

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ



“Дифференциал геометрия
ва топология”
қанидан

Марузалар матни

ТЕРМИЗ-2013

1-МАЪРУЗА.

Мавзу: Дифференциал геометрия ва топология фани предмети (2 соат)

Дифференциал геометрия курсида уч ўлчамли фазодаги чизиклар ва сиртлар математик анализ ёрдамида ўрганилади. Маълумки, аналитик геометрия курсида чизиклар ва сиртларни ўрганиш уларнинг тенгламаларини текшириш ёрдамида амалга оширилади. Шунинг учун алгебраик методлар аналитик геометрия курсида асосий роль ўйнайди. Дифференциал геометрия курсида биз чизик ва сиртларни тенгламалар ёрдамида эмас, балки фазодаги маълум хоссаларга эга бўлган фигуралар сифатида аниқлаймиз ва уларни математик анализ ёрдамида ўрганиш учун дифференциаланувчи функциялар ёрдамида параметрлаймиз. Геометрияда математик анализ методларини тадбиқ қилишга Петербург фанлар академияси аъзоси Л. Эйлер катта ҳисса қўшди. У чизикни параметрлаш, сирт нуқтасида бош йўналишлар каби муҳим тушунчаларни киритди ва жуда ажойиб теоремаларни исбот қилди. Дифференциал геометриянинг асосий масалалари систематик равишда ёритилган биринчи асарни Гаспар Монж ёзди. Унинг «Чексиз кичиклар анализининг геометрияга тадбиқи» номи китоби 1795 йили чоп этилди. Г. Монжнинг шогирдлари Дьюпен, Менье ҳам сиртлар назариясига катта ҳисса қўшдилар.

Геометрия фани XIX асрда жуда тез ривожланди. 1826 йили буюк математик Н.И. Лобачевский Евклид геометриясидан фарқли геометрия мавжуд эканлигини кўрсатди. Бу геометрияда геодезик учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси 180° дан кичикдир. 1827 йили Гаусс сиртнинг тўлиқ эгрилиги унинг ички геометриясига тегишли эканлигини исботлади. 1854 йили Б.Риман Лобачевский геометриясини ҳам ўз ичига олувчи янги геометрияни асослаб борди. Бу геометрия Риман геометрияси деб аталади. Риман геометриясида геодезик учбурчаклар ички бурчаклар йиғиндиси 180° дан катта ҳам, кичик ҳам бўлиши мумкин.

XX асрда дифференциал геометриянинг ривожланишида чизиклар ва сиртлар ўрнига ҳар хил дифференциал структуралар киритилган силлиқ кўпхилликларни ўрганиш тенденцияси пайдо бўлди ва ривожланди. Бу объектларни (силлиқ кўпхилликларни) ўрганиш қулайлиги шундаки, улар чизиклар ва сиртлар каби Евклид фазосининг қисм тўпламлари сифатида эмас, балки дифференциал структура киритилган абстракт топологик фазолар сифатида аниқланади. Кўпхилликлар назариясида чизиклар ва сиртлар мос равишда бир ўлчамли ва икки ўлчамли кўпхилликларни ташкил этади. Ҳозирги вақтда кўпхилликлар назарияси геометрия курсининг асосий қисмлардан бири бўлиб қолди.

2-МАЪРУЗА.

Мавзу: Евклид фазосида топология. Очик ва ёпиқ тўпламларнинг асосий хоссалари. (2 соат)

Ҳақиқий сонлар тўпламини R^1 билан белгилаймиз ва $n \geq 1$ учун $R^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) : x^i \in R^1, i = 1, 2, \dots, n\}$ тўпламда $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ва $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ нуқталар орасидаги масофани

$$d(x, y) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + \dots + (y^n - x^n)^2}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу киритилган $d : R^n \times R^n \rightarrow R^1$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

- 1) мусбат аниқланган: ихтиёрий $x, y \in R^n$ жуфтлик учун $d(x, y) \geq 0$ бўлиб, $d(x, y) = 0$ бўлиши учун $x = y$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.
- 2) симметрик функциядир: ихтиёрий x, y жуфтлик учун $d(x, y) = d(y, x)$ муносабатлар ўринли.
- 3) учбурчак тенгсизлигини қаноатлантиради: ихтиёрий x, y, z учта нуқта учун $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ тенгсизлик бажарилади.

Юқорида $d(x, y)$ функциянинг 1, 2-шартларни қаноатлантириши равшан. Бу шартларнинг учинчиси сизга математик анализ курсидан маълум бўлган

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Коши тенгсизлигидан келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, $z = (z^1, z^2, \dots, z^n)$ нуқталар учун $a^k = x^k - z^k$, $b^k = z^k - y^k$ белгилашлар киритсак, Коши тенгсизлигидан $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ тенгсизлик келиб чиқади. Киритилган d функция билан биргаликда R^n метрик фазо бўлади.

Евклид фазода берилган x нуқта ва $r > 0$ сони учун

$$B_r(x) = \{y \in R^n : d(x, y) < r\}$$

тўплам маркази x нуқтада ва радиуси r га тенг очик шар деб,

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in R^n : d(x, y) \leq r\}$$

тўплам эса маркази x нуқтада бўлган ва радиуси r га тенг ёпиқ шар деб аталади.

Сонлар ўқида, яъни R^1 да $B_r(x)$ очик шар $(x-r, x+r)$ очик интервал, ёпиқ $B_r(x)$ шар эса $[x-r, x+r]$ ёпиқ кесма бўлади.

Энди очик шар ёрдамида R^n да очик тўплам тушунчасини киритамиз. Берилган A тўплам ва унга тегишли a нуқта учун $r > 0$ сони мавжуд бўлиб $B_r(a) \subset A$ бўлса, a нуқта A тўпламнинг ички нуқтаси дейилади. Ҳамма нуқталари ички нуқталар бўлган тўплам очик тўплам деб аталади. Демак, ҳар қандай очик шар очик тўплам бўлади, чунки $x \in B_r(a)$ бўлса, $r_x = \min\{d(a, x), r - d(a, x)\} > 0$ сони учун $B_{r_x}(x) \subset B_r(a)$ бўлади. Ҳақиқатан $y \in B_{r_x}(x)$

бўлса, $d(a, y) \leq d(a, x) + d(y, x) \leq d(a, x) + r_x \leq d(a, x) + r - d(a, x) = r$ яъни $d(a, y) < r$, демак $B_{r_x}(x) \subset B_r(a)$ бўлади. Энди биз бўш тўпламни $\emptyset$ билан белгилаб, уни ихтиёрий тўплам учун қисм тўплам ҳисоблаймиз, ва уни R^n фазонинг очик қисм тўплами деб қабул қиламиз. Ана шунда очик қисм тўпламлар учун қуйидаги теоремани исботлай оламиз.

Теорема 1. Очик қисм тўпламлар учун қуйидагилар ўринлидир.

1. Бутун фазо, яъни R^n очик тўпламдир.
2. Бўш тўплам очик тўпламдир.
3. Чекли сондаги очик қисм тўпламларнинг кесишмаси (умумий қисми) очик тўпламдир.
4. Ҳар қандай очик тўпламлар оиласи учун бу оиладаги очик тўпламлар йиғиндиси очик тўпламдир.

Исбот. Теореманинг иккинчи тасдиғи исбот талаб қилмайди, чунки бўш тўпламни очик тўплам деб эълон қилганмиз. Агар $a \in R^n$ бўлса, ихтиёрий $r > 0$ сони учун $B_r(a) \subset R^n$ муносабат ҳар доим ўринли, шунинг учун ҳам R^n очик тўпламдир.

Энди $A_1, A_2, \dots, A_m$ очик тўпламлар берилган бўлса, $A = \bigcap_{i=1}^m A_i$ тўпламнинг очик эканлигини кўрсатайлик. Агар $A = \emptyset$ бўлса, иккинчи пунктга кўра A очик тўплам бўлади. Шунинг учун $A \neq \emptyset$ деб фараз қилиб, A га тегишли ихтиёрий a нуктанинг ички нукта эканлигини кўрсатайлик. Агар $a \in A$ бўлса, унда $a \in A_i$ муносабат барча i лар учун бажарилади. Ҳар бир A_i очик тўплам бўлганлиги учун шундай $r_i > 0$ сони мавжудки, $B_{r_i}(a) \subset A_i$ муносабат бажарилади. Бу чекли сондаги r_i сонларининг энг кичигини r билан белгиласак, $B_r(a) \subset B_{r_i}(a) \subset A_i$ муносабат бажарилади. Демак $B_r(a) \subset A$, ва a нукта A тўпламнинг ички нуктасидир. Энди теореманинг 4-пунктини исботлайлик. Очик тўпламлардан иборат $\{A_\alpha\}$ оила берилган бўлсин. $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$

йиғиндининг очик тўплам эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун A тўпламга тегишли ихтиёрий a нукта олиб, унинг ички нукта эканлигини кўрсатамиз. Йиғиндига тегишли a нукта йиғиндида қатнашаётган A_{α_0} тўпламларнинг камида бирортасига тегишли бўлади. Фараз қилайлик $a \in A_{\alpha_0}$ бўлсин. A_{α_0} тўплам очик бўлганлиги учун бирорта $r > 0$ мавжуд бўлиб, $B_r(a) \subset A_{\alpha_0}$ муносабат бажарилади. Демак $B_r(a) \subset A$ ва A тўплам учун a ички нукта бўлади. Бундан эса, A нинг очик тўплам эканлиги келиб чиқади.

Энди очик тўплам тушунчасидан фойдаланиб, ёпиқ тўплам тушунчасини киритамиз. Берилган F тўпламнинг тўлдирувчиси $CF = R^n \setminus F$ очик тўплам бўлса, F ёпиқ тўплам деб аталади. Биринчи

теоремадан фойдаланиб, ёпиқ тўпламлар учун қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

Теорема-2. Ёпиқ қисм тўпламлар учун қуйидагилар ўринлидир.

1. Бутун фазо, яъни R^n ёпиқ тўпамдир.
2. Бўш тўпам ёпиқ тўпамдир.
3. Ҳар қандай ёпиқ қисм тўпламлар оиласи учун шу оиладаги тўпламлар кесишмаси ёпиқ тўпамдир.
4. Чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси ёпиқ тўпамдир

Биз R^n фазонинг $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ элементлари учун $x + y = (x^1 + y^1, x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$, $\lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n)$

қоидалар билан янги $x + y$, λx элементларни аниқлашимиз мумкин. Бу ерда λ ҳақиқий сон. Бу киритилган амалларга нисбатан R^n чизиқли фазо бўлади. Бу ҳолда R^n фазони чизиқли фазо сифатида қарасак, унинг элементини вектор деб атаймиз. Чизиқли фазо учун белгилашни ўзгартирмаймиз, чунки ҳар гал текст мазмунидан R^n фазонинг метрик фазо ёки чизиқли фазо эканлиги кўриниб туради. Метрик R^n фазо нуқталарининг ҳар бир x, y жуфтига боши x нуқтада, охири эса y нуқтада бўлган $\overline{xy}$ векторни мос қўйсак, бу вектор чизиқли R^n фазонинг элементи бўлади. Чизиқли R^n фазода скаляр қўпайтма киритилгандан кейин метрик R^n фазони Евклид фазоси деб атаймиз. Демак, R^n фазони Евклид фазоси деганимизда, унда d функция ёрдамида метрика киритилиб, унга тегишли нуқталарнинг ҳар бир жуфтига мос қўйилган векторлар фазосида скаляр қўпайтма киритилгандир.

Евклид фазосида

$$y^j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x^i + a_j, i=1,2,\dots,n,$$

кўринишдаги алмаштиришда $\{a_{ij}\}$ матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, у аффин алмаштириш деб аталади. Бу ерда

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}),$$

белгилашларни ҳисобга олиб аффин алмаштиришни $\overline{y} = A\overline{x} + \overline{a}$ кўринишда ёзишимиз мумкин. Агар A матрица ортогонал матрица бўлса, F акслантириш ҳаракат деб аталади. Маълумки, A ортогонал матрица бўлса, $\overline{x}, \overline{y}$ векторлар учун

$$(A\overline{x}, A\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$$

тенглик ўринлидир, яъни ҳаракатда скаляр қўпайтма сақланади. Ҳақиқатан, A ортогонал матрица бўлса

$$A^T A = E$$

муносабат ўринли бўлади. Бу ерда A^T транспонирланган матрица, E эса бирлик матрицадир. Шунинг учун

$$(Ax, Ay) = (x, A^T Ay) = (x, y)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бизга аналитик геометрия курсидан маълумки ҳаракат икки нуқта орасидаги масофани сақлайди. Агар $\det A > 0$ бўлса, маълумки F ҳаракат фазода ориентацияни ҳам сақлайди.

3-МАЪРУЗА.

Мавзу: Топологик фазолар (4 соат)

X -бирорта тўплам ва унинг баъзи қисм тўпламларидан иборат $\tau = \{G_\alpha\}$ оила берилган бўлсин. Бу оила чекли сондаги элементлардан иборат бўлиши ёки унинг элементлари чексиз кўп бўлиши мумкин. жумладан, τ оилага X нинг ҳамма қисм тўпламлари тегишли бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун биз индекс ўзгарувчиси α нинг қандай тўпламга тегишли эканлигини кўрсата олмаймиз. Биз X нинг баъзи қисм тўпламларидан иборат τ оиладан қуйидаги шартларининг бажарилишини талаб қиламиз:

1) X тўплам τ га тегишли бўлсин (маълумки, ҳар қандай тўплам ўзининг қисм тўплами бўлади. Шунинг учун у τ га тегишли бўлиши мумкин, бўлмаслиги ҳам мумкин);

2) Бўш тўплам τ га тегишли бўлсин (бўш тўплам ҳар қандай тўпламга қисм тўпламдир, шунинг учун у X нинг қисм тўплами сифатида τ га тегишли бўлиши мумкин ёки бўлмаслиги мумкин);

3) τ оилага тегишли ҳар қандай иккита тўпламнинг умумий қисми (кесишмаси) τ оилага тегишлидир.

4) τ оилага тегишли қисм тўпламлардан иборат ихтиёрий $\{G_{\alpha_\beta}\}$ оила учун йиғинди $\bigcup_\beta G_{\alpha_\beta}$ ҳам τ га тегишли бўлсин. Бу ерда $\{G_{\alpha_\beta}\}$ оила чекли сондаги элементлардан иборат ёки чексиз кўп элементлардан иборат бўлиши мумкин. Шунинг учун бу ерда ҳам биз индексдаги ўзгарувчи β тегишли тўпламни кўрсата олмаймиз. Жумладан, $\{G_{\alpha_\beta}\}$ оила τ оила билан устма-уст тушиши

ҳам мумкин. Юқоридаги талаб қилинган 4 та шартлар бажарилган тақдирда (X, τ) жуфтлик топологик фазо деб аталади, τ эса X тўпламдаги топология деб аталади. Демак, бирорта тўпламни топологик фазога айлантириш учун унинг юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи қисм тўпламларидан иборат бирорта оилани аниқлаш етарлидир. Агар (X, τ) топологик фазо бўлса, X тўпламнинг элементлари нуқталар деб, τ га тегишли X тўпламнинг қисм тўпламлари очик тўпламлар деб аталади. Юқоридаги келтирилган 1) - 4) шартларни топологик фазо аксиомалари деб атаймиз. Шундай қилиб, биз ҳозир умумий топологиянинг асосий тушунчаси топологик фазо тушунчасини киритдик. энди бир нечта мисоллар келтирайлик.

1 - мисол.

$X = R^n$ бўлса, τ билан биринчи параграфда киритилган R^n даги очик тўпламлар оиласини белгилаймиз. Биринчи теоремага кўра, τ топология бўлади. Бу топология евклид топологияси деб аталади.

2 - мисол.

X - ихтиёрий тўплам, τ оила бўш тўплам ва X дан иборат бўлса, (X, τ) жуфтлик топологик фазо бўлади. Бу топологик фазода фақат иккита очик қисм тўплам мавжуд.

3 - мисол.

X - ихтиёрий тўплам, τ оила X нинг ҳамма қисм тўпламларидан иборат оила бўлсин. Бу топологик фазода ихтиёрий қисм тўплам очик тўпламдир.

Энди (X, τ) топологик фазо, ва бирорта $A \subset X$ –қисм тўплам бўлсин. Берилган A тўпламни ҳам τ топология ёрдамида топологик фазога айлантириш мумкин. Бунинг учун A тўпламда $\tau_A = \{A \cap G_\alpha : G_\alpha \in \tau\}$ оила топология эканлигини кўрсатамиз:

- 1) $X \in \tau$ бўлганлиги ва $X \cap A = A$ тенгликдан $A \in \tau_A$ келиб чиқади.
- 2) $\emptyset \in \tau$ бўлганлиги ва $\emptyset \cap A = \emptyset$ тенгликдан $\emptyset \in \tau_A$ келиб чиқади.
- 3) $A_1, A_2 \in \tau_A$ бўлса, $G_1, G_2 \in \tau_A$ тўпламлар мавжуд бўлиб,
 $A_1 \cap A_2 = (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = A \cap (G_1 \cap G_2)$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $G_1 \cap G_2 \in \tau$ бўлганлиги учун $A_1 \cap A_2 \in \tau_A$ бўлади.
- 4) τ_A оилага тегишли $\{A_\beta\}$ тўпламлар оиласи берилган бўлса, τ га тегишли

G_β тўпламлар мавжуд бўлиб, $\bigcup_\beta A_\beta = \bigcup_\beta (A \cap G_\beta) = A \cap \left(\bigcup_\beta G_\beta \right)$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\bigcup_\beta G_\beta \in \tau$ бўлганлиги учун $\bigcup_\beta A_\beta$ йиғинди τ_A оилага тегишли бўлади.

Демак (A, τ_A) жуфтлик топологик фазо бўлади. Бу ҳолда τ_A топологияни A тўпламда X топологик фазодаги τ топология ёрдамида аниқланган ёки келтирилган топология деб аталади.

Топологик фазо базаси

Бизга (X, τ) - топологик фазо ва $B = \{U_\alpha\}$ - очик тўпламлар оиласи берилган бўлсин, яъни ҳар бир α учун $U_\alpha \in \tau$ муносабат ўринлидир. Агар (X, τ) топологик фазонинг ихтиёрий очик қисм тўп-ламани B оилага тегишли тўпламлар йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин бўлса, B оила (X, τ) топологик фазонинг базаси деб аталади.

Мисол. Биз евклид фазосини қарайлик, яъни $X = R^n$ ва τ эса евклид топологияси бўлсин. Бизга маълумки, ихтиёрий $x \in A$ учун шундай $r_x > 0$ мавжуд бўлиб, $B_{r_x}(x) \subset A$ бўлса A тўплам очик дейилади. Демак, A очик тўплам бўлса, $A = \bigcup_x B_{r_x}(x)$, яъни A тўпламни очик шарлар йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин. Бундан келиб чиқадики, R^n фазода ҳамма очик шарлардан ва бўш тўпламдан иборат оила Евклид топологияси учун база ҳосил қилади. Умуман олганда бу факт ихтиёрий (X, ρ) метрик фазо учун ўринлидир, яъни очик шарлар ва бўш тўпламдан иборат оила метрик фазо учун базани ташкил қилади. Энди топологик фазо базасининг асосий хоссаларини ўрганамиз.

Теорема 3. Берилган $B = \{U_\alpha\}$ оила (X, τ) топологик фазонинг базаси бўлиши учун ихтиёрий $x \in X$ нуқта ва унинг ихтиёрий U атрофи учун B га оилага тегишли ва $x \in U_{\alpha_0} \subset U$ муносабатни қаноатлантирувчи U_{α_0} тўпламнинг мавжудлиги зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. Фараз қилайлик $B = \{U_\alpha\}$ оила база, $x \in X$ ва U тўплам x нуқтанинг атрофи бўлсин. Берилган U тўплам очик бўлганлиги учун у B оилага тегишли очик тўпламлар йиғиндисидан иборат ва улардан бирортаси албатта x нуқтани ўз ичига олади.

Етарлилиги. Берилган $B = \{U_a\}$ оила теорема шартларини қаноатлантирса, унинг база эканлигини кўрсатайлик. Ихтиёрий очик A тўпламни қарайлик. Агар $a \in A$ бўлса, теорема шартига кура $U_a \in B$ мавжуд бўлиб, $a \in U_a \subset A$ муносабат бажарилади. Шунинг учун $A = \bigcup_{a \in A} U_a$ тенглик ўринли бўлади. Теорема исботланди. $\square$

Теорема 4. Бизга (X, τ) топологик фазо ва унинг $B = \{U_a\}$ оиладан иборат базаси берилган бўлса, қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$1) \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = X$$

2) Ихтиёрий $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}$ тўпламлар ва ихтиёрий $a \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ нуқта учун $U_{\alpha_3} \in B$ мавжуд бўлиб, $a \in U_{\alpha_3} \subset U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ муносабат бажарилади.

Исбот. Бу ерда 1) муносабат базанинг таърифига кўра равшан бўлганлиги учун 2) муносабатни кўрсатамиз. Агар $a \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ бўлса, $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ очик тўплам эканлигидан 1-теоремага кўра U_{α_3} мавжуд бўлиб, $a \in U_{\alpha_3} \subset U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ муносабатлар бажарилади.

Теорема 5. Берилган X тўплам ва унинг қисм тўпламларидан иборат $B = \{U_{\beta}\}$ оила учун қуйидаги учта шартлар бажарилса, яъни:

1) Берилган оилага тешили тўпламлар йиғиндиси берилган X тўпламни қопласа: $\bigcup_{\beta} U_{\beta} = X$;

2) Бўш тўплам берилган оилага тегишли бўлса: $\emptyset \in B$;

3) Берилган оилага тегишли ихтиёрий U_{β_1}, U_{β_2} тўпламлар ва ихтиёрий $a \in U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ нуқта учун $U_{\beta_3} \in B$ мавжуд бўлиб, $a \in U_{\beta_3} \subset U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ муносабат ўринли бўлса,

X тўпламда шундай ягона τ топология мавжудки (X, τ) топологик фазо учун B оила база бўлади.

Исбот. Берилган X тўпламда τ оилани қуйидагича аниқлаймиз. Биз B оилага тегишли тўпламларни ва уларнинг йиғиндисидан иборат ҳамма қисм тўпламлардан иборат оилани τ билан белгилаймиз. Теореманинг 1) ва 2) шартларига кўра X ва бўш тўплам τ оилага тегишли бўлади. Бундан ташқари τ оиланинг аниқланишига кўра унга тегишли тўпламларнинг йиғиндиси τ га тегишли. Демак, $A_1, A_2 \in \tau$ бўлса, $A_1 \cap A_2 \in \tau$ ни кўрсатишимиз керак. Агар $a \in A_1 \cap A_2$ бўлса, теореманинг 3-шартига кўра $U_a \in B$ мавжуд ва $a \in U_a \subset A_1 \cap A_2$ бўлади. Демак, $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{a \in A_1 \cap A_2} U_a$. Бу эса $A_1 \cap A_2 \in \tau$

эканлигини билдиради. Демак τ оила топология аксиомаларини қаноатлантиради. Бу топологиянинг аниқланишига кўра B оила унинг учун база бўлади. $\square$

4-МАЪРУЗА.

Мавзу: Ички чегаравий ва уриниш нуқталари. Тўпламнинг ёпиғи. (2 соат)

(X, τ) - топологик фазода, $A \subset X$ тўплам учун унинг тўлдирувчиси $X \setminus A$ очик тўплам бўлса, A тўплам ёпиқ тўплам деб аталади. Топологик фазо аксиомаларидан фойдаланиб ёпиқ тўпламлар учун қуйидаги хулосаларни исботлаш мумкин:

- 1) X ёпиқ тўпламдир;
- 2) бўш тўплам ёпиқ тўпламдир;
- 3) чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси ёпиқ тўпламдир;
- 4) ихтиёрий ёпиқ тўпламлар оиласи учун бу тўпламлар кесишмаси (умумий қисми) ёпиқ тўпламдир;

Бу хоссаларни исботлаш ўқувчиларга ҳавола қилинади.

(X, τ) - топологик фазо, $x \in X$ бўлсин. Агар U очик тўплам бўлиб, $x \in U$ бўлса, U тўплам x нинг атрофи дейилади. Шундай қилиб, x нуқта тегишли бўлган ихтиёрий очик тўплам шу нуқтанинг атрофи дейилар экан. $A \subset X$, $x \in X$ бўлиб, x нуқтанинг бирорта атрофи U учун $U \subset A$ муносабат бажарилса, x нуқта A тўпламнинг ички нуқтаси дейилади. A тўпламнинг ички нуқталари тўпламини $\text{int } A$ билан белгилаймиз. Агар x нуқтанинг ихтиёрий атрофи U учун $A \cap U \neq \emptyset$ ва $(X \setminus A) \cap U \neq \emptyset$ муносабатлар бажарилса x нуқта A тўпламнинг чегаравий нуқтаси дейилади. Чегаравий нуқталар тўпламини ∂A кўринишда белгилаймиз.

4 – Мисол.

$X = \mathbb{R}^1$, $A = (a, b)$ бўлсин. Бу ерда a, b - ҳақиқий сонлар ва $a < b$. Бу мисолимизда $\text{int } A = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$

5 - Мисол.

$X = \mathbb{R}^1$, A - ҳамма рационал сонлар тўплами бўлсин. Бу мисолимизда $\partial A = X$, чунки ихтиёрий ҳақиқий сон учун унга яқинлашувчи рационал сонлар кетма-кетлиги мавжуд.

Бизга $A \subset X$ қисм тўплам ва $x \in X$ нуқта берилган бўлсин. Агар x нуқтанинг ихтиёрий атрофида A тўпламга тегишли нуқталар мавжуд бўлса, x нуқта A тўпламнинг уриниш нуқтаси дейилади. Берилган A тўпламнинг ҳамма уриниш нуқталари тўплами $\bar{A}$ билан белгиланади ва A нинг ёпиғи деб аталади.

Берилган $A \subset X$ тўплам ва $\text{int } A$, ∂A ва $\bar{A}$ тўпламлар учун қуйидаги теоремалар ўринлидир.

Теорема-6. Ҳар қандай A тўплам учун $\bar{A} = \text{int } A \cup \partial A$ муносабат ўринлидир.

