

**ЎЗБЕКИСТОН АЛОҚА ВА
АХБОРОТЛАШТИРИШ АГЕНТЛИГИ**

**ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ
УНИВЕРСИТЕТИ САМАРҚАНД ФИЛИАЛИ**

М. Яхшибоев

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

**КАРРАЛИ, ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ, СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ,
МАЙДОНЛАР НАЗАРИЯСИ, ФУРЬЕ ҚАТОРИ
(маърузалар курси)**

САМАРҚАНД – 2008

**ЎЗБЕКИСТОН АЛОҚА ВА
АХБОРОТЛАШТИРИШ АГЕНТЛИГИ**

**ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ
УНИВЕРСИТЕТИ САМАРҚАНД ФИЛИАЛИ**

М.Ҳ. Яхшибоев

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

**КАРРАЛИ, ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ, СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ,
МАЙДОНЛАР НАЗАРИЯСИ, ФУРЬЕ ҚАТОРИ
(маърузалар курси)**

5521900 – «Информатика ва ахборот технологияси»,
5522200 – “Телекоммуникасия”, 5140900 – “Касб таълим (Информатика
ва ахборот технологиялари)”, 5811200– ‘Сервис’ (Ахборот сервисі)
бакалавриат йўналишида таълим олувчилар учун маърузалар матни.

ТАТУ Самарқанд филиали ўқув – услубий кенгашининг
2008 йил 25 март бўлиб ўтган йиғилиши қарори билан
(7 - баённома) ташрга тавсия етилган.

САМАРҚАНД – 2008

М. Яхшибоев *Олий математика*: каррали, эгри чизиқли, сирт интеграллари, майдонлар назарияси, Фурье қатори (*маърузалар курси*) . Самарқанд, 2008 – 100 бет.

Мазкур маърузалар курсига 5 та маъруза киритилган бўлиб, каррали, эгри чизиқли, сирт интеграллари, майдонлар назарияси, Фурье қатори бўлимлари бўйича мавзуларини ўз ичига олган.

Ҳар бир маърузада тегишли таърифлар тушунчалар ва тасдиқларга доир мисоллар ечиб кўрсатилган, ҳамда мавзунини ўзлаштириш учун саволлар келтирилган.

Масъул муҳаррир: ф.-м.ф.д,доц. Абдуллаев Ж.

Такризчилар: ф.-м.ф.н,доц. А. Ғозиев

ф.-м.ф.н,доц. Турсунқулов Б

Тошкент ахборот технологиялари университети Самарқанд филиали, 2008.

Мундарижа

Сўз боши.....6

17- маъруза. Каррали интеграллар.....7

17.1. Цилиндрик ғўланинг ҳажми ҳақидаги масала.(7) 17.2. Икки каррали интеграл таърифи(9). 17.3. Икки каррали интеграл учун Дарбу йиғиндилари(11). 17.4. Икки каррали интегралнинг мавжудлик шarti(12). 17.5. Интегралланувчи функцияларнинг синфлари(13). 17.6. Икки кррали интегралнинг хоссалари(13). 17.7. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш(16). 17.8. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш(18). 17.9. Уч каррали интеграл таърифи(20). 17.10. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш(22).

18 – маъруза.Эгри чизиқли интеграллар ва уларнинг қўлланиши.....26

18.1.Биринчи тур эгри чизиқли интегралининг таърифи(26).18.2.Биринчи тур эгри чизиқли интегралларни оддий интегралга келтириш(28). 18.3.Биринчи тур эгри чизиқли интегралларнинг хоссалари(29). 18.4. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларнинг баъзи татбиқлари(31). 18.5. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар(33). 18.6.Иккинчи тур эгри чизиқли интегралларнинг мавжудлик шarti ва уларни ҳисоблаш(35). 18.7.Эгри чизиқли интеграллар орасида боғланиш(37). 18.8.Грин формуласи(38). 18.9.Грин формуласининг қўлланиши(38). 18.10.Эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шarti(39).

