ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Т.Ҳ.Расулов, Ҳ.Р.Расулов

МАТЕМАТИК АНАЛИЗНИНГ ТАНЛАНГАН БОБЛАРИ

Бухоро
«Дурдона» нашриёти
2020

УЎК 517.9(075.8)
22.161я73
Р 25
Расулов, Т.Ҳ.
Математик анализнинг танланган боблари [Матн] : қўлланма /
Т.Ҳ. Расулов, Ҳ.Р. Расулов. - Бухоро : "Sadriddin Salim Buxoriy" Durdona nashriyoti, 2020. - 160 б.

КБК 22.161я73

Қўлланма чекливариацияли, монотон ва абсолют узлуксиз функцияларнинг хоссалари, Риман интегралининг табиий умумлашмасибўлган Стилтьес интеграли ва унинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграл билан боғлиқлиги, ортогонал системалар ва қаторлар ҳамда математикфизика тенгламаларини интеграллашда учрайдиган махсусфункциялардан бири - сферик функциялар синфиваамалий татбиғи бўйича физикага оид масалани қўйилиши ва уни натижаларини ўрганишга бағишланган.

Мазкур қўлланма университетларнинг «Математика» йўналишининг юқори босқич талабалари, магистрантлар ва докторантлар ҳамда илмий татқиқотчилар учун мўлжалланган.

Тақризчилар:
Бухоро муҳандислик-технология институти «Олий математика» кафедраси профессори, ф.-м.ф.д. Тешаев М.Х.
Бухоро давлат университети «Математика» кафедраси доценти, ф.-м.ф.н. Мамуров Б.Ж.

Бухоро давлат университетининг илмий Кенгаши томонидан нашрга тавсия этилган (8 май 2020 йил, 6-сонли баённома)

ISBN978-9943-6404-7-4

МУНДАРИЖА

КИРИШ

Ҳозирги вақтда мамлакатимиз жаҳон ҳамжамиятида ўзининг муносиб ўрнини эгаллаб бормоқда. Юртимизда халқимизнинг бахт-саодатини кўзлаб, жуда кўп хайрли ишлар амалга оширилмоқда. Шу хайрли ишлар замирида ҳар томонлама етук, комил инсонни тарбиялаш ва баркамол авлод келажагини таъминлашдек мақсадни давлат сиёсати даражасига олибчиқилиши ёшларга бўлган чексиз эътибор ва юксак ишончдир.

Жаҳонталаблариасосидабарпоэтилаётгантаълиммасканлари, уларнизарурўқувжиҳозлариватехникускуналарбилантаъминланиши, яратилаётганянгиўқувстандартлари, дастурвақўлланмаларҳамда илғорпедагогиктехнологияларнингамалиётдажорий этилиши, шу бир қаторда математика фани ўрганишни янада чуқурлаштиришни йўлга қўйиш мақсадида Президент Қарори қабул қилиниши ёшларкамолотийўлидакўрсатилаётганғамхўрликнингамалийифодасидир.

Жумладан, «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-кувватлаш, шунингдек, ўзбекистон республикаси фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сонли қарори ва Вазирлар Маҳкамасининг «Ал-Хоразмий номидаги Халқаро физика ва математика мактаб-интернатини ташкил этиш тўғрисида»ги 2020 йил 19 мартдаги 171-сонли Қарори қабул қилинганлигификримизнинг далилидир.

Қўлланмани ёзишда ўзбек, рус ва чет эл олимлари томонидан яратилган дарслик ва қўлланмалар ҳамда интернет маълумотларидан фойдаланилган. Талабагатушуниши осон бўлиши учун назария ва масалалар осондан мураккабгача тартибида кетма-кет жойлаштирилган. Ўрганишни осонлаштириш, олинган билимларни тизимга солиб, чуқурлаштириш мақсадида анализнинг энг сара масалалари ҳамда уларнинг ечиш йўллари тўлиқ берилган. Айрим масалаларни ечишда янги функциялар тузилиб, оригинал усулларда ечилган. Шунингдек, масалаларни ечишда кўп қўлланиладиган теоремалар ва формулалардан фойдаланиш йўллари баён қилинган. Ҳар бир янги математик терминларга изоҳлар берилган.

Қўлланма «Математик анализинг танланган боблари»фанидан ёзилган бўлиб, шу фаннинг ўқув дастури асосидатузилган ва ўқув адабиёти бакалаврлар учун Давлат таълимстандартининг «Математика» йўналишига мос келади вауниверситетларнинг 4-курс талабалари учун мўлжалланган.Қўлланма уч бобдан иборат бўлиб, ҳар бир бобда назарий маълумотлар ва ўтилган мавзуни қай даражада ўзлаштирганлигини текширишмақсадида назорат саволлари берилган. Бундан ташқари, олинган билимларни мустаҳкамлаш ва амалиётга татбиқ қилишларини ривожлантириш мақсадида параграф сўнгида бир қатор мисоллар ечиб кўрсатилган ва мустақил ечишлари учун топшириқлар берилган. Айрим топшириқлар олдин чоп қилинган масалалар тўпламидан олинган ва айримлари муаллифлар томонидан янги тузилган.

Қўлланманинг биринчи боби аниқ интегралнингумумлашмаси бўлган Стилтьес интегралини ўрганишда асосийвазифани бажариш билан бир қаторда математик анализнингбошқа кўплаб масалаларида катта аҳамиятга эга бўлган вафанга биринчи бўлиб С.Жордан томонидан киритилганчекливариацияли функциялар ҳамда монотон ва абсолют узлуксиз функцияларнинг хоссалари тўғрисида кенг маълумотлар берилган.Иккинчи бобда эса Риман интегралининг табиий умумлашмасибўлган Стилтьес интеграли ва унинг хоссалари ўрганилган. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ва Стилтьес интеграли ўртасидаги боғлиқлик тушунтирилиб, уни яхшироқ ўрганиш мақсадида бир нечта мисоллар ечиб кўрсатилган.

Учинчи бобда ортогонал системалар ва қаторлар ҳамда математикфизика тенгламаларини интеграллашда учрайдиган махсусфункциялардан бири - сферик функциялар синфиваууларнинг хоссалари ўрганилган. Сферик функцияларни амалий татбиғи бўйича физикага оид масалани қўйилиши ва уни натижалари тушунтирилган.

Муаллифлар қўлланма талабаларда билим олишгаинтилиш ҳиссининг шаклланишига хизмат қилади ҳамда уларга «Математик анализнинг танланган боблари» фанинингкелтирилган мавзулари бўйича билимларини мустаҳкамлашдаёрдам беради деб умид билдирадилар.

I БОБ. Чекли вариацияли ва абсолют узлуксиз функциялар

Маълумки, Риман интеграли математик анализнинг асосиймавзуларидан биридир. Амалий татбиғининг кенглиги билан фанда муҳим ўрин тутади. Мазкур бобда Риман интегралининг умумлашмаси бўлганСтилтьес интегралини ўрганишда асосий вазифанибажарадиган ва фанга биринчи бўлиб С.Жордан томониданкиритилган чекли вариацияли функцияларни ва абсолют узлуксиз функцияларни ўрганишга бағишланган.

Чекли вариацияли функциялар фақатгинаСтилтьес интегралини ўрганишда эмас, балки математиканализнинг бошқа кўплаб масалаларида муҳим аҳамиятга эга.

§1. Чекли вариацияли функциялар ва уларнинг хоссалари

1. Чекли вариацияли функциянинг таърифи.$f(x)$функция чекли [a,b] кесмада аниқланган бўлсин. Бу кесмани $a= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$тенгсизликларни қаноатлартирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та оралиққа бўламиз ва қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|. \quad (1)$$

Таъриф1.*Агар (1)йиғиндилар $\forall n \in N$ учун юқоридан текис чегараланган бўлса, унда $f(x)$функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга ёки ўзгариши чегараланган функция дейилади. Шу йиғиндиларнинг аниқ юқори чегарасига функциянинг тўлиқ вариацияси ёки тўлиқ ўзгариши деб аталадиҳамда $\bigvee_a^b f(x)$ кабибелгиланади*:

$$\bigvee_a^b f(x) := Sup\,\{\boldsymbol{\vartheta}_n\}. \quad (2)$$

Баъзи ҳолларда $f(x)$ функциянинг чексиз оралиқдаги (масалан, $[a,+\infty)$ оралиқдаги) вариацияси тўғрисида ҳам гапириш мумкин бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

Таъриф 2. *Агар $f(x)$ функция $\forall [a,A] \subset [a,+\infty)$ оралиқда чекли вариацияга эга бўлиб,*

$$\bigvee_a^A f(x)$$

тўлиқ вариациялар текис чегараланган бўлса, унда $f(x)$функция $[a,+\infty)$ оралиқда чекли вариацияга эга деб аталади ҳамда

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) \coloneqq \underset{A>a}{Sup}\left\{\bigvee_a^{+\infty} f(x)\right\} \tag{3}$$
деб қабул қилинади.

<u>Изоҳ</u>. $f(x)$ *функциянинг чекли вариацияга эга бўлишида унинг узлуксизлиги мутлақо аҳамиятга эга эмас.*

Мисоллар. **1)**$[a, b]$ кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади.

а)$[a, b]$ - чекли бўлсин. У ҳолда

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]\right| =$$

$$= |f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})\ |$$

$$= |f(x_n) - f(x_0)| = |f(b) - f(a)|.$$

Бунда, функция монотон бўлгани учун модуллар йиғиндиси йиғиндининг модулига тенг бўлиши инобатга олинди. Демак,

$$\bigvee_a^{A} f(x) = Sup\{\vartheta_n\} = |f(b) - f(a)|.$$

б)энди$f(x)$функция$[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. Бундан келиб чиқадики,

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) \coloneqq \underset{A>a}{Sup}\left\{\bigvee_a^{\mathrm{A}} f(x)\right\} = \underset{A>a}{Sup}\{f(A) - f(a)\} = f(+\infty) - f(a),$$

буерда

$$f(+\infty) = \lim_{A\to\infty} f(A).$$

2)Эндиузлуксиз, лекинчекливариациягаэгабўлмаганфункциягамисолкелтирамиз.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{агар} x \neq 0\ , \\ 0, & \text{агар} x = 0 \end{cases}$$

функцияни $[0; 1]$ кесмада қараймиз. Қуйидаги

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

тенгсизликларниқаноатлантирувчинуқталарёрдамида$[0; 1]$кесманиоралиқларгаажратамизва (1)йиғиндиниҳисоблаймизҳамдаушбутенгликкаэгабўламиз:

$$\vartheta_n = \left|\sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]\right| = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Демак,

$$\bigvee_0^1 f(x) = Sup\,\{\vartheta_n\} = \underset{n}{Sup}\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\} = +\infty.$$

2. Чекли вариацияли функциялар синфи. Муҳим ва кўпгина татбиқларга эга бўлган функциялар орасида ўзгариши чегараланган функциялар синфи катта аҳамиятга эга.

Биринчи бандда кўрганимиздек,$[a,b]$ кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади. Бу хоссадан фойдаланиб, чекли вариацияли функциялар синфини кенгайтириш мумкин.

Теорема1.$[a,b]$ *кесмада берилган* $f(x)$*функция шу кесмада бўлакли монотон бўлса, яъни*

$$[a,b] = \bigcup_{k=0}^{m-1}[a_k,a_{k+1}]\ (a_0 = a, a_m = b)$$

бўлиб, $f(x)$*функция ҳар бир* $[a_k,a_{k+1}]$ *кесмада монотон бўлса, унда* $f(x)$*функция* $[a,b]$ *кесмада чекли вариацияга эга бўлади.*

Исбот.$[a,b]$ кесманинг ихтиёрий бўлинишини олиб

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

йиғинди тузамиз.

Бу бўлинишга a_k $(k = \overline{0,m})$ нуқталарни қўшиб,$[a,b]$ кесманинг янги бўлинишини оламиз. Янги бўлиниш учун

$$\vartheta_{n(m)} = \sum_{k=0}^{n-1}|f(a_{k+1}) - f(a_k)| = B$$

бўлиб,$\vartheta_n \le \vartheta_{n(m)}$тенгсизлик бажарилади. $Sup\{\vartheta_n\} \le B$ бўлиб, $f(x)$функция$[a,b]$кесмадачекливариациягаэга эканлиги келиб чиқади.

1-мисол. Агар$f(x)$функция$[a,b]$кесмада монотон бўлса, у ҳолда унинг ўзгариши чегараланган бўлиб, тўла ўзгариши

$$\bigvee_a^b[f] = |f(b) - f(a)| \qquad (5)$$

га тенглигини кўрсатинг.

Ечиш.$[a,b]$кесманинг ихтиёрий$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ бўлинишига мос келган

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

йиғиндини қараймиз.$f(x)$функция$[a,b]$кесмада монотон бўлганлиги учун барча$i = \overline{1,n}$лар учун$f(x_i) - f(x_{i-1})$қўшилувчиларнинг ишоралари бир хил, шунинг учун

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\right| = |f(b)-f(a)|. \qquad (6)$$

Бу тенгликдан $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада ўзгариши чегараланганлиги ва (5) тенгликнинг тўғрилиги келиб чиқади.

2-мисол.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} x = 0; \\ 3\cos x, & \text{агар} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

функциянинг $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада ўзгариши чегараланган эканлигини кўрсатинг ва тўла ўзгаришини топинг.

Ечиш. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесманинг ихтиёрий $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \frac{\pi}{2}$ бўлинишини қараймиз. Унга мос келган йиғиндини баҳолаймиз:

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = |f(x_1)-f(x_0)| + \left|\sum_{i=2}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\right|$$

$$= |3\cos x_1 - 0| + \sum_{i=0}^{n}|3\,cos\,x_i - 3\,cos\,x_{i-1}|.$$

Косинус функциянинг $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада манфий эмаслиги ҳамда монотон камаювчи эканлигидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = 3\,cos\,x_1 + 3\sum_{i=2}^{n}(cos\,x_{i-1} - cos\,x_i) = 3\,cos\,x_1$$
$$+ 3\left[(cos\,x_1 - cos\,x_2) + (cos\,x_2 - cos\,x_3) + \cdots + (cos\,x_{n-1} - cos\frac{\pi}{2})\right] = 3\,cos\,x_i + 3\left[cos\,x_i - cos\frac{\pi}{2}\right] = 6\,cos\,x_1 \le 6.$$

Таърифгакўра, $f(x)$ функциянинг $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаўзгаришичегараланганв

а

$$\bigvee_{0}^{\frac{\pi}{2}}[f] = sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sup_{0<x_1<\frac{\pi}{2}} 6\cos x_1 = 6.$$

3- мисол.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{агар } x \in [0,1); \\ x^3 - 3, & \text{агар} x \in [1,2], \end{cases}$$

функциянинг $[0,2]$ кесмадагитўлаўзгаришиниҳисобланг .

Ечиш. $[1,2]$ кесмада $f(x) = x^2 - 3$ функция монотон ўсувчи бўлганлиги учун

$$\bigvee_1^2[f] = f(2) - f(1) = 1 + 2 = 3.$$

Энди $f(x)$ функциянинг $[0,1]$ кесмадаги тўла ўзгаришини топамиз. $[0,1]$ кесманинг ихтиерий$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ бўлиниши учун

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1}|f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_n) - f(x_{n-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|x_{i-1} - x_i + 1| + |-3 + 1^2 - x_{n-1} + 1| = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) +$$

$$|-1 - x_{n-1}| = x_{n-1} - x_0 + 1 + x_{n-1} = 1 + 2x_{n-1}$$

тенгликўринли. Бунданқуйидагигаэгабўламиз:

$$\bigvee_0^1[f] = sup\sum_{i=0}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sup(1 + 2x_{n-1}) = 3\,.$$

1-хоссага кўра,

$$\bigvee_0^2[f] = \bigvee_0^1[f] + \bigvee_1^2[f] = 3 + 3 = 6$$

бўлади.

4-мисол.Агар $[a,b]$ кесмада аниқланган$f(x)$функция ярим очиқ оралиқда монотон бўлса, унинг ўзгариши чегараланган бўлиб,

$$\bigvee_a^b[f] = |f(b-0) - f(a)| + |f(b) - f(b-0)| \qquad (7)$$

тенгликўринлиэканлигиникўрсатинг.

Ечиш.$[a, b]$кесманингихтиёрийбўлинишиниқараймиз.Функциянинг $[a, b]$яримочиқоралиқдамонотонэканлигиданфойдалансак, қуйидагигаэгабўламиз .

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1}|f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(b) - f(x_{n-1})| =$$

$$= |f(x_{n-1}) - f(a)| + |f(b) - f(x_{n-1})| \qquad (8)$$

Энди$\psi(x) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x_{n-1})|$,$x \in [a,b)$функциянинг$[a,b)$яримочиқоралиқдамонотонкамаювчиэканлигиникўрсатамиз.Бунинг учун $[a,b)$оралиқда ётувчи ихтиерий $x_1 < x_2$ нуқталар учун $\psi(x_2) - \psi(x_1) \geq 0$ эканлигини кўрсатиш етарли.

$$\begin{aligned}\psi(x_2) &= |f(x_2) - f(a)| + |f(b) - f(x_2)| \\ &= |f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(a)| \\ &+ |f(b) - f(x_1) - f(x_2) + f(x_1))| \\ &= |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \\ &+ \left|f(b) - f(x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)\right|. \qquad (9)\end{aligned}$$

(9) дагиохиргитенглик$f(x)$ функциянинг$[a,b)$ оралиқдаги монотон (яъни $f(x_2)-f(x_1)$билан$f(x_1)-f(a)$нинг ишоралари бир хил) эканлигидан келиб чиқади.ИхтиёрийAва B сонлар учун$|A-B|\geq|A|-|B|$эканлигидан фойдалансак,

$$\psi(x_2)-\psi(x_1) = |f(b)-f(x_1)-f(x_2)-f(x_1))|+|f(x_2)-f(x_1)| - |f(b)-f(x_1)|\leq 0$$

тенгсизликниҳосил қиламиз.Бу эса$\psi(x)$функциянинг$[a,b)$ оралиқда монотонкамаядиганэканлигиниисботлайди. (8)тенгсизликдан ва $\psi(x)$функциянинг$[a,b)$ оралиқда монотонкамаювчиэканлигидан

$$sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sup_{a<x_{n-1}<b}\psi(x_{n-1}) = \psi(b-0)$$

тенглик келиб чиқади. Функция тўла ўзгаришининг таърифига кўра,қуйидагига эга бўламиз:

$$\bigvee_a^b[f] = \psi(b-0) = |f(b-0)-f(a)|+|f(b)-f(b-0)|.$$

5-мисол. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада берилган бўлиб $(a,b]$ ярим очиқ оралиқдамонотонбўлса,унинг тўла ўзгаришичегараланганбўладива қуйидагитенгликўринлибўлади:

$$\bigvee_a^b[f] = |f(a+0)-f(a)|+|f(b)-f(a+0)|. \qquad (10)$$

Бу мисолнинг исботи худдиюқоридагидекбажарилади. Унинг исботини ўқувчига қолдирамиз.

6-мисол. Агар $[a,b]$ кесмада аниқланган$f(x)$ функция (a,b) оралиқда монотон бўлса, унинг тўлаўзгаришиучун

$$\bigvee_a^b[f] = |f(a+0)-f(a)|+|f(b-0)-f(a+0)| +|f(b)-f(b-0)| \qquad (11)$$

тенгликўринлиэканлигиниисботланг.

Ечиш.(a,b) оралиқдан ихтиёрий С нуқта оламиз. Ўзгариши чегараланган функцияларнинг 1-хоссасиданҳамда(7) ва (10)тенгликларданфойдаланиб,

$$\bigvee_a^b[f] = \bigvee_a^c[f]+\bigvee_c^b[f] = |f(a+0)-f(a)|+|f(c)-f(a+0)| + |f(b-0)-f(c)|+|f(b)-f(b-0)| \qquad (12)$$

тенгликниҳосил қиламиз.

$f(x)$функция(a, b) ораликда монотон бўлганлиги учун$f(c) - f(a+0)$ва$f(b-0) - f(c)$ифодаларнинг ишоралари бир хил. Шунинг учун

$$|f(c) - f(a+0)| + |f(b-0) - f(c)|$$
$$= |f(c) - f(a+0) + f(b-0) - f(c)|$$
$$= |f(b-0) - f(a+0)|.$$

Буни ҳисобга олсак(12)дан(11)келиб чиқади.

7-мисол.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар} x = 0 \\ cos2x, & \text{агар} x \in (o, \pi] \end{cases}$$

функцияни $(o, \pi]$ кесмада иккита монотон камаядиган функцияларнинг айирмасикўринишидатасвирланг.

Ечиш:Агар $f(x)$ функциянинг$[a, b]$ кесмада ўзгариши чегараланган бўлса

$$\varphi(x) = \bigvee_a^x [f], \quad \psi(x) = \varphi(x) - f(x),$$

функциялар$[a, b]$ кесмадамонотон камаядиган функциялар бўлади ва уларнинг айирмаси$f(x)$ функциядан иборат. Мисолда берилган$f(x)$функция учун$\varphi(x), \psi(x)$функцияларнитопамиз:

$f(x)$ функция$(0, \frac{\pi}{2}]$ ораликда монотон камаювчи,$[\frac{\pi}{2}, \pi]$ кесмада эса монотон ўсувчи.

а)$x = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\varphi(x) = \varphi(0) = \bigvee_0^0 [f] = 0.$$

б)$0 < x < \frac{\pi}{2}$бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция $(0, x]$ ораликда монотон камаювчи бўлади. Шунинг учун (10) тенгликка кўра,

$$\varphi(x) = \bigvee_0^x [f] = |f(0+0) - f(0)| + |f(x) - f(0+0)|$$
$$= |1 - (-1)| + |cos2x - 1| = 2 + 1 - cos2x = 3 - cos2x$$

в)$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ бўлсин. У ҳолда $1 + cos2x \ge 0$эканлигини ҳисобга олиб

$$\varphi(x) = \bigvee_0^x [f] = \bigvee_0^{\frac{\pi}{2}} [f] + \bigvee_{\frac{\pi}{2}}^x [f]$$

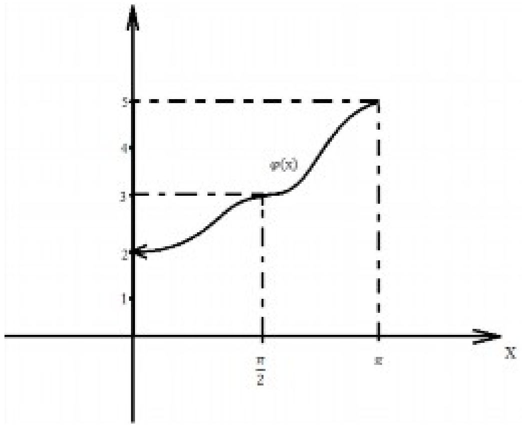
$$= |f(0+0) - f(0)| + \left|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0+0)\right| + \left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |1 - (-1)|$$
$$+|-1 - 1| + |cos2x - (-1) = 2 + 2 + cos2x + 1 = 5 + cos2x|$$

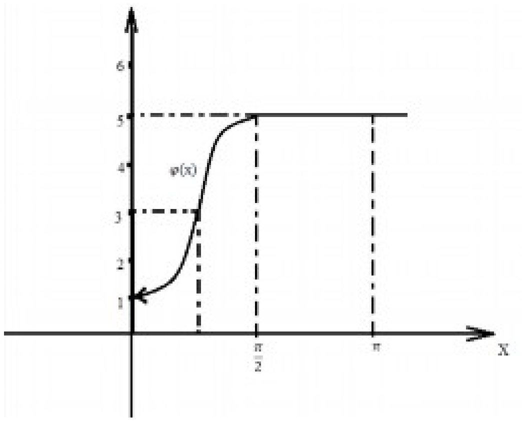
ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 3 - cos2x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 5 + cos2x, & x \in \ [\dfrac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

бўлар экан. Энди$\psi(x)$ ни топамиз:

$$\psi(x) = \varphi(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 3 - cos2x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 5, & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$





8-мисол. Узлуксиз

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} x = 0; \\ x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{агар} x \in (0{,}1] \end{cases}$$

функциянинг $[0{,}1]$ кесмада ўзгариши чегараланмаган эканлигини кўрсатинг.

Ечиш.$[0{,}1]$ кесмани қуйидагича$2n$ бўлакка бўламиз.

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

Бубўлинишучун

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{2n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \left|\frac{1}{2n}\cos\pi n\right| +$$

$$+ \sum_{k=2}^{2n} \left|\frac{1}{2n+1-k}\cos\frac{2n+1-k}{2}\pi - \frac{1}{2n+2-k}\frac{2n+2-k}{2}\pi\right| =$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \ \ldots \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \ \ldots + \frac{1}{n}$$

бўлади.

$$1 + \frac{1}{2} + \ \ldots \ + \frac{1}{n} + \ \ldots = \ \infty$$

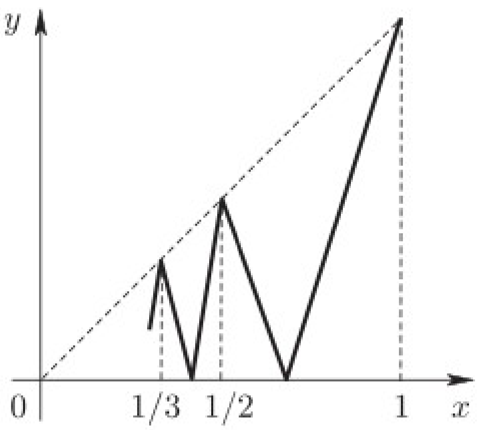
бўлганлиги учун ихтиёрий $C > 0$ сон учун шундай n номер мавжудки, $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > C$ бўлади, яъни

$$\sum_{k=1}^{2n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| > C.$$

Бу эса $f(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланмаган эканлигини билдиради.

9-мисол. Узлуксиз, лекин чекли вариацияга эга бўлмаган функция тузинг.

Ечиш. $[0,1]$ оралиқда $f(x)$ функцияни қуйидагича тузиб оламиз: $f(x) = 0, f(1/k) = 1/k, k = 1,2, \ldots$ бўлсин ва $[1/(k+1), 1/k]$ кесмада бўлакли чизиқли бўлиб, бир марта нолга тенг бўлсин. Графиги қуйидаги кўринишга эга:



Ушбу функциянинг $[1/(k+1), 1/k]$ кесмадаги вариацияси

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}$$

га тенг. Демак, $[0,1]$ оралиқдаги вариация

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}.$$

га тенг.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

гармоник қатор бўлиб, $n \to \infty$ қатор узоқлашувчи бўлади. Бундан, биз томондан тузилган узлуксиз функциянинг вариацияси чегараланмаганлигини кўрсатади.

Теорема 2. *Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада Липшиц шартини қаноатлантирса, яъни шундай $L > 0$ сон топилсаки, ихтиёрий $x, \bar{x} \epsilon [a,b]$ нуқталар учун*

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq L \cdot |\bar{x} - x|$$

тенгсизликбажарилса, ундa$f(x)$функция$[a,b]$кесмадачекливариациялифункциябўладива

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L\cdot\ (b-a)$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот.Чекли вариацияли функциялар таърифи ва теорема шартига кўра,

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)| \leq L\sum_{k=0}^{n-1}|x_{k+1}-x_k| = L(b-a).$$

$\forall n \in N$учун (2) формуладан қуйидагига эга бўламиз:

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L\cdot(b-a).$$

Теорема 3. *Агар $f(x)$функция $[a,b]$ кесмада чегараланган ҳосилага эга бўлса, унда $f(x)$функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлади.*

Исбот. Теорема шартига кўра, шундай ўзгармас$L>0$сон топиладики, $\forall x \in\ [a,b]$ учун

$$f^{'}(x) \leq L$$

тенгсизлик бажарилади. $\forall x \in\ [a,b]$нуқталар олиб$[x,\bar{x}]$, (ёки$[\ \bar{x},x]$)кесмада Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасидан фойдаланамиз:

$$|f(\bar{x})-f(x)| = \left|f^{'}(\xi)(\bar{x}-x)\right| \leq L\cdot|\bar{x}-x|.$$

Демак, $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада Липщиц шартини қаноатлантиради. 2-теоремага кўра эса, $f(x)$чекли вариацияга эга бўлади. Теорема исботланди.

10-Мисол.Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{агар} x \neq 0\,, \\ \quad 0, & \text{агар} x = 0, \end{cases}$$

функция ихтиёрий чекли $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эгалигини кўрсатинг.

Ечиш.3-теоремадан фойдаланиб кўрсатамиз. $f(x)$ учун

$x \neq 0$ да $f'(x) = 2xsin\frac{\pi}{x} - \pi cos\frac{\pi}{x}$ва

$x = 0$да

$$f^{'}(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x sin\frac{\pi}{\Delta x} = 0$$

бўлгани учун ихтиёрий чекли $[a,b]$ кесмада ушбу

$$\left|f^{'}(x)\right| \leq 2\cdot b+\pi = L$$

тенгсизлик ўринли бўлади. 3-теоремага кўра $f(x)$функция $[a,b]$да чекли вариацияга эга.

Теорема 4. *Агар $[a,b]$ кесмада аникланган $f(x)$функцияни шу кесмада*

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \ (5)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бунда $\varphi(t)$ функция $[a,b]$ кесмада абсолют интегралланувчи функция, у ҳолда $f(x)$ функция шу кесмада чекли вариацияга эга бўлиб,

$$\bigvee_a^b f(x) \le \bigvee_a^b |\varphi(t)|dt$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот. (1) ва (5) дан

$$\boldsymbol{\vartheta}_n = \sum_{k-0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| =$$

$$\sum_{k-1}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)dt \right| \le \sum_{k-1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(t)| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt$$

теореманингисботикелибчиқади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1-топшириқ. $f(x)$ функциянинг$[a,b]$ кесмада ўзгариши чегараланган эканлигини кўрсатинг ва тўла ўзгаришини топинг.

№	$f(x)$	$[a,b]$	*№*	$f(x)$	$[a,b]$
1	$f(x) = sinx$	$[0,2\pi]$	*10*	$f(x) = \begin{cases} -5, агар x = \frac{\pi}{2}, \\ sinx, агар x \ne \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	$[0,\pi]$
2	$f(x) = cosx$	$[-\pi,\pi]$	*11*	$f(x) = \begin{cases} 3, агар x = 0, \\ cosx, агар x \ne 0. \end{cases}$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
3	$f(x) = 1 - x^2$	$[-1,1]$	*12*	$f(x) = \begin{cases} 0, агар x = 0, \\ 5 + 6cos\frac{x}{2}, агар x \ne 0. \end{cases}$	$[-\pi,\pi]$
4	$f(x) = 3sin4x$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	*13*	$f(x) = \begin{cases} 5, агар x = 0, \\ x^2 - 1, агар x \ne 0. \end{cases}$	$[-1,3]$
5	$f(x) = 6sin3x + 5$	$[0,\frac{2\pi}{3}]$	*14*	$f(x) = \begin{cases} 8, агар x = 1, \\ x^2 - 2x, агар x \ne 1. \end{cases}$	$[0,2]$
6	$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$	$[-4,4]$	*15*	$f(x) = \begin{cases} 2, агар x = 0, \\ lg\ (1 + x^2), агар x \ne 0. \end{cases}$	$[3,3]$
7	$f(x) = ln(1 + x^2)$	$[-1,e]$	*16*	$f(x) = \begin{cases} 6, агар x = \frac{\pi}{2}, \\ 4cosx2x, агар x \ne \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	$[0,\frac{\pi}{2}]$

8	$f(x) = (x-1)(x-2)$	$[2,2]$	*17*	$f(x) = \begin{cases} 3, агар x = 0, \\ e^{x^2-1}, агар x \neq 0. \end{cases}$	$[-1,1]$
9	$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$[0,2]$	*18*	$f(x) = \begin{cases} 4, агар x = 1, \\ 2^{x^2-1}, агар x \neq 1 \end{cases}$	$[-1,2]$

§2. Монотон функциялар ва сакраш функцияси

3. Монотон функциялар таърифи. Юқорида келтирилган мисоллардан кўриниб турибдики, чекли вариацияли функциялар синфини ўрганишда монотон функциялардан кўп марта фойдаланилади. Шу сабабли монотон функцияларни батафсил ўрганиш лозим деб топилди.

Аввало баъзи керакли тушунчаларни эслатамиз. h – ўзгарувчи миқдорнинг ҳақиқий мусбат (манфий) сонли қийматларни қабул килиб нолга интилишини$h \to 0+0$ $(h \to 0-0)$ – шаклда белгилаймиз.

R - ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган $f(x)$ функция берилган ва $x_0 \in$ R даги ихтиёрий нуқта бўлсин.

Агар

$$\lim_{h \to 0+0} f(x_0+h) \left(\lim_{h \to 0-0} f(x_0+h) \right)$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимитга$f(x)$ функциянингx_0 нуқтадаги ўнг (чап)лимити дейиладива

$$f(x_0+0)\big(f(x_0-0)\big)$$

деб белгиланади.

Агарда$f(x)$функциянингx_0 нуқтадагичап(ўнг)лимити мавжуд бўлиб,

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$$

тенгликўринли бўлса,$f(x)$функцияx_0 нуқтада узлуксиз дейилади.Агарда,

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$$

бўлса (лимитлар мавжуд бўлиб),$f(x)$функцияx_0 нуқтадабиринчи тур узилишга эга дейилади,x_0 нуқта эса, $f(x)$функциянингбиринчи тур узилиш нуқтаси дейилади.

$f(x_0+0) - f(x_0-0)$қийматга$f(x)$функциянингx_0 нуқтадагисакраши дейилади.

Агар$f(x)$функциянингx_0 нуқтадаги ўнг ва чап лимитларидан бирортаси мавжуд бўлмасаёки бирортаси чексизга айланса, бу нуқта $f(x)$функциянингиккинчи турузилиш нуқтаси дейилади.

Таъриф 1.$[a,b]$*кесмада аниқланган* $f(x)$ *функция шу кесмадан олинган ҳар қандай* x_1, x_2 *лар учун* $x_1 < x_2$ *бўлганда*

$$f(x_1) \leq f(x_2)\big(f(x_1) \geq f(x_2)\big)(1)$$

тенгсизликни қаноатлантирса,$f(x)$ *функция монотон камаймайдиган (ўсмайдиган) функция дейилади.*

Таъриф 2.$[a,b]$*кесмада аниқланган* $f(x)$ *функция шу кесмадан олинган ҳар қандай* x_1, x_2 *лар учун* $x_1 < x_2$ *бўлганда*

$$f(x_1) < f(x_2)\big(f(x_1) > f(x_2)\big)(2)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, $f(x)$ *монотон ўсувчи (камаювчи) функция дейилади.*

Қисқача қилиб айтганда, монотон функция деб юқоридаги таърифларда келтирилган функциялар тушунилади.

4. Монотон функцияларнинг хоссалари

1.$[a,b]$кесмада аниқланган ҳар қандай монотон функция шу кесмада чегараланган, ўлчанувчи ва жамланувчи функциядир.

2. Монотон функциянинг узилиш нуқталари фақат биринчи тур бўлиши мумкин.

3. Монотон функциянинг узилиш нуқталари тўплами кўпи билан саноқлидир.

$f(x)$ - монотон камаймайдиган, чапдан узлуксиз функция бўлсин. Бу функциянинг узилиш нуқталарини $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$орқали ва функциянинг бу нуқталарга мос келган сакрашларини $h_1, h_2, \dots h_n, \dots$ орқали белгилаймиз ва йиғинди тузамиз:

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n,$$

бунда $H(x)$ функция $f(x)$ нинг сакраш функцияси (кейинчалик сакраш функциясини батафсилроқ ўрганамиз) бўлиб, чапдан узлуксиз, монотон камаймайдиган функциядир.

$$\varphi(x) = f(x) - H(x)$$

шаклида аниқланган функция монотон камаймайдиган функция бўлади, бу ерда $\varphi(x)$ - узлуксиз функция.

4. Чапдан (ўнгдан) узлуксиз бўлган ҳар қандай монотон функцияни ягона усул билан узлуксиз монотон функция ва чапдан (ўнгдан) узлуксиз бўлган сакраш функциясининг йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин.

5. Дини ҳосила сонлари.Дини ҳосила сонлари тушунчасини киритамиз. $f(x)$функция$[a,b]$кесмада берилган ва x_0 нуқта кесманинг ички нуқтаси бўлсин.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

нисбатни қарайлик, бунда $x_0 + h \in [a,b]$.Бу нисбат $h \to 0$ да бирор лимитга интилмаслиги ҳам мумкин, лекин доимо чекли ёки чексиз, қуйи ва юқори лимитлар мавжуд:

$$\varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \Lambda_{\text{ўнг}},$$

$$\varliminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lambda_{\text{ўнг}},$$

$$\overline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\Lambda_{\text{чап}},$$

$$\underline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\lambda_{\text{чап}},$$

бу сонлар $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги мос равишда ўнг юқори, ўнг қуйи, чап юқори, чап қуйи ҳосила сонлари дейилади. Агар

$$\Lambda_{\text{ўнг}}=\lambda_{\textit{ўнг}}\ (\Lambda_{\textit{чап}}=\lambda_{\textit{чап}})$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнг (чап) ҳосилага эга дейилади, яъни

$$\overline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\underline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда функциянинг ўнг ҳосиласи мавжуд дейилади.

Мисол.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

функцияни ўнг юқори, ўнг қуйи, чап юқори ва чап қуйи ҳосила сонларини ҳисобланг.

Ечиш.

$$\Lambda_{\text{ўнг}}=1, \lambda_{\text{ўнг}}=-1, \Lambda_{\text{чап}}=\lambda_{\text{чап}}=0.$$

Монотон функциялар ҳақидаги асосий теоремани келтирамиз:

Теорема1(А.Лебег):$[a,b]$*кесмада аниқланган ҳар қандай монотон* $f(x)$ *функция, бу кесманинг деярли ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга.*

Ушбу теоремани қайсидир маънода тўлдирувчи сифатида монотон функциянинг ҳосиласини интегралланувчи эканлиги ҳақидаги қуйидаги теоремани баён қиламиз.

Теорема 2. $[a,b]$*кесмада монотон ўсувчи ҳар қандай* $f(x)$ *функция, шу кесмада деярли ҳамма жойда интегралланувчи ҳосилага эга ҳамда*

$$\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)$$

бўлади.

Исбот. Функциянинг деярли ҳамма жойда ҳосилага эга бўлиши Лебег теоремасидан келиб чиқади. Биз ҳосилани интегралланувчи эканлигини исботлаймиз.

$f(x)$функцияни аниқланиш соҳасини кенгайтириб, $[b,b+1]$ кесмада қиймати $f(b)$ га тенг бўлсин деб оламиз. $[a,b]$ кесмага тегишли ихтиёрий xларда $f'(x)$ҳосила мавжудлиги учун уни

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

кўринишида ёзиб оламиз.

$f_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$функция $a, b]$ кесмада ўлчанувчи, у ҳолда лимит функция ўлчанувчи функциялар кетма-кетлигининг лимити сифатида $f'(x)$ ҳам ўлчанувчи. Бундан ташқари, $f(x)$функциянинг монотон ўсувчилигидан барча $f_n(x)$, шунингдек $f'(x)$ функциялар ҳам номанфий. Ушбуни эътиборга олган ҳолда Фату леммасини қўллаб, қуйидаги тенгсизликни оламиз:

$$\int_a^b f'(x)dx \le \sup_n \int_a^b f_n(x)dx.$$

$f(x)$ функцияни монотонлиги учун, шунингдек $f_n(x)$ функцияни ҳам Риман маъносида интегралланувчи эканлигини инобатга олсак,

$$\int_a^b f_n(x)dx$$

Риман интеграли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз ва уни қуйидагича ўзгартирамиз.

$$\int_a^b f_n(x)dx = n\int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]dx = n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(z)dz - \int_a^b f(x)dx\right] =$$

$$n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(z)dz - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(z)dz\right] \le n\left[f(b)\frac{1}{n} - f(a)\frac{1}{n}\right] = f(b) - f(a).$$

Бу тенгсизликни олиш учун биз (x) функцияни монотонлигидан фойдаландик. Бундан

$$\sup_n \int_a^b f_n(x)dx \ \le f(b) - f(a)$$

эканлиги келиб чиқади ва

$$\int_a^b f'(x)dx \le \sup_n \int_a^b f_n(x)dx$$

тенгсизликни инобатга олсак,

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

бўлади ва $f'(x)$ функцияни интегралланувчи эканлиги исботланди. Бу теоремадан келиб чиқадики, $f'(x)$ функция деярли ҳамма жойда чекли.

Шу ўринда монотон функциялар учун ҳар доим тенглик бажарилмайдими деган савол туғилади. В.И.Соболевнинг «Лекции по дополнительным главам математического анализа» [39]китобида монотон функциялар учун доимо тенглик бажарилмаслиги тўғрисида мисол келтирилган.

Ўнг юқори, ўнг қуйи, чап юқори, чап қуйи ҳосила сонлари аниқланишидан кўринадики, $[a, b]$кесмада аниқланган ихтиёрий монотон функция учун деярли ҳар бир нуқтада

$$\Lambda_{\text{ўнг}} = \lambda_{\text{ўнг}} = \Lambda_{\text{чап}} = \lambda_{\text{чап}}$$

тенгликлар бажарилар экан.

Мисоллар келтирамиз:

1. $f(x) = const,\ x \in [a, b]$ функция бир вақтда монотон ўсмайдиган ва манотон камаймайдиган функцияга мисол бўла олади.