Теорема-7. A тўплам очик тўплам бўлиши учун $\text{int } A = A$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Теорема-8. Ҳар қандай A тўплам учун $\bar{A}$ ёпиқ тўпламдир.

Учинчи теореманинг исботи. Сизларга маълумки $A = B$ муносабат $A \subset B$, $B \subset A$ муносабатларга тенг кучлидир. Демак $\bar{A} \subset \text{int } A \cup A$ ва $\bar{A} \supset \text{int } A \cup A$ муносабатларни исботлашимиз керак.

Агар $x \in \bar{A}$ бўлса, x нуқтанинг ихтиёрий атрофида A тўплагма тегишли нуқталар мавжуд. Агар x нуқтанинг ихтиёрий атрофида $X \setminus A$ тўплагма тегишли нуқталар ҳам бўлса, унда $x \in \partial A$ муносабат ўринли, яъни x чегаравий нуқта бўлади. Агар x нуқтанинг бирорта U атрофида $X \setminus A$ тўплагма тегишли нуқталар бўлмаса, унда $x \in U \subset A$ муносабат ўринли, яъни x ички нуқта бўлади, демак $x \in \text{int } A$. Бу мулоҳазаларимиздан, $\bar{A} \subset \text{int } A \cup \partial A$ эканлиги келиб чиқади. Энди $x \in \text{int } A \cup \partial A$ бўлсин. Демак, $x \in \text{int } A$ ёки $x \in \partial A$ муносабат бажарилади. Иккала ҳолда ҳам x нинг ихтиёрий атрофида A тўплагма тегишли нуқталар мавжуд ва демак $x \in \bar{A}$. $\square$

Тўртинчи теореманинг исботи ўқувчиларимизга ҳавола этилади.

Бешинчи теореманинг исботи. Биз $\bar{A}$ тўплагманинг ёпиқ тўплагма эканлигини исботлаш учун $X \setminus \bar{A}$ тўплагманинг очик тўплагма эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун $X \setminus \bar{A}$ га тегишли ихтиёрий x нуқтани қарайлик. Демак, x нуқта $\bar{A}$ га тегишли эмас ва шунинг учун унинг шундай U атрофи мавжудки, бу атрофда A га тегишли нуқталар йўқ, яъни $U \cap A = \emptyset$. Шунинг учун $x \in U \subset X \setminus \bar{A}$, яъни x нуқта $X \setminus \bar{A}$ тўплагманинг ички нуқтасидир. Тўртинчи теоремага кўра $X \setminus \bar{A}$ очик тўплагмидир. $\square$

Теорема-9. Ихтиёрий ёпиқ A тўплагма учун $\bar{A} = A$ муносабат ўринлидир.

Исбот. Ҳар доим $A \subset \bar{A}$ бўлганлиги учун ёпиқ A тўплагма учун $A \supset \bar{A}$ муносабатни исботлаш етарли. Бунинг учун $\bar{A}$ га тегишли ихтиёрий x нуқтани қарайлик. Агар $x \in X \setminus A$ бўлса, $X \setminus A$ очик тўплагма бўлганлиги ва x уриниш нуқтаси эканлигидан $(X \setminus A) \cap A \neq \emptyset$ муносабат келиб чиқади. Бу қарама-қаршилик $x \in A$ эканлигини кўрсатади. $\square$

5- МАЪРУЗА.

Мавзу: Хаусдорф аксиомаси. Топологик фазода кетма-кетлик лимити. Топология базаси. (2 соат)

Метрик фазолар топологик фазоларнинг жуда муҳим синфини ташкил этади. Бу фазоларда ихтиёрий икки нукта учун улар орасидаги масофа тушунчаси киритилади. Метрик фазоларининг муҳим турлари билан сиз биринчи курсда танишасиз.

Берилган X - ихтиёрий тўплам учун тўғри $X \times X$ кўпайтмада $\rho: X \times X \rightarrow R^1$ функция аниқланган бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X$
- 2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X$
- 3) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$
- 4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$

Юқоридаги шартлар метрик фазо аксиомалари дейилади. Бу шартлар бажарилса (X, ρ) жуфтлик метрик фазо дейилади. (X, ρ) - метрик фазо, $x \in X, r > 0$ бўлса маркази x нуктада ва радиуси r га тенг очик шар $U_r(x)$ қуйидагича аниқланади:

$$U_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

Очик шар ёрдамида метрик фазода очик тўплам тушунчасини киритиш мумкин. $A \subset X$ - қисм тўплам, $x \in A$ бўлиб бирорта $r > 0$ сон учун $U_r(x) \subset A$ бўлса x нукта A тўпламнинг ички нуктаси дейилади. Ҳамма нукталари ички нукталар бўлган тўплам очик тўплам дейилади. Агар τ оила сифатида (X, ρ) метрик фазонинг ҳамма очик қисм тўпламлари ва бўш тўпламдан иборат оилани олсак, натижада (X, τ) жуфтлик топологик фазога айланади. Бу топология (X, ρ) фазода ρ метрика ёрдамида киритилган топология деб аталади. Энди τ оиланинг топологик фазо аксиомаларини қаноатлантиришини текширайлик.

- 1) $x \in X$ ва r ихтиёрий сон бўлса, $U_r(x) \subset X$ бўлганлиги учун X тўплам τ оиласига тегишлидир;
- 2) Бўш тўплам τ оилага унинг аниқланишига кўра тегишлидир;
- 3) Иккита тўплам τ оилага тегишли бўлса, уларнинг кесишмаси ҳам бу оилага тегишли эканлигини кўрсатайлик. Агар $A_1, A_2 \in \tau$ ва $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ бўлса, иккинчи шартга кўра $A_1 \cap A_2 \in \tau$ муносабат ўринлидир. Фараз қилайлик, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ва $x \in A = A_1 \cap A_2$ бўлсин. Қаралаётган A_1 ва A_2 тўпламлар очик бўлганлиги учун шундай r_1 ва r_2 мусбат сонлар мавжудки, $U_{r_1}(x) \subset A_1$, $U_{r_2}(x) \subset A_2$ муносабатлар бажарилади. Агар $0 < r < \min\{r_1, r_2\}$ бўлса, $U_r(x) \subset A = A_1 \cap A_2$ муносабат бажарилади. Демак, $A = A_1 \cap A_2$ тўплам τ оилага тегишлидир;
- 4) Фараз қилайлик $\{A_\alpha\}$ - τ оилага тегишли тўпламлар оиласи бўлсин.

Биз $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \in \tau$ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $x \in A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ нуктани қарайлик. Қаралаётган x нукта йиғиндига тегишли бўлганлиги учун шундай индекс α_0 мавжудки, $x \in A_{\alpha_0}$ муносабат бажарилади. Бу A_{α_0} тўплам очик бўлганлиги учун шундай $r > 0$ сон мавжудки, $U_r(x) \subset A_{\alpha_0} \subset A$ муносабат бажарилади. Демак, $A \in \tau$ ва τ оила топологик фазо аксиомаларини қаноатлантиради.

6 - Мисол. $X = R^1$, $\rho(x, y) = |x - y|$

7 - Мисол. $X = R^n$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$

Бу ерда $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$

8-Мисол. $X = C[a, b]$ билан $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз функциялар тўплами белгилаймиз. Бу тўпланда $x(t)$, $y(t)$ функциялар учун $r(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |y(t) - x(t)|$ формула бўйича метрикани аниқлаймиз. Бу ҳолда r учун метрик фазо аксиомаларини текшириш енгил, шунинг учун бу ишни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

Энди метрик фазо учун ички, чегаравий ва уриниш нукталарини киритайлик.

Фараз қилайлик $A \subset X$ - қисм тўплам, $x \in X$ бўлиб, ихтиёрий $r > 0$ учун $U_r(x) \cap A \neq \emptyset$, $U_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ бўлса, x нукта A тўпламнинг чегаравий нуктаси дейилади. Агар ихтиёрий $r > 0$ учун фақат $U_r(x) \cap A \neq \emptyset$ муносабат бажарилса, x нукта A тўпламнинг уриниш нуктаси дейилади. Бирорта $r > 0$ сони учун $U_r(x) \subset A$ муносабат бажарилса, x нукта A учун ички нукта дейилади. Метрик фазолар шундай бир ажойиб хусусиятга эгаки, бу хусусият Хаусдорф аксиомаси деб аталади (X, ρ) - метрик фазо, $x, y \in X$ ва $x \neq y$

бўлсин. Агар $d = \rho(x, y)$, $0 < r < \frac{d}{2}$ бўлса, $U_r(x)$, $U_r(y)$ шарлар ўзаро кесишмайди. Биз топологик фазолар учун ҳам Хаусдорф аксиомасининг бажарилишини талаб қиламиз. Бу аксиома қуйидагича таърифланади.

Хаусдорф аксиомаси. Берилган (X, τ) - топологик фазода ихтиёрий ўзаро фарқли $x, y \in X$ нукталар учун уларнинг ўзаро кесишмайдиган атрофлари мавжуд бўлса, бу фазода Хаусдорф аксиомаси бажарилган дейилади.

Хаусдорф аксиомаси бажарилган топологик фазолар Хаусдорф фазолари дейилади. Биз бу ҳақида алоҳида таъкидламасдан курс давомида ҳамма топологик фазолар учун Хаусдорф аксиомаси бажарилган деб фараз қиламиз. Юқорида таъкидлаганимиздек, метрик фазоларда бу аксиома ҳар доим бажарилган.

Энди топологик фазоларга қайтайлик. (X, τ) - топологик фазо $\{x_n\} \in X$, $n = 1, 2, \dots$ ва $x \in X$ бўлсин. Агар x нуктанинг ихтиёрий U атрофи учун шундай сон $N > 0$ мавжуд бўлиб, $n > N$ да $x_n \in U$ муносабат бажарилса,

$\{x_n\}$ - кетма-кетлик x нуқтага яқинлашади дейилади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (ёки $x_n \rightarrow x$)

кўринишда ёзилади.

Теорема-10. Хаусдорф фазосида ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик ягона лимитга эгадир.

Исбот. Фараз қилайлик $\{x_n\}$ яқинлашувчи кетма-кетлик ва $\lim x_n = x$ бўлсин. Агар $x_n \rightarrow y$ ва $y \neq x$ бўлса, U_1 ва U_2 билан мос равишда x ва y нуқталарнинг ўзаро кесишмайдиган атрофларини белгилаймиз (Хаусдорф аксиомаси). Берилган $\{x_n\}$ - кетма-кетлик x ва y нуқталарга яқинлашганлиги учун шундай N_1, N_2 сонлар мавжудки, $n \geq N_1$ да $x_n \in U_1$, $n \geq N_2$ да $x_n \in U_2$ бўлади. Бундан $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ бўлса, $x_n \in U_1 \cap U_2$ муносабатни оламиз. Демак, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Бу зиддиятдан $y = x$ бўлиши келиб чиқади. $\square$

6- МАЪРУЗА.

Мавзу: Боғланишли тўпламлар ва уларнинг асосий хоссалари. (4 соат)

Фараз қилайлик (X, τ) - топологик фазо, $A \subset X$ - қисм тўплам бўлсин. Иккита очик G_1 ва G_2 қисм тўпламлар мавжуд бўлиб,

- 1) $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$
- 2) $(A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \emptyset$
- 3) $(A \cap G_1) \neq \emptyset, (A \cap G_2) \neq \emptyset$

шартлар бажарилса, A тўплам боғланишсиз тўплам дейилади. Агар бу шартларни қаноатлантирувчи G_1 ва G_2 очик тўпламлар мавжуд бўлмаса, A тўплам боғланишли тўплам дейилади.

Берилган A тўплам учун $A = X$ ҳолни қарайлик. Бу ҳолда $X \cap G_1 = G_1$, $X \cap G_2 = G_2$ бўлганлиги учун юқоридаги шартлар қуйидаги кўринишда ёзилади.

- 1¹) $X = G_1 \cup G_2$
- 2¹) $G_1 \cap G_2 = \emptyset$
- 3¹) $G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset$

Демак, агар 1¹), 2¹), 3¹) шартларни қаноатлантирувчи очик G_1 ва G_2 қисм тўпламлар мавжуд бўлса, X фазони боғланишсиз топологик фазо деб атаймиз. Акс ҳолда, яъни бу 1¹), 2¹), 3¹) шартларни қаноатлантирувчи G_1, G_2 тўпламлар мавжуд бўлмаса, X фазони боғланишли топологик фазо деб атаймиз.

Теорема-11. Боғланишли тўпламнинг ёпиғи ҳам боғланишли тўпламдир.

Исбот. Фараз қилайлик (X, τ) - топологик фазо, $A \subset X$ - боғланишли қисм тўплам бўлсин. Агар $\bar{A}$ боғланишсиз тўплам бўлса, очик G_1 ва G_2 қисм тўпламлар мавжуд бўлиб, қуйидаги

$$\begin{aligned}\bar{A} &= (G_1 \cap \bar{A}) \cup (G_2 \cap \bar{A}) \\ (G_1 \cap \bar{A}) \cap (G_2 \cap \bar{A}) &= \emptyset \\ G_1 \cap \bar{A} &\neq \emptyset, \quad G_2 \cap \bar{A} \neq \emptyset\end{aligned}$$

муносабатлар бажарилади. Тўплам ёпиғи аниқланишига кўра $A \subset \bar{A}$ муносабат ўринли бўлганлиги учун, $(G_1 \cap \bar{A}) \cap A = G_1 \cap A$, $(G_2 \cap \bar{A}) \cap A = G_2 \cap A$, $A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$ тенгликлар ўринлидир.

Бу ерда G_1 ва G_2 очик тўпламлар, $G_1 \cap \bar{A} \neq \emptyset$, $G_2 \cap \bar{A} \neq \emptyset$ бўлганлигидан, $G_1 \cap A \neq \emptyset$ ва $G_2 \cap A \neq \emptyset$ муносабатлар келиб чиқади ва ниҳоят $(G_1 \cap \bar{A}) \cap (G_2 \cap \bar{A}) = \emptyset$ тенгликдан $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset$ тенглик келиб чиқади. Бу муносабатлар биргаликда A тўпламнинг боғланишсиз тўплам эканлигини кўрсатади. Бу зиддиятдан $\bar{A}$ тўпламнинг боғланишли эканлиги келиб чиқади. $\square$

Теорема-12. Бизга $\{A_\alpha\}$ боғланишли тўпламлар оиласи берилган бўлиб, уларнинг умумий қисми бўш бўлмаса, яъни $\bigcap_{\alpha} A_\alpha \neq \emptyset$ бўлса, $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$ тўплам ҳам боғланишли тўпламдир.

Исбот. Фараз қилайлик A тўплам боғланишсиз бўлсин. Боғланишсиз тўплам таърифига кўра шундай очик G_1 ва G_2 тўпламлар мавжудки,

$$\begin{aligned} A &= (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A) \\ (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) &= \emptyset \\ A \cap G_1 &\neq \emptyset, \quad A \cap G_2 \neq \emptyset \end{aligned}$$

муносабатлар ўринлидир.

Биринчи муносабатдан ихтиёрий α учун $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ тенглик келиб чиқади. Ундан ташқари, иккинчи муносабатдан ва $A_\alpha \subset A$ эканлигидан $(A_\alpha \cap G_1) \cap (A_\alpha \cap G_2) = \emptyset$ тенглик келиб чиқади.

Демак, $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ ва A_α боғланишли бўлганлиги учун $A \cap G_1 = \emptyset$, $A \cap G_2 = \emptyset$ тенгликлардан бирортаси ўринлидир.

Агар бирорта α_0 учун $A_{\alpha_0} \cap G_1 = \emptyset$ бўлса унда $A_{\alpha_0} \subset G_2$ бўлади. Лекин $\bigcap_{\alpha} A_\alpha \neq \emptyset$ муносабатдан ҳамма α лар учун $A_\alpha \subset G_2$ эканлиги келиб чиқади. Бундан эса $A \cap G_1 = \emptyset$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу қарама-қаршилик теорема исботини якунлайди. $\square$

Энди агар $x \in X$ бўлса, H билан x нуқта тегишли бўлган ҳамма боғланишли тўпламлар йиғиндисини белгилайлик. Бу тўпламларнинг ҳаммасига x тегишли бўлганлиги учун 9-теорема шарти бажарилади. Демак, H боғланишли тўпламдир. Бу H тўпламни x тегишли бўлган боғланишлилик компонентаси деб атаймиз. Аниқланишига кўра H тўплам x тегишли бўлган боғланишли тўпламларнинг энг каттасидир.

Теорема-13. Ҳар хил икки нуқталар учун улар тегишли бўлган боғланишлилик компоненталари ёки кесишмайди ёки устма-уст тушади.

Исбот. Берилган $x, y \in X$ нуқталар учун $x \neq y$ бўлса, улар тегишли бўлган боғланишлилик компоненталарини H_x ва H_y билан белгилайлик. Агар $H_x \cap H_y \neq \emptyset$ бўлса, 9-теоремага кўра $H = H_x \cup H_y$ тўплам боғланишли бўлади ва боғланишлилик компонентасининг таърифига кўра $H = H_x = H_y$ тенглик келиб чиқади. $\square$

Теорема-14. Боғланишлилик компонентаси ёпик тўпламдир.

Исбот. Фараз қилайлик H тўплам x нуқта тегишли бўлган боғланишлилик компонентаси бўлсин. Юқоридаги 8-теоремага кўра $\overline{H}$ боғланишли тўпламдир. Компонента таърифига кўра $x \in \overline{H}$ муносабатдан $H = \overline{H}$ тенглик келиб чиқади. Демак, H ёпик тўпламдир. $\square$

7- МАЪРУЗА.

Мавзу: Компакт тўпламлар ва уларнинг асосий хоссалари. (4 соат)

Бизга (X, τ) - топологик фазо, $A \subset X$ - қисм тўплам ва бирорта $\{A_\alpha\}$ очик тўпламлар оиласи берилган бўлсин. Берилган оила учун $\bigcup_\alpha A_\alpha \supset A$ муносабат бажарилса $\{A_\alpha\}$ оила A тўпламнинг очик қобиғи деб аталади. Агар қобик чекли сондаги тўпламлардан иборат бўлса, у чекли қобик деб аталади.

Таъриф. Берилган A тўпламнинг ихтиёрий очик қобиғидан чекли қобик ажратиш мумкин бўлса, A тўплам компакт тўплам деб аталади.

Табиийки, бу таърифда агар $A = X$ бўлса, унда биз компакт фазо таърифини оламиз. Фақат бу ерда $\{A_\alpha\}$ оила X учун қобик бўлса, унда

$\bigcup_\alpha A_\alpha \supset A$ муносабат $\bigcup_\alpha A_\alpha = X$ муносабатга тенг кучлидир.

Теорема - 15. Берилган X топологик фазо компакт ва $A \subset X$ - ёпиқ қисм тўплам бўлса, A - компакт тўпламдир.

Исбот. Фараз қилайлик $\{A_\alpha\}$ - ёпиқ A тўплам учун очик қобик бўлсин. Берилган A тўплам ёпиқ бўлганлиги учун $X \setminus A$ очик тўплам ва $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ оила X учун қобик бўлади. Берилган X компакт фазо бўлганлиги учун $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ оиладан X учун чекли қобик ажратиш мумкин. Ажратилган чекли қобикқа тегишли қисм тўпламлар $F_1, F_2, \dots, F_k$ бўлсин. Агар $\{F_i\}_1^k$ оилада $X \setminus A$ тўплам бўлмаса, $\{F_i\}$ оила $\{A_\alpha\}$ дан ажратилган A нинг чекли қобиғи бўлади. Агар $\{F_i\}$ оилада $X \setminus A$ бўлса, унда бу оиладан $X \setminus A$ ни чиқариб, A учун чекли қобик ҳосил қиламиз. Демак, A компакт тўпламдир. Теорема исботланди.

Теорема - 16. Берилган X топологик фазо хаусдорф фазоси, $A \subset X$ - компакт тўплам ва $x \in X \setminus A$ бўлса, тўпламни ва нуқтани очик тўпламлар ёрдамида ажратиш мумкин, яъни кесишмайдиган очик G_1 ва G_2 тўпламлар мавжуд бўлиб, $A \subset G_1$, $x \in G_2$ муносабатлар ўринли бўлади.

Исбот. Биз Атўпламга тегишли ихтиёрий u нуқтани олсак, Хаусдорф аксиомасига кўра очик кесишмайдиган G_x, G_y тўпламлар мавжуд бўлиб $x \in G_x$, $y \in G_y$ муносабатлар бажарилади. Ҳар бир u нуқта учун олинган G_y очик тўплам мавжудлигидан $\{G_y : y \in A\}$ оила ҳосил бўлади. Бундан ташқари $\{G_y : y \in A\}$ оила A тўплам учун очик қобик бўлади ва Атўплам компакт бўлганлиги учун бу оиладан A учун чекли қобик ажратиш мумкин. Ажратилган чекли қобикқа тегишли очик тўпламлар $G_{y_1}, G_{y_2}, \dots, G_{y_m}$ тўпламлардан иборат бўлса, бу очик тўпламлар билан кесишмайдиган x нуқтанинг атрофларини мос равишда $G_x(y_1), G_x(y_2), \dots, G_x(y_m)$ кўринишда белгилаймиз. Агар $G_1 = \bigcup_{i=1}^m G_{y_i}$, $G_2 = \bigcap_{i=1}^m G_x(y_i)$ бўлса, равшанки $A \subset G_1$, $x \in G_2$ ва $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ муносабатлар бажарилади. □

Теорема - 17. Топологик X фазо хаусдорф фазоси ва $A \subset X$ - компакт тўплам бўлса, A ёпиқ тўпламдир.

Исбот. Берилган A тўпламнинг ёпиқ эканлигини кўрсатиш учун $X \setminus A$ тўпламнинг очик эканлигини кўрсатамиз. Агар $x \in X \setminus A$ бўлса, 11-теоремага кўра шундай очик G тўплам мавжудки, $x \in G \subset X \setminus A$ муносабат бажарилади. Демак x нукта $X \setminus A$ тўплам учун ички нукта ва x нуктанинг ихтиёрий эканлигидан $X \setminus A$ тўпламнинг очик тўплам эканлиги келиб чиқади. $\square$

Теорема - 18. Евклид фазосида берилган A тўпламнинг компакт тўплам бўлиши учун унинг ёпиқ ва чегараланган тўплам бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Метрик фазода тўплам бирорта шар ичида ётса, у чегараланган тўплам дейилади. Берилган A тўплам компакт бўлса, евклид фазоси R^n нинг хаусдорф фазо эканлигидан A тўпламнинг ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади (теорема-14). Энди A тўпламнинг чегараланганлигини кўрсатайлик. Бунинг учун бирорта $x \in A$ нуктани олиб, маркази шу нуктада бўлган $\{B_n(x)\}$ шарлар оиласини қараймиз, бу ерда $n = 1, 2, \dots$. Бу шарлар оиласи A учун очик қобик бўлади ва A компакт тўплам бўлганлиги учун бу оиладан чекли қобик ажратиш мумкин. Агар чекли қобик $B_{n_1}(x_0), B_{n_2}(x_0), \dots, B_{n_k}(x_0)$ шарлардан иборат бўлса, N билан $n_1, n_2, \dots, n_k$ сонларнинг энг каттасини белгилаймиз. Бу ерда $B_n(x)$ маркази x нуктада, радиуси n бўлган очик шар. Бу ҳолда $A \subset B_N(x)$ муносабатдан A тўпламнинг чегараланганлиги келиб чиқади.

Етарлилиги. Теореманинг етарлилигини исботлаш учун, R^n да $Q_r = \{x \in R^n : |x| \leq r\}$ кубнинг компактлигини исботлаймиз. Бунинг учун эса ишни ёпиқ кесманинг компактлигини исботлашдан бошлаймиз.

Лемма 1. Ҳақиқий сонлар фазосида ихтиёрий ёпиқ кесма компакт тўпламдир.

Исбот. Биз $[a, b]$ ёпиқ кесма учун унинг $\{U_\alpha\}$ очик қобигини қарайлик. Агар $x \in [a, b]$ ва $[a, x]$ сегмент учун чекли қобик мавжуд бўлса, бундай x нукталар тўпламини A билан белгилаймиз. Равшанки, A бўш эмас, чунки $a \in A$. Бундан ташқари, бирорта α_0 учун $a \in U_{\alpha_0}$ бўлса, a нукта ўзининг бирорта атрофи билан U_{α_0} тўпламда, тади. Шунинг учун A тўпламга a нуктадан бошқа нукталар ҳам тегишли. Демак, агар $c = \sup\{x : x \in A\}$ бўлса, $c > a$ эканлиги равшан. Бу ерда $c = \sup\{x : x \in A\}$ бўлганлиги учун ихтиёрий етарли кичик $\varepsilon > 0$ учун $[a, c - \varepsilon]$ кесма учун $\{U_\alpha\}$ оиладан тегишли чекли қобик ажратиш мумкин. Биз c нукта тегишли бўлган очик тўпламни U_{α_1} билан белгиласак, U_{α_1} тўплам очик бўлганлиги учун бирорта етарли кичик $\varepsilon > 0$ учун $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_{\alpha_1}$ муносабат ўринли бўлади. Агар $\varepsilon > 0$ сонни танлашда $[a, c - \varepsilon]$ сегмент учун чекли қобик мавжуд ва $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_{\alpha_1}$ муносабат ўринли бўлса, $[a, c - \varepsilon]$ сегментнинг чекли қобигига U_{α_1} тўпламни қўшсак, $[a, c]$ сегмент учун чекли қобик ҳосил бўлади. Демак, $c \in A$ муносабат ўринли бўлади. Энди $c = b$ тенглик ўринли эканлигини исботлайлик. Агар $c < b$ бўлса, ε сонни шундай

кичик қилиб оламизки, $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset U_{\alpha_1}$ муносабат бажарилсин. Бу ҳолда $[a, c]$ сегментнинг чекли қобиғи $[a, c + \varepsilon]$ учун ҳам чекли қобиқ бўлади. Бу эса c нуқтанинг аниқланишига зиддир. Демак, $c = b$ тенглик ўринлидир. Лемма исботланди. $\square$

Лемма-2. Евклид фазосида ёпиқ куб $Q_r = \{x \in R^n, |x| \leq r\}$ компакт тўпламдир.