19 –маъруза. Сирт интеграллари43

19.1. Сирт тенгламалари.Сиртнинг юзи(43). 19.2. Биринчи тур сирт интеграллари(46). 19.3. Биринчи тур сирт интегралларини икки каррали ёрдамида ҳисоблаш(47). 19.4. Биринчи тур сирт интегралининг баъзи татбиқлари(49). 19.5. Бир томонли ва икки томонли сиртлар(50). 19.6. Иккинчи тур сирт интеграллари(50). 19.7. Иккинчи тур сирт интегралини икки каррали интеграл ёрдамида ҳисоблаш(52). 19.8. Биринчи тур сирт интеграллари билан иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланиш(53). 19.9. Стокс ва Остроградский формулалари(54).

20 –маъруза.Майдонлар назарияси.....59

20.1. Скаляр ва вектор майдон(59). 20.2. Йўналиш бўйича ҳосила ва скаляр майдонни градиенти(60). 20.3. Вектор чизиқлари ва вектор трубкаси(64). 20.4. Потеналь майдон(67). 20.5. Сиртдан ўтувчи вектор майдон оқими. Вектор майдоннинг дивергенцияси. Соленоидаль майдон(68). 20.6. Вектор майдоннинг

циркуляцияси. Вектор майдоннинг ротори(73).20.7. Иккинчи тартибли дифференциал амаллар(78).

21 – маъруза. Фурье қатори.....81

21.1. Даврий функция. Бўлакли силлиқ ва бўлакли узлуксиз функциялар(81).21.2. Гармониклар(84).21.3. Асосий масаланинг қўйилиши .Тригонометрик Фурье қатори(85). 21.4.Жуфт ва тоқ функцияларини Фурье қаторига ёйиш(87). 21.5. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги. Фурье қаторини ҳадма – ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш(88).21.6. $[0,l]$ оралиқда функцияни фақат синуслар ва косинуслар бўйича Фурье қаторига ёйиш(92). 21.7. Ортогонал функциялар системаси. Ортогонал системалар бўйича Фурье қаторининг коэффицентлари(95).

Адабиётлар.....100

Сўз боши

Ҳозирги вақтда олий математика фани, техника ва иқтисоднинг турли –туман масалаларини ҳал қилишда кенг қўлланилмоқда. Талабалар ўқув адабиётни мустақил ўрганиш ва ундан фойдалана билиш малакаларини ҳосил қилиш; мантиқий фикрлашни ўстириш ва математикавий маданиятнинг умумий савиясини кўтариш; татбиқий масалаларни математикавий томондан текшириш малакаларини ҳосил қилиш кабилар талаб қилинади.

Мазкур маърузалар курсига 5 та маъруза киритилган бўлиб, у 1- курс бакалавИАТУранинг 2-семестрида ўқитилади. Маърузалар курси Олий техника ўқув юртларида ўқиладиган «Олий математика» фанининг нисбатан кўп ўрганилган, тадбиқ доираси кенг ва муҳим бўлимларидан бири бўлган каррали, эгри чизиқли, сирт интеграллари, майдонлар назарияси, Фурье қаторига бағишланган. Ушбу маърузалар курси Олий техника ўқув юртлари учун белгиланган дастур асосида ёзилган.

Маърузалар курси "Олий математика " фани бўйича ёзилган бўлиб, ТАТУ Самарқанд филиали “Информатика ва ахборот технологиялари”, “Касб таълим (информатика ва ахборот технологиялари)”, “Телекоммуникация”, Сервис (Ахборот сервис) бакалавИАТУра йўналишлари бўйича таълим олаётган талабалар учун мўлжалланган.

Ҳар бир маърузада тегишли таърифлар тушунчалар ва тасдиқларга доир мисоллар ечиб кўрсатилган, ҳамда мавзуни ўзлаштириш учун саволлар келтирилган. Маъзкур маърузалар курси ҳақидаги фикр мулоҳазалар, ундаги мавжуд камчиликлар бўйича таклифларни муаллиф мамнуният билан қабул қилади.

