x-4}-2}{2\sqrt{x-4}}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{x-4}}\right)(\sqrt{x-4}+1)=$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x-4}-2-2(\sqrt{x-4}+1)^2}{2\sqrt{x-4}}=-1-\frac{\sqrt{x-4}}{2}.$$

Demek, tuwındı teris, onda berilgen funkciya kemiwshi hám berilgen ańlatpa óziniń anıqlanıw oblastınıń minimal mánisinde óziniń eń úlken mánisine erisedi, yaǵnıy $x = 4$ noqatında.

2-usıl. Ózgeriwshini $t=\sqrt{x-4}$ kórinisinde almastırsaq, onda $y=\dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x+2\sqrt{x-4}-2}=\dfrac{t+1}{t+4+2t-2}=\dfrac{t+1}{(t+1)^2+1}$ boladı. Endi y^{-1} keri ańlatpanı qarastıramız hám onı minimumǵa tekseremiz.

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{(t+1)^2+1}{t+1}=(t+1)+\dfrac{1}{t+1}=\left(\sqrt{t+1}-\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\right)^2+2\geq 2$ teńsizliktiń belgisi, yaǵnıy ańlatpa eń kishi mániske $\sqrt{t+1}=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\Leftrightarrow t+1=1\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=4$ bolǵanda erisedi.

Juwap: $x = 4$.

Sheshimdi tabıwdıń ekinshi usılı qısqa hám tradiciyalıq emes. Bul usılda jańa ózgeriwshini kiritiw talap etiledi, keri ańlatpaǵa ótip, $(t+1)+\frac{1}{t+1}$ ańlatpanıń eń kishi mánisi izlenedi. Jaqsı tayarlanǵan oqıwshı oń sanlar ushın $a+b>2\sqrt{ab}$ teńsizliginiń orınlı ekenligine tez túsinip jetedi.

Tómendegi teńsizlikti qarastıramız.

$$\sqrt{f(x)}\cdot g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)-aniqlangan; \end{cases} \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)>0; \end{cases}$$

4-§. Kórsetkishliteńsizlikler

Meyli a – fiksirlengen san bolıp, $a>0$ hám $a\neq 1$ shártlerin qanaatlandırsın.

$$a^x > b \qquad (1.4.1)$$

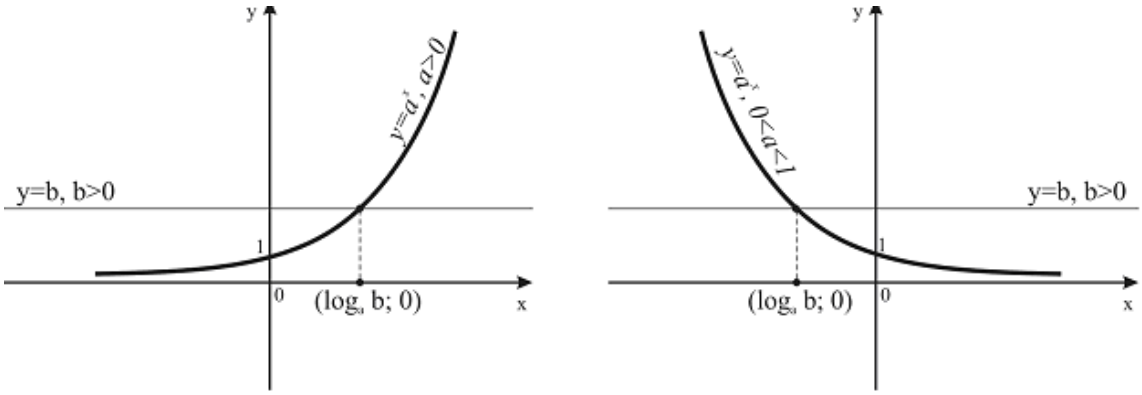
$$a^x < b \qquad (1.4.2)$$

Kórinisindegi teńsizliklerdi qarastıramız.

Bul teńsizliklerdiń múmkin bolǵan mánisler oblastı barlıq sanlar kósheri menen ústpe-úst túsedi, $y=a^x$ funkciyası oń hám qatań monoton, nátiyjede, $b\leq 0$ bolǵanda (1.4.1) teńsizlik qálegen x ushın orınlı, (1.4.2) teńsizlik bolsa sheshimge iye emes. $b>0$ bolǵanda eki jaǵdaydı qarastırıw kerek: $a>1$ hám $1>a>0$.

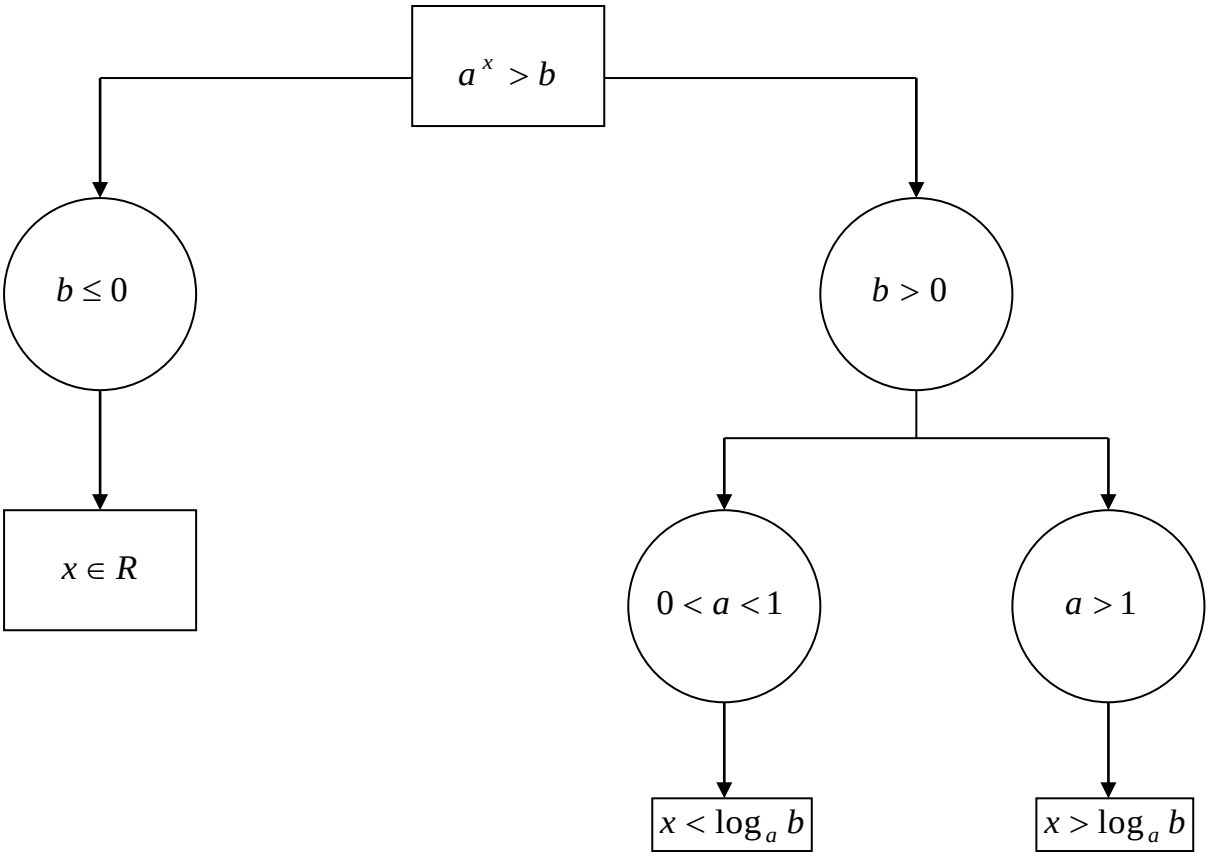
Meyli $a>1$ bolsın, onda barlıq sanlar kósherinde $y=a^x$ funkciyası ósiwshi boladı (8-súwret). $x_0=\log_a b$ noqatında mánisi b ǵa teń hám sonıń menen birge (1.4.1) teńsizliktiń sheshimi barlıq $x\in(x_0;+\infty)$ orınlı bolıp, (1.4.2) teńsizliktiń sheshimi bolsa barlıq $x\in(-\infty;x_0)$ -de orınlı boladı.