Энди содда монотон функцияларни қуйидагича аниқлаш мумкин.

2. $[a, b]$кесмада ихтиёрий чекли

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$$

нуқталар берилган ва

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < k_{n+1}$$

ҳақиқий сонлар бўлсин.

$$f(x) = \begin{cases} k_1, x \in [a, x_1); \\ k_2, x \in [x_1, x_2); \\ \dots\dots \\ k_n, x \in [x_{n-1}, x_n); \\ k_{n+1}, x \in [x_n, b] \end{cases}$$

шаклида аниқланганфункциялар монотонкамайдиганфункция бўлиб, унинг узилиш нуқталари$x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots x_n$ лардир.Бу нуқталарда$f(x)$ ўнгданузлуксиз, чапданузилишга эга. Функциянинг Oy нуқталардаги сакрашлари мос равишда$k_2 - k_1, k_3 - k_4, \dots\dots\dots . k_{n-1} - k_n$ларга тенг.

3.$\tilde{f}(x)$функцияни қуйидагича тузамиз:

$$
\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1(x-a)}{x_1-a}, & x \in [a, x_1); \\ k_1 + \dfrac{(k_2-k_1)\,(x-x_1)}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2); \\ \dots\dots\dots\dots & \\ k_{n-1} + \dfrac{(k_n-k_{n-1})(x-x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n); \\ k_n + \dfrac{(k_{n-1}-k_n)(x-x_n)}{b-x_n}, & x \in [x_n, b], \end{cases}
$$

бу ерда$\{x_i\}, \{k_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1, n+1}$олдинги мисолда келтирилган сонлар. Бу функция монотонўсувчиузлуксиз функцияга мисол бўлади.

Аммо$\tilde{f}(x)$функция $\{x_i\}$, $i = \overline{1,n}$ нуқталардаумуман олгандаҳосилага эга эмас. Бунуқталардаўнгва чапҳосилаларгаэга бўлиб, улар бир-бирига ҳаммавақт тенг эмас.

x_1нуқтада функциянинг ўнг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$
\lim_{h\to 0+0} \frac{\tilde{f}(x_1-h) - \tilde{f}(x_1)}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{\frac{k_1(x_1-h)-k_1a-k_1}{x_1-a}}{h}
$$

$$
= \lim_{h\to 0+0} \frac{-k_1h}{h(x_1-a)} = \frac{-k_1}{x_1-a}.
$$

Энди x_1 нуқтада чап ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$
\lim_{h\to 0-0} \frac{\tilde{f}(x_1+h) - \tilde{f}(x_1)}{h}
$$

$$
= \lim_{h\to 0-0} \frac{k_1 + \frac{(k_2-k_1)\,(x_1+h-x_1)}{x_2-x_1} - k_1}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{(k_2-k_1)h}{(x_2-x_1)h} = \frac{k_2-k_1}{x_2-x_1}.
$$

Бундан кўриниб турибдики, x_1, x_2ваk_1, k_2ларнинг танланишига қараб,бир ҳолдагина

$$
\frac{-k_1}{x_1-a} = \frac{k_2-k_1}{x_2-x_1} \tag{3}
$$

бўлишимумкин.

Умуман олганда(3) тенгликбажарилмайди. Демакx_1нуқтада $\tilde{f}(x)$функция ҳосилага эга бўлмайди.

Қолган$x_2, x_3, \dots x_n$нуқталардаги$\tilde{f}(x)$ функциянинг ўнгва чап ҳосилаларини ҳисоблашниўқувчига ҳавола этамиз.

6. Сакраш функцияси ҳақида маълумотлар. $[a, b]$кесмада

$$
H(x) = \sum_{x_n < x} h_n \tag{4}
$$

тенгликбилананиқланган$H(x)$функциясакрашфункциясинибатафсилроққкўриб чиқамиз.

(4)дан кўриниб турибдики, бу$H(x)$монотонкамаймайдиган функция, чункиxаргументaданbгақарабўзгарганда,(4) йиғиндида янгимусбатқўшилувчилар қўшилиши бўлишимумкин.Маълумки,$x_n < x$ бўлгандашундай$\varepsilon < 0$мавжудки,$x_n < x - \varepsilon$тенгсизликҳамўринли бўлади.

Шунинг учун ҳам

$$H(x-0) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} H(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \sum_{x_n<x-\varepsilon} h_n = H(x).$$

тенгликларкелиб чиқади. Демак$H(x)$функциячапдан узлуксиз экан.

Бу функциянингузилиш нуқталари$\{x_n\}$ эканлигиникўрсатамиз. Ҳақиқатданҳам $x = x_{n_0}$бўлса,

$$H\left(x_{n_0}+0\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} H(\,x_{n_0}+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \sum_{x_n<x_{n_0}+\varepsilon} h_n = \sum_{x_n\le x_{n_0}} h_n$$

тенгликўринлидир.

Натижада қуйидаги

$$H\left(x_{n_0}+0\right) - H\left(x_{n_0}-0\right) = H\left(x_{n_0}+0\right) - H\left(x_{n_0}\right)$$
$$= \sum_{x_n\le x_{n_0}} h_n - \sum_{x_n<x_{n_0}} h_n = h_{n_0}$$

тенгликлардан x_{n_0}узилиш нуқта ва бу нуқтадаги сакраши экангилиги маълум бўлади.

Агар x_0бирорта ҳам x_n лар билан устма-уст тушмаса

$$H(x_0+0) - H(x_0) = \sum_{x_n\le x_{n0}} h_n - \sum_{x_n<x_{n0}} h_n = 0$$

тенглик ўринли бўлиб,$H(x)$функциянинг узилиш нуқталари тўпламдангина иборатлиги келиб чиқади.

1-изоҳ.*Сакраш функциясининг юоридаги аниқланиши янада ҳам умумлаштирилиши мумкин.*

$[a,b]$кесмада сони чекли ёки саноқли нуқталарнинг ҳам бирига $\{h_n\}$ ва $\{h_n'\}$ чекли ёки саноқли мусбат сонлар тўпламининг ҳар биридан биттадан сон, яъни x_i гаh_i ваh_n' лар мос қўйилган бўлсин.

$$\sum_n h_n < +\infty, \qquad \sum_n h_n' < +\infty$$

шаклида аниқланган функция мураккаброқ сакраш функцияси бўлади.

Юқоридагидек кўрсатиш мумкинки,$H(x)$ камаювчи, нуқталарда ўнгдан ва чапдан узилишларга эга ва Oy нуқталардаги сакрашлари $h_n' + h_i$ сонларга тенг бўлади.

2-изоҳ.*Сакраш функциясини бутун сон ўқида ҳам аниқлаш мумкин.*

Мисол.$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$орқали сон ўқидаги барча рационал нуқталарни белгилаб, $f(x)$функцияни

$$f(x) = \sum_{r_k<x} \frac{1}{2^k}, \qquad x\epsilon(-\infty;+\infty)$$

шаклида аниқлайлик.

Тузилган $f(x)$ функция монотон ўсувчи, чапдан узлуксиз, ҳамма рационал нуқталарда ва фақат шу нуқталарда ўнгдан узилишга эга ҳамда r_n нуқтадаги сакраши 2^{-n} эканлигини исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1-топшириқ. Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлиги, узилиш нуқталари ва уларнинг турларини аниқланг (агарда функция чекли$[a,b]$кесмада аниқланган бўлса,a ва b нуқталарда фақатгина бир томонлама, яъни мос равишда ўнг ва чап лимитлар қаралади).

1) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -3 \le x < -2; \\ -x-2, & -2 \le x < 0; \\ x+5, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1; \\ x^2, & |x| \le 1; \\ x+3, & x > 1. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \sin(x-1), & x \in Q; \\ 0, & x \in R\backslash Q. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x > 1, x \ne 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рационал}; \\ 0, & x - \text{иррационал}. \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} x, & x - \text{рационал}; \\ 0, & x - \text{иррационал}. \end{cases} x \in [-5;5]$

7) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

8) $f(x) = [x],\ x \in (-\infty;+\infty)$, бунда$[x]$, $x-1 < [x] \le x$шартни қаноатлантирадиган бутун сон.

9) $f(x) = x-[x], x \in (-\infty;+\infty)$.

10) $f(x) = x\cdot[x], x \in (-\infty;+\infty)$.

11) $f(x) = \begin{cases} x-[x], & x \in Q, \\ 0, & x \in R\backslash Q. \end{cases}$

12) $f(x) = [x]cos\pi x, \qquad x \in \mathbb{R}$.

13) $f(x) = [x]sin\pi x, \qquad x \in \mathbb{R}$.

14) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx}{x}, & x < 0, \\ x+2, & x \ge 0. \end{cases}$

2-Топшириқ. Қуйидаги функцияларнинг монотонлиги, узилиш нуқталари, чап ва ўнг сакрашларини текширинг ҳамда функцияни монотон узлуксиз ва сакраш функцияларининг йиғиндиси сифатида ёзинг.

1. $\varphi(x) = Px^n + q$; $x \in [a,b]$, $a < b$, $n \in N$, p, q-ҳақиқийсонлар.

2. $\varphi(x) = \sin x, \cos x, tgx, ctgx, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\varphi(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-10,-2); \\ -7, & x \in [-2,0); \\ x-3, & x \in [0,4]. \end{cases}$

4. $\varphi(x) = \begin{cases} \sin^3 x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right); \\ \sin^2 x + 6, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

5. $\varphi(x) = \begin{cases} \cos^4 x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \\ \cos^5 x - 5, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$

6. $\varphi(x) = \begin{cases} -x^3 - 8, & x \in [-3,-2]; \\ 0, & x \in [-2,0]; \\ -x^5, & x \in [0,1]. \end{cases}$

7. $\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right); \\ 3 + \cos x, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

8. $\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right); \\ \sin x + \frac{1}{2}, & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right); \\ \sin^2 x + \frac{1}{2}, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right); \\ \sin^2 x + 2, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

9. $\varphi(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right); \\ ctgx - \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right); \\ \cos x - 3, & x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]. \end{cases}$

3-топшириқ.

1. $\varphi(t)$- $[a,b]$кесмадааниқланганўсувчифункциябўлсин.$\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$. $f(x)$функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган монотон функция бўлсин. $f(\varphi(t))$ ҳам монотон функция бўладими?

Агар $\varphi(t)$ функция бирор $t \in [\mathrm{a}, b]$ нуқтада узилишга эга бўлса, $f(\varphi(t))$ ҳам шу t нуқтада узилишга эга бўлиши шартми? Шу саволларга қуйидаги мисолларда жавоб беринг.

а) $\varphi(t) = \begin{cases} sint, & t \in [-\pi/2, 0); \\ sint + 5, & t \in [0, \pi/2]; \end{cases}$

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^3, & x \in [-1, 0); \\ 0, & x \in [0, 5); \\ x^3 - 5, & x \in [5, 6]. \end{cases}$$

б) $\varphi(t) = \begin{cases} -\cos t, & t \in [0, \pi/2); \\ -\cos t + 2, & t \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0); \\ 0, & x \in [0, 2); \\ -x + 2, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

в) $\varphi(t) = \begin{cases} -cos\, t, & t \in [0, \pi/2); \\ -cos\, t + 3, & t \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0); \\ 0, & x \in [0, 3); \\ x - 3, & x \in [3, 4]. \end{cases}$$

2. $f(x) = |x + 4|$ функция $x = -4$ нуқтада турличап ва ўнг ҳосилаларга эга эканлигини кўрсатинг.

3. $f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласини ҳисобланг.

4. $f(x) = \begin{cases} 8\, sin^2\frac{1}{x} + 9xcos^2\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 5sin^2\frac{1}{x} + 7cos^2\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласини ҳисобланг.

5. $f(t) - [\mathrm{a}, b]$ кесмада аниқланган узлуксиз функция бўлсин.

$$m(x) = \inf_{t \in [a,x]} f(t) \text{ ва } M(x) = \sup_{t \in [a,x]} f(t)$$

функцияларнинг $[a, b]$ кесмада монотон ва узлуксиз эканликларини исботланг.

6. $f(x) - [a, b]$ кесмада аниқланган, монотон функция бўлиб, унинг қийматлар тўплами

$$\left[\inf_{t \in [a,b]} f(t), \quad \sup_{t \in [a,b]} f(t)\right]$$

кесмадан иборат бўлсин. $f(x)$ нинг $[a, b]$ кесмада узлуксиз эканлигини исботланг.

7. $[a, b]$кесмада аниқланган $f(x)$ узлуксиз функциянинг тескари функцияси мавжуд бўлиши учун $f(x)$монотон ўсувчи ёки монотон камаювчи бўлиши зарурва етарлилигини исботланг.

8. Иккитамонотон функциянинг йиғиндиси ва кўпайтмаси монотон функция бўладими? Ҳар хил ҳоллар бўлишига бир нечта мисол келтиринг.

§ 3. Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари

7. Чекли вариацияли функцияларнинг чегараланганлиги.Чекли $[a, b]$ кесма берилган бўлсин.

Теорема 1.$[a, b]$ *кесмадаги ихтиёрий чекли вариацияли функциялар шу кесмада чегараланган бўлади.*

Исбот.$\forall x \in (a, b]$нуқта оламиз. Унда шартга кўра

$$\boldsymbol{\vartheta}_n = \left|f(x') - f(a)\right| + \left|f(b) - f(x')\right| \leq \bigvee_a^b f(x)\ (1)$$

бўлади.Тенгсизликдан фойдалансак,

$$\left|f(x')\right| = \left|f(x') - f(a) + f(a)\right| \leq \left|f(x') - f(a)\right| + |f(a)|$$

$$\leq \bigvee_a^b f(x) + |f(a)| = M$$

бўлиб, $f(x)$чегараланганлиги келиб чиқади.

Теорема 2.*Агар*$f(x)$*ва*$g(x)$*функциялар*$[a, b]$ *кесмадачекливариациялибўлса, унда:*

а) $f(x) \pm g(x)$

ва

б)$f(x) \cdot g(x)$*функциялар ҳам шу кесмада чекли вариацияли бўлади.*

Исбот. а)$F(x) = f(x) \pm g(x)$бўлсин. У ҳолда$|F(x_{k+1}) - F(x_k)| = |[f(x_{k+1}) \pm g(x_{k+1})] - [f(x_k) \pm g(x_k)]| = |[f(x_{k+1}) - f(x_k)] \pm [g(x_{k+1}) - g(x_k)]| \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)|$бўлади. Таърифга кўра, йиғиндини қарасак,

$$\sum_{k-0}^{n-1}|F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leq \sum_{k-0}^{n-1}|f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k-0}^{n-1}|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq$$

$$\bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x).\ \text{Демак,} \bigvee_a^b F(x) \leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x)$$

эканлигидан $F(x)$ни чекли вариацияли функция эканлиги келиб чиқади.

б)$f(x)$ва$g(x)$функциялар$[a, b]$да чекли вариацияли бўлгани учун 1-теоремага кўра, улар шу кесмада чегараланган бўлади, яъни$\exists K > 0$ ва$L > 0$ сонлар топиладики,$\forall x \in [a, b]$учун

$|f(x)| \leq K$ *ва* $|g(x)| \leq L$

тенгсизликлар бажарилади.

$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$деб белгилаш киритамиз. У ҳолда қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$|\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| = |[f(x_{k+1}) \cdot g(x_{k+1})] - [f(x_k) \cdot g(x_k)]| =$$
$$|[f(x_{k+1}) \cdot g(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) \cdot g(x_k) + f(x_{k+1}) \cdot g(x_k) - f(x_k) \cdot g(x_k)]|$$
$$\leq |f(x_{k+1})||g(x_{k+1}) - g(x_k)| + |g(x_k)||f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$
$$\leq K|g(x_{k+1}) - g(x_k)| + L|f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Бу ердан

$$\bigvee_a^b \Phi(x) \leq K \cdot \bigvee_a^b g(x) + L \cdot \bigvee_a^b f(x)$$

эканлиги ва $\Phi(x)$- чекли функция бўлишини топамиз.

Теорема 3. *Агар $f(x)$ва $g(x)$функциялар $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли бўлиб, шу кесмада $g(x) \geq c > 0$ бўлса, унда$\frac{f(x)}{g(x)}$нисбат ҳам $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли бўлади.*

Исбот.

$h(x) = \frac{1}{g(x)}$деб белгилаб, унинг чекли вариацияга эга бўлишини кўрсатамиз:

$$|h(x_{k+1}) - h(x_k)| = \left|\frac{1}{g(x_k)} - \frac{1}{g(x_k)}\right| = \frac{|g(x_{k+1}) - g(x_k)|}{|g(x_k) \cdot g(x_{k+1})|} \leq$$
$$\leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x_{k+1}) - g(x_{k+1})|.$$ Бундан,

$$\bigvee_a^b h(x) \leq \frac{1}{c^2} \cdot \bigvee_a^b g(x)$$эканлигикелибчиқади.

Демак, $h(x)$ чекли вариацияли функция.

Унда 2-теоремага кўра

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

функция ҳам $[a,b]$кесмада чекли вариацияли бўлади.

Теорема 4.*$f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва $c \in (a,b)$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ да чекли вариацияли бўлса, унда у $[a,c]$ ва $[c,b]$ кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияли бўлади ва аксинча.*

Шунингдек,

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) (2)$$

тенглик бажарилади.

Исбот.Фараз қилайлик $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли бўлсин $[a,c]$ ва $[c,b]$ оралиқнинг ҳар бирини ихтиёрий усул билан алоҳида кесмаларга ажратамиз:

$a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = c$; $c = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_l = b$(3)

Натижада, бутун $[a, b]$ кесма ҳам қисмларга ажралади.$[\mathrm{a}, c]$ ва $[\mathrm{c}, b]$ кесмалар учун қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$\vartheta_1^{(m)} = \sum_{k-0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \qquad \vartheta_2^{(l)} = \sum_{i-0}^{\xi-1} |f(z_{i-1}) - f(z_i)|.$$

$[a, b]$учун$\vartheta_n = \vartheta_1^{(m)} + \vartheta_2^{(l)}$бўлади. Бундан келиб, чиқадики

$$\vartheta_1^{(m)} + \vartheta_2^{(l)} = \vartheta_n \leq \bigvee_a^b f(x) \Rightarrow \vartheta_1^{(m)} \leq \bigvee_a^b f(x)$$

ва

$$\vartheta_2^{(l)} \leq \bigvee_a^b f(x).$$

$f(x)$функция$[a, c]$ ва $[c, b]$ кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга ва қуйидаги тенглик бажарилади:

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) = \bigvee_a^b f(x). (4)$$

Фараз қиламиз, $f(x)$функция $[a, c]$ ва $[\mathrm{c}, b]$ кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга бўлсин. $[a, b]$ кесманинг ихтиёрий бўлинишини оламиз. Агар c нуқта бўлиниш нуқталарига кирмаса, унда c ни ҳам бўлиниш нуқталарига қўшамиз. Натижада, ϑ_nйиғинди фақат катталашиши мумкин:

$$\vartheta_n \leq \vartheta_1^{(m)} + \vartheta_2^{(l)} \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

$f(x)$функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга ва

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \, (5)$$

тенгсизлик бажарилади. (4) ва (5)тенгсизликлардан (2)тенгсизлик келиб чиқади.

Бу теоремадан натижа сифатида қуйидаги хосса келиб чиқади.

Теорема5._Агар_ $f(x)$ _фукнция_ $[a, b]$ _кесмада чекли вариацияга эга бўлса, унда ихтиёрий_$x \in [a, b]$_лар учун_

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

тўлиқ вариация х ўзгарувчининг монотон ўсувчи ва чегараланган фукцияси бўлади.

Исбот. Ихтиёрий$x', x'' \epsilon [a, b]$ $(x' < x'')$нуқталарни олсак, унда 4-теоремага кўра

$$\bigvee_a^{x''} f(t) = \bigvee_a^{x'} f(t) + \bigvee_{x'}^{x''} f(t)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан,

$$g(x'') - g(x') =$$

$$\bigvee_a^{x''} f(t) - \bigvee_a^{x'} f(t) = \bigvee_a^{x''} f(t) \geq 0 \to g(x'') \geq g(x').$$

Бу эса, $g(x)$ функцияни монотон ўсувчи функция эканлигини билдиради.

8. Чекли вариацияли функциялар учунзарурий ва етарли шартлар. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланганбўлсин. Бу параграфда биз берилган $f(x)$ функциянинг чекливариацияга эга бўлиши мезонларини келтирамиз.

Теорема6.$f(x)$*функциянинг* $[a, b]$ *кесмада чекливариацияга эга бўлиши учун шу кесмада монотон ўсувчи вачегараланган* $F(x)$*функция мавжуд бўлибихтиёрий* $x', x''] \subset [a, b]$ *кесмада*

$$f(x'') - f(x') \leq F(x'') - F(x') \quad (6)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Шундай хоссага эга бўлган$F(x)$функцияга$f(x)$ функцияучун мажоранта дейилади.

Зарурлиги.Фараз қилайлик,$f(x)$ функция чекливариацияга эга бўлсин. Унда

$$F(x) = \bigvee_a^{x} f(t)$$

деб белгиласак, $F(x)$ функция $[a, b]$ кесмада монотон ўсувчива чегараланган бўлади. Тўлиқ вариациянинг таърифига кўра

$$|f(x'') - f(x')| \leq \bigvee_{x'}^{x''} f(t) = F(x'') - F(x')$$

тенгсизлик бажарилади.

Етарлилиги.(6)тенгсизлик бажарилсин. Унда

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] = F(b) - F(a).$$

Бундан $f(x)$нинг чекли вариацияли функция эканлиги келиб чиқади.

Теорема7.$f(x)$*функция* $[a, b]$ *кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун уни шу оралиқда иккита монотон ўсувчи ва чегараланган функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлиши зарур ва етарли:*

$$f(x) = g(x) - h(x). \quad (7)$$

Зарурлиги. $f\ (x)$функция$[a,b]$кесмада чекливариацияга эга бўлсин. Унда 6-теоремага кўра, шундаймажоранта $F(x)$топиладива (6) тенгсизликбажарилади. Тузилишига кўра $F(x)$ функция монотон ўсувчи ва чегараланган.

Агар
$g(x) = F(x)$ва$h(x) = F(x) - f\ (x)$
деб белгиласак,

$$f(x) = \ g(x) - h(x)$$

бўлади ҳамда ихтиёрий $x'' \geq x$ва$x'', x' \in [a,b]$ учун қуйидагимуносабат бажарилади:

$$h(x'') - h(x') = [F(x'') - F(x')] - [f(x'') - f(x')] \geq 0\ ,$$

яъни $h(x)$функция монотон ўсувчивачегараланган, чунки

$$|h(x)| \leq |F(x)| + |f(x)| \leq M.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик,$g(x)$ва$h(x)$функциялар $[a,b]$кесмада монотон ўсувчи ва (7) тенглик бажарилсин.

$$F(x) = \ g(x) + \ h(x)$$

деб олиб, унинг $f(x)$ учун мажоранта бўлишини кўрсатамиз:

$$|f(x'') - f(x')| = |[g(x'') - g(x')] - [h(x'') - h(x')]| \leq |g(x'') - g(x')| + |h(x'') - h(x')| = [g(x'') - g(x')] + [h(x'') - h(x')] = [g(x'') + h(x'')] - [g(x') + h(x')] = F(x'') - F(x').$$

Демак, $F(x)$мажоранта. Унда 6-теоремагакўра $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияга эгабўлади.

Натижа.*Агар* $f(x)$*функция* $[a,b]$ *кесмада чекливариацияга эга бўлса,унда* $\forall x_0 \in [a,b]$*нуқтада унинг чекли бир томонли лимитлари мавжуд:*

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)\ ; f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

Исбот. 7-теоремага кўра, шундай ўсувчи ва чегараланган$g(x)$ ва $h(x)$ функциялар топиладики,

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

тенглик бажарилади. Математик анализ курсиданмаълумки,монотон функциялар учун чекли

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} g(x) = g(x_0 \pm 0) \text{ ва } \lim_{x \to x_0 \pm 0} h(x) = h(x_0 \pm 0)$$

лар мавжуд. Бундан $f(x)$ функциянинг чекли бир томонли лимитлари мавжудлиги келиб чиқади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1-топшириқ. Берилган $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада иккита монотон камаймайдиган функциялар айирмаси шаклида ифодаланг.

№	$f(x)$	$[a,b]$
1	$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар} x = 0, \\ (x-1)(x-2), & \text{агар} x \neq 0. \end{cases}$	$[0,2]$

2	$f(x)=\begin{cases}3, & агар x=-1,\\ 1+x^2, & агар x\neq -1.\end{cases}$	$[-1,1]$
3	$f(x)=\begin{cases}10, & агар x=0,\\ lg(1+x^2), & агар x\neq 0.\end{cases}$	$[0,3]$
4	$f(x)=\begin{cases}6, & агар x=0,\\ 5sin2x, & агар x\neq 0.\end{cases}$	$[0,\frac{\pi}{2}]$
5	$f(x)=\begin{cases}5, & агар x=0,\\ 2arcsinx, & агар x\neq 0.\end{cases}$	$[0,1]$
6	$f(x)=\begin{cases}5, & агар x=-1,\\ x^4, & агар x\neq -1.\end{cases}$	$[-1,1]$
7	$f(x)=\begin{cases}2, & агар x=0,\\ 3sin\frac{x}{2}, & агар x\neq 0.\end{cases}$	$[0,\pi]$
8	$f(x)=\begin{cases}8, & агар x=1,\\ x^2-3x, & агар x\neq 1.\end{cases}$	$[-1,3]$

2-топширик.$f(x)$функциянинг$[a,b]$кесмада ўзгариши чегараланмаган эканлигини кўрсатинг.

№	$f(x)$	$[a,b]$
1	$f(x)=\begin{cases}0, агар x=0,\\ sin\frac{1}{x}, & агар x\neq 0.\end{cases}$	[0,1]
2	$f(x)=\begin{cases}x+1, агар x\in[0,1]\cap Q,\\ sin\frac{1}{x}, & агар x\in[0,1]\backslash Q.\end{cases}$	[0,1]
3	$f(x)=\begin{cases}-1, & агар x\in K,\\ 1, & агар x\in[0,1]\backslash K.\end{cases}$	[0,1]
4	$f(x)=\begin{cases}0, & агар x\in[0,2]\backslash Q,\\ 2, & агар x\in[0,2]\cap Q.\end{cases}$	[0,2]
5	$f(x)=\begin{cases}25, & агар x=0,\\ \frac{1}{x^2}, & агар x\neq 0.\end{cases}$	[0,1]
6	$f(x)=\begin{cases}x, агар x\in[0,1]\cap Q,\\ 0, & агар x\in[0,1]\backslash Q.\end{cases}$	[0,1]
7	$f(x)=\begin{cases}0, & агар x=0,\\ xsin\frac{1}{x}, & агар x\in[0,\pi].\end{cases}$	$[0,\pi]$
8	$f(x)=\begin{cases}1, & агар x=0,\\ cos\frac{1}{x}, & агар x\in[0,\pi].\end{cases}$	$[0,\pi]$

9	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & агар x \in [0,\pi], \\ 1, & агар x = 1. \end{cases}$	[0,1]

Бу ерда К- кантор тўплами,Q-рационал сонлар тўплами.

3-топширик.

1. Агар$f(x)$функция$[a,b]$ кесмаларида ўзгаришлари чегаранган бўлса,у ҳолда

$$\varphi(x) = \bigvee_a^x [f]$$

функциянинг монотон камаювчиэканлигиниисботланг.

2. Агар$f(x)$функция$[a,b]$ кесмадаўзгариши чегаранган бўлса,унинг чегаранган эканлигиниисботланг.

3. Агар$f(x)$функция$[a,b]$ кесмадаўзгариши чегаранган бўлса,у ҳолда

$$h(x) = \bigvee_a^x [f] - f(x)$$

функциянинг монотон камаювчиэканлигиниисботланг.

4. Агар$f(x)$функция$[a,b]$ кесмада лимит шартни каноатлантирса,унинг чегаранган эканлигиниисботланг.

5. Агар$f(x)$функция$[a,b]$ кесмадаўзгариши чегаранган бўлса, у ҳолда $f(x)$функциянинг ҳам $[a,b]$ кесмада ўзгариши чегараланган эканлигива

$$\bigvee_a^b [[f]] \le \bigvee_a^b [f]$$

бўлишини исботланг.

6. $|f(x)|$ функциянинг $[a,b]$кесмада ўзгариши чегараланган эканлигидан $f(x)$функциянинг шу кесмада ўзгариши чегараланган эканлиги келиб чиқмаслигини қуйидаги мисолда текшириб кўринг:

$$f(x) = \begin{cases} x, & агар x \in [a,b] \cap Q, \\ -x, & агар x \in [a,b] \setminus Q. \end{cases}$$

7. $[a,b]$кесмадаузлуксизчеклихосилагаэгабўлганфункциянингўзгаришичегараланганэканлигиниисботланг.

8.Агар$f(x)$функциянинг$[a,b]$кесмадатўлаўзгаришиAбўлса, уҳолда$kf(x) + c$функциянинг$[a,b]$кесмадатўлаўзгаришинитопинг.

9.Ўзгариши чегераланганфункциянинг 4-хоссасини исботланг.

10. $f(x) - [a,b]$, $(a < b)$ кесмада аниқланган функция бўлсин.

$$\bigvee_a^b [f] = 0$$

бўлишиучун $f(x) = const$ бўлишизарурваэтарлиэканлигиниисботланг.

11. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмадаги ўзгариши чегараланган бўлсин. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада монотон камаймайдиган бўлиши учун

$$\bigvee_a^b [f] = f(b) - f(a)$$

тенгликнингбажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

§4. Чекли вариацияли узлуксиз функциялар.Жордан теоремаси

5. Чекли вариацияли узлуксиз функциялар

Теорема 1. *$f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чекли вариацияли функция бўлиб, $x_0 \in [a,b]$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, унда*

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

функция ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_0 < b$ деб фараз қиламиз ва $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаўнгданузлуксизэканлигиниисботлаймиз. $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, $[x_0, b]$ кесмани ушбу

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

тенгсизликниқаноатлантирувчишундайнуқталарёрдамидакесмаларгаажратамизки, натижада

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_{x_0}^b f(t) - \varepsilon \qquad (1)$$

тенгсизликбажарилсин.

$f(x) \in C\{x_0\}$,бўлганиучун, x_1 нуқтани x_0 нуқтагашундайяқинолишмумкинки,

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлсин. Унда (1) га кўра,

$$\bigvee_{x_0}^b f(t) < \varepsilon + \vartheta_n = \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \varepsilon + |f(x_1) - f(x_0)| +$$

$$+ \bigvee_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon + \varepsilon + \bigvee_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^b |f(t)|$$

бўлади. Демак,

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \bigvee_{x_1}^{b} f(t) < 2\varepsilon$$

ёки

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} f(x) < 2\varepsilon$$

муносабатўринли. Бундан $g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$бўлиши келиб чиқади. $g(x)$функция ўсувчибўлганиучун

$$0 \leq g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

бўлади. Бутенгсизликваε нинг ихтиёрийлигиданфойдалансак,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0)$$

тенглик, яъни$g(x)$функциянингx_0нуқтадаўнгданузлуксизэканлиги келиб чиқади.

$x_0 >$
aбўлганҳолда$g(x)$функциянингx_0нуқтадачапданузлуксизэканлигиҳам шу кабикўрсатилади.

Бутеоремаданқуйидагинатижакелибчикади.

Натижа.$[a, b]$ *кесмадаги чекли вариацияли узлуксиз* $f(x)$ *функцияни шу кесмада иккита узлуксиз, ўсувчи функциянинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин:*

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

Исбот. Агар

$$g(x) = \bigvee_{a}^{x} f(t)$$

деббелгиласак, унда$g(x)$ ўсувчи ва 1-теоремагакўра$g(x) \in C[a, b]$бўлади. Унда$h(x) = g(x) - f(x)$функция ҳам$[a, b]$кесмадаузлуксизбўлади. Энди уни ҳам ўсувчи бўлишиникўрсатамиз.

$\forall x'' > x', \quad x'', x' \in [a, b]$ларучун

$$h(x'') - h(x') = [g(x'') - g(x')] - [f(x'') - f(x')] =$$

$$\bigvee_{x'}^{x''} f(t) - [f(x'') - f(x')] \geq 0$$

тенгсизликбажарилади. Бу $h(x)$функцияни ўсувчи эканлигини кўрсатади.

Теорема 2.$f(x) \in C[a, b]$ *бўлсин.* $[a, b]$*кесманиушбу*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

тенгсизликларниқаноатлантирувчиихтиёрийнуқталарёрдамидақисмларга ажратамизва

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]$$

йиғиндиниоламиз. Унда, агар

$$\lambda = \max_{k=\overline{0,n-1}}(x_{k+1} - x_k)$$

бўлса, ушбу

$$\lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n = \bigvee_a^b f(x) \ (2)$$

тенгликўринлибўлади.

Исбот. Бизгамаълумки,

$$\bigvee_a^b f(x) = Sup\{\vartheta_n\}$$

вабўлинишнуқталариганисбатан$\{\vartheta_n\}$ ўсувчи. Демак, теореманиисботлашучунушбу

$$Sup\{\vartheta_n\} = \lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n \ (3)$$

тенгликнингбажарилишиникўрсатиш етарли.

Фаразқилайлик,

$$Sup\{\vartheta_n\} = A \qquad (4)$$

бўлсин.

Ундааниқюқоричегаранингтаърифигакўрақуйидагиларни ҳосилқиламиз:

1) $\forall n \in N$учун$\vartheta_n \le A$;

2) $\forall\varepsilon > 0$сон олингандаҳам$\exists n_0 \in N$топиладики,$\vartheta_{n_0} > A - \varepsilon$тенгсизликбажарилади.

Демак, $\{\vartheta_n\}$ўсувчи. Бундан келиб чиқадики, $\forall n > n_0$учун$\vartheta_n > A - \varepsilon$бўлади.

$\forall n > n_0$ лар учун

$$A - \varepsilon < \vartheta_n \le A < A + \varepsilon$$

бўлади. Кетма-кетликлимитинингтаърифигакўра,

$$\lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n = A \qquad (5)$$

тенгликўринли. Яъни, (4) ва (5)дан (3) нинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

10. Тўғриланувчичизиқлар. Жордантеоремаси. Чекливариацияли функция тушунчасиэгричизиқнингтўғриланувчилигимасаласидаўзтатбиғинитопган.

$$\widetilde{AB} = (L): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \ t\epsilon[t_0; T] \end{cases} \qquad (6)$$

соддаэгричизиқберилганбўлиб,$\varphi(t)$, $\psi(t) \in C[t_0; T]$бўлсин.

Фаразқиламиз, tпараметрt_0данTга қарабўзгарганда, унгаLэгричизиқдамоскелувчи

$$(x, y) = \big(\varphi(x), \psi(x)\big)$$

нуқтаAнуқтаданBнуқтагақарабўзгарсин.

$[t_0; T]$кесмадаушбу$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$

тенгсизликларниқаноатлантирувчиихтиёрийнуқталарниолиб, уларга (L) эгричизиқдамоскелганнуқталарни

$$A = A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_n = B$$

деббелгилаймиз. Бунуқталарникетма-кеттуташтиришнатижасида(L) эгри чизиққа чизилган синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \qquad (7)$$

тенгликёрдамидаифодаланади.

Таъриф. *Агарушбу*

$$\lim_{\lambda \to 0} P_n = L \ \ (\lambda = \underline{\max}_{k=0,n-1}(t_{k+1} - t_k))$$

лимитмавжудвачеклибўлса, унда(L) *эгри чизиқ* ***тўғриланувчичизиқ****дейиладиҳамдалимитнингқиймати* L *унингузунлигидейилади.*

Теорема3 (Жордантеоремаси).*(6)эгричизиқнингтўғриланувчибўлишиучун*$\varphi(x)$ *ва* $\psi(x)$ *фунцияларнинг* $[t_0; T]$*оралиқдачекливариациягаэгабўлишизарурваетарли.*

Исбот.Зарурлиги. Фаразқиламиз (6)эгричизиқтўғриланувчибўлсин. У ҳолда$[t_0; T]$кесманингихтиёрийбўлинишиучун

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \leq M$$

тенгсизликбажарилади. Унда

$$[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)] \leq \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}$$

га кўра

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]} \leq M$$

тенгсизликўринлибўлади, яъни$\varphi(x)$ – чекливариацияли функция бўлади. Худди шу каби$\psi(x)$ функциянинг ҳам чекли вариацияли бўлишини ҳосил қиламиз.

Етарлилиги. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$функцияларчекливариациялифункцияларбўлсин. Унда

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)] + + \sum_{k=0}^{n-1} [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)] \leq$$

$$\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t) + \bigvee_{t_0}^{T}\psi(t) = M$$

бўлишидан (6)– тўғриланувчиэгричизиқ эканлиги келиб чиқади.

Теоремаисботидан кўриниб турибдики,

$$L = \lim_{n\to\infty} P_n \leq \bigvee_{t_0}^{T}\varphi(t) + \bigvee_{t_0}^{T}\psi(t)$$

тенгсизликбажарилади.

Эгричизиқ ёйиузунлигини$L = L(t)$ деб, уни$[t_0; t]$ оралиқда қараймиз. Унда$L(t)$ўсувчи бўлади ва$\Delta t > 0$ бўлганда$\Delta L = L(t + \Delta t) - L(t)$ учун

$$0 < \Delta L < \bigvee_{t}^{t+\Delta t}\varphi(t) + \bigvee_{t}^{t+\Delta t}\psi(t)$$

тенгсизликларбажарилади. Узлуксизтўғриланувчиэгричизиқучун$L(t)$ функция tпараметрининг узлуксиз функцияси бўлади.

§5. Абсолют узлуксиз функциялар

11. Абсолют функциялар таърифи.Иккинчи параграфда қуйидаги теорема келтирилган эди.

Теорема 2. $[a, b]$*кесмада монотон ўсувчи ҳар қандай* $f(x)$ *функция, шу кесмада деярли ҳамма жойда интегралланувчи ҳосилага эга ҳамда*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

бўлади.

Теоремадан шуни хулоса қилиш мумкинки, тенгсизлик қатъий ҳам бўлиши мумкин. Бундан келиб чиқадики, монотон ўсувчи функцияни деярли ҳамма жойда мавжуд ҳосиласидан фойдаланиб, Лебег-Стилтьеснинг интеграллаш жараёнини қўллаб, уни тиклаб бўлмайди. Шундай функциялар синфи мавжудки,

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

тенглик бажарилади. Бу тенглик абсолют узлуксиз функциялар синфида бажарилади.

Иккинчи томондан қаралса, Риман интегралинингасосийхоссаларидан бири Ньютон-Лейбниц формуласидир:

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Табиийки, Лебег интеграли назарияси ва деярли ҳаммажойда ҳосилагаэгабўлганфункцияларсинфиучуншунга ўхшашформула ўринлилиги ҳақидагимасала қўйилишимумкин. Юқорида қайд қилинганидек, бумасаланингечимиабсолютузлуксизликтушунчасигаолибкелади, чунки Лебег интеграли ҳам бу борада тегишлихоссагаэга.

Агар$f(x)$функция $[a,b]$ораликда Лебег маъносидаинтегралланувчибўлса, у ҳолдаихтиёрий$\varepsilon>0$сон учуншундай$\delta>0$ сон мавжудки, ихтиёрий ўлчовли $l\in[a,b]$учун$\mu l<\delta$шартбажарилганда

$$\left|\int_l f(x)d\mu\right|<\varepsilon$$

бўлади.

Таъриф:$[a,b]$*кесмадааниқланган*$f(x)$*функция берилганбўлсин. Агарихтиёрий*$\varepsilon>0$*сон учуншундай*$\delta>0$*сон мавжудбўлсаки, сони чеклива ҳариккиси ўзарокесишмайдиган ҳар қандай*$\{(a_k b_k)\}_{k=1}^n$*интерваллярсистемасиучун*

$$\bigcup_{k=1}^n (a_k b_k)\subset[a,b], \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)<\delta$$

шартларбажарилганда

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon(2)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда$f(x)$*функция* $[a,b]$*кесмадаабсолютузлуксиздейилади.*

УмуманRдагиихтиёрийораликдааниқланган функция учунабсолютузлуксизликтушунчасинихуддишундайкиритишмумкин.

Таърифданкўринибтурибдики, $[a,b]$кесмадаабсолютузлуксизбулган функция шу ораликдатекисузлуксиз ҳам бўлади. Тескарисиумуманайтгандатўғриэмас (шу параграфдаги 6-мисолга қаранг).

12. Абсолют узлуксизфункцияларнинг хоссалари

1. Абсолют узлуксизфункциянингтаърифидаги «сони чекли» жумлани «сони чеклиёкисаноқли» жумлабиланалмаштиришмумкин.

2. (2)тенгсизлик

$$\left|\sum_{k=1}^n (f(b_k)-f(a_k))\right|<\varepsilon$$

тенгсизликбиланалмаштирилса, абсолютузлуксизликтаърифи ўзгармайди.

Ҳақиқатдан ҳам, фараз қилайлик$[a,b]$ораликдаберилган$f(x)$функция қуйидагишартни қаноатлантирсин: ихтиёрий$\varepsilon>0$сон учуншундай$\delta>$

Осон мавжудбўлиб, ихтиёрий ўзарокесишмайдиган$\{(a_k, b_k)\}_1^n$ $(a_k < b_k)$интерваллрасистемасиучун

$$\bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k) \subset [a, b], \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \qquad (3)$$

бўлганда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k))\right| < \varepsilon$$

тенгсизликбажарилсин.