Исбот. Ёпиқ Q_r кубни n та $[-r, r]$ сегментнинг тўғри кўпайтмаси сифатида ёзамиз. Шунда лемма-2 иккита компакт тўпламнинг тўғри кўпайтмаси компакт тўплам эканлигидан келиб чиқади. Бу фактни қуйидаги теорема кўринишда ёзиб, кейинчалик исботлаймиз.

Теорема-19. X, Y - топологик фазолар, $A \subset X, B \subset Y$ - компакт тўпламлар бўлса, $A \times B$ - тўғри кўпайтма ҳам $X \times Y$ топологик фазода компакт тўпламдир.

Энди бевосита 15-теорема исботига қайтайлик. Биз қараётган A тўплам чегараланган бўлганлиги учун уни ўз ичига олувчи Q_r куб мавжуд. Берилган A тўплам ёпиқ бўлганлиги учун унинг тўлдирувчиси $R^n \setminus A$ очик тўпламдир. Энди $\{U_\alpha\}$ оила A тўпламнинг очик қобиғи бўлса, $\{U_\alpha\} \cup \{R^n \setminus A\}$ оила Q_r кубнинг очик қобиғи бўлади. Биз қараётган Q_r куб компакт тўплам бўлганлиги учун бу оиладан Q_r куб учун чекли қобиқ ажратиш мумкин. Ҳосил бўлган қопиқдан $R^n \setminus A$ тўпламни чиқариб A тўплам учун $\{U_\alpha\}$ оиладан ажратилган чекли қобиқ ҳосил қиламиз. Теорема исботи тугади. $\square$

8-МАЪРУЗА.

Мавзу: Узлуксиз акслантиришлар. (4 соат)

Бизга X, Y - ихтиёрий тўпламлар берилган бўлиб, X тўпламнинг ҳар бир, элементига Y тўпламнинг битта элементи мос қўйилган бўлса, X тўпламни Y тўпламга акслантирувчи мослик ёки акслантириш берилган дейилади ва $f: X \rightarrow Y$ кўринишда ёзилади.

Агар $f: X \rightarrow Y$ акслантириш берилган бўлса, $x \in X$ учун $y = f(x)$ элемент x нуктанинг акси (ёки образи), $y \in Y$ учун $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ тўплам y нуктанинг асли (ёки прообразы) дейилади. Берилган $A \subset X$ қисм тўплам учун унинг образи $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, $B \subset Y$ қисм тўплам учун унинг прообразы $f^{-1}(B) = \{x : x \in A \text{ ва } f(x) \in B\}$ кўринишда аниқланади. Агар $f(X) = Y$ бўлса, f акслантиришни “устига” акслантириш, $f(X) \neq Y$ бўлганда эса “ичига” акслантириш деб атаймиз.

Берилган f “устига” акслантириш учун $x_1, x_2 \in X$ ва $x_1 \neq x_2$ муносабатлардан $f(x_1) \neq f(x_2)$ муносабат келиб чиқса, f ўзаро бир қийматли акслантириш дейилади.

Таъриф. Бизга X, Y топологик фазолар, $f: X \rightarrow Y$ акслантириш ва $x \in X$ нукта берилган бўлсин. Агар $y = f(x)$ нуктанинг ихтиёрий V атрофи учун x нуктанинг U атрофи мавжуд бўлиб, $U \subset f^{-1}(V)$ муносабат бажарилса f акслантириш x нуктада узлуксиз дейилади.

Агар f акслантириш бирор A тўпламга тегишли ҳамма нукталарда узлуксиз бўлса, у A тўпламда узлуксиз дейилади. Агар f акслантириш X фазонинг ҳамма нукталарида узлуксиз бўлса, у узлуксиз акслантириш дейилади.

Теорема-20. Берилган f акслантириш узлуксиз бўлиши учун ихтиёрий $G \subset Y$ очик тўпламнинг прообразы $f^{-1}(G)$ очик бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Фараз қилайлик f узлуксиз акслантириш, $G \subset Y$ очик тўплам бўлсин. $f^{-1}(G)$ очик эканлигини кўрсатишимиз керак. Агар $x \in f^{-1}(G)$ бўлса, $f(x) \in G$ бўлади. f акслантириш x нуктада узлуксиз бўлганлиги учун x нинг шундай U атрофи мавжудки, $U \subset f^{-1}(G)$ бўлади. Бундан эса $x \in U \subset f^{-1}(G)$ келиб чиқади. Демак, $f^{-1}(G)$ очик тўпламдир.

Етарлилик. Энди ихтиёрий $G \subset Y$ очик тўплам учун $f^{-1}(G)$ очик тўплам, $x \in X$ бўлсин. $y = f(x)$ нуктанинг ихтиёрий атрофи V ни қарасак, у очик бўлганлиги учун $U = f^{-1}(V)$ очик тўплам бўлади. Ундан ташқари $x \in f^{-1}(U)$ ва $U \subset f^{-1}(V)$. Демак f акслантириш x нуктада узлуксиздир. Бу ерда x ихтиёрий нукта бўлганлиги учун f узлуксиз акслантириш бўлади. $\square$

Умуман олганда, узлуксиз акслантиришда очик тўпламнинг образи очик бўлиши шарт эмас. Мисол учун, $X = R^2(x, y)$ ва $Y = R^2(u, v)$ фазолар учун f акслантириш $f(x, y) = (\sin x, \cos x)$ қоида билан аниқланса, $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ доиранинг образи R^2 да очик тўплам эмас. Агар f акслантириш $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ қоида билан берилса, $\{(x, y) = (x \leq 0, y = 0)\}$ ёпиқ тўплам образи ёпиқ эмас.

Теорема-21. Бизга X, Y, Z - топологик фазолар, узлуксиз иккита $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ - акслантиришлар берилган бўлса, уларнинг композицияси, яъни $f \circ g : X \rightarrow Z$ акслантириш ҳам узлуксиздир.

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун юқоридаги 20-теоремадан фойдаланамиз. Фараз қилайлик $G \subset Z$ очик тўплам бўлсин. Биз $h^{-1}(G)$ тўпламнинг очик эканлигини кўрсатишимиз керак, бу ерда $h = f \circ g$. Прообраз учун унинг аниқланишига кўра $h^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$ тенглик ўринлидир. Теорема шартига кўра $g : Y \rightarrow Z$ акслантириш узлуксиз бўлганлиги учун 20-теоремага кўра $g^{-1}(G)$ тўплам очик тўпламдир. Бундан ташқари $f : X \rightarrow Y$ акслантириш ҳам узлуксиз бўлганлиги учун шу теоремага кўра $h^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$ тўплам ҳам очик тўпламдир. Демак юқоридаги 20-теоремага кўра $f \circ g : X \rightarrow Z$ акслантириш ҳам узлуксиздир. $\square$

Теорема - 22. Бизга X, Y - топологик фазолар, $f : X \rightarrow Y$ узлуксиз акслантириш, $A \subset X$ - компакт тўплам берилган бўлса, $f(A)$ тўплам ҳам компакт тўпламдир.

Исбот. Очик тўпламлардан иборат $\{U_\alpha\}$ оила $f(A)$ тўпламнинг очик қобиғи бўлсин. Теорема шартига кўра f узлуксиз акслантириш бўлганлиги учун $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ тўплам ҳамма α лар учун очик тўплам бўлади. $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset f(A)$ муносабатдан $\bigcup_\alpha V_\alpha \supset A$ муносабат келиб чиқади. Демак, $\{V_\alpha\}$ оила A учун очик қобик бўлади. A компакт тўплам бўлганлиги учун бу қобикдан чекли қоплама ажратиш мумкин. Ажратилган чекли қоплама элементлари $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_m}$ тўпламлар бўлсин. Шунда уларнинг образлари $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_m}$ тўпламлар $f(A)$ тўплам учун $\{U_\alpha\}$ оиладан ажратилган чекли қобикни ташкил этади. $\square$

Теорема-23. Бизга X, Y - топологик фазолар, $f : X \rightarrow Y$ узлуксиз акслантириш, $A \subset X$ - боғланишли тўплам берилган бўлса, $f(A)$ тўплам ҳам боғланишли тўпламдир.

Исбот. Агар $f(A)$ боғланишсиз тўплам бўлса, бўш бўлмаган очик G_1 ва G_2 тўпламлар мавжуд бўлиб, $f(A) = (f(A) \cap G_1) \cup (f(A) \cap G_2)$, $(f(A) \cap G_1) \cap (f(A) \cap G_2) = \emptyset$ ва $f(A) \cap G_1 \neq \emptyset, f(A) \cap G_2 \neq \emptyset$ муносабатлар

бажарилади. Акслантириш f узлуксиз бўлганлиги учун $A_1 = f^{-1}(G_1)$ ва $A_2 = f^{-1}(G_2)$ тўпламлар X нинг очик қисм тўпламлари бўлади.

Бундан ташқари $f(A) \cap G_1 \neq \emptyset$, ва $f(A) \cap G_2 \neq \emptyset$ муносабатлардан $A_1 \cap A \neq \emptyset$ ва $A_2 \cap A \neq \emptyset$ келиб чиқади. Бундан ташқари $A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A)$ муносабат ҳам ўринлидир. Демак A боғланишсиз. Бу зиддият теоремани исботлайди. $\square$

Теорема - 24. Ёпиқ кесма $I = [a, b]$ боғланишли тўпландир.

Исбот. Фараз қилайлик $[a, b]$ боғланишсиз бўлсин. У ҳолда очик ва бўш бўлмаган U_1 ва U_2 тўпламлар мавжуд бўлиб, $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2)$, $I \cap U_1 \neq \emptyset$, $I \cap U_2 \neq \emptyset$ ва $(I \cap U_1) \cap (I \cap U_2) = \emptyset$ муносабатлар ўринли бўлади.

Энди I ни топологик фазога айлантирамиз. Бунинг учун I нинг қисм тўплами A учун R^1 да очик G тўплам мавжуд бўлиб, $A = I \cap G$ бўлса, A ни очик тўплам деб эълон қиламиз. Ҳосил бўлган I нинг очик қисм тўпламлари оиласи I да топологияни ҳосил қилади ва топологик фазога айланади. Бу топологияда I ва $\emptyset$ ҳам очик тўпландир. Агар I боғланишсиз бўлса I да очик ва бўш бўлмаган U_1 , U_2 тўпламлар мавжуд бўлиб $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ва $I = U_1 \cup U_2$ муносабатлар бажарилади. Энди

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_1 \\ 1, & x \in U_2 \end{cases}$$

қоида билан берилган акслантиришни қарайлик. Агар $G \subset R^1$ - очик тўплам бўлса

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} I, & 0, 1 \in G \\ \emptyset, & 0 \notin G, 1 \notin G \\ U_1, & 0 \in G, 1 \notin G \\ U_2, & 0 \notin G, 1 \in G \end{cases}$$

тенглик ўринлидир. $\emptyset$, U_1 , U_2 , I тўпламлар очик бўлганлиги учун 20 - теоремага кўра f узлуксиз функциядир. Коши теоремасига кўра функция 0 ва 1 оралиғидаги ҳамма қийматларни қабул қилиши керак. Бу зиддият теоремани исботлайди. $\square$

9- МАЪРУЗА.

Мавзу: Чизиқли боғланишли тўпламлар. (2 соат)

Бизга X - топологик фазо ва $f:[0, 1] \rightarrow X$ - узлуксиз акслантириш бўлсин. Бу ерда $I=[0, 1]$ кесмадаги топология юқоридаги 23 - теорема исботидаги каби евклид топология ёрдамида аниқланади. Агар $x = f(0)$, $y = f(1)$ бўлса, биз x ва y нуқталар f йўл ёрдамида туташтирилган деб атаймиз. Агар $A \subset X$ - қисм тўпламнинг ҳар қандай икки нуқтасини шу тўпламда ётувчи йўл ёрдамида туташтириш мумкин бўлса, A тўплам чизиқли боғланишли тўплам дейилади.

Теорема-25. Чизиқли боғланишли тўплам боғланишли тўпламдир.

Исбот. X - топологик фазо, $A \subset X$ - чизиқли боғланишли тўплам бўлсин. Таърифга кўра, A га тегишли ихтиёрий x, y нуқталар учун узлуксиз $f:I \rightarrow X$ - акслантириш мавжуд бўлиб, $f(0) = x$, $f(1) = y$ ва $f(I) \subset A$ бўлади. Агар A боғланишсиз тўплам бўлса, очиқ бўш бўлмаган G_1 ва G_2 тўпламлар мавжуд бўлиб $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$, $A \cap G_1 \neq \emptyset$, $A \cap G_2 \neq \emptyset$ муносабатлар бажарилади. $A \cap G_1$ тўпламдан x нуқтани, $A \cap G_2$ тўпламдан y нуқтани олайлик. A чизиқли боғланишли бўлганлиги учун $f:I \rightarrow X$ йўл мавжуд бўлиб, $f(0) = x$, $f(1) = y$ ва $I = [0, 1]$ учун $f(I) \subset A$ бўлади. Юқорида исбот қилинган теоремаларга кўра $f(I) = f([0, 1])$ боғланишли тўпламдир. Лекин $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$ тенгликдан $f(I) = (f(I) \cap G_1) \cup (f(I) \cap G_2)$, тенглик оламиз. $x \in f(I) \cap G_1$, $y \in f(I) \cap G_2$ бўлганлигидан $f(I) \cap G_1 \neq \emptyset$, $f(I) \cap G_2 \neq \emptyset$ келиб чиқади. Бундан $f(I)$ боғланишсиз тўплам эканлиги келиб чиқади. Бу зиддият A боғланишли тўплам эканлигини кўрсатади. $\square$

Умуман, боғланишли тўплам чизиқли боғланишли бўлмаслиги мумкинлигини қуйидаги мисол кўрсатади.

Мисол.

$$X = \mathbb{R}^2, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}, x \neq 0\} \cup \{(x, y) : x = 0, -1 < y < 1\}$$

бўлсин. Равшанки, A боғланишли, лекин чизиқли боғланишли эмас.

Теорема-26. Фараз қилайлик X - топологик фазода чизиқли боғланишли $\{A_\alpha\}$ тўпламлар оиласи берилган бўлсин. Агар улар умумий нуқтага эга, яъни $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$ бўлса, уларнинг йиғиндиси $\bigcup_\alpha A_\alpha$ тўплам ҳам чизиқли боғланишли бўлади.

Исбот. Берилган тўпламлар йиғиндиси бўлган $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ тўпламга тегишли x, y нуқталарни йўл билан туташтириш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $a \in \bigcap_\alpha A_\alpha$ нуқтани оламиз, ва $x \in A_{\alpha_1}$, $y \in A_{\alpha_2}$ бўлсин деб фараз қилайлик. Шунда $a \in A_{\alpha_1}$, $a \in A_{\alpha_2}$ муносабатлар ўринли бўлгани учун x ва y ларни a билан мос равишда f_1, f_2 йўллар ёрдамида туташтирамиз. Шунда

$$g(t) = \begin{cases} f_1(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f_2(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

формула билан аниқланган g йул учун $g(0) = x$, $g(1) = y$ тенгликлар ўринли бўлади. $\square$

Энди бу теоремадан фойдаланиб, X топологик фазонинг a нуқтаси учун унинг чизиқли боғланишлилик компонентаси тушунчасини киритамиз. Берилган a нуқта тегишли бўлган ҳамма чизиқли боғланишли тўпламлар йиғиндисини юқоридаги теоремага кўра чизиқли боғланишли тўплам бўлади. Ана шу тўпламни a нуқтанинг чизиқли боғланишлилик компонентаси деб атаймиз ва $L(a)$ билан белгилаймиз.

Теорема-27. Боғланишли X топологик фазонинг ҳар бир нуқтаси чизиқли боғланишли атрофга эга бўлса, X чизиқли боғланишли фазо бўлади.

Исбот. Топологик X фазонинг a нуқтаси учун $L(a)$ тўпламни қарайлик. Бу тўпламнинг очик тўплам эканлигини кўрсатайлик. Агар $b \in L(a)$ бўлса, $V(b)$ билан b нуқтанинг чизиқли боғланишли атрофини белгилаймиз. Шунда $V(b) \subset L(a)$ бўлади. Демак $L(a)$ очик тўпламдир. Энди $L(a)$ тўплам учун $L(a) = \overline{L(a)}$ тенгликни исботлайлик. Бунинг учун $b \in \overline{L(a)}$ нуқта олиб, уни a нуқта билан йўл орқали туташтириш мумкинлигини кўрсатамиз. Уринма нуқта таърифига кўра, b нуқтанинг ҳар бир атрофида $L(a)$ тўпламга тегишли нуқталар бор. Агар $V(b)$ тўплам b нуқтанинг бирорта чизиқли боғланишли атрофи бўлса, бу атрофда $L(a)$ тўпламга тегишли нуқталар бор. Демак a нуқта b билан йўл орқали туташтириш мумкин. Бундан $b \in L(a)$ келиб чиқади. Бундан $L(a)$ тўпламнинг ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади. Берилган X топологик фазо боғланишли бўлганлиги учун ҳар қандай бўш бўлмаган бир вақтда очик ва ёпиқ бўлган тўплам X билан устма-уст тушади. Демак $X = L(a)$, ва X чизиқли боғланишдир. $\square$

10-МАЪРУЗА. Мавзу: Топологик акслантиришлар (Гомеоморфизмлар) (4 соат)

Узлуксиз акслантиришлар ичида бизнинг курсимиз учун муҳим акслантиришлардан бири топологик акслантиришдир. Топологик акслантириш гомеоморфизм деб ҳам аталади. Бу параграфда топологик акслантириш тушунчасини киритиб, мисоллар келтирамиз аа унинг биз учун зарур асосий хоссаларини келтирамиз.

X, Y - топологик фазолар, $f : X \rightarrow Y$ - акслантириш берилган бўлсин. Агар f акслантиришга тескари акслантириш f^{-1} мавжуд ва f, f^{-1} акслантиришлар узлуксиз бўлса, f топологик акслантириш ёки гомеоморфизм деб аталади.

Топологик акслантиришга энг содда мисол қилиб $f(x) = x$ қоида билан аниқланган айний $f : X \rightarrow X$ акслантиришни олишимиз мумкин.

Топологик акслантириш таърифидан бевосита келиб чиқадики, агар f топологик акслантириш бўлса, бунга тескари акслантириш f^{-1} ҳам топологик акслантириш бўлади. Энди f учун тескари акслантириш мавжуд бўлиши учун зарур ва етарли шартларга эътибор берайлик. Тескари акслантириш Y нинг ҳар бир нуқтасига X нинг битта нуқтасини мос қўяди. Демак, ихтиёрий $y \in Y$ учун бирорта $x \in X$ мавжуд бўлиб, $f(x) = y$ тенглик ўринли бўлиши керак. Бунинг учун эса $f(X) = Y$ бўлиши, яъни f устлама акслантириш бўлиши керак. Бундан ташқари f^{-1} тескари акслантириш $y \in Y$ нуқтага битта $x \in X$ нуқтани мос қўйганлигидан $x_1 \neq x_2$ бўлганда $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлиши, яъни ўзаро бир қийматли акслантириш бўлиши зарурдир.

Шундай қилиб, f га тескари акслантириш f^{-1} мавжуд бўлиши учун f нинг устлама ва ўзаро бир қийматли акслантириш бўлиши зарур ва етарли. Агар X ва Y топологик фазолар учун $f : X \rightarrow Y$ топологик акслантириш мавжуд бўлса, X ва Y топологик фазолар ўзаро гомеоморф ёки топологик эквивалент фазолар деб аталади. Топологик фазоларнинг топологик акслантиришда сақланиб қоладиган (яъни биридан иккинчисига ўтадиган) хоссалари топологик хоссалар деб аталади. Топология фанида топологик фазоларнинг, геометрик фигураларнинг топологик хоссалари ўрганилади.

Энди бир нечта мисоллар келтирайлик.

Мисол. 1. $X = (a, b)$, $Y = (c, d)$ бўлиб, X, Y фазоларда топология R^1 даги топология ёрдамида аниқланади. Шунда $f : X \rightarrow Y$ акслантиришни

$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$ формула ёрдамида аниқласак, f гомеоморфизм бўлади, чунки f чизиқли функция, узлуксиз ва унга тескари функция ҳам узлуксиздир.

2. $X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $Y = [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ бўлсин. Бизга маълумки,

$f(x) = \sin x$ узлуксиз ва унга тескари функция $x = \arcsin y$ $[-1, 1]$ да аниқланган ва узлуксиздир. Шунинг учун $X \rightarrow Y$ гомеоморфизмдир.

3. $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $Y = \mathbb{R}^1$ бўлса, $f(x) = \operatorname{tg} x$ гомеоморфизм бўлади.

4. Ихтиёрий (a, b) интервал $\mathbb{R}^1$ га гомеоморфдир. Бу ерда гомеоморфизм $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2}\right)$ формула ёрдамида аниқланади.

5. Текисликда $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ очик доира текисликка гомеоморфдир.

Бу ерда

$$f(x, y) = \left\{ \frac{x}{R - \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{R - \sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

формула билан $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ акслантиришни аниқласак, f гомеоморфизм бўлади. Буни текширайлик. Бу акслантиришнинг узлуксизлиги

$$u(x, y) = \frac{x}{R - \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = \frac{y}{R - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

функцияларининг узлуксизлигидан келиб чиқади. Энди унга тескари акслантириш мавжуд ва узлуксизлигини кўрсатайлик. Тескари $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow D^2$ акслантиришни

$$f^{-1}(x, y) = \left\{ \frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу акслантиришнинг узлуксизлиги

$$\mu(x, y) = \frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \varphi(x, y) = \frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

функцияларнинг узлуксизлигидан келиб чиқади. Энди $f^{-1}(x, y)$ акслантириш ҳақиқатан ҳам f га тескари акслантириш эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $f(\mu(x, y), \varphi(x, y)) = (x, y)$ тенгликни исботлаймиз:

$$\begin{aligned} f(\mu(x, y), \varphi(x, y)) &= \left\{ \frac{\mu(x, y)}{R - \sqrt{\mu^2(x, y) + \varphi^2(x, y)}}, \frac{\varphi(x, y)}{R - \sqrt{\mu^2(x, y) + \varphi^2(x, y)}} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\frac{Rx}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}}{R - \frac{R\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}}, \frac{\frac{Ry}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}}{R - \frac{R\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}} \right\} = (x, y) \end{aligned}$$

Демак, f акслантиришдир гомеоморфизмдир.

6. Евклид фазосида, яъни R^n да ихтиёрий D^n очик шар R^n га гомеоморфдир. Буни кўрсатиш учун R^n фазода координата бошини D^n шарнинг марказига жойлаштириб декарт координаталар системасини киритиб $f : D^n \rightarrow R^n$ акслантиришни

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \frac{x_1}{R - |x|}, \frac{x_2}{R - |x|}, \dots, \frac{x_n}{R - |x|} \right\}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу ерда $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, R – D^n шарнинг радиусидир.

Тескари акслантириш

$$f^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \frac{Rx_1}{1 + |x|}, \frac{Rx_2}{1 + |x|}, \dots, \frac{Rx_n}{1 + |x|} \right\}$$

формула ёрдамида аниқланади. Иккала f , f^{-1} акслантиришлар ҳам узлуксиз бўлганлиги учун f гомеоморфизмдир.

Энди топологик акслантиришнинг баъзи бир муҳим хоссаларини келтирайлик. Топологик акслантиришнинг таърифидан бевосита ҳар қандай топологик акслантириш учун унга тескари акслантириш ҳам топологик акслантириш эканлиги келиб чиқади.

Теорема 28. Бизга $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ - гомеоморфизмлар берилган бўлса, улар ёрдамида қурилган $f \circ g : X \rightarrow Z$ акслантириш ҳам гомеоморфизмдир.

Исбот. Берилган f ва g акслантиришларнинг узлуксизлигидан 21-теоремага кўра $f \circ g$ акслантириш ҳам узлуксиздир. Улар топологик акслантиришлар бўлганлиги учун уларга тескари акслантиришлар ҳам узлуксиздир. Шунинг учун $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ акслантириш узлуксиздир. Теорема исботланди.

Теорема 29. Фараз қилайлик $f : X \rightarrow Y$ - узлуксиз акслантириш, X - компакт фазо, Y - Хаусдорф фазоси бўлсин. Агар f акслантиришга тескари f^{-1} акслантириш мавжуд бўлса, f - гомеоморфизм бўлади.

Исбот. Теоремани исботлаш учун тескари f^{-1} акслантиришнинг узлуксизлигини кўрсатиш керак. Бунинг учун ихтиёрий очик $G \subset X$ - тўпламнинг f^{-1} акслантиришга нисбатан прообразини Y да очик эканлигини кўрсатишимиз керак. Агар G - очик бўлса, $X \setminus G$ ёпиқ тўпламдир. Биз биламизки $X \setminus G$ тўпламнинг f^{-1} акслантиришга нисбатан прообразини $f(X \setminus G)$ тўпламдан иборат. Компакт топологик фазода $X \setminus G$ тўплам ёпиқ тўплам бўлганлиги учун 12-теоремага кўра $X \setminus G$ тўплам компакт бўлади, 21-теоремага кўра эса унинг узлуксиз акслантиришдаги образини $f(X \setminus G)$ ҳам компакт тўплам бўлади. Теорема шартига кўра топологик Y фазо хаусдорф фазоси бўлганлиги учун 14-теоремага кўра $f(X \setminus G)$ тўплам ёпиқ тўпламдир. Енгил текшириб кўриш мумкин бўлган $f(G) = Y \setminus f(X \setminus G)$ тенгликдан $f(G)$ тўпламнинг очиклиги келиб чиқади. Теорема исботи тугади. $\square$

Энди 16-теорема исботига қайтайлик.

Бу теорема исботини, агар X, Y компакт фазолар бўлса, $(x, y) \rightarrow x$ қоида билан аниқланган $pr: X \times Y \rightarrow X$ акслантиришда (проекция) ёпиқ тўпламнинг образи ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатишдан бошлаймиз.

