

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
QARSHI MUHANDISLIK-IQTISODIYOT INSTITUTI**

“OLIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

**Mavzu: Ba'zi elementar funksiyalarning
hosilalari. Hosilalar jadvali.**

REFERAT

**Bajardi:
Qabul qildi:**

**“QXM-145” guruh talabasi Bo'ronov Abbos
Raxmonov B.N.**

Qarshi 2015

Reja:

1. Giperbolik funksiyalar va ularning hosilalari
2. Oshkormas funksiya va uning hosilasi.
3. Funksiyaning parametrik berilishi va parametrik berilgan funksiyaning hosilasi.
4. Hosilalar jadvali.

1. Giperbolik funksiyalar va ularning hosilalari

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

tengliklar yordamida aniqlanadigan funksiyalar **giperbolik** funksiyalar deb ataladi.

Bunda $\operatorname{sh} x$ - **giperbolik sinus**, $\operatorname{ch} x$ -**giperbolik kosinus**, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ - **giperbolik tangens**, $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ - **giperbolik kotangens** deb ataladi.

Bu funksiyalar orasida

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

ayniyatlar o'rinli ekanligini tekshirib kurishni o'quvchiga tavsiya etamiz. Endi Shu funksiyalarni hosilalarini topish formulalarini hosil qilamiz.

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Hisoblashda $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ekanligidan foydalandik.

Shunday qilib:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

2. Oshkormas funksiya va uning hosilasi

x va y o'zgaruvchilar orasidagi funktsional bog'lanish $F(x, y) = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar qandaydir (a, b) intervalda aniqlangan $y = f(x)$ funksiya mavjud bo'lib, u $F(x, y) = 0$ tenglamani qanoatlantirsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $F(x, y) = 0$ tenglama bilan aniqlangan **oshkormas** funksiya deyiladi. Funksiya $y = f(x)$ tenglik yordamida berilganda y oshkor ko'rinishda berilgan deyiladi. Oshkor ko'rinishda berilgan funktsiyani $y - f(x) = 0$ ko'rinishda yozilsa y oshkormas ko'rinishda berilganga o'tiladi. Funksiya $F(x, y) = 0$ tenglama yordamida oshkormas shaklda berilganda tenglamani y ga nisbatan yechilsa funktsiyaning

oshkor ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi. Ammo bunday o'tish har doim ham oson bo'lavermaydi, ba'zan esa umuman o'tishning iloji bo'lmaydi.

Shuning uchun oshkormas funksiya hosilasini uni oshkor holga keltirmasdan topish usuli bilan misollarda tanishamiz.

1-misol $x^2+y^2=4$ tenglama bilan berilgan funksiyaning y' hosilasini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y ni x ning funksiyasi ekanligini hisobga olgan holda x bo'yicha differensiallaymiz: $(x^2)' + (y^2)' = 4$; $2x+2y \cdot y' = 0$,

$$x + y \cdot y' = 0, \text{ bundan } y' = -\frac{x}{y}.$$

2-misol. $y^4-4xy+x^4=0$ tenglama bilan berilgan funksiyaning y' hosilasini toping.

Yechish. Differensiallaymiz: $4y^3 \cdot y' - 4(x'y + x \cdot y') + 4x^3 = 0$; $y^3 \cdot y' - y - xy' = -x^3$;
 $(y^3 - x)y' = y - x^3$; $y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$

Biz kelgusida oshkormas funksiyaning hosilasini topishga yana qaytamiz. Shuning uchun bu yerda uni batafsil o'rganib o'tirmaymiz.

3. Funksiyaning parametrik berilishi va parametrik berilgan funksiyaning hosilasi.

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

tenglamalar berilgan bo'lsin. Bu yerda $t \in [T_1, T_2]$ kesmadagi qiymatlarni qabul qiladi. t ning har bir qiymatiga x va y ning aniq qiymatlari to'g'ri keladi. Agar x va y ni Oxy koordinata tekisligidagi nuqtaning koordinatalari deb qaralsa, u holda t ning har bir qiymatiga tekislikning ma'lum bir nuqtasi to'g'ri keladi. t ning qiymatlari T_1 dan T_2 gacha o'zgarsa, bu nuqta tekislikda biror egri chiziqni chizadi. (1.1) tenglamalar ana shu egri chiziqning **parametrik tenglamalari** deyiladi, t parametr deyiladi.

Bu egri chiziq qandaydir $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya (1.1) parametrik tenglamalari yordamida berilgan deyiladi. x bilan y orasidagi bog'lash (1.1) tenglamalardan t ni yuqotish orqali o'rnatiladi.

Faraz qilaylik, $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \Phi(x)$ teskari funksiyaga ega bo'lsin.

U holda $t = \Phi(x)$ ni (21.1) ning ikkinchi tenglamasiga qo'ysak y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydigan

$$y = \psi[\Phi(x)] \text{ yoki } y = f(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib (1.1) tenglamalar qandaydir $y=f(x)$ funksiyaning aniq ekan.

3-misol: $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tib $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$ yo'naltiruvchi vektorga ega to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari yozilsin.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$$

ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. $\frac{x-x_0}{m} = t, \frac{y-y_0}{n} = t$ deb belgilasak $x-x_0=mt,$

$y-y_0=nt$ yoki $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamalari** hosil bo'ladi.