Юқоридагишартнингзарурийлигиабсолютузлуксизфункциянингтаърифиданосонгинакелибчиқади. Энди бушартнингетарлилигиникўрсатамиз.

Фараз қилайлик$f(x)$ ҳақиқий қиймат қабул қилувчи функция ва$\varepsilon > 0$бўлиб, бу сон учунюқоридагишартни қаноатлантирувчи$\delta > 0$топилганбўлсин. Агар$\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ юқоридаги (3) шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий интерваллар системаси бўлса, биз бу системани иккита гуруҳга бўламиз. Биринчи гуруҳга $f(b_{k_l}) \geq f(a_{k_l})$шартни қаноатлантирувчи (a_{k_l}, b_{k_l}), $l = \overline{1, m}$интерваллар кирсин (бушартни қаноатлантирувчибирорта ҳам интервал бўлмаслигимумкин).Иккинчигуруҳга$\{(a_k, b_k)\}$системадагиколган(a_{k_q}, b_{k_q}), $q = \overline{m+1, n}$интервалларникиритамиз.

Шартга кўра

$$\sum_{l=1}^{m}(b_{k_l} - a_{k_l}) < \delta \text{ва} \sum_{q=m+1}^{n}(b_{k_q} - a_{k_q}) < \delta$$

тенгсизликларнингиккаласи ҳам бажарилади. Шунингучун қуйидаги

$$\left|\sum_{l=1}^{m}(f(b_{k_l}) - f(a_{k_l}))\right| < \varepsilon, \left|\sum_{q=m+1}^{n}\left(f\left(b_{k_q}\right) - f\left(a_{k_q}\right)\right)\right| < \varepsilon$$

тенгсизликларгаэгабўламиз. Бутенгсизликлардан

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{l=1}^{m}|f(b_{k_l}) - f(a_{k_l})| + \sum_{q=m+1}^{n}\left|f\left(b_{k_q}\right) - f(a_{k_q})\right| =$$

$$= \left|\sum_{l=1}^{m}(f(b_{k_l}) - f(a_{k_l})\right| + \left|\sum_{q=m+1}^{n}\left(f\left(b_{k_q}\right) - f\left(a_{k_q}\right)\right)\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

муносабаткелибчиқади, яъни$f(x)$абсолютузлуксиз функция экан.

Агар$f(x)$комплекс қийматли функция бўлса, унинг ҳақиқийвамавҳум қисмларинингабсолютузлуксизлигиниюқоридагидеккўрсатамиз. Бундан$f(x)$функциянинг ўзи ҳам абсолютузлуксизэканлигикелибчиқади.

3. $[a,b]$кесмадаабсолютузлуксизбўлганфункциянингбукесмадаўзгаришичегаралангандир.

4. Агар$f(x)$ва$g(x)$функциялар$[a,b]$кесмадаабсолютузлуксизбўлса$f(x) \pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$функцияларваберилганкесмада$g(x) \neq 0$бўлганда$\frac{f(x)}{g(x)}$функция ҳам шу кесмадаабсолютузлуксизбўлади.

Шунитаъкидлашжоизки, агар$f(x)$ва$g(x)$функцияларRдагичегаралангантўпламдаабсолютузлуксизбўлса$f(x)\cdot g(x)$функция умуманайтгандаабсолютузлуксизэмас.

5. Ҳар қандайабсолютузлуксизфункцияниикитамонотонкамаймайдиганабсолютузлуксизфункцияларнингайирмасишаклидатасвирлашмумкин.

6. Агар$f(x)$функция $[a,b]$кесмада Лебег маъносидаинтегралланувчибўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_a^x f(t)d\mu$$

функция ёкиЛебегнинганиқмасинтегралиабсолютузлуксиз функция бўлади.

7. $[a,b]$кесмадаабсолютузлуксизбўлган$F(x)$функция шу оралиқнингдеярлибарчануқталаридачекли ҳосилагаэгава$f(x) = F'(x)$функция $[a,b]$да жамланувчибўлади, бунданташқари ҳарбир$x \in [a,b]$учун

$$\int_a^x f(t)d\mu = F(x) - F(a)$$

тенглик ўринли.

8. Агар$[a,b]$кесмадаабсолютузлуксизбўлган$f(x)$функциянинг ҳосиласи$f'(x)$деярли ҳарбирнуқтаданолгатенгбўлса, $f(x)$функция ўзгармассонгатенгбўлади.

$[a,b]$кесмадааниқланган$f(x)$функция ваα, $0 < \alpha < 1$ сон берилганбўлсин. Агаршундай ўзгармасK сон мавжудбўлиб, ихтиёрий $x, y \in [a,b]$ларучун

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}$$

тенгсизлик ўринлибўлса, $f(x)$функцияниαдаражалиГёльдерсинфи$H^{\alpha}[a,b]$га қарашлидеймиз. Одатда$\alpha = 1$даражали Гёльдер синфига қарашлифункцияларни Липшиц шартини қаноатлантирувчифункциялардебайтилади.

Хоссаларнинг исботи ўрганилганда, 3-хоссанинг исботлаш йўли муҳим аҳамиятга эгалиги ва бошқа исботларга ўхшамаслиги кўринади. Ушбуни инобатга олиб, 3-хоссани исботини келтирамиз.

Исбот. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$сони ва унга мос равишда абсолют узлуксиз функцияларнинг таърифида келтирилган $\delta > 0$ берилган бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чексиз вариацияга эга бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмани $max(x_i - x_{i-1}) < \delta$бўлган ихтиёрий чекли $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots [x_{n-1}, b]$бўлинишини олганимизда, шундай $[x_{i-1}, x_i]$кесма топиладики, унда $f(x)$ функцияни вариация чексиз бўлади.

$[x_{i-1}, x_i]$ кесмани шундай $\left[x_i^{(j)} + h_j, x_i^{(j)}\right], j = 1,2, \dots m$бўлакларга ажратамизки,

$$\sum_{j=1}^{m} h_j < \delta$$

бўлганда

$$\sum_{j=1}^{m} \left| f\left(x_i^{(j)} + h_j\right) f\left(x_i^{(j)}\right) \right|$$

чексиз катта бўлади. Бу эса функциянинг абсолют узлуксиз эканлигига зид. Хосса исботланди.

1-мисол.$f(x) =$ xфункциянинг$[0,1]$кесмадаабсолютузлуксизлигиниисботланг.

Ечиш. Фараз қилайлик$\varepsilon > 0$ихтиёрий сон бўлсин. $\delta = \varepsilon > 0$дебо额ламиз. Энди буδ сон таърифдаги шартни қаноатлантиришини кўрсатамиз. Ихтиёрий $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ ўзарокесишмайдиганинтерваллрсистемасиучун

$$\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset [0,1], \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

шартларбажарилганбўлсин. У ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta = \varepsilon,$$

яъни

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ҳамбажарилади.

$f(x) = x$ва ўзгармасфункцияабсолютузлуксизбўлганлигиучун 4 – хоссагакўраихтиёрийкўп ҳад ҳам$[0,1]$кесмадаабсолютузлуксизбўлади.

2-мисол. Агар$f(x)$функция$[a, b]$кесмадаЛипшицшартини қаноатлантирса, унингшукесмадаабсолютузлуксизбўлишиниисботланг.

Ечиш.$f(x)$функция$[a, b]$кесмадаЛипшиц шартини қаноатлантирсин, яънишундай$k > 0$мавжудбўлиб, ихтиёрий$x, y \in [a, b]$ларучун$|f(x) - f(y)| = k(x - y)$ ўринлибўлсин. Ихтиёрий$\varepsilon > 0$ сон учун$\delta = \varepsilon / k$ деб оламиз. У ҳолда ўзарокесишмайдиган$\{(a_k, b)\}_{k=1}^{n}$ интерваллар системаси учун

$$\bigcup_{к=1}^{n}(a_{\mathrm{k}}, b_k) \subset [a, b], \qquad \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_{\mathrm{k}}) < \delta$$

шартлар бажарилса,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_{\mathrm{k}}) - f(a_{\mathrm{k}}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{k}|b_k - a_{\mathrm{k}}| \leq \mathrm{k}\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_{\mathrm{k}}) < k\delta = \varepsilon,$$

яъни

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_{\mathrm{k}}) - f(a_{\mathrm{k}})| < \varepsilon$$

тенгсизликбажарилади. Демак, $f(x)$абсолютузлуксизфункцияэкан.

Бумисолданхусусийҳолдакўринадики, $f(x)$функция$[a, b]$кесмадаабсолютузлуксизбўлади.ЧункибундайфункцияЛагранжтеоремасигакўраЛипшицшартиниқанотлантиради.

3-мисол.$f(x) = x^2$функциянинг $(-\infty; \infty)$ораликда абсолют узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Ечиш:$\varepsilon = 2$ деб оламиз. Қуйидаги иккита$x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$кетма-кетликларни қараймиз.У ҳолда қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\left| |x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0, \right|$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2, \qquad \forall n \in N,$$

яъни, ихтиёрий $\delta > 0$ сон учун шундай $n_0 \in N$топиладики, тенгсизлик бажарилади.Лекин $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

Бунданкўринадики, $f(x) = x^2$функция$(-\infty, \infty)$ораликдаабсолютузлуксизэмас.Лекин$g(x) = x$функция$(-\infty, \infty)$ораликдаабсолютузлуксиз.Буни 1-мисолдагидекисботлашмумкин.

4-мисол.Агарўзарокесишмайдиган$\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $(a_k < b_k)$интерваллар системасимавжудбўлиб,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\, b_k - a_k) < \infty \text{ ва } \sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| = \infty$$

муносабатларбажарилса, уҳолда$f(x)$функция$[a, b]$ кесмадаабсолютузлуксизбўлолмаслигиниисботланг.

Ечиш: Агар бирор $k \in N$учун $f\left(b_{k_0}\right) = \infty$ ёки $f\left(a_{k_0}\right) = \infty$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг абсолют узлуксиз эмаслиги ўз-ўзидан равшан.Чунки бу ҳолда $f(x)$ функция b_{k_0}ёки a_{k_0}нуқтада узилишга эга бўлар эди. Шунинг учун умумийликка зиён етмасдан ихтиёрий $n \in N$учун $\left|f\left(a_{k_0}\right)\right|$ ва $\left|f\left(b_{k_0}\right)\right|$ чекли сон деб фараз қилиш мумкин.

$\varepsilon = 1$ деб оламиз.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$$

қатор яқинлашувчи бўлганлиги учун ихтиёрий $\delta > 0$ учун шундай N сон топиладики,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$$

тенгсизлик бажарилади.

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_{\mathrm{k}}) - f(a_{\mathrm{k}})| = \infty$$

бўлганлиги ва ҳар бир kучун $f\left(a_{k_0}\right)$ва$f\left(b_{k_0}\right)$чеклисонбўлганлиги учун

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_{\mathrm{k}}) - f(a_{\mathrm{k}})| = \infty > 1 = \varepsilon$$

тенгсизликгаэгабўламиз.Бунданабсолютузлуксизфункциянинг 1-хоссасигакўра,$f(x)$функция$[a,b]$даабсолютузлуксизэмасдеганхулосагакеламиз.

5-мисол.$f(x) = x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$функциянинг [0,1] оралиқда абсолют узлуксиз эканлигини исботланг.

Ечиш:Фараз қилайликε олдиндан берилган мусбат сон бўлсин.$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha} > 0$ деб оламиз. Энди $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{\infty}, (a_k < b_k), (a_k,b_k) \subset [0,1]$ўзаро кесишмайдиган ва узунликларининг йиғиндиси δдан кичик бўлган интерваллар системаси бўлсин.

Агар δ нуқта бирор (a_{k_0}, b_{k_0})интервалда ётса, у ҳолда бу интервални икки (a_{k_0},δ)ва (δ, b_{k_0}) интервалларга бўлиб,$\{(a_k,b_k)\}$ системадаги (a_{k_0}, b_{k_0})интервални $(a_{k_0},\delta) \cup (\delta, b_{k_0})$ билан алмаштирамиз. Ўз-ўзидан равшанки, бу билан функция қийматлар айирмаси модулларининг йиғиндиси камаймайди. Шунинг учун умумийликка зарар келтирмасдан δнуқта бирорта ҳам интервалда ётмайди деб фараз қилишимиз мумкин.

$\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$интерваллар системасини икки гуруҳга бўламиз.Биринчи гуруҳга $[0,\delta]$ оралиқда ётувчи $\left(a_{k_e}, b_{k_e}\right)$, $e = \overline{1,m}$интервалларни киритамиз. Иккинчи гуруҳга қолган $\left(a_{k_q}, b_{k_q}\right), q = \overline{m+1,n}$интервалларни киритамиз.У ҳолда ихтиёрий

$$x \in \bigcup_{q=m+1} \left(a_{k_q}, b_{k_q}\right)$$

учун $|f'(x)| = |\alpha x^{\alpha-1}| \leq \frac{\alpha}{\delta^{1-\alpha}}$бўлади. Шунинг учун Лагранж теоремасига кўра,

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{e=1}^{m}\left|f(b_{k_e}) - f(a_{k_e})\right| + \sum_{q=m+1}^{n}\left|f(b_{k_q}) - f(a_{k_q})\right| \leq$$

$$\bigvee_{0}^{\delta}[f] + \sum_{q=m+1}^{n}\frac{\alpha}{\delta^{1-\alpha}}\left|f(b_{k_q}) - f(a_{k_q})\right| < \delta^{\alpha} + \frac{\alpha\delta}{\delta^{1-\alpha}} = (1+\alpha)\delta^{\alpha} = \varepsilon$$

6-мисол.$\alpha, 0 < \alpha < 1$ даражали Гёльдер синфига қарашли,аммо абсолют узлуксиз бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

Ечиш.Аввало қуйидаги мулоҳазани таъкидлаймиз:Агар $f(x)$ ва $g(x)$ мос равишда H^{α},(0< $\alpha \leq 1$) ва H^{β},(0< $\beta \leq 1$) синфига қарашли бўлса, у ҳолда$F(x) = f(g(x))$ мураккаб функция $H^{\alpha\beta}$синфга қарашли бўлади (исботланг).Юқорида $g(x)$ функциянинг қийматлар тўплами $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига қарашли деб фараз қилинган.

Энди $[0,1]$ оралиқда аниқланган қуйидаги функцияларни қараймиз.

$g(x) = \begin{cases} x^{n+2} \\ 0 \end{cases} \sin\frac{1}{x^n}$ва$f(y) = y^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

$g(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$g'(x) = \begin{cases} (n+2)x^{n+1}\sin\frac{1}{x^n} - nx\cos\frac{1}{x^n}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Кўриниб турибдики,$g'(x)$функция$[0,1]$оралиқда узлуксиз функция,шунинг учун$g(x)$функция Липшиц шартини қаноатлантиради.

Бундан юқорида таъкидлаганимизга кўра,ихтиёрийnваα (0< $\alpha < 1$) учун$F(x) = f(|g(x)|)$функцияαдаражали Гёльдер синфига қарашли бўлади.

Энди фараз қилайлик α $(0 < \alpha < 1)$ олдиндан берилган сон бўлсин. Берилган α учун шундай $n_0 \in N$ сон топиладики $\frac{n_0+2}{n_0}\alpha \leq 1$ тенгсизлик бажарилади. Қуйидаги кетма-кетликларни қараймиз:

$$X_k = \frac{1}{(\pi k + \frac{\pi}{2})^{1/n_0}};\ Y_k = \frac{1}{\pi k}\frac{1}{n_0}, \qquad k = 1,2..$$

Бу кетма-кетликлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$y_1 > x_1 > y_2 > x_2 > \cdots,$$

шунинг учун$(x_k, y_k) \subset [0,1]$ва(x_{k_m}, y_{k_1}), (x_{k_2}, y_{k_2})интерваллар$k_1 \neq k_2$бўлганда ўзаро кесишмайди.Энди$F(x_k)$ва$F(y_k)$кетма-кетликларни қараймиз:

$$F(y_k) = 0, \qquad F(x_k) = \frac{(-1)^k}{\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n_0+2}{n_0}\alpha}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k + \frac{\pi}{2})^{\frac{n_{0+2}}{n_0}\alpha}} = \infty$$

чунки

$$(n_0 + 2)\frac{\alpha}{n_0} \leq 1$$

ваохиргиқаторумумлашгангармоникқаторбилантаққосланади.

4-мисолга кўра,$F(x)$абсолют узлуксиз функция эмас.$|g(x)|$ва$f(y)$абсолют узлуксиз функциялардир. Демак, абсолют узлуксиз функцияларнинг композицияси умуман айтганда абсолют узлуксиз эмас.

7-мисол. Абсолют узлуксиз функциянинг қуйидаги таърифи тўғрими?

Ҳақиқий$f(x)$функция$[a, b]$оралиқдаабсолют узлуксиз дейилади, агар ихтиёрий$\varepsilon > 0$сони учун шундай$\delta > 0$сон топиладики, ихтиёрийузунликлар йиғиндисиδдан кичик бўлган$\{\Delta_i\}, \Delta_i = (a_i, b_i),\ 1 \leq i \leq n$интерваллар системаси учун

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$$

тенгсизликбажарилса.

Ечиш.Равшанки, агарфункциямисолдакелтирилгантаърифбўйичаабсолютузлуксизбўлса, одатдагитаърифбуйичахамабсолютузлуксизбўлади.

$F(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,1]$функцияодатдагитаърифбўйичаабсолютузлуксиз. Лекин у функция юқоридаги «таърифни» қаноатлантирмайди.

Ҳақиқатдан ҳам, $\varepsilon = 1$бўлсин.$a_k = 0,\ b_k = \frac{1}{k^2}$деб оламиз ва$\left\{(0, \frac{1}{k^2})\right\}_1^{\infty}$интерваллар системасини караймиз.

Ихтиёрий δ мусбат сони учун шундай N натурал сон топиладики,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \delta$$

тенгсизлиги бажарилади.

$$\sum_{k=N}^{\infty} |f(b_k) - f(q_k)| = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

бўлганлиги учун $N_1 > N$ сони топиладики

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \delta \text{ ва } \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k} \geq 1 = \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади. Демак, $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0,1]$ функция юқоридаги «таъриф» бўйича абсолют узлуксиз эмас.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1-топшириқ. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада абсолют узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

№	$f(x)$	$[a,b]$	№	$f(x)$	$[a,b]$
1	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$	$[0,2]$	9	$f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^2$	$[0,1]$
2	$f(x) = x^4 - 2x^3$	$[-1,1]$	10	$f(x) = \sin(2x^2 - 1)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
3	$f(x) = 2x^5 + x^2 - 3$	$[0,2]$	11	$f(x) = cos(x^3 + x)$	$[0,\pi]$
4	$f(x) = 3x^4 + x - 5$	$[-1,1]$	12	$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$	$[0,\pi]$
5	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$	$[-1,2]$	13	$f(x) = e^{x^2 \sin x}$	$[0,\pi]$
6	$f(x) = x^6 - \frac{1}{2}x^3 - 1$	$[0,1]$	14	$f(x) = x + x^{5/2}$	$[0,\pi]$
7	$f(x) = x^7 - 2x^2$	$[-1,2]$	15	$f(x) = \frac{\cos x}{x + 1}$	$[0,1]$
8	$f(x) = 5x^5 - 2x^4 + \mathrm{x}$	$[0,2]$	16	$f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x + 1}$	$[0,\pi]$

2-топшириқ. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$кесмада абсолют узлуксиз эканлигини таъриф ёрдамида кўрсатинг.

№	$f(x)$	$[a,b]$	№	$f(x)$	$[a,b]$
1	$f(x) = \begin{cases} 1, x \in [-1,0) \\ -1, x \in [0,1] \end{cases}$	$[-1,1]$	5	$f(x) = \begin{cases} x, x \in [-1,0) \\ 1 - x, x \in [0,1] \end{cases}$	$[-1,1]$
2	$f(x) = \begin{cases} x \cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$	$[0,1]$	6	$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \end{cases}$	$[0,1]$
3	$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$	$[0,1]$	7	$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ \cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \end{cases}$	$[0,1]$
4	$f(x) = \begin{cases} 0, x - \text{рационал} \\ 1, x - \text{иррационал} \end{cases}$	$[0,1]$	8	$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in [0,1) \\ 2x, x \in [1,2] \end{cases}$	$[0,2]$

3-топшириқ.

1. Агар $f(x)$ функция абсолют узлуксиз бўлса, $|f(x)|$ҳам абсолют узлуксиз бўлишини кўрсатинг (тескариси ўринлими?).

2. $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^{1+\alpha}\left|\sin\frac{1}{x}\right|, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

функциянинг ихтиёрий $\alpha > 0$сон учун абсолют узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

3. $f(x) = x^\alpha$ функцияни$f(x) \in \mathrm{H}^\alpha[0,1]$эканини кўрсатинг.

4. $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, 0 < x \le 1 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

$f(x) \in \mathrm{H}^{1/2}[0,1]$ -эканини кўрсатинг. Бироpта $\alpha > \frac{1}{2}$учун$f(x) \in \mathrm{H}^\alpha[0,1]$ бўладими?

5. Агар $f(x) -$ $[a,b]$да абсолют узлуксиз функция бўлса, ихтиёрий $n \in N$учун $[f(x)]^n$ҳам $[a,b]$да абсолют узлуксиз бўлишини исботланг.

6. $f(x)$ функция $[a,b]$абсолют узлуксиз ва $\varphi(x)$функция $(-\infty, +\infty)$да Липшиц шартини каноатлантирсин. $\varphi\big(f(x)\big)$функцияни $[a,b]$ да абсолют узлуксиз бўлишини исботланг.

7.$f(x)$ функция$[a,b]$да қатъий ўсувчива$\varphi(x)$функция$[f(a), f(b)]$абсолют узлуксиз бўлсин.$\varphi(f(x))$ни$[a,b]$ да абсолют узлуксиз функция бўлишини исботланг.

8.Ўзгариши чегаралангананабсолют узлуксизбўлмаган функцияга мисол келтиринг.

9. $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

функциянинг$[0,1]$кесмада абсолют узлуксизэмаслигини кўрсатинг.

10.$f(x) = \frac{\cos x^2}{x}$функциянинг$[1,+\infty)$ораликда абсолют узлуксизлигини текширинг.

4-топшириқ.

1. $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ бўлсин, бунда $f_+(x)$ва$f_-(x)$ номанфий ва интегралланувчи функциялар. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$да абсолют узлуксиз бўлса, $f_+(x)$ва$f_-(x)$ функциялар ҳам абсолют узлуксиз бўла оладими?

2. Бевосита текшириш орқали

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

функцияни (вариацияси чексиз эканлигидан фойдаланмасдан) абсолют узлуксиз эмаслигини исботланг.

Назоратсаволлари

1. Чекливариациялифункциянингтаърифи, мисоллар.

2. $[a,b]$кесмадагиихтиёрийчегараланган, монотонўсувчифункциянингчекливариациягаэгабўлишикўрсатилсин.

3. $[a,b]$ кесмадаузлуксиз, лекинчекливариациягаэгабўлмаганфункциягамисолкелтирилсин.

4. $[a,b]$кесмадагибўлаклимонотонфункциянингчекливариациягаэгабўлиши.

5. $[a,b]$ кесмадаЛипщицшартиниқаноатлантирувчифункциянингчекливариациягаэгабўлиши.

6. $[a,b]$да чегараланганҳосилагаэгабўлганфункциянингчекливариациягаэгабўлиши.

7. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{агар} x\neq 0 \quad \text{бўлса}, \\ 0, & \text{агар} x=0, \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

функциянингихтиёрийкесмадачекливариациягаэгабўлишикўрсатилсин.

8. $f(x)=\mathrm{c}+\int\limits_a^x \varphi(t)dt$

кўринишидагифункциянингчекливариациягаэгабўлиши.

9. Чекливариациялифункциянингчегараланганлигиҳақидаги теорема.

10. Чекливариациялифункцияларустида арифметик амаллар.

11. $\bigvee\limits_a^b f(x)=\bigvee\limits_a^c f(x)+\bigvee\limits_c^b f(x), a>c>b$тенгликисботлансин.

12. $f(x)$функция $[a,b]$да чекливариациягаэгабўлса, унда

$$g(x)=\bigvee\limits_a^x f(t)$$

функциянинг$[a,b]$да ўсувчи ва чегараланган бўлиши исботлансин.

13. Чекливариациялифункцияларучунзарурийваетарлишартлар.

14. $f(x)$ функция $[a,b]$ да чекливариациялибўлиб, $x\in[a,b]$ бўлсин. Агар$f(x)\in C\{x_0\}$ бўлса, унда

$$g(x)=\bigvee\limits_a^x f(t)\in C\{x_0\}\text{бўлишисботлансин.}$$

15. Чекливариациялиузлуксизфункцияниикитаузлуксиз, ўсувчифункцияларнингайирмасикўринишидаифодалашмумкинлигиисботлансин.

16. Агар$f(x)\in C[a,b]$ва

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \text{бўлса}, \lim_{\lambda\to 0} \vartheta_n = \bigvee_a^b f(x)$$

бўлишиисботлансин.

17. ТўғриланувчичизиқларваЖордантеоремаси.

18. Тўғриланувчибўлмаганчизиққамисолкелтирилсин.

II БОБ. Стилтьес интеграли

§1. Стилтьес интегралинингтаърифивамавжудликшарти

1. Стилтьес интегралининг таърифи. Стилтьес Томас Иоаннес(StieltjesThomasJohannes,1856-1894, Тулуза) нидерландиялик математик ва астроном, Нидерландия фанлар академияси аъзоси, Санкт-Петербург фанлар академиясининг Физика-математика бўлинмасининг хориж мухбир-аъзоси. Делфтдаги Политехника мактабини тугатган. Лейден обсерваториясида ишлаган, сўнгра Тулузадаги университетда профессор лавозимида фаолият олиб борган. Асосан функционал узлуксиз касрлар назарияси, моментлар муаммоси, ортогонал кўпҳадлар назарияси, интеграл алмаштиришлар ва классик анализнинг бошқа йўналишлари бўйича илмий изланишлар олиб борган. 1884 йилда Стилтьес томонидан таклиф қилинган Риман интегралини умумлашмаси замонавий математикада муҳим роль ўйнайди.

Айтиш жоизки, Стилтьес занжир касрлар назарияси устида илмий изланишлар олиб борган вақтда Риман интегралини умумлашмасига дуч келган. Биринчи бўлиб назарияни яратиб, илмий ишларида қўллаган. Келгусида назарияни янада кенгроқ ёритиш бир қатор олимлар - Кёниг, А.А.Марков, А.М.Ляпунов, Г.Ф.Вороной, Рисс, Гильберт, Хеллингерларнинг зиммасига тўғри келади. Бу олимлар ҳам илмий изланишлари жараёнида Стилтьес интеграли тушунчасига дуч келишади. Хусусан, А.А.Марков - занжир касрлар назарияси, Кёниг - R-интеграли назарияси, Г.Ф.Вороной - сонлар назарияси, А.М.Ляпунов – осмон механикаси, Гильберт, Хеллингер, Радон – интеграл тенгламалар назарияси, Рисс, Радон – чизиқли функционаллар назарияси, У.Г.Юнг - тригонометрик қаторлар назарияси доирасида олиб борган илмий ишларида қўллашган.

Стилтьес интегралини янада кенг қамровли қўлланилиши ҳақида маълумотларни Н.Э.Бауман номли МДТУ нашриётида чоп этилган «Теория вероятностей»[41], А.Зоммерфельднинг «Механика» [13]ва В.Д.Райзернинг «Теория надежности сооружений»[34]китобларидан топиш мумкин.

Стилтьес интеграли тушунчасига олиб келган қуйидаги масалани ёритамиз. m массали моддий нуқтанинг F куч таъсиридаги фундаментал тенгламасини қарайлик: $m\ddot{r} = F$ бўлиб, бунда r – нуқтанинг радиус вектори. Агар nта моддий нуқтадан иборат система берилган бўлса, у ҳолда уларнинг ҳар бири учун: $m_i\ddot{r_i} = F_i$, $i = \overline{1,n}$тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликларни қўшиб, қуйидаги муносабатни оламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{r_i} = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

ва уни ўзгартириб ёзамиз:

$$\text{М}\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M}\ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

ёки

$$M\ddot{r}_M = F$$

шаклда келтирамиз, бунда

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \qquad F = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

ва

$$r_M = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\text{М}} r_i.$$

Агар радиус-вектори r_M бўлган барча моддий нуқталар системаси фазонинг бир нуқтасига жамланса, ўзаро ҳаракатлари мураккаб бўлишига қарамасдан, улар F куч таъсирида Ньютон қонуни асосида ҳаракатланади.

Топилган радиус-вектор

$$r_M = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\text{М}} r_i.$$

жойлашган нуқта, моддий нуқталар системаси оғирлигининг маркази бўлади.

Энди массаси бирор D соҳада тақсимланган моддий жисмнинг оғирлик марказини топиш масаласини кўриб чиқайлик. Ҳажмнинг dvэлементида dm масса ва M қаралаётган D жисмнинг умумий массаси бўлсин.

У ҳолда$M = \int_D dm$бўлса, масса маркази$\frac{1}{M}\int_D rdm$бўлади, бунда r – қаралаётган масса элементи dm нинг радиус-вектори.

Соддалик учун бир ўзгарувчи ҳолни, яъни D соҳани $[a,b]$ кесма деб қарайлик. У ҳолда

$$M = \int_a^b dm$$

бўлиб, унинг оғирлик маркази

$$\frac{1}{M}\int_a^b xdm$$

бўлади, бунда x ўзгарувчи dm масса элементини координатаси, аниқроқ ёзадиган бўлсак, dm эмас,$dm(x)$ деб бўлади.

Ушбу ёзилганларнинг маъноси қуйидагича: $[a,b]$ кесмани P бўлиниши ва унда $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$нуқталарни оламиз. $[x_{i-1}, x_i]$ кесмага Δm_iмассани мос қўямиз ва

$$\sum_i \Delta m_i \text{ ва } \sum_i \xi_i \Delta m_i$$

йиғиндини тузамиз. Бўлаклаш параметри $\lambda(P)$ нолга интилганда мос равишда

$$\int_a^b dm(x) \text{ ва} \int_a^b xdm(x)$$

ларга эга бўламиз.

Бундан ташқари, массанинг тарқалиши $\mu(y)$ бўлганда, потенциални қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$u(x) = \int_B \gamma(|x-y|)\, d\mu(y)$$

бу ерда

$$\gamma(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}}, & \text{агар } n > 2, \\ \log\dfrac{1}{r}, & \text{агар } n = 2. \end{cases}$$

Бу интегралларнинг барчаси Риман интегралини умумлашмаси бўлган Стилтьес интегралининг кўринишидир.

2. Стилтьес интеграли таърифи. Энди бевосита Стилтьес интеграли назариясини баён қиламиз. Хусусан, Стилтьес интеграли қуйидагича аниқланади.

$[a,b]$кесмада 2 та чегараланган $f(x)$ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. $[a,b]$кесманиушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots . < x_{n-1} < x_n = b$$

тенгсизликларниқаноатлантирувчиихтиёрийнуқталарёрдамидаnта $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, қисмларгаажратамиз. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ва

$$\lambda = \max_{k=0,n-1} \Delta x_k$$

деббелгилаймиз. $\forall \xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$нуқтаолиб, ушбуйиғиндинитузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k) \ (1)$$

йиғиндига**Стилтьеснинг интеграл йиғиндиси**дейилади.

1-таъриф. *Агар*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$$

мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати $[a, b]$*кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги* ξ_k*нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, унда шусонга* $f(x)$***функциянинг*** $g(x)$***функция бўйича Стилтьес интеграли*** *дейилади ва*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)$$

кабибелгиланади.

Қулайлик учун интеграл белгиси олдидаги (S) ни тушириб ёзамиз, шу сабабли бирор-бир изоҳ айтилмаган бўлса, интегралларни Стилтьес интеграли деб тушуниш лозим. Риман интеграли билан боғлиқлиги ҳақида сўз борса, ажратиш учун мос равишда интеграллар олдида (S) ва (R) белгилари қуйилади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dg(x) \coloneqq \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k). \qquad (2)$$

Агар(2) – интеграл мавжудбўлса,унда$\boldsymbol{f(x)}$**функция**$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**кесмада**$\boldsymbol{g(x)}$**функция бўйичаинтегралланувчи**дебайтилади.

Стилтьес интегралининг Риман интегралидан асосий фарқи $f(\xi_k)$ аргументнинг орттирмаси Δx_k га эмас, иккинчи функциянинг орттирмаси $\Delta g(x_k)$ га кўпайтирилади.

Изоҳ. *Риман интеграли Стилтьес интегралинингхусусийҳолибўлиб, Стилтьес интегралида*$g(x) = x$*дейилса, ундан Риман интеграли келиб чиқади.*

Энди Стилтьес интегралинингмавжудликшартиникўриб чиқайлик.

Фаразқиламиз, $g(x)$функциямонотонўсувчибўлсин. У ҳолда$\Delta x_k > 0$бўлганда$\Delta g(x) > 0$бўлади.

Қуйидагибелгилашларникиритамиз:

$$m_k = \inf_{[x_k; x_{k+1}]} \{f(x)\}, M_k = \sup_{[x_k; x_{k+1}]} \{f(x)\},$$

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k), \quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k) \ (3)$$

2-таъриф. $\underline{S}$*ва*$\overline{S}$*йиғиндиларморсравишда* ***Дарбу – Стилтьеснингқуйиваюқорийиғиндилари****дебаталади.*

Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқорийиғиндиларақуйидагихоссаларгаэга.

1.*Агар*$[a, b]$*кесманингбўлинишнуқталаригаянгиларикўшилса, ундa*$\underline{S}$*фақатортиши,*$\overline{S}$*эсакамайишимумкин.*

Яъни, $\{\underline{S}\}$ ўсувчи ва$\{\overline{S}\}$ камаювчи.

2.*Дарбу – Стилтьеснингихтиёрийқуйийиғиндисиунингихтиёрийюқорийиғиндисиданкаттабўлаолмайди (агарубошқабўлинишгамоскелсаҳам).*

Агарушбу

$$I_* = Sup\{\underline{S}\} \text{ва} I^* = inf\{\overline{S}\}$$

тенгликларёрдамидаДарбу – Стилтьеснингқуйиваюқориинтегралларинианиқласак, унда

$$\underline{S} \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S}$$

тенгсизликларўринлибўлади.

БутенгсизликларваДарбу – Стилтьесйиғиндиларидан фойдаланиб, оддийРиманинтегралликабиқуйидагитеоремаосонисботланади.

Теорема 1. *Стилтьес интегралинингмавжудбўлишиучунушбу*

$$\lim_{\lambda \to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$$

ёки

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0 \qquad (4)$$

тенгликнингбажарилишизарурваетарли$(\omega_k = M_k - m_k)$.

3. Стилтьес интегралимавжудбўлганфункцияларсинфи

Теорема 2. *Агар*$f(x) \in C[a, b]$*бўлиб,* $g(x)$*функция* $[a, b]$*кесмадамонотонўсувчибўлса, унда*

$$\int_a^b f(x) dg(x) \ (5)$$

Стилтьес интегралимавжудбўлади.

Исбот. $f(x) \in C[a, b]$бўлганлигидан Кантор теоремасигакўра, утекисузлуксиздир. Яъни, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажратилганда, $f(x)$функциянинг шу бўлаклардаги тебраниши ω_kучун ушбу

$$\omega_k < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$$

тенгсизликбажарилади.

Энди$[a, b]$кесманиузунликлариδданкичикбўлганқисмларгаажратамиз.

$$\lambda < \delta \text{ва} \omega_k < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \text{бўлиб,}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

$$= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \cdot [g(b)-g(a)] = \varepsilon \text{ бўлади.}$$

Бундан

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0$$

бўлиб, (5)интегрални мавжуд эканлиги исботланади.

Теорема 3. *Агар$f(x)$функция$[a, b]$кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб, $g(x)$функция Липшиц шартини қаноатлантирса, яъни*

$$|g(\overline{x}) - g(x)| \leq L \cdot (\overline{x} - x), \quad (L = const, \qquad a \leq x \leq \overline{x} \leq b) \qquad (6)$$

тенгсизликбажарилса, унда

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

Стилтьес интегралимавжудбўлади.

Исбот. **а)**Теоремaниаввал$g(x)$ функция (6)шартнибажаришданташқаримонотонўсувчибўлганҳолучунисботлаймиз.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \leq L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$= L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k. \qquad (7)$$

$f(x)$функция $[a, b]$да Риман маъносидаинтегралланувчибўлганиучун

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0$$

вамосравишда (7)тенгсизликкакўра

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0$$

бўлади. Демак, Стилтьес интеграли мавжуд**.**

б) Умумийҳол. Липшицшартиниканоатлантирувчи$g(x)$функцияникуйидагикўринишдаёзи боламиз:

$$g(x) = L \cdot x - [L \cdot x - g(x)] = g_1(x) - g_2(x). \qquad (8)$$

(8)тенгликдаги $g_1(x) = L \cdot x$функция Липшиц шартини қаноатлантириши билан бир қаторда, монотон ўсувчи ҳам бўлади. Шу шартларни$g_2(x) = L \cdot x - g(x)$функция хам бажаради.

Хақиқатан ҳам, $a \le x \le \overline{x} \le b$учун$g_2(\overline{x}) - g_2(x) = L(\overline{x} - x) - [g(\overline{x}) - g(x)] \ge L \cdot (\overline{x} - x) - L \cdot (\overline{x} - x) = 0$,демак, $\{g_2(x)\}$ўсувчи ваЛипшиц шартиниқаноатлантиради:

$$|g_2(\overline{x}) - g_2(x)| \le L(\overline{x} - x) + |g_2(\overline{x}) - g_2(x)| \le L(\overline{x} - x) + L(\overline{x} - x) = 2L(\overline{x} - x).$$

а) ҳолгакўра$g_1(x)$ва$g_2(x)$ларучун (4) шартбажарилади, бундан эса(4)шарт$g(x)$функция учунҳамбажарилади. Демак, (5)интеграл мавжуд.

Агар биз 3-теоремада$g(x)$ функцияга шартни камайтирсак, у ҳолда $f(x)$ функцияга кўпроқ шарт қўйишга тўғри келади. Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема 4.*Агар* $f(x)$ *функция* $[a, b]$ да *узлуксиз ва* $g(x)$ *функция чекли вариацияга эга бўлса*

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

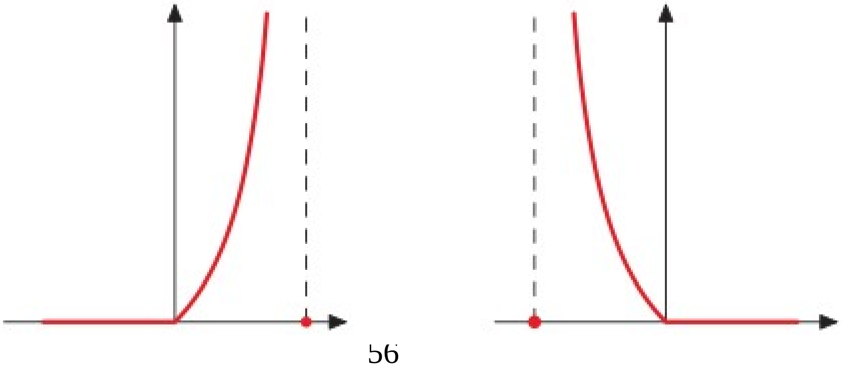
интеграл мавжуд бўлади.

Шу ўринда айтиш жоизки, шу бобнинг 9-бандида (Стилтьес интегралини баҳолаш) ушбу интегрални баҳолаш тўғрисида теорема келтирилган**.**

Агар $f(x)$ва $g(x)$ функциялар чегараланмаган бўлса ҳам, Стилтьес интеграли мавжуд бўладиган функцияларни қуриш мумкин. Масалан, $[-1, 1]$оралиқда қуйидаги $f(x)$ва $g(x)$ функцияларни қарайлик:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \cup \{1\}, \\ \dfrac{x}{1-x}, & x \in (0,1), \end{cases}$$

$$g(x) = f(-x).$$



Бу функциялар учун

$$\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$$

мавжуд (мустақил ҳисобланг).

Теорема 5. *Агар* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб,* $g(x)$ *функцияни ушбу*

$$g(x) = c + \int_{a}^{x} \varphi(x)dt \qquad (9)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу ерда $\varphi(x) - [a,b]$ *кесмада Риман маъносида абсолют интегралланувчи функция, унда*

$$\int_{a}^{b} f(x)dg(x)$$

мавжуд бўлади.

Исбот. Теорема шартига кўра, $|\varphi(t)|$ Риман маъносидаинтегралланувчи, бундан келиб чиқадики, $|\varphi(t)|$- чегараланган, яъни $\exists L > 0$ ва $\forall t \in [a,b]$ учун $|\varphi(t)| \leq L$. Унда $a \leq x \leq \overline{x} \leq b$ учун ушбу

$$|g(\overline{x}) - g(x)| = \left| c + \int_{a}^{\overline{x}} \varphi(t)dt - c - \int_{a}^{x} \varphi(t)dt \right| = \left| \int_{x}^{\bar{x}} \varphi(t)dt \right| \leq \int_{x}^{\bar{x}} \varphi(t)dt$$

$$\leq L \cdot \int_{x}^{\overline{x}} dt = L(\overline{x} - x)$$

муносабатларбажарилади, яъни $g(x)$ функция Липщицшартиниқаноатлантиради. У ҳолда 3-теоремага кўра Стилтьес интеграли мавжуд.