Бизга $X \times Y$ тўғри кўпайтманинг ёпиқ қисм тўплами F берилган бўлсин. Унинг образи prF тўпламнинг X топологик фазода ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатиш учун унинг тўлдирувчиси $G = X \setminus prF$ тўпламнинг очик тўплам эканлигини кўрсатишимиз керак. Бунинг учун $x_0 \in G$ нуқтани қарайлик. Бу нуқта учун $(x_0, Y) \subset X \times Y \setminus F$ муносабат бажарилади. Тўлдирувчи $X \times Y \setminus F$ очик тўплам бўлгани учун ихтиёрий $y \in Y$ нуқта учун (x_0, y) жуфтлик бирорта $U(x_0, y) = V_y(x_0) \times V_y$ атрофи билан $X \times Y \setminus F$ тўпламда ётади. Бу ерда $V_y(x_0)$ тўплам x_0 нуқтанинг X фазодаги атрофи ва $y \in V_y(x_0) \subset G$ муносабатни қанотлантиради. Очик тўпламлардан иборат $\{V_y : y \in Y\}$ оила Y фазо учун очик қобик бўлади ва Y компакт бўлганлиги учун бу оиладан $\{V_{y_i} : y_i \in Y, i = 1, 2, \dots, n\}$ чекли қобик ажратиш мумкин. Биз V_{y_i} тўпламларга мос келувчи x_0 нуқтанинг атрофларини $V_{y_i}(x_0)$ кўринишда белгиласак, уларнинг кесишмаси $V = \bigcap V_{y_i}(x_0)$ очик тўплам бўлади ва $V \subset G$ муносабатни қаноатлантиради. Демак, G очик тўпламдир. Бундан эса prF тўпламнинг ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

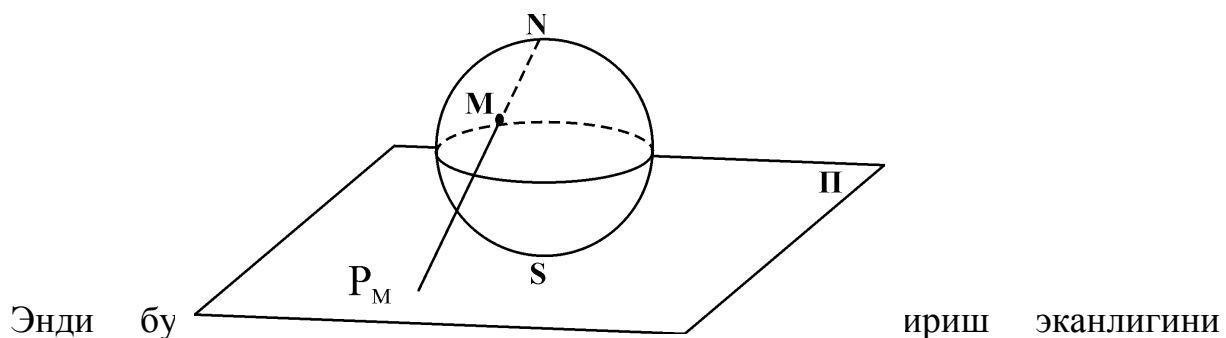
Энди агар $\{U_\alpha\}$ оила $A \times B$ тўпламнинг очик қобиғи бўлса, ундан $A \times B$ учун чекли қобик ажратиш мумкинлигини исботлаш керак. Биз умумийликни чегараламаган ҳолда $A = X$ ва $B = Y$ тенгликлар бажарилган деб ҳисоблаймиз. Ҳар бир α учун очик қобикқа тегишли $\{U_\alpha\}$ тўплам $U_\alpha = U_\alpha^1 \times U_\alpha^2$ кўринишдаги тўпламлар йиғиндисидан иборат бўлади, яъни $U_\alpha = U_\alpha^1 \times U_\alpha^2$ кўринишдаги тўпламлар $A \times B$ фазо учун база бўлади. Бу ерда $U_\alpha^1 \subset X$, $U_\alpha^2 \subset Y$ очик тўпламлардир. Биз умумийликни чегараламаган ҳолда ҳар бир α учун $\{U_\alpha\}$ тўплам $U_\alpha = U_\alpha^1 \times U_\alpha^2$ тўғри кўпайтмадан иборат бўлсин деб ҳисоблаймиз. Бирорта $x \in A$ нуқта учун $\{x\} \times B$ тўпламни қарайлик. Бу тўғри $\{x\} \times B$ кўпайтма B тўпламга гомеоморф бўлганлиги учун компакт тўпламдир. Шунинг учун U_α оиладан $\{x\} \times B$ тўплам учун чекли қобик ажратиш мумкин. Агар $U_{\alpha_1}^x, U_{\alpha_2}^x, \dots, U_{\alpha_k}^x$ тўпламлар $\{x\} \times B$ тўплам учун $\{U_\alpha\}$ оиладан ажратилган чекли қобик бўлса, $G_x = \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}^x$ тўплам очик тўплам бўлганлиги

учун унинг $F_x = X \times Y \setminus G_x$ тўлдирувчиси ёпиқ тўплам бўлади. Юқорида исботлаганимизга кўра тўлдирувчининг $pr: X \times Y \rightarrow X$ проекциядаги образи prF_x ёпиқ тўпламдир. Агар A_x тўплам prF_x тўпламнинг тўлдирувчи бўлса,

тўғри $A_x \times B$ кўпайтма учун $A_x \times B \subset G_x$ муносабат бажарилади. Демак, $U_{\alpha_1}^x, U_{\alpha_2}^x, \dots, U_{\alpha_k}^x$ тўпламлардан иборат оила тўғри $A_x \times B$ кўпайтма учун ҳам $\{U_\alpha\}$ қобикдан ажралган чекли қобикдир. Энди $\{A_x : x \in A\}$ оила A тўплам учун қобик ва A компакт бўлганлиги учун ундан A учун чекли қобик ажратиш мумкин. Бу оиладан A учун ажралган чекли қобик $A_{x_1}, A_{x_2}, \dots, A_{x_m}$ тўпламлардан иборат бўлсин. Демак $\bigcup_{i=1}^m A_{x_i} \supset A$. Бироқ ҳар бир $A_{x_i} \times B$ учун $\{U_\alpha\}$ дан чекли $U_{\alpha_1}^{x_i}, U_{\alpha_2}^{x_i}, \dots, U_{\alpha_{k_i}}^{x_i}$ қобик ажратиш мумкин. Лекин $\bigcup_{i=1}^m (A_{x_i} \times B) \supset A \times B$ бўлганлиги учун $\{U_\alpha\}$ дан $A \times B$ учун ҳам чекли қобик ажратиш мумкин. Демак, $A \times B$ компакт тўпламдир. $\square$

Бу қисм охирида математикада муҳим роль ўйнайдиган топологик акслантиришлардан бири бўлган стереографик проекцияни киритамиз.

Бизга уч ўлчамли R^3 евклид фазосида бирорта сфера берилган бўлсин. Бу сферани S^2 билан, сфера билан битта умумий нуқтага эга бўлган текислиқни $\tilde{I}$ билан, уларнинг умумий нуқтасини S билан белгилайлик. Энди сферанинг S нуқтасига диаметрал қарама – қарши жойлашган нуқтасини N билан белгилаб, сферанинг N нуқтадан бошқа ҳамма нуқталари тўплами билан $\tilde{I}$ текислиқ нуқталари орасида гомеоморф мосликни ўрнатмоқчимиз. Бунинг учун сферанинг N дан фарқли M нуқтаси учун NM тўғри чизиқнинг $\tilde{I}$ текислиқ билан кесишиш нуқтасини P_M билан белгилаб $P : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \tilde{I}$ акслантиришни $P(M) = P_M$ қоида билан аниқлаймиз.



исботлайлик. Бунинг учун R^3 фазода координата бошини сфера марказига жойлаштириб OZ ўқини ON тўғри чизиқ бўйича йўналтириб декарт координаталар системасини киритамиз. Шунда

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

тенглик ўринли бўлиб, $\tilde{I}$ текислиқ $z + R = 0$ тенглама билан аниқланади. Энди сфера нуқталарининг координаталари x, y, z билан, $\tilde{I}$ текислиқ нуқталарининг координаталарини X, Y белгилаб, P акслантириш учун формула ҳосил қиламиз. Сферадаги $M(x, y, z)$ ва $N(0, 0, R)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ $\tilde{I}$ текислиқ билан

$$\underline{P}: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$$

акслантириш

$$\underline{P}(x, y, z) = \left\{ \frac{2R}{R-z}x, \frac{2R}{R-z}y \right\} \quad \text{формула}$$

билан берилади. Бу ерда

$$X(x, z) = \frac{2R}{R-z}x, \quad Y(y, z) = \frac{2R}{R-z}y \quad (1)$$

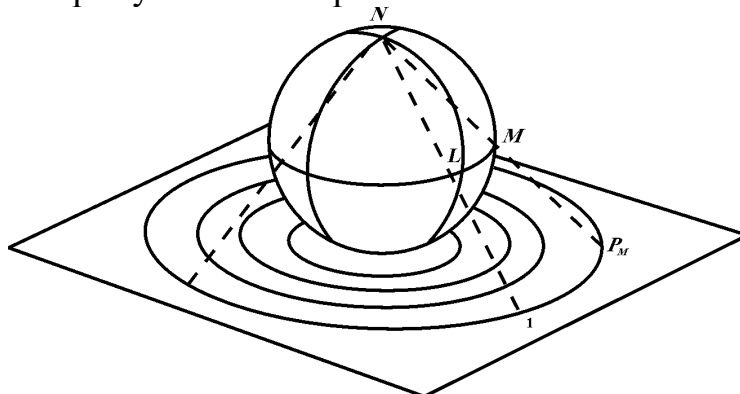
функциялар узлуксиз бўлганлиги учун $\underline{P}$ узлуксиз акслантиришдир.

Энди P акслантиришга тескари P^{-1} акслантиришни топиш учун $N(0, 0, R)$ ва $Q(X, Y, -R)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизикнинг сфера билан кесишиш нуқтасини топамиз. Бу кесишиш нуқталари $N(0, 0, R)$ ва $M(x, y, z)$ нуқталар бўлиб, M нуқтанинг координаталари

$$\begin{cases} X = \frac{4R^2}{x^2 + y^2 + 4R^2} X, \\ Y = \frac{4R^2}{x^2 + y^2 + 4R^2} Y, \\ Z = \frac{R(x^2 + y^2) - 4R^3}{X^2 + Y^2 + 4R^2} \end{cases} \quad (2)$$

кўринишга эга бўлади. Демак (2) формулалар $\underline{P}^{-1} : \Pi \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ акслантиришни аниқлайди.

Юқоридаги келтирилган (2) системадаги $x(X, Y)$, $y(X, Y)$, $z(X, Y)$ функциялар X, Y ўзгарувчиларга нисбатан узлуксиз функциялардир. Шунинг учун P^{-1} акслантириш узлуксиздир. Қуйидаги 2-чизмада сферани $z = c$, $|c| < R$ текислик билан кесганда ҳосил бўладиган айланалар стереографик проекцияда айланаларга ўтиши тасвирланган.



Чизма-2.

16-МАЪРУЗА.

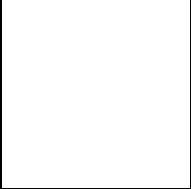
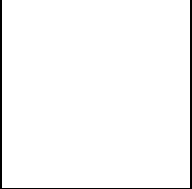
МАВЗУ: Сирт тушунчаси. Сиртнинг берилиш усуллари. 4 соат

Текисликдаги очик доирага гомеоморф тўпламни элементар соҳа деб атаймиз.

Таъриф-1. Фазодаги Φ тўплам элементар соҳанинг топологик акслантиришдаги образи бўлса, уни элементар сирт деб атаймиз. Демак, Φ тўплам элементар сирт бўлса, $f:G \rightarrow \Phi$ -топологик акслантириш мавжуд бўлиши керак.

Бу ерда $G \subset \mathbb{R}^2$ элементар соҳа, Φ эса $\mathbb{R}^3$ дан келтирилган топология ёрдамида топологик фазога айлантирилган. Φ элементар сирт бўлса, (f, G) жуфтлик Φ ни параметрлаш усули дейилади.

Албатта G_1 бошқа элементар соҳа бўлса, G ва G_1 ўзаро гомеоморф

бўлади.  гомеоморфизм бўлса,  ҳам гомеоморфизмдир.

Демак, элементар сирт учун чексиз кўп параметрлаш усуллари мавжуддир. Бирорта тўпламнинг элементар сирт эканлигини кўрсатиш учун, унинг бирорта параметрлаш усулини кўрсатиш керак.

Агар Φ сирт (f, G) параметрлаш усули билан берилиб, $(u, v) \in G$ учун $f(u, v)$ нуқтанинг координаталари $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ лар бўлса

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

система Φ сиртнинг параметрик тенгламалари системаси дейилади.

Таъриф-2. Фазодаги боғланишли Φ тўпламга тегишли ҳар бир нуқтанинг бирорта атрофида Φ элементар сиртга айланса, Φ содда сирт дейилади.

Иккинчи таърифга изоҳ берамиз, демак, Φ содда сирт бўлиши учун унга тегишли ҳар бир $p \in \Phi$ нуқта учун шундай $U(p)$ атроф ($\mathbb{R}^3$ да) мавжуд бўлиб, кесишма $U(p) \cap \Phi$ элементар сирт бўлиши керак.

Кейинчалик курс давомида сирт деганда элементар ёки содда сиртни тушунамиз.

Мисоллар.

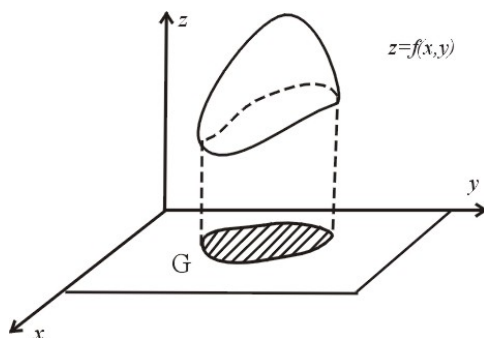
1) Ҳар қандай текислик элементар сиртдир, чунки текислик доирага гомеоморфдир.

Агар $M(x_0, y_0, z_0)$ текислик нуқтаси, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар текисликка параллел бўлса, уни

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty$$

кўринишида параметрлаш мумкин. Бу ерда $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ - M нуктанинг радиус векторидир.

2) Элементар G -соҳада аниқланган $z = f(x, y)$ – узлуксиз функция графиги элементар сиртдир. Сабаби, $(x, y, f(x, y)) \rightarrow (x, y)$ – акслантириш (проекция) гомеоморфизмдир.

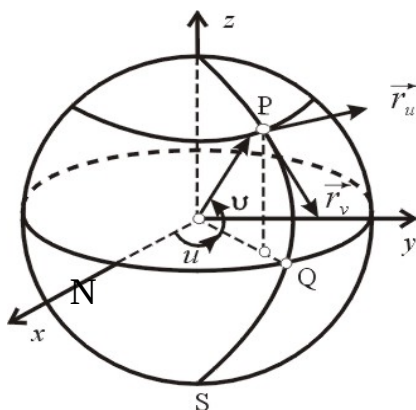


Чизма-1

3) Икки ўлчамли сфера S^2 элементар бўлмаган содда сиртдир. R радиусли сфера S^2 нинг марказига координаталар бошини жойлаштирсак, уни $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ тўплам сифатида қарашимиз мумкин. S^2 нинг сирт эканлигини исботлаш учун унга тегишли бирорта P ни олайлик.

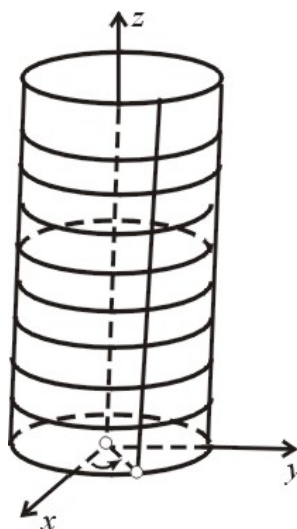
P дан фарқли S нуктани жанубий кутб сифатида, унга диаметрик қарама-қарши бўлган N нуктани шимолий кутб ҳисоблаб, z ўқини координата бошидан N нукта орқали ўтказамиз, Оху текислиги эса O нўқтадан ўтувчи ва ON га перпендикуляр текисликдир. Бу текислик ва сфера кесишишидан ҳосил бўлган айланани экватор деб атаймиз. Энди u билан $0Q$ нур ва Ox ўқи орасидаги бурчакни, v билан OP ва OQ нурлар орасидаги бурчакни белгилаймиз. Бу ерда Q - NPS меридианнинг экватор билан кесишиш нуктасидир, $0 < u < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Шунда S^2 нинг NS - меридиан чиқариб ташланган қисми

$\varphi: P \rightarrow (u, v)$ акслантириш ёрдамида $]0; 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ элементар соҳага гомеоморф акслантирилади ва $x = R \cos u \cos v$, $y = R \sin u \cos v$, $z = R \sin v$ тенгламалар ёрдамида параметрланади.



Чизма-2

4) $x = R \cos u$, $y = R \sin u$, $z = V$. тенгламалар системаси доиравий цилиндрнинг параметрик тенгламаларидир. Бу ерда $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$.
Албатта цилиндр ҳам элементар сирт эмас.



Чизма-3

Агар биз $\vec{r}(u, v) = \{x(u; v); y(u; v); z(u; v)\}$ вектор функцияни киритсак (1) ифодани

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in G \quad (2)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенглама Φ сиртнинг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади. Табиийки, Φ сирт элементар сирт бўлмаса, (1) ва (2) тенгламалар уни бирорта нукта атрофида аниқлайди. Агар Φ элементар сирт бўлса, уни тўлиқ (1) ёки (2) тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

2. Сиртнинг ошкормас кўринишда берилиши.

Бизга $G \subset R^3$ очик тўплам ва G да аниқланган силлиқ $F(x, y, z)$ функция берилган бўлсин.

Шунда $\Phi = \{(x, y, z) \in G : F(x, y, z) = 0\}$ тўплам F функциянинг сатҳ тўплами ёки сирти дейилади.

Агар $\text{grad} F \neq 0$ бўлса, Φ ҳақиқатдан ҳам содда сирт бўлади. Ҳақиқатдан, агар $p = (x_0; y_0; z_0) \in \Phi$ нуктада $F_z \neq 0$ бўлса, ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра, шундай $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ сонлари ва $G_0 = \{(x; y) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$ соҳада аниқланган $z = f(x, y)$ функция мавжуд бўлиб, $(x; y) \in G_0$ лар учун $F(x, y, f(x, y)) = 0$ тенглик, $z_0 = f(x_0; y_0)$ ва $|z_0 - f(x, y)| < \varepsilon$ муносабатлар бажарилиб,

$$P = \{(x; y; z) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta, |z_0 - z| < \varepsilon\}$$

параллелипипеднинг Φ билан кесишмаси $z = f(x, y)$ функциянинг графигидан иборатдир. Демак, Φ ўзига тегишли ҳар қандай нуктанинг етарли кичик атрофида элементар сирт бўлади.

Бизнинг курсимизда асосий метод математик анализ бўлганлиги учун, биз сиртлардан қўшимча шартларни талаб қиламиз.

Таъриф-3. Φ сирт учун унга тегишли ихтиёрий нукта атрофида (f, G) параметрлаш усули мавжуд бўлиб, бунда $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ матрицанинг ранги иккига тенг бўлса, Φ сирт регуляр сирт дейилади, параметрлаш усули эса регуляр параметрлаш дейилади.

Сиртнинг регулярлик шартини $\begin{bmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{bmatrix} \neq \vec{0}$ кўринишда ҳам ёзишимиз мумкин. Биз курсимизда асосан регуляр сиртларни ўрганамиз.

Энди сиртларнинг берилиш усуллари ҳақида қуйидаги теоремаларни исботлайлик.

Теорема-1. Бизга G соҳада аниқланган силлик $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ функциялар берилиб, ҳар бир нуктада $\text{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ бўлса,

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in G$$

система регуляр сиртни аниқлайди.

Исбот: Теоремани исботлаш учун

$\Phi = \{(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in G\}$ тўпламнинг содда сирт эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун эса Φ тўпламга тегишли ихтиёрий $p_0 = (x(u_0; v_0), y(u_0; v_0), z(u_0; v_0))$ нуктанинг етарли кичик атрофида Φ элементар сирт эканлигини кўрсатамиз. Бирорта $\varepsilon > 0$ ва $G_\varepsilon = \{(u, v) \in G : (u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 < \varepsilon\}$ очик доира учун $f : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ қоида билан аниқланган $f : G_\varepsilon \rightarrow f(G_\varepsilon)$ акслантиришни қараймиз.

$x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги учун f ҳам узлуксиз акслантиришдир. Агар f ўзаро бир қийматли бўлса, унинг тескарис f^{-1} мавжуд ва узлуксиз бўлади (f^{-1} узлуксизлиги ҳам $x(u, v), y(u, v)$ ва $z(u, v)$ функциялар узлуксизлигидан келиб чиқади), демак Φ нинг p_0 нуктани ўз ичига олувчи $f(G_\varepsilon)$ қисми элементар сирт бўлади.

Шунинг учун бирорта $\varepsilon > 0$ учун f акслантиришнинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, $\varepsilon_i > 0, \varepsilon_i \rightarrow 0, i = 1, 2, 3, \dots$ ва G_{ε_i} доирага тегишли $(u_i^1; v_i^1)$

ва $(u_i^2; v_i^2)$ ҳар хил нукталар учун $f(u_i^1; v_i^1) = f(u_i^2; v_i^2)$ тенглик ўринли бўлсин. Умумийликни чегараламасдан аниқлик учун $u_i^1 \leq u_i^2$ ва $v_i^1 \leq v_i^2$ деб фараз қилайлик.

Шунда,

$$x(u_i^1; v_i^1) - x(u_i^2; v_i^2) = 0, \quad y(u_i^1; v_i^1) - y(u_i^2; v_i^2) = 0, \quad z(u_i^1; v_i^1) - z(u_i^2; v_i^2) = 0$$

тенгликлардан ва Лагранж теоремасидан

$$x_u(p_i^1, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + x_v(u_i^2, q_i^1)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

$$y_u(p_i^2, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + y_v(u_i^2, q_i^2)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

$$z_u(p_i^3, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + z_v(u_i^2, q_i^3)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

тенгликларни оламиз. Бу ерда $p_i^1, p_i^2, p_i^3 \in [u_i^1, u_i^2]$, $q_i^1, q_i^2, q_i^3 \in [v_i^1, v_i^2]$ ва $u_i^2 - u_i^1$ ва $v_i^2 - v_i^1$ сонлари бир вақтда нолга айлана олмайди.

Шунинг учун юқоридаги тенгликлардан

$$\frac{x_u(p_i^1; v_i^1)}{x_v(u_i^2; q_i^1)} = \frac{y_u(p_i^2; v_i^1)}{y_v(u_i^2; q_i^2)} = \frac{z_u(p_i^3; v_i^1)}{z_v(u_i^2; q_i^3)}$$

муносабатни оламиз. Бу муносабатда

x_u, x_v, y_u, y_v ва z_u, z_v функциялар узлуксизлигидан фойдаланиб, $i \rightarrow \infty$ лимитга ўтсак,

$$\frac{x_u(u_0, v_0)}{x_v(u_0, v_0)} = \frac{y_u(u_0, v_0)}{y_v(u_0, v_0)} = \frac{z_u(u_0, v_0)}{z_v(u_0, v_0)}$$

муносабатни оламиз.

Бу муносабат эса теорема шартига зид бўлган,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} < 2$$

тенгсизликка тенг кучлидир. Демак, фаразимиз нотўғри, ва $\varepsilon > 0$ етарли кичик бўлганда $f: G_\varepsilon \rightarrow f(G_\varepsilon)$ акслантириш топологик акслантиришдир. Бундан эса, Φ тўпламнинг

p_0 ни ўз ичига олувчи $f(G_\varepsilon)$ қисми элементар сирт эканлиги келиб чиқади. $\square$

Теорема-2. Регуляр Φ сирт унга тегишли $p(u_0, v_0)$ нукта атрофида,

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), (u, v) \in G \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар ёрдамида берилиб, p нуктада $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ детерминант нолдан фарқли бўлса, шундай силлиқ $f(x, y)$ функция мавжудки p нуктанинг атрофида Φ сирт $z = f(x, y)$ функциянинг графигидан иборатдир.

Изоҳ. Биз регуляр сиртларнинг параметрлаш усулини

танлаганимизда ҳар доим $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ ҳосилалар мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

Исбот. Теоремани исботлаш учун, $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, \begin{cases} x(u_0, v_0) = x_0 \\ y(u_0, v_0) = y_0 \end{cases}$ системага

га математик анализ курсидаги тескари функциялар ҳақидаги теоремани қўллаймиз.

Бу теоремага асосан шундай $\delta > 0$ сони ва $\Pi_\delta = \{(x, y) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$ соҳада аниқланган шундай дифференциалланувчи $u = u(x, y), v = v(x, y)$ функциялар мавжудки, улар $x(u(x, y), v(x, y)) \equiv x, y(u(x, y), v(x, y)) \equiv y$ тенгликларни қаноатлантиради ва $u(x_0, y_0) = u_0, v(x_0, y_0) = v_0$, муносабатлар ўринли бўлади. Демак, p нуқта атрофида Φ сирт $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ функциянинг графигидан иборатдир. $\square$

17-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: Уринма текислик, уринма вектор, нормал. 2 соат

Регуляр Φ сиртнинг $p \in \Phi$ нукта атрофида регуляр (f, G) параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (1)$$

тенглама ёрдамида берилган, сирт устида p нуктадан ўтувчи γ эгри чизик берилган бўлиб, у

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \quad a < t < b. \quad (2)$$

тенглама ёрдамида параметрланган ва $\gamma \subset f(G)$ бўлсин.