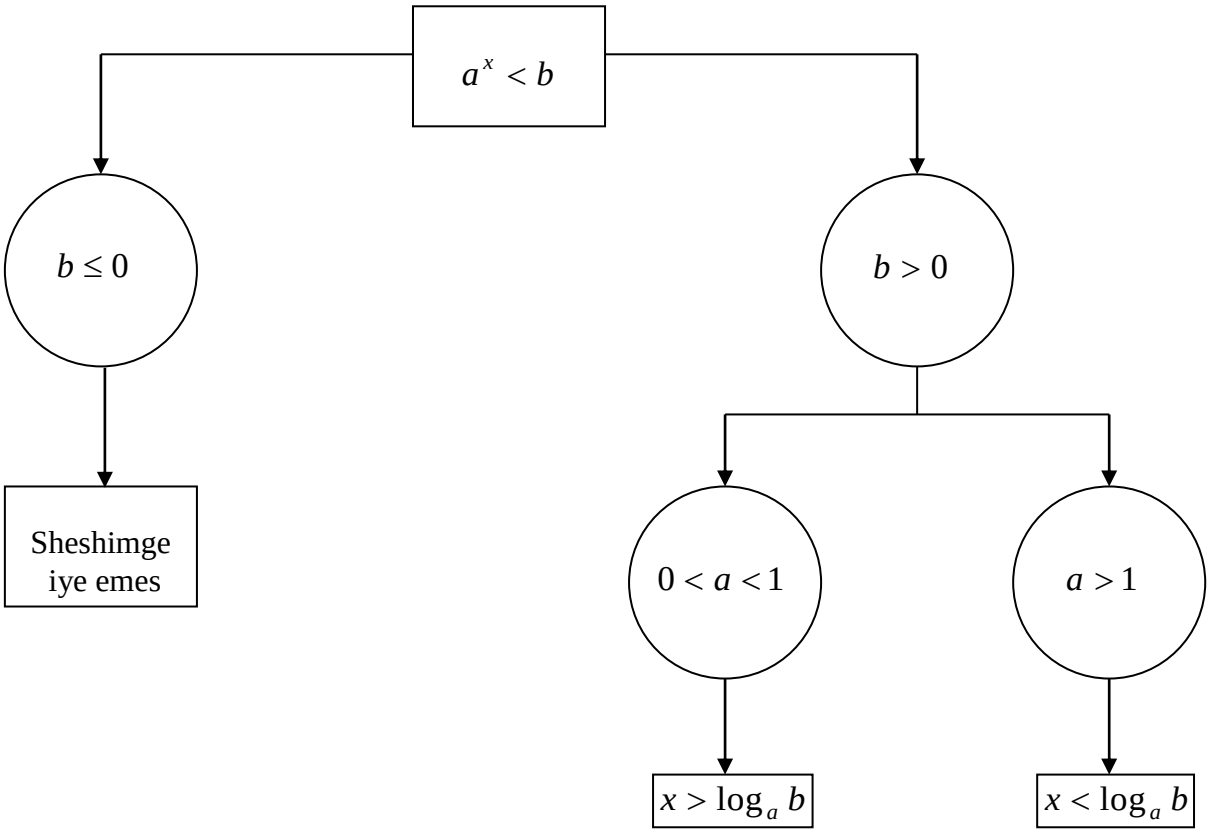
Meyli $0<a<1$ bolsın, onda $y=a^x$ funkciyası barlıq sanlar kósherinde kemeyiwshi boladı (9-súwret), sonıń ushın (1) teńsizliktiń sheshimi $x\in(-\infty;x_0)$, al (1.4.2) teńsizliktiń sheshimi bolsa $x\in(x_0;+\infty)$, bunda $x_0=\log_a b$.



2-súwret

Joqarida aytilǵan teoriyaniń ha’mmesin tó’mendegi sxemada kórsetemiz:





3-súwret

Mısal 1..*a* parametriniń hár bir mánisi ushın

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}$$

Teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi.Berilgen teńsizlikti tómendegi kóriniste jazamız:

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{(a-1)\log_3 2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > (a-1)\log_3 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} a-1 \ge 0, \\ (a+1) > (a-1)^2 \log_3^2 2; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} a-1 < 0, \\ x+1 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} a \ge 1, \\ x > 1 + (a-1)^2 \log_3^2 2; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} a < 1, \\ x \ge -1; \end{cases} \end{array}\right.$$

Juwap: $a < 1$ bolǵanda $x \ge -1$; $a \ge 1$ bolǵanda $x > -1 + (a-1)^2 \log_3^2 2$.

Bul paragrafta kórsetkishli funkciyanıń qásiyetlerine tiykarlanıp, hár túrli tiptegi kórsetkishli teńsizliklerdi ápiwayı kórsetkishli teńsizliklerdi sheshiwge alıp keliw múmkinligin kórsetemiz.

Endi $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C \ge 0$ kórinisindegi teńsizlikti qarastıramız.

$a^x = y > 0$ belgilewin kiritip, nátiyjede $Ay^2 + By + C \geq 0$ teńsizligine iye bolamız. Meyli keyingi teńsizliktiń sheshimi:

$$\left[\begin{array}{l} y \leq y_1 < 0, \\ y \geq y_2 > 0; \end{array}\right.$$

Bunda $y_1 = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ hám $B^2 - 4AC > 0$ kórinisinde bolsın.

Onda ápiwayı teńsizlik $a^x \leq y_1 < 0$ sheshimge iye bolmaydı, $a^x \geq y_2$ teńsizligi bolsa 3-súwrettegi sxema boyınsha sheshiledi.

Juwap: $0 < a < 1$ bolǵanda $x \leq \log_a y_2$, al $a > 1$ bolǵanda $x \geq \log_a y_2$ boladı.

Endi $(f(x))^{\varphi(x)} < 1; (f(x))^{\varphi(x)} > 1$ tipindegi teńsizliklerdi qarastıramız:

$$(f(x))^{\varphi(x)} < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 0; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$(f(x))^{\varphi(x)} > 1$ kórinisindegi teńsizlik te usıǵan uqsas sheshiledi:

$$(f(x))^{\varphi(x)} > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

Mısal 2. $|x|^{x^2 - x - 2} < 1$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi. Joqarıdaǵı sxema boyınsha bul teńsizlik:

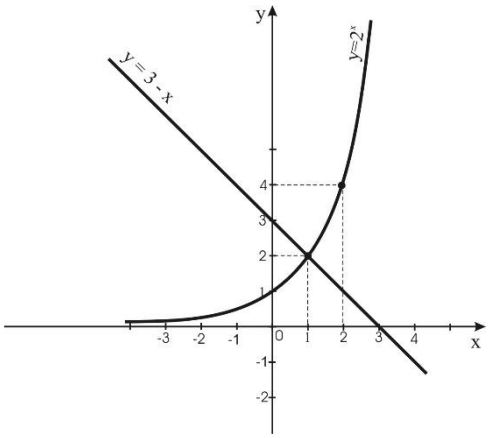
$$\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} |x| > 0, \\ x^2 - x - 2 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} -1 < x < 0;\ 0 < x < 1, \\ x < -1;\ x > 2; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} x < -1;\ x > 1, \\ -1 < x < 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\varnothing \\ 2) 1 < x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

teńsizlikler sistemasına teń kúshli.

Juwap: $1 < x < 2$.

Joqarıda keltirilgen teńsizliklerden tısqarı analitikalıq usıl menen sheship bolmaytuǵın, biraq grafik usılda sheshiletuǵın teńsizlikler de bar.

Mısal 3. Tómendegi teńsizliklerdi sheshiń:



a) $2^x \le 3 - x$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le 2x + 5$.

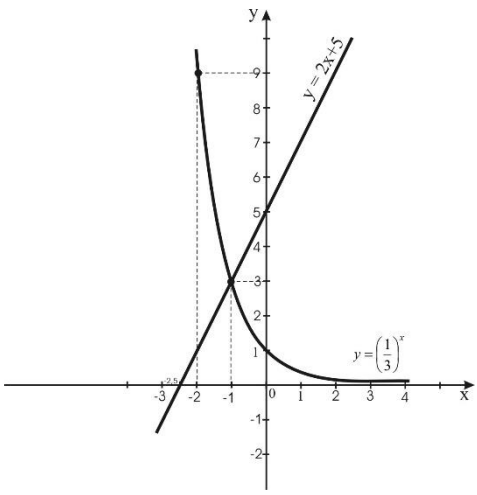
Sheshiliwi. a) $2^x \le 3 - x$ teńsizlikti grafik usılda sheshiw ushın $y = 2^x$, $y = 3 - x$ funkciyaların qarastıramız.

1. $y = 2^x$ hám $y = 3 - x$ funkciyalarınıń grafiklerin sızamız.
2. Funkciyalardıń grafikleriniń kesilisiw noqatın tabamız $x = 1$.
3. Berilgen teńsizliktiń sheshimi $y = 2^x$ funkciyasınıń grafigi $y = 3 - x$ funkciyasınıń grafiginen tómende jatatuǵın mánislerinen ibarat boladı.

Juwap: $x \in (-\infty; 1]$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le 2x + 5$ teńsizligin sheshiw ushın $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 2x + 5$ funkciyaların qaraymız:

1. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 2x + 5$ funkciyalarınıń grafiklerin sızamız.



2. Funkciyalardıń grafikleriniń kesilisiw noqatın tabamız.
3. Berilgen teńsizliktiń sheshimi $x\, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funkciyasınıń grafigi $y = 2x + 5$ funkciyasınıń grafiginen tómende jatatuǵın mánislerinen ibarat boladı.

Juwap: $x \in [-1; +\infty)$.

Qosımsha shártler menen berilgen teńsizliklerdi sheshiwge mısallar keltiremiz.

Mısal 4. a nıń qanday mánislerinde $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ ańlatpanıń mánisi $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ ańlatpanıń mánislerinen barlıq x lar ushın úlken boladı?

Sheshiliwi. Eki ańlatpada da dárejelerdi birdey tiykarǵa keltirip alamız:

$$(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}=5^{\log_5(1-|x|)\log_5(1-|x|)-|a-1|}$$

$$0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}=5^{0{,}5\cdot 2\log_5(1-|x|)+a^2-4}=5^{\log_5(1-|x|)+a^2-4}$$

1. $t=\log_5(1-|x|)$ belgilewin kiritemiz. Onıń eń úlken mánisi nolge teń, $x\to 1$ da ózgeriwshi $t\to\infty$ boladı. Funkciyanıń úzliksizliginen $E(t)=(-\infty;0]$.