Теорема 6. $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *да узлуксиз ва* $\varphi(x)$ *функция бўйича интегралланувчи, яъни*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, d\varphi(x)$$

мавжуд бўлсин.

Агар $\varphi(x)$ *функцияни* $[a,b]$ *нинг ички нуқталарида чекли сондаги қийматлари ўзгартирилса ҳам*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, d\varphi(x)$$

мавжуд бўлади ва интегралнинг қиймати ўзгармайди.

Бу тасдиқ 5-теорема каби исботланади.

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 7. *Агар* $f(x)$ *функция бўлакли узлуксиз ва* $\varphi(x)$ *функция эса чекли ўзгаришга эга бўлиб,* $f(x)$ *функция узилишга эга бўлган нуқталарда узлуксиз бўлса, у ҳолда Стилтьес интеграли*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$$

мавжуд бўлади.

Ушбу келтирилган теоремадан шуни айтиш мумкинки, агар $f(x)$функция бўлакли узлуксиз, $\varphi(x)$ функция чекли ўзгаришга эга бўлиб, $f(x)$ функция узилишга эга бўлган нуқталарда узилишга эга бўлса, интеграл мавжуд бўлмайди.

Исбот. $f(x)$функция cнуқтада биринчи тур узилишга эга бўлсин. Агар узилиш нуқтаси тузатиб бўлмайдиган бўлса, у ҳолда $f(x)$функцияга

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} a \le x < c, \\ 1, & \text{агар} c \le x \le b \end{cases}$$

функцияни мос сонга кўпайтиргандан сўнг қўшиб, узлуксиз ва $\varphi(x)$ бўйича интегралланувчи функцияни тузиш мумкин.

$g(x)$ функция $\varphi(x)$ бўйича интегралланувчи, негаки, агар $c \in [a, b]$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\left(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\right)$$

$$= g(\xi_m)\big(\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})\big) + \sum_{k=m+1}^{n}\big(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\big)$$

$$= g(\xi_m)\big(\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})\big) + \varphi(b) - \varphi(x_m)$$

бўлади. $\Delta x \to 0$ да $\varphi(x)$ функцияни cнуқтада узлуксизлигини инобатга олсак, ўнг томон $\varphi(b) - \varphi(c)$ га тенг бўлади.

Агар $f(x)$функцияни c нуқта тузатиб бўладиган узилиш нуқтаси бўлса, қуйидаги функцияни киритамиз:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар} x = c, \\ 0, & \textit{агар} x \ne c \end{cases}$$

ва $g(x)$ функцияни ўрнига $h(x)$ функцияни қўйиб,юқоридаги каби фикр юритсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)\left(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\right) = h(\xi_m)\big(\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})\big).$$

Кўриниб турибдики, $\Delta x \to 0$ да ушбу ифода нолга интилади.

$f(x)$ функция битта узилиш нуқтасига эга бўлган ҳол учун теорема исботланди.

Теоремани умумий ҳолда исботи, Стилтьес интегралини чизиқлилигидан фойдаланиб, $f(x)$ функцияга $g(x+\alpha)$ ва $h(x+\beta)$ларни (аргументларини α ва β га силжитиш орқали) чизиқли комбинациясини қўшиш ёрдамида узлуксиз функция ҳосил қилиш мумкинлигидан келиб чиқади. Теорема исботланди.

Мустақил ишлаш учун топшириқлар

1) Агар $f(x)$ функция бирор кесмада чекли вариацияга эга ва $|f(x)| \geq d > 0$ бўлса, $1/f(x)$ ни чекли вариацияга эга бўлишини исботланг.

2) $f(x)$ функциянинг чегараланганлиги

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)$$

Стилтьес интегралини мавжуд бўлиши учун зарурий шарт бўла оладими?

3) Узлуксиз функциянинг узлуксиз функция бўйича Стилтьес интеграли мавжуд бўла олмаслигини исботланг.

4) $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)$$

Стилтьес интеграли мавжуд бўлсин.

6-теоремага кўра, $\varphi(x)$ функцияни $[a,b]$ кесманинг ички нуқталарида қийматларини ўзгартирсак ҳам берилган интегралнинг қиймати ўзгармайди. Агар $\varphi(x)$ функцияни кесманинг четки a ва b нуқталарида қийматини ўзгартисак, интегралнинг қиймати ўзгарадими?

§2. Стилтьес интегралининг хоссалари

4. Стилтьес интегралининг хоссалари. Стилтьес интегралининг таърифидан тўғридан-тўғри қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

1. $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$.

2. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)dg(x)$.

3. $\int_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x)$.

4. $\int_a^b k\cdot f(x)d\big(\ell\cdot g(x)\big) = k\cdot \ell\int_a^b f(x)dg(x).$

5. $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)\ (a < c < b).$

Мазкур хоссаларнинг исботи бир-бирига ўхшаш бўлиб, исботлаш қийинчилик туғдирмайди. Ушбуни инобатга олиб, фақат3-хоссани исботини келтирамиз. Бунинг учун Стилтьес интегралининг таърифидан фойдаланамиз:

$$\int_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[\Delta g_1(x_k) \pm \Delta g_2(x_k)] =$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g_1(x_k) \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g_2(x_k) =$$

$$= \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

<u>Изох.</u>5°*-хоссадаги*

$$\int_a^b f(x)\, dg\, (x)$$

интегралнингмавжудбўлишидан

$$\int_a^c f(x)dg(x) \text{ ва } \int_c^b f(x)dg(x)$$

интегралларнинг ҳарбирининг мавжуд бўлиши келиб чиқади, акси эса ўринли бўлиши шарт эмас.

Бунга мисол келтирамиз. $[-1;1]$кесмада берилган ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -1 \le x \le 0\ , \\ 1, & \text{агар } \ 0 < x \le 1 \end{cases}$$

ва

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -1 \le x < 0\ , \\ 1, & \text{агар } \ 0 < x \le 1 \end{cases}$$

фукцияларни қараймиз. Унда

$$\int_{-1}^0 f(x)dg(x) \text{ ва } \int_0^1 f(x)dg(x)$$

интеграллар мавжуд ва нолга тенг бўлади, чунки иккала ҳолда ҳам Стилтьес йиғиндисида қатнашган ҳадлар 0 га тенг .

Энди

$$\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$$

интегралнинг мавжуд эмаслигиникўрсатамиз. Бунинг учун $[-1;1]$ кесманинг шундай бўлинишини оламизки, 0нуқта бўлиниш нуқтаси бўлмасин. Интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta\, g(x_k).$$

$0 \in [x_k, \ x_{k+1}]$ бўлсин. Бунда, $x_k < 0 < x_{k+1}$ бўлиб, йиғиндидаги $k-$ қўшилувчидан бошқа ҳаммаси нолга тенг бўлади.Чунки $i \neq k$ да $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0$.Демак,

$$\sigma = f(\xi_k)\cdot[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = f(\xi_k)\cdot(1-0) = f(\xi_k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{агар} \xi_k \leq 0, \\ 1, & \text{агар } \xi_k < 0. \end{cases}$$

Бундан, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$нингтурлиқийматларқабулқилишидан

$$\int_{-1}^{1} f\ (x)dg(x)$$

интегралнинг ҳам мавжуд эмаслиги келиб чиқади.

Юқорида келтирилган хоссаларни инобатга олсак, Риман интегралининг айрим умумлашган хоссалари Стилтьес интеграли учун ҳам ўринли бўлади.

а) $\displaystyle\int_a^b [c_1 f_1\ (x)\ \pm c_2 f_2\ (x)]\, dg(x) = c_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) \pm c_2 \int_a^b f_2(x)dg(x)$,

бу ерда $f_1(x)$ва $f_2\ (x)$ функциялар $g(x)$ бўйича интегралланувчи, c_1 ваc_2 лар ихтиёрий ўзгармас сонлар.

б) Агар $a \leq a_1 < b_1 \leq b$бўлиб,

$$\int_a^b f(x)\ dg\ (x)$$

мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\ dg\ (x)$$

ҳам мавжуд бўлади.

с) $\displaystyle\int_a^b f(x)d[c_1 g_1(x) \pm c_2 g_2(x)] = c_1 \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm c_2 \int_a^b f(x)dg_2(x)$.

Бу хоссалар ҳам Стилтьес интеграли таърифидан фойдаланиб исботланади.

Юқорида келтирилган хоссалардан келиб чиқадиган қуйидаги натижаларни баён қиламиз:

1^0. Агар $g_1(x) = g(x) + const$ $(x \in [a,b])$бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dg(x),\ \int_a^b f(x)dg_1(x)$$

интеграллардан бири мавжуд бўлса, иккинчиси ҳам мавжуд бўлиб, қийматлари тенг бўлади.

Бу натижанинг исботи $[a,b]$ кесмани ихтиёрий бўлинишини олганимизда ҳам

$$\Delta_i g(x) = \Delta_i g_1(x)\ (i = \overline{1,n})$$

тенглик бажарилишидан келиб чиқади.

2^0. Агар $[a,b]$ кесмани ҳар қандай бўлиниши олинганда ҳам

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = A = const$$

бўлса,

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд ва қиймати A га тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам $\forall\varepsilon > 0$ ва $[a,b]$ кесмани ҳар қандай бўлиниши олинганда ҳам

$$|\sigma - \mathrm{A}| = |\mathrm{A} - \mathrm{A}| = 0 < \varepsilon$$

бўлади.

3^0.Агар $g(x) = A = const(x \in [a,b])$бўлса,

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд ва қиймати нолга бўлади.

Бу ҳолда ҳам $\forall\varepsilon > 0$ ва $[a,b]$ кесмани ихтиёрий бўлиниши олинганда ҳам $\Delta_i g(x) = 0$ бўлади. Бундан эса

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = 0.$$

эканлиги келиб чиқади. Бунга 2^0 натижа қўлланилса, исботи келиб чиқади.

4^0. $f(x) = A = const$ $(x \in [a,b])$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд ва қиймати $c[g(b)-g(a)]$га тенг бўлади.

Берилган шартларга кўра, $\forall\varepsilon>0$ ва $[a,b]$ кесмани ихтиёрий бўлиниши ва ξ_i олинганда ҳам

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]=c\sum_i[g(x_{i+1})-g(x_i)]=c[g(b)-g(a)]$$

бўлади. Бунга 2^0 натижа қўлланилса, исботи келиб чиқади.

Хусусан, $f(x)=0$бўлса,

$$\int_a^b 0\cdot dg(x)=0$$

бўлади.

5^0. Агар $a<b, f(x)$ функция a нуқтада ўнгдан узлуксиз ва $g(x)=A=const(a<x\leq b)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд ва қиймати $f(a)[g(b)-g(a)]$ га тенг бўлади.

6^0. Агар $a<b, f(x)$ функция b нуқтада чапдан узлуксиз ва $g(x)=A=const(a\leq x<b)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд ва қиймати $f(b)[g(b)-g(a)]$ га тенг бўлади.

7^0. Агар $a<b, f(x)$ функция $(a,b]$ ярим очиқ интервалнинг барча нуқталарида нолга тенг ва $g(x)$ функция a нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд ва қиймати нолга тенг бўлади.

8^0. Агар $a<b, f(x)$ функция $[a,b)$ ярим очиқ интервалнинг барча нуқталарида нолга тенг ва $g(x)$ функция b нуқтада чапдан узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд ва қиймати нолга тенг бўлади.

Бу натижаларнинг исботларини ўқувчига ҳавола қиламиз.

§ 3. Стилтьес интегралини ҳисоблаш усуллари

5. Стилтьес интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласи. Олдинги параграфда Стилтьес интегралининг бир қатор хоссалари келтирилган эди. Ушбу хоссалардан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема 1.*Агар*

$$\int_a^b f\,(x)dg(x) \text{ва} \int_a^b g\,(x)df(x)$$

Стилтьес интегралларидан бири мавжуд бўлса, унда иккинчиси ҳам мавжуд бўлади ва ушбу бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x). \ (1)$$

Исбот.Фаразқилайлик,

$$\int_a^b g(x)df\,(x)$$

мавжудбўлсин. $[a,b]$кесманиихтиёрийусулбилан$[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$қисмларгаажратамиз ва $\forall\, \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$нуқталарни танлаймиз.

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

интеграл учун Стилтьес йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1} - g(x_k)].$$

Буйиғиндиниқуйидаги кўринишдаёзиб оламиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k-1})g(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, g(x_k) =$$

$$= -\left[\sum_{k=0}^{n-1} f\,(\xi_k)g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_{k-1})g(x_k)\right] =$$

$$-\left\{g(a)f(\xi_0) + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_x)\cdot[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] - g(b)f(\xi_{n-1})\right\}.$$

Ҳосил бўлган ифодага $\big(f(x)\cdot g(x)\big)\Big|_a^b = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)$ ифоданиқўшибайирамиз.

$\sigma = \big(f(x)\cdot g(x)\big)\Big|_a^b - \{\, g(a)\cdot[f(\xi_0) - f(a)] +$

$$\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\cdot[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})]+g(b)[f(b)-f(\xi_{n-1})]\}. \qquad (2)$$

Бутенгликдагикаттақавс (фигураликавс) ичидагиифода

$$\int_a^b g(x)df\ (x)$$

Стилтьес интеграли учун интеграл йиғиндиниберади.Бу йиғинди $[a,b]$ кесмани $[\ \xi_k, \xi_{k+1}\ ]$ кесмалар ёрдамидабўлинишига мос келади. Агар $\lambda = \ max\ \Delta x_k$ва $\lambda' = \ max\ \Delta\xi_k$
деб белгиласак, $(\lambda\to 0)\sim(\ \lambda'\to 0)$ бўлади. (2)тенгликда $\lambda\to 0(\lambda'\to 0)$ да лимитга ўтсак, унда исбот қилишимиз керак бўлган (1)формулани ҳосил қиламиз.

Бўлаклаб интеграллаш формуласи ҳақида умумлашган теоремани келтирамиз. Ҳеч бўлмаганда $f(x)$ ёки $g(x)$ функцияларнинг бири ҳақиқий бўлсин.

Теорема 2. Агар

$$\int_a^b f(x)dg(x) \ \text{ва}\ \int_a^b g(x)df(x)$$

интеграллардан бири ва

$$\int_a^b h(x)f(x)dg(x) \ \text{ва}\ \int_a^b h(x)g(x)df(x)$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b h(x)d[f(x)g(x)]$$

интеграл мавжуд бўлиб, қуйидаги формула ўрили бўлади:

$$\int_a^b h(x)d[f(x)g(x)] = \int_a^b h(x)f(x)dg(x) + \int_a^b h(x)g(x)df(x).$$

Агар ушбу тенгликнинг икки томонига

$$\int_a^b f(x)g(x)dh(x)$$

интегралини қўшиб, чап томондаги $f(x)g(x)$ ва $h(x)$ функциялар жуфтлиги учун бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлласак

$$f(b)g(b)h(b)-f(a)g(a)h(a)$$
$$= \int_a^b h(x)f(x)dg(x) + \int_a^b h(x)g(x)df(x) + \int_a^b f(x)g(x)dh(x)$$

тенгликка келамиз. Бу тенглик учта $f(x)$, $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар системаси учун бўлаклаб интеграллаш формуласининг умумлашмасидир.

Теореманинг исботи Э.Х.Гохманнинг «Интеграл Стилтьеса и его приложения»[9]китобида бор.

6. Стилтьес интегралида ўзгарувчиларни алмаштириш

Теорема 3. (Стилтьес интегралида ўзгарувчиларни алмаштириш). *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$да аниқланган ва чегараланган, $u\ (y)$ва $v\ (y)$ функциялар $[c,d]$да аниқланган ва чегараланган бўлсин. Бундан ташқари, $[a,b]$ ва $[c,d]$ лар ўртасида бир қийматли монотон мослик ўрнатилган бўлиб, ихтиёрий x ва y лар жуфтлиги учун*

$$f\ (x) = u\ (y) \text{ва} g(x) = v\ (y)$$

тенглик ўринли бўлсин ҳамда a нуқтага c, b нуқтага d нуқта мос келсин.

Агар

$$\int_a^b g(x)df\ (x), \int_a^b u(y)dv\ (y)$$

лардан бири мавжуд бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам мавжуд бўлиб, улар

$$\int_a^b g(x)df\ (x) = \int_a^b u(y)dv\ (y)$$

ўзаро тенг бўлади.

Теореманинг исботи Риман интегралида ўзгарувчиларни алмаштириш тўғрисидаги теореманинг исботи каби бўлади. Исботда катта фарқ бўлмаганлиги учун уни келтирмаймиз.

Маълумки, Риман интеграли билан Стилтьес интегралининг хоссаларининг асосий қисми бир-бирига ўхшаш. Шу сабабли келгусида Стилтьес интегралини ҳисоблаш учун зарур бўладиган бир қатор теоремаларни баён қиламиз ва айримларини исботларини билан келтирамиз.

Теорема 4. $a < b$ бўлсин. $\mathbf{1^0}$. Агар $g(x)$ функция a нуқтада ўнгдан узлуксиз,

$$f_1(x) = f_2(x)\ (a < x \leq b)$$

ва

$$\int_a^b f_1(x)dg(x), \qquad \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

интеграллардан бири мавжуд бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам мавжуд бўлиб, қийматлари тенг бўлади.

$\mathbf{2^0}$. Агар $g(x)$ функция b нуқтада чапдан узлуксиз,

$$f_1(x) = f_2(x)\ (a \leq x < b)$$

ва

$$\int_a^b f_1(x)dg(x), \qquad \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

интеграллардан бири мавжуд бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам мавжуд бўлиб, қийматлари тенг бўлади.

Исбот.

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)(a \leq x \leq b)$$

деб оламиз. Иккинчи параграфдаги 7^0ва 8^0 хоссаларга мос равишда 1^0 ва 2^0 ларни қўлласак,

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

нинг мавжудлиги ва қиймати нолга тенглиги келиб чиқади.

Шу билан бир қаторда, $f_2(x) = f(x) + f_1(x)(a \leq x \leq b)$бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dg(x) \text{ ва } \int_a^b f_1(x)dg(x)$$

ларнинг ҳар бирини мавжудлигидан

$$\int_a^b f_2(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b f_1(x)dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x)$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

Юқорида келтирилган теорема каби исботланадиган қуйидаги тасдиқларни келтирамиз.

Теорема 5. Агар

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) \text{ва} \int_a^b h(x)\, dg(x)$$

интеграллар мавжуд бўлиб, $g(x)$ функция $[a, b]$ ораликда чекли вариацияга эга функция бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\, h(x) dg(x)$$

мавжуд бўлади.

Теорема 6. Агар

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) \text{ва} \int_a^b h(x)\, dg(x)$$

интеграллар мавжуд бўлиб, $g(x)$ функция $[a, b]$ ораликда чекли вариацияга эга ва

$$m \leq |h(x)| (a \leq x \leq b, m - \text{мусбатсон}),$$

бўлса, уолда $\int_a^b \frac{f(x)}{h(x)} dg(x)$мавжудбўлади.

§ 4. Стилтьес интеграли мавжуд функциялар синфи

7. Стилтьес интегралининг мавжуд бўлиши ҳақида теоремалар

Теорема 1. *$f(x)$функция$[a,b]$кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб, $g(x)$функция ушбу*

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt$$

кўринишдаифодалансин, буерда$\varphi(t)$функция$[a,b]$кесмадаРиман маъносида абсолютинтегралланувчи. У ҳолда

$$(S)\int_b^a f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \qquad (1)$$

тенгликўринлибўлади.

Исбот. (1)тенгликнингўнгтомонидаги Риман интеграли теорема шартигакўрамавжуд. Стилтьес интегралимавжудлигиэса шу бобнинг биринчи параграфидаги 5-теоремада исботланган. Энди фақат (1)тенгликнингўринлиэканлигиниисботлашкерак.

Умумийликказидкелтирмаганҳолда$\varphi(x) > 0$деб фаразқиламиз, чункиихтиёрий$\varphi(x)$функциянииккитамусбат$\varphi_1(x)$ва$\varphi_2(x)$функцияларнин гайирмасикўринишидаифодалашмумкин. Масалан

$$\varphi_1(x) = \frac{|\varphi(x)| + \varphi(x)}{2}$$

ва

$$\varphi_2(x) = \frac{|\varphi(x)| - \varphi(x)}{2}$$

деболишетарли**.**

Одатдагиусулбилан Стилтьес йиғиндисинитузамиз:

$$\sigma = \sum_{k-0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k)\varphi(x)dx \qquad (2)$$

Иккинчитомондан

$$(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi(x)dx \ (3)$$

тенгликўринли.(2) дан (3) ни айирамизваайирманибаҳолаймиз:

$$I = \left|\sigma - (R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k) - f(x)]\,\varphi(x)dx\right| \le$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)|\varphi(x)dx\,.$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$да$|f(\xi_k) - f(x)| \leq \omega_k$ эканлигини инобатга олсак,

$$I \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k\, \Delta g(x_k) \quad (4)$$

эга бўламиз. Шартгакўра,

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд. Демак,

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k\, \Delta g(x_k) = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} \sigma = \int_a^b f(x)dx$$

бўлиб, (1) тенглик исботланди.

Исботланган теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теорема ҳам осон исботланади.

Теорема 2. *$f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи, $g(x)$функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва унинг чекли сондаги нуқталардан ташқари барча нуқталарида ҳосиласи мавжуд бўлиб, $g'(x)$ҳосила $[a,b]$ кесмада Риман маъносида абсолют интегралланувчи бўлсин. Унда*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \quad (5)$$

бўлади.

Исбот.Теорема шартиниқаноатлантирувчи$g(x)$функцияучун

$$g(x) = g(a) + (R)\int_a^x g'(t)dt$$

формулаўринлибўлади. Унда$\varphi(t) = g'(t)$бўлганҳолда,1-теоремагакўра, (5)тенгликниҳосилқиламиз.

Энди $g(x)$функция узилишгаэгабўлганҳолда Стилтьес интегралиниҳисоблашниўрганамиз.

Узилишгаэгабўлган**«стандарт»** $\rho(x)$функцияни қарайлик.

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} x \leq 0\,, \\ 1, & \text{агар} x > 0\,, \end{cases}$$

$\rho(x)$ функция $x = 0$ нуқтада 1-тур узилишгаэгабўлиб, унинг шу нуқтадагисакраши

$$\rho(+o) - \rho(0) = 1$$

бўлади.

$\rho(x)$ функцияси каби, ушбу

$$\rho(x-c) = \begin{cases} 0, & \text{агар} x \le c\,, \\ 1, & \text{агар} x > c\,, \end{cases}$$

$$\rho(c-x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} x < c\,, \\ 1, & \text{агар} x \ge c\,, \end{cases}$$

функцияларҳам$x = c$нуқтада 1-турузилишгаэгабўлиб, уларнингшунуқтадагисакрашимосравишда1ва-1гатенгбўлади.

$f(x)$функция $x-c$нуқтадаузлуксиздебфаразқиламизва

$$\int_a^b f(x)d\rho(x-c)$$

интегрални ҳисоблаймиз. Буерда$a \le c < b$ ($c = b$бўлганда интеграл нолга тенг бўлади).

Стилтьес йиғиндисинитузамиз:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta\rho(x_i - c).$$

Фаразқилайлик, $c \in [x_k, x_{k+1}]$ $(x_k \le c < x_{k+1})$ бўлсин. Ундa$i \ne k$бўлганда$\Delta\rho(x_i - c) = 0$ ва $\Delta\rho(x_k - c) = 0$бўлади.

$$\sigma = f(\xi_k)\Delta\rho(x_k - c) = f(\xi_k) \Rightarrow \int_a^b f(x)d\rho(x-c) = \lim_{\lambda\to 0}\sigma$$
$$= \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_k) = f(c).$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)d\rho(x-c) = f(c)\ (\mathrm{a} \le c < b)(6)$$

тенглик ўринли бўлар экан. Худди шу каби

$$\int_a^b f(x)d\rho(x-c) = -f(c)(a < c \le b)(7)$$

эканлигини ҳосил қиламиз ($c = a$бўлганда бу интеграл нолга тенг бўлади).

Стилтьес интерали ҳар доим ҳам Риман интеграли орқали ифодаланмайди. Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

$c \in (a,b)$ва $g(x) = \begin{cases} 0, & a \le x < c, \\ 1, & c \le x \le b \end{cases}$ бўлсин.

$[a,b]$ да узлуксиз ҳар қандай $f(x)$ функция учун

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(c)$$

бажарилишини ҳисоблаш қийин эмас.

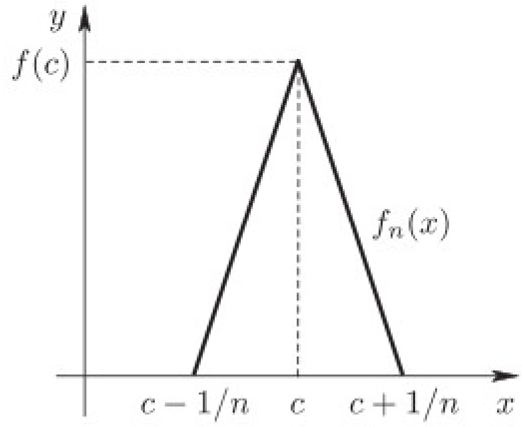
Лекин, Риман маъносида интегралланувчи ихтиёрий $h(x)$функция учун барча узлуксиз $f(x)$ функцияларда

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = f(c)$$

тенглик ўринли бўлмайди.

Агар шундай $h(x)$ функция мавжуд бўлса, у ҳолда $f(c) = 0$ бўлишини кўрсатамиз.

Қуйида графиги чизилган $f_n(x)$ функцияни қараймиз:



Шартга кўра, ихтиёрий n лар учун

$$\int_a^b f_n(x)h(x)dx = f(c)$$

тенглик ўринли.

Бирок,$|h(x)| \leq H$, бунда$x \in [a, b]$ лар учун

$$|f(c)| = \left|\int_a^b f_n(x)h(x)dx\right| \leq H|f(c)|\frac{1}{n}.$$

Бу тенглик барча n лар учун ўринли бўлганлигидан, $f(c) = 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = f(c)$$

барча узлуксиз функциялар учун ҳам ўринли бўлмайди.

8. Стилтьес интегралини ҳисоблаш бўйича асосий теорема. Энди2-теореманиумумлаштирувчитеореманиисботлашимкониятигаэгамиз.

Теорема 3. *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада берилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1)$f(x) \in C[a, b]$;

$2) g(x) \in C([a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \{c_k\})$

ва $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$ *нуқталар* $g(x)$ *функциянинг 1-тур узилишнуқталари;*

3) чеклисондагинуқталарданташқарида $g'(x)$ *ҳосиламавжуд;*

4) $g'(x)$ *ҳосила* $[a,b]$ *кесмада абсолют интегралланувчи.*

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

Стилтьесинтегралимавжудбўладивақуйидагитенгликбажарилади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(a)\cdot[g(a+o) - g(a)] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\cdot[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)\cdot[g(b) - g(b-0)] \quad (19)$$

Изоҳ. А*гар* $g(x) \in C[a,b]$ *бўлса, унда (8)формула (5)формулагаайланади, яъни3-теоремадан2-теоремакелибчиқади.*

Исбот.Ёзувнисоддалаштиришучунқуйидагибелгилашларникиритамиз:

$\alpha_k^+ = g(c_k+0) - g(c_k)$, $\quad k = \overline{0, m-1}$,

$\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k - 0)$, $\quad k = \overline{0, m}$).

Унда $1 \le k \le m-1$ учун $\alpha_k^+ - \alpha_k^- = g(c_k+0) - g(c_k-0)$ бўлади.

Қуйидагиёрдамчифункцияниоламиз:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k^+ \rho(x-c_k) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \rho(c_k - x).$$

Аниқланган $g_1(x)$ функция $g(x)$ функциянингбарчаузилишлариниўзидасақлайдива

$$g_2(x) = g(x) - g_1(x)$$

функция узлуксиз функция бўлади.

Демак,

1) $x \neq c_k$ бўлса, $g_2(x)$ функцияузлуксизфункцияларнингайирмасисифатидаузлуксизбўлади;

2) $x = c_k$ бўлсин. Аввал $g_2(x)$ функциянинг $c_k (k < m)$ нуқтадаўнгданузлуксизбўлишиникўрсатамиз. $x \in [c_k, c_{k+1} + 0]$ бўлсин:

$$g_2(x) = g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k) \Rightarrow$$

$$g_2(c_k) = g(c_k) - \alpha_k^+ \rho(0) = g(c_k).$$

Иккинчитомондан,

$$\lim_{x\to c_k+0} g_2(x) = \lim_{x\to c_k+0} [g(x) - \alpha_k^+ \rho(x) - c_k] = g(c_k+0) - \alpha_k^+ =$$

$= g(c_k + 0) - [g(c_k + 0) - g(c_k)] = g(c_k).$

Бундан келиб чиқадики, $g_2(x)$функциянуқтадаўнгданузлуксиз. Худдишунгаўхшаш$g_2(x)$функциянинг$c_k(k > 0)$нуқтадачапданузлуксизлигихамкўрсатилади. $g_2(x) \in C\{c_k\}$ эканлигидан $g_2(x) \in C[a, b]$ бўлиши келиб чиқади.

Агар$x \neq c_k$ нуқта олинса, унда бу нуқтанинг бирор атрофида аниқланишига кўра $g_1(x)$функция ўзгармас қийматни қабул қилади. $g'(x) = 0$, бундан келиб чиқадики, $x \neq c_k$ нуқтада

$$g_2'(x) = g'(x)$$

бўлади (албаттабутенглик$g'(x)$мавжудбўлганнуқталардақаралади).

Узлуксизбўлган$g_2(x)$функцияучунаввалги2-теоремагакўраСтилтьесинтегралимавжудбўлади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg_2(x) = (R)\int_a^b f(x)g_2'(x)dx = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \quad (9)$$

Энди (6) ва (7)тенгликлардანфойдаланиб, қуйидагиинтегралниҳисоблаймиз:

$$(S)\int_a^b f(x)dg_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \cdot (S)\int_a^b f(x)d\rho(x - c_k) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \alpha \cdot (S)\int_a^b f(x)d\rho(c_k - x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \cdot f(c_k) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \cdot f(c_k) =$$

$$= f(a) \cdot [g(a + 0) - g(a)] + \sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)\,[g(c_k + 0) - g(c_k - 0)] +$$

$$+f(b) \cdot [g(b) - g(b - 0)]. \quad (10)$$

(9) ва (10)тенгликларниҳадлабқўшишёрдамидаисботлашимизкеракбўлган (8)тенгликниҳосилқиламиз.

§ 5. Стилтьес интегралини ҳисоблашга доир мисоллар

Маълум шартлар бажарилганда Стильтес интегралини хисоблаш учун қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx, \quad (1)$$

ва

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(a) \cdot [g(a + 0) - g(0)] +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)\cdot[g(b)-g(b-0)]. \qquad (2)$$

Шу формулалардан фойдаланиб қуйидаги мисолларни ечамиз.

1-мисол. *(1) ёки (2) формулалардан фойдаланиб, қуйидаги Стилтьес интегралларини ҳисоблансин:*

$$a)\ \int_0^2 x^2 d\ln(1+x);\quad б)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x;\quad в)\ \int_{-1}^{1} xdarctgx.$$

Ечиш. Мисолларни ечиш учун (2) формуладан фойдаланамиз.

$$а)\ (S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)=(R)\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^2=2-2+\ln 3=\ln 3.$$

$$б)\ (S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x=(\mathrm{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx\\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=(x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{\pi}{2}+(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1.$$

$$в)(S)\int_{-1}^{1} xdarctgx=(R)\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_{-1}^{1}=0.$$

<u>2-мисол.</u>*(2) формуладан фойдаланиб қуйидаги Стилтьес интегралларини ҳисоблансин:*

$$а)\ \int_{-1}^{3} xdg(x),\ \text{бу ерда}\ g(x)=\begin{cases}0, & \text{агар}\ x=-1,\\ 1, & \text{агар}\ -1<x<2,\\ -1, & \text{агар}\ 2\le x\le 3;\end{cases}$$

$$б)\ \int_0^2 x^2 dg(x),\ \text{бу ерда}\ g(x)=\begin{cases}-1, & \text{агар}\ 0\le x<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{агар}\ \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2},\\ 2, & \text{агар}\ x=\frac{3}{2},\\ -2, & \text{агар}\ \frac{3}{2}<x\le 2.\end{cases}$$

Ечиш. а)$g(x)$ функциянинг $x=-1$нуқтадагисакраши 1, $x=2$нуқтадагисакраши -2 га тенгхамда$x \neq -1; 2$нуқталарда$g'(x)=0$. Унда (2)формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{-1}^{3} x dg(x) = -1 \cdot (1-0) + 2(-1-1) = -1-4 = -5.$$

б)$g(x)$ функциянинг$x=\frac{1}{2}$нуқтадагисакраши 1, $x=\frac{3}{2}$нуқтадагисакраши -2 гатенгва$x \neq \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$бўлгандаg$'(x)=0$.

Интегрални (2) формуладанфойдаланибҳисоблаймиз:

$$\int_{0}^{2} x^2 dg(x) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0+1) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (-2-0) = \frac{1}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{17}{4}.$$

3-мисол.

$$\int_{a}^{b} f(x) dH(x)$$

интегрални ҳисобланг, бунда $H(x)$ - Хевисайд функцияси.

Ечиш. Хевисайд функцияси ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган функция бўлиб, қуйидаги кўринишга эга:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} x < 0, \\ 1, & \text{агар} x \geq 0. \end{cases}$$

Стилтьес инетеграли таърифига кўра интеграл йиғиндини тузиб оламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta H_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(H(x_i) - H(x_{i-1})).$$

Агарнольнуқта $[a,b]$кесмага тегишли бўлмаса, йиғинди Хевисайд функцияси аниқланишига кўра нолга тенг бўлади. Агар ноль нуқта $[x_{i-1}, x_i]$оралиққа тегишли (ичида ётган ёки чекка нуқталарига тенг) бўлса, йиғиндининг қиймати $f(\xi_i)$ га тенг бўлади.

$\lambda(P) \to 0$да $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ нуқта нолга интилади. Агар $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, қаралаётган йиғиндининг қиймати $f(0)$ га тенг бўлади.

Агар $f(x)$ функция ноль нуқтада узилишга эга бўлса, ξ_i ни кичик ўзгартириш орқали $f(\xi_i)$ ни етарлича ўзгартиришга эришиш мумкин. Натижада $\lambda(P) \to 0$ да йиғинди аниқ лимитга интилмайди.

Ушбу ҳолатдан ҳам кўриниб турибдики, Стилтьес интегралида иштирок этувчи $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг узилиш нуқталари (интеграл ҳисобланаётган оралиқда) устма-уст тушса, интеграл мавжуд бўлмайди.

Агар $f(x)$ функция R да узлуксиз ва бирор оралиқдан ташқарида айнан нолга тенг бўлса,

$$\int_R f(x)dH(x) = f(0)$$

бўлади.

4-мисол. *(2)формуладанфойдаланибқуйидаги Стилтьес интеграллариҳисоблансин:*

а) $\int_{-2}^{2} xdg(x)$, б) $\int_{-2}^{2} x^2\, dg(x)$, в) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dg(x)$,

бу ерда$g(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ агар } -2 \le \mathrm{x} \le -1, \\ 2, \text{ агар } -1 < x < 0, \\ x^2 + 3, \text{ агар } 0 \le \mathrm{x} \le 2. \end{cases}$

Ечиш. а)Маълумки, $g(x)$ функциянинг$x = -1$ ва$x = 0$ нуқталаридагисакраши1 га тенгҳамда$g'(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар } -2 \le x < -1, \\ 0, \text{ агар } -1 < x < 0, \\ 2x, \text{ агар } 0 \le \mathrm{x} \le 2. \end{cases}$

(2)формуладанфойдаланамиз:

$$\int_{-2}^{2} xdg(x) == \int_{-2}^{-1} xdx + \int_{0}^{2} x \cdot 2xdx + (-1) \cdot (2-1) +$$

$$0 \cdot (3-2) = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2} - 1 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{16}{3} - 1 = \frac{17}{6}.$$

б) $$\int_{-2}^{2} x^2 dg(x) = \int_{-2}^{-1} x^2 dx + \int_{0}^{2} x^2 2xdx + (-1)^2 \cdot 1 +$$

$$+0 \cdot 1 = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2} + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 8 + 1 = 11\frac{1}{3}.$$

в) $$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dg(x) = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 1)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 1)2xdx +$$

$$+[(-1)^3 + 1] \cdot 1 + (0^3 + 1) \cdot 1 = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + 2\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2} +$$

$$0 + 1 = \frac{1}{4} - 1 - 4 + 2 + \frac{64}{5} + 4 = 15\frac{1}{20}.$$

5-мисол. ***(**1)формуладан фойдаланиб, оддий Риман интегралидаги бўлаклаб интеграллаш формуласининг бир умумлашмасини келтирамиз: $u(x)$ва$v(x)$функциялар $[a, b]$ кесмадаабсолютинтегралланувчибўлиб,*

$$U(x) = U(a) + (R)\int_{a}^{x} u(t)dt \text{ва} V(t) = V(a) + (R)\int_{a}^{x} v(t)dt$$

бўлсин.

Ундақуйидаги формула ўринлибўлади:

$$(R)\int_a^b U(x)v(x)dx = \big(U(x)V(x)\big)\Big|_a^b - (R)\int_a^b V(x)\cdot u(x)dx. \qquad (3)$$

(1) формуладан ва бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$(R)\int_a^b U(x)v(x)dx = (S)\int_a^b U(x)dV(x) =$$

$$= \big(U(x)V(x)\big)\Big|_a^b - (R)\int_a^b V(x)\cdot u(x)dx.$$

<u>Изох.</u>*(3)формуладаги*$u(x)$*ва*$v(x)$*функциялар*$U(x)$*ва*$V(x)$*функцияларн ингҳосиласибўлмаса хам, ҳосилавазифасинибажаряпти. Агар*$u(x), v(x) \in C[a,b]$*бўлса, унда*

$$U'(x) = u(x) \text{ва} V'(x) = v(x)$$

*бўлиб, (3)формула оддийбўлаклабинтеграллашформуласигаайланибқолади***.**

6-Мисол. Ҳисобланг:

$$\int_0^3 xd([x]-x).$$

Ечиш:Агар эътибор қилинса, интегралловчи $g(x) = [x] - x$функция $0 \le x \le 3$оралиқда камаймайдиган$[x]$ ва ўсувчи xфункцияларнинг айирмаси сифатида берилган. Демак, Стилтьес интегралининг таърифига кўра,

$$\int_0^3 xd([x]-x) = \int_0^3 xd[x] - \int_0^3 x\,dx$$

ўринли.

$0 \le x \le 3$ оралиқда $[x]$ функция $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$нуқталарда узилишга эга, x функция эса берилган оралиқда узлуксиз. Демак, интегрални ҳисоблаш қоидасига кўра,

$$\int_0^3 xd([x]-x) = f(1) + f(2) + f(3) - \frac{9}{2} = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

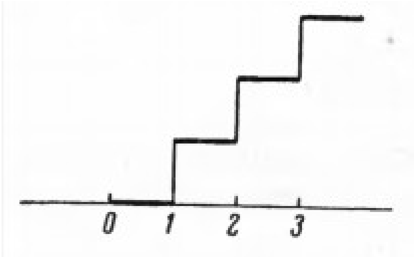
6-Мисол. Ҳисобланг

$$\int_0^\infty f(x)d\varphi(x),$$

агарда:а) $\varphi(x) = [x]$, агар $x \ge 0$бўлса, $\varphi(x) = 0$, агар $x < 0$ бўлса.

б)$\varphi(x) = \begin{cases} [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right], \text{ агар} x \geq 0, \\ 0, \text{ агар} x < 0. \end{cases}$

Ечиш.а)$\varphi(x)$функциянинг графиги қуйидагича:



Интеграл ҳисоблашнинг асосий формуласидан фойдалансак,

$$\int_0^\infty f(x)d\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

б) Бу функциянинг графиги қуйидагича:

Юқоридаги мисолга ўхшаш ҳолда ечамиз:

$$\int_0^\infty f(x)d\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} f(n)$$

эканлиги топилади. Иккала ҳолатда қаторларни абсолют яқинлашувчи деб фараз қилинади.

Мустақил ишлаш учун мисоллар

1) $\int_0^1 f(x)dg(x)$ Стилтьесинтегралиниҳисобланг, бунда:

$f(x) = x^2$, $g(x) = x$, агарда $0 \leq x < \frac{1}{2}$ ва $g(x) = \frac{1}{x}$, агарда $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

2) $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз, $g(x)$функция эса шу оралидачекливариациягаэгабўлсин. Уолда$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dg(t)$ функция чекли вариацияга эга бўладими?

3) Агар $f(x)$функция $c \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз, $g(x)$ функция эса $[a, b]$ оралиқда c нуқтадан ташқари барча нуқталарда нолга тенг бўлса,

$$\int_a^b f(x)dg(x) = 0$$ бўлишиниисботланг.

4) $f(x)$функцияснутадаузлуксизва $\int_a^b f(x)dg(x)$ интеграл мавжуд бўлсин.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)d\tilde{g}(x), \qquad \text{бунда}\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c, \\ A \neq g(c), & x = c \end{cases}$$

интеграл мавжуд бўлиб, қиймати

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

га тенг бўлишини исботланг.