Аниқлик учун, p сирт нуктаси сифатида $(u_0; v_0)$ координаталарга, эгри чизик нуктаси сифатида параметр t нинг t_0 қийматига мос келсин. Табиийки, ҳар бир $t \in (a; b)$ учун шундай $(u(t), v(t)) \in G$ нукта мавжуд бўлиб,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) \quad (3)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар γ силлиқ эгри чизик бўлса, $u(t), v(t)$ функциялар ҳам дифференциалланувчи функциялар бўлади. Буни исботлаш учун Φ нинг регуляр сирт эканлигидан фойдаланамиз. Φ регуляр сирт бўлганлиги учун

$\text{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$. Аниқлик учун $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ бўлсин деб фараз қилиб,

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \text{ системани қараймиз.}$$

Агар γ силлиқ эгри чизик бўлса, $\vec{\rho}(t)$ вектор функциянинг координаталари $x(t), y(t), z(t)$ дифференциалланувчи функциялар бўлади. Бирорта $t^* \in (a; b)$ учун $x^* = x(t^*), y^* = y(t^*), z^* = z(t^*)$. ва $u^* = u(t^*), v^* = v(t^*)$ белгилашлар киритиб,

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

системани

$$\begin{cases} x(u^*, v^*) = x^* \\ y(u^*, v^*) = y^* \end{cases}$$

бошланғич шартлар билан қараймиз. Тескари функция ҳақидаги теоремага асосан шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонлари ва

$$\Pi_\delta = \{(x, y) : |x^* - x| < \delta, |y^* - y| < \delta\}$$

соҳада аниқланган ва дифференциалланувчи $u = u(x, y), v = v(x, y)$ функциялар мавжуд бўлиб, улар

$$\begin{aligned} |u^* - u(x, y)| &< \varepsilon, & x &= x(u(x, y), v(x, y)), & u^* &= u(x^*, y^*) \\ |v^* - v(x, y)| &< \varepsilon, & y &= y(u(x, y), v(x, y)), & v^* &= v(x^*, y^*) \end{aligned}$$

муносабатларни қаноатлантиради. Биз умумийликни чегараламасдан $\Pi_\delta = \{(u, v) : |u^* - u| < \varepsilon, |v^* - v| < \varepsilon\}$ соҳа учун $\Pi_\delta \subset G$ муносабат ўринли деб ҳисоблаймиз.

Энди $\delta_0 > 0$ сонини шундай танлаймизки, $|t^* - t| < \delta_0$ бўлганда $|x^* - x(t)| < \delta, |y^* - y(t)| < \delta$ муносабатлар бажарилсин. $\pi : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$ қоида билан аниқланган $\pi : R^3 \rightarrow R^2$ проекция ёрдамида $|t^* - t| < \delta_0$ учун

$$(x(t), y(t)) = \pi(x(t), y(t), z(t))$$

тенгликни ҳисобга олиб,

$$u(t) = u(x(t), y(t))$$

$$v(t) = v(x(t), y(t))$$

дифференциалланувчи функцияларни аниқлаймиз. Бу функциялар $u(t^*) = u^*, v(t^*) = v^*$ ва $\bar{p}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$ тенгликларни қаноатлантиради ва t^* нукта атрофида аниқланган функциялар бўлади. Бу t^* нукта ихтиёрий танлангани учун $u(t), v(t)$ функциялар (a, b) ораликнинг ҳар бир нуктасида дифференциалланувчидир. $\square$

Агар γ регуляр эгри чизик бўлса, у ҳолда

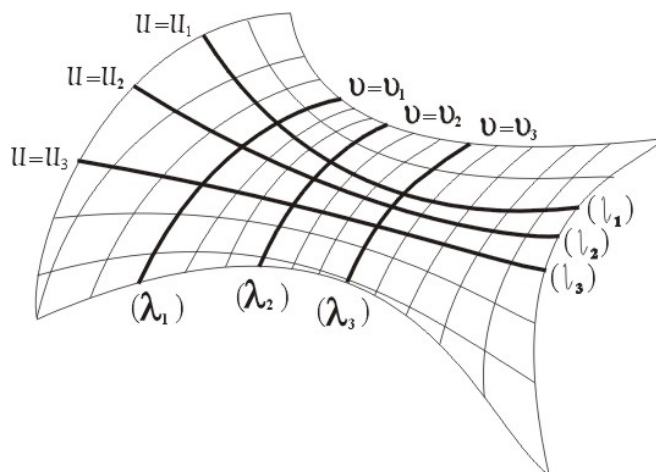
$$\vec{p}'(t) = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v'$$

тенгликдан u', v' ларнинг бир вақтда нолга тенг бўлмаслиги келиб чиқади. Шундай қилиб, γ эгри чизикни

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан бериш мумкин. Бу тенгламалар γ чизикнинг ички координаталардаги тенгламалари деб аталади.

Φ сиртда $u = t, v = v_0 = \text{const}$ ва $u = u_0 = \text{const}, v = t$ тенгламалар билан аниқланувчи эгри чизиклар координата чизиклари деб аталади. Координата чизикларининг уринма векторлари мос равишда $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлардир (4-чизма).



Чизма-4

Таъриф-1. $\vec{a}$ вектор сирт устида ётувчи p нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг уринма вектори бўлса, у Φ сиртга p -нуқтадаги уринма вектор деб аталади.

Теорема-3. Регуляр сиртнинг берилган нуқтадаги уринма векторлари тўплами икки ўлчамли чизиқли фазодир.

Исбот. Φ -регуляр сирт, p -унга тегишли нуқта ва $\vec{a}$ -бирорта уринма вектор бўлсин.

Агар Φ сирт (1) тенглама ёрдамида регуляр параметрланган, $\vec{a}$ вектор $u = u(t)$, $v = v(t)$ тенгламалар ёрдамида аниқланган эгри чизиқнинг p нуқтадаги уринма вектори бўлса,

$$\vec{a} = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v',$$

тенглик ўринли бўлади. Демак, ихтиёрий уринма векторни $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ -векторлар ёрдамида чизиқли ифодалаш мумкин.

Бундан келиб чиқадики, уринма векторлар тўпламида, $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ векторлар базисни ташкил қилади. $\square$

Таъриф-2. Φ сиртнинг $p(u_0; v_0)$ нуқтасидан ўтувчи ва $\vec{r}_u(u_0; v_0), \vec{r}_v(u_0; v_0)$ векторларга параллел текислик p нуқтадаги уринма текислик деб аталади.

Уринма текислик таърифида сиртнинг параметрланиш усулига боғлиқ $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар қатнашишига қарамасдан уринма текислик тушунчаси сиртнинг параметрланиш усулига боғлиқ эмаслигини қуйидаги теорема кўрсатади:

Теорема-4: Π — $p(u_0; v_0)$ нуқтадан ўтувчи текислик, q сиртнинг p га яқин нуқталаридан бири, d - p ва q нуқталар орасидаги масофа, h — q нуқтадан Π текисликгача бўлган масофа бўлсин. Шунда Π текислик p нуқтадаги уринма текислик бўлиши учун,

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{h}{d} = 0 \quad (*)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот: Π текисликнинг бирлик нормал векторини $\vec{n}$ -билан белгилайлик. Φ сирт p нуқтада $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ тенглама билан параметрланган бўлса, q ва p нуқталар орасидаги масофа учун

$$d = \left| \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \right|$$

h учун эса

$$h = \left| \left(\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0), \vec{n} \right) \right|$$

формула ўринли бўлади.

Шунда,

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{h}{d} = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{h}{d} = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{|\vec{\Delta r}, \vec{n}|}{\left| \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \right|}$$

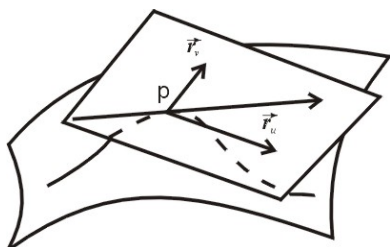
бўлади. Бу ерда, $\vec{\Delta r} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)$, $u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v - q$ нуктага мос келувчи аргументлардир.

Зарурлик: Π уринма текислик бўлсин. Таърифга кўра, Π -текислик $\vec{r}_u, \vec{r}_v$

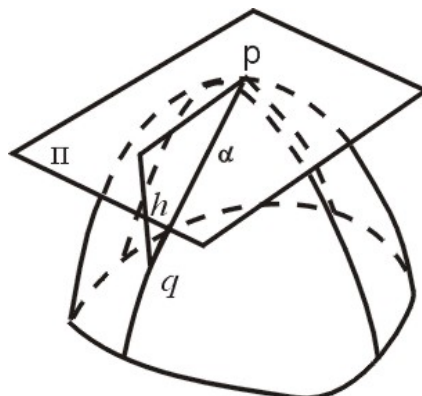
векторларга параллел бўлгани учун, $\vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} \vec{r}_u, \vec{r}_v \end{bmatrix}}{\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v \right]}$ тенглик ўринлидир.

Тейлор формуласидан фойдаланиб, $\vec{\Delta r} = \vec{r}_u(u_0; v_0) \cdot \Delta u + \vec{r}_v(u_0; v_0) \cdot \Delta v + \vec{\varepsilon}$ ва $\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \vec{\varepsilon} = \vec{0}$ ни ҳисобга олсак, $\lim_{q \rightarrow p} \frac{h}{d} = 0$ келиб чиқади.

Етарлилик: Π -текислик учун (*) тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда (*) тенгликда $\Delta u = 0$ ва $\Delta v = 0$ ҳоллар учун $(\vec{r}_u; \vec{n}) = 0$ ва $(\vec{r}_v; \vec{n}) = 0$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак, Π -текислик уринма текисликдир. $\square$



Чизма-5



Чизма-6

18-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: Сиртнинг биринчи квадратик формаси. 4 соат

R^3 – да регуляр Φ -сирт берилган бўлса, Φ га уринма фазо $T_p\Phi$ га тегишли иккита $\vec{a}, \vec{b}$ –векторлар учун уларнинг скаляр кўпайтмасини $I(\vec{a}, \vec{b})$ билан белгилаймиз. Бу скаляр кўпайтма ёрдамида Φ сиртнинг биринчи квадратик формасини аниқлаймиз.

Уринма фазода $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар базисни ташкил қилганлиги учун

$$\vec{a} = a_1 \vec{r}_u + a_2 \vec{r}_v, \quad \vec{b} = b_1 \vec{r}_u + b_2 \vec{r}_v, \text{ -тенгликларни ёзиб,}$$

$$I(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 \vec{r}_u^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (\vec{r}_u, \vec{r}_v) + a_2 b_2 \vec{r}_v^2$$

ифодани ҳосил қиламиз. Демак, $I(\vec{a}, \vec{b})$ ни ҳисоблаш учун, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ базисдаги координаталарини ва $E = \vec{r}_u^2$, $F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ ва $G = \vec{r}_v^2$ функцияларни билишимиз етарли.

Биринчи квадратик формани,

$$I(\vec{a}, \vec{a}) = a_1^2 \cdot E + 2a_1 a_2 \cdot F + G a_2^2$$

кўринишда аниқлаймиз. Биринчи квадратик форма ёрдамида қуйидаги ишларни бажариш мумкин:

1. Сирт устида чизиклар узунлигини ҳисоблаш

Φ -сиртнинг (f, G) – параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

тенглама ёрдамида берилиб, сиртда $u = u(t)$, $v = v(t)$. тенгламалар билан γ чизик берилган бўлсин. γ – учун параметрларнинг t_1 ва t_2 ($t_1 < t_2$) қийматларига мос келувчи ёй узунлигини ҳисоблайлик.

Биламизки, бу ёй узунлиги R^3 да,

$$l(\gamma) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left| \vec{\rho}'(t) \right| dt$$

формула билан ҳисобланади.

Бу ерда $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ ва $\vec{\rho}'(t) = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$l(\gamma) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \cdot u'^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot v'^2} dt$$

формулани ҳосил қиламиз.

2. Сирт устида ётувчи чизиклар орасидаги бурчак.

Φ -сиртда $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ ва $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(s)$ тенглама билан регуляр чизиклар берилган бўлсин. Агар бу чизиклар кесишса (яъни $\vec{\rho}(t_0) = \vec{\rho}_1(s_0)$) тенгликни

қаноатлантирувчи t_0, s_0 лар мавжуд бўлса), $\vec{\rho}'(t_0), \vec{\rho}'_1(s_0)$, векторлар орасидаги бурчакни шу нуктадаги эгри чизиқлар орасидаги бурчак деб атаймиз: Бу бурчакнинг қиймати φ бўлса,

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{\rho}'(t_0), \vec{\rho}'_1(s_0))}{\left| \vec{\rho}'(t_0) \right| \cdot \left| \vec{\rho}'_1(s_0) \right|}$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда,

$$\begin{aligned} \vec{\rho}'(t_0) &= r_u \vec{u}'(t_0) + r_v \vec{v}'(t_0), \\ \vec{\rho}'_1(s_0) &= r_u \vec{u}'_1(s_0) + r_v \vec{v}'_1(s_0) \end{aligned}$$

тенгликларни ҳисобга олсак,

$$\cos \varphi = \frac{Eu'(t_0)u'_1(s_0) + F(u'(t_0)v'_1(s_0) + v'(t_0)u'_1(s_0)) + Gv'(t_0)v'_1(s_0)}{\sqrt{E(u'(t_0))^2 + 2Fu'(t_0)v'(t_0) + G(v'(t_0))^2} \cdot \sqrt{E(u'_1(s_0))^2 + 2Fu'_1(s_0)v'_1(s_0) + G(v'_1(s_0))^2}}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

19-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: Изометрик акслантиришлар. 4 соат

Таъриф-1. Регуляр Φ_1 ва Φ_2 сиртлар учун $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ силлик акслантириш берилган бўлиб, ҳар қандай $p \in \Phi_1$ нуқта учун $dg(p): T_p \Phi_1 \rightarrow T_{g(p)} \Phi_2$ акслантириш скаляр кўпайтмани сақласа (яъни чизикли изометрик акслантириш бўлса), g изометрик акслантириш дейилади.

Демак, g изометрик акслантириш бўлса, ихтиёрий $p \in \Phi_1$ нуқта ва ихтиёрий $\bar{a}, \bar{b} \in T_p \Phi_1$ векторлар учун

$$I_1(\bar{a}, \bar{b}) = I_2(dg(p)(\bar{a}), dg(p)(\bar{b}))$$

тенглик ўринли бўлади. бу ерда I_1 ва I_2 мос равишда Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг 1-квадратик формаларидир.

Изометрик акслантиришлар ҳақида қуйидаги теоремаларни исботлаймиз.

Теорема-7. Изометрик акслантириш диффеоморфизмдир.

Исбот. Силлик $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ акслантириш учун тескари акслантириш $g^{-1}: \Phi_2 \rightarrow \Phi_1$ мавжуд ва дифференциалланувчи бўлса, g диффеоморфизм дейилади. Демак изометрик $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ акслантиришнинг диффеоморфизм эканлигини кўрсатиш учун g^{-1} нинг мавжуд ва дифференциалланувчи эканлигини кўрсатиш керак.

Фараз қилайлик, Φ_1 сирт (f_1, G_1) параметрлаш усули билан, Φ_2 сирт (f_2, G_2) параметрлаш усули билан берилган бўлсин. $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ дифференциалланувчи акслантириш бўлганлиги учун, таърифга кўра $g \cdot f_1: G_1 \rightarrow R^3$ дифференциалланувчидир. Биз $g^{-1} \cdot f_2: G_2 \rightarrow R^3$ акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатишимиз керак. Акслантириш g изометрик бўлганлиги учун унинг дифференциали dg чизикли эркли векторларни чизикли эркли векторларга ўтказди. Ҳақиқатан ҳам, Φ_1 сиртнинг

p нуқтасидаги $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ уринма векторлари чизикли эркли бўлса, $\frac{|I_1(\vec{p}, \vec{q})|}{|\vec{p}||\vec{q}|} \neq 1$ бўлади. Лекин

$$I_2(dg(\vec{p}), dg(\vec{q})) = I_1(\vec{p}, \vec{q}), \quad |\vec{p}| = |dg(\vec{p})|, \quad |\vec{q}| = |dg(\vec{q})|$$

бўлганлиги учун

$$\frac{|I_2(dg(\vec{p}), dg(\vec{q}))|}{|dg(\vec{p})||dg(\vec{q})|} \neq 1$$

келиб чиқади.

Бу эса $dg(\vec{p}), dg(\vec{q})$ векторларнинг чизикли эркли эканлигига тенг кучлидир. Агар $\vec{p} = df_1(\vec{a}), \vec{q} = df_1(\vec{b})$ бўлса, $dg(\vec{p}) = d(g \cdot f_1)(\vec{a}), dg(\vec{q}) = d(g \cdot f_1)(\vec{b})$ бўлади. Шунинг учун $g \cdot f_1$ акслантиришнинг ранги иккига тенгдир. ×унки $g \cdot f_1$ акслантиришнинг ранги иккидан кичик бўлса, $d(g \cdot f_1)(\vec{a}), d(g \cdot f_1)(\vec{b})$ векторлар чизикли боғланишли бўлади.

Шундай қилиб, G_1 соҳанинг ихтиёрий нуқтасида $g \cdot f_1$ акслантириш ранги иккига тенг бўлади. Агар $f = g \cdot f_1$ акслантириш

$$\begin{cases} x = g^1(u, v) \\ y = g^2(u, v) \\ z = g^3(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

функциялар ёрдамида берилган бўлса, G_1 нинг ҳар бир нуқтасида

$$\text{rang} \begin{pmatrix} g_u^1 & g_u^2 & g_u^3 \\ g_v^1 & g_v^2 & g_v^3 \end{pmatrix} = 2$$

тенглик ўринли бўлади.

Демак, (1) тенгламалар Φ_2 сиртнинг регуляр (f, G_1) параметрлаш усулини аниқлайди.

Тескари функция ҳақидаги теоремага асосан ([2]га қаранг) $(gf_1)^{-1}$ мавжуд. Демак, $g^{-1} = f_1 \cdot (gf_1)^{-1}$ ҳам мавжуд ва g^{-1} нинг дифференциалланувчи эканлиги $g^{-1} f(u, v) = f_1(u, v)$ тенгликдан келиб чиқади. $\square$

Берилган силлиқ $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ акслантириш изометрия бўлишини текшириш учун қуйидаги теоремалардан фойдаланилади.

Теорема-8. Силлиқ $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ акслантириш изометрия бўлиши учун бу акслантиришда ихтиёрий чизиклар ёйи узунлиги сақланиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Изометрик акслантириш $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ ва Φ_1 да ётувчи γ эгри чизик $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама ёрдамида берилган бўлсин. Шунда бу чизик ёйи узунлиги $\int_{t_1}^{t_2} |\vec{\rho}'(t)| dt$ формула билан ҳисобланади. Агар $g(\gamma)$ чизикнинг

уринма вектори $\vec{\tau}'(t)$ бўлса, g изометрик бўлганлиги учун $|\vec{\tau}'(t)| = |\vec{\rho}'(t)|$ тенглик ўринли. Демак,

$$\int_{t_1}^{t_2} |\vec{\rho}'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{\tau}'(t)| dt.$$

Аксинча, силлиқ $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ акслантириш берилган бўлиб, у ихтиёрий чизик ёйи узунлигини сақласин. Ихтиёрий $p \in \Phi$ нуқта ва $\vec{a} \in T_p \Phi_1$ векторни қарайлик. Ихтиёрий уринма вектор бирорта эгри чизикнинг p нуқтасидаги уринма вектори бўлганлиги учун, шундай силлиқ γ эгри чизик мавжудки, унинг p нуқтадаги уринма вектори $\vec{a}$ га тенг. Фараз қилайлик, γ чизик $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган ва $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{a}$ бўлсин. Теорема шартига кўра

$$\int_{t_0}^t |\vec{\rho}'(s)| ds = \int_{t_0}^t |\vec{\tau}'(t)| dt, \quad (2)$$

бу ерда $\vec{\tau}'(t) = g(\gamma)$ эгри чизикнинг уринма вектори.

Биз (2) тенгликнинг иккала томони t бўйича дифференциаллаймиз ва $|\vec{\rho}'(t_0)| = |\vec{\tau}'(t_0)|$ тенгликни ҳосил қиламиз. Демак дифференциал $dg(p)$

ихтиёрий $\vec{a}$ векторнинг узунлигини сақлайди, яъни $|\vec{a}| = |dg(p)(\vec{a})|$. Энди ихтиёрий $\vec{a}, \vec{b}$ векторлар учун

$$I_1(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} I_1(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2} I_1(\vec{a}, \vec{a}) - \frac{1}{2} I_1(\vec{b}, \vec{b}) = \frac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{a} + \vec{b}), dg(p)(\vec{a} + \vec{b})) - \\ - \frac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{a}), dg(p)(\vec{a})) - \frac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{b}), dg(p)(\vec{b})) = I_2(dg(p)(\vec{a}), dg(p)(\vec{b}))$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, $dg(p)$ скаляр кўпайтмани сақлайди. $\square$

Теорема-9. Силлик $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ акслантириш изометрия бўлиши учун Φ_1 га тегишли ихтиёрий p нуқтанинг атрофи учун Φ_1 нинг шундай (f, G) параметрлаш усули мавжуд бўлиб, Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг (f, G) ва $(g \cdot f, G)$ параметрлаш усуллари учун ҳисобланган 1-квадрат формалари коэффицентларининг мос равишда тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Акслантириш $g: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ -изометрия, $p \in \Phi_1$ ва p нинг атрофида Φ_1 сиртнинг (f, G) параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

тенглама ёрдамида берилган бўлсин. Биринчи теоремага кўра g -диффеоморфизм, ва $(g \cdot f, G)$ - Φ_2 сиртнинг параметрлаш усули бўлади. Фараз қилайлик, Φ_2 нинг бу параметрлаш усули

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(u, v)$$

тенглама билан берилсин. Шунда

$$\vec{\rho}_u = dg(p)(\vec{r}_u), \vec{\rho}_v = dg(p)(\vec{r}_v)$$

тенгликлардан g изометрия бўлганлиги учун

$$E_1 = I_1(\vec{r}_u, \vec{r}_u) = I_2(\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_u) = E_2$$

$$F_1 = I_1(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = I_2(\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_v) = F_2$$

$$G_1 = I_1(\vec{r}_v, \vec{r}_v) = I_2(\vec{\rho}_v, \vec{\rho}_v) = G_2$$

тенгликлар келиб чиқади.

Энди, аксинча p нуқта атрофидан Φ_1 сиртнинг (f, G) параметрлаш усули ва Φ_2 сиртнинг $g(p)$ нуқта атрофидаги $(g \cdot f, G)$ параметрлаш усуллари учун

$$E_1(u, v) = E_2(u, v),$$

$$F_1(u, v) = F_2(u, v),$$

$$G_1(u, v) = G_2(u, v)$$

тенгликлар ўринли бўлсин.

Шунда, $dg(p)(\vec{r}_u) = \vec{\rho}_u$, $dg(p)(\vec{r}_v) = \vec{\rho}_v$ тенгликларни ҳисобга олиб,

$$I_1(\vec{r}_u, \vec{r}_u) = E_1(u, v) = E_2(u, v) = I_2(\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_u),$$

$$I_1(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = F_1(u, v) = F_2(u, v) = I_2(\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_v),$$

$$I_1(\vec{r}_v, \vec{r}_v) = G_1(u, v) = G_2(u, v) = I_2(\vec{\rho}_v, \vec{\rho}_v)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Демак, $dg(p)$ акслантириш $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ векторларнинг скаляр кўпайтмаларини сақлайди.

Дифференциал $dg(p)$ чизикли акслантириш эканлигидан ва скаляр кўпайтманинг бичизиклилигидан $dg(p)$ нинг скаляр кўпайтмани сақлаши келиб чиқади. $\square$

20-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: Нормал эгрилик ва Менье теоремаси. 4 соат

Ф сиртни унинг p нуктасидан ўтувчи текислик билан кессак, кесимда P нуктадан ўтувчи силлиқ эгри чизиқ ҳосил бўлади. Бундай эгри чизиқни текис кесим деб атаймиз. Агар γ текис кесим бўлса, албатта унинг буралиши нолга тенг бўлади. (нима учун?)

Энди Φ сиртнинг p нукта атрофидаги $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ параметрлаш усулини қарайлик. Аниқлик учун p нинг ички координаталари $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ бўлсин. Текис кесим γ тенгламасини табиий параметр (яъни ёй узунлиги) ёрдамида $\vec{\rho} = \vec{r}(u(s), v(s))$ кўринишда ёзиб, унинг учун Френе формулаларини ёзайлик (буралиш нолга тенглигини ҳисобга олиб)

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -k\vec{\tau} \end{cases}$$

Бу ерда $\vec{\tau} = \dot{\vec{\rho}}$, $\vec{v}$ - бирлик нормал вектор, k эса γ чизиқнинг p нуктадаги эгрилиги. Шунда

$$II(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = (\dot{\vec{\tau}}, \vec{n}) = (k\vec{v}, \vec{n}) = k \cos \theta$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда θ — $\vec{n}$ ва $\vec{v}$ векторлар орасидаги бурчак. Энди γ ни $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан аниқласак (бу ерда t -ихтиёрий параметр), унда t -ни s нинг функцияси эканлигидан ва

$$\vec{\rho}' = \dot{\vec{\rho}} \frac{ds}{dt}, \vec{\rho}'' = \ddot{\vec{\rho}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{\vec{\rho}} \frac{d^2s}{dt^2}$$

тенгликларни ҳисобга олиб

$$II(\vec{\rho}', \vec{\rho}') = (\vec{\rho}'', \vec{n}) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (\ddot{\vec{\rho}}, \vec{n}) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 k \cos \theta$$

ни ҳосил қиламиз.

Бундан

$$k \cos \theta = \frac{II(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2} = \frac{II(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}{I(\vec{\rho}', \vec{\rho}')} \quad (1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўнг томони фақат $\vec{\rho}'$ векторга боғлиқлиги кўриниб турибди. Агар γ дан бошқа текис кесим γ' ни олсак, ва улар умумий уринмага эга (яъни бир хил йўналишга эга бўлса), улар учун (1) тенгликнинг ўнг томони бир хилдир. Бу формулани теорема шаклида ёзамиз.

Теорема-11 (Менье). Φ сиртнинг P нуктасидаги ихтиёрий $\vec{a}$ уринма вектор ва P нуктадаги уринма вектори $\vec{a}$ га тенг бўлган текис кесим учун (1) формула ўринлидир.

Энди кесувчи текислик Π нормал $\vec{n}$ векторга параллел бўлсин. Бу ҳолда текис кесим уринмасига $\vec{n}$ вектор перпендикуляр бўлади. Демак $\cos\theta = \pm 1$ ва (1) тенглик

$$k = \pm \frac{II(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}{I(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}$$

кўринишга келади.

Бу ҳолда текис кесимни нормал кесим деб атаимиз.

Таъриф-2. $\frac{II(\vec{a}, \vec{a})}{I(\vec{a}, \vec{a})}$ сони Φ сиртнинг p нуқтадаги $\vec{a}$ йўналиш бўйича

нормал эгрилиги дейилади ва $k_n(\vec{a})$ билан белгиланади.