2. t ǵa qarata $t(t-(a-1))>t+a^2-4$, $t\le 0$ yáki $t^2-(|a-1|+1)t+4-a^2>0,\ \ t\le 0$ teńsizliklerge iye bolamız.

3. Parabolanıń ushınıń abscissası oń, shaqaları joqarıǵa baǵıtlanǵan. Demek, bul teńsizlik barlıq oń t-lar ushın tek sonda ǵana coefficient oń bolǵanda orınlı boladı. Nátiyjede, $a^2<4$.

Juwap: (-2; 2).

5-§. Logarifmlik teńsizlikler

Meyli a – fiksirlengen san bolıp, $a>0$ hám $a\ne 1$ shártleri orınlı bolsın.

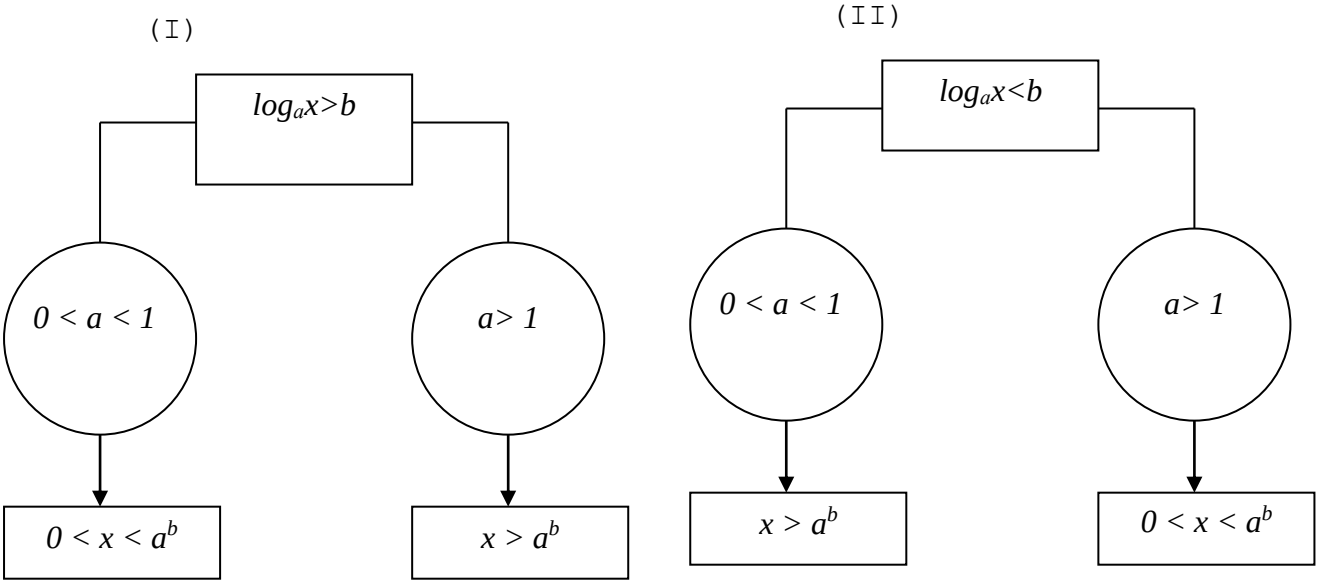
$$\log_a x>b \qquad (1.5.1)$$

$$\log_a x<b \qquad (1.5.2)$$

kórinisindegi teńsizliklerdi qarastıramız.

Bul teńsizliklerdiń múmkin bolǵan mánisler kópligi oń yarım kósherden ibarat. Logarifmlik funkciyanıń qásiyetleri tiykarı birden úlken hám birden kishi bolǵanda hár qıylı boladı, onda $a>1$ hám $0<a<1$ bolǵan jaǵdaylardı bólek qarastıramız.

Tómende logarifmlik teńsizliklerdiń sxemasın keltiremiz.



Mısal 1. x-tıń barlıq mánisleri ushın $\log_a(x^2+4)>1$ teńsizligi orınlı bolatuǵın a parametriniń mánislerin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasına teń kúshli boladı:

$$\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0<a<1, \\ x^2+4<a; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} a>1, \\ x^2+4>a; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\ \varnothing, \\ 2)\begin{cases} a>1, \\ x^2>a-4; \end{cases} \end{array}\right.$$

1) sistema birde-bir x ushın orınlı emes, demek

$$x^2+4\geq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \begin{cases} a>1, \\ a<4, \\ x\in R. \end{cases} \end{array}\right.$$

Juwap: $1<a<4$.

Logarifm belgisi astında bir neshe hár túrli funkciyalar qatnasqan teńsizliklerdi sheshiwde, berilgen ańlatpanıń anıqlanıw oblastın tabıw usınıs etiledi hám onnan keyin túrlendiriw kerek.

Mısal 2. $(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)\leq 0$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńsizlikti sheshiw ushın onıń anıqlanıw oblastın tabıw júdá áhmiyetke iye.

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0, \\ x>0, \\ 8x-2x^2-6\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1; x\ge 3, \\ x>0, \\ 1\le x\le 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Berilgen teńsizliktiń anıqlanıw oblastı tek eki noqattan ibarat ekenligine iye boldıq.

Bul noqatlardan qaysı biri teńsizlikti qanaatlandırıwın anıqlawımız kerek.

$x=1$ bolǵanda berilgen teńsizlik $\log_5\frac{1}{5}+1=0\le 0$ kórinistegi durıs teńsizlik kórinisinde jazıladı.

$x=-3$ bolǵanda $\log_5\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\le 0 \Leftrightarrow \log_5\frac{1}{5}\le -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow -log_5 5\le -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -1\le -\frac{1}{3}$ jalǵan teńsizlikke iye bolamız.

Juwap: $x=1$.

Endi mına

$$(I) \qquad \log_{f(x)}\varphi(x)\ge A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0<f(x)<1, \\ \varphi(x)>0 \\ \varphi(x)\le \left(f(x)\right)^A \end{cases} \\ 2)\begin{cases} f(x)>1, \\ \varphi(x)\ge \left(f(x)\right)^A; \end{cases} \end{array}\right.$$

kórinisindegi teńsizliklerdi qarastıramız.

Mısal 3. $\log_x(2x-\frac{3}{4})<2$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi. (I) sxemaǵa muwapıq, berilgen teńsizlik

$$\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0<x<1, \\ 2x-\dfrac{3}{4}>x^2 \end{cases} \\ 2)\begin{cases} x>1, \\ 2x-\dfrac{3}{4}>0, \\ 2x-\dfrac{3}{4}<x^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} x>1, \\ x>\dfrac{3}{8}, \\ x<\dfrac{1}{2}; x>\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<x<1, \\ x>\dfrac{3}{2}; \end{array}\right.$$

teńsizlikle r sistemasına teń kúshli.

Juwap: $\frac{1}{2}<x<1,\ x>\frac{3}{2}.$

Teńsizliklerdi sheshiwde tómendegi dálillewlerden paydalandıq:

Meyli $f(x)$ funkciyası E kesindisinde monoton ósiwshi bolıp, onıń sol kesindiniń noqatlarındaǵı barlıqmánisleri E kesindisine tiyisli bolsa, onda tómendegi teń kúshli qatnaslar orınlı:

$$\begin{cases} f(f(x))>x, \\ x\in E; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>x, \\ x\in E; \end{cases}$$

Nátiyje:

$$\begin{cases} f(f\ldots f(x)\ldots)>x, \\ x\in E; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>x, \\ x\in E. \end{cases}$$

Logarifmlik funkciyanıń anıqlanıw oblastın yáki mánisler oblastın tabıw ushın logarifmlik teńsizliklerdiń qollanılıwın kórsetemiz.

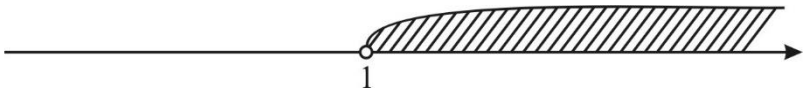
$y=\log_a f(x)$ logarifmlik funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıw ushın $f(x)>0$ shártin qanaatlandırıwshı $x>0$ sanları kópligin tabıwımız kerek. «Funkciya anıqlanǵan kesindiniń uzınlıǵın tabıw», «x tiń qanday pútin mánislerinde funkciya anıqlanǵan» sıyaqlı qosımsha shártli máselelerdi sheshiw eki basqıshta ámelge asırıladı:

I basqısh – $f(x)>0$ shárti orınlı bolatuǵın x tıń barlıq mánisleri tabıladı;

II basqısh – x tıń tabılǵan mánisleri arasınan qoyılǵan qosımsha shártlerdi qanaatlandırıwshı mánisleri tańlanadı.

Mısal 4. $y=\sqrt{\log_{0,5}(x-1)}$ funkciyas ıanıqlanǵan kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi. $x-1<0$ shártin qanaatlandırıwshı x tıń mánislerin tabamız, $x\in(1;+\infty)$.