5) Ҳисобланг:

$a)\int_0^{\pi}(x-1)d(\cos x\,\mathrm{sgn}x)$; $b)\int_{-\pi}^{\pi}(x+2)d(e^x\,sgn(sinx))$; c) $\int_{-1}^{3} xd\varphi(x)$,

бунда $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} x = -1, \\ 1, & \text{агар} -1 < x < 2, \\ -1, & \text{агар } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

$d)\int_{-2}^{2} x\,d\varphi(x)$, $\int_{-2}^{2} x^2\,d\varphi(x)$, $\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,d\varphi(x)$,

бунда $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & \text{агар } -2 \leq x \leq -1, \\ 2, & \text{агар } -1 < x < 0, \\ 3, & \text{агар} 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

$$e)\int_0^{\pi} sinxdg(x), \text{буерда} g(x) = \begin{cases} x, & \text{агар} 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{агар} x = \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{агар} \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

$$i)\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}(x^2+x-sinx)\,d\varphi(x), \text{буерда} \varphi(x) = \begin{cases} ctgx, x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right); \\ sinx - 2, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right); \\ ctgx - 2, x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right]. \end{cases}$$

$$j)\quad \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2x+6)cos2x\, d\varphi(x),$$

буерда$\varphi(x) = \begin{cases} cosx + sinx - 2, & x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right); \\ cosx + sinx, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right); \\ cosx + sinx + 2, & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right); \\ cosx + sinx + 5, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$

§ 6. Стилтьес интегралининг геометрик маъноси ва интегрални баҳолаш

9.Стилтьес интегралининг геометрик маъноси

$f(t)$ ва $g(t)$ функциялар бирор $\mathrm{T} = [a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1)$f(t) \in C(T)$ ва $f(t) > 0$;

2) $g(t)$ функция Т да қатъий ўсувчи бўлиб, узилиш нуқталарига (сакрашларга) эга бўлиши ҳам мумкин.

Ушбу

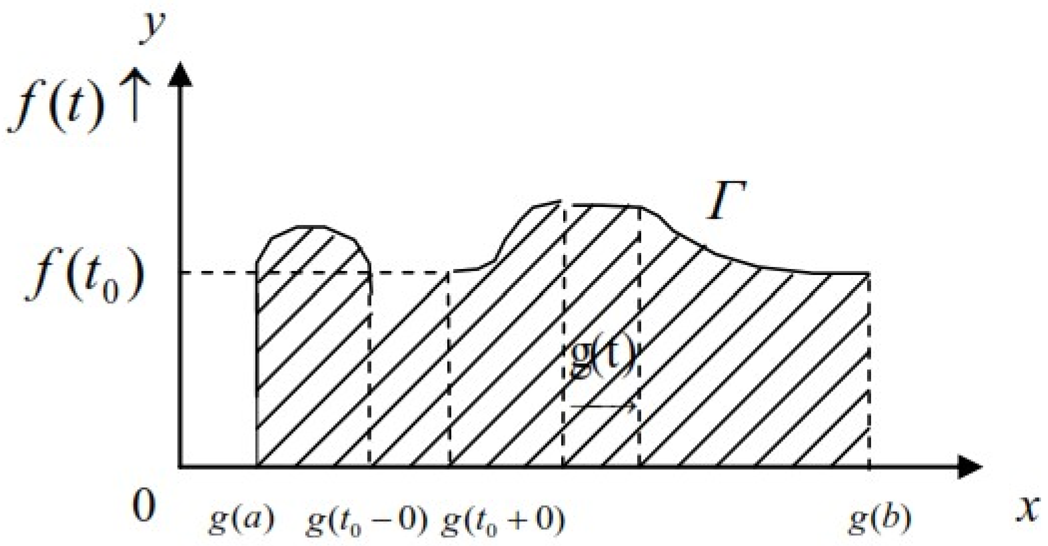
$$\int_a^b f(t)dg(t) \qquad (1)$$

Стилтьес интегралини қараймиз.Қуйидаги

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t), \mathrm{t} \in T. \end{cases} (2)$$

параметрик тенгламалар текисликда бирор γчизиқни, умуман олганда узилишга эга бўлган чизиқни аниқлайди.

Агар бирор $t = t_o$нуқтада $g(t)$ функция сакрашга эга бўлса, $g(t_o - 0) < g(t_o + 0)$ битта$f(t_o)$нуқтанимосқўяди.
$(g(t_o - 0), f(t_o))$ ва $(g(t_o + 0), f(t_o))$нуқталарникесмаёрдамидатуташтирилса, букесмаОХўқигапараллелбўладиваγчизиқниt_oнуқтадагисакрашиданқутиламиз.
Бошқасакрашнуқталаридаҳамшужараённиамалгаоширсак, γузлуксизчизиққаайланади. ҲосилбўлганчизиқниГдеббелгилаймиз (чизмада келтирилган).



Энди (2)интегралнингқийматиюқориданГчизиқ, қуйиданOXўқи, ёнёқлариданх $x = g(a)$ва $x = g(b)$вертикалчизиқларбиланчегараланганэгричизиқлитрапециянингюзигатенгбўлишиникўрамиз.

$T = [a, b]$ кесманиушбу

$$a = t_0 < t_1 \dots t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = b$$

тенгсизликларниқаноатлантирувчиихтиёрийнуқталарёрдамидақисмларгаажратамиз.

Натижада OX ўқидаги $[g(a), g(b)]$ кесма ҳам $g(a) < g(t_1) < \dots g(t_k) < g(t_{k+1}) < \dots < g(b)$ нуқталар ёрдамида қисмларга ажралади.

$$m_k = \inf_{[t_k, t_{k+1}]} \{f(t)\} \text{ва } M_k = \sup_{[t_k, t_{k+1}]} \{f(t)\}$$

деббелгилаб,Стилтьес – Дарбунингқуйиваюқорийиғиндиларинитузамиз;

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(t_k), \bar{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \, \Delta g(t_k)$$

Буийиғиндиларнингқийматларимосравишдаберилганшаклнингичидаётганвауниўзичигаолганкўпбурчакларнингюзаларигатенгбўлади.
(1)интеграл яқинлашувчи бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S} = \lim_{n\to\infty} \bar{S} = \mathrm{S} = \int_a^b f(t)dg(t)$$

бўлади.

10. Стилтьес интеграли учун ўрта қиймат ҳақида теорема.Фараз қиламиз, $[a, b]$ кесмада берилган $f(x)$ функция чегараланган бўлсин:

$$m \le f(x) \le M.$$

Теорема 1.*Агар* $[a, b]$ *кесмада берилган* $f(x)$ *функция монотон ўсувчи бўлиб,*

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

Стилтьес интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \mu \cdot [g(b) - g(a)] \qquad (3)$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда $m \leq \mu \leq M$.

Исбот.$[a, b]$ кесмани оралиқларга бўлиб, Стилтьеснинг интеграли йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \Delta g(x_k).$$

Бутенгликва$m \leq f(x) \leq M$тенгсизликданфойдалансак, қуйидагитенгсизликкакеламиз:

$$m \cdot [g(b) - g(a)] \leq \sigma \leq M[g(b) - g(a)].$$

Бу тенгсизликда $\lambda \to 0$ да лимитга ўтиб,

$$m \cdot [g(b) - g(a)] \leq (S)\int_a^b f(x)dg(x) \leq M \cdot [g(b) - g(a)]$$

ёки

$$\mathrm{m} \leq \frac{\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b) - g(a)} \leq M$$

эканлигини топамиз.

Агар

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b) - g(a)}$$

деб белгиласак, $m \leq \mu \leq M$ бўлиб, охирги тенгликдан исбот қилишимиз керак бўлган (3) тенглик келиб чиқади.

Натижа.*Агар 1-теоремада* $f(x) \in C[a, b]$ *бўлса, унда шундай* $c \in [a, b]$ *нуқта топиладики,*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(c) \cdot [g(b) - g(a)]$$

тенглик бажарилади.

Теорема 2.*Агар* $a < b$*ва*

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

мавжуд бўлса, бунда $g(x)$ *функция* $[a,b]$*ораликда камаймайдиган функция, у ҳолда*

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|dg(x)$$

бўлади.

Теорема 3. *Агар* $g(x)$ *функция* $[a,b]$*ораликда камаймайдиган функция бўлиб,* $0 \leq f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ *бўлса, у ҳолда*

$$0 \leq \int_a^b f(x)dg(x)$$

бўлади.

Теорема 4. *Агар* $a < b$ *ва*

$$\int_a^b f_1(x)dg(x),\ \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

лар мавжуд ҳамда $g(x)$ *функция* $[a,b]$*ораликда камаймайдиган функция ва* $f_1(x) \leq f_2(x)(a \leq x \leq b)$бўлса, *у ҳолда*

$$\int_a^b f_1(x)dg(x) \leq \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

бўлади.

Теорема 5.*Агар* $a < b$ *ва*$g(x)$ *функция* $[a,b]$*ораликда камаймайдиган функция ҳамда*

$$\int_a^b f(x)dg(x) \text{ ва } \int_a^b h(x)dg(x) \text{ лар}$$

мавжуд бўлсин, бунда $f(x)$ва$h(x)$ - *ҳақиқий функциялар, у ҳолда*

$$\left[\int_a^b f(x)h(x)dg(x)\right]^2 \leq \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dg(x) \int_a^b \left(h(x)\right)^2 dg(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ушбу теоремалар ўрта қиймат теоремасининг исботи каби исботланади. Қўшимча маълумотларниЭ.Х.Гохманнинг «Интеграл Стилтьеса и его приложения»[9]китобидантопиш мумкин.

11. Стилтьес интегралини баҳолаш.Стилтьес интегралини ўрганиш жараёнида амалиётда $f(x)$ функция узлуксиз ва $g(x)$ функция чекли вариацияга эга бўлган ҳол муҳим аҳамиятга эга. Бундай ҳолда, Стилтьес интегралини қуйидагича баҳолаш мумкин.

Теорема 6. *Агар* $f(x) \in C[a, b]$ *ва* $g(x)$ *чекли вариацияга эга функция бўлса, унда*

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le M \cdot V \quad (4)$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда $M = \max_{a \le x \le b} |f(x)|,\ V = \bigvee_a^b g(x).$

Исбот. Стильтес интегралини тузиб, уни баҳолаймиз:

$$|\sigma| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta g(x_k)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|\,|\Delta g(x_k)| \le M \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)|$$

$$\le M \bigvee_a^b g(x) = MV\,.$$

Бундан (4) нинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Теорема 7. $f(x) \in C[a, b],\ g(x)$ – *чекли вариацияли функция ва* $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ бўлсин. Унда $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta > 0, \gamma > \delta$ бўлганда

$|\sigma - I| \le \varepsilon \cdot \bigvee_a^b g(x)$ ***бўлади***.

Исбот. Стилтьес интеграли йиғиндисини тузиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k)dg(x), \\ I &= \int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dg(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$|\sigma - I| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(\xi_k) - f(x)]dg(x) \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x) \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} g(x).$$

Теорема шартига кўра $f(x) \in C[a, b]$ бўлгани учун Кантор теоремасига асосан $\forall \varepsilon > 0$ учун $\exists \delta > 0, \gamma > \delta$ бўлганда $\omega_k < \varepsilon$ бўлади. Бундан

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) = \varepsilon \cdot \bigvee_{a}^{b} g(x)$$

бўлиши келиб чиқади.

§ 7. Стилтьес интеграли белгиси остидалимитга ўтиш ва дифференциаллаш

12. Стилтьес интеграли белгиси остидалимитга ўтиш

Теорема 1. *Фараз қилайлик,* $[a,b]$*кесмада* $\{ \mathrm{f_n(x)} \}$ $(\mathrm{n}=1,2,\dots)$*функционал кетма-кетлик берилган бўлиб,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

бўлсин. Агар

1) $f_n(x) \in C[a,b]$;

2)$n \to \infty$*да* $f_n(x) \to f(x)$*;*

3)$g(x)$ *–чекливариацияли функция бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x) \qquad (1)$$

бўлади.

Исбот.$n \to \infty$да $f_n\,(x) \to f\,(x)$бўлганиучун$\forall \varepsilon > 0$олингандаҳам шундай$n_0 \in N$сон топиладики,$\forall n > n_0$ вабарча$x \in [a,b]$ ларучун

$$|f_n\,(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизликбажарилади.

Ундаолтинчи параграфдаги (4)тенгсизликкакўра,$\forall n > n_0$бўлгандақуйидагимуносабатниҳосилқиламиз:

$$\left| \int_a^b f_n\,(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x) \right| =$$

$$= \left| \int_a^b [f_n\,(x) - f(x)]dg(x) \right| \leq \varepsilon \bigvee_a^b g(x)$$

Бундан$\varepsilon \to 0$ да (1) нинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Теорема 2. *Фаразқилайлик,* $[a,b]$*кесмада* $f(x)$*функциява* $\{g_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$*функционалкетма-кетликберилганбўлиб, қуйидагишартларбажарилсин:*

1)$f(x) \in C[a,b]$;

2)$g_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$– *чекливариациялифункциялар;*

3) $\bigvee_a^b g(x) \le \bigvee$, ($n$=1,2, . . .),

4) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$.

Уолда $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$ бўлади.

Исбот. Авваллимитфункция$g(x)$нингчекливариациягаэга бўлишиникўрсатамиз. Бунингучун $[a, b]$ кесманиушбу

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

тенгсизликларниқаноатлантирувчиихтиёрийнуқталар ёрдамидақисмларгаажратиб, $\forall n \in N$учун

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g_n\,(x_{k+1)} - g_n(x_k)| \le \bigvee_a^b g_n(x) \le \bigvee$$

тенгсизликкаэгабўламиз. Бутенгсизликда$n \to \infty$далимитгаўтамиз:

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g_n\,(x_{k+1)} - g_n(x_k)| \le \bigvee_a^b g(x) \le \bigvee,$$

бундан келиб келиб чиқадики, $g(x)$ –чекливариацияли функция.

Энди интеграл остига лимитга ўтиш мумкинлигиниисботлаймиз. Стилтьесйиғиндисинитузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\,\Delta g(x_k), \sigma_n = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\,\Delta g_n(x_k).$$

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, оралиқни шундай кичик бўлакларгабўламизки, $f(x)$ функциянинг ҳар бир оралиқдаги тебраниши$\omega_k < \varepsilon$бўлади.

Унда бешинчи параграфдаги 7-теоремага кўра, қуйидаги тенгсизликларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} \left|\sigma - \int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \varepsilon \bigvee, \\ \left|\sigma_n - \int_a^b f(x)dg_n(x)\right| \le \varepsilon \bigvee, \end{cases} \qquad (2)$$

Иккинчи томондан, $n \to \infty$ да $\sigma_n \to \sigma$ демак, $\exists n_0 \in N$, $\forall n > n_0$ да

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon \qquad (3)$$

бўлади.

Унда $n > n_0$ бўлганда (2) ва (3)тенгсизликлардан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left|\int_a^b f(x)dg_n(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \left|\int_a^b f(x)dg_n(x) - \sigma_n\right| +$$

$$|\sigma_n - \sigma| + \left|\sigma - \int_a^b f(x)dg(x)\right| < \varepsilon\bigvee + \varepsilon + \varepsilon\bigvee < \left(2\bigvee + 1\right)\varepsilon.$$

Теорема исботланди.

13. Стилтьес интеграли интеграли остида дифференциаллаш

Теорема 3.*Агар* $f(x,y)$ *функция ва унинг* y*бўйича*$f_y'(x,y)$ *хусусий ҳосиласи чекли* $R\{a \le x \le b; c \le y \le d\}$ *тўғри тўртбурчакда узлуксиз,* $g(x)$ *функция* $[a,b]$ *оралиқда чегараланган бўлса, у ҳолда*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dg(x) = \int_a^b f_y'(x,y)dg(x)\ (c \le y \le d) \qquad (4)$$

ўринли бўлади.

Исбот.cваd нуқталарда мос равишда ўнг ва чап ҳосилалар тушунилади.

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dg(x) \quad (c \le y \le d)$$

деб белгилаймиз.

$[c,d]$кесмадан y_0ва y нуқталарни олайлик.

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}dg(x) = \int_a^b f_y'(x,\eta)dg(x),$$

бунда $\eta \in (y,y_0)$. Бу қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b f_y'(x,y_0)dg(x) = \int_a^b \{f_y'(x,\eta) - f_y'(x,y_0)\}dg(x).$$

Теорема шартига кўра, $f_y'(x,y)$функция R тўғритўртбурчакда текис узлуксиз. Шунинг учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\eta > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \eta$, бўлганда тенгликнинг ўнг томонидаги ифоданинг абсолют қиймати $\frac{\varepsilon}{\vee_g(a,b)}$дан кичик бўлади. У ҳолда

$$\left|\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b f_y'(x,y_0)dg(x)\right| < \varepsilon(|y - y_0| < \eta),$$

бўлади. Лимитнинг таърифига кўра

$$\int_a^b f_y'(x,y_0)dg(x) = \lim_{y\to y_0}\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} = F'(y_0).$$

y_0 нуқта $[c,d]$кесманинг ихтиёрий нуқтаси, демак теорема исботланди.

Келгусида муҳим бўлган бир қатор теоремаларни келтирамиз.

Теорема 4.*Агар* $f(x,y)$ *функция ва унинг*$f_y'(x,y)$*хусусий ҳосиласи* $\tilde{R}\{a \le x < b; c \le y \le d\}$ *да узлуксиз ва чегараланган,* $a, свad$ *лар чекли сонлар,* $g(x)$ *эса* $[a,b]$ *сегментда чекли вариацияга эга ва* b *нуқтада чап томондан узлуксиз бўлса,* (4)*тенглик ўринли бўлади.*

Теорема 5.*Агар* $f(x,y)$ *функция ва хусусий ҳосиласи* $f_y'(x,y)\tilde{R}\{a \le x < b; c \le y \le d\}$ *да узлуксиз ва чегараланган,* $a, свad$ *лар чекли сонлар,* $g(x)$ *эса* $[a,b)$ *яриминтервалда абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)g(x)dx = \int_a^b f_y'(x,y)g(x)d\,x$$

ўринли бўлади.

Ушбу иккита теорема юқорида келтирилган асосий теорема каби исботланади.

§ 8. Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални Стилтьес интегралига келтириш

14. Эгри чизиқ тушунчаси. Олий математиканинг дастлабки қисмини ўрганиш мобайнида ўқувчи эгри чизиқ ва унинг тенгламалари, эгри чизиқнинг узунлиги каби маълумотлар, шунингдек баъзи эгри чизиқнинг тасвирлари билан танишган. Эгри чизиқли интеграллар назарияси (шунингдек, кейинчалик ўрганиладиган комплекс анализ курсида) эгри чизиқларнинг муҳимлигини эътиборга олиб, улар ҳақида баъзи маълумотларни келтириш лозим топилди. Ҳозирги замон математикасида эгри чизиқ турлича таърифланган бўлиб, улар орасида Жордан томонидан келтирилган таъриф бир мунча табиийроқ ҳисобланади. У эгри чизиқни нуқтанинг узлуксиз ҳаракати натижасида қолдирган изи сифатида қараган.

$\varphi(t), \psi(t)$ функциялар$[\alpha,\beta]$кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциялардан тузилган ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad (1)$$

бунда $\alpha \le t \le \beta$системани қарайлик.

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, x ва y ларни шу текисликдаги бирор M нуқтанинг координаталари сифатида қараймиз: $M = M(x,y)$. Равшанки M нуқта $[\alpha,\beta]$ дан олинган t га боғлиқ. Айни пайтда, M нуқта аргумент t нинг (1) акслантиришдаги акси (образи), t нинг ўзи бу акслантиришдаги M нуқтанинг асли (прообрази) бўлади. Шундай қилиб, (1) акслантириш ёрдамида $[\alpha,\beta]$кесманинг акси текисликда ушбу

$$\breve{AB} = \{(x,y): x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha,\beta]\}$$

тўпламни ҳосил қилади. Бу $\breve{AB}$ тўпламга текисликдаги эгри чизиқ дейилади.

Демак, эгри чизиқ$[\alpha,\beta]$ да узлуксиз бўлган 2 та $\varphi(t)$ва$\psi(t)$ функциялар ёрдамида таърифланар экан. Одатда эгри чизиқнинг бундай тасвирланиши уни параметрик кўринишда берилиши дейилади. Бунда t параметр.

Масалан:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases} \tag{2}$$

бу ерда $r > 0$, $0 \le t \le 2\pi$система текисликда маркази координаталар бошида радиуси r га тенг бўлган айланани ифодалайди. Демак, (2) айлананинг параметрик тенгламаси.

Баъзи ҳолларда эгри чизиқнинг таърифини ифодалайдиган $\breve{AB}$ тўплам мураккаб бўлиб, ҳатто у биз тасаввур этадиган эгри чизиққа бутунлай ўхшамай қолиши мумкин. Масалан, Пеано томонидан $[0,1]$кесмада узлуксиз бўлган шундай $x(t), y(t)$ функциялар тузилган: $\breve{AB}$тўплам учлари $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ нуқталарда бўлган квадратдан иборат бўлади. Бошқача қилиб айтганда «эгри чизиқ» квадратнинг ҳар бир нуқтасидан ўтади. Бу «эгри чизиқ» шу билан характерланадики, бунда параметрнинг чексиз кўп турли қийматларида $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар бир хил қийматни қабул қилади.

Айтайлик

$\{(x,y): x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha,\beta]\}$(3)

тенгламалар ситемаси бирор эгри чизиқни аниқласин, бунда $x(t), y(t)$ функциялар $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз. Агар$t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$да $t_1 \neq t_2$ бўлганда

$$x(t_1) = x(t_2)$$
$$y(t_1) = y(t_2)$$

бўлса, у ҳолда эгри чизиқнинг$\big(x(t_1), y(t_1)\big)$ ва$\big(x(t_2), y(t_2)\big)$ нуқталари унинг каррали нуқталари дейилади (бу нуқтада эгри чизиқ ўзини ўзи кесиб ўтади). Каррали нуқталарга эга бўлмаган эгри чизиқ содда Жордан эгри чизиғи дейилади. Бу ҳолда параметр t нинг турли $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$қийматла-рига мос келувчи эгри чизиқнинг$\big(x(t_1), y(t_1)\big)$, $\big(x(t_2), y(t_2)\big)$ нуқталари турли бўлади. Масалан, $[a,b]$кесмада узлуксиз бўлган$y = f(x)$ функция графиги содда Жордан эгри чизиғи бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases} \tag{4}$$

бунда $y = f(x), a \le x \le b$дейилса, унда турли $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$ учун $x_1 \neq x_2 (x_1 = t_1, x_2 = t_2)$ бўлиши равшан. Агар (3) система билан аниқланаган эгри чизиқда параметр t нинг турли $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$ қийматларига мос келувчи эгри чизиқнинг$\big(x(t_1), y(t_1)\big)$, $\big(x(t_2), y(t_2)\big)$ нуқталари ҳам турлича бўлиб,

$$x(\alpha) = x(\beta),$$
$$y(\alpha) = y(\beta)$$

бўлса, эгри чизиқ содда ёпиқ эгри чизиқ дейилади.

Масалан, ушбу

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} a > 0, b > 0, 0 \le t \le 2\pi$$

система билан аниқланган эгри чизиқ (эллипс) содда ёпиқ эгри чизиқ бўлади.Келгусида асосан Жордан (тўғриланувчи) чизиқлари қаралади.

15. Иккинчитурэгричизиқлиинтеграл ва Стилтьесинтеграли ўртасидаги боғланиш. Айтайлик,

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dx \text{ёки} \int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dy \qquad (5)$$

2-тур эгри чизиқли интеграл берилган бўлиб, $\breve{AB} = \{(x, y)\colon x = \varphi(t), y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]\}$ бўлсин ва tпараметр α дан β га қараб ҳаракатланганда унгамос $(\varphi(t), \psi(t))$нуқта Aдан Bга қараб ҳаракатлансин.$[\alpha, \beta]$ кесмани ушбу

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

нуқталар ёрдамидаги ихтиёрий бўлинишини олиб, A_k=$(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ деб белгилаймиз.$\forall \tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ нуқталарга мос келувчи нуқтани M_k деб белгилаб

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y) dx$$

учун интеграл йиғиндини тузсак, у қуйидаги кўринишга эгабўлади:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\, \Delta(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f\,[\varphi(\tau_k), \psi_k(\tau_k)] \Delta\varphi(t_k)$$

Табиийки, тенгликнинг ўнг томонидаги ифода Стилтьес интеграли учун интеграл йиғинди бўлади ва бу тенгликдан $\lambda \to 0$ да қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y) dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] d\varphi(t). (6)$$

Худди шу каби ушбу

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y) dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] d\psi(t) \qquad (7)$$

тенглик ҳам ўринли.

(6) ва (7)тенгликлардан (5)эгри чизиқли интегралнинг мавжудлиги ҳақида қуйидаги теорема келиб чиқади:

Теорема.*Агар* $f\ (x,y)$*функция узлуксиз ва* $\varphi(t)$*(ёки* $\psi(t)$*) функция чекли вариацияли функция бўлса, у ҳолда (1)интеграл мавжуд бўлади.*

Хусусан, $\overset{\frown}{AB}$*эгри чизиқ тўғриланувчи,* $P(x,y)$ *ва* $Q(x,y)$ *функциялар узлуксиз бўлса, унда*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

интеграл яқинлашувчи бўлади ҳамда қуйидаги тенгликбажарилади:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (S)\int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t),\psi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)$$

$$+\ (S)\int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t),\psi(t)]\mathrm{d}\psi(t). \qquad (8)$$

Энди иккинчи тур эгри чизиқли интегралларни Стилтьес интегралига келтириб ҳисоблашга оид мисоллар ечамиз. Мисоллардаги функция ва эгри чизиқлар теорема шартларини қаноатлантирганлиги учун, теорема шартларини бажарилишини қайта-қайта айтиб ўтмаймиз.

1-мисол.

$$\int_{C} ydx - xdy$$

эгри чизиқлиинтегрални ҳисобланг, бундаCэгри чизиқ $x = \cos t\,, y = \sin t\,, t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ параметрик кўринишда берилган.

Ечиш. (8) формуладан фойдаланамиз:

$$\int_{\mathrm{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (S)\int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t),\psi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)$$

$$+\ (S)\int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t),\psi(t)]\mathrm{d}\psi(t).$$

Берилган функцияларни формулага қўямиз:

$$\int_{C} ydx - xdy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \big(y(t)dx(t) - x(t)dy(t)\big)$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(sin\, t \frac{d(cos\, t)}{dt} - cos\, t \frac{d(sin\, t)}{dt} \right) =$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sin\, t\, (-\sin t) - \cos t \cos t) dt = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

2-мисол.

$$\int_{C} ydx - xdy$$

эгри чизиқлиинтегрални ҳисобланг, бундаCчизиғи (0,0) ва (2,8) нуқталарни туташтирувчи $y = x^3$ эгри чизиқдан иборат.

Ечиш. Интегрални ҳисоблаш учун (4) ва (8) формулалардан фойдаланамиз. Шунда қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} P\big(x, f(x)\big)dx + \int_{\alpha}^{\beta} Q\big(x, f(x)\big)df(x).$$

$y = x^3$ ва$dy = 3x^2dx$ларни интегралга қўйсак

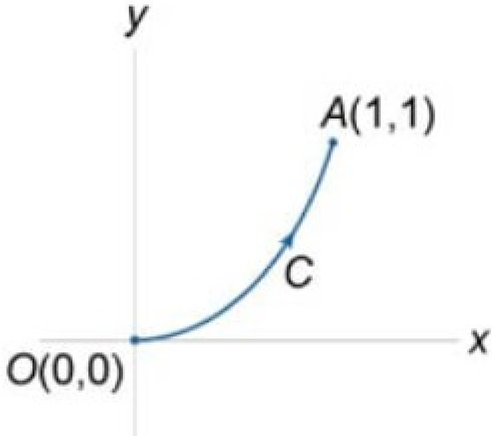
$$\int_{C} xdy - ydx = \int_{0}^{2} x\, 3x^2dx - x^3dx = \int_{0}^{2} 2\, x^2dx = 2\left[\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2}\right] = 8.$$

3-мисол.

$$\int_{C} ydx + xdy$$

эгри чизиқлиинтегрални ҳисобланг, бундаCчизиғи O(0,0) ва A(1,1) нуқталарни туташтирувчи $y = x^2$ эгри чизиқдан иборат.

Ечиш.Бу масалани ечиш учун C чизиқни чизиб оламиз:



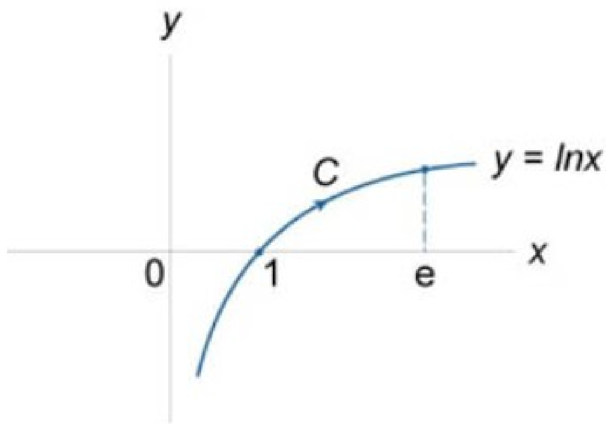
$y = f(x) = x^2$ тенгламани (8) формулага қўйиб,топамиз:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta P(x, f(x))dx + \int_\alpha^\beta Q(x, f(x))df(x)$$

$$\int_C ydx + xdy = \int_0^1 (x^2 + x \cdot 2x)\, dx = \int_0^1 3x^2 dx = 3\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1\right] = 1.$$

4 – мисол. $\int_C \frac{y}{x}dx + dy$ эгричизилиинтегралниисобланг, бунда Cэгри чизиғи $y = \ln x$ чизиғи бўйлаб ҳисобланади, бунда $1 \le x \le e$.

Ечиш.Бу масалани ечиш учун C чизиқни чизиб оламиз:



$y = \ln x$бўлганлиги учун $dy = \frac{dx}{x}$.

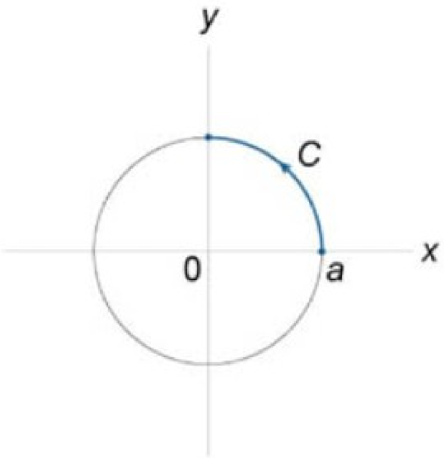
$$\int_C Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta P(x, f(x))dx + \int_\alpha^\beta Q(x, f(x))df(x)$$

формулага асосан ечимни топамиз:

$$\int_C \frac{y}{x}dx + dy = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{dx}{x}\right) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^e \frac{dx}{x} = \int_1^e \ln x d\ln x + \int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\left(\frac{(\ln x)^2}{2} + \ln x\right)\Big|_1^e\right] = \frac{(\ln e)^2}{2} + \ln e - \frac{(\ln 1)^2}{2} + \ln 1 = \frac{3}{2}.$$

5 – мисол. $\int_C x^2 dx - xydy$ эгричизилиинтегралниисобланг, бунда Cэгри чизиғибиринчи квадрантда жойлашган радиуси a га тенг бўлган айланани ёйи бўлиб, соат стрелкасига тескари йўналишда айланади.

Ечиш.Бу масалани ечиш учун C чизиқни чизиб оламиз:



Айлана ёйининг тенгламаси $y = \sqrt{a^2 - x^2}$дан иборат. Демак,

$$dy = d\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Биз эгри чизиқни соат стрелкасига қарши йўналишда айланганлигимиз учун, интеграллаш чегарасини a дан 0 гача оламиз:

$$\int_C x^2dx - xydy = \int_a^0 x^2dx - x\sqrt{a^2 - x^2}\left(-\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx$$

$$= \int_a^0 2x^2dx = 2\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^0\right] = -\frac{2a^2}{3}.$$

Мустақил ишлаш учун мисоллар

1) Қуйидаги эгри чизиқлиинтегралларниCбўйлаб ҳисобланг, бунда йўл $A(0,0)$ нуқтадан $B(1,2)$ нуқтага қараб босиб ўтилади:

$$\int_C xdy - ydx, \text{бунда}$$

а) C - AB– кесма; б) C - $y = x^2$параболани ёйи; в) C - ACBсиниқ сизиқ, $C(0,1)$.

2) $\int_C \sin x\, dx + cos3ydy$ эгричизилиинтегралниисобланг, бунда C - $y = \sin 2x$эгри чизиғдан иборат, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

3) $\int_C (x^2 + 2y)dx - (2x^2 + 5xy - y^2)dy$

эгри чизиқлиинтегрални ҳисобланг, бундаCэгри чизиғи$y > 0$текислигида жойлашган радиуси a га тенг бўлган айланани ёйи бўлиб, соат стрелкасига тескари йўналишда айланади.

4)Қуйидаги эгри чизиқлиинтегралларни x нинг ўсиб бориш йўналишида ҳисобланг:

а) $\int_C \cos x\, dx - \sin y\, dy$,

бунда C- $y=-x$ тўғри чизиқдаги кесма, $-2 \leq x \leq 2$.

б) $\int\limits_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$,

бунда C - $y=x^2$параболанинг ёйи, $-1 \leq x \leq 1$.

в) $\int\limits_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$,

бунда C - $y=1-|x-1|$чизиқнинг кесмаси, $0 \leq x \leq 2$.

5) Қуйидаги эгри чизиқлиинтегралларниCбўйлаб t параметрнинг ўсиб бориш йўналишида ҳисобланг:

а) $\int\limits_C (2a-y)dx+(y-a)dy$,

бунда C - циклоида ёйи, $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

б) $\int\limits_C \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$,

бунда C астроида ёйи, $x=a\cos^3 t$, y=$a\sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Назорат саволлари

1. Стилтьес интеграли тушунчаси.

2. Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари ҳамда уларнинг хоссалари.

3. Стилтьес интегралининг мавжудлик шарти.

4. $f(x) \in C[a,b]$ ва $g(x)$ ўсувчи бўлса, $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ мавжудэканлиги исботлансин.

5. $f(x)$функция $[a,b]$ да R-интегралланувчи, $g(x)$функцияЛипщиц шартинианоатлантирса, $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ мавжудэканлигиисботлансин.

6. $f(x)$функция $[a,b]$да R –интегралланувчи, $g(x)=c+\int\limits_a^x \varphi(t)dt$ ($\varphi(t)$функция$[a,b]$даабсолютинтегралланувчи)бўлса, $\int_a^b f(x)dg(x)$ мавжудэканлиги исботлансин.

7. Стилтьес интегралининг хоссалари.

8. $\int_c^b f(x)dg(x)$ва $\int_a^c f(x)dg(x)$ (a < b < c)интегралларнингмавжуд бўлишидан $\int_a^b f(x)dg(x)$ интегралнингмавжудбўлиши келибчиишишартэмаслигини кўрсатинг.

9. Стилтьес интеграли учун бўлаклаб интеграллашформуласи.

10. $f(x)$функция $[a,b]$да R-интегралланувчи,

$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt,$ бундаφ(t)функция$[a,b]$даабсолютинтегралла − нувчибўлса, $\int_a^b f(x)dg(x)$ Стилтьесинтегралиниисобланг.

11. Стилтьес интегралини ҳисоблаш.

12. Агар$f(x) \in C[a,b]$бўлса, $\int_a^b f(x)d\rho(x)$исоблансин.

13. Агар$f(x) \in C[a,b]$бўлса, $\int_a^b f(x)d\rho(x-c)$исоблансин.

14. Агар$f(x) \in C[a,b]$ булса, $\int_a^b f(x)d\rho(c-x)$исоблансин.

15. Стилтьес интегралини умумий ҳолда ҳисоблаш.

16. Бўлаклаб интеграллаш формуласининг умумлашмаси.

17. Стилтьес интегралининг геометрик маъноси.

18. Стилтьес интеграли учун ўрта қиймат ҳақидагитеорема.

19. Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

20. Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални Стилтьесинтегралига келтириш.

IIIБОБ.Ортогоналфункцияларвақаторлар

Ушбу бобда ортогонал системалар вақаторлар ҳамда математикфизика тенгламаларини интеграллашда учрайдиган махсусфункциялардан бири-сферик функциялар синфиниўрганиш билан шуғулланамиз.

XVIII асрдан бошлаб Л.Эйлер, Д.Бернулли, А.Лежандр, П.Лаплас, Ф.Бессель ва бошқа олимларнинг математика, астрономия, механика ва физика (планеталар ҳаракати, мембрана ва тор тебраниши ҳамда шу кабилар) фанлари бўйича борган илмий изланишларида ортогонал функциялар системаси ва функцияларни улар бўйича ёйиш ишлари пайдо бўла бошлаган. Хусусан, Ж.Фурье, Ж.Штурм ва Ж.Лиувилнинг математик физика тенгламалари учун чегаравий масалаларни ечиш бўйича изланишларида, П.Чебышевнинг итерполяциялаш ва ва моментлар муаммоси, Д.Гильбертнинг интеграл тенгламаларни ечиш, А.Лебегнинг ўлчамлар назарияси ва интеграллар бўйича олиб борган илмий изланишларида учрайди.

Ортогонал қаторлар бўйича фаол изланишлар XX асрдан бошлаб математик физика, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, квант механикаси ва турли техник масалаларни ҳал қилиш бўйича олиб борилган илмий ишларда қайд қилинган.

Айтиш жоизки, В.Стеклов томонидан ортонормалланган системаларнинг ёпиқлиги масаласи қўйилган. Бу масала сферик функциялар, Штурм-Лиувилл операторининг хос функциялари, Эрмит, Лаггер,П.Чебышев, Лежандрнинг ортогонал кўпҳадлар системалари учун ижобий ҳал қилинган.

Ф.Рисс ва Э.Фишерлар томонидан ихтиёрий ортонормал функциялар системаси ва сонлар кетма-кетлиги учун Парсеваль тенглиги бажарилиши ва у системанинг L_2фазосида ёпиқлиги ва тўлиқлигини эквивалентлиги исботланган.

Функцияларни деярли ҳамма жойда яқинлашувчи қатор кўринишида тасвирлаш бўйича жуда кўп илмй изланишлар олиб борилган. 1957 йилда ўлчанадиган функцияга ихтиёрий тўлиқ ортонормал функциялар системаси орқали ўлчов бўйича яқинлашадиган қаторнинг мавжудлиги исботланган.

§ 1. Ортонормалфункциялар ва Грамм детерминанти

1. Ортонормал системалар. Чизиқли фазо ва скаляр кўпайтма тушунчалари функционал анализнинг умумий курсидан маълум.

Таъриф 1. *Скаляр кўпайтма киритилган ҳар қандай чизиқли фазога* ***Гильбертолди фазоси*** *дейилади.*

Айтайлик R - Гильбертолди фазоси берилган бўлсин.

Таъриф 2. *Агар* $x \in R$ *ва* $y \in R$ *элементлар учун* $(x, y) = 0$*тенглик бажарилса, у ҳолда х ва у элементлар* ***ортогонал дейилади*** *ва* $x \perp y$ *каби белгиланади.*

Таъриф 3. *Агар R фазонинг* $\{x_\alpha\}$, $x \in R$ *(А-индексларнинг бирор тўплами) элементлари тўплами берилган бўлиб, ундаги ихтиёрий 2 та элементлар ўзаро ортогонал бўлса,* $\{x_\alpha\}$ *система* ***ортогонал система*** *дейилади. Ундан ташқари ҳар бир элементнинг нормаси 1 га тенг, яъни* $x_\alpha = 1$, $\alpha \in \mathrm{A}$, *бўлса. Унда* $\{x_\alpha\}$*-**ортонормал система** деб аталади.*

Агар $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ система ортогонал ва барча $\alpha \in$ Алар учун $x_\alpha \neq 0$ бўлса, унда бу системани **«нормаллаштириш»** мумкин.

Хақиқатан ҳам берилган системанинг ҳар бир элементини унинг нормасига бўлиш ёрдамида янги ортонормалланган

$$\left\{\frac{x_a}{\|x_a\|}, \alpha \in \mathrm{A}\right\}$$

системаниҳосилқиламиз.

Лемма 1.*Агар R фазонинг*$\{x_\alpha, \alpha \in \mathrm{A}\}$*(А-индексларнингбирортўплами) элементларсистемасиортогоналбўлиб, барча*$\alpha \in$ *Аларучун*$x_\alpha \neq 0$*бўлса, уҳолдабусистемачизиқлиэрклисистемабўлади.*

Фараз қилайлик, баъзи

$$x_{\alpha_k}, \alpha_k \in A, k = 1,2, \dots n$$

элементлар учун

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0$$

тенглик бажарилсин. Фиксирланган kучун $(k = 1,2, \dots, n)$ тенгликнинг иккала томониниx_{α_k}га скаляр кўпайтириб,

$$\left(\lambda_k x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) = 0 \qquad (1)$$

бўлишини топамиз, чунки системанинг ортогоналлик шартига кўра $j \neq k$да $(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) = 0$. Шартга кўра, $x_{\alpha_k} \neq 0$ бўлгани учун $(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) \neq 0$ва (1)тенгликка кўра $\lambda_k = 0$, $k = 1,2, \dots, n$.бу эса берилган $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ системанинг чизиқли эркли эканлигини билдиради.