Шундай қилиб, сиртнинг $\vec{a}$ йўналиш бўйича нормал эгрилиги $\vec{a}$ вектор аниқловчи нормал кесимнинг эгрилигига абсолют қиймати бўйича тенг, ишораси фарқ қилиши мумкин.

21-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: Бош йўналишлар ва бош эгриликлар. 4 соат

Сиртнинг иккинчи квадратик формаси

Ф сиртнинг 2-квадратик формаси ҳам $T_p\Phi$ га тегишли векторлар жуфти учун аниқланган бичизикли (яъни ҳар бир аргументи бўйича чизикли) функция ёрдамида аниқланади. Ф сиртнинг p нуқтасидаги бирлик нормал векторини $\vec{n}$ билан белгилайлик. Иккинчи квадратик формани II билан белгилаб, уни $\vec{a} \in T_p\Phi$ учун $II(\vec{a}, \vec{a})$ ни бериш ёрдамида аниқлаймиз.

Агар p нуқта атрофида Ф сиртни параметрлаш усули $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ тенглама билан аниқланиб, Ф сиртда p нуқтадан ўтувчи γ эгри чизик $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган ва $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{a}$ бўлсин. Ёқорида кўрсатилганидек, $u = u(t)$ $v = v(t)$ дифференциалланувчи функциялар мавжуд бўлиб $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ тенглик бажарилади. Иккинчи квадратик форманинг $\{\vec{a}, \vec{a}\}$ жуфтлик учун қийматини $II(\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{\rho}''(t_0), \vec{n})$ формула билан аниқлаймиз. Энди $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0)$ ва

$$\vec{\rho}''(t_0) = \vec{r}_{uv}(u'(t_0))^2 + \vec{r}_{uv}u'v' + \vec{r}_uu'' + \vec{r}_{vu}u'v' + \vec{r}_{vu}(v')^2 + \vec{r}_v(v)''$$

тенгликларни ҳисобга олиб,

$$II(\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{r}_{uv}(u_0, v_0), \vec{n})\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2(\vec{r}_{uv}(u_0, v_0), \vec{n})\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + (\vec{r}_{vu}(u_0, v_0), \vec{n})\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди

$$L = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}), M = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}), N = (\vec{r}_{uv}, \vec{n})$$

белгилашларни киритиб, иккинчи квадратик формага мос келувчи бичизикли функцияни

$$II(\vec{a}, \vec{b}) = La^1b^1 + M(a^1b^2 + a^2b^1) + Na^2b^2$$

формула ёрдамида аниқлаймиз. Бу ерда $\vec{a} = \vec{r}_ua^1 + \vec{r}_va^2$, $\vec{b} = \vec{r}_ub^1 + \vec{r}_vb^2$.

Биринчи ва иккинчи квадратик формалар коэффициентларидан тузилган

$$A = \begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} L(p) & M(p) \\ M(p) & N(p) \end{pmatrix}$$

матрицаларни киритамиз. Биз биламизки, $\det A > 0$ бўлганлиги учун тескари A^{-1} матрица мавжуд. $A^{-1}B$ матрица учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема-10. $A^{-1}B$ матрицанинг хос сонлари ҳақиқий бўлиб, улар ҳар хил бўлганда уларга мос келувчи хос векторлар ўзаро перпендикулярдир.

Исбот. $A^{-1}B$ матрицанинг хос сонларини топиш учун $\det|A^{-1}B - \lambda E| = 0$ тенгламани ечиш керак. Бу тенглама $\det|B - \lambda A| = 0$ тенгламага тенг кучлидир. Ф сиртга тегишли p нуқтани фиксирласак A, B сонли матрицалар бўлади. A симметрик бўлганлиги учун уни бирорта $C: T_p\Phi \rightarrow T_p\Phi$ матрица ёрдамида бирлик матрицага айлантириш мумкин. Бунда A матрица $CA C^T$ матрицага

ўтади. Демак $CACT^T = E$ ёки $A = C^{-1}(C^{-1})^T$ бу ерда C^T транспонирланган матрица. Шунда

$$\begin{aligned} \det |B - \lambda E| &= \det |C^{-1}\tilde{B}(C^{-1})^T - \lambda C^{-1}(C^{-1})^T| = \det |C^{-1}(\tilde{B} - \lambda E)(C^{-1})^T| = \\ &= \det C^{-1} \det |\tilde{B} - \lambda E| \det (C^{-1})^T \end{aligned}$$

бу ерда $\tilde{B} = CBC^T$. Демак, $\det |B - \lambda A| = 0$ тенглама $\det |\tilde{B} - \lambda E| = 0$ тенгламага тенг кучлидир. Лекин

$$\tilde{B}^T = (CBC^T)^T = CB^T C^T = CBC^T,$$

яъни $\tilde{B}$ симметрик бўлганлиги учун унинг хос сонлари ҳақиқийдир. Демак, $A^{-1}B$ матрицанинг хос сонлари ҳақиқий, ва улар ҳар хил бўлганда хос векторлар ўзаро ортогоналдир¹. $\square$

Агар λ_1, λ_2 -хос сонлар, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ -хос векторлар бўлса, яъни $A\vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = \lambda_2 \vec{e}_2$, тенгликлар бажарилса $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлганда $\lambda_1 > \lambda_2$ деб ҳисоблаймиз.

Таъриф-1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлганда $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар аниқловчи тўғри чизиқлар р нуктадаги бош йўналишлар деб аталади.

Теорема-12. $A^{-1}B$ матрицанинг хос $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар йўналишлари бўйича нормал эгриликлар мос равишда шу матрицанинг хос сонларига тенг бўлади.

Исбот.

$$k_n(\vec{e}_i) = \frac{II(\vec{e}_i, \vec{e}_i)}{I(\vec{e}_i, \vec{e}_i)}$$

ни ҳисоблаш учун $T_p \Phi$ да $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ хос векторлардан иборат ортонормал базисни танласак,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ ва } B = A \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ тенгликлар ўринли бўлади.}$$

$I(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$ нинг скаляр кўпайтма эканлигини ҳисобга олсак,

$$I(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1^2 + 0^2, I(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0^2 + 1^2$$

келиб чиқади. Демак бу базисда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Демак,

$$k_n(\vec{e}_1) = \frac{II(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}{I(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{\lambda_1 \cdot 1^2 + \lambda_2 \cdot 0^2}{1} = \lambda_1, k_n(\vec{e}_2) = \frac{II(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}{I(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \frac{\lambda_1 \cdot 0^2 + \lambda_2 \cdot 1^2}{1} = \lambda_2$$

тенгликлар келиб чиқади. $\square$

Таъриф-3. Бош йўналишларга мос келувчи нормал эгриликлар бош эгриликлар деб аталади.

¹ И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М., Наука, 1971.

Энди $T_p\Phi$ -уринма фазода базис сифатида бирлик хос $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторларни олиб, ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун φ билан $\vec{a}$ ва $\vec{e}_1$ орасидаги бурчакни белгилайлик.

Теорема-13 (Эйлер). Ихтиёрий $\vec{a} \in T_p\Phi$ уринма вектор учун

$$k_n(\vec{a}) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда k_1, k_2 -бош эгриликлар бўлиб, аниқлик учун $k_1 \geq k_2$ деб ҳисоблаймиз.

Исбот. Уринма векторни $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ кўринишда ёзиб $k_n(\vec{a})$ ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} k_n(\vec{a}) &= \frac{II(\vec{a}, \vec{a})}{I(\vec{a}, \vec{a})} = \frac{\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} = \lambda_1 \frac{a_1^2}{|a|^2} + \lambda_2 \frac{a_2^2}{|a|^2} = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi = \\ &= k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad \square$$

Натижа. Бош эгриликлар нормал эгриликнинг экстремал қийматларидир.

Ҳақиқатан ҳам, уринма фазода $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ ортонормал базисларни танласак, $\vec{a}$ йўналиш аниқловчи $k_n(\vec{a})$ нормал эгриликни φ нинг функцияси сифатида қараймиз:

$$k_n(\varphi) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

$\varphi = 0$ да $\vec{a} = \vec{e}_1$ ва

$$k_n(0) = k_n(\vec{a}) = k_1, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

да $\vec{a} = \vec{e}_2$ ва $k_n(\frac{\pi}{2}) = k_n(\vec{a}) = k_2$. Ихтиёрий φ учун ўқоридаги формулани

$$k = (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi + k_2$$

кўринишда ёзиб,

$$k'(\varphi) = 2(k_1 - k_2) \cos \varphi \sin \varphi = (k_1 - k_2) \sin 2\varphi$$

ни ҳосил қиламиз. $\sin 2\varphi = 0$ тенгламани ечиб $\varphi = 0$ ва $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ни топамиз. Демак,

k_1 ва k_2 , $k_n(\varphi)$ функциясининг экстремал қийматларидир. ξ'

22-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: Деривацион формулалар. 4 соат

Бу параграфда биз сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари орасидаги боғланишларни кўрсатамиз. Регуляр Φ сирт $p(u_0, v_0)$ нукта атрофида регуляр $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ параметрлаш усули билан берилган бўлсин. Ҳосил бўладиган формулаларни ихчамлаш учун тензор ҳисоб-китобдаги белгилашлардан фойдаланамиз. Бунинг учун $u_1 = u, u_2 = v$ белгилашларни киритамиз. Бундан ташқари биринчи квадратик форма матрицаси элементларини g_{ij} лар билан, иккинчи квадратик форма матрицаси элементларини q_{ij} лар билан белгилаймиз. Демак,

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Йиғиндиларда агар биронта индекс i қорида ва пастда бир хил марта учраса бу индекслар бўйича йиғинди белгисини ташлаб ёзамиз. Мисол учун

$$a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots a_n b^n = \sum_{i=1}^n a_i b^i = a_i b^i,$$

$$\sum_i \sum_j a_{ij} b^j = \sum_i a_{ij} b^j$$

Энди R^3 да $\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}$ ва $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}]}{|[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}]|}$ векторларни базис сифатида олиб,

$\vec{n}_{u_1}, \vec{n}_{u_2}$ ва $\vec{r}_{u_i u_j}$ векторларни бу базис векторлар ёрдамида чизикли ифодалаймиз:

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u_k} + b_{ij} \vec{n} \\ \vec{n}_i = a_i^k \vec{r}_{u_k} + c_i \vec{n} \end{cases} \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2; \quad (1)$$

Бу ерда $\vec{n}_i = \vec{n}_{u_i}$. Агар биринчи тенгликда $i = 1, j = 2$ бўлса

$$\vec{r}_{u_1 u_2} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_{u_2} + b_{12} \vec{n}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Ана шу ёзилган (1) формулаларда Γ_{ij}^k ва b_{ij}, a_i^k, c_i функциялар (коэффициентлар) фақат биринчи ва иккинчи квадратик формалар коэффициентлари орқали ифодаланишини кўрсатамиз. Бунинг учун $\vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u_k} + b_{ij} \vec{n}$ тенгликни $\vec{n}$ векторга скаляр кўпайтирамиз ва

$$(\vec{r}_{u_k}, \vec{n}) = 0, \quad (\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{n}) = \Gamma_{ij}^k (\vec{r}_{u_k}, \vec{n}) + b_{ij} (\vec{n}, \vec{n})$$

тенгликларни ҳисобга олиб

$$b_{ij} = (\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{n}) = q_{ij}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди $\vec{n}_i = a_i^k \vec{r}_{u_k} + c_i \vec{n}$ тенгликни $\vec{r}_{u_j}$ га скаляр кўпайтирамиз ва

$$(\vec{n}_i, \vec{r}_{u_j}) = a_i^k (\vec{r}_{u_k}, \vec{r}_{u_j}) + c_i (\vec{n}, \vec{r}_{u_j}), (\vec{n}, \vec{r}_{u_j}) = 0$$

тенгликларни ҳисога олиб

$$-q_{ij} = a_i^k g_{kj} \quad (2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликни одатдаги кўринишда ёзсак

$$\begin{cases} -q_{11} = a_1^1 g_{11} + a_1^2 g_{21} \\ -q_{12} = a_1^1 g_{12} + a_1^2 g_{22} \\ -q_{21} = a_2^1 g_{11} + a_2^2 g_{21} \\ -q_{22} = a_2^1 g_{12} + a_2^2 g_{22} \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системадан $\det A > 0$ бўлганлиги учун a_i^k коэффицентларни топиш мумкин. g^{ij} билан A^{-1} матрицанинг элементларини белгилаймиз. Шунда $A^{-1}A = E$ тенгликни

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

кўринишда ёза оламиз. Бундан фойдаланиб, (2) тенгликни g^{jl} га кўпайтириб ва j индекс бўйича йиғиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$-q_{ij} g^{jl} = a_i^k g_{kj} g^{jl}. \text{ Бундан } a_i^k = -\sum_{j=1}^2 q_{ij} g^{jk} \text{ тенглик келиб чиқади.}$$

Мисол учун $k=1, i=1$ да

$$a_1^1 = -q_{1j} g^{j1} = -q_{11} g^{11} - q_{12} g^{21}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$g^{11} = \frac{1}{\det A} g_{22}, \quad g^{21} = -\frac{1}{\det A} g_{12}$$

бўлади. Шундай қилиб, a_j^k, b_{ij} функцияларни топдик. Энди

$$\vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u_k} + b_{ij} \vec{n}$$

тенгликни $\vec{r}_{u_l}$ векторга скаляр кўпайтириб

$$(\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_l}) = \Gamma_{ij}^k (\vec{r}_{u_k}, \vec{r}_{u_l})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $(\vec{r}_{u_k}, \vec{r}_{u_l}) = g_{kl}$ эканлиги маълум. Биз (1)

системадаги Γ_{ij}^k коэффицентларни топмоқчимиз. Бунинг учун

$\Gamma_{ij,l} = (\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_l})$ белгилашни киритиб

$$\Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} \quad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди

$$(\vec{r}_{u_i}, \vec{r}_{u_l}) = g_{il}$$

тенгликни u_j бўйича дифференциаллаб

$$(\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_l}) + (\vec{r}_{u_i}, \vec{r}_{u_l u_j}) = \frac{\partial}{\partial u_j} (g_{il})$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликни $\Gamma_{ij,l}$ функциялар орқали ёзсак

$$\Gamma_{ij,l} + \Gamma_{lj,i} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} \quad (4)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгликда индексларни айлантириб яна иккита тенгликни ёзамиз

$$\Gamma_{jl,i} + \Gamma_{il,j} = \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ij}, \Gamma_{li,j} + \Gamma_{ji,l} = \frac{\partial}{\partial u_i} g_{lj} \quad (5)$$

Энди (4) тенгликдан (5) тенгликларни айириб

$$\Gamma_{ij,l} - \Gamma_{ji,l} + \Gamma_{lj,i} - \Gamma_{jl,i} - \Gamma_{il,j} - \Gamma_{li,j} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_i} g_{lj} \quad (6)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ji,l}$ тенгликни ҳисобга олиб (6)ни қуйидагича ёзамиз

$$-2\Gamma_{il,j} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_i} g_{lj}.$$

Бундан эса

$$\Gamma_{il,j} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_l} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} \right\} \quad (7)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди Γ_{ij}^k функцияларни топа оламиз. Бунинг учун

(3) ни g^{ls} га кўпайтириб l индекс бўйича йиғсак

$$\Gamma_{ij,l} g^{ls} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{ls} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^s = \Gamma_{ij}^s$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, $\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,l} g^{ls}$ формулани ҳосил қилдик. Ниҳоят (7) тенгликни g^{jk} га кўпайтириб j индекс бўйича йиғамиз ва натижада

$$\Gamma_{il}^k = \Gamma_{il,j} g^{jk} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} \right) \quad (8)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу (8) формула бизга 6 та Γ_{ij}^k функцияларни топиш имконини беради. Мисол учун $i = k = l = 1$ да

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} \right\} + \frac{1}{2} g^{21} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} - \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11} \right\} = \\ &= g^{11} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} + g^{21} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} - \frac{1}{2} g^{21} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11}\end{aligned}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Ҳокоридаги (8) формуладан кўриниб турибдики, Γ_{ij}^k функциялар фақат биринчи квадратик форма коэффицентлари ва уларнинг ҳосилалари орқали ҳисобланади. Ниҳоят (1) формуладаги ҳамма коэффицентлар топилди. Энди (1)ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u_k} + q_{ij} \vec{n} \\ \vec{n}_{u_i} = -q_{ij} g^{jk} \vec{r}_{u_k} \end{cases} \quad (9)$$

Бу формулалар деривацион формулалар деб аталади. Деривацион формулаларни биринчи ва иккинчи квадратик формалар орасидаги боғланишни топиш учун ишлатамиз. Бунинг учун

$$\vec{r}_{u_i u_j u_k} = \vec{r}_{u_i u_k u_j}, \vec{n}_{u_i u_j} = \vec{n}_{u_j u_i} \quad (10)$$

тенгликларни ёзиб, $\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_i u_k}, n_{u_i}, n_{u_j}$ функцияларни деривацион формулалар ёрдамида ифодалаймиз. Шунда (10) тенгликлар

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (\Gamma_{ij}^l \vec{r}_{u_l} + q_{ij} \vec{n}) - \frac{\partial}{\partial u_j} (\Gamma_{ik}^l \vec{r}_{u_l} + q_{ik} \vec{n}) = 0$$

ва

$$\frac{\partial}{\partial u_j} (q_{il} g^{lk} \vec{r}_{u_k}) - \frac{\partial}{\partial u_i} (q_{jl} g^{lk} \vec{r}_{u_k}) = 0$$

кўринишга келади. Бу тенгликларда дифференциаллаш амалини бажариб

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_k} \Gamma_{ij}^l \vec{r}_{u_l} + \Gamma_{ij}^l \vec{r}_{u_l u_k} + \frac{\partial}{\partial u_k} (q_{ij}) \vec{n} + q_{ij} \vec{n}_{u_k} - \left[\frac{\partial}{\partial u_j} (\Gamma_{ik}^l) \vec{r}_{u_l} + \Gamma_{ik}^l \vec{r}_{u_l u_j} - \frac{\partial}{\partial u_j} (q_{ik}) \vec{n} + q_{ik} \vec{n}_{u_j} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u_j} (q_{il} g^{lk}) \vec{r}_{u_k} + q_{il} g^{lk} \vec{r}_{u_k u_j} - \left[\frac{\partial}{\partial u_j} (q_{il} g^{lk}) \vec{r}_{u_k} + q_{il} g^{lk} \vec{r}_{u_k u_i} \right] &= 0\end{aligned}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликларда яна бир марта деривацион формулалардан фойдаланамиз. Шунда $\vec{r}_{u_m}, \vec{n}$ векторлар чизикли эркин бўлганлиги учун улар олдидаги коэффицентларни нолга тенглаштириб

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \Gamma_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ik}^m + \sum_{l=1}^2 (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m) = \sum_{l=1}^2 (q_{ij} q_{kl} - q_{ik} q_{jl}) g^{lm} \quad (11)$$

ва

$$\sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m q_{mk} - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ik}^m q_{mj} + \frac{\partial}{\partial u_k} q_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} q_{ik} = 0 \quad (12)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Бу муносабатлардан биринчиси Гаусс тенгламаси, иккинчи Петерсон-Кодацци тенгламалари деб аталади. Гаусс тенгламасини g_{ms} га кўпайтириб индекс m бўйича йиғайлик:

$$\begin{aligned} \sum_m g_{ms} \left(\frac{\partial}{\partial u_k} \Gamma_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ik}^m + \sum_{l=1}^2 (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m) \right) = \\ = \sum_{l,m=1}^2 (q_{ij} q_{kl} - q_{ik} q_{jl}) g^{lm} g_{ms} \end{aligned}$$

Шунда ўнг томондаги ифода

$$\sum_{l,m=1}^2 (q_{ij} q_{kl} - q_{ik} q_{jl}) g^{lm} g_{ms} = \sum_{l=1}^2 (q_{ij} q_{kl} - q_{ik} q_{jl}) \delta_l^s = q_{ij} q_{ks} - q_{ik} q_{js}$$

кўринишга келади. Бу ерда $i = j = 1, k = s = 2$ бўлганда

$$q_{11} q_{22} - q_{12}^2 = \sum_{m=1}^2 g_{m2} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \Gamma_{11}^m - \frac{\partial}{\partial u_1} \Gamma_{12}^m + \sum_{l=1}^2 (\Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^m - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^m) \right) \quad (13)$$

кўринишга келади.

Демак, Гаусс эгрилиги K фақат биринчи квадратик форма коэффициентларига боғлиқ экан. Бу эса унинг изометрик акслантиришларда ўзгармай қолишини кўрсатади.

23-МАЪРУЗА.
МАВЗУ: Бонне теоремаси. 2 соат

Берилган иккита квадратик формалар учун сиртнинг мавжудлиги ва фазодаги ҳаракатга нисбатан унинг ягоналиги ҳақидаги теоремаларни исботлаймиз.

Теорема-16 (Мавжудлик). Текисликдаги G соҳада аниқланган g_{ij}, q_{ij} дифференциалланувчи функциялар берилган бўлиб, $g_{ij} = g_{ji}, q_{ij} = q_{ji}$ муносабатлар бажарилган ва $\{g_{ij}\}$ матрицанинг детерминанти нолдан катта бўлсин. Бундан ташқари бу функциялар учун Гаусс ва Петерсон-Кодацци тенгламалари бажарилган бўлсин. Шунда ҳар бир $(u_0, v_0) \in G$ учун бу нуқтанинг $V \subset G$ атрофи ва

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in V$$

тенглама билан аниқланган регуляр Φ сирт мавжуд бўлиб, унинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларининг матрицалари мос равишда $\{g_{ij}\}$ ва $\{q_{ij}\}$ матрицалар билан устма-уст тушади.

Исбот. Берилган $\{g_{ij}\}$ матрицага тескари матрица элементларини g^{jk} билан белгилаймиз ва

$$\Gamma_{il}^k = \Gamma_{il,j} g^{jk} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} \right)$$

бўйича Γ_{ij}^k функцияларни топамиз. Энди қуйидаги X_1, X_2, N вектор функцияларга нисбатан қуйидаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасини қарайлик.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_j} (X_i) = \Gamma_{ij}^k X_k + q_{ij} N \\ N_{u_i} = -q_{ij} g^{jk} X_k \end{cases} \quad (1).$$

Бу ерда $u_1 = u, u_2 = v$ белгилашлардан фойдаланди. Шуни ҳисобга олиб (1) системани ҳар бир индекс учун ёзсак, у

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} X_1 &= \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + q_{11} N \\
\frac{\partial}{\partial v} X_1 &= \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 + q_{12} N \\
\frac{\partial}{\partial u} X_2 &= \Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2 + q_{21} N \\
\frac{\partial}{\partial v} X_2 &= \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 + q_{22} N \\
\frac{\partial N}{\partial u} &= a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 \\
\frac{\partial N}{\partial v} &= a_2^1 X_1 + a_2^2 X_2
\end{aligned} \tag{2}$$

кўринишга келади. Энди бу хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг ечими мавжудлик шартларини ёзамиз:

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_j \partial u_k} = \frac{\partial X_i}{\partial u_k \partial u_j}, \quad \frac{\partial N}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial N}{\partial u_j \partial u_i} \tag{3}.$$

Бу мавжудлик шартлари Гаусс ва Петерсон-Кодацци тенгламаларига эквивалент эканлигини олдинги параграфда кўрсатдик. Демак бизнинг (1) системамиз учун G соҳанинг ҳар бир нуктасида ечимнинг мавжудлик шартлари бажарилган. Демак, бирорта $(u_0, v_0) \in G$ нукта олсак, шу нуктанинг бирорта V атрофида (1) система (u_0, v_0) нуктада берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ягона ечимга эга яъни V соҳада аниқланган вектор функциялар

$$X_1(u, v), X_2(u, v), N(u, v)$$

мавжуд ва (1) системани қаноатлантиради. Бошланғич шартларни қуйидагича танлаймиз:

$$\begin{aligned}
|N(u_0, v_0)| &= |N^0| = 1, (X_1(u_0, v_0), N(u_0, v_0)) = (X_2(u_0, v_0), N(u_0, v_0)) = 0, \\
g_{ij}(u_0, v_0) &= (X_i(u_0, v_0), X_j(u_0, v_0))
\end{aligned}$$

ва

$$X_1(u_0, v_0), X_2(u_0, v_0), N(u_0, v_0)$$

векторлар ўнг системани ташкил қилади. Бу бошланғич шартларни қаноатлантирувчи векторлар мавжудлиги $\{g_{ij}(u_0, v_0)\}$ матрицанинг мусбат аниқланганлигидан келиб чиқади. Энди $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ вектор функция учун

$$\begin{cases} \vec{r}_u = X_1, \\ \vec{r}_v = X_2 \end{cases} \tag{4}$$

системасини қараймиз. Бу система учун ечимнинг мавжудлик шarti $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$ тенгликдан иборатдир. Лекин $g_{ij} = g_{ji}$ бўлганлиги учун $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ундан ташқари $q_{ij} = q_{ji}$ муносабат ҳам бор. Демак,

$$\frac{\partial}{\partial v} X_1 = \frac{\partial}{\partial u} X_2$$

муносабат ва $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$ тенглик ўринлидир.

Шундай қилиб, агар $(u_0, v_0) \in V$ нуқта учун (4) системани $\vec{r}(u_0, v_0) = \vec{a}$ бошланғич шарт билан қарасак. (u_0, v_0) нуқтанинг бирорта $V_0 \subset V$ атрофида аниқланган $\vec{r}(u, v)$ ечим мавжуд. Энди $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in V_0$ тенглама билан аниқланган Φ сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари коэффициентларини ҳисоблаймиз. Бунинг учун

$$(X_i, X_j), (X_i, N), N^2$$

функцияларни дифференциаллаш ёрдамида

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_k} (X_i, X_j) = \Gamma_{ik}^l (X_l, X_j) + \Gamma_{jk}^l (X_l, X_i) + q_{ik} (N, X_j) + q_{jk} (N, X_i) \\ \frac{\partial}{\partial u_i} (N, X_j) = -q_{il} g^{lk} (X_k, X_j) + \Gamma_{ij}^l (X_l, N) + q_{ij} N^2 \\ \frac{\partial}{\partial u_i} (N, N) = -2q_{il} g^{lk} (X_k, N) \end{cases} \quad (5)$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системаси учун

$$(X_i, X_j) = q_{ij}, (X_j, N) = 0, (N, N) = N^2 = 1$$

функциялар ечим бўлади. Охирги тенглама учун бу фактни бевосита

$$N^2 = 1, (X_j, N) = 0$$

ифодаларни тенгламага қўйиб текшириш мумкин.