17- маъруза

КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Режа:

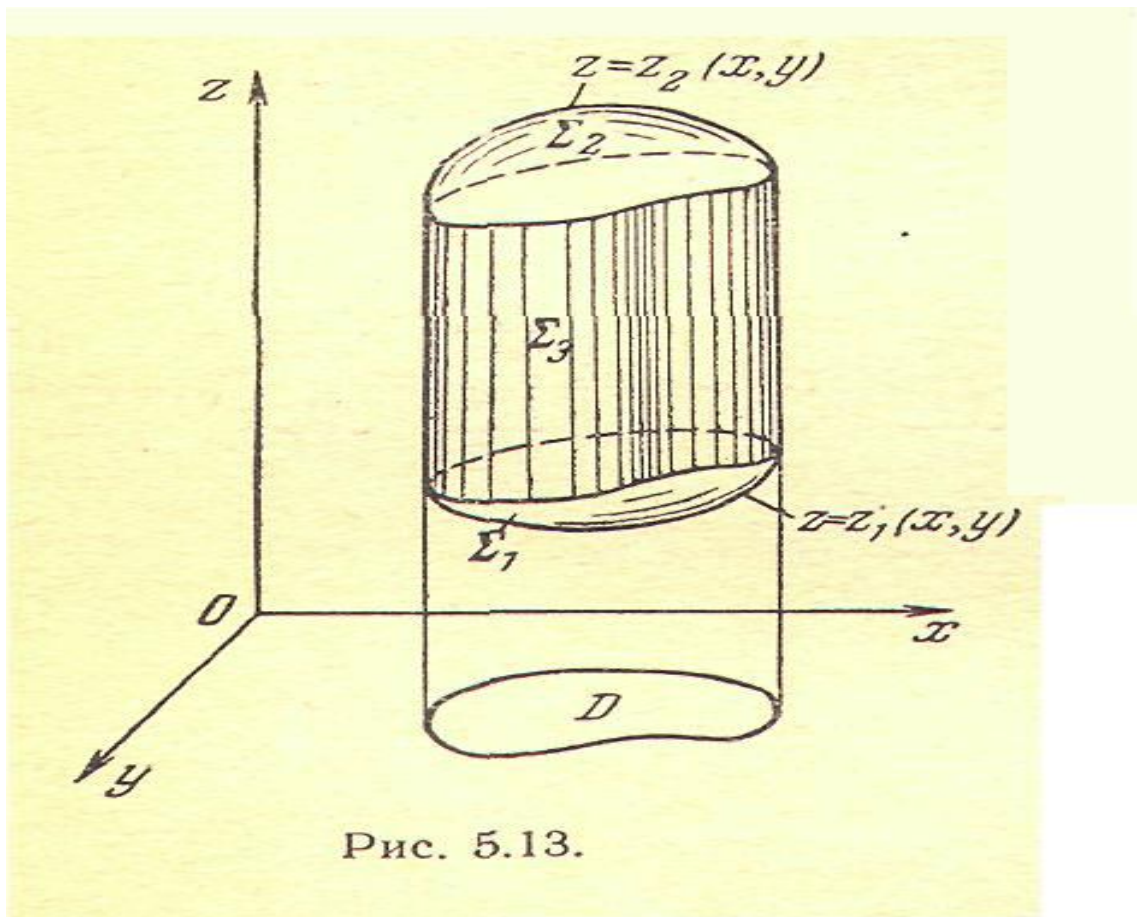
- 17.1. Цилиндрик ғўланинг ҳажми ҳақидаги масала.
- 17.2. Икки каррали интеграл таърифи.
- 17.3. Икки каррали интеграл учун Дарбу йиғиндилари.
- 17.4. Икки каррали интегралнинг мавжудлик шarti.
- 17.5. Интегралланувчи функцияларнинг синфлари.
- 17.6. Икки каррали интегралнинг хоссалари.
- 17.7. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш.
- 17.8. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш.
- 17.9. Уч каррали интеграл таърифи.
- 17.10. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш.

Таянч иборалар. Узлуксиз функция, соҳа, сирт, икки каррали интеграл, жисмнинг ҳажми, эгри чизиқ, интеграл йиғинди, бўлиниш, Дарбунинг куйи ҳамда юқори йиғиндилари, интегралланувчи, икки каррали интегрални қутб координаталар системасига алмаштириш формуласи, цилиндрик алмаштиришлар, сферик алмаштиришлар.