Лемма 2. *Агар R фазонинг,*$x_1, \dots x_n$*элементлари системаси учун ушбу*

$$\mathrm{G}(x_1, \dots x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1)(x_1, x_2) \dots (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1)(x_2, x_2) \dots (x_2, x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (x_n, x_1)(x_n, x_2) \dots (x_n, x_n) \end{vmatrix} (2)$$

детерминантнинг қиймати 0*га тенг бўлса, унда берилган система чизиқли боғлиқ бўлади.*

$\mathrm{G}(x_1, \dots x_n)$*детерминантга берилган системанинг* ***Грамм детерминанти*** *дейилади.*

Исбот. nта λ_i, $i = 1,2, \dots n$,номаълумли nта чизиқли тенгламалар системасини қараймиз:

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n, x_i) = 0, \qquad i = \overline{1, n} (3)$$

Бундан

$$\lambda_1(x_1, x_i) + \lambda_2(x_1, x_i) + \cdots + \lambda_n(x_1, x_i) = 0, \qquad i = \overline{1, n}$$

бўлишини топамиз.

Бу системанинг детерминанти Грамм детерминантининг транспонирланганига тенг ва шартга кўра унинг қиймати 0 га тенг. Бир жинсли тенгламанинг асосий детерминанти 0 га тенг бўлгани учун (3)система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади, яъни$\lambda_1, \ldots \lambda_n$ларнинг ҳаммаси бир вақтда 0 га тенг бўла олмайди. Энди (3) тенгликни λ_iга кўпайтирамиз ва барча $i\ (i = 1, \ldots, n)$ лар бўйича тенгликларни қўшиб чиқамиз:

$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = 0$. Бундан

$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.

Буерданушбутенгликни,

яъни,$x_1, \ldots x_n$системанингчизиқлибоғлиқэканлигиниҳосилқиламиз.

1-мисол. Грамм детерминантидан фойдаланиб, [0,3] оралиқда $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^x$функцияларни чизиқли боғлиқликка текширинг.

Ечиш. Олдин берилган функциялар учун Грамм детерминантини умумий кўринишда ёзиб оламиз ва уларни формулага қўйиб, алмаштиришлар бажарамиз:

$$\mathrm{G}(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & (y_1, y_3) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & (y_2, y_3) \\ (y_3, y_1) & (y_3, y_2) & (y_3, y_3) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \int_0^3 1 \cdot 1dx & \int_0^3 1 \cdot xdx & \int_0^3 1 \cdot e^x dx \\ \int_0^3 x \cdot 1dx & \int_0^3 x \cdot xdx & \int_0^3 x \cdot e^x dx \\ \int_0^3 e^x \cdot 1dx & \int_0^3 e^x \cdot xdx & \int_0^3 e^x \cdot e^x dx \end{vmatrix}.$$

Кўриниб турибдики, бош диагоналга нисбатан симметрик жойлашган элементлар ўзаро тенг. Бош диагоналнинг юқорисида жойлашган элементларнинг қийматларини топамиз:

$$\int_0^3 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{9}{2};\ \int_0^3 e^x dx = e^x|_0^3 = e^3 - 1;\ \int_0^3 x \cdot e^x dx = (xe^x - e^x)|_0^3$$
$$= 2e^3 + 1.$$

Бош диагоналда жойлашган элементлар:

$$\int_0^3 dx = 3 - 0 = 3;\ \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9;\ \int_0^3 e^{2x} dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^3 = \frac{e^6 - 1}{2}.$$

Натижаларни Грамм детерминантига қўямиз ва детерминантни ҳисоблаймиз:

$$G(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \int_0^3 dx & \int_0^3 xdx & \int_0^3 e^x dx \\ \int_0^3 xdx & \int_0^3 x^2 dx & \int_0^3 xe^x dx \\ \int_0^3 e^x dx & \int_0^3 e^x x dx & \int_0^3 e^{2x} dx \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & \frac{9}{2} & e^3 - 1 \\ \frac{9}{2} & 9 & 2e^3 + 1 \\ e^3 - 1 & 2e^3 + 1 & \frac{e^6 - 1}{2} \end{vmatrix}$$

Бундан $G(y_1, y_2, y_3) = \frac{3e^6}{8} - 3e^3 - \frac{195}{8} \neq 0$, демак $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^x$ функциялар $[0,3]$ оралиқда чизиқли боғлиқ эмас.

2-мисол. Грамм детерминантидан фойдаланиб, $[-2,5]$ оралиқда $y_1 = 15x + 12$, $y_2 = 10x + 8$ функцияларни чизиқли боғлиқликка текширинг.

Ечиш. Грамм детерминантини тузиб оламиз ва ҳисоблаймиз:

$$G(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \int_{-2}^5 y_1^2 dx & \int_{-2}^5 y_1 y_2 dx \\ \int_{-2}^5 y_2 y_1 dx & \int_{-2}^5 y_2^2 dx \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \int_{-2}^5 (15x + 12)^2 dx & \int_{-2}^5 (15x + 12)(10x + 8) dx \\ \int_{-2}^5 (10x + 8)(15x + 12) dx & \int_{-2}^5 (10x + 8)^2 dx \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 14763 & 9842 \\ 9842 & 19684/3 \end{vmatrix} = 0.$$

$G(y_1, y_2) = 0$, демак $y_1 = 15x + 12$, $y_2 = 10x + 8$ функциялар $[-2,5]$ оралиқда чизиқли боғлиқ.

3-мисол. $y_1 = 1,\ y_2 = sinx,\ y_3 = cosx,\ y_4 = sin2x, y_5 = cos2x, \dots y_{2n} = sin\,nx,\ y_{2n+1} = cos\,nx$функцияларни $[-\pi, \pi]$ оралиқда чизиқли боғлиқликка текширинг.

Грамм детерминантини биринчи қатори ва биринчи устунида y_1 нинг қолган барча функцияларга кўпайтмаси жойлашган. Яъни, биринчи қатор ва биринчи устунда қуйидаги интеграллар бор:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} sinxdx,\ \int_{-\pi}^{\pi} cosxdx,\ \int_{-\pi}^{\pi} sin2xdx,\ \int_{-\pi}^{\pi} cos2xdx,\ \int_{-\pi}^{\pi} sin3xdx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos3xdx, \dots \int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx,\quad \int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx.$$

Биринчи интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Қолган барча интегралларнинг кўринишибир хил, яъни:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\,kx\,dx\text{ёки } \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx,\quad k \in N.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;\ \int_{-\pi}^{\pi} sin\,kx\,dx = \frac{\cos kx}{x}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Биринчи қатор ва биринчи устуннинг биринчи элементидан ташқари барчаси нолга, биринчи элемент эса 2π тенг.

Бош диагоналда

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_i\,y_j dx = \int_{-\pi}^{\pi} y_i^2\,dx,\qquad i = 1,2, \dots n,$$

яъни (биринчи элементдан ташқари)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx,\quad \int_{-\pi}^{\pi} sin^2\,kx\,dx$$

каби интеграллар жойлашган.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx)dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin^2\,kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx)dx = \pi.$$

Грамм детерминантининг қолган элементлари

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1x \cdot \sin k_2x\,dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1x \cdot \cos k_2x\,dx \text{ёки } \int_{-\pi}^{\pi} \sin k_1x \cdot \sin k_2x\,dx$$

кўринишга эга. $\cos k_1x \cdot \sin k_2x$ тоқ функция, демак

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1x \cdot \sin k_2x\,dx = 0.$$

Қолган интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1x \cdot \cos k_2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k_1x - k_2x) + \cos(k_1x + k_2x))\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k_1 - k_2)x + \cos(k_1 + k_2)x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k_1 - k_2)x}{k_1 - k_2} + \frac{\sin(k_1 + k_2)x}{k_1 + k_2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin k_1x \cdot \sin k_2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k_1x - k_2x) - \cos(k_1x + k_2x))\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k_1 - k_2)x - \cos(k_1 + k_2)x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k_1 - k_2)x}{k_1 - k_2} - \frac{\sin(k_1 + k_2)x}{k_1 + k_2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Грамм детерминантининг бош диагоналида жойлашган элементларидан ташқари барча элементлари нолга тенг экан. Бош диагоналнинг биринчи элементи 2π, қолган элементлари π га тенг.

$$G(y_1, y_2, \dots y_n) = \begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0\dots & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0\dots & 0 & \pi \end{vmatrix} = 2\pi^{2n+1}.$$

Демак, $G(y_1, y_2, \dots y_n) = 2\pi^{2n+1} \neq 0$ бўлганлиги учун қаралаётган функциялар $[-\pi, \pi]$ оралиқда чизиқли боғлиқсиз.

2. Тригонометрик функциялар системаси. 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \dots$, $\cos nx$, $\sin nx$. ...тригонометрик функциялар системаси ортогонал қаторларни ўрганишда муҳим аҳамият касб этади. Шу сабабли бу функциялар системасини чуқурроқ ўрганамиз. Грамм детерминанти орқали юқорида мазкур тригонометрик функцияларсистемасини чизиқли боғлиқсиз эканлигини кўрсатдик. Энди бошқа усулда ушбу

$$1,\ cosx,\ sinx,\ cos\,2x,\ sin\,2x, \ldots,\ cosnx,\ sinnx \ldots .(4)$$

тригонометрик функциялар системаси$L_2[-\pi;\pi]$фазода ортогонал функциялар системаситашкил қилишини исботлаймиз ва улардан ортонормал функциялар системасини тузамиз.

Исбот.

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} sinmx\, sinnxdx,\ I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} cosmx\, cosnxdx,\ I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} sinmx\, cosnxdx$$

интегралларни ҳисоблаймиз.

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} sinmx\, sinnxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)]dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin(m-n)\,x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\,x}{m+n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right].$$

Агар $m \neq n$бўлса,

$$I_1 = \left[\frac{\sin(m-n)\,\pi - \sin(m-n)\,(-\pi)}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\,\pi - \sin(m+n)\,(-\pi)}{m+n}\right]$$

$$= \frac{\sin(m-n)\,\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\,\pi}{m+n} = 0.$$

$m = n$бўлганда эса,

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 n\,x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - cos2nx)dx = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{sin2nx}{2n}\right)_{-\pi}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{sin2n\pi}{2n} - (-\pi) - \frac{\sin(-2n\pi)}{2n}\right] = \pi.$$

Демак

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} sinmx\, sinnxdx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

Шунга ўхшаш I_2 ва I_3ларни ҳисоблаймиз:

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} cosmx\, cosnxdx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} sinmx\, cosnxdx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

Бундан келиб чиқадики,(4)тригонометрик функциялар системаси ортогонал системани ташкил қилади.

$m = n$ бўлганда I_1 ва I_2лардан фойдаланиб,

$$\|sinnx\| = \sqrt{\pi}, \qquad \|cosnx\| = \sqrt{\pi}, \qquad n = 1,2,\dots$$

эканлигини топамиз. Демак, (4)ортогонал системага мос келувчи ортонормал система ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots$$

кўринишга эга бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1) Грамм детерминанти ёрдамида қуйидаги функцияларни чизиқли боғлиқликка текширинг:

а) $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = x^3$;

б) $y_1 = 10x + 1,\ y_2 = 7x + 6$;

в) $y_1 = 1,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^4$;

г) $y_1 = x,\ y_2 = \sin x,\ y_3 = e^{2x}$.

2) a, b, c ва d ларнинг қандай қийматларида бу $y_1 = ax + b,\ y_2 = cx + d$ система чизиқли боғлиқ бўлади ва қандай қийматларида чизиқли боғлиқ бўлмайди.

§ 2. Ортогонал кўпҳадлар ва улар орқали айрим функцияларниқаторга ёйиш

3. Ортогонал кўпҳадлар. Ушбу параграфдабир қатор ортогонал кўпҳадлар ва улар ёрдамида айрим функцияларни қаторга ёйилиши бўйича мисоллар келтирамиз.

Эрмит кўпҳади

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\ n = 0,1,2,3,\dots$ - Эрмит кўпҳади бўлиб, ўзининг e^{-x^2} вазний функцияси билан $(-\infty, +\infty)$ интервалда ортогоналдир:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

Айрим ҳолларда альтернатив таърифдан фойдаланилиб, вазний функция сифатида $e^{-\frac{x^2}{2}}$ қаралади. Бу функция асосан эҳтимоллар назариясида фойдаланилади.

Лаггер кўпҳади

$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n},\ n = 0,1,2,3,\dots$бу Лаггер кўпҳади бўлиб, ўзининг e^x вазний функцияси билан $[0, +\infty)$ интервалда ортогоналдир:

$$\int_0^{+\infty} e^x L_m(x)L_n(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Чебышевкўпҳади

$T_n(x) = \cos(narccosx)$– бу Чебышевбиринчи тур кўпҳади бўлиб, ўзининг $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ вазний функцияси билан $[-1,1]$ интервалда ортогоналдир:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0. \end{cases}$$

Лежандр кўпҳади

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad n = 1,2, \dots$$

бу Лежандр кўпҳади бўлиб, $[-1,1]$ интервалда ортогоналдир:

$$\int_{-1}^{1} e^x P_m(x)P_n(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

4. Функцияларни ортогонал кўпҳадлар қаторига ёйиш

1-мисол.$f(x) = Ax^2 + Bx + C$функцияни $(-\infty, +\infty)$ ораликда Фурье-Эрмит қаторига ёйинг.

Ечиш.Эрмит функциясини кўринишидан фойдаланамиз:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

Номаълум коэффициентлар усулини қўллаймиз:

$Ax^2 + Bx + C = c_0H_0(x) + c_{1_1}(x) + c_2\, H_2(x).$

Эрмит кўпҳадини тенгликка қўйиб, x нинг бир хил даражаларининг олдидаги коэффициентларини тенглаштирамиз:

$$Ax^2 + Bx + C = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 2x + c_2 \cdot (4x^2 - 2),$$

$$Ax^2 + Bx + C = c_0 + 2c_1x + 4c_2x^2 - 2c_2,$$

бундан

$$\begin{cases} 4c_2 = A, \\ 2c_1 = B, \\ c_0 - 2c_2 = C, \end{cases}$$

$$c_0 = C + \frac{A}{2},\ c_1 = \frac{B}{2}, c_2 = \frac{A}{4}.$$

Демак,

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C = \left(C + \frac{A}{2}\right)H_0(x) + \frac{B}{2}H_1(x) + \frac{A}{4}H_2(x).$$

2-мисол.$f(x) = x^p,\ p \geq 1$ функцияни $[0, \infty)$ ораликда Фурье-Лаггер қаторига ёйинг.

Ечиш. Ёйилма қуйидаги умумий формула ёрдамида ёзилади:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x).$$

c_n коэффициентларни ҳисоблаймиз.

$$c_0 = \int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^p\, e^{-x}dx = \Gamma(n+1) = p!,$$

бу ерда Эйлернинг Г – гамма функцияси. $n \geq 1$ лар учун:

$$c_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^p \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}dx$$

$$= \frac{1}{n!}\left[x^p \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}}\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} p x^{p-1} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}}dx\right].$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!}p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)\int_0^{\infty} x^p e^{-x}dx =$$

$$\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{p!}{(p-n)!}\Gamma(p+1) = \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{(p!)^2}{(p-n)!},$$

агарда $1 \leq n \leq p$ бўлса.

Агар $n \geq p$бўлса, $c_n = 0$ бўлади.

Демак, берилган функциянинг Фурье-Лаггер қаторига ёйилмаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$f(x) = x^p = p! + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (p!)^2}{n!\,(p-n)!} L_n(x).$$

$L_0(x) = 0$эканлигини инобатга олсак, ечимни қуйидаги компакт кўринишида ёзишимиз мумкин:

$$f(x) = x^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (p!)^2}{n!\,(p-n)!} L_n(x).$$

Жавобни $p = 2$ да текшириб кўрамиз. У ҳолда

$$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2!)^2}{n!\,(2-n)!} L_n(x) = 2L_0(x) - 4L_1(x) + 2L_2(x).$$

Лаггер кўпҳадларини

$$L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = 1 - x, \qquad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$$

ёйилмага қўйиб, айниятни оламиз:

$$x^2 = 2\cdot 1 - 4(1-x) + 2\left(1 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) \equiv x^2.$$

3-мисол. $f(x) = x^3$ функцияни $[-1,1]$ оралиқда Фурье-Чебышев қаторига ёйинг.

Ечиш. Умумий ҳолда берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x^3 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x).$$

c_n коэффициентни аниқлаш учун Чебышев кўпҳадини $[-1,1]$ оралиқда $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ вазний функцияси билан ортогоналлигидан фойдаланамиз.

Бунинг учун тенгликни иккала томонини $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функцияга кўпайтриб, $[-1,1]$ оралиқда интеграллаймиз.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x) \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$f(x) = x^3$ тоқ функция ва симметрик оралиқда интераллаётганлигимиз учун тенгликнинг чап томони нолга тенг:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Ўнг томонни эса ўзгартирамиз:

$$\int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x) \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x) \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= c_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right].$$

Охирги интеграл остидаги функциянинг суратига $T_0(x) = 1$ функцияни кўпайтирсак, Чебышев кўпҳадини ортогоналлигидан

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

бўлишини кўрамиз.

Демак,

$$c_0 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (arcsinx)|_{-1}^{1} = arcsin1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Бундан $c_0 = 0$. c_n коэффициентлар ҳам шунга ўхшаш топилади.

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x)$$

ифодани

$$\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

га кўпайтирамиз ва -1 дан 1 га интеграллаймиз.

$$\int_{-1}^{1} x^3 \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x)\right) \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] = \frac{\pi}{2} c_m.$$

Бунда Чебышев кўпҳадини ортогоналлигидан фойдаланилди. $T_m(x)$ функцияни ўрнига ифодасини қўйиб, $x = cost$алмаштириш бажарамиз. Шунда

$$t = \arccos x, \qquad dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ва интеграллаш чегаралари

$x = -1$ да$t = \pi$ва$x = 1$ да$t = 0$ бўлади.

У ҳолда

$$c_m = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x^3 \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} cos^3 t \, cosmt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{4} (3cost + cos3t) cosmt \, dt$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi} cost \, cosmt \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} cos3t \, cosmt \, dt.$$

Интегралларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{\pi} cost \, cosmt \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(t - mt) + \cos(t + mt)] dt =$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sin(m-1)\,t}{m-1} + \frac{\sin(m+1)\,t}{m+1} \right) \Bigg|_0^{\pi} \right] = 0, \text{ агар} m \neq 1.$$

$m = 1$ ҳол учун:

$$\int_0^{\pi} cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{\pi} \right] = \frac{\pi}{2}.$$

Шунга ўхшаш ҳолда иккинчи интегрални ҳам ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{\pi} cos3t\, cosmt\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(3t-mt)+\cos(3t+mt)]dt =$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin(m-3)\,t}{m-3}+\frac{\sin(m+3)\,t}{m+3}\right)\Big|_0^{\pi}\right] = 0, \text{агарда} m \neq 3.$$
$m = 3$ ҳол учун:
$$\int_0^{\pi} cos^2\, 3tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 6t)dt = \frac{1}{2}\left[\left(t+\frac{\sin 6t}{6}\right)\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Юқоридагилардан келиб чиқадики, $1,\ cost,\ cos2t,\ cos3t, \dots cosmt, \dots$ функциялар тўплами $[0,\pi]$ оралиқда ортогонал ва
$$c_m = \begin{cases} 0, & m \neq 1{,}3 \\ \frac{3}{4}, & m = 1 \\ \frac{1}{4}, & m = 3. \end{cases}$$

Демак, $f(x) = x^3$ функцияни $[-1{,}1]$ оралиқда Фурье-Чебышев қаторига ёйилмаси
$$f(x) = x^3 = \frac{3}{4}T_1(x) + \frac{1}{3}T_3(x)$$
бўлади.

4-мисол. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ поғонали функцияни Фурье-Лежандр қаторига ёйинг.

Ечиш. Ёйилма қуйидаги умумий формула ёрдамида ёзилади:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x).$$
$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)dx$$
$$= \frac{2n+1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!}\left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Big|_0^1\right],$$
$n = 1,2,3 \dots.$

c_n коэффициентларни ҳисоблаймиз. $n = 0$да $P_0(x) = 1$ эканлиги маълум. У ҳолда
$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$
$c_n,\ n \geq 1$ коэффициентларни топиш учун

$$\left(\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right)\Bigg|_0^1$$

ифоданинг қийматини топамиз. Маълумки, $x = 1$бу ифода барча $n \geq 1$ лар учун нолга тенг. Функциянинг $x = 0$ даги қийматини топиш учун, Ньютон бином формуласини қўллаймиз.

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = \frac{d\left(\sum_{m=0}^{\infty} C_n^m \, (-1)^m x^{2n-2m}\right)^{n-1}}{dx^{n-1}}$$

$$= \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n+1}{2}} [C_n^m(-1)^m(2n-2m)(2n-2m-1)\cdots$$

$$\cdot(-2m+n+2)x^{n-2m+1}].$$

Бундан кўриниб турибдики, $x = 0$ да йиғинди n жуфт бўлганда нолга тенг бўлади. n тоқ бўлганда эса

$$C_{2k+1}^{k+1}(-1)^m 2k(2\kappa-1)(2k-2)\cdots 3\cdot 2 = C_{2k+1}^{k+1}(-1)^m(2k)!$$

бўлади.

Бу ерда $x \to 0$да ва $n = 2k+1$, $m = k+1$бўлганда$x^{n-2m+1} = x^{2k+1-2(k+1)+1} = x^0 = 1$ тенгликдан фойдаландик. mва n нинг бошқа қийматлари учун қаторнинг бошқа ҳадлари нолга тенг бўлади.

Қолган ҳадлар

$c_{2k} = 0$,

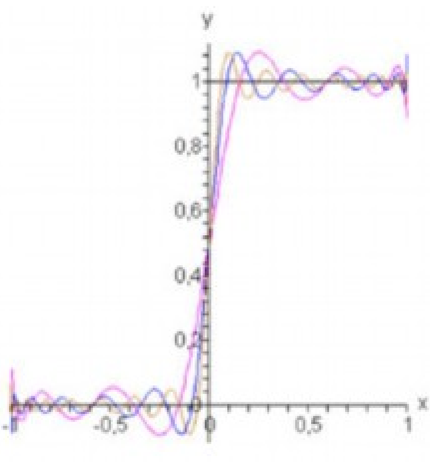
$$c_{2k+1} = \frac{4k+3}{2^{2k+2}(2k+1)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{(k+1)!\,k!}(-1)^k(2k)! = \frac{(-1)^k(4k+3)(2k)!}{2^{2k+2}(k+1)!\,k!}$$

бўлади.

Демак, берилган функцияни Фурье-Лежандр қаторига ёйилмаси қуйидаги формула билан ёзилади:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4k+3)(2k)!}{2^{2k+2}(k+1)!\,k!}P_{2k+1}(x).$$

$n = 5$, $n = 10$ ва$n = 15$ бўлганда берилган поғонали функцияга Фурье-Лежандр қатори билан яқинлашиш аппрокцимацияси Mathcad дастури ёрдамида ҳисобланиб, графиги чизилган.



Юқорида келтирилган кўпҳадларнинг амалий аҳамияти катта эканлигини инобатга олиб, келгуси параграфларда Лежандр кўпҳадини тўлиқроқ ўрганамиз.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. $f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$функцияни $(-\infty, +\infty)$ оралиқда Фурье-Эрмит қаторига ёйинг.

2. $f(x) = a\sin x + b\cos(2x + 1)$ функцияни $[0, \infty)$ оралиқда Фурье-Лаггер қаторига ёйинг.

3. $f(x) = x^5$функцияни $[-1,1]$ оралиқда Фурье-Чебышев қаторига ёйинг.

4. $f(x) = |x|$функцияни $[-1,1]$ оралиқда Фурье-Лежандр қаторига ёйинг.

§ 3. Лежандр кўпҳадлари

5. Лежандр кўпҳадлари ҳақида батафсил маълумот. Лежандр кўпҳадлари - ўрта квадратик маънода нолдан фарқланадиган кўпҳаддир. У $[-1,1]$ оралиқда L_2фазода ортогонал кўпҳадлар системасини ташкил қилади. $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3, \dots\}$кўпҳадлардан Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш жараёни орқали Лежандр кўпҳадлари, яъни унинг ортогонал системасини қуриш мумкин.

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] = -\lambda^2 y \text{ёки} (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda^2 y = 0$$

Лежандр тенгламаси дейилади.

Бу тенглама фақат $\lambda^2 = n(n + 1)$, $n = 0,1,2, \dots$да чегараланган ечимга эга бўлади. Ушбу ҳолда тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2 - 1)\frac{dy}{dx}\right] = n(n + 1)y, \qquad n = 0,1,2, \dots$$

Лежандр тенгламаси иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама ҳисобланади. Бу каби тенгламаларнинг ечими иккита хусусий ечимларнинг комбинациясидан иборат. Битта ечим чегараланган, иккинчиси эса $x \to \pm 1$ да чексизга интилади. Агар $y_n(x)$ чегараланган ечим бўлса, у ҳолда $Cy_n(x)$ (C - ихтиёрий ўзгармас) ечим ҳам чегараланган бўлади. Агар $y_n(x) \neq 0$ бўлса, C ни шундай танлаш мумкинки, $Cy_n(x) = 1$ (нормаллаштирилган) бўлади.

Лежандр тенгламасининг чегараланган ечими n даражали кўпҳад бўлишини исботлаш мумкин. Бу кўпҳад Лежандр кўпҳади дейилади ва $P_n(x)$ каби белгиланади.

Таъриф 1. *Қуйидаги*

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (1)$$

тенгликлар ёрдамида аниқланган кўпҳадларга ***Лежандр кўпҳадлари*** *дейилади. Бу Родрига формуласи ҳисобланади.*

Амалиётда кўпинча x ўрнига қутб бурчаги косинуси ёзилади:

$$P_n(cos\theta) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (cos^2\theta - 1)^n}{d(cos\theta)^n}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

(1) формула ёрдамида Лежандр кўпҳадларини ҳисоблаш мумкин:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \ldots P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + \cdots$$

Бундан ташқари, $P_n(x)$ кўпҳад қуйидаги реккурент формула орқали ҳам топилади:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2-1}{n+1}\frac{dP_n}{dx}.$$

Бу формулалардан кўринадики $P_n(x) - n$даражали кўпҳаддир.

$-1 \le x \le 1$ оралиқда бошланғич шартлар

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

эканлигини ҳисобга олиб,Лежандр кўпҳадини

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

реккурент формула орқали ҳам ҳисоблаш мумкин.

Изоҳ: *Банднинг охирида* 15 *гача бўлган* n *лар учун Лежандр кўпҳадларининг кўриниши келтирилган.*

Шунингдек, $-1 \le x \le 1$ оралиқда бошланғич шартлар

$$\frac{dP_1(x)}{dx} = 1, \frac{dP_2(x)}{dx} = 3x, \qquad \frac{dP_n(x)}{dx} = nP_{n-1}(x) + x\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}$$

эканлигини ҳисобга олиб,Лежандр кўпҳади ҳосиласини

$$\frac{d^k P_n(x)}{dx^k} = (2n-1)\frac{d^{k-1}P_{n-1}(x)}{dx^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(x)}{dx^k}$$

реккурент формула орқали ҳисоблаш мумкин. Ҳар бир ҳосила x нинг $n-k$ даражали кўпҳадидан иборат.

Реккурент боғланишларни афзаллиги натижага эришишни тезлаштиради, камчилиги эса катта сонларни айириш-қўшишда ҳисоблаш аниқлигини камайиши эҳтимоллиги мавжудлигидадир.

6. Лежандр кўпҳадларининг хосссалари

1) а.)$P_n(1) = 1$, яъни Лежандр кўпҳади $P_n(x)$ ни коэффициентларини йиғиндиси 1 га тенг;

б.) $P_n(-1) = (-1)^n$;

$$2)\ P_{2n}(0) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{4n-2k}{2n}0^{2n-2k} = \frac{1}{2^n}(-1)^k\binom{2n}{n},$$

бунда $\forall k \neq n$ да $0^{2n-2k} = 0, 0^{2n-2n} = 1$;

3) $n \neq 0, P_{2n}(0) \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$;

4) $\forall x \in [-1{,}1],\ \forall n \in N,\ |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}$

5) жуфт n ларда $P_n(x)$ кўпҳадда x нинг фақат жуфт, тоқ n ларда $P_n(x)$ кўпҳадда x нинг фақат тоқ даражалари қатнашади;

6) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, яъни $P_{2n}(x)$ - жуфт, $P_{2n+1}(x)$ - тоқ функция;

7) $|P_n(x)| \leq 1$агарда $|x| \leq 1$.

8) $[-1{,}1]$ оралиқда $P_n(x) = 0$ тенглама n та турли илдизга эга;

Ҳақиқатан ҳам, $P_n(x)$Лежандр кўпҳадини $-1 \leq x \leq 1$ оралиқда ҳолатини қарайлик. Биринчи хоссага кўра

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n.$$

Маълумки

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

$-1 < x < 1$интервалда

$$\frac{d(x^2-1)^n}{dx}$$

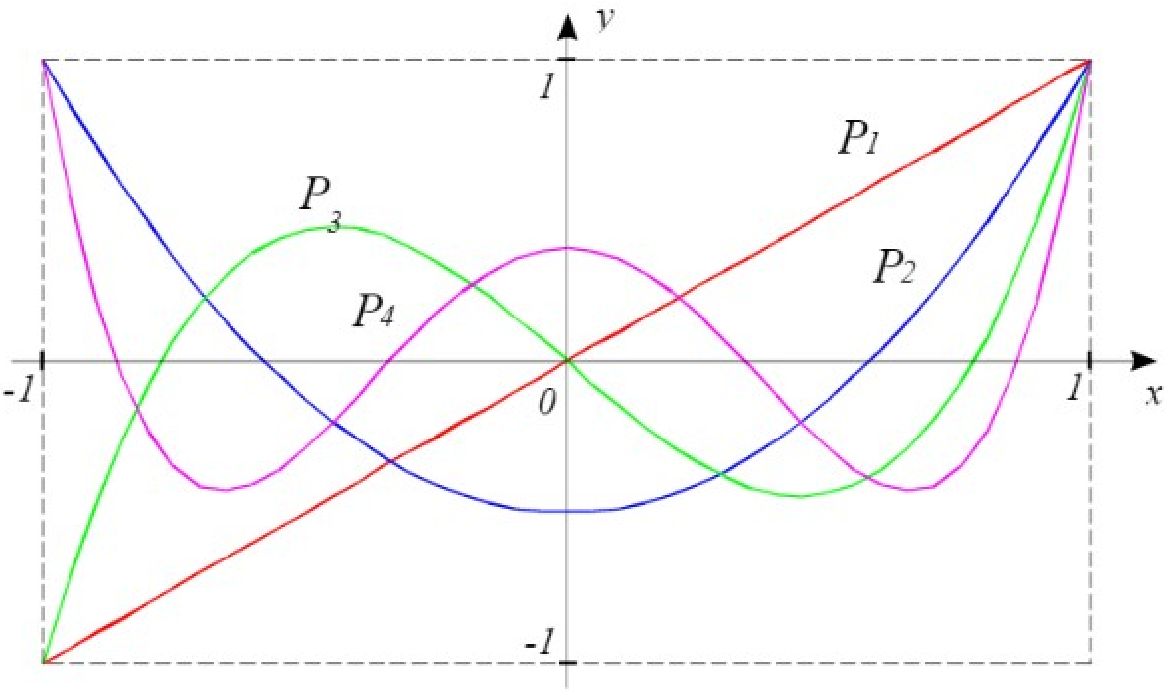
ҳосила $n = 1,2,\ldots$битта оддий (каррали бўлмаган) $x = 0$ илдизга эга. Ролль теоремасига асосан хулоса қиламиз, иккинчи тартибли ҳосила

$$\frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}$$

берилган интервалда иккита оддий (каррали бўлмаган) илдизга эга бўлади.

Демак, $-1 < x < 1$интервалда $P_n(x)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ n та ҳақиқий ва ҳар хил илдизга эга.

$n = \overline{1,4}$ бўлганда $P_n(x)$ кўпҳаднинг $-1 < x < 1$интервалда ўзини қандай тутиши ўрганилиб, графиги келтирилган.



Иккинчи томондан, Лежандр кўпҳадининг илдизлари

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P_n\left(x_i^{(k)}\right)}{P_n'\left(x_i^{(k)}\right)}$$

Ньютоннинг итератив усули ёрдамида ҳам ҳисобланиши мумкин. Бунда i – илдиз $(i = 1,2, \dots n)$ учун бошланғич яқинлашиш $x_i^{(0)} = cos[\pi(4i-1)/(4n+2)]$деб олинади.

9) $\forall n \in N$учун $U_n(x) = (x^2-1)^n$функцияни қарайлик. У ҳолда

$$U_{n+1}'(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0;$$
$$(x^2-1)U_n'(x) - 2nxU_n(x) = 0$$

тенгликлар бажарилади.

7. Лежандр кўпҳадининг ортогоналлиги ва нормаси.Лежандр кўпҳадлари $[-1,1]$ оралиқда ортогонал, яъни

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \qquad \text{агар} n \neq m$$

ҳамда $P_n(x)$кўпҳаднинг нормаси $\frac{2}{2n+1}$ га тенг, яъни

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Лежандр кўпҳадларини ортогоналлигини исботини келтирамиз, яъни системанинг $L_2[1;1]$фазода ортогонал система бўлишини кўрсатамиз; айнан $P_n(x)$–Лежандр кўпҳадининг ихтиёрий m-даражали кўпҳад $(m < n)$ $Q_m(x)$ га ортогонал бўлишини исботлаймиз.

Бунинг учун ушбу

$$\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}$$

ифодани $k=0,1,2,\dots,n–1$ учун $x=–1$ ва $x=1$ нуқталарда нолга айланишини эслатиб ўтамиз.Интегралларни ҳисоблашда бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx =$$

$$= Q_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}dx =$$

$$= -Q'_m(x)\cdot\frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} Q''_m(x)\frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}dx = \cdots$$

$$= (-1)^m Q^{(m)}{}_m(x)\cdot\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)dx = 0, \qquad \mathrm{m} < n,$$

хусусан

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \qquad m \neq n$$

тенглик ўринли бўлади. Бу эса $\{P_n(x)\}$ системанинг ортогонал эканлигини англатади.

Энди Лежандр кўпҳадини нормасиниҳисоблаймиз. Бунинг учун Лежандр кўпҳадини

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x)$$

кўринишда ифодалаб оламиз, бу ерда $Q_{n-1}(x)$- даражаси $(n–1)$ дан катта бўлмаган кўпҳад.$P_n(x)$ кўпҳаднинг даражаси nдан кичик бўлган ихтиёрий кўпҳадга ортогонал бўлиши ва бир неча марта бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \int_{-1}^{1} P_m(x)\left[\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n - Q_{n-1}(x)\right]dx =$$

$$\frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)x^n dx + \int_{-1}^{1} P_n(x)Q_{n-1}(x)dx =$$

$$\frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)x^n dx = \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1}\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}x^n dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}x^n dx =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!}\int_{-1}^{1} xd(x^2-1)^n =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!}\int_{-1}^{1} x^2 d(x^2-1)^n$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!}\cdot\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}dx^3$$

$$= \cdots = \int_{-1}^{1} x^{2n}\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Шундай қилиб,

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

Лежандр кўпҳадлари системасининг ортогоналлигидан унинг *чизиқли эркли* эканлиги келиб чиқади.

Демак $\forall n \in N$учун $P_n(x)$ функциянинг нормаси:

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Лежандр кўпҳадининг нормалланган $\tilde{P}_n(x)$ функцияси норма $\|P_n(x)\|$ билан қуйидагича боғланган:

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x).$$

Кўпҳаднинг қийматлари x нинг конкрет қийматларида реккурент формула орқали топилади. Ҳосилани ҳам x нинг конкрет қийматлари учун ҳосилани ҳисоблаш формуласидан фойдаланиб топиш мумкин.

8. Лежандр кўпҳадининг дастлабки ҳадларини кўриниши. Лежандрнинг биринчи ўнбешта кўпҳади қуйидаги кўринишга эга:

$P_0(x) = 1;$

$P_1(x) = x;$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5);$
$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x);$
$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35);$
$P_9(x) = \frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x);$
$P_{10}(x) = \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63);$
$P_{11}(x) = \frac{1}{256}(88179x^{11} - 230945x^9 + 218790x^7 - 90090x^5 + 15015x^3 - 693x);$
$P_{12}(x) = \frac{1}{1014}(676039x^{12} - 230945x^{10} + 2078505x^8 - 1021020x^6 + 225225x^4 - 18018x^2 + 231);$
$P_{13}(x) = \frac{1}{1024}(1300075x^{13} - 4056234x^{11} + 4849845x^9 - 2771340x^7 + 765765x^5 - 90090x^3 + 3003x);$
$P_{14}(x) = \frac{1}{2048}(5014575x^{14} - 16900975x^{12} + 22309287x^{10} - 14549535x^8 + 4849845x^6 - 765765x^4 + 45045x^2 - 429);$
$P_{15}(x) = \frac{1}{2048}(9694845x^{15} - 35102025x^{13} + 50702925x^{11} - 37182145x^9 + 14549535x^7 - 2909907x^5 + 255255x^3 - 6435x).$

9. Лежандр кўпҳадлари ҳақида қўшимча маълумотлар. Қўшимча равишда қуйидаги формулаларни келтирамиз:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k;$$

$$P_n(x) = \frac{(x+1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k, \qquad x \neq -1;$$
$$P_n(x) = \frac{(x-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k, \qquad x \neq 1.$$

Лежандрнинг қўшилган кўпҳади қуйидаги формула билан аниқланади:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

ёки

$$P_n^m(cos\theta) = sin^m\theta\frac{d^m}{d(cos\theta)^m}P_n(cos\theta).$$

$m = 0$ да $P_n^m(x)$ кўпҳад $P_n(x)$ билан устма-уст тушади.

Лежандрнинг қўшилган кўпҳади

$$(1-x^2)\left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^m(x)\right] + n(n+1)P_n^m(x)\right) = m^2P_n^m(x)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Шу билан бир қаторда айтиш жоизки, ҳар бир $m > 0$лар учун Лежандрнинг қўшилган функциялар системаси $P_n^m(x)$, $n = m, m+1, \dots$ $L_2(-1,1)$ да тўлиқ.

n ва m ларнинг жуфт-тоқлигига боғлиқ ҳолда Лежандрнинг қўшилган кўпҳадлари жуфт ёки тоқ функция бўлиши мумкин: $P_n^m(-x) = (-1)^{n+m}P_n^m(x)$,яъни$P_{2n}(x)$- жуфт функция, $P_{2n+1}(x)$- тоқ функция.

Шу ўринда айтиш лозимки, Лежандр кўпҳадлари (Лежандрнинг қўшилган функциялар системаси билан биргаликда) табиий равишда потенциаллар назариясида вужудга келган. Шарга оид функциялар – r, θ, φ сферик координаталарда (константа аниқлигида) $r^nP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ва $r^nP_n^m(\cos\theta)\,sin\,m\varphi$, бунда $P_n^m(x)$ Лежандрнинг қўшилган кўпҳадлари, R^3да Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. Шунингдек, Лаплас тенгламасини умумий ечимини ифодалаш учун ортогонал базис вазифасини бажаради.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Агар $n \neq 0$ бўлса

$P_{2n}(0) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$бўлишиниисботланг.

2) $\forall x \in [-1,1], \forall n \in N$ лар учун

$$|P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}$$

бўлишини исботланг.

3) $U_n(x) = (x^2-1)^n$функцияни қарайлик. $\forall n \in N$ учун

$$U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0;$$

$$(x^2-1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0$$

реккурент формулалар ўринли эканлигини исботланг.

4) $\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}P_n(x)$ва $\dfrac{d^n}{dx^n}P_n(x)$ниисобланг.

5) Лежандр кўпҳадининг коэффициентларини йиғиндиси бирга тенглигини исботланг.

6) жуфт n ларда $P_n(x)$ кўпҳадда x нинг фақат жуфт, тоқ n ларда $P_n(x)$ кўпҳадда x нинг фақат тоқ даражалари қатнашишини кўрсатинг.

7) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, яъни $P_{2n}(x)$ - жуфт, $P_{2n+1}(x)$ - тоқ функция эканлигини исботланг.

8)$|x| \le 1$да $|P_n(x)| \le 1$тенгсизлик бажарилишини кўрсатинг.

9) Лежандр кўпҳадини ҳосиласи

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{n}{1-x^2}[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]$$

реккурент формула ёрдамида ҳисобланишини исботланг.

§ 4. Ортогоналлаштириш

10. Ортогоналлаштириш жараёни ҳақида маълумот. Фараз килайлик, R Гильбертолди фазоси бўлсин. Қуйидаги масалани кўриб чиқамиз:

Rфазода саноқли элементдан ташкил топган чизиқли эркли

$$\{x_n,\ n = 1,2,...\}$$

система берилган бўлсин. Чекли сондаги чизиқли комбинацияларни амалга ошириш натижасида берилган системадан ортогонал системани ҳосилқилиш лозим бўлсин.

Қуйилган масала ҳар доим ечимга эга бўлиб, у қуйидаги теорема ёрдамида ифодаланади.