Иккинчи тенглама учун текшираимиз

$$q_{il} g^{lk} g_{kj} + q_{ij} = q_{il} \delta_j^l + q_{ij} = -q_{ij} + q_{ij} = 0.$$

Биринчи тенгламани текшириш учун

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} g_{km} + \frac{\partial}{\partial u_k} g_{im} - \frac{\partial}{\partial u_m} g_{ik} \right\}$$

тенгликни g_{lj} га кўпайтириб, индекс l бўйича йиғамиз.

Натижада

$$\Gamma_{ik}^l g_{lj} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} g_{kj} + \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ik} \right\}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Худди шундай

$$\Gamma_{jk}^l g_{li} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk} \right\}$$

тенглик ҳам ўринли. Бундан

$$\Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{li} = \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij}$$

муносабат келиб чиқади. Бу муносабат ўз навбатида

$$(X_i, X_j) = g_{ij}, (X_i, N) = 0$$

функциялар 1-тенглама учун ечим эканлигини кўрсатади. Бу ечимлар учун бошланғич шартларга кўра

$$(X_i, X_j)(u_0, v_0) = g_{ij}(u_0, v_0), (X_i(u_0, v_0)N(u_0, v_0)) = 0$$

$$|N^2(u_0, v_0)| = 1$$

муносабатлар ўринли ва

$$X_1(u_0, v_0), X_2(u_0, v_0), N(u_0, v_0)$$

векторлар ўнг системани ташкил этади. Бундан эса, (5) системанинг ечими ягоналигига кўра

$$g_{ij} = (X_i, X_j), (X_j, N) = 0, N^2 = 1$$

тенгликлар ва аралаш кўпайтма учун $X_1 X_2 N > 0$ муносабат V_0 соҳанинг ҳамма нуқтасида бажарилиши келиб чиқади. Демак, Φ сирт учун

$$(\vec{r}_{u_i}, \vec{r}_{u_j}) = g_{ij}, (\vec{r}_{u_i}, N) = 0, N^2 = 1$$

муносабатлар ўринли. Бундан эса Φ сиртнинг биринчи квадратик формаси матрицаси $\{g_{ij}\}$ матрица билан устма-уст тегишли келиб чиқади.

Иккинчи томондан

$$(\vec{r}_u, \vec{N}(u, v)) = (\vec{r}_v, \vec{N}(u, v)) = 0$$

бўлганлиги учун $\vec{N}(u, v)$ вектор Φ сиртнинг бирлик нормал вектори бўлади. Демак,

$$-(\vec{r}_{u_i}, \vec{N}_{u_i}) = -(X_l, \vec{N}_{u_i}) = q_{ij} g^{jk} (X_k, X_l) = q_{ij} g^{jk} g_{kl} = q_{il}$$

муносабат ўринли бўлиб, Φ сиртнинг иккинчи квадратик форма матрицаси q_{il} матрица билан устма-уст тушади. $\square$

Теорема-17 (ягоналик). Мавжудлик ҳақидаги теорема шартларини қаноатлантирувчи регуляр Φ_1, Φ_2 сиртлар учун шундай ягона, $C: R^3 \rightarrow R^3$ ҳаракат мавжуд бўлиб, $C(\Phi_1) = \Phi_2$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, Φ_1, Φ_2 регуляр сиртларнинг (f_1, V_0) ва (f_2, V_0) регуляр параметрлаш усуллари мос равишда

$$\vec{r} = \vec{r}^1(u, v)$$

$$\vec{r} = \vec{r}^2(u, v) \quad (u, v) \in V_0$$

тенгламалар билан аниқланиб, уларнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари мос равишда ҳар бир $(u, v) \in V_0$ нуқтада тенг бўлсин. Бу сиртлар учун радиуси вектори $\vec{r}_1(u, v)$ га тенг бўлсин нуқтани радиус вектори $\vec{r}_2(u, v)$ бўлган нуқтага ўтказувчи $F: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ акслантиришни қарайлик. Демак, F

акслантириш Φ_1 сиртдаги (u, v) координатали нуктани Φ_2 сиртдаги (u, v) координата нуктага акслантиради ва демак F дифференциалланувчи акслантиришдир. Бу акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатиш учун 5-теоремага кўра $F \cdot f_1: V_0 \rightarrow R^3$ акслантиришнинг дифференциалланувчи эканлигини кўрсатиш керак. Агар $x^2(u, v), y^2(u, v), z^2(u, v)$ дифференциалланувчи функциялар $\vec{r}^2(u, v)$ вектор-функциянинг координаталари бўлса,

$$F \cdot f_1(u, v) = \{x^2(u, v), y^2(u, v), z^2(u, v)\}$$

тенглик ўринли бўлади ва шунинг учун $F \cdot f_1(u, v)$ дифференциалланувчи акслантиришдир. Ҳар бир $(u, v) \in V_0$ нуктада $I_1(u, v) = I_2(u, v)$ бўлганлиги учун 9-теоремага кўра F акслантириш изометрик акслантиришдир. Демак, F акслантиришда скаляр кўпайтма, хусусан уринма векторлар орасидаги бурчаклар сақланди. Демак (u_0, v_0) нуктада $\vec{r}_u^1, \vec{r}_v^1$ ва $\vec{n}^1 = \frac{[\vec{r}_u^1, \vec{r}_v^1]}{||[\vec{r}_u^1, \vec{r}_v^1]||}$ векторлар

ўнг (чап) ориентацияни аниқласа $\vec{r}_u^2, \vec{r}_v^2$ ва $\vec{n}^2 = \frac{[\vec{r}_u^2, \vec{r}_v^2]}{||[\vec{r}_u^2, \vec{r}_v^2]||}$ векторлар ҳам ўнг (мос равишда чап) ориентацияни аниқлайди. Демак

$$P(x^1(u_0, v_0), y^1(u_0, v_0), z^1(u_0, v_0))$$

нуктада

$$\vec{r}_u^1(u_0, v_0), \vec{r}_v^1(u_0, v_0), \vec{n}^1(u_0, v_0)$$

векторлар,

$$Q(x^2(u_0, v_0), y^2(u_0, v_0), z^2(u_0, v_0))$$

нуктада эса

$$\vec{r}_u^2(u_0, v_0), \vec{r}_v^2(u_0, v_0), \vec{n}^2(u_0, v_0)$$

векторлар базисни ташкил этиб, бу базислар бир хил ориентацияни ташкил этади ва

$$|\vec{r}_u^1| = |\vec{r}_u^2|, |\vec{r}_v^1| = |\vec{r}_v^2|, |\vec{n}^1| = |\vec{n}^2|$$

тенгликлар бажарилади. Аналитик геометриядаги маълум теоремага кўра P нуктани Q нуктага, $(\vec{r}_u^1, \vec{r}_v^1, \vec{n}^1)$ базисни $(\vec{r}_u^2, \vec{r}_v^2, \vec{n}^2)$ базисга ўтказувчи $C: R^3 \rightarrow R^3$ акслантириш мавжуд бўлиб, у параллел кўчириш ва буришдан иборат бўлади [1]. Бу акслантириш изометрик акслантириш бўлади, чунки параллел кўчириш ва буриш изометрик акслантиришлардир. Энди $C: R^3 \rightarrow R^3$ акслантиришда $C(\Phi_1) = \Phi_2$ эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $\vec{\rho}(u, v) = C^*(\vec{r}^1(u, v))$ белгилаш киритайлик. Бу ерда C^* акслантириш, C акслантиришнинг дифференциалидир. Акслантириш C изометрия бўлганлиги учун C^* - ортогонал матрицадир. Демак,

$$\vec{\rho}(u_0, v_0) = \vec{r}_2(u_0, v_0), \vec{\rho}_u(u_0, v_0) = C^*(\vec{r}_u^1(u_0, v_0)), \vec{\rho}_v(u_0, v_0) = C^*(\vec{r}_v^1(u_0, v_0))$$

тенгликлардан ташқари $C(\Phi_1)$ сиртнинг биринчи квадратик формаси Φ_1 сиртнинг ва демак Φ_2 сиртнинг биринчи квадратик формаси билан устма-уст тушади. Акслантириш C ориентацияни сақланганлиги учун, $C(\Phi_1)$ ва Φ_2

сиртларнинг иккинчи квадратик формалари ҳам устма-уст тушишини кўрсатамиз. Уринма $\vec{a}, \vec{b} \in T_p \Phi_1$ векторлар берилган ва $\vec{a}^* = C^*(\vec{a}), \vec{b}^* = C^*(\vec{b})$ бўлсин. $\Pi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \Pi^*(\vec{a}^*, \vec{b}^*)$ тенгликни кўрсатишимиз керак.

Бунинг учун,

$$L = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{uu}, \vec{n}), M = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{uv}, \vec{n})$$

ва $N = (\vec{r}_{vv}, \vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{vv}, \vec{n})$ тенгликлари кўрсатамиз. Бу ерда $\vec{n} - C(\Phi_1)$ сиртнинг нормал вектори. $\vec{\rho}(u, v) = C^*(\vec{r}(u, v))$ тенгликни дифференциаллаймиз ва $\vec{\rho}_u(u, v) = C^*(\vec{r}_u), \vec{\rho}_v = C^*(\vec{r}_v)$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари $\vec{n} = \frac{[\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_v]}{||[\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_v]||} = C^*(\vec{n}_1)$ тенглик ҳам ўринли, чунки вектор кўпайтма ориентация

сақловчи изометрияда сақланади. Ёқоридаги тенгликни дифференциаллаб, $\vec{n} = C^*(\vec{n}_1^1)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$L = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}^1) = -(\vec{r}_u, \vec{n}_u) = -(\vec{\rho}_u, \vec{n}_u) = (\vec{\rho}_{uu}, \vec{n})$$

бўлади. Худди шундай иккинчи квадратик форманинг бошқа коэффициентлари ҳам тенгдир. Натижада, Φ_2 сирт ва $C(\Phi_1)$ сиртларнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари тенглигини ҳосил қилдик. Демак,

$$\vec{\rho}(u, v), \quad \vec{r}_2(u, v)$$

вектор функциялар деривацион формулаларга кўра битта хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлади. Бундан

$$\vec{\rho}(u_0, v_0) = \vec{r}_2(u_0, v_0)$$

тенгликка асосан $\vec{\rho}(u, v) = \vec{r}_2(u, v)$ келиб чиқади. Демак, $C(\Phi_1) = \Phi_2$ тенглик исботланди. $\square$

24-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: Геодезик чизиклар. Гаусс-Бонне теоремаси. 4 соат

Регуляр $\hat{O}$ сирт ва унда ётувчи икки марта дифференциалланувчи параметрланган γ тэгри чизик $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган бўлсин.

Таъриф. Параметр t нинг ҳар бир қийматида $\vec{\rho}''(t)$ вектор сиртнинг $\gamma(t)$ нуқтасидаги уринма текисликка перпендикуляр бўлса, бундай чизик геодезик чизик деб аталади. Бу ерда $\gamma(t)$ радиус вектори $\vec{\rho}(t)$ бўлган нуқта.

Теорема-18. Геодезик чизик $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган бўлса, унинг тезлик вектори $\vec{\rho}'(t)$ ўзгармас узунликка эга.

Исбот. Скаляр кўпайтма $(\vec{\rho}', \vec{\rho}')$ узунлик квадрати бўлганлиги учун уни дифференциаллаб унинг ҳосиласи нолга тенг эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $(\vec{\rho}', \vec{\rho}')' = 2(\vec{\rho}'', \vec{\rho}') = 0$. Демак, $|\vec{\rho}'(t)| = \sqrt{(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}$ ўзгармасдир. $\square$

Теорема-19. Геодезик чизик $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ тенглама билан берилган бўлиб, $s = s(t)$ дифференциалланувчи функция ёрдамида $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$ параметрланган чизик ҳосил бўлсин. Параметр алмаштирилгандан кейин чизик геодезик бўлиши учун $s = \alpha t + \beta$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. $s = s(t)$ формула параметрни алмаштириш формуласи бўлгани учун $s'(t) > 0$ (ёки $s'(t) < 0$) деб фараз қилишимиз мумкин. Агар $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(s)$ тенглама геодезик чизикни аниқласа,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{\rho}_1(s(t)), \vec{\rho}'(t) = \vec{\rho}_1'(s'(t)), \vec{\rho}''(t) = \vec{\rho}_1''(s'(t))^2 + \vec{\rho}_1'(s'(t))$$

ва

$$0 = (\vec{\rho}', \vec{\rho}'') = (s')^3 (\vec{\rho}_1', \vec{\rho}_1'') + s's'' (\vec{\rho}_1', \vec{\rho}_1') = s's'' (\vec{\rho}_1', \vec{\rho}_1')$$

ни ҳосил қиламиз. $s'(t) > 0$ бўлгани учун $s'' = 0$ ҳосил бўлади. Демак, $s(t) = \alpha t + \beta$.

Энди $s(t) = \alpha t + \beta$ деб фараз қилсак, $\vec{\rho}''(t) = \vec{\rho}_1'' s'^2$ тенглик $\vec{\rho}_1''(t)$ ва $\vec{\rho}_1''$ векторларнинг коллинеар эканлигини кўрсатади. $\square$

Натижа. Ҳар қандай геодезик чизик табиий параметрга нисбатан ҳам геодезик чизик бўлади, чунки $s(t)$ ёй узунлиги учун

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{\rho}'(t)| dt = \alpha(t - t_0)$$

тенглик ўринлидир.

Энди геодезик чизиклар учун дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. Регуляр $\hat{O}$ сиртнинг (f, G) параметрлаш усули $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ тенглама билан берилган бўлсин.

Агар геодезик чизикнинг ички координаталардаги тенгламалари $u = u(t), v = v(t)$ кўринишда бўлса, 9-параграфдагидек $u_1 = u, u_2 = v$ белгилаш киритиб

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u_1(t), u_2(t)), \vec{\rho}'(t) = \vec{r}_{u_1} u_1' + \vec{r}_{u_2} u_2',$$

$$\vec{\rho}''(t) = \vec{r}_{u_1 u_2} (u_1')^2 + \vec{r}_{u_1} u_1'' + \vec{r}_{u_2 u_2} (u_2')^2 + \vec{r}_{u_2} u_2''$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Энди $\vec{r}_{u_1 u_1}, \vec{r}_{u_1 u_2}, \vec{r}_{u_2 u_2}$ ифодадар учун деривацион формулаларни ишлатиб

$$\vec{\rho}''(t) = \sum_{k=1}^2 (u_k'' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k u_i' u_j') \vec{r}_{u_k} + \sum_{i,j=1}^2 q_{ij} u_i' u_j' \vec{n}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Энди $\vec{\rho}''(t)$ векторнинг $\vec{n}$ векторга коллинеар эканлиги ва $\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}, \vec{n}$ векторларнинг чизикли эрки эканлигидан

$$u_k'' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k u_i' u_j' = 0, k = 1, 2$$

келиб чиқади. Демак, $u = u_1(t), u = u_2(t)$ тенгламалар геодезик чизикни аниқлаш учун $u_1(t), u_2(t)$ функциялар

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} = 0 \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

системанинг ечими бўлиши зарур ва етарлидир.

Теорема-20. Регуляр сиртнинг ҳар бир нуктасидан ҳар бир йўналиш бўйича ягона геодезик чизик чиқади.

Исбот. Берилган $p(u_0, v_0) \in \Phi$ нукта ва $\vec{a} \in T_p \Phi$ уринма вектор учун (1) системанинг

$$u_1(0) = u^0, u_2(0) = v_0, u_1'(0) = a_1, u_2'(0) = a_2$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $\vec{a}$ йўналиш бўйича геодезик чизикни аниқлайди. $\square$

Геодезик чизикларни характерловчи катталик, геодезик эгрилик тушунчасини киритамиз. Регуляр $\hat{O}$ сиртнинг p нуктасидан ўтувчи γ эгри чизик берилган бўлсин. Чизикнинг p нукта атрофидаги қисмининг p нуктадан ўтувчи уринма текисликка проекциясини γ_0 билан белгилаймиз. Табиийки, γ_0 ҳам силлиқ эгри чизик бўлади. Проекциялаш натижасида ҳосил бўлган γ_0 эгри чизикнинг p нуктадаги эгрилигини γ чизикнинг геодезик эгрилиги деб атаймиз.

Бизнинг мақсадимиз, γ геодезик чизик бўлиши учун унинг геодезик эгрилиги нолга тенг бўлиши зарур ва етарли эканлигини кўрсатишдир. Бунинг учун γ_0 ва γ чизиклар эгриликлари орасидаги боғланишларни топамиз. Аввало,

γ чизик нукталаридан (p нуктадан ўтувчи) уринма текисликка перпендикуляр тўғри чизиклар ўтказиб, цилиндр сирт ҳосил қилиб, уни F билан белгилаймиз. Бу цилиндр сиртни $\square$ текислик билан кесганимизда γ_0 ҳосил бўлади ($\square \cap F$ сиртнинг p нуктадаги уринма текислиги). Демак, F цилиндр учун γ_0 нормал кесим ва унинг бош нормали F нинг нормалига коллинеардир. γ ва γ_0 чизиклар умумий уринмаларга эга. Шунинг учун, цилиндр сиртга нисбатан Менъе теоремасидан фойдаланиб $k_0 = |k \cos \varphi|$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\varphi = \gamma_0$ ва γ чизиклар бош нормаллари орасидаги бурчакдир, k_0, k – мос равишда γ_0 ва γ чизикларнинг p нуктадаги эгриликларидир. Энди γ чизикни ёй узунлиги ёрдамида параметрлаб, унинг тенгламасини $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$ кўринишда ёзамиз ва p нуктага мос кесувчи параметрнинг қийматини s_0 билан белгилаймиз. Шунда $\vec{\tau} = \dot{\vec{\rho}}(s)$ -уринма вектор, $\vec{\nu}(s_0)$ -бош нормал вектори бўлса, $\vec{\tau}$ -вектор γ_0 учун ҳам p нуктадаги уринма вектор бўлиб, $[\vec{\tau}, \vec{n}]$ вектор γ_0 нинг бош нормали бўйлаб йўналган бўлади.

Шунинг учун

$$|k_0| = |k \cos \varphi| = |(\ddot{\vec{\rho}}, [\dot{\vec{\rho}}, \vec{n}])| = |\ddot{\vec{\rho}} \dot{\vec{\rho}} \vec{n}|$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан кўриниб турибдики, $k_0=0$ бўлиши учун бош нормал вектор сиртнинг нормал вектори $\vec{n}$ га коллинеар бўлиши зарур ва етарлидир. Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исботладик.

Теорема-21. Сиртда ўтувчи чизик геодезик чизик бўлиши учун унинг геодезик эгрилиги ҳар бир нуктада нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Регуляр $\hat{O}$ сирт параметрланганда координата чизикларининг бир оиласи геодезик чизиклардан иборат бўлиб, ҳар бир нуктада шу нуктадан ўтувчи координата чизиклари ўзаро ортогонал бўлса, бундай параметрлаш усули ярим геодезик параметрлаш усули деб аталади.

Теорема-22. Регуляр $\hat{O}$ сиртга тегишли ҳар бир нукта атрофида унинг учун ярим геодезик параметрлаш усули мавжуддир.

Исбот. Сиртнинг p нукта атрофидаги регуляри параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in G$$

тенглама ёрдамида берилган, $p(u_0, v_0)$ нуктадан ўтувчи ва икки марта дифференциалланувчи γ чизик ички координаталарда

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad a < t < b$$

тенгламалар ёрдамида аниқланган ва $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$

бўлсин. Шунда γ нинг фазодаги вектор тенгламаси

$$\vec{\rho} = \vec{r}(u(t), v(t)) \quad a < t < b$$

кўринишда бўлади. Ҳар бир t учун $\dot{\vec{\rho}}(t)$ векторга перпендикуляр бирлик уринма векторни $\vec{a}(t)$ билан белгилаймиз. Бундан ташқари $\vec{a}(t)$ векторни шундай танлаймизки, $\{\dot{\vec{\rho}}(t), \vec{a}(t)\}$ векторлар уринма фазода $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ векторлар билан бир хил ориентацияни аниқласин. Уринма фазода $\vec{a}(t)$ вектор,

$a_1(t), a_2(t)$ координаталарга эга бўлса, $a_1(t), a_2(t)$, функциялар дифференциалланувчи функциялар бўлади. Ҳар бир t учун $Q(u(t), v(t))$ нуқтадан $\vec{a}(t)$ йўналиш бўйича чиқувчи геодезик чизикни μ_t билан, унинг уринма векторини $\dot{\mu}_t$ билан белгилаймиз.

Ҳар бир t учун μ_t геодезик чизикда табиий параметр киритсак, унинг ички координаталарда тенгламалари

$$\begin{aligned} u &= u_t(s) \\ v &= v_t(s) \end{aligned} \quad -\varepsilon(t) < s < \varepsilon(t)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $u_t(s)$, функциялар (1) дифференциал тенгламалар системасининг

$$u_t(0) = u(t), v_t(0) = v(t), \dot{u}_t(0) = a_1(t), \dot{v}_t(0) = a_2(t)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимидир. Энди шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонларни топамизки, $|t_0 - t| < \delta$ бўлганда, $u_t(s), v_t(s)$ функциялар $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ораликда аниқлангандир. Бу ерда t_0 параметр t нинг p нуқтага мос келувчи қийматидир. Бунинг учун (1) дифференциал тенгламалар системасини ҳар бир фиксирланган t учун

$$\begin{cases} \frac{du_t}{ds} = q_1 \\ \frac{dv_t}{ds} = q_2 \\ \frac{dq_k}{ds} = -\sum \Gamma_{ij}^k(q_1, q_2) q_i q_j \quad 1 \leq i, j, k \leq 2 \end{cases} \quad (2)$$

кўринишда ёзамиз. Бу ерда (u_t, v_t, q_1, q_2) ларни R^4 фазонинг нуқтаси сифатида қараймиз. Бошланғич шартлар, яъни $u_t(0), v_t(0), q_1(t, 0) = q_1(t), q_2(t, 0) = q_2(t)$ функциялар t параметр (a, b) ораликда ўзгарганда R^4 да силлиқ чизикни аниқлайди.

Дифференциал тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ва ечимнинг бошланғич шартларига узлуксиз боғлиқлиги ҳақидаги теоремага асосан [4].

$$\mu_{t_0}(0) = \{u_{t_0}(0), v_{t_0}(0)\}, \quad q_1(t_0) = a_1(t_0, 0), q_2(t_0) = a_2(t_0, 0)\}_{t_0}$$

нуқтанинг шундай V атрофи ва шундай $\varepsilon > 0$ сони мавжудки, V атрофга тегишли ҳар бир нуқтадан чиқувчи ечим $-\varepsilon < s < \varepsilon$ ораликда аниқланган. Агар биз $\delta > 0$ сонини шундай танласакки, $|t - t_0| < \delta$ бўлганида $\{u(t), v(t), a_1(t), a_2(t)\}$, нуқта V атрофга тегишли бўлсин. Демак, $|t - t_0| < \delta$ бўлганда $u_t(s), v_t(s)$ функциялар $(-\varepsilon, \varepsilon)$ атрофда аниқланган. Энди сиртнинг p нуқта атрофидаги

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}(u_t(s), v_t(s)) \quad (t, s) \in G_0 = \left\{ (t, s) : \begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ |s| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

параметрлаш усулини қарайлик. Дифференциал тенгламалар системаси ечими бошланғич қийматларнинг дифференциалланувчи функцияси бўлганлиги учун $\vec{r}(t, s)$ дифференциалланувчи функциядир. Бундан ташқари $[\vec{r}_t, \vec{r}_s] \neq 0$ бўлганлиги учун $\vec{r} = \vec{r}(t, s)$ тенглама регуляр сиртининг параметрлаш усулини аниқлайди. Энди унинг ярим геодезик параметрлаш усули эканлигини кўрсатайлик.

Ҳар бир t учун μ_t геодезик чизик бўлганлиги учун $(\ddot{r}_{ss}(t, s), \dot{r}'_t) = 0$ ва $(\dot{r}_s, \dot{r}_s) = 1$

тенгликлар ўринли. Лекин

$$\begin{aligned} (\ddot{r}_{ss}, \dot{r}_s) &= \frac{d}{ds} (\dot{r}_s, \dot{r}'_t) - (\dot{r}_s, \ddot{r}_{ts}) = \\ &= \frac{d}{ds} F(t, s) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{r}_s, \dot{r}_s) = \frac{d}{ds} F = 0 \end{aligned}$$

муносабатлардан ва $F(t, 0) = 0$ тенгликдан $F(t, s) = 0$ эканлиги келиб чиқади. $\square$

Энди геодезик чизикларнинг яна бир муҳим хоссасини исботлайлик. Регуляр $\hat{O}$ сирт нукта атрофидаги (f, G) параметрлаш усули $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ тенглама ёрдамида берилган бўлсин. Агар $\hat{O}$ сиртда γ геодезик чизик берилган бўлса, у ўзига тегишли етарли яқин ихтиёрий иккита нуктани туташтирувчи энг қисқа чизик эканлигини исботлаймиз.

Умумийликни чегараламасдан γ геодезик чизик $p_0(u_0, v_0)$ нуктадан ўтсин деб фараз қиламиз. $p_0(u_0, v_0)$ нуктадан γ га перпендикуляр бирорта γ_0 чизик чиқарамиз ва γ_0 ёрдамида p_0 нукта атрофида ярим геодезик координаталар системасини киритамиз. Демак, $v = \text{const}$ чизиклар геодезик чизиклар бўлиб, улар γ_0 чизикқа перпендикуляр бўлади.

Бу координаталар системасида γ чизик $v = v_0$ тенглама ёрдамида аниқланади. Фараз қилайлик γ чизикда ётувчи p ва q нукталар p_0 нуктанинг геодезик координаталар системаси киритилган атрофида ётсин. Ярим геодезик координаталар системаси киритилган p_0 нуктанинг атрофини $V(p_0)$ билан белгилаб, $\varepsilon > 0$ ни шундай танлаймизки, $V_\varepsilon(p_0)$ - доира $V(p)$ нинг қисми

бўлсин. Шунда p ва q нукталар $\frac{V_\varepsilon}{2}(p_0)$ га тегишли бўлса, γ чизикнинг pq ёй узунлигидан кичик узунликка эга бўлган γ' чизик албатта $V(p)$ да ётади.