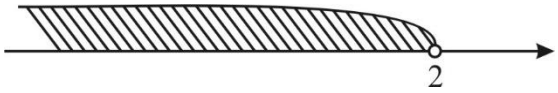
1) Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\log_{0,5}(x-1)\geq 0,$$

$$\log_{0,5}(x-1)\geq \log_{0,5}1.$$

1- sxemaǵa kóre, logarifmniń tiykarı $0<0,5<1$ bolǵanlıǵı ushın

$$\begin{matrix} x-1\leq 1 \\ x\leq 2 \end{matrix} \Rightarrow x\in(-\infty;2].$$



2) Nátiyjede payda bolǵan kesindilerdi kesilistirip $x\in(1;2]$ bolatuǵınlıǵın tabamız.

Demek, berilgen funkciyanıń anıqlanıw oblastı kesindisiniń uzınlıǵı 1 ge teń.

*Juwap:*1.

$y=\log_a f(x)$ funkciyasınıń mánisleri oblastın tabıw ushın $f(x)$ funkciyasınıń mánisler oblastın tabıw kerek, sodan keyin $y=\log_a t$ logarifmlik funkciyasınıń qásiyetine tiykarlanıp $y=\log_a f(x)$ funkciyasınıń mánisler kópligin kórsetiw kerek. Eger máselede qosımsha shártler berilgen bolsa, onda sheshimdi tabıw úsh basqıshtan ibarat boladı:

I basqısh – $f(x)$ funkciyasınıń mánisler oblastın tabıw;

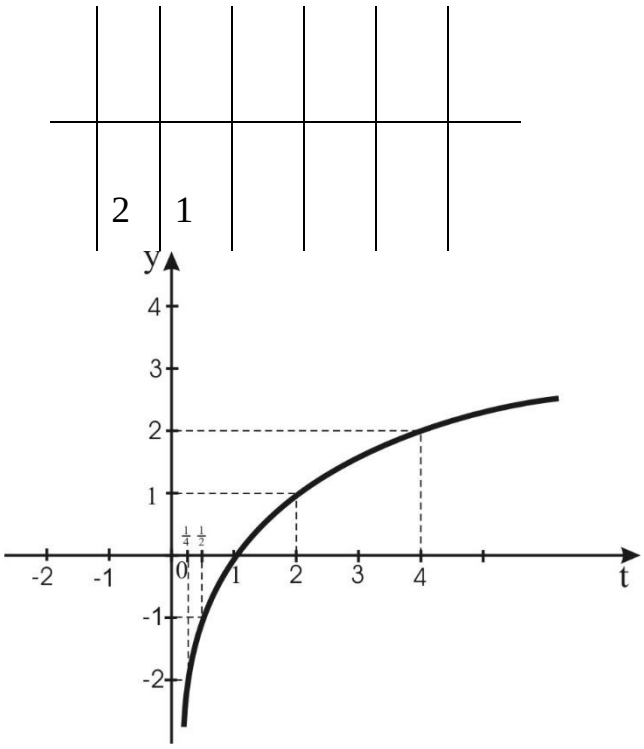
II basqısh – $y=\log_a f(x)$ funkciyasınıń mánisler oblastın tabıw;

III basqısh– qosımsha shártlerdi orınlaw.

Teńsizliklerdi sheshiwde logarifmlik funkciyanıń qásiyetleriniń qollanılıwın mısallarda keltiremiz.

Mısal 5.. $\log_2(x^2+1)>0$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi. $\log_2 t$ funkciyasınıń grafigin sızamız.



4-súwret

Súwretten kórinip turǵanınday, $t > 1$ bolǵanda funkciya oń mánislerdi qabıllaydı.

$y = \log_2 t$ funkciyasınıń anıqlanıw oblastın esapqa alsaq tómendegige iye bolamız:

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 0, \\ x^2 + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty;0] \cup [0;+\infty).$$

Juwap: $x \in (-\infty;0] \cup [0;+\infty)$.

Teńsizliktiń belgisin ózgertirsek, alınǵan nátiyjeniń de ózgeriwine iye bolamız.

Mısal 6. $\log_2(x^2 + 1) \geq 0 \Rightarrow x \in R$.

$$\log_2(x^2 + 1) < 0,\ 0 < x^2 + 1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 < 1, \\ x^2 + 1 > 0; \end{cases}, \begin{cases} x^2 < 0, \\ x^2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varnothing, \\ x \in R; \end{cases} \Rightarrow$$

teńsizlik sheshimge iye emes.

Logarifmlik teńsizlik ulıwma jaǵdayda

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

sxeması boyınsha sheshiledi.

6-§. Orta mánisler hám olar arasındağı qatnaslar.

1. Orta mánisler.

$a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ oń sanlar izbe-izligi ushın

orta arifmetikalıq mánis $A(a) = A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$,

orta geometriyalıq mánis $G(a) = G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$,

orta kvadratlıq mánis $K(a) = K_n = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ hám

orta garmonik mánis $N(a) = N_x = \dfrac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}$ lardı anıqlaymız.

Atap aytqanda x, y oń sanlar ushın bul orta mánisler tómendegishe anıqlanadı:

$$A_2 = \frac{x+y}{2}; \quad G_2 = \sqrt{xy}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}; \quad N_2 = \frac{2xy}{x+y} .$$

2. Orta arifmetikalıq hám orta geometriyalıq mánisler haqqında Koshi teńsizligi hám onıń túrli dálilleniwleri.

Teorema 1.6.1 $A_n \geq G_n$ hám $A_n = G_n$ teńlik tek sonda ǵana sonda teńlik $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ bolǵanda orınlı.

Dálilleniwi 1.6.1.1. $x \geq 1$ de $e^{x-1} \geq x$ ekenligi belgili, $e^{x-1} = x$ teńlik bolsa tek $x = 1$ de orinlanadı. Bunnan:

$$1 = e^0 = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A(a)} - 1\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{a_i}{A(a)} - 1\right) \geq \prod^{n} \frac{a_i}{A(a)} = \left(\frac{G(a)}{A(a)}\right)^n$$

Demek, $A_n \geq G_n$ hám teńlik bolsa tek $\frac{a_i}{A_n(a)} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$ bolǵanda orınlanadı. Bunnan bolsa $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = A_n$ ekenligi kelip shıǵadı.

$A_n \geq G_n$ ekenligin dálilleymiz: $n = 2$ de $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$. Bul teńsizlik qálegen oń a_1 hám a_2 sanlar ushın orınlı bolǵan $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$ teńsizlikten ańsat payda etiledi. Berilgen teńsizlikti qálegen p dana natural sanlar ushın tuwrı dep, $p+1$ dana natural sanlar ushın tuwrılıǵın dálilleymiz. Bul sanlar $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ bolsın. a_{n+1} olardıń arasında eń úlkeni bolsın. Yaǵnıy, $a_{n+1} \geq a_1, \ldots a_{n+1} \geq a_n$. Sol sebepli $a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ tómendegishe belgilew kiritemiz:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

$a_{n+1} \geq A_n$ bolǵanı ushın $a_{n+1} = A_n + \alpha$ dep jazıw múmkin, bul jerde $a \geq 0$. Onda $A_{n+1} = \frac{n \cdot A_n + A_n + \alpha}{n+1} = A_a + \frac{\alpha}{n+1}$. Bul teńliktiń eki bólegin $(p+1)$ - dárejege kóterip, tómendegini tabamız:

$$\left(A_{n+1}\right)^{n+1} = \left(A_n + \frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1} = \left(A_n\right)^{n+1} + C_{n+1}^1 \left(A_n\right)^n \frac{\alpha}{n+1} + \ldots \geq$$
$$\geq \left(A_n\right)^{n+1} + \left(A_n\right)^n \cdot \alpha = \left(A_n\right)^n \cdot \left(A_n + \alpha\right) = \left(A_n\right)^n \cdot A_{n+1}$$

Boljawǵa kóre, $\left(A_n\right)^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. Bunı itibarǵa alıp, $\left(A_{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(A_n\right)^n \cdot a_{n+1} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$. Bunnan $A_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}$. Teńlik $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ bolǵanda orınlı boladı.

Dálilleniwi1.6.1.2 Teoremaniń dálilleniwi tómendegi dálillewge tiykarlanǵan:

Eger teris emes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sanlar $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = 1$ teńlikti qanaatlandırsa, ol jaǵıdayda $b_1 + b_1 + \ldots + b_n \geq n$.

Bul dálillewdi máseleni matematikalıq indukciya usılında dálilleymiz.

$n = 1$ de másele ayqın. $n = k$ de $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k = 1$ teńlikti qanaatlandıratuǵın qálegen $b_1, b_2, \ldots, b_k$ - teris emes sanlar ushın $b_1 + b_2 + \ldots + b_k \geq k$ teńsizlik orınlı

bolsın. $n=k+1$ de $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{k+1}=1$ teńlikti qanaatlandıratuǵın qálegen $b_1,b_2,\ldots,b_{k+1}$-teris emes sanlar ushın $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_k\cdot b_{k+1}\geq 1$ teńsizlikti qanaatlandırıwın kórsetemiz.

Ulıwmalıqqa tásirin tiygizbesten $b_k\leq 1\leq b_{k+1}$ dep esaplaymiz. Ol jaǵdayda $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{k-1}\cdot(b_k\cdot b_{k+1})=1$ bolǵanı ushın indukciya boljawına kóre $b_1+b_2+\ldots+b_{k-1}+b_k\cdot b_{k+1}\geq k$ boladı. Endi $b_k+b_{k+1}\geq b_k\cdot b_{k+1}-1$ ekenligin dálillew jeterli. Bul $(1+b_k)\cdot(b_{k+1}-1)\geq 0$ teńsizlikke teń kúshli $b_k\leq 1\leq b_{k+1}$ bolǵanı ushın aqırǵı teńsizlik orınlı ekenligi ayqın.