Теорема 1. *Фараз қиламиз,*

$\{x_n,\ n = 1,2...\}$**(**1**)**

система R фазонинг чизиқли эркли элементлари системаси бўлсин. Унда R фазонинг шундай

$$\{y_n, y_n \neq 0, n = 1,2,...\}$$

ортогонал системаси топиладики, бу системанинг ҳар бир $y_{n,}$ $n = 1,2,...$, элементи (1) система биринчи n та элементининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади:

$$y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \cdots + \alpha_{n,n}x_n. \qquad (2)$$

(2)кўринишдаги ортогонал $\{y_n\}$ системани ҳосил қилиш, одатда $\{x_n\}$системани **ортогоналлаштириш жараёни** дейилади.

Исбот.$y_1 = x_1$деб оламиз. (1)система чизиқли эркли бўлгани учун, $y_1 \neq 0$бўлади.

Фараз қилайлик, (2)шартни қаноатлантирувчи ўзаро ортогонал бўлган $y_n \neq 0$, $n = 1,2,\dots,k$, $k \geq 1$,элементлар мавжуд бўлсин. Унда барча $y_1,\dots,y_k$элементларга ортогонал бўлганy_{k+1}элементни ушбу

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}y_1 + \beta_{k+1,2}y_2 + \cdots + \beta_{k+1,k}y_k - x_{k+1} \quad (3)$$

кўринишда қидирамиз.

Ортогоналлик шартига кўра,

$$(y_1, y_{k+1}) = \ldots = (y_k\ , y_{k+1}) = 0$$

тенгликлар бажарилиши керак. Бу шартлар ва (3) тенгликдан фойдаланиб,

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1\ , x_{k+1}), \ldots, (y_k\ , y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k\ , x_{k+1})$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликлардан эса

$$\beta_{k+1,i}\ , i = 1,2,\dots,k$$

коэффициентлар бир қийматли топилади.

Энди (3) тенгликдаги коэффицентлар ўрнига унинг қийматларини, $y_1,\dots,y_k$лар ўрнига уларнинг (2) кўринишдаги ифодаларини қўйиб, соддалаштиргандан сўнг

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \dots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1}$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бу тенгликка кўра $y_{k+1} \neq 0$бўлади, чунки акс ҳолда

$$x_1, x_2, \dots x_{k+1}$$

система чизиқли боғлиқ бўлиб қолар эди. Теорема исботланди.

Маълумки, R фазода берилган чизиқли эркли элементлар системасиданортогонал системани қуришда Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш жараёнидан фойдаланилади. Бу жараён қуйидагича амалга оширилади.

nўлчамли R фазода $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ базис берилган бўлсин. Бу базисни ўзгартириб, унинг асосида янги $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ортонормал базис қурамиз. Бунинг учун қуйидаги жараённи амалга оширамиз:

$$g_1 = x_1, \qquad y_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|};$$

$$g_2 = x_2 - (x_2, y_1)y_1, \qquad y_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|};$$

$$g_3 = x_3 - (x_3, y_1)y_1 - (x_3, y_2)y_2, \qquad y_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|};$$

....

$$g_n = x_n - (x_n, y_1)y_1 - \cdots - (x_n, y_{n-1})y_{n-1}, \qquad y_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}.$$

Ушбу қурилган $y_1,\dots,y_n$система ортонормал системани ташкил қилади.

Тасдиқни математик индукция усулини қўллаб исботлаш мумкин:

1) $n = 1$ да тасдиқ ўринли, чунки $y_1 \neq 0$ ва $\|y_1\|$=1. Битта бирлик вектордан иборат система таърифга кўра ортонормал системани ташкил қилади.

2) $n = k$да тасдиқ ўринли бўлсин деб фараз қиламиз.

Яъни $y_1, \dots, y_k$ система ортонормал системани ташкил қилсин.

3) $n = k + 1$бўлсин. Янги g_{k+1} векторни

$$g_{k+1} = x_{k+1} - (x_{k+1}, y_1)y_1 - \dots - (x_{k+1}, y_k)y_k \qquad (4)$$

формула асосида қурамиз.

Агар $g_{k+1} = 0$десак, у ҳолда

$$x_{k+1} = (x_{k+1}, y_1)y_1 + \dots + (x_{k+1}, y_k)y_k$$

бўлиб, $x = (x_1, x_2, \dots x_{k+1})$векторлар системаси чизиқли эркли бўлиб қолади. Бу эса $(x_1, x_2, \dots x_{k+1})$ векторлар системасининг чизиқли эркли деган шартига зид. Демак, $g_{k+1} \neq 0$.

Энди g_{k+1} векторни $y_1, \dots, y_k$ векторларнинг ҳар бирига ортогонал эканлигини кўрсатамиз.Бунинг учун y_i, $i = \overline{1, k}$ векторларни ўзаро ортогонал эканлигини инобатга олиб, (4) ни y_i га кўпайтирамиз:

$$(g_{k+1}, y_i) = (x_{k+1}, y_i) - (x_{k+1}, y_i)(y_i, y_i) = (x_{k+1}, y_i) - (x_{k+1}, y_i) = 0,$$

бунда $(y_i, y_i) = 1$.

Демак, $y_1, y_2 \dots, y_{k+1}$,бунда $y_{k+1} = (g_{k+1})/\|(g_{k+1}\|$ ортонормалвекторлар системасини ташкил қилади, векторларнинг нормаси бирга тенг.

1-мисол.Элементлариxнинг даражаларидан иборат бўлган

$1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n$**(**5**)**

системани қараймиз. Бу система ихтиёрий (чекли ёки чексиз) оралиқда чизиқли эркли бўлади.

Ечиш. Ҳақиқатан ҳам, агар

$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n \equiv 0$ **(**6**)**

бўлса, унда бу айниятни nмарта дифференцияллаш ёрдамида

$$n!\,\lambda_n = 0$$

тенгликни ёки $\lambda_n = 0$эканлигини топамиз.

Унда (6) айният

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1} \equiv 0$$

айниятга айланади ва юқоридаги каби $(n - 1)$марта дифференциаллаш йўли билан $\lambda_{n-1} = 0$бўлиши кўрсатилади. Жараённи давом эттириш натижасида $\lambda_n = \dots = \lambda_n = 0$бўлишини ҳосил қиламиз. Бу эса берилган (5) системанинг чизиқли эркли эканлигини билдиради.

Агар (5) системани $[-1; 1]$ кесмада қараб, унга Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш жараёнини қўлласак, унда даражалари мос равишда $0,1,2,\dots$ га тенг бўлган ортогонал кўпҳадлар системасини ҳосил қиламиз.

Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш жараёни кўп ҳисоблашларни талаб қилади. Ҳисоблаш ишларини камайтириш учун $1,\ x,\ x^2$ чизиқли эркли функциялар системасини $[-1;1]$ кесмада ортогоналлаштириш жараёнини кўрсатамиз.

Белгилаш киритамиз:

$$G_0(x) = 1, G_1(x) = x, G_2(x) = x^2.$$

Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш жараёнига кўра:

1) $P_0(x) = G_0(x) = 1$.

2) Иккинчи қадамга кўра $P_1(x) = G_1(x) - \lambda_{01}P_0(x)$,бунда

$$\lambda_{01} = \frac{\big(G_1(x), P_0(x)\big)}{\|P_0(x)\|^2}.$$

$$\big(G_1(x), P_0(x)\big) = \int_{-1}^{1} t \cdot 1dt = 0, \|P_0(x)\|^2 = \left|\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dt\right| = 2.$$

Демак, $P_1(x) = x$.

3) $P_2(x) = G_2(x) - \lambda_{21}x - \lambda_{20}$, бунда

$$\lambda_{21} = \frac{\big(G_2(x), P_1(x)\big)}{\|P_1(x)\|^2}, \qquad \lambda_{20} = \frac{\big(G_2(x), P_0(x)\big)}{\|P_0(x)\|^2}.$$

$$\big(G_2(x), P_1(x)\big) = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot tdt = 0, \qquad \|P_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} t \cdot t\,dt = \frac{2}{3},$$

бунданкелиб чиқадики $\lambda_{21} = 0$.

$$\big(G_2(x), P_0(x)\big) = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1dt = \frac{2}{3}, \|P_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dt = 2.$$

Бундан

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

эканлигини топамиз.

Демак,

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

ортогонал функциялар системасини туздик.

Агар (5) система учун ҳам$[-1;1]$ кесмада ортогоналлаштириш жараёнини давом эттирсак, унда даражалари мос равишда $0,1,2,\ldots$ га тенг бўлган ортогонал кўпҳадлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

2-мисол.R^3фазода$f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (0,1,1)$, $f_3 = (1,0,1)$ векторлар системасидан ортонормал векторлар системасини тузинг.

Ечиш. Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш жараёнига кўра изланаётган системанинг биринчи элементи$e_1 = f_1 = (1,1,0)$бўлади.

$$e_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = (0,1,1) - \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0}{1^2 + 1^2 + 0}(1,1,0)$$
$$= (0,1,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Энди

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2$$

формуладан фойдаланиб, учинчи элементни топамиз:

$$e_3 = (1,0,1) - \left(\frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Натижага кўра

$$e_1 = (1,1,0), \qquad e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \qquad e_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

векторлар системаси R^3 фазода ортоганал базисни ташкил қилади. Бу базисни ортонормаллаштириш учун ҳар бир векторни ўзини узунлигига бўлиб чиқамиз:

$$|e_1| = \sqrt{2}, |e_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}, |e_3| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Демак,

$$\frac{e_1}{|e_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \frac{e_2}{|e_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \frac{e_3}{|e_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ортонормал базис бўлади.

Ушбу бобнинг биринчи параграфидаги ортонормал системалардан ташқари, қуйида яна бир нечта ортонормал системаларга мисоллар келтирамиз:

а) чекли R^nфазода

$$e_1 = (1,0, \dots ,0), e_2 = (0,1,0, \dots ,0), \dots , e_n = (0,0, \dots 0,1)$$

векторлар ортонормал системани ташкил қилади;

б) $L_2[0, l]$фазода

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin k\frac{\pi}{l}x, \qquad k = 1,2,3, \dots .$$

функциялар тўплами ортонормал системани ташкил қилади. Бундан ташқари, бу функциялар системаси $L_2[0, l]$ да ортонормал базисни бўлади;

в) Радемахер функциялар системаси $L_2[0, l]$ да ортонормал функциялар системаси бўлади.

Шу ўринда айтиш жоизки, ихтиёрий чизиқли боғлиқ бўлмаган системага Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш процессини қўллаб, ундан ортонормал системани қуриш мумкин.

Грамм-Шмидт қоидаси асосида нормалланган Лежандр кўпҳади қуйидаги кўринишни олади:

$$SP_n^0(x) = P_n(x);$$

$$SP_n^m(x) = (-1)^m \left(\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}\right)^{1/2} P_n^m(x).$$

Лежандр кўпҳади учун ҳосил қилувчи функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)x^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+x^2}}.$$

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1)Элементлариxнинг жуфт даражаларидан иборат бўлган$1, x^2, x^4 \dots, x^{2n}$системани (чекли ёки чексиз) оралиқда чизиқли эрклиликка текширинг;

2) Радемахер функциялар системаси $L_2[0, l]$ да ортонормал функциялар системаси бўлишини исботланг;

3) $1, cosx, cos\,2x, \dots, cosnx, \dots$.функциялар системасиничекли оралиқда чизиқли эрклиликка текширинг. Агар чизиқли эркли бўлса Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш процессини қўллаб, улардан ортонормал система қуринг;

4) $1, sinx, sin\,2x, \dots, sinnx \dots$.функциялар системасиничекли оралиқда чизиқли эрклиликка текширинг. Агар чизиқли эркли бўлса Грамм-Шмидт ортогоналлаштириш процессини қўллаб, улардан ортонормал система қуринг.

§ 5.Фурье қаторлари

11.Фурье қаторлари ва уларнинг хоссалари. Фараз қилайлик, RГильбертолди фазоси бўлсин. Қуйидаги масалани кўрамиз:

Rфазонинг nта чизиқли эркли $e_1, e_2, \dots, e_n$векторлари системаси берилган бўлиб, $y \in R$биророрта фиксирланган вектор бўлсин. Шунда

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n \qquad (1)$$

чизиқли комбинацияни топиш лозим бўлсинки,

$$\|y - (\mathrm{a}_1\mathrm{e}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{e}_2 + \dots + \mathrm{a}_n\mathrm{e}_n)\| \qquad (2)$$

ифода минимум қийматга эришсин. Бу эса$\mathrm{a}_1 \dots \mathrm{a}_n$*ўзгарувчили ушбу*

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2 = \left(y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) (3)$$

функциянинг минимумга эришишга тенг кучлидир.

Агар $\boldsymbol{R}$фазо nўлчамли бўлиб, $e_1, e_2, \dots, e_n$векторлар бу фазодабазис ташкил қилса, ундаa_k, $k = 1,2, \dots n$,коэфицентларни шундай танлаш мумкинки,

$$y = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n (4)$$

тенглик бажарилади ва ўз навбатида (2)ифода нолга айланади. Агар $\boldsymbol{R}$ фазонинг ўлчами чекли бўлмаса ёки чекли бўлганда ҳам n дан катта бўлса, унда умуман олганда (4)тенгликни бажариш мумкин эмас ва масала (2)ифодага минимал қийматни берадиган (1)чизиқли комбинацияни топишдан иборат бўлади.

Агар лозим бўлса ортогоналлаштириш жараёнидан фойдаланиш натижасида $e_1, e_2, \dots, e_\mathrm{n}$ системани нолдан фарқли бўлган векторлардан ташкил топган ортогонал система билан алмаштириш мумкин. Шунинг учун

$$e_k \neq 0, \qquad (e_k e_j) = 0, \;\; k \neq j, \;\; k, j = \overline{1, n}$$

дебфаразқиламиз. Ортогоналликшартиданфойдаланиб (3)функциянингкўринишиниўзгартирамиз:

$$\left\| y \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = (y, y) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k a_j \left(e_k, e_j\right)$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} a_k (y, a_k) = \|y\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \|e_k\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} (y, e_k) = \|y\|^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|})^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2}. \qquad (5)$$

Бу тенгликдан кўринадики,

$$a_k \cdot \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|} = 0, \qquad k = \overline{1, n}$$

бўлганда, яъни

$$a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} \qquad (6)$$

тенглик бажарилганда (2)ифода минимумга эришади.

Таъриф 1. (6)*формула ёрдамида аниқланган* a_k*сонлар* y *элементнинг* $e_1, e_2, \dots, e_n$*система бўйича* ***Фурье коэффицентлари*** *дейилади.*

Агар $e_1, e_2, \dots, e_n$система ортонормал бўлса, унда (6)формула соддароқ кўринишга келади:

$$a_k = (y, e_k) \qquad \textbf{(7)}$$

Энди (5)ифодага қайтамиз. Агар у ерда$a_1, \dots, a_n$ларсифатида (6)Фурье коэффицентларини олсак, у ҳолдақуйидаги тенгсизлик,

$$\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \|e_k\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 \geq 0 \qquad (8)$$

ва бу тенгсизликдан эса

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \, \|e_k\|^2 \leq \|y\|^2 \qquad (9)$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди.

Теорема 1. *Фараз қиламиз,*$\{e_к, e_к \neq 0, k = \overline{1,n}\}$*система* ***R*** *Гильбертолди фазосининг ортогонал векторлари системасибўлсин. Унда* $y \in R$*вектор учун* $а_k$*лар Фурьекоэффицентларига тенг бўлганда, яъни*$a_k = a_k, k = 1,2 \ldots, n$*тенгликбажарилганда,*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

чизиқли комбинация векторнинг энгуяхши яқинлашишини беради. Бунда

$$\inf_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 =$$

$$= \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \, \|e_k\|^2 \geq 0$$

муносабат бажарилади.

Энди фараз қилайлик,

$$e_k (e_k \neq 0) k = 1,2 \ldots, \qquad (10)$$

элементлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, у ***R***фазодаортогонал системани ташкил этсин. Бу ҳолда ҳам yэлементнинг (10)система бўйича **Фурье коэффицентларини**(6)формула ёрдамида аниқланади.

Таъриф 2. *Агара*$_{k,}$ $k = 1,2 \ldots$*,лар y элементнинг (10)система бўйича Фурье коэффицентлари бўлса, унда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \qquad (11)$$

қаторга y*элементнинг(10)система бўйича* ***Фурье қатори****дейилади. Бу ҳолда*

$$y \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

каби ёзилади.

Таъриф 3. *Ушбу*

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k \right\|, \qquad n = 1,2, \ldots.$$

*катталиккa**y**элементнинг*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

*(nфиксирланган) чизиқликомбинацияларёрдамидаги**энгяхшияқинлашиши**дейилади.Буерда**inf***

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k$$

кўринишдагимумкинбўлганбарчачизиқликомбинацияларнинг$\alpha_1, \dots . . \alpha_n$*коэффицентларибўйичаолинган.*

Бу таърифдан кўринадики,

$$E_{n+1}(y) \le E_n(y) \quad (12)$$

тенглик ўринли.

1-теоремадан қуйидаги муносабатнинг бажарилиши келибчиқади:

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k \right\| = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k \right\| =$$

$$= \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \, \|e_k\|^2},$$

$$a_k = \frac{(y, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1,2, \dots . \quad (13)$$

12. Бессель тенгсизлиги. Олдинги бандда келтирилгантасдиқни 1-теореманинг натижаси сифатида келтирамиз.

Натижа 1. $y \in R$ *элемент Фурье қаторининг*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k$$

қисмий йиғиндилари$y \in R$*элементнинг*

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

чизиқликомбинацияларибўйичаэнгяхшияқинлашишиниберади.

Шунингдек, 2-теоремаданқуйидагинатижаларкелибчиқади.

Натижа 2. *Ушбу*

$$\|y - S_{n+1}\| \le \|y - S_n\|, \quad n = 1,2, \dots . . (14)$$

тенгсизлик ўринли.

(14)тенгсизлик (12) ва (13)муносабатлардан тўғридан-тўғри келиб чиқади.

Натижа 3.$y \in R$*элементнинг Фурье коэфицентлари*a_n, $n = 1,2, \dots$*лар учун ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \le \|y\|^2 \quad (15)$$

Бессель тенгсизлиги *ўринли.*

Бессель тенгсизлиги (9)тенгсизликдан$n \to \infty$да келибчиқади.

Натижа 4. *Агар шундайс* > 0*ўзгармас топилиб,*$\|e_k\| \ge c$*, k=1,2,…. тенгсизлик бажарилса, хусусан (24) система ортонормал бўлса (бу ҳолда*

$c = 1$*деб олиш мумкин), у ҳолда Фурье коэффицентлари* $k \to \infty$*да нолга интилади:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \qquad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|e_k\|^2} \cdot a_k^2 \|e_k\|^2 \le \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 \le \frac{\|y\|^2}{c^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

қаторяқинлашувчи. Ундақаторяқинлашишнингзарурийшартигакўра

$$\lim_{k\to\infty} a_k^2 = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Табиийсаволтуғилади: *қандайшартларбажарилгандаyэлементнингФурьеқаторияқинлашувчибўлади?*

Бусаволгажавобберишданолдинқуйидагитаърифларникелтирамиз.

Таъриф 4. *АгарRметрикфазодаихтиёрийфундаменталкетма-кетликяқинлашувчибўлса, ундаRга**тўламетрикфазо**дейилади.*

Таъриф 5. *Скаляркўпайтмакиритилганҳарқандайтўлачизиқлифазога**Гильбертфазоси**дейилади.*

Фурьеқаторинингяқинлашишиҳақидагисаволгақуйидагитеоремажавобберади.

Теорема 2. *АгарRГильбертфазосибўлса, уҳолда* $y \in R$*элементнингихтиёрийортогонал (10)системабўйичаФурьеқаторияқинлашувчибўладиваагар*

$$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \qquad (17)$$

бўлса, ундa $y - y_0$*элемент (10)системанинг барчаэлементларига ортогонал бўлади.*

Исбот. Айтайлик,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \qquad n = 1,2,\dots,$$

(11)Фурьеқаторинингқисмийййиғиндиларибўлсин. Унда

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 n = 1,2,\dots. \quad p = 1,2,\dots. \qquad (18)$$

бўлади.

(15)Бессель тенгсизлигига кўра

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2$$

қаторяқинлашувчи бўлади.Маълумки, қаторяқинлашишиучунКошикритериясигакўра,$\forall\varepsilon > 0$сонолингандаҳамшундай$n_\varepsilon \in N$номертопиладики, $\forall n \geq n_\varepsilon$ва$p \in N$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2$$

тенгсизлик бажарилади.(18)тенгликка кўра,$\forall n \geq n_\varepsilon$ва $p \in N$учун

$$\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon,$$

яъни$\{S_n\}$кетма-кетлик Rфазода фундаментал бўлади.Rтўлабўлгани учун$\{S_n\}$яқинлашувчи бўлади.

Фараз қилайлик,$\{S_n\}$кетма-кетлик $\boldsymbol{R}$фазонингy_0элементига яқинлашсин.Уҳолда(17)ва (6)формулалардан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}(y - y_0, e_k) &= (y, e_k) - (y_0, e_k) \\ &= (y, e_k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cdot (e_n, e_k) = (y, e_k) - a_k \cdot \|e_k\|^2 \\ &= (y, e_k) - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} \cdot \|e_k\|^2 = (y, e_k) - (y, e_k) = 0\end{aligned}$$

Теорема исботланди.

13. Фурье қаторлари таърифи.Энди Фурье қаторини классик маънода, яъни юқорида келтирилган умумий назариянинг хусусий ҳолларида кўриб чиқамиз.

$f(x)$функция Pдаврли функция дейилади, агарда $f(x + P) = f(x)$бўлса. $f(x)$функциянинг даври 2π га тенг бўлсин. Ушбу ҳолда функцияни ҳолатини $[-\pi, \pi]$ оралиқда ўрганиш етарли.

1) Фараз қиламиз, 2π даврли $f(x)$функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлсин, яъни

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

2) Яна фараз қиламиз, $f(x)$ функция бир қийматли, бўлакли-узлуксиз (чекли нуқталарда узилишга эга) ва бўлакли-монотон (чекли сонда maxва min қийматларга эга).

Агар 1) ва 2) шартлар бажарилса, $f(x)$ функция учун Фурье қатори мавжуд бўлиб, унга яқинлашади.

Агар x_0нуқта узилиш нуқтаси бўлса, Фурье қатори

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}[f(x_0-\varepsilon)-f(x_0+\varepsilon)]$$
қийматга яқинлашади.

$f(x)$ функциянинг Фурье қатори

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\, cos\, nx + b_n\, sin\, nx\}$$
кўринишда бўлиб, бунда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, mx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, mx\, dx, (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Айрим ҳолларда Фурье қаторининг бошқа кўринишидан ҳам фойдаланилади. a_n ва b_n ларўрнига d_nва φ_n ёки d_nва θ_n ўзгарувчиларни киритамиз:

$$d_n = \sqrt{a_n^2+\ b_n^2}, tg\ \varphi_n = \frac{a_n}{b_n},\ \ tg\ \theta_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

Шунда Фурье қатори

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} d_n\, sin(nx+\varphi_n)\ \text{ёки} f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} d_n\, cos(nx+\theta_n)$$
кўринишга келади.

14. Жуфт ва тоқ функцияларни Фурье қаторига ёйиш. Даври 2π га тенг бўлган жуфт $f(x)$ функцияларнинг Фурье қаторида синуслар қатнашмайди ва қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos\, nx$$
ва коэффициентлари

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, cos\, mx\, dx, (n = 1, 2, 3, \dots)$$
орқали аниқланади.

Шунга ўхшаш даври 2π га тенг бўлган тоқ $f(x)$ функцияларнинг Фурье қаторида косинуслар қатнашмайди ва қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sin\, nx$$

ва коэффициентлари

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, sin\, mx\, dx, (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Қуйида даври 2π га тенг бўлганайрим типик функцияларни Фурье қаторига ёйилишини кўриб чиқамиз, бунда қаторга ёйиш мумкин ва берилган функцияга яқинлашади деган фараз қиламиз.

15. Айримфункцияларни Фурье қаторига ёйиш бўйича мисоллар.

1-мисол.Даври 2π га тенг бўлган$f(x)$ функция Фурье қаторига ёйилган:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\, cos\, nx + b_n\, sin\, nx\}$$

a_0, a_nваb_nкоэффициентларни аниқланг.

Ечиш.a_0 коэффициентни топиш учун Фурье қаторини $[-\pi, \pi]$ ораликда интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos\, nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} sin\, nx dx\right].$$

Барча $n > 0$учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos\, nx\, dx = \left(\frac{sin\, nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ ва } \int_{-\pi}^{\pi} sin\, nx dx = \left(-\frac{cos\ nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Бундан,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

a_n коэффициентларни аниқлаш учун Фурье қаторини $cos\, nx$ га кўпайтириб, $[-\pi, \pi]$ ораликда интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, mx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos\, mx\, dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos\, nx cos\, mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} sin\, nx cos\, mx dx\right].$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи ҳади нолга тенг. Тригонометрик айниятлардан фойдалансак,$n \neq m$ лар учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\, nx cos\, mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[sin(n + m)\, x + \sin(n - m)\, x]dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos\, nxcos\, mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} [cos\,(n+m)x + cos\,(n-m)x]\, dx = 0$$

га тенг бўлади.

$n = m$ бўлганда

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\, nx\; cos\, mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [sin\, 2m\, x + sin0]dx, \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin^2\, mxdx = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{cos\, 2mx}{2m}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos\, nx\; cos\, mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [cos\, 2m\, x + cos0]dx, \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2\, mxdx = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{sin\, 2mx}{2m}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2\pi\right] = \frac{1}{4m}[sin\, 2m\pi - sin\, 2m(-\pi)] + \pi$$

$$= \pi.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, mx\, dx = a_m\pi, \Rightarrow \; a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, mx\, dx, m = 1,2,3\, \dots .$$

Шунга ўхшаш, Фурье қаторини $sin\, mx$ га кўпайтриб, ҳадма-ҳад интеграллаб, b_m топамиз:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, mx\, dx, m = 1,2,3\, \dots .$$

Демак,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx, n = 1,2,3\, \dots .$$

2-мисол.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x \le 0; \\ x-1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Ечиш.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(2\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} (x-1)dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(2\pi+\frac{1}{2}\pi^2-\pi\right)=\frac{\pi+2}{2}.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left(2\int_{-\pi}^{0}\cos kxdx+\int_{0}^{\pi}(x-1)\cos kxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin(\pi\cdot k)}{k}+\frac{\pi\sin(\pi\cdot k)}{k}+\frac{\cos(\pi\cdot k)}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & k=2n, n\in N;\\ \dfrac{-2}{\pi\cdot k^2}, & k=2n-1.\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left(2\int_{-\pi}^{0}\sin kxdx+\int_{0}^{\pi}(x-1)\sin kxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{k}+\frac{2\cos k\pi}{k}+\frac{\cos k\pi}{k}-\frac{1}{k}-\frac{\pi\cos k\pi}{k}+\frac{\sin k\pi}{k^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(3-\pi)\cos k\pi-3}{k}\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{k}, & k=2n, n\in N;\\ \dfrac{\pi-6}{\pi\cdot k}, & k=2n-1.\end{cases}$$

Аниқланган коэффициентларни Фурье қаторига қўямиз:

$$f(x)=\frac{\pi+2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos kx-\frac{1}{k}\frac{\pi-3+3(-1)^k}{(-1)^k}\cdot\sin kx\right).$$

3-мисол.

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi<x\le 0;\\ 1+x, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Ечиш.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{\pi}(1+x)dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi^2-\pi+\pi+\frac{1}{2}\pi^2\right)=-\frac{\pi}{2};$$

Интеграллаш ҳисоблари қийинчилиги ва кўплаб интеграллаш усулларини талаб қилади. Шунинг учун асосий ҳисоблашларни келтирамиз:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2x-1)\cos kxdx+\int_{0}^{\pi}(1+x)\cos kxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((2\pi+1)\frac{-\sin k\pi}{k}+\frac{2}{k^2}-\frac{2\cos k\pi}{k^2}+\frac{(\pi+1)\sin k\pi}{k}+\frac{\cos k\pi}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi k^2}, & k = 2n, n \in N; \\ \dfrac{3}{\pi k^2}, & k = 2n-1, n \in N. \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (2x-1) \sin kx dx + \int_{0}^{\pi} (1+x) \sin kx dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} - (2\pi + 1) \frac{\cos k\pi}{k} + \frac{2 \sin k\pi}{k^2} - \frac{(\pi+1)\cos k\pi}{k} + \frac{1}{k} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin k\pi}{k^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{k} - \frac{4 \cos k\pi}{k} - \frac{\pi \cos k\pi}{k^2} + \frac{\sin k\pi}{k^2} \right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{3}{k}, & k = 2n, n \in N; \\ \dfrac{3\pi + 4}{\pi k}, & k = 2n-1, n \in N. \end{cases}$$

Аниқланган коэффициентларни Фурье қаторига қўйишда k ни жуфт ва тоқлигини инобатга олиб, қуйидаги ёйилмани оламиз:

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 - (-1)^k}{k^2} \cos kx - \frac{1}{k} \cdot \frac{3\pi + 2 - (-1)^k}{(-1)^k} \sin kx \right).$$

4-мисол.Трапециясимон тўлқин функциясини Фурье қаторига ёйинг:

$$f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ 1, 1 < x \le 2 \\ 3 - x, 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Ечиш.Кесманинг ярми $L = \frac{3}{2}$ га тенг. a_0, a_n ва b_n коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) dx = \frac{2}{3} \left[\int_0^1 x dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 (3-x) dx \right] =$$

$$\frac{2}{3} \left[\left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 + x|_1^2 + \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_2^3 \right] = \frac{4}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{3} \int_0^0 f(x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx =$$

$$\frac{2}{3} \left\{ \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \int_1^2 \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \int_2^3 (3-x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left[\left(\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right] + \left(\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\Bigg|_1^2\right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{3}{2n\pi}(3-x)\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\Bigg|_2^3 + \int_2^3 \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right]\right\} =$$

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right) + \frac{3}{2n\pi}\left(\sin\frac{4n\pi}{3} - \sin\frac{2n\pi}{3}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left(-\cos 2n\pi + \cos\frac{4n\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right) + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{4n\pi}{3} - 1\right)\right\}.$$

$\cos\frac{4n\pi}{3} = \cos\left(2n\pi - \frac{2n\pi}{3}\right) = \cos\frac{2n\pi}{3}$ эканлигиниинобатгаолсак,

$$a_n = \frac{2}{3}\frac{2\cdot 9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right) = \frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right), n = 1,2,3 \ldots .$$

Берилган функциянинг $[0,3]$ оралиқда жуфт эканлигидан b_nнинг нолга тенглиги келиб чиқади. Функциянинг Фурье қаторига ёйилмаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}.$$

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларни Фурье қаторига ёйинг:

а) $f_1(x) = \begin{cases} x+2, & -3 \le x < -2; \\ -x-2, & -2 \le x < 0; \\ x-2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

б) $f_2(x) = \begin{cases} x+1, & -2 < x < -1; \\ -2x^2+2, & |x| \le 1; \\ x-1, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

в) $f(x) = x - [x],\ |x| \le 1.$

г) $f(x) = \begin{cases} -x^3-8, & x \in [-3,-2]; \\ 0, & x \in [-2,0]; \\ -x^5, & x \in [0,3]. \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

е) $f(x) = x^3, -\pi \le x \le \pi;$

ж) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi; \end{cases}$

з) $f(x) = x + 5, -\pi \le x \le \pi.$

§ 6. Тўла ортогонал системалар ва уларнинг Фурье қаторибилан боғланиши

16. Тўла ортогонал системалар ҳақида тушунчалар. Саноқли система учун тўлалик тушунчасини киритамиз. *Айтайлик,*

$$e_n \in R, n = 1,2,\ldots$$

системаберилганбўлсин.АгарбусистемаэлементларинингчизиқликомбинацияларитўпламиRфазодазичбўлса, яъниҳарбир $x \in R$ *элементва* $\forall \varepsilon > 0$ *сонучуншундай* $n = n(\varepsilon, x)$ *номерва* $\lambda_1, \ldots . \lambda_n$ *сонлартопилсаки,*

$$\|x - (\lambda_1 e_1 +, \ldots, +\lambda_n e_n)\| < \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

тенгсизлик бажарилса, унда берилган система R фазода ***тўласистема*** *дейилади.*

Теорема 1. *RГильбертолдифазосидаги((10), шу бобнинг бешинчи параграфи)ортогоналсистеманинг шу фазода тўла бўлиши учун қуйидаги шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир: ихтиёрий* $y \in R$ *элемент учунунинг Фурье қатори айнан шу элементга яқинлашади, яъни*

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \text{буерда} a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2}, k = 1,2,\ldots \qquad (2)$$

ёки

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0 \qquad (3)$$

тенглик бажарилади.

Зарурлиги. Агар (1)шарт бирор $\lambda_1, \ldots . \lambda_n$ лар учунбажарилса, унда бешинчи параграфдаги 1-теоремага кўра, бу шарт

$$\lambda_1 = a_1, \ldots \ldots, \lambda_n = a_n$$

бўлганда ҳам бажарилади, яъни берилган $\varepsilon > 0$ сон учун (1) тенгсизлик бирортаn да ва табиийки барча $m > n$ лардабажарилади. Бу эса (3) шартнинг бажарилишига тенг кучлидир.

Етарлилиги. Агар (3)тенглик бажарилса, унда $\forall \varepsilon > 0$ учун (2) Фурье қаторининг шундай

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

қисмий кетма-кетлиги топиладики,

$$\|y - S_n\| < \varepsilon \textbf{(4)}$$

тенгсизлик, яъни (1)шарт бажарилади.

Теорема 2. *Гильбертолди фазосиу элементнинг ((11), шу бобнинг бешинчи параграфи)Фурье қатори шу элементга яқинлашиши учун ушбу*

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2 \|e_k\|^2$$

Парсевальтенглигининг*бажарилишизарурваетарлидир, буердa*a_k*y элементнинг ((10), шу бобнинг бешинчи параграфи)системабўйичаФурьекоэффицентларикоэффицентлари.*

Бу теоремадан системанинг тўла бўлиши ҳақидаги яна бир мезон келиб чиқади.

Натижа. *RГильбертолди фазосидаги ((10), шу бобнинг бешинчи параграфи)ортогонал системанинг шу фазода тўла бўлиши учун ихтиёрий $y \in R$ элемент олинганда ҳам Парсеваль тенглигини бажарилиши зарур ва етарлидир.*

Агар ((10), шу бобнинг бешинчи параграфи)тўла система ортонормал бўлса, унда Парсеваль тенглиги соддароқ кўринишга келади:

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2, \qquad a_k = (y, e_k), \quad k = 1, 2, \ldots.., \tag{5}$$

ва уни чексиз ўлчовли фазолар учун **Пифагор теоремасининг умумлашмаси** сифатида қараш мумкин.

2-теореманинг исботи.

((8), шу бобнинг бешинчи параграфи)тенгликка кўра ушбу

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2 \|e_k\|^2$$

тенгликўринлиэди. Буердa$n \to \infty$қуйидаги 2 та

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0 \tag{6}$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \|e_k\|^2 \right) = 0,$$

яъни

$$\|y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \|e_k\|^2 \tag{7}$$

шартларнингтенгкучлиэканлигиниҳосилқиламиз.

Юқоридагинатижа1ва2-теоремалардантўғридан-тўғрикелибчиқади.Энди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

Фурье қаторига мос келувчи элементнингяғоналиги масаласини ўрганамиз.

Теорема 3. *АгарR -Гильбертолди фазосидаги ((10), шу бобнинг бешинчи параграфи)ортогонал система шу фазода тўла бўлса ва*$y \in$

Rэлементнинг((10), шу бобнинг бешинчи параграфи)система бўйича барчаФурье коэффицентларинолга тенгбўлса, ундау элементнинг ўзи ҳам0га тенгбўлса, ундауэлементнинг ўзи ҳамнолга тенг бўлади.

Шартга кўра$a_k = 0$.Унда (7)Парсеваль тенглигига кўра$\|y\| = 0$бўлади. Бундан $y = 0$ эканлиги келиб чиқади.

Натижа. *Агар $y_1 \in R$ ва $y_2 \in R$ элементларнинг ((10), шу бобнинг бешинчи параграфи)тўла ортогонал система бўйича барча Фурье коэффицентлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда $y_1 = y_2$ бўлади.*

y_1ва y_2элементларнинг Фурье коэфицентлари учун

$$\frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y - y_0, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k = 1,2, \dots.,$$

тенгликбажарилади.Бунданкелиб чиқадики,$y = y_1 - y_2$элементнингбарчаФурьекоэффицентларинолгатенгбўлади:

$$\frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y - y_0, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_1, e_k)}{\|e_k\|^2} - \frac{(y_2, e_k)}{\|e_k\|^2} = 0, k = 1,2, \dots \Rightarrow$$

3-теоремага кўра$y = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$.

Тўла ортогонал системалар ва уларнинг Фурье қаторибилан боғланишини Парсеваль тенглиги ёрдамида сонли қаторларнинг йиғиндисини ҳисоблаш мисолида кўрсатамиз.

17. Парсеваль тенглиги ёрдамида қаторларнинг йиғиндисини ҳисоблашга доир мисоллар.

1-мисол. Қуйидаги қаторнинг йиғиндисини ҳисобланг:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ечиш.$f\ (x) = x$ функцияга Парсеваль тенглигини қўллаймиз.
$f\ (x) = x$ функцияни $[-\pi, \pi]$ оралиқда Фурье қаторига ёямиз:

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin nx .$$

Бунда $a_0 = a_n = 0$, чунки $f(x) = x$ тоқ функция ва $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$бўлади.

Парсеваль тенглигидан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx, \Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} = \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right)$$

эканлиги келиб чиқади.

Бундан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{6}$$
тенг бўлишини топамиз.

Қайд қилиш лозими,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$
Риманнинг ζ (s) - дзетта функцияси дейилади. Шундай қилиб биз,

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$
бўлишини исботладик.

2-мисол. $f(x)=x^2$ функцияга $[-\pi,\pi]$ оралиқда Парсеваль тенглигини қўлланг.

Ечиш. $f(x)=x^2$ функцияни $[-\pi,\pi]$ оралиқдаги Фурье қаторига ёйилмасидан фойдаланамиз.

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx\,,$$
бунда

$$a_0=\frac{2\pi^2}{3}\,,\qquad a_n=\frac{4}{n^2}(-1)^n\,,b_n=0\,.$$
Бу функция учун Парсеваль тенглигидан фойдаланамиз:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}(-1)^n\right]^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx\Rightarrow$$
$$\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]\Rightarrow\frac{2\pi^4}{3}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^5}{5}\Rightarrow$$
$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2\pi^4}{5}-\frac{2\pi^4}{9}\Rightarrow\ 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{8\pi^4}{45}.\Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$
$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$
$-$ Риманнингдзеттафункциясиэканлигиниинобатгаолсак,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$ эканлигинитопамиз.

3-мисол.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар} 0 \le |x| \le d \\ 0, & \text{агар} d \le |x| \le \pi \end{cases},$$

функцияга Парсеваль тенглигини қўллаб,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{n^2} \text{ ва } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos^2 nd}{n^2}$$

йиғиндиларни ҳисобланг.

Ечиш.Берилган функцияни Фурье қаторига ёйиб оламиз (асосий масала йиғиндиларни топиш эканлиги учун функцияни Фурье қаторига ёйишдаги ҳисоблаш ишларини келтирмаймиз):

$$f(x) = \frac{d}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nd}{n}\cos nx,$$

бунда

$$a_0 = \frac{2d}{\pi}, \qquad a_n = \frac{2\sin nd}{n\pi}, b_n = 0 .$$

Парсеваль тенглигини қўлласак

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx ,$$

қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2d}{\pi}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\sin nd}{n\pi}\right]^2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \Rightarrow \frac{2d^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{\pi^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^d dx ,$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{\pi^2} = d \Rightarrow \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{\pi^2} = d - \frac{d^2}{\pi},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{\pi^2} = \frac{d(\pi-d)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} ,$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{\pi^2} = \frac{d(\pi-d)}{2} .$$

Юқорида келтирилганлардан фойдалансак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos^2 nd}{\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-sin^2 nd}{\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{\pi^2} .$$

Бунда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

(1-мисолга қаранг). Демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos^2 nd}{\pi^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{d(\pi-d)}{2}=\frac{\pi^2-3\pi d+3d^2}{6}\ .$$

4-мисол.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

қаторнинг йиғиндисини ҳисобланг.

Ечиш.3-мисолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 nd}{\pi^2}=\frac{d(\pi-d)}{2}$$

эканлигини топган эдик. $d=\frac{\pi}{2}$ деб ҳисобласак

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2\frac{n\pi}{2}}{\pi^2}=\frac{\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\text{ёки}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2\frac{n\pi}{2}}{\pi^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

эга бўламиз.

$$sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+3\end{cases},\ \text{бунда}k=0,1,2,3,\dots$$

Демак,

$$sin^2\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=2k+1\end{cases},\ \text{бунда}k=0,1,2,3,\dots$$

Натижада

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

эканлигини топамиз.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Парсеваль тенглигидан фойдаланиб, қаторларнинг йиғиндисини ҳисобланг:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^2}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^5}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

2. Қуйидаги функцияларга $[-\pi,\pi]$ оралиқда Парсеваль тенглигини қўлланг:

$а)\ f(x)=x^3$; $б)\ f(x)=x^2+x$; $в)\ f(x)=x+sin\,2x$; $д)\ f(x)=signx$;

г) $f(x)=3[x]-7x$; д)$f(x)=5\{x\}+2x-1$;

3. $f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } 0 \le x \le \alpha, \\ 0, & \text{олганнуталарда} \end{cases} (0 < \alpha \le 2\pi)$

функция учун ёпиқлик тенгламасини бажарилишини текширинг.