4-misol.
$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, R > 0)$$

tenglamalar aylananing parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz.

Tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$$

yoki $x^2 + y^2 = R^2$ hosil bo'ladi. Bu markazi koordinata boshida bo'lib radiusi R ga teng aylananing **kanonik tenglamasi** ekani ma'lum.

5-misol.
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0, b > 0)$$

tenglamalar ellipsning kanonik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz. Tenglamalarni birinchisini a ga, ikkinchisini b ga bo'lib ularni

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t, \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsning kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

6-misol.
$$\begin{cases} x = a \cosh t, \\ y = b \sinh t. \end{cases}$$

tenglamalar giperbolaning parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz ($a > 0, b > 0$).

Tenglamaning birinchisini a ga ikkinchisini b ga bo'lsak $\frac{x}{a} = \cosh t, \frac{y}{b} = \sinh t$ hosil

bo'ladi. Bu tenglamalarning kvadratga ko'tarib birinchi tenglamadan ikkinchisini hadlab ayirsak

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{giperbolaning kanonik tenglamasiga}$$

ega bo'lamiz.

Endi parametrik tenglamalari $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ bilan berilgan funksiyaning hosilasini

topish uchun formula chiqaramiz. $\varphi(t), \psi(t)$ funksiyalar differensiallashuvchi hamda $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \varphi(x)$ teskari funksiyaga ega deb faraz qilamiz. U holda $y = \psi(t), t = \varphi(x)$ bo'lgani uchun y x ning murakkab funksiyasi bo'ladi, t -oraliq argument.

Shu sababli murakkab funksiyaning hosilasini topish formulasiga binoan

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x \quad (1.2)$$

bo'ladi. Teskari funktsiyani differentsiallashtirish qoidasiga ko'ra $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, bo'lgani uchun buni (1.2)ga qo'ysak

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ hosil bo'ladi.}$$

$$\text{Shunday qilib, } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (1.3)$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan funktsiyaning hosilasini topish formulasini hosil qilamiz.

$$\text{7-misol. } \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad y'_x \text{ -?}$$

$$\text{Yechish. } y'_x = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{b \cos t}{a \cdot (-\sin t)} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}.$$

$$\text{8-misol } \begin{cases} x = a \operatorname{cht}, \\ y = b \operatorname{sht}. \end{cases} \quad y'_x \text{ -?}$$

$$\text{Yechish. } y'_x = \frac{(b \operatorname{sht})'}{(a \operatorname{cht})'} = \frac{b \operatorname{cht}}{a \operatorname{sht}} = \frac{b}{a} \operatorname{ctht}$$

$$\text{9-misol } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases} \quad y'_x \text{ -?}$$

$$\text{Yechish. } y'_x = \frac{(a \sin^3 t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{3a \sin^2 t (\sin t)'}{3a \cos^2 t (\cos t)'} = \frac{\sin^2 t \cos t}{-\cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tgt}.$$

4. Hosilalar jadvali

$u = u(x)$, $v = v(x)$ -differentsiyallanuvchi funktsiyalar deb hisoblab asosiy elementar funktsiyalarning hosilalari jadvalini tuzamiz va differentsiallashtirish qoidalarini keltiramiz:

1) $C' = 0$; $C = \operatorname{const}$.

2) $x' = 1$, x - erkli o'zgaruvchi.

3) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha = \operatorname{const}$. 4) Xususiy holda $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

5) Xususiy holda $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.

6) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a = \operatorname{const}$, $a > 0$, $a \neq 1$. 7) Xususiy holda $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

8) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a = \operatorname{const}$, $a > 0$, $a \neq 1$. 9) Xususiy holda $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

10) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

11) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

12) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

13) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

$$14) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$15) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$16) (\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$17) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$18) (sh u)' = chu \cdot u'.$$

$$19) (ch u)' = sh u \cdot u'.$$

$$20) (th u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'.$$

$$21) (cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'.$$

$$22) (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$23) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$24) (Cu)' = C \cdot u', \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}, \quad C = \text{const.}$$

$$25) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

$$26) y = f(u), \quad u = u(x) \text{ murakkab funksiyaning hosilasi uchun } y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ o'rinli.}$$

$$27) y = f(x) \text{ va } x = v(y) \text{ o'zaro teskari funksiyalar uchun } y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ o'rinli.}$$

$$28) \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{ bo'lsa } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Izoh. $y = [u(x)]^{v(x)}$ ko'rinishdagi funksiyaning hosilasini topish talab etilsa, avval berilgan tenglikni e asosga ko'ra logarifmlab keyin tenglikni x bo'yicha differensiallash ma'qul.

Adabiyotlar

1. Т.Азларов, Ҳ.Мансуров. Математик анализ. 1-қисм. Тошкент «Ўқитувчи», 1986.
2. А.А.Гусак. Высшая математика. 1-том. Минск, 2001.
3. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, «Наука», 1986.
4. В.П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. Москва, «Наука», 2000.
5. Н.С.Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 1-том, Тошкент, «Ўқитувчи», 1972.