Dálillew 1.6.1.3 Teoremaniń dálilleniwi tómendegi málim dálillewge tiykarlanǵan:

$x\geq 1$ de $e^{x-1}\geq x$, usınıń menen birge $e^{x-1}=x$ teńlik bolsa tek $x=1$ de orınlanadı. Bunnan:

$$1=e^0=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A(a)}-1\right)=\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{a_i}{A(a)}-1\right)\geq\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A(a)}-\left(\frac{G(a)}{A(a)}\right)^n.$$

Demek, $A(a)\geq G(a)$ hám teńlik bolsa tek $\frac{a_i}{A(a)}=1,\ i=1,2,\ldots,n$ bolǵanda orınlanadı. Bunnan bolsa $a_1=a_2=\ldots=a_n=A(a)$ ekenligi kelip shıǵadı.

Mısal 1. $x,y>0$ bolsa, $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi:

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y\Rightarrow\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=x^2+y^2+1$$
$$+\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\geq xy,\\ \frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\geq y,\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\geq x.\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$

Mısal2. $x>0$ bolsa, $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ teńsizlikti dálilleń .

Sheshiliwi: $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot 2^{\sqrt[12]{x}}\cdot 2^{\sqrt[4]{x}}=2\cdot 2^{x^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}}=2\cdot 2^{x^{\frac{1}{6}}}=2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

3. Orta geometriyalıq hám orta garmonikalıq mánisler arasındaǵı teńsizlik.

Teorema 1.6.2. $G(a) \geq H(a)$ ekenligin, atap aytqanda, $H(a) = G(a)$ teńlik tek hám tek $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ shárt orınlansa durıs ekenligin dálilleń.

Dálillewi 1.6.2.1. Koshi teńsizliginen paydalanıp (1-máselege qarań)

$(H(a))^{-1} = \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n} \sqrt[n]{a_1^{-1} a_2^{-1} - a_n^{-1}} = (G(a))^{-1}$ teńlikke iye bólemiz. Atap aytqanda, $H(a) = G(a)$ teńlik tek $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ de orınlanadı.

Mısal 3. Eger $a, b, c > 0$ bolsa $\frac{3}{1/a + 1/b + 1/c} \leq \frac{a+b+c}{3}$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi: $9 \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$,

$$\begin{cases} a+b+c \geq \sqrt[3]{abc}, \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{abc}} = 9.$$

Mısal 4. Eger $a, b, c > 0$, $ab^2c^3 = 1$ bolsa, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$ di dálilleń.

Sheshiliwi: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq 6 \frac{1}{\sqrt[6]{ab^2c^3}} = 6.$

4. Orta arifmetikalıq hám orta kvadratlıq mánisler arasındaǵı teńsizlik.

Teorema 1.6.3. $K(a) \geq A(a)$ teńsizlik orınlı ekenligin, atap aytqanda, $K(a) = A(a)$ teńlik tek $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ jaǵıdayda ǵana orınlı bolıwın dálilleń.

Dálillewi: Koshi teńsizliginen paydalanıp (1-máselege qarań) $2a_i a_j \leq a_i^2 + a_j^2$, $1 \leq i < j \leq n$ teńsizlikti payda etemiz. Solay eken,

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq$$

$$\leq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i^2 + a_j^2\right) = n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Eskertip ótemiz, $K(a) = A(a)$ teńlik tek $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ orınlı boladı.

Mısal 5. $H(a) \geq min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ hám $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geq K(a)$ teńsizliklerdi dálilleń.

Sheshiliwi: Ulıwmalıqtıń shegaralanbaǵan jaǵıdayda

$$min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_1, \quad \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_n$$

dep esaplaw múmkin. Ol jaǵıdayda

$$H(a) = \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_1^{-1} + \ldots + a_1^{-1}} = a_1,$$

$$K(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leq \sqrt{\frac{a_n^2 + a_n^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = a_n$$

boladı.

Túsindirme. Joqarıdaǵı mısallardan

$$\max\{a_l, a_2, \ldots, a_n\} \geq K(a) \geq A(a) \geq G(a) \geq H(a) \geq \min\{a_l, a_2, \ldots, a_n\}$$

ekenligi kelip shıǵadı.

Mısal 6. $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq (a + b + c)^2$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 2ab + 2bc + 2ac \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Mısal 7. $6\left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq (a + b)^2 (a + b + c)^2$ teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi:

$$\times\begin{cases} 2\left(a^2 + b^2\right) \geq (a + b)^2 \\ 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq (a + b + c)^2 \end{cases} \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

$$6\left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq (a + b)^2 (a + b + c)^2 .$$

7-§. Ulıwmalasqan Koshi teńsizligi.

Teorema 1.7.1 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n$ - oń sanlar bolsın.

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \leq \left(\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \qquad (1.7.1)$$

ekenligin dálilleń, teńlik bolsa tek $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ de orınlanadı.

Dálilleniwi: $s = \dfrac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$ belgilew kiritemiz. $e^{x-1} \geq x \ (x \geq 1)$ teńsizlikke kóre $se^{(a_i - 1)/s} \geq a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Bul teńsizliklerdi barlığın kóbeytip shıǵamız:

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_n^{p_n} \le s^{p_1+p_2+\dots p_n}\exp\left(\frac{a_1p_1+a_2p_2+\dots+a_np_n}{s}-p_1+p_2+\dots+p_n\right)=$$

$$=s^{p_1+p_2+\dots p_n}.$$

Teńlik tek $s=a_1=a_2=\dots=a_n$ de orınlanıwı 1-máseledegi sıyaqlı dálillenedi.

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_n^{p_n} \le \left(\frac{a_1p_1+a_2p_2+\dots+a_np_n}{p_1+p_2+\dots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\dots p_n}$$

Mısal 1. Tómendegi teńsizlikti dálilleń:

$$\left(\frac{a^3+4b^4+3c^6}{8}\right)^n \ge a^3b^{16}c^{18}.$$

Sheshiliwi: Koshi teńsizliginiń ulıwma jaǵıdayına kóre p nıń ornında 3 kelip atır.

8-§. Ulıwmalasqan Yung teńsizligi.

Teorema 1.8.1

$$a_1a_2\dots a_n \le \frac{a_1^{r_1}}{r_1}+\frac{a_2^{r_2}}{r_2}+\dots+\frac{a_n^{r_n}}{r_n} \qquad (1.8.1)$$

teńsizlik orınlı, bul jerde $a_1,a_2,\dots,a_n$, $r_1,r_2,\dots,r_n$ lar oń sanlar, atap aytqanda, $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\dots+\frac{1}{r_n}=1$.

Dálilleniwi: 5-máseledegi (1) teńlikte a_i di $a_i^{r_i}$ ǵa, r_i di $\frac{1}{r_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$ ǵa almastırıp

$$a_1a_2\dots a_n \le \frac{a_1^{r_1}}{r_1}+\frac{a_2^{r_2}}{r_2}+\dots+\frac{a_n^{r_n}}{r_n} \text{ ni alamız.}$$

Túsindirme. $n=2$ jaǵdayında bolsa Yung klassikalıq teńsizligine iye bolamız:

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \ge ab\,(a\ge 0, b\ge 0), \qquad (1.8.2)$$

bul jerde p,q sanlar $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ teńlikti qanaatlandıratuǵın oń sanlar.

Mısal1. Eger $a,b,c>0$ hám $ab+bc+ac=abc$ bolsa, $abc \le \frac{a^b}{b}+\frac{b^c}{c}+\frac{c^a}{a}$

Sheshiliwi: Shártke kóre $ab+bc+ac=abc \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ $abc \le \frac{a^b}{b}+\frac{b^c}{c}+\frac{c^a}{a}$ teńsizlik Yung teńsizliginiń dara jaǵdayınnan kelip shıǵadı.

Mısal 2. Eger $a,b,c>0$ bolsa $18a^2+12b^3+6c^6 \ge 36abc$ di dálilleń.

Sheshiliwi: $18a^2+12b^3+6c^6 \ge 36abc$ teńsizliktiń eki tárepin 36 ǵa bólemiz $\frac{a^2}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{c^6}{6} \ge abc;$ $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}=1$ bolsa, Yung teńsizligi orınlı. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \Rightarrow \frac{a^2}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{c^6}{6} \ge abc$ teńsizlik orınlı.

9-§. Gelder teńsizligi.

Teorema 1.9.1 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ shártti qanaatlandıratuǵın barlıq oń p,q sanlar hám a_j, b_j $j=1,\ldots,n$ sanlar ushın

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1.9.1)$$

teńsizlik mudamı tuwrı.

Dálilleniwi. $\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p \ne 0, \sum_{i=1}^{n}|b_i|^q \ne 0$ dep shama menen oylaymız (keri jaǵdayda (1.9.1) teńsizlik orınlanıwı ayqın). Yung teńsizligin qollap

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{b_i}{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{|b_i|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|^p}{p\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p}\frac{|b_i|^q}{q\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q}\right| = \frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$$

ǵa iye bolamız. Bul jerdan (1.9.1) teńsizlik kelip shıǵadı.