17.1. Цилиндрик ғўланинг ҳажми ҳақидаги масала

Эгри чизиқли трапециянинг юзи тўғрисидаги масала оддий аниқ интеграл тушунчасини киритишга келтирилгани сингари цилиндрик ғўланинг ҳажми ҳақидаги масала бизни янги тушунчага, икки каррали интеграл тушунчасига олиб келади.

$f(x, y)$ функция бирор чегараланган $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада берилган, узлуксиз ҳамда $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geq 0$ бўлсин. R^3 фазода $Oxyz$ -Декарт координаталар системасини олайлик. Юқоридан $z = f(x, y)$ сирт билан, ён томондан, ясовчилари Oz ўқиға паралел бўлган цилиндрик сирт ҳамда пастдан Ox текисликдаги (D) соҳа билан чегараланган (V) жисмни қарайлик (17.1-чизма). (V) жисмнинг ҳажмини топиш талаб этилсин.



17.1-чизма

Агар $f(x, y)$ функция бирор чегараланган $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада ўзгармас бўлса, $f(x, y) = C$ ($C = \text{const}$), у ҳолда (V) жисмнинг ҳажми $V = CD$ га тенг бўлади, бунда $D - (D)$ соҳанинг юзи.

Агар (D) соҳада $f(x, y)$ x ва y ўзгарувчиларнинг ихтиёрий узлуксиз функцияси бўлса, у ҳолда (V) жисмнинг ҳажмини топиш учун, аввало (D)

соҳани эгричириклар билан n та бўлакка бўламиз: $(D) = \bigcup_{k=1}^n (D_k)$. Бўлувчи

чирикларни йўналтирувчи сифатида олиб Oz ўқиға параллел цилиндрик сиртлар ўтказамиз. Натижада (V) жисм n та (V_k) ($k = 1, 2, \dots, n$)

бўлаккаларга ажралади. Сўнг ҳар бир (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) да ихтиёрий

(ξ_k, η_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) нуқта оламиз. Бу (D_k) да $f(x, y)$ функцияни ўзгармас

ва $f(\xi_k, \eta_k)$ га тенг десак, у ҳолда (V_k) бўлакнинг ҳажми тахминан

$$f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

бўлиб, (V) жисмнинг ҳажми эса, тахминан

$$V \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

бўлиб, бунда $D = (D)$ соҳанинг юзи.

Энди (D) соҳани бўлақларга бўлиниш сонини шундай орттира борайликки, бунда ҳар бир (D_k) ($k=1,2,\dots,n$) бўлақнинг диаметри нолга интилганда, лимитда, бу тақрибий тенглик аниқ тенгликка айланади, яъни

$$V = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

бўлади ва шу билан қўйилган масала ҳал этилади.

Ана шу кўринишдаги ифоданинг лимитини $f(x, y)$ дан (D) соҳа бўйича *икки каррали интеграл* (Риман интеграл) деб аталади ва у

$$V = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k = \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

каби белгиланади.

17.2. Икки каррали интеграл таърифи

Бирор чегараланган (D) ($(D) \subset R^2$) соҳа берилган бўлсин. (D) соҳанинг чеграсидаги ихтиёрий икки нуқтани бирлаштирувчи ва бўтунлай шу соҳада ётувчи чизикни (эгри чизикни) Γ чизик деб белгилаймиз. Бу Γ чизиклар (D) соҳани бўлақларга ажратади. $((D):$ соҳада бутунлай ётувчи ёпиқ чизикни ҳам Γ чизик деб қараймиз. Бундай чизиклар ҳам (D) соҳани бўлақларга ажратади. (D) соҳани бўлақларга ажратувчи чекли сондаги Γ чизиклар системаси $\{\Gamma : \Gamma \subset (D)\}$ (D) соҳанинг бўлиниши деб аталади ва у $P = \{\Gamma : \Gamma \subset (D)\}$ каби белгиланади. (D) соҳани бўлақларга ажратувчи ҳар бир Γ чизик, P бўлинишнинг бўлувчи чизиғи, (D) соҳанинг бўлағи эса, P бўлинишнинг бўлағи дейилади. P бўлиниш бўлақлари диаметрининг энг каттаси унинг диаметри деб аталади ва у λ_p каби белгиланади. (D) соҳанинг бўлинишлар тўпламини $\Phi = \{P\}$ орқали белгилаймиз.