Ҳақиқатан γ чизик $V(p)$ да ётмаса, унинг $\frac{V_\varepsilon}{2}(p_0)$ доира чегарасини биринчи ва охириги марта кесишиш нуқталарини r ва s билан белгилаймиз. Шунда

$$|p_0 p| + |pr| > \varepsilon, |p_0 q| + |qs| > \varepsilon$$

муносабатлардан

$$|p_0 p| + |pr| + |p_0 r| + |qs| > 2\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Лекин иккинчи томондан

$$|pr| + |qs| < |p_0 p| + |p_0 q| < \varepsilon$$

қарама-қаршилик мавжуд. Демак γ чизик $V(p)$ да ётади. Унинг узунлигини ҳисобласак,

$$\ell(\gamma) = \int_p^q \sqrt{u'^2 + Gv'^2} dt > \int_p^q |u'| dt \geq |u|_N - |u|_M = |pq|$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, бу қарама-қаршиликдан γ нинг pq ёйи энг қисқа ёй эканлиги келиб чиқади.

Мисоллар.

1. Ҳар қандай сиртда чизикли параметрлаш усули билан берилган тўғри чизик геодезик чизикдир. Бу ҳолда $\vec{p}(t) = \vec{a}t + \vec{s}$ бўлиб, бу ерда $\vec{a}$, $\vec{s}$ ўзгармас векторлардир. Шунинг учун $\vec{p}''(t) = 0$ тенглик ўринли бўлади.
2. Регуляр $\hat{O}$ сирт сифатида ошкормас кўринишда берилган доиравий цилиндрни олайлик. Координаталар системаси қулай танланганда тенглама $x^2 + y^2 = R^2$ кўринишда бўлади. Бу цилиндрда

$$\begin{cases} x = R \cos(\alpha t + \beta) \\ y = R \sin(\alpha t + \beta) \\ z = at + \beta \end{cases}$$

тенглама билан берилган чизик геодезик чизик бўлади. Бу ерда

$$\vec{p}''(t) = \{-\alpha^2 R \cos(\alpha t + \beta), -\alpha^2 R \sin(\alpha t + \beta), 0\}$$

бўлиб, $\text{grad}F(x, y, z) = \{2x, 2y, 0\}$ векторга коллинеардир.

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$ функциянинг градиенти $F(x, y, z) = 0$ сиртга ортогонал бўлганлиги учун $\vec{p}''(t)$ вектор ҳам уринма текисликка перпендикуляр бўлади. Агар $\alpha = 0$ бўлса бу чизик цилиндрнинг ясовчиси бўлади, $a = 0$ бўлса айлана ҳосил бўлади. Умумий ҳолда эса винт чизигига айланади.

3. Икки ўлчамли S^2 сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ тенглама билан берилган бўлса, иккита ўзаро ортогонал $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ бирлик векторлар учун $\vec{p}(t) = R \cos t \vec{e}_1 + R \sin t \vec{e}_2$ тенглама геодезик чизикни аниқлайди. Ҳақиқатан $|\vec{p}(t)| = R$ бўлиб,

$$\vec{\rho}''(t) = -R \cos t \vec{e}_1 - R \sin t \vec{e}_2 = -\vec{\rho}(t)$$

бўлиб, $\vec{\rho}(t)$ радиус вектор, демак $\vec{\rho}(t)$ вектор ҳам сфера уринма текислигига перпендикуляр бўлади. Бу чизикни ҳосил қилиш учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторларга параллел ва координата бошидан ўтувчи текислик билан сферани кесамиз. Демак, бу чизик сферадаги катта айланалардан биридир. Ҳар бир нуқтада ихтиёрий йўналиш бўйича битта катта айлана ўтганлиги учун сферада ҳар қандай геодезик чизик катта айлана ёки катта айлана ёйдан иборатдир.

4. Евклид фазоларида тўғри чизиклар ва фақат тўғри чизиклар геодезик чизиклар бўлади.

Гаусс-Бонне теоремаси

Бу параграфда сиртда берилган ёпиқ чизик бўйлаб бирорта уринма векторни параллел кўчириб бошланғич нуқтага қайтганимизда, векторнинг бошланғич ва охири ҳолатлари орасидаги бурчак билан сиртнинг тўлиқ эгрилиги орасидаги муносабатни топмоқчимиз.

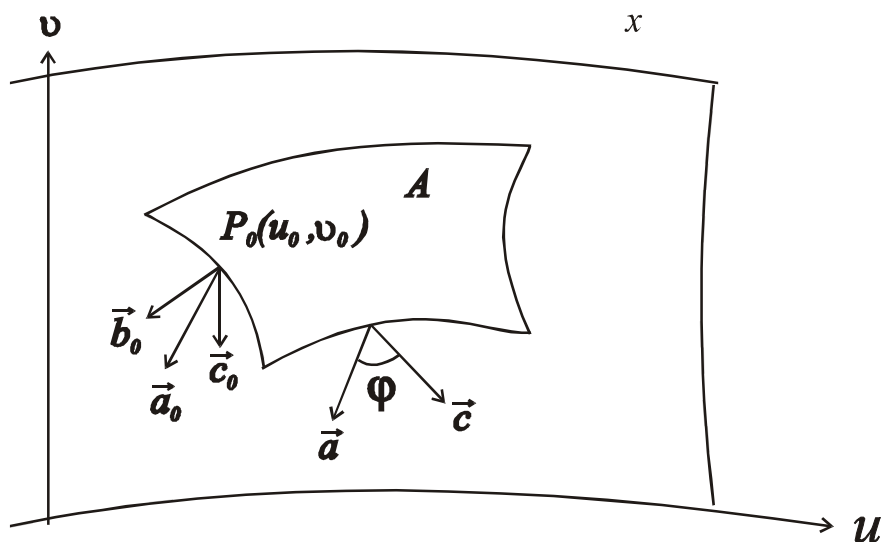
Фараз қилайлик, регуляр $\hat{O}$ сирт

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in G$$

тенглама ёрдамида параметрланган бўлсин. Фазода

$$\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$$

векторлар ёрдамида ориентацияни аниқлаб, сиртда $\vec{r}_u$ вектордан $\vec{r}_v$ векторга бурилишни мусбат бурилиш деб ҳисоблаймиз.



Чизма-15

Сиртда чегараси бир нечта $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ силлиқ чизиклардан иборат бўлган бир боғланишли A соҳа қараб, унинг чегарасини $\tilde{A}$ билан белгилайлик. Бу соҳанинг чегарасида бирорта $p(u_0, v_0)$ нуқта ва битта сиртга уринма $\vec{a}_0$ вектор берилган бўлсин. Мусбат йўналиш бўйича $\vec{a}_0$ векторни $\tilde{A}$ чизик бўйлаб

параллел кўчириб яна $p(u_0, v_0)$ га қайтсак. $\vec{a}_0$ ни параллел кўчириш натижасида $\vec{b}_0$ векторни ҳосил қиламиз. Бу векторлар орасидаги бурчак $\Delta\varphi$ билан белгилаб уни ҳисоблашга киришамиз. Бунинг учун $\hat{O}$ сиртда бирлик $\vec{c}$ уринма вектор майдонни қараймиз ва $\vec{c}_0 = \vec{c}(u_0, v_0)$ белгилаш киритиб, φ_0 билан $\vec{a}_0$ ва $\vec{c}_0$ векторлар орасидаги бурчакни белгилаймиз. Соҳанинг чегараси $\tilde{A}$ чизиқнинг ҳар бир нуқтасида $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторлар орасидаги бурчакни φ билан белгиласак, $\varphi(u_0, v_0) = \varphi_0$ бўлади. Энди параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган $\vec{b}_0$ вектор билан $\vec{c}_0$ орасидаги бурчакни φ_1 деб белгиласак, $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$ тенгликни ҳосил қиламиз. ×унки, биз мусбат йўналиш бўйича ҳаракат қилганимиз учун бурчак ортиб боради.

Шунинг учун $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ бўлиб, у соҳанинг чегарасини бир марта айланиб чиқишда ҳосил бўлган бурчак орттирмасига тенг бўлиб, уни

$$\Delta\varphi = \oint d\varphi \quad (1)$$

кўринишда ёза оламиз. Ҳисоб китоб қулайлиги учун $|\vec{a}_0| = 1$ деб ҳисобласак, $\tilde{A}$ нинг ҳамма нуқталарида $|\vec{a}| = 1$ бўлади. Энди φ бурчакнинг дифференциали $d\varphi$ ни ҳисоблаш учун $(\vec{a}, \vec{c}) = \cos\varphi$ тенгликдан фойдаланамиз. Бу тенгликни дифференциаллаб

$$(d\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{a}, d\vec{c}) = -\sin\varphi d\varphi$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Уринма $\vec{a}$ вектор $\tilde{A}$ чизиқ бўйлаб, $\vec{a}_0$ векторни параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлганлиги учун $d\vec{a}$ векторнинг уринма текисликка проекцияси ноль векторга тенг бўлади, демак, $(d\vec{a}, \vec{c}) = 0$ ва $-\sin\varphi d\varphi = (\vec{a}, d\vec{c})$ тенглик ҳосил бўлади.

Бурчак дифференциали $d\varphi$ ни ҳисоблашда яна бир нарсани ҳисобга олишимиз зарур. Агар $\vec{a}_0$ векторни бошқа бирлик $\vec{g}_0$ вектор билан алмаштириб, α_0 билан $\vec{a}_0, \vec{g}_0$ векторлар орасидаги бурчакни белгиласак, унда уларни $\tilde{A}$ чизиқ бўйлаб параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган $\vec{a}, \vec{g}$ векторлар орасидаги бурчак ҳам α_0 га тенг бўлади. Шунинг учун, агар ψ билан $\vec{c}, \vec{g}$ векторлар орасидаги бурчакни белгиласак, $\psi = \varphi \pm \alpha_0$ бўлади ва демак $d\psi = d\varphi$ тенглик ўринлидир.

Энди сиртнинг ҳар бир нуқтасида $\vec{c}$ га перпендикуляр бўлган $\vec{p}$ векторни шундай танлаймизки, ҳар бир нуқтада $\{\vec{c}, \vec{p}, \vec{n}\}$ векторлар оиласи ўнг системани ҳосил қилсин.

Мисол учун, бундай векторни ҳамма нуқталарда $\vec{c}$ векторни уринма текисликда $+90^\circ$ га буриб ҳосил қилиш мумкин. Соҳа чегарасига тегишли q нуқтани олиб, бу нуқтадаги $\vec{p}$ векторни M_0 нуқтага параллел кўчириб $\vec{p}_q$ билан белгилаймиз. Энди параллел кўчирилиши лозим бўлган $\vec{a}_q$ вектор ўрнига

$\vec{p}_q$ векторни $\tilde{A}$ чизик бўйлаб параллел кўчирамиз ва натижада $\tilde{A}$ нинг ҳамма нуқталарида берилган векторни $\vec{p}_\Pi$ билан белгилаймиз. Агар ψ бурчак $\vec{c}$ ва $\vec{p}_\Pi$ орасидаги бурчак бўлса, q нуқтада $\vec{p}_\Pi$ вектор $\vec{p}$ вектор билан устма-уст тушганлиги учун бу нуқтада $\psi_q = \frac{\pi}{2}$ бўлади ва демак

$$d\psi_{q^{(q)}} = -(\vec{p}, d\vec{c}) \quad (2)$$

тенглик ўринли бўлади.

Биз q нуқтани ихтиёрий танлаганимиз учун бу ишни ҳамма q лар учун такрорлаб, (2) тенгликни ҳосил қиламиз. Энди $d\varphi$ нинг ихтиёрий q нуқтадаги қийматини ҳисоблаш учун $d\varphi = d\psi_q$ тенгликдан фойдаланамиз ва натижада

$$d\varphi(q) = d\psi_q(q) = -(\vec{p}, d\vec{c}) \quad (3)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула биз учун муҳим аҳамиятга эга, чунки $(\vec{p}, d\vec{c})$ скаляр кўпайтмани ҳисоблай оламиз.

Энди биз $(\vec{p}, d\vec{c})$ скаляр кўпайтмани ҳисоблашга киришамиз. Бунинг учун $d\vec{c} = \vec{c}_u du + \vec{c}_v dv$ тенгликни ва (3) ни ҳисобга олиб (1) ни $\Delta\varphi = -\oint_{\Gamma} \{(\vec{p}, \vec{c}_u) du + (\vec{p}, \vec{c}_v) dv\}$ кўринишда ёзамиз.

Биз

$$\oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

формуладан фойдаланиб

$$\Delta\varphi = \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\vec{p}, \vec{c}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{p}, \vec{c}_u) \right\} dudv = -\iint_A \{(\vec{c}_v, \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v)\} dudv$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \vec{n} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ ва $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = K[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ тенгликлардан $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = K |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \vec{n}$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда K сиртнинг Гаусс эгрилигидир. Бу тенгликдан $(\vec{c}_v, \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v)$ ифодани ҳисоблашда фойдаланамиз. Бунинг учун

$$\vec{c}_u = c_1^1 \vec{c} + c_1^2 \vec{p} + c_1^3 \vec{n}, \quad \vec{c}_v = c_2^1 \vec{c} + c_2^2 \vec{p} + c_2^3 \vec{n}$$

$$\vec{p}_u = p_1^1 \vec{c} + p_1^2 \vec{p} + p_1^3 \vec{n}, \quad \vec{p}_v = p_2^1 \vec{c} + p_2^2 \vec{p} + p_2^3 \vec{n}$$

ифодалардан фойдаланамиз. Лекин $\vec{c}$ ва $\vec{p}$ бирлик векторлар бўлгани учун

$$(\vec{c}, \vec{c}_u) = (\vec{c}, \vec{c}_v) = 0, \quad (\vec{p}, \vec{p}_u) = (\vec{p}, \vec{p}_v) = 0$$

тенгликлар ўринли. Демак, $c_1^1 = c_2^1 = p_1^1 = p_2^1 = 0$ бўлади. Хуллас

$$\vec{c}_u = c_1^2 \vec{p} + c_1^3 \vec{n}, \quad \vec{c}_v = c_2^2 \vec{p} + c_2^3 \vec{n}$$

$$\vec{p}_u = p_1^2 \vec{c} + p_1^3 \vec{n}, \quad \vec{p}_v = p_2^2 \vec{c} + p_2^3 \vec{n}$$

тенгликларни ҳисобга олиб

$$(\vec{c}_v \cdot \vec{p}_u) - (\vec{c}_u \cdot \vec{p}_v) = c_2^3 p_2^3 - c_1^3 p_2^3$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди

$$\vec{n}_u = N_1^1 \vec{c} + N_1^2 \vec{p}, \vec{n}_v = N_2^1 \vec{c} + N_2^2 \vec{p}$$

ёйилмалардан

$$\begin{aligned} [\vec{n}_u, \vec{n}_v] &= N_1^1 N_2^2 [\vec{c}, \vec{p}] + N_1^2 N_2^1 [\vec{p}, \vec{c}] = N_1^1 N_2^2 \vec{n} - N_1^2 N_2^1 \vec{n} = \\ &= (N_1^1 N_2^2 - N_1^2 N_2^1) \vec{n} \end{aligned}$$

тенгликни ёзиш мумкин. Лекин $\vec{n} = [\vec{c}, \vec{p}]$ ва

$$\vec{n}_u = [\vec{c}_u, \vec{p}] + [\vec{c}, \vec{p}_u] \quad \vec{n}_v = [\vec{c}_v, \vec{p}] + [\vec{c}, \vec{p}_v]$$

тенгликни ҳисобга олиб $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = (c_1^3 p_2^3 - c_2^3 p_2^3) \vec{n}$ муносабатни ҳосил қиламиз. Демак,

$$(c_1^3 p_2^3 - c_2^3 p_2^3) \vec{n} = K |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \vec{n}$$

тенглик ва натижада эса

$$c_1^3 p_2^3 - c_2^3 p_2^3 = K \sqrt{EG - F^2}$$

тенглик ўринли бўлади. Шунда

$$\Delta \varphi = \iint K \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (4)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди юқоридаги (4) формуладан фойдаланиб Гаусс-Бонне теоремасини исботлайлик. Бунинг учун A соҳани чегараловчи $\tilde{A}$ чизик бир нечта силлиқ чизиклардан иборат эканлигини эслатиб ўтамиз. Демак, бу чизикнинг уринма вектори $\vec{\tau}$ аниқланган бўлиб, $\tilde{A}$ ни айланиб чиқиш давомида у силлиқ чизикларнинг туташ нуқталарида функция сифатида узилишга эга бўлади, яъни унинг йўналиши сакраб ўзгаради. Соҳанинг чегараси $\tilde{A}$ чизик бўйлаб параллел кўчирилаётган $\vec{a}$ вектор билан $\vec{\tau}$ вектор орасидаги бурчакни ψ билан, $\vec{c}$ вектор ва $\vec{a}$ вектор орасидаги бурчакни юқоридагидек φ билан белгиласак, $\vec{c}$ ва $\vec{\tau}$ векторлар орасидаги бурчак μ учун $\mu = \varphi + \psi$ тенглик ўринли бўлади. Биз $\tilde{A}$ чизикни бир марта айланиб чиқсак,

$$\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}(u_0, v_0), \vec{c}_0 = \vec{c}(u_0, v_0)$$

векторлар яна ўз вазиятига қайтади. Демак, μ бурчакнинг орттирмаси 2π га тенг бўлиши керак. Аслида эса бу орттирма 2π га тенгдир. ×унки A соҳа доирага ва чегараси эса айланага гомеоморфдир.

Демак, $\Delta \mu = 2\pi$ ёки $\Delta \varphi + \Delta \psi = 2\pi$. Параллел кўчирилаётган $\vec{a}$ вектор ва чизикнинг уринма вектори $\vec{\tau}$ орасидаги бурчак орттирмаси учун

$$\Delta \psi = \oint d\psi + \sum_{i=1}^n \Delta \psi_i$$

ўринли бўлади.

Бу ерда $\Delta\psi_i$ i -чи туташуш нуктасидаги бурчак орттормасидир. Энди $d\psi$ ни ҳисоблаш учун $d\psi = -(\vec{b}, d\vec{\tau})$ тенгликдан фойдаланамиз. Бу ерда $\vec{b}$ вектор сифатида $\vec{\tau}$ ни сиртнинг уринма текислигида $+90^\circ$ га буриб ҳосил қилинган векторни қабул қиламиз. Энди $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{m}$ тенгликни ҳисобга олиб $\frac{d\psi}{ds} = k(\vec{b}, \vec{m})$ формулани ҳосил қиламиз. Бу ерда $\vec{m}$ чизикнинг бош нормалидир. Шунда $(\vec{b}, \vec{m})$ скаляр кўпайтма $\vec{m} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ векторнинг уринма текислигидаги проекцияси эканлигидан ва чизикнинг эгрилиги $\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$ га тенглигидан $\frac{d\psi}{ds} = k_g$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу ерда k_g -чизикнинг геодезик эгрилигидир. Энди буларни ҳисобга олиб $\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi$ тенгликни

$$\iint_A K \sqrt{EG - F^2} du dv + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} K_g ds + \sum_{i=1}^n \Delta\psi_i = 2\pi \quad (5)$$

кўринишда ёзамиз. Ҳосил бўлган формула Гаусс-Бонне теоремаси деб аталади. Энди

$$\iint_A \sqrt{EG - F^2} du dv$$

интеграл A соҳанинг юзасига тенг эканлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун аввало соҳа юзаси тушунчасини киритамиз. Сиртдаги A соҳани кичкина соҳачаларга ажратиб, ҳар бир кичкина соҳачанинг чегараси ёпиқ чизик бўлиб, бу ёпиқ чизик чекли сондаги силлиқ чизиклардан иборат бўлишини талаб қиламиз. Бу кичкина соҳачаларни a билан белгилайлик. Энди ҳар бир a соҳадан биттадан P_a нукта олиб, шу нуктадан сиртга уринма текислик ўтказамиз. Кичкина a соҳачалар шунчалик кичик бўлиши керакки, a соҳани P_a нуктадан ўтадиган уринма текисликка проекциялаш ўзаро бир қийматли мослик бўлиши керак. Уринма текисликдаги a соҳанинг проекциясини a_n билан унинг юзасини $S(a_n)$ билан белгилаймиз.

$\sum_a S(a_n)$ ифоданинг соҳалар сони чексизликка интилгандаги лимитини

A соҳанинг юзаси деб атаймиз ва $S(A)$ билан белгилаймиз. Энди $S(A)$ ни ҳисоблашга киришамиз. Бунинг учун ҳар бир a учун $S(a_n)$ ни ҳисоблаймиз.

Агар P_a нуктани координата боши сифатида қабул қилиб, Z ўқини шу нуқтадаги нормал бўйича йўналтирсак, XU текислиги P_a нуқтадаги уринма

текислик билан устма-уст тушади. Бу координаталар системасида
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

тенгликлар a_n соҳача билан G соҳадаги бирорта $\tilde{a}_n$ соҳача ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади. Агар

$$\vec{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$$

бўлса,

$$z_u(u_0, v_0) = 0, z_v(u_0, v_0) = 0$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу ерда u_0, v_0 сиртда P_a нуқтанинг ички координаталаридир. Бундан ташқари, $[r_u, \vec{r}_v] \neq 0$ ва

$$[r_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)] = \left\{ 0, 0, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right\}$$

тенгликлардан

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \\ y_u(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

муносабат келиб чиқади. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \\ y_u(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

детерминант $p_a(u_0, v_0)$ нуқтага етарли яқин нуқталарда ҳам нолдан фарқли бўлади. Фараз қилайлик $\sigma_a > 0$ сон учун $|u - u_0| < \sigma_a, |v - v_0| < \sigma_a$ тенгсизликлар бажарилганда юқоридаги детерминант нолдан фарқли бўлиб, сиртнинг

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \{(u, v) : |u - u_0| < \sigma, |v - v_0| < \sigma\}$$

тенгламалар билан аниқланган қисми a соҳани ўз ичига олсин. Шунда

$$\begin{cases} x = x(u, v), x(u_0, v_0) = 0 \\ y = y(u, v), x(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан ошкормас функция ҳақидаги теоремага асосан дифференциалланувчи $u = u(x, y), v = v(x, y)$ функциялар мавжуд бўлади. Шунда a соҳани уринма текисликка проекциялаш $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$ формула орқали

ифодалангани учун $u = u(x, y), v = v(x, y)$ функциялар a_n соҳачани G соҳадаги $\tilde{a}_n$ соҳачага гомеоморф акслантиради. Демак, a_n соҳача юзасини ҳисоблаш учун каррали интегралдан фойдаланиб $S(a_n) = \iint_{a_n} dx dy$ кўринишда ёзсак, уни $x = x(u, v), y = y(u, v)$ алмаштиришдан кейин

$$S(a_n) = \iint_{\tilde{a}_n} abs \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} dudv$$

кўринишда ёза оламиз.

Бу ерда

$$abs \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

билан $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ детерминантнинг абсолют қиймати белгиланган. Энди P_a нуқтада

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = abs \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

тенглик ўринли бўлгани ва $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ функциянинг узлуксизлигидан ҳар бир $(u, v) \in a_n$ нуқта учун

$$abs \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| + \varepsilon_a(u, v)$$

тенгликни ёза оламиз. Бу ерда $\varepsilon_a(u, v)$ етарли кичик миқдор бўлиб, a кичиклашганда у нолга интилади.

Юқоридагиларни ҳисобга олиб

$$\sum_a S(a_n) = \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} (|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| + \varepsilon_a(u, v)) dudv = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| dudv + \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u, v) dudv$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\tilde{A}$ билан G соҳадаги A соҳага мос келувчи соҳа белгиланган.

Шундай қилиб,

$$\sum_a S(a_n) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| dudv + \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u, v) dudv \quad (6)$$

тенгликни ҳосил қилдик. Бу тенгликда a соҳачаларни етарли кичик қилиш ҳисобига бирорта $\varepsilon > 0$ учун $\varepsilon_a(u, v) < \varepsilon$

тенгсизликнинг бажарилишини таъминлаймиз. Натижада

$$\left| \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u, v) dudv \right| < \varepsilon \sum_a S(\tilde{a}_n) = \varepsilon S(\tilde{A})$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Энди (6) тенгликда A соҳачалар сонини чексизликка интилтириб лимитга ўтсак

$$\lim_a \sum S(\tilde{a}_n) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| dudv$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$S(A) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| dudv$$

формулани ҳосил қилдик. Бу ерда

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$$

тенгликдан фойдалансак

$$S(A) = \iint_{\tilde{A}} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

формулани ҳосил қиламиз. Энди

$$ds = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

белгилаш киритсак Гаусс-Бонне теоремасини

$$\iint_{\tilde{A}} K ds + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} K_g ds + \sum_{i=1}^n \Delta \psi_i = 2\pi$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Энди Гаусс-Бонне теоремасини A соҳа учта

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ геодезик чизиклар билан чегараланган ҳолни кўрайлик. Геодезик чизиклар учун $K_g = 0$ бўлганлигидан Гаусс-Бонне теоремасига кўра

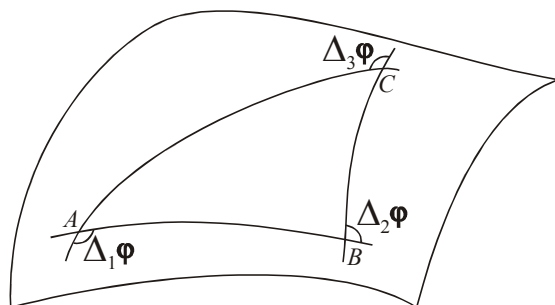
$$\iint_{\tilde{A}} K ds + \sum_{i=1}^3 \Delta \psi_i = 2\pi$$

кўринишга келади. Бу ҳолда A соҳа геодезик учбурчак бўлиб, унинг ички бурчаклари α_i лар учун $\alpha_i = \pi - \Delta \psi_i$ ўринли бўлади. Шунинг учун юқоридаги формула

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_{\tilde{A}} K ds$$

кўринишга келади. Бу ерда $K = 0$ бўлса (мисол учун $\hat{O}$ сирт текислик бўлса)

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ тенгликни ҳосил қиламиз.



Чизма-16