Túsindirme. Gyol'der teńsizliginiń $p=q=2$ degi $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$

Koshi-Bunyakovskiy-Shvarts teńsizligi dep atalıwshı bir zárúr dara jaǵdayın aytıp ótemiz.

Mısal 1. (Minkovskiy teńsizligi). Qálegen oń a_j, b_j $(j=1,\ldots,n)$ sanlar hám natural p san ushın

$$\left(\sum (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.9.2)$$

teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi: $(a_k+b_k)^p = a_k(a_k+b_k)^{p-1} + b_k(a_k+b_k)^{p-1}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ teńsizlikti qosıp,

$\sum (a_k+b_k)^p = \sum a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum b_k(a_k+b_k)^p$ nı alamız.

(1.9.1) teńsizlikke kóre

$$\sum a_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \sum \left(a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum b_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \sum \left(b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

larǵa iye bolamız, bul jerden $q(p-1)$ teńlik járdeminde kelip shıǵadı.

II BAP. FUNKCIYANÍŃ QÀSIYETLERI JÀRDEMINDE TEŃSIZLIKLERDI DÀLILLEW USÍLLARÍ

1-§. Funkciyanıń monotonlıq qásiyeti járdeminde dálillenetuǵın teńsizlikler

Aniqlama 2.1.1 $f(x)$ funkciya (a,b) aralıqta anıqlanǵan bolsın. Eger qálegen $x_1 \le x_2$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $x_1, x_2 \in (a,b)$ noqatlar ushın $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ teńsizlik orınlansa, onda f funkciya (a,b) aralıqta ósiwshi (kemiyiwshi) funkciya delinedi. (a,b) aralıq bolsa monotonlıq aralığı dep ataladı.

Anıqlama 2.1.2 $f(x)$ funkciya (a,b) intervalda anıqlanǵan bolsın. Eger qálegen $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın $x_1, x_2 \in (a,b)$ noqatlar ushın $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ teńsizlik orınlansa, onda f funkciya (a,b) aralıqta qatań ósiwshi (kemiyiwshi) funkciya delinedi.

Teorema 2.1.1 $f(x)$ funkciya (a,b) aralıqta anıqlanǵan hám differencillanıwshı bolsın. $f(x)$ funkciya (a,b) intervalda ósiwshi (kemiyiwshi) bolıwı ushın usı intervalda $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ teńsizlik orınlı bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Eger (a,b) intervalda $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya (a,b) intervalda qatań ósiwshi (kemiyiwshi) boladı.

Mısal 1. e^{π} hám π^{e} sanların salıstırıń.

Sheshiliwi. $f:[e;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ funkciyanı qaraymız. Onıń tuwındısı barlıq $x, x \in (e;+\infty)$ lerde $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$ teris mánislerdi qabıl qıladı hám f funkciya $[e;+\infty)$ de úzliksiz, demek, $f[e;+\infty)$ de qatań kemiyedi. Bul jerden $e < \pi$ ekenin esapqa alıp

$$f(e) > f(\pi) \Rightarrow \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi$$

nı alamız. Demek, $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Mısal2. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$ sanlı izbe-izlikti shegaralanǵanlıqqa tekseriń.

Sheshiliwi. Aldın

$$\ln(1+x) \le x \quad (x \ge 0) \tag{2.1.1}$$

teńsizlikti dalilleymiz. Bunıń ushın $f:[0;+\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = x - \ln(1+x)$ funkciyanı qaraymız. f funkciya anıqlanıw oblastında úzliksiz hám barlıq $x, x \in (0;+\infty)$ ler ushın $f'(x) = \frac{x}{x+1}$ teńlik orınlı, bul jerden $f'(x) > 0, \ (x \in (0;+\infty))$ ekenligi kelip shıǵadi. Solay etip f funkciya $D(f)$ anıqlanıw oblastında qatań ósedi hám $f(x) \ge f(0) \ (x \ge 0)$ den (2.1.1) teńsizliktiń durıs ekenligi kelip shıǵadı.

(2.1.1) teńsizlikten $x = \frac{1}{n}$ dep alıp $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n} (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{yáki}$$

$$\ln(n+1) - \ln n \le \frac{1}{n} (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.1.2}$$

nı payda etemiz.

(2.1.2)teńsizlikten

$$\ln 2 - \ln 1 \le 1, \ln 3 - \ln 2 \le \frac{1}{2}, \ldots, \ln(n+1) - \ln n \le \frac{1}{n} \tag{2.1.3}$$

kelip shıǵadı. (2.1.3) teńsizliklerdi aǵzama-aǵza qosıp,

$$\ln(n+1) \le 1 + \ldots + \frac{1}{n}$$

teńsizlikti alamız.

Demek, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$ sanlı izbe-izlik shegaralanbaǵan.

Mısal 3. (Bernulli teńsizligi). Qálegen $x > -1; \ \alpha > 1$ ushın

$$(1+x)^{\alpha} \ge 1 + \alpha x, \tag{2.1.4}$$

teńsizlik orınlı hám $x = 0$ de teńlik orınlı.

Sheshiliwi. $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x,\quad (x\in[-1;+\infty))$ funkciyanı qaraymız, bul jerde α - fikserlengen 1 den úlken san. Bul funkciyanıń tuwındısın esaplaymiz:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left((1+x)^{\alpha-1}-1\right)\quad (x>-1)$$

$\alpha>1$ shártinen, $x\in(-1;0)$ ushın $f'(x)<0$ hám $x\in(0;+\infty)$ ushın $f'(x)>0$ ekenligi kelip shıǵadı. Demek, f funkciya $[-1;0]$ de kemiyedi hám $[0;+\infty]$ de ósedi. Bunnan barlıq $x\in[-1;+\infty)\setminus\{0\}$ lar ushın $f(x)>f(0)$ teńsizlik orınlı, yaǵnıy,

$$(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x>1-1 \text{ hám } (1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$$

$(x\in[-1;0)\cup(0;+\infty),\ \alpha>1)$ dep juwmaq shiǵaramız.

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x,$ teńlik $x=0$ de orınlanıwın kórsetip ótıw qaladı.

Túsindirme.

$$(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x\quad (x\ge -1;\ 0<\alpha<1),$$

$$(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x\quad (x\ge -1;\ \alpha<0).$$

teńsizlikler usı kóriniste dálillenedi.

Mısal 4. (Yung teńsizligi) Eger $p,q\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ sanlar $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ teńlikti qanaatlandırsa, onda qálegen a,b oń sanlar ushın

$$\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q}\ge ab\quad (p>1), \tag{2.1.5}$$

$$\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q}\le ab\quad (p<1). \tag{2.1.6}$$

teńsizlik orınlanadı.

Bunnan tısqarı teńlikte orınlanadı tek sonda ǵana sonda $a^{p}=b^{q}$ bolsa.

Sheshiliwi. $p>1$ jaǵdayın qaraymız. Qálegen oń a sandı fikserlep, $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R};\quad f(b)=\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q}-ab$ funkciyanı anıqlaymız.

Bul funkciyanıń tuwındısı $f'(b)=b^{q-1}-a$ ǵa teń. Elementar esaplawlar járdeminde $a^{\frac{1}{q-1}}$ noqatta f funkciya ózinıń eń kishi mánisine erisiwin kóriwimiz múmkin, yaǵnıy

$$f(b) > f\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right), b > 0. \qquad (2.1.7)$$

kórsetiledi.

(2.1.7) teńsizlikten $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ekenligin esapqa alıp,

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab \geq 0 \quad (a>0, b>0;\ p>1)$$

alınadı. (2.1.5) teńsizlik dálillendi. (2.1.7) den teńlik $b=a^{\frac{1}{q-1}}$, yaǵnıy $a^p=b^q$ jaǵdayda orınlı ekenligi kelip shıǵadı. (2.1.6) teńsizlik usı kóriniste dálillenedi.

Mısal 5.

$$|\sin x| \leq |x| \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (2.1.8)$$

teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi. Eki tareptiń juplıǵınan $x \geq 0$ jaǵdaydı qaraw jetkilikli. Bunnan tısqarı, $|\sin x| \leq 1$ bolǵanlıqtan $0 \leq x \leq 1$ jaǵdayın úyreniw jetkilikli. Sol maqsette $f:[0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$ funkciyani qaraymız. f funkciyanıń tuwındısı

$$f'(x)=1-\cos x \quad (x \in [0;1]).$$

Kosinustıń shegaralanǵanlıǵınan $(|\cos| \leq 1;\ x \in \mathbb{R})$ $f'(x) \geq 0$ dep juwmaq shıǵaramız. Bul jerden f funkciya ózініń anıqlanıw oblastında monoton ósiwshi bolıwı kelip shıǵadı hám sol sebepli

$$f(x) > f(0) \quad (x \in [0;1]) \text{ yamasa } x-\sin x \geq 0 \quad (x \in [0;1])$$

teńsizlik orınlı boladı. Bul jerden bolsa berilgen teńsizlik kelip shıǵadı.

Mısal 6. Eger $a > b > c$ bolsa, onda

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) > 0$$

teńsizlik orınlı bolıwın dálilleń.