4. $f_{\alpha\beta}(x) = f_\beta(x) - f_\alpha(x)$ $0 < \alpha < \beta \le 2\pi$ функцияни қарайлик. Юқорида келтирилган масалаладан фойдаланиб, $f_{\alpha\beta}(x)$ функция учун ҳам ёпиқлик тенгламасини бажарилишини текширинг.

5. Парсеваль формуласини комплекс ўзгарувчиларда ёзинг.

§ 7. Сферик функциялар

18.Сферик функциянинг таърифи. Сферик функцилар Лаплас тенгламасини сферик координаталар системасида ёзилган ортогонол ечимлар оиласининг бурчак қисми ҳисобланади. Улар сферик сиртлар билан чегараланган фазовий соҳалардаги физик ҳодисаларни ўрганиш ва сферик симметрияга эга физик масалаларни ечишда кенг қўлланилади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси ва назарий физикада, хусусан атомнинг электрон орбитасини ҳисоблаш, планеталарни магнит майдони ва реликтик нурланиш интенсивлигини ўрганишда муҳим аҳамиятга эга.

Бирлик сферада қуйидаги Штурм-Лиувилль масаласини қарайлик:

$$\Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0, \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi),$$

$$|Y(0, \varphi)| < \infty, \qquad |Y(\pi, \varphi)| < \infty,$$

бунда $\Delta_{\theta\varphi}$ - Лаплас операторининг сферик координаталар системасида бурчак қисми

$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Масаланинг ечимини ўзгарувчиларни бўлаклаш усулидан фойдаланиб, қидирамиз:

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Буни тенгламага қўйиб, $\Phi(\varphi)$ га нисбатан қуйидаги масалани оламиз:

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \qquad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Бу масала $\nu = m^2$ бўлганда тривиал бўлмаган

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

ечимга эга.

$\Theta(\theta)$ функция учун

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0,$$

$$0 < \theta < \pi, |\Theta(0)| < \infty, \qquad |\Theta(\pi)| < \infty.$$

Агар $x = \cos\theta, y(x) = y(\cos\theta)$ каби ўзгарувчиларни алмаштириш қилсак, масала қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0,$$
$$-1<x<1, |y(\pm 1)|<\infty.$$

Ушбу масала Лежандрнинг қўшилган функцияси учун Штурм-Лиувилл масаласи дейилади. Унинг хос сонлари $\lambda_n = n(n+1)$тенг бўлиб, хос функциялари $y_{nm}(cos\theta) = P_n^m(cos\theta)$,бунда $m \leq n$.

n- тартибли сферик функцияларни ёзамиз:

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = P_n^{(|m|)}(cos\theta)e^{im\varphi}, \text{бунда } m \leq n.$$

Хос функцияларни тригонометрик кўриниши

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} sin\, mx, \\ cos\, mx, \end{cases} m = \overline{0,n}.$$

Сферик функциялар системасида мусбат индекс m лар учун $sin\, mx$ ва манфий индекс m лар учун $cos\, mx$ кўпайтирилган деб олсак:

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = P_n^m(cos\theta)\, sin\, mx,$$
$$Y_n^{-m}(\theta,\varphi) = P_n^m(cos\theta)\, cos\, mx, \quad m = \overline{0,n}$$

эга бўламиз.

Теорема (сферик функцияларни тўлиқлиги ҳақида). Сферик функциялар системаси бирлик сферада тўлиқ.

Теореманинг исботи махсус функцияларга оид деярли барча адабиётлар бор. Хусусан, С.Е.Холодова, С.И.Перегудинларнинг «Специальные функции в задачах математической физики»[49] китобида келтирилган.

Сферик функциялар икки ўлчамли сфера функциялар фазосида ортонормал системани ташкил қилади:

$$(Y_l^m; Y_l^m) = \iint |Y_l^m|^2 sin\theta d\theta d\varphi = 1,$$

$$(Y_l^m; Y_l^m) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l'}^{m'*} Y_l^m\, sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

* - комплекс қўшма белгиланган, $\delta_{ll'}$ - Кронекер символи.

Келгусида сферик функцияларни ёзганимизда, ўзгарувчиларни ўрнига мос келган хос сон ва хос функцияларни (nваmларгаболик)қўйсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$Y_l^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi}\Theta_{lm}(\theta),$$

бунда $\Theta_{lm}(\theta)$ функциялар

$$\frac{1}{sin\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{sin^2\,\theta}\Theta_{lm} + l(l+1)\Theta_{lm} = 0$$

тенгламани ечимлари ва қуйидаги кўринишга эга:

$$\Theta_{lm}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(cos\theta),$$

бунда $P_l^m(cos\theta)$ Лежандрнинг қўшилган кўпҳади.

Лежандрнинг манфий mли қўшилган кўпҳади:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x).$$

Лаплас тенгламасининг сферик координаталар системасидаги ечими шар функциялар дейилади ва сферик функцияларни радиаль тенглама ечимларига кўпайтиришдан ҳосил қилинади.

Ушбу келтирилганлардан кўриниб турибдики, сферик функциялар математик физика тенгламаларини интеграллашда кўп учрайди. Шу сабабли бу функциялар синфини кенгроқ ўрганамиз. Юворида айтиб ўтилганидек, сферик функциялар ўзгарувчанкоэффицентли баъзи чизиқли тенгламаларнинг ечимларисифатида, хусусан Лаплас тенгламасининг ечими сифатида аниқланади.

19. Лаплас тенгламасининг ечимлари. Лаплас тенгламаси Декарт координаталар системасида

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

кўринишга эга.

Бутенгламанингшундайечимлариниқидирамизки, улархx, yваzўзгарувчиларганисбатанбиржинсликўпҳадкўринишигаэгабўлсин. Содда хусусий ҳолларни ўрганишдан бошлаймиз.

Нолинчи тартибли бир жинсли кўпҳад ўзгармас a га тенг бўлиб, у (1) тенгламани қаноатлантиради. 1-тартибли бир жинсли кўпҳаднинг умумий кўриниши

$$U_1 = ax + by + cz$$

кабибўлиб, ихтиёрийўзгармасa, bваcкоэффициентларолингандаҳамU_1кўпҳад (1)тенгламанингечимибўлади. 2- тартиблибиржинсли

$$U_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$$

кўпҳадниоламиз. Uни (1)тенгламагаолибборибқўйиб, коэффициентларучунбитта

$$a + b + c = 0$$

муносабатниҳосилқиламиз.

Бутенгликданфойдаланиб, масалан$c = -a - b$дейишимизмумкин. Унда (1) тенгламаниқаноатлантирувчи 2- тартиблибиржинсликўпҳадушбу

$$U_2 = a(x^2 - z^2) + b(y^2 - z^2) + dxy + eyz + fzx$$

умумийкўринишгаэгабўлади.

Буердабиз 5 тачизиқлиэркли

$(x^2 - z^2), (y^2 - z^2),\ xy,\ yz$ ва zx

ечимларгаэгабўлиб, уларнингихтёрийўзгармаскоэффициентларёрдамидагичизиқликомбинацияси (1) тенгламанингумумийечиминибериб, у 2-тартиблибиржинсликўпҳадкўринишидаифодаланади.

Ихтиёрий 3 - тартибли бир жинсли кўпҳад оламиз:

$$U_3 = ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ex^2z + fy^2x + gy^2z + hz^2x + kz^2x + lxyz.$$

U_3 ни (1) тенгламага олиб бориб қўямиз:

$$6(ax + by + cz) + 2dy + 2ex + 2fx + 2gz + 2hx + 2ky = 0.$$

Бутенгликнисоддалаштириб, x, y, zларолдидагикоэффициентларнинолгатенглашёрдамидақуйидагитенгликларниҳосилқиламиз:

$$\begin{cases} 3a + f + h = 0, \\ 3b + d + k = 0, \\ 3c + e + g = 0. \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{3}(f + h), \\ b = -\frac{1}{3}(d + k), \\ c = -\frac{1}{3}(e + g). \end{cases}$$

Демак, (1)тенгламанинг 3 - тартибли бир жинсли кўпҳад кўринишидаги умумий ечими

$$U_3 = d\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) + e\left(x^2z - \frac{1}{3}z^3\right) + f\left(y^2x - \frac{1}{3}x^3\right) + g\left(y^2z - \frac{1}{3}z^3\right) + h\left(z^2z - \frac{1}{3}x^3\right) + k\left(z^2y - \frac{1}{3}y^3\right) + lxyz$$

бўлар экан.

Бу ҳолда биз 7 та чизиқли эркли ечимларга эга бўламиз.

Теорема 1. *(1)Лаплас тенгламаси* $(2n + 1)$ *та* n*- тартибли бир жинсли кўпҳадлардан иборат бўлган чизиқли эркли ечимларга эга*.

Бир жинсли кўпҳаднинг коэффициентлари сони ва бу кўпҳад қаноатлантириши керак бўлган тенгламалар сонини ҳисоблаймиз. Ушбу

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n$$

иккиўзгарувчилиn-тартиблибиржинсликўпҳад$(n + 1)$коэффициентгаэга. Учўзгарувчилиn-тартиблибиржинсликўпҳадни

$$a_0z^n + \varphi_1(x, y)z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x, y)z + \varphi_n(x, y) \quad (2)$$

кўринишидаёзишмумкин, буерда$\varphi_k(x, y)$ларk-тартиблибиржинсликўпҳадлар. Демак, (2)биржинсликўпҳаднингкоэффициентларинингумумийсони

$$1 + 2 + \cdots + n + n(n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

табўлади. Агар (2)кўпҳадни (1)тенгламанингчаптомонигаолибборибқўйилса, унда$(n - 2)$ $-$тартиблибиржинсликўпхадҳосилбўлиб$\frac{(n-1)n}{2}$таҳадгаэга. Шундайқилиб, (2) кўпҳаднинг$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$такоэффициентлари$\frac{(n-1)n}{2}$табиржинслитенгламаларёр дамидабоғланарэкан. Агарбутенгламаларэрклибўлса, ундаэркинқолганкоэффициентларсони

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=2n+1$$

табўлади. Исботқилишимизкеракбўлганнарсаниҳосилқилдик. Фақатбуердаюқоридаайтилгантенгламаларҳақиқатанҳамэрклибўладимидег ансаволгажавобноаниққолди. Шумуносабатбилантеореманингбошқатўлиқисботиникелтирамиз.

(2)кўпҳадниқуйидагикўринишдаёзиболишимизмумкин:

$$U_n=\sum_{p+q+r=n}a_{pqr}\,x^p y^q z^r.$$

Бутенгламадан

$$a_{pqr}=\frac{1}{p!\cdot q!\cdot r!}\frac{\partial^{p+q+r}U_n}{\partial x^p\cdot\partial y^q\cdot\partial z^r} \qquad (3)$$

эканлигиникўришқийинэмас.

(1)тенгламани

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

кўринишдаёзиболамизвабутенгликданфойдаланиб (3)ифодалардагиzбўйича 1-тартиблиҳосилалардандюқорибўлганҳосилалардан қутулишимизмумкин. Масалан,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 U}{\partial x\partial y\partial z^4}&=-\frac{\partial^4}{\partial x\partial y\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\\&=\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\\&=\frac{\partial^6 U}{\partial x^5\partial y}+2\frac{\partial^6 U}{\partial x^3\partial y^3}+\frac{\partial^6 U}{\partial x\partial y^5}.\end{aligned}$$

Шундайқилиб, эркликоэффициентларсифатидашундайa_{pqr}коэффициентларқолдики, улардаzбўйичадифференциаллашёкиумуманйўқёкибирмартадифференциал ланади. Шу коэффициентлар сонини ҳисоблаймиз: $a_{pq0}(p+q=n)$ ёки $a_{pq1}(p+q=n-1)$ ва уларнинг умумий сони роппа-роса $(2n+1)$ та бўлади. Исботқилишимизлозимбўлгантасдиқисботланди.

20. Сферикфункцияларнингошкор кўриниши. Аввалги бандда қурилган бир жинсли кўпҳадларнинг ошкор кўринишларини топамиз. Сфериккоординаталарсистемасиникиритамиз:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \quad (4)$$

Бу ҳолда n -тартибли бир жинсли гармоник кўпҳад

$$U_n(x,y,z) = r^n\cdot Y_n(\theta,\varphi) \ (5)$$

кўринишидаифодаланади.

(1)тенгламанингечимибўлганбундайкўпҳадгаодатда**ҳажмийсферикфункция,**$Y_n(\theta,\varphi)$кўпайтувчигаэса**сиртсферикфункцияси**ёкисоддақилиб, n**-тартиблисферикфункция**дебаталади.
Бизнингвазифамизчизиқлиэрклибўлган$(2n+1)$тасферикфункцияларларнитопишданиборат.
Аввал
(1)тенгламанингечимибиланбоғлиқбўлгансоддабирфактникелтирамиз.
x,y,zпараметрларга боғлиқ бўлган

$$U(x,y,z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z+ix\cos t+iy\sin t, t)\,dt (6)$$

интегрални оламиз ва бу интегрални интеграл остида x,y ва z ўзгарувчилар бўйича дифференциаллаш мумкин деб фараз қиламиз. Унда

$$\Delta U(x,y,z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \int_{-\pi}^{\pi}(1-cos^2 t-sin^2 t)\cdot$$
$$f''(z+ix\cos t+ty\sin t, t)dt = 0$$

бўлади. Бу ерда $f''(\tau,t)$ деб $f(\tau,t)$ функциядан τ бўйича 2 - тартибли ҳосилани белгиланган. Шундай қилиб, *U(x, y,z)* функция $f(\tau,t)$ функциянинг қандай олинишидан қатъий назар, (1)Лаплас тенгламасини қаноатлантирар экан. Энди (6)тенгликдан фойдаланиб (1)тенгламани қаноатлантирувчи $(2n+1)$ та n - тартибли бир жинсли кўпҳадларни қуриш мумкин.
Уларниқуйидагикўринишдаёзамиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\cdot\cos mt\,dt, (m = 0,1,2,\dots,n) \quad (7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\cdot\sin mt\,dt\ (m = 0,1,2,\dots,n). \quad (8)$$

Сфериккоординаталарникиритишва (7)интегралданфойдаланишёрдамидасферикфункцияларучунқуйидагиифоданиҳосилқиламиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\theta + i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n \cdot \cos mt\,dt =$$

$$= \int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cdot \cos m(\varphi+\psi)\,d\psi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cdot \cos m(\varphi+\psi)\,d\psi,$$

бу ерда $(t-\varphi = \psi)$ белгилаб олинди.

$\cos m(\varphi+\psi)$нийиғинда шаклида ёзибва$\sin m\varphi$функциянингтоқлигиданфойдаланиб,бусферикфункцияниқуйидагикўринишдаёзамиз:

$$\cos m\varphi \int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cdot \cos m\psi\,d\psi (m = 0,1,2,\dots n). \quad (9)$$

Худди шунга ўхшаш (8)интеграл бизни қуйидаги сферик функцияларга олиб келади:

$$\sin m\varphi \int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \cdot \cos m\psi\,d\psi (m = 0,1,2,\dots n). \quad (10)$$

$\cos m\varphi$ва$\sin m\varphi$функциялар$(-\pi;\pi)$ оралиқдаўзароортогоналбўлганиучунуларчизиқлиэркли, бундан келиб чиқадики (9) ва (10) сферикфункцияларчизиқлиэркли. Шундайқилиб, биз$(2n+1)$тачизиқлиэркли$n-$ тартиблисферикфункцияларниқурибoлдик. Шунитаъкидлашлозимки, (9) ва (10) формулалардаги$\cos m\varphi$ва$\sin m\varphi$ларолдидагикоэффициентларбирхил. УларниЛежандркўпҳадлариёрдамидаифодалаймиз. Маълумки, Лежандркўпҳадлариушбу

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\cdot[(x^2-1)^n] \quad (11)$$

кўринишгаэга. Унданфойдаланиб, қуйидагифункцияникиритамиз:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\cdot[(x^2-1)^n] \quad (12)$$

Бундан буён биз x ни $[-1;1]$ кесмада ўзгаради деб қараймиз ва $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$ деб оламиз. Бунда $P_n^m(\cos\theta)$ ифодадаги $(1-\cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}$ кўпайтмани $\sin^m\theta$ га тенг деймиз, чунки $0 \le \theta \le \pi$.

Энди $P_n(x)$ ва $P_n^m(x)$ лар учун бошқа ифодаларни киритамиз. Кошининг интеграл формуласига кўра,

$$(x^2-1)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{(z^2-1)^n}{z-x} dz$$

тенгликўринли, буерда$\gamma - z = x$нуқтаниўзичигаолувчиихтиёриймусбатйўналишлиёпиқчизиқ. Бу ердан (11) тенгликка кўра,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\gamma} \frac{(z-1)^n \cdot (z+1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \qquad (13)$$

тенгликниҳосилқиламиз.

γконтурсифатидамарказиz $= x$нуқтадаварадиуси$|x^2-1|^{\frac{1}{2}}$гатенгбўлганайланаололамиз ($x \neq \pm 1$дебҳисобланади). Бундаzўзгарувчини

$$z = x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}$$

деб ёзиш мумкин бўлади, ψни $-\pi$ дан π гача ўзгаради деб ҳисоблаймиз.

(13)интегралда ўзгарувчиларни алмаштириб

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\left[x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}\right] \cdot \left[x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}\right]}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}} \right\}^n d\psi$$

тенгликниваэлементарҳисоблашниамалгаоширамиз.Интегралостидагифункциянингжуфтлигиданфойдалансак, қуйидагиформуланиҳосилқиламиз:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} cos\psi\right]^n d\psi =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left[x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} cos\psi\right]^n d\psi \qquad (14)$$

Агартенгликнингўнгтомонидаги$\left[x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} cos\psi\right]^n$ ифоданиНьютонбиномиданфойдаланибдаражагакўтарсакваcosψнингтоқдаражаларидан$(-\pi;\pi)$оралиқбўйичаолинганинтегралнолгатенгбўлишиданфойдалансак, унда$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$нингтоқдаражаларикатнашганбарчаҳадларинингнолгаайланишиниҳосилқиламиз.

Юқоридаги каби ҳисоблашларни $P_n^m(x)$ учун бажарамиз. Унда (13) даги ифода

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2^{n+1}\pi i}\int_{\gamma} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+m+1}} dz$$

тенг бўлади.

Аниқликучун$-1 < x < 1$дебҳисоблаймиз. Юқоридаги каби $z = x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}$ алмаштириш бажарамиз ва $(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = pi, p > 0$ деб ҳисоблаб

$$P_n^m(x) = i^m \cdot \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} cos\psi\right]^n e^{-im\psi} d\psi$$

тенгликёки$sinm\,\psi$функциянингтоқлигиданфойдалансак

$$P_n^m(x) = i^m \cdot \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} cos\psi\right]^n \cos m\psi\, d\psi \qquad (15)$$

тенглик келиб чиқади.

Агар (14) ёки (15)интегралларда $x = \cos\theta$ десак, унда (9) ва (10)формулалардаги интеграллар ҳосил бўлади.

Гармониккўпҳадёкисферикфункциялардаўзгармаскўпайтувчинингаҳамиятгаэгаэмаслигиниэътиборгаолибқуйидагиҳулосагакеламиз:

$(2n+1)$таn-тартибли сферик функциялар

$$P_n(\cos\theta), P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi\ (m = 1,2,\dots,n) (16)$$

кўринишидаифодаланади, буерда$P_n(x)$ – (11)формулаёрдамидааниқланувчиЛежандркўпҳадлари, $P_n^m(x)$ларэса (12) формулаёрдамидааниқланади.

Шуниэслатибўтамизки, $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}$кўпайтувчи$x = cos\,\theta$алмаштиришдансўнг$sin^m\theta$гатенгдебҳисобланади. (15)ечимларниихтиёрийўзгармасларгакўпайтиришвақўшишёрдамидаn - тартиблисферикфункциянингумумийкўринишинитопамиз:

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta) \quad (17)$$

(17) формулада сферик функцияларни умумий кўриниши олинганлиги учун $Y_n(\theta, \varphi)$ функцияда юқори индекси ёзилмайди. 18-бандда эса сферик функцияларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида қаралган, яъни уларнинг комбинацияси қаралмаган, шунинг учун уларда иккита индекслидир.

Шундайқилиб, қуйидагитеоремаисботланди.

Теорема 2.*Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи n - тартибли бир жинсли кўпҳаднинг умумий кўриниши $r^n \cdot Y_n(\theta, \varphi)$ каби бўлади, бу ерда $Y_n(\theta, \varphi)$ (17)формула ёрдамида аниқланади.*

Изоҳ.*(16)ечимларнинг чизиқли комбинациясини олиш йўли билан тригонометрик функцияларнинг ўрнига кўрсаткичли функцияларни олиш* *мумкин. Унда (16) - n - тартибли сферик функциялар тўплами ўрнига қуйидаги n - тартибли сферик функциялар тўпламини ҳосил қиламиз:*

$$P_n(\cos\theta), P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \dots, P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, (m = 1,2,\dots,n) \quad (18)$$

§ 8. Сферик функцияларнинг ортогоналлик хоссалари ваамалий аҳамияти

21. Ортогоналлик хоссалари. Энди ((16), шу бобнинг еттинчи параграфи)сферик функцияларнинг бирлик сферада ортогонал бўлишини исботлаймиз ва бу функциялар квадратларининг бирлик сфера бўйича интегралларини ҳисоблаймиз. Аввал ушбу

$$I_m = \int_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2 dx$$

интегралниҳисоблашбиланшуғулланамиз.
$P_n^m(x)$функциянингтаърифигакўра

$$I_m = \int_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} dx$$

бўлади. Агар $m = 0$ бўлса, $P_n^0(x) = P_n(x)$бўлиб,

$$I_0 = \int_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n + 1} \quad (1)$$

тенгликўринлибўлади (шу бобнинг 6-бандгақаранг).
Бўлаклабинтеграллашусулиданфойдаланибқуйидагитенгликниёзишмумкин:

$$I_m = (1 - x^2)^m \cdot \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \cdot \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} \bigg|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} \cdot \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\right] dx$$

ёки

$$I_m = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} \cdot \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\right] dx. \quad (2)$$

Бу ерда

$$z = \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^{n+m-1(x^2-1)^n}}{dx^{n+m-1}}$$

функциянингушбу

$$(1 - x^2) \frac{d^{m+1} P_n(x)}{dx^{m+1}} - 2mx \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} +$$

$$(n+m)(n-m+1)\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=0$$
тенгламани қаноатлантиришини текшириш қийин эмас.

Бутенгликни$(1-x^2)^{m-1}$гакўпайтириб, уникуйидагикўринишдаёзишмумкин.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]=-(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}.$$

Буни (2)формулага олиб бориб қўйсак,

$$I_m=(n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}dx$$

ёки

$$I_m=(n+m)(n-m+1)I_{m-1}$$

реккурент формула ҳосил бўлади.

Реккурент формуладан кетма-кет фойдалансак

$$I_m=(n+m)(n-m+1)I_{m-1}=(n+m)(n-m+1)(n+m-1).$$
$$(n-m+2)I_{m-2}=\cdots=(n+m)(n-m+1)(n+m-1).$$
$$(n-m+2)\ldots(n+1)nI_0=(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots$$
$$(n-m+1)I_0=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}I_0$$

эканлигикелибчиқади.

Бу ердан ва (1)тенгликдан

$$\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (3)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Юқоридаги натижалардан фойдаланиб $Y_n(\theta,\varphi)$ сферик функциядан бирлик сфера бўйича интегрални ҳисоблаш мумкин. θва φ лар сферадаги нуқтанинг оддий географик координаталари бўлади: $\{\varphi=const\}$ - меридианлар ва $\{\theta=const\}$ - параллеллар. Координат чизиқларнинг бундай танланишида сирт юзасининг элементи ушбу

$$d\sigma=\sin\theta\cdot d\theta d\varphi(4)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Биринчи навбатда $Y_p(\theta,\varphi)$ ва $Y_q(\theta,\varphi)$ функцияларнинг $p\neq q$ бўлганда ортогонал бўлишини, яъни

$$\iint\limits_{ss}Y_p(\theta,\varphi)Y_q(\theta,\varphi)d\sigma=0 \qquad (5)$$

тенгликнингбажарилишиниисботлаймиз.

Айтайлик, θ –сфера билан чегараланган ҳажм, S –сфера сирти бўлсин. Унда

$$U_p=r^pY_p(\theta,\varphi) \text{ ва } U_q=r^qY_q(\theta,\varphi)(6)$$

гармоник функциялар учун Грин формуласини қўллаймиз:

$$\iint\limits_{S} (U_p \frac{\partial U_q}{\partial n} - U_q \frac{\partial U_p}{\partial n}) d\sigma = \iiint\limits_{\vartheta} (U_p \Delta U_q - U_q \Delta U_p) d\vartheta = 0$$

чунки $\Delta U_p = \Delta U_q = 0$.

Бу ҳолда нормал бўйича ҳосила r радиус бўйича ҳосила билан устма-уст тушади. Унда охирги формула ва (6)формуладан

$$\iint\limits_{S} [qY_p(\theta,\varphi) \cdot Y_q(\theta,\varphi) - pY_q(\theta,\varphi) Y_p(\theta,\varphi)] = 0$$

тенглик, бунданэса эсатўғридан-тўғри (4)формулакелибчиқади.

nнинг 1 тақийматигамоскелувчи ((16), шу бобнинг еттинчи параграфи)сферикфункцияларҳамўзароортогоналбўлади.
Дарҳақиқат,
бирликсферабўйичаинтеграллашφбўйича$(0,2\pi)$оралиқдаинтеграллашгакелтирилади. Лекин, ((16), шу бобнинг еттинчи параграфи)функцияларφгабоғлиқбўлган

$$1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \ldots, \cos n\varphi, \sin n\varphi$$

кўпайтувчиларниўзидасақлайдивабукўпайтувчиларнингихтиёрийиккитасиникўпайтмасининг$(0,2\pi)$оралиқбўйичаинтреграли 0 гатенг. Худдишукаби((18), шу бобнинг еттинчи параграфи)функцияларнингҳамортогоналсистемаҳосилқилишиникўришмумкин.
Энди$P_n(\cos\theta)$ –
φгабоғлиқбўлмагансферикфункцияниоламизва$P_n^2(\cos\theta)$функциядан бирликсферабўйичаинтегралниҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{S} P_n^2(\cos\theta)\, d\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta) \sin\theta \cdot d\theta d\varphi =$$

$$2\pi \int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

бунда $d\sigma = sin\,\theta \cdot d\theta d\varphi, cos\,\theta = x$ алмаштиришлар бажарилиб, (1) дан фойдаланилди.

Худди шу каби бошқа функцияларга нисбатан

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [P_n^m(\cos\theta)]^2 sin^2 m\varphi \cdot \sin\theta\, d\theta d\varphi = \pi \int_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2 dx$$

тенгликҳосилбўлади. Бутенгликва (3)формуладанфойдаланибқуйидагимуносабатларниҳосилқиламиз:

$$\begin{cases} \iint\limits_S [P_n(\cos\theta)]^2 d\sigma = \dfrac{4\pi}{2n+1}, \\ \iint\limits_S [P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi]^2 d\sigma = \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, \\ \iint\limits_S [P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi]^2 d\sigma = \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}. \end{cases}$$

Бу формулалардан сфера сиртида берилган ихтиёрий функцияни сферик функциялар бўйича ёйиш масалаларида фойдаланилади.

22. Ернинг ўзига тортиш потенциали. Сферик функцияларнинг амалий аҳамияти ҳақида физикага оид мисолни келтирамиз.

Ернинг оғирлик марказини координата боши сифатида белгилаб, $Oxyz$ координаталар системасини танлайлик. Oxy текислиги экваториал текислик, Oz ўқи эса шимолий қутбга йўналган ер айланиш ўқи билан устма-уст тушсин. Oz ўқини Гринвинч меридиани билан кесишади деб ҳисоблаймиз.

Ердан ташқарида бўлган ихтиёрийP нуқтани радиус-вектори, кенглиги ва узунлигини r, φ ва λ деб белгиласак,

$$x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, z = r\cos\theta$$

ернинг ўзига тортиш потенциали

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\left[A_{n,m}\,cos(m\lambda) + B_{n,m}\,sin(m\lambda)\right]\right\}$$

билан ифодаланади. Бунда f - гравитацион доимий, M ва r_0 – ернинг массаси ва ўрта экваториал радиуси, $fM = 3{,}9860\cdot 10^5$км$^3/c^2$, $r_0 = 6378{,}155$ км, P_nва P_n^m – Лежандр кўпҳади ва қўшилган функцияси, $J_n, A_{n,m}$ ва $B_{n,m}$ўлчовсиз катталиклар ернинг шакли ва унинг ичида (ернинг ичида зичлик турлича, шунинг учун ернинг структуравий модели гидросфера билан ўралган қаттиқ қатламдан, қобиқни ичида ёпишқоқ суюқлик, суюқликни марказида қаттиқ сфероид (ички ядро) дан иборат) массани тақсимланишига боғлиқ.

Агар $P_n^m(x)$ қўшилган функциядан нормаллашган $P_n(x)$ кўпҳадга ўтсак

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(x),$$

адабиётларда тез-тез учрайдиган

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right\}$$

$$+ \frac{fM}{r}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\left[A^*_{n,m}\cos(m\lambda) + B^*_{n,m}\sin(m\lambda)\right]\right\},$$

формулага келамиз, бунда

$$A^*_{n,m} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}}\frac{A_{n,m}}{\sqrt{1+2n}}, \qquad B^*_{n,m} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}}\frac{B_{n,m}}{\sqrt{1+2n}}.$$

Агар$A^*_{n,m}$ва $B^*_{n,m}$ ларни $J_{n,m}$ ва $\lambda_{n,m}$ларга $A^*_{n,m} = J_{n,m}\cos(m\,\lambda_{n,m})$, $B^*_{n,m} = J_{n,m}\sin(m\,\lambda_{n,m})$ўзгартирсак, ернинг ўзига тортиш потенциалини бошқа ифодасини оламиз:

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} J_{n,m}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\cos\left[m\left(\lambda - \lambda_{n,m}\right)\right]\right\}.$$

Формулалардаги J_n га пропорционал бўлган қўшилувчилар зонал гармониклар дейилади. Ернинг ўзига тортиш потенциалининг биринчи зонал гармоник коэффициентлари тажрибалар натижаси асосида

$$J_2 = -1082{,}63\cdot 10^{-6}, \quad J_3 = 2{,}54\cdot 10^{-6}, \quad J_4 = 1{,}59\cdot 10^{-6}$$

$$J_5 = 0{,}23\cdot 10^{-6}, \quad J_6 = -0{,}50\cdot 10^{-6}, \quad J_7 = 0{,}36\cdot 10^{-6}$$

$$J_8 = 0{,}12\cdot 10^{-6}, \quad J_9 = 0{,}10\cdot 10^{-6}.$$

$n \neq m$бўлганда$A^*_{n,m}$ва $B^*_{n,m}$ ларга пропорционал тессериаль гармоник коэффициентлар ҳамда $n = m$ бўлгандаги секториал гармониклар қуйидаги жадвалга келтирилган:

n	2	3	3	3	4	4	4	4
m	2	1	2	3	1	2	3	4
$A^*_{n,m}\cdot 10^8$	241,290	196,980	89,204	68,630	-52,989	33,024	98,943	-7,969
$B^*_{n,m}\cdot 10^8$	-136,41	26,015	-63,468	143,04	-48,765	70,633	-15,467	33,928

Геопотенциал қаралаётган $Oxyz$ координаталар системасида Ozернинг айланиш ўқи билан устма-уст тушадиган қилиб танланганлигидан

$$A^*_{n,m} = B^*_{n,m} = 0.$$

Геопотенциалнинг ифодасидаги биринчи қўшилувчи шарнинг зичликнинг сферик тақсимланиши потенциали бўлиб, қолган барча қўшилувчилар ернинг сферик структурадан фарқини характерлайди. Асосий гармоника бўлган зонал гармоника эса ернинг қутбларда сиқилишини ифодалайди. Тоқ тартибли зональ гармониклар ернинг экватор текислигига нисбатан асимметриясини, тессериал ва секториал гармониклар эса ернинг жисмнинг айланиш ўқига нисбатан динамик симметрикликдан фарқини аниқлаб беради.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Сферик функцияларнинг амалий масалаларга татбиғига оид масалалар келтиринг.

2. Сферик функцияларни тўлиқлиги ҳақидаги теоремадан келиб чиқадиган қуйидаги натижаларни исботланг:

Натижа – 1. Сферик функциялар системаси ёпиқ.

Натижа – 2. Сферик функциялар системаси Штурм-Лиувилл масаласининг барча хос функцияларини тўлиқ қоплайди. Ҳар бир$\lambda = n(n+1)$хос сонга$2n+1$та чизиқли боғлиқ бўлмаган хос функциялар мос келади, яъни ҳар бир хос сон $2n+1$ каррали бузилади.

Назорат саволлари

1. Ортогонал система тушунчаси.

2. Ортогонал системанинг чизиқли эркли система бўлиши исботлансин.

3. Грамм детерминанти билан чизиқли боғлиқ система орасидаги боғланиш.

4. Лежандр кўпҳадларининг $L_2[-1,1]$фазода ортогоналсистема ташкил қилиши исботлансин.

5. Гильбертолди фазосининг чекли элементлари системасичизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда Грамм детерминантинингнолга тенг бўлиши исботлансин.

6. Ушбу$\sin(2n+1)\frac{x}{2}$, n=1,2,3,…. функциялар кетма-кетлиги $[0,\pi]$ кесмада ортогоналсистема ташкил қилиши кўрсатилсин.

7. Лежандр кўпҳадининг нормаси ҳисоблансин.

8. Берилган чизиқли эркли системани ортогоналлаштириш.

9. Ушбу$1, x, x^2, x^3, \dots x^n, \dots$системанинг ихтиёрий оралиқда чизиқли эркли бўлиши исботлансин.

10. Фурье қаторининг таърифи, Бессель тенгсизлиги.

11. Фурье коэффицентларининг нолга интилиши ҳақидагитасдиқ келтирилсин ва исботлансин.

12. Фурье қаторининг яқинлашиши.

13. Тўла ортогонал системалар ва уларнинг Фурье қатори билан боғланиши.

14. Парсесваль тенглиги.

15. Фурье қаторига мос келувчи элементнинг ягоналиги ҳақидаги теорема исботлансин.

16. Сферик функциянинг таърифи.

17. Лаплас тенгламасининг n- тартибли бир жинсликўпҳадардан иборат бўлган чизиқли эркли ечимлариҳақида теорема келтирилсин ва исботлансин.

18. Сферик функцияларнинг ошкор кўриниши.

19. $P_n(x)$ва $P_{n,m}(x)$ва функциялар ҳамда уларнинг хоссалари.

20. Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи n-тартибли бир жинсли кўпҳаднинг умумий кўриниши ҳақидагитеорема келтирилсин ва исботлансин.

21. Сферик функцияларнинг ортогоналлик хоссаси.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Александров П.С., Колмогоров А. «Введение в теорию функций действительного переменного». Изд.3-е, переработ.М. - Л., Гостехтеориздат., 1938 г.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, Высшая школа, 1998 г.
3. Беллман Р. «Введение в теорию матриц». Москва, Наука, 1976 г.
4. Брудно А.Л. «Теория функций действительного переменного». Избранные главы.М., «Наука», 1971 г.
5. Брычков Ю.А. и др. Таблицы неопределенных интегралов. Москва, Физматлит, 2003 г.
6. Воробьев Н.Н. «Теория рядов», Москва, Наука, 1986 г.
7. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.И. «Курс классической математики в примерах и задачах», Москва, Физматлит, 2009 г.
8. Гливенко В.И. «Интеграл Стилтьеса». М., 1936 г..
9. Гохман Э. «Интеграл Стилтьеса и его приложения», Москва, 1958 г.
10. Гохман Э.Х. «Интеграл Стилтьеса и его приложения». Государственное издательство физ. - мат. литературы, М., 1958 г.
11. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализе». Москва, Наука, 1977 г.
12. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. «Мера и интеграл». - М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002 г.
13. ЕфимовА.В.,Золотарёв Ю.Г., Терногорева В.М.«Математическийанализ.Специальныеразделы»,т.2,Москва, «Высшаяшкола»,1980 г.
14. Зоммерфельд А. «Механика», НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 г.
15. Камке Э. «Интеграл Лебега-Стилтьеса». Перевод с немецкого Г.П. Сафроновой. Под ред. И.П. Натансона. - М.: Государственное издательство физ. - мат. литературы, 1959г.

16. Кашин Б.С., Саакян А.А. «Ортогональные ряды», Моска, 1999 г.
17. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. «Элементы теории функций и функционального анализа». Москва, 1976 г.
18. Кудрявцев Л.Д. «Математический анализ»,т.2,Москва, «Высшаяшкола», 1973 г.
19. Кудрявцев Л.Д. и др. «Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды». Москва, Физматлит, т.2, 2003 г.
20. Кудрявцев Л.Д. и др. «Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность». Дифференцируемость. Москва, Физматлит, т.1, 2003 г.
21. Кудрявцев Л.Д. и др. «Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольных переменных». Москва, Физматлит, т.1, 2003 г.
22. Курош А.Г. «Курс высшей алгебры», Москва, 2004 г.
23. ЛаврентьевМ.А.,ШабатБ.В.«Методытеориифункций комплексного переменного», Москва, «Наука»,2000 г.
24. Леонтьева Т.А. и др. «Задачи по теории функций действительного переменного», Учеб. Пособие по спец. «Математика» / Панферов В.С., Серов В.С. - М.: Изд-во МГУ, 1997 г.
25. Ляшко И.И. и др. «Математический анализ: Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл». Т.1, Киев, Вища школа, 2001 г.
26. Ляшко И.И. и др. «Математический анализ: Математический анализ: Кратные и криволинейные интегралы». Т.3, Киев, Вища школа, 2001 г.
27. Ляшко И.И. и др. «Математический анализ: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента». Т.2, Киев, Вища школа, 2003 г.
28. Макаров И.П. «Теория функций действительной переменной». Под ред. И.Я. Верченко – Москва, «Высшая школа» - 1965
29. Медведев Ф.А. «Развитие понятия интеграла». - М., «Наука», 1974г.
30. Натансон И.П. «Теория функций вещественной переменной». Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974 г.
31. Никольский С.М. «Курс математического анализа», т.2,Москва, «Наука», 1983 г.
32. Песин И.Н. «Развитие понятия интеграла», М., «Наука», 1966 г.
33. Проскурякой И.В. «Сборник задач по линейной алгебре», Москва, Наука, 1978 г.
34. Райзер В.Д. «Теория надежности сооружений», Научное издание, 2010
35. Романовский П.И. Ряды Фурье. «Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа». М.:, Наука, 1980 г.
36. Рудин У. «Основы математического анализа»,Москва, «Мир»,1964 г.
37. Самородницкий А.А. «Теория меры», Сыктывкар. Гос. Университет. - Л.: Издательство ЛГУ, 1990 г.
38. СмирновВ.И.«Курсвысшейматематики»,т.3,ч.2.Москва, «Наука» 1974

г.
39. Соболев В.И. «Лекции по дополнительным главам математического анализа». Москва, Наука, 1968 г.
40. Теляковский С.А. «Курс лекций по математическому анализу». Москва, Наука, 2001 г.
41. «Теория вероятностей». Москва, изд-во МГТУ им. Баумана, 2010 г.
42. Тимофеев А.Ф. «Интегрирование функций».М. - Л. Издательство технико-теоретической литературы, 1948 г.
43. ТитчмаршЕ. «Теорияфункций»,Москва, «Наука»,1980 г.
44. Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики», Москва, Наука, 1977 г.
45. Толстов Г.П. «Мера и интеграл». Главная редакция физ. - мат. Литературы, «Наука», 1976г.
46. Туйчиев Т.Т., Бедарев А.С. «Анализнинг танланган боблари», Тошкент, 2006 й.
47. Туйчиев Т.Т., Хожиев С.Х.«Анализнинг танланган боблари»,Бухоро, 2000 й.
48. Фихтенгольц Г.М. «Курс дифференциальногоиинтегрального исчисления»,т.1,2,3,Москва,«Наука» 1969 г.
49. Фролов Н.А. «Теория функций действительного переменного». Учебное пособие для пединститутов. Изд-во 2-е, М., Учпедгиз, 1961 г.
50. Холодова С.Е.. Перегудин С.И. «Специальные функции в задачах математической физики». Санкт-Петербург, 2012 г.
51. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. «Краткий курс высшей математики», т.2, Москва, «Высшая школа»,1980 г.
52. Эйлер Л. «Интегральное исчисление». Т.2. Пер. с латинского. - М., Гостехтеориздат., 1957 г.
53. «Теория функций и функциональный анализ», Сборник статей, Казань, Издательство Казанского университета, 1976г.

Интернет сайтлар

54. http://www.phismat.ru/dif.php

Тўлқин Ҳусенович Расулов,
Ҳайдар Раупович Расулов

МАТЕМАТИК АНАЛИЗНИНГ ТАНЛАНГАН БОБЛАРИ

Muharrir:	*G`.Murodov*
Texnik muharrir:	*G.Samiyeva*
Musahhih:	*A.Qalandarov*
Sahifalovchi:	*M.Ortiqova*

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 26.05.2020. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog`ozi. Bosma tobog`i 10,0. Adadi 100. Buyurtma №63.

Buxoro viloyat Matbuot va axborot boshqarmasi
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45