Sheshiliwi. $f(t)=(b+t)^2(b-c)+b^2(c-(b+t))+c^2((b+t)-b)$ kórinistegi

$f:[0;+\infty) \to \mathbb{R}$ funkciyanı qaraymız, bul jerde a,b,c lar $a > b > c$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı haqıyqıy parametrler. f funkciyanıń $[0;+\infty)$ de qatań ósiwshi bolıwı aldınǵı mısallar menen birdey dálillenedi hám solay etip

$$f(a-b) > f(0)$$

teńsizlik orınlı. Songı teńsizlik berilgen teńsizlikke teń kúshli.

Mısal7. Teńsizlikti

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4 \qquad (2.1.9)$$

sheshiń.

Sheshimi.Bul (2.1.9) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligin $0 \le x \le 1$ aralıq boladı. Bul teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópliginde $f(x) = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x}$ funkciya, úzliksiz hám qatań ósiwshi. Sebebi $f(1) = 4$, onda [0; 1) kópligindegi, x barlıq mánisleri, berilgen teńsizlikti.

Juwabı: $0 \le x \le 1$..

Mısal 8. Teńsizlikti

$$\sqrt[8]{2-x} > x^3 + x - 1 \qquad (2.1.10)$$

sheshiń.

Sheshimi. Bul (2.1.10) teńsizliktiń ózgeriwshiniń qabıl qılıwı múmkin bolǵan mánisleri kópligi barlıq x ushın $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ aralıqta boladı. $-\sqrt{2} \le x \le 0$ aralıqtaǵı x barlıq mánisiberilgen (2.1.10) teńsizlik ushın sheshimi boladı. Sebebi, sonday hár bir x ushın $f(x) = \sqrt[8]{2-x^2}$ funkciyanıń teris emesligine iye bolamız, al funkciya $g(x) = x^3 + x - 1$ teris.

(2.1.10) teńsizlikti $\left(0; \sqrt{2}\right]$ aralığında qaraymız. Bul aralıqta $g(x)$ funkciya úzliksiz hám qatań ósiwshi bolǵanlığı sebepli, al funkciya $f(x)$ úzliksiz hám qatań kemeyiwshi, onda, eger $f(x) = g(x)$ teńleme bul aralıqta korenge iye, onda ol birden bir boladı. Jeńil kóriwge boladı, bul koren x = 1 sanı.

(0; 1) aralıqtaǵı hár bir x ushın $f(x) = \sqrt[8]{2-x^2} > 1$ iye bolamız, al $g(x) = x^3 + x - 1 > 1$. Sonlıqtan, bul aralıqtaǵı hár bir x, (2.1.10) berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı. Hár dayim x ushın $\left(1; \sqrt{2}\right]$ aralıqtaǵı hár bir x ushın, anıq

$f(x)=\sqrt[8]{2-x^2}<1$, al $g(x)$ = x^3 + x — 1 > 1 iye bolamız. Sonlıqtan, bunday x mánisleri, (23) berilgen teńsizlikti qanaatlandırmaydı.

Solay etip, $\left[-\sqrt{2};1\right)$ aralıqtaǵı x barlıq mánisleri, (2.1.10) berilgen teńsizlikti qanaatlandıradı.

Juwabı: $-\sqrt{2}\le x<1$.

2-§. Funkciyanıń dóńeslik qásiyeti járdeminde dálillenetuǵın teńsizlikler

(a,b)- haqıyqıy sanlar kósherindegi aralıq berilgen bolsın.

Anıqlama 2.2.1 $f:(a,b)\to R$ funkciya (a,b) da tómennen dóńes delinedi, eger barlıq $x_1,x_2\in(a,b)$ sonday $\lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0$ hám $\lambda_1+\lambda_2=1$ shártlerin qanaatladırıwshı λ_1,λ_2 sanlar ushın

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2) \qquad (2.2.1)$$

teńsizlik orınlı bolsa.

Joqarıdan dóńes funkciyanıń anıqlaması bolsa joqarıda keltirilgen (2.2.1) teńsizlik belgisi qarama-qarsısına almastırıwınan alınadı.

Yensen tengsizligi. $f:(a;b)\to R$ - tómennen (joqarıdan) dóńes funkciya bolsın. Onda barlıq $x_j\in(a,b)$ $(j=1,\dots,n)$ lar hám

$$\lambda_1+\dots+\lambda_n=1$$

teńlikti qanaatlandırıwshı qálegen $\lambda_j\ge 0$ $(j=1,\dots,n)$ sanlar ushın

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+f(\lambda_nx_n)$$

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)\ge\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+f(\lambda_nx_n)$$

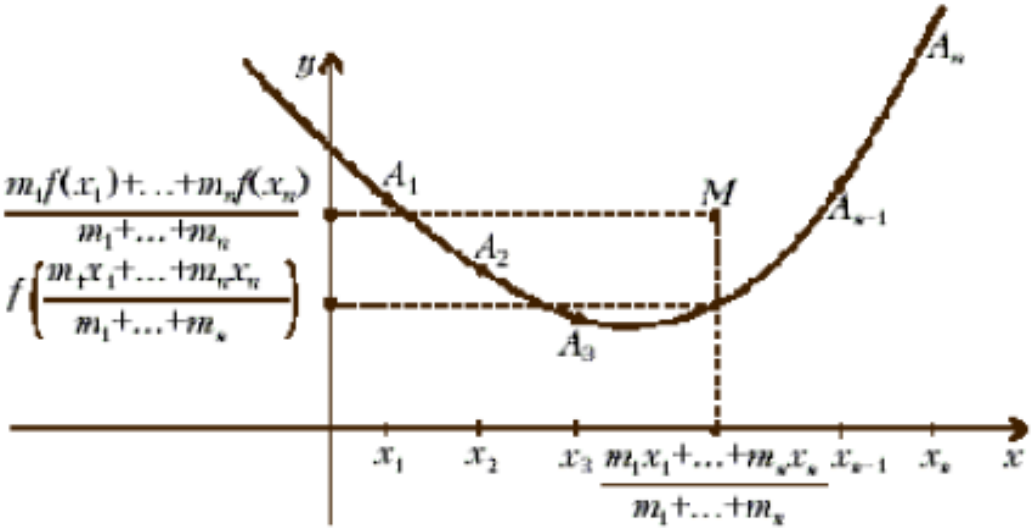
teńsizlik orınlı.

Dalilleniwi. $y=f(x)$ funkciyanıń grafiginde absissaları $x_1,x_2,\dots,x_n$ bolǵan $A_1,A_2,\dots,A_n$ noqatların qaraymız. Bul noqatlarda $m_1,m_2,\dots,m_n$ massalı júklerdi jaylastıramız. Bul noqatlar massaları orayı

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n};\ \frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\right)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ noqatlar dóńes funkciyanıń grafigi ústinde jatqanlıǵınan, olardıń massalar orayıda grafik ústinde jatadı. Bul bolsa massalar orayı M niń ordinatası sol absissaǵa iye bolǵan noqattıń ordinatasınan kishi emes ekenligin bildiredi, yaǵnıy (5-súwret),

$$f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\right) \le \frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \qquad (2.2.2)$$



5-súwret

Dálillewdi aqırına jetkiriw ushın $m_1 = a_1, \ldots, m_n = a_n$ alıw qaladı. Biraq, eki tiykarǵı túsinik bar. Birinshiden, Yensenniń (1) teńsizligin dálillew waqtında biz (2.2.2) teńsizlikti dálilledik. Negizinde bul teńsizlikler teń kushli. (2.2.1) teńsizlikte

$$a_i = \frac{m_1}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \quad (i=1,\ldots,n)$$

dep alıp, biz (2.2.2) teńsizlikti alamız. Sonlıqtanda bul teńsizlikler Yensen teńsizlikleri dep ataladı. (2.2.1) teńsizlik biraz ápiwayı kórinedi, biraq qollanıw ushın (2.2.2) teńsizlikten paydalanıw qolaylılaw. Ekinshiden, eger $f(x)$ funkciya dóńes bolsa, onda ol ushın (2.2.1) hám (2.2.2) Yensen teńsizliklerinıń belgileri qarama-qarsı belgige ózgeredi. Bunı dálillew ushın $-f(x)$ funkciyanı qaraw jetkilikli.

Teorema 2.2.1 $(a;b)$ aralıqta úzliksiz hám ekinshi tártipli tuwındıǵa iye bolǵan $f:(a;b)\to R$ funkciya sol intervalda tómennen (joqarıdan) dońes bolıwı ushın $(a;b)$ da $f''(x)\geq 0$ $\left(f''(x)\leq 0\right)$ teńsizliktiń orınlanıwı zárúr ham jetkilikli.

Mısal 1. (Orta mánisler haqqındaǵı Koshi teńsizligi). Qálegen teris emes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sanlar ushın

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad (2.2.3)$$

teńsizlik orınlı, yaǵnıy orta geometriyalıq mánis orta arifmetik mánisden úlken emes.

Sheshiliwi. Eger a_j sanlardan biri 0 ge teń bolsa, ol jag'idayda (2.2.3) teńsizliktiń orınlanıwı ayqın, sol sebepli barlıq a_j sanlar oń dep esaplaymız. $f(x)=\ln x (x>0)$ funkciyanı qaraymız. f funkciya $(0;+\infty)$ de joqarıdan dońes ekenligi ayqın. Yensen teńsizligine tiykarlanıp

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_i$$

teńsizlikti payda etemiz.

Mısal 2. $x_1, \ldots, x_n$ – teris emes sanlar bolsın.

$$f:[0,+\infty)\to R; \quad f(\alpha)=\left(\frac{x_1^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

funkciya monoton ósiwshi ekenligin dálilleń.

Sheshiliwi. $0<\alpha<\beta$ bolsın. $h(x)=x^{\frac{\beta}{\alpha}}, x\geq 0$ $(x\geq 0)$ funkciyanı qaraymız. $h''(x)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)x^{\frac{\beta}{\alpha}}>0$ $(x>0)$, solay etip h funkciya $[0;+\infty)$ de tómennen dońes. Yensen teńsizligine kóre

$$h\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^{\alpha}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}h\left(x_i^{\alpha}\right) \text{ yamasa } \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^{\beta},$$

bul jerden $f(\alpha)\leq f(\beta)$ kelip shıǵadı.

Mısal 3. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ teńsizlikti dálilleń, bul jerde

α, β, γ - qandayda bir úshmúyeshliktiń ishki múyeshleri.

Sheshiliwi. $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$; $f(x)=\sin x$ funkciyanı qaraymız. $[0;\pi]$ lar ushın $f''(x)=-\sin x$ hám $f''(x)<0$, sol sebepli f funkciya $[0;\pi]$ de joqarıdan dóńes. Yensen teńsizligine kóre

$$f\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3}\right)\geq\frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{3}+\frac{f(\gamma)}{3} \quad \text{yamasa} \quad \sin\frac{\pi}{3}\geq\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

bul jerden $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ni alamız.

Mısal 4. Qálegen oń $a_j, b_j\,(j=1,...,n)$ sanlar ushın

$$\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n}\right)^{b_1+\ldots+b_n}\geq\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n}$$

teńsizlik orınlı bolıwın dálilleń.

Sheshiliwi. $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ funkciyanı qaraymız. Bul funkciya joqarıdan dóńes. Solay etip, Yensen teńsizligine kóre

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{b_1+\ldots+b_n}\cdot\frac{a_i}{b_i}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{b_1+\ldots+b_n}\cdot f\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

yamasa

$$(b_1+\ldots+b_n)\ln\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n}\geq\sum_{i=1}^{n}b_i\ln\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

sonday eken,

$$\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n}\right)^{b+\ldots+b_n}\geq\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n}.$$

Mısal 5. (Gyugens teńsizligi). Qálegen teris emes $a_j\,(j=1,\ldots,n)$ sanlar ushın $(1+a_1)\ldots(1+a_n)\geq\left(1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\right)^n$ teńsizlik orınlı bolıwın dálilleń.

Sheshiliwi. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$ funkciyanı qaraymız. Barlıq $x\in\mathbb{R}$ ler ushın $f''(x)>0$ orınlı. Sonlay etip, funkciya joqarıdan dónes. Yensen teńsizligine kóre

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\ln a_i)\Leftrightarrow\ln\left(1+\exp\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+a_i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((1+a_1)\ldots(1+a_n)\right) \geq n\ln\left(1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+a_1)\ldots(1+a_n) \geq \left(1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\right)^n$$

nı alamız.

Mısal 6.

$$\sqrt{\left(\sum a_i\right)^2+\left(\sum b_i\right)^2} \leq \sum\sqrt{a_i^2+b_i^2} \quad (\alpha_i, b_i > 0)$$

teńsizlikti dálilleń.

Sheshiliwi. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ funkciyanı qaraymız. Barlıq oń $x\in\mathbb{R}$ lar ushın $f''(x)>0$ orınlı. Solay etip, f funkciya óziniń anıqlanıw oblastında tómennen dóńes dep alamız.

$$x_i=\frac{a_i}{b_i}, \quad \sigma_i=\frac{b_1}{\sum b_i}$$

bul funkciya ushın Yensen teńsizligin jazamız.

$$\frac{b_1}{\sum b_i}\sqrt{1+\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2}+..+\frac{b_n}{\sum b_i}\sqrt{1+\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2} \geq f\left(\frac{b_i}{\sum b_i}\frac{a_1}{b_1}+\ldots+\frac{b_n}{\sum b_i}\frac{a_n}{b_n}\right)=f\left(\frac{\sum a_i}{\sum b_i}\right)$$

$$\frac{1}{\sum b_i}\left(\sqrt{b_1^2+a_1^2}+.+\sqrt{b_n^2+a_n^2}\right) \geq \sqrt{1+\left(\frac{\sum a_i}{\sum b_i}\right)^2} \quad ,$$

Aqırǵı teńsizliktiń eki bólegin $\sum b_i$ ǵa kóbiytemiz hám kerekli teńsizlikti alamız.

Juwmaqlaw

Ózbekstan Respublikası xalıq bilimlendiriw sistemasında tálim haqqındaǵı nızamǵa jańasha qatnas jasaw probleması, elimizdiń barlıq joqarı oqıw orınlarında ped.texnologiya teoriyası hám ámeliyattı úyreniw, turmısqa engiziw jámiyetlik tapsırma sıpatında pedagogikalıq kollektivler aldına qoyıldı.

Mine, usı wazıypalardıń tabıslı ámelge asırılıwı hám oqıwshılardıń individual qızıǵıwshılıqların esapqa alıw maqsetinde matematikanıń oqıtıw usılların qayta kórip shıǵıwdı talap etedi.

Haqıyqıy ózgeriwshili funkciyanıń matematikalıq analizi matematikanıń basqa tarawları ushın álipbe sıpatında xızmet atqarıp qoymastan, óziniń payda bolıw dáwirinen baslap-aq, birqansha ámeliy máselelerdi sheshiwge baǵdarlandı. Mine sonıń ushın da analiz baslamalarınıń mektep kursına engiziliwi mektep matematika kursına ámeliy-praktikalıq baǵdarlar beriwdi názerde tutadı.

Sonlıqtan da, Funkciyanıń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillewdi úyreniwde mektep matematika kursında ótiletuǵın túsiniklerdiń mazmunın saylap alıw máselesi oraylıq orında turadı, yaki bolmasa, ótiletuǵın túsiniklerdi keńeytiw názerde tutıladı.

Joqarıda keltirilgen praktikalıq mazmundaǵı shınıǵıwlar "Funkciyanıń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillew usılları" nıń áhmiyetliginiń anıq kórinisin beredi.

Usınılıp otırǵan pitkeriw qánigelik jumısta Funkciyanıń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillew usıllarınúyreniw sxemasında qollanıw qaraldı. Bul matematikalıq analizdiń ishki matematikalıq ámeliy múmkinshiliklerinıń keńligin jáne bir márte tastıyıqlaydı.

Juwmaqlap aytatuǵın bolsaq, "Funkciyanıń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillew usılları" kóplegen máselelerdi qarastırıwǵa múmkinshilik beredi.

Jumıstı orınlaw prostesinde bizteńsizlikler haqqında, funkciyanıń monotonlıq qásiyeti járdeminde dalillenetuǵin teńsizlikler, funkciyanıń dońeslik qasiyeti jardeminde dalillenetuǵın teńsizliklerdi izertlewdiń ayırım ápiwayı

usılların anıq mısallar járdeminde kórdik.

Bul pitkeriw qánigelik jumısta keltirilgen materiallar oqıwshılarǵa pán ústinde óz betinshe jumıs orınlawında funkciyanıń qàsiyetleri jàrdeminde teńsizliklerdi dálillewde járdem beredi degen úmittemiz, sonday-aq, oqıtıwshılar ushın oqıwshılar menen sabaq barısında, fakultativ hám klasstan tıs shınıǵıwlar ótkeriwde metodikalıq qollanba xızmetin atqaradı degen úmittemiz.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. S.Alixonov. Matematika o'qitish metodikasi.Toshkent. O'qituvchi. 1992-yil.

2. S.Alixonov. Matematika o'qitish metodikasi.Toshkent.Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2011. — 304 b.

3. S.Alixonov va M.Raemov. Matematika o'qitish metodikasi. Iqtisod moliya. 2010-yil.

4. Alixonov S. « Matematika o'qitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «O'qituvchi» 1997 yil.

5. Sh. Ismailov, A. Qo'chqorov, B. Abdurahmonov. Tengsizliklar-I. Isbotlashning klassik usullari / Toshkent, 2008 y.

6. Sh. Ismailov, O. Ibrogimov. Tengsizliklar-II. Isbotlashning zamonaviy usullari / Toshkent, 2008 y.

7. A. Qo'chqorov, J. Rasulov. Tengsizliklar-III. Masalalar to'plami / Toshkent, 2008 y.

8. Ayupov Sh., Rihsiyev B., Quchqorov O. «Matematika olimpiadalar masalalari» 1,2qismlar. T.: Fan, 2004

9. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002.

10. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.

11. Abduxamidov A. U hám basqalar. Algebra hám analiz asoslari. Akademik litseylar hám kasb hunar kollejlari uchun darslik. T., «Oqitivchi», 2001.

12. Galitskiy M.A. va boshqalar «Algebra va matematik analiz kursini chuqur o'rganish» T., «O'qituvchi», 1995 yil.

13. Alimov Sh., Xolmuhammedov O., Mirzaahmedov M., Algebra 8-sinf. Toshkent. 2010-yil.

14.www.pedagog.uz

15. www.Ziyonet.uz

16. www.edu.uz