$f(x, y)$ функция чегараланган $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада берилган бўлсин. Бу (D) соҳанинг $P \in \Phi$ бўлинишни ва бу бўлинишнинг ҳар бир квадратланувчи $(D_k) (k = 1, 2, \dots, n)$ бўлагидан ихтиёрий $(\xi_k, \eta_k) (k = 1, 2, \dots, n)$ нукта олиб, берилган функциянинг $(\xi_k, \eta_k) (k = 1, 2, \dots, n)$ нуктадаги $f(\xi_k, \eta_k)$ қийматини $(D_k) (k = 1, 2, \dots, n)$ соҳанинг юзи D_k га кўпайтириб қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

йигиндини тузамиз ва бу йигиндини $f(x, y)$ функциянинг *интеграл йигиндис*и ёки *Риман йигиндис*и деб атаيمиз.

$f(x, y)$ функция чегараланган $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада берилган бўлсин. (D) соҳанинг шундай $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ бўлинишлар кетма-кетлиги қараймизки, уларнинг диаметларидан ташкил топган $\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_m}, \dots$ кетма-кетлик нолга интилса: $\lambda_{p_m} \rightarrow 0$. Бундай $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ бўлинишларга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл йигиндисини тузамиз: $\sigma_m = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k$. Натижада (D) соҳанинг $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ бўлинишларига мос $f(x, y)$ функция интеграл йигиндилари қийматларидан иборат қуйидаги $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$ кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади (ξ_k, η_k) нукталарга боғлиқ.

17.1-таъриф. Агар (D) соҳанинг ҳар қандай $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ бўлинишлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос келган $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$ интеграл йигиндилар кетма-кетлиги $\{\sigma_m\}, (\xi_k, \eta_k) (k = 1, 2, \dots, n)$ нукталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмасдан ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ *интеграл йигиндининг лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k = I$$

каби белгиланади.

17.2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлганда ҳар қандай P бўлиниши ҳамда ҳар бир (D_k) бўлакдаги ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқталар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сонга σ интеграл йиғиндининг limiti деб аталади ва у $\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = I$ каби белгиланади.

17.3-таъриф. Агар $\lambda_p \rightarrow 0$ да $f(x, y)$ функциянинг σ интеграл йиғиндиси

чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи (Риман маъносида) функция дейилади. Бу σ интеграл йиғиндининг чекли limiti I сонга эса, $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича *икки каррали интеграл* (Риман интеграл) деб аталади ва у

$$I = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k = \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

каби белгиланади.

17.3. Икки каррали интеграл учун Дарбу йиғиндилари

$f(x, y)$ функция (D) ($(D) \subset \mathbb{R}^2$) соҳада берилган ва чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг бирор P бўлинишини карайлик. Бу бўлинишнинг ҳар бир квадратланувчи (D_k) ($k=1, 2, \dots, n$) бўлагида $f(x, y)$ функция чегараланган бўлиб, унинг аниқ қуйи ва аниқ юқори чегаралари

$$m_k = \inf_{(x,y) \in (D_k)} \{f(x, y)\}, \quad M_k = \sup_{(x,y) \in (D_k)} \{f(x, y)\},$$

мавжуд бўлади.

17.4-таъриф. Ушбу

$$s_P = \sum_{k=1}^n m_k D_k, \quad S_P = \sum_{k=1}^n M_k D_k$$

йиғиндилар мос равишда *Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари* деб аталади. (D) соҳанинг ҳар бир P бўлинишига нисбатан $\{s_P\}, \{S_P\}$ тўпламлар чегараланган.

17.5-таъриф. $\{s_P\}$ ($\{S_P\}$) тўпламларнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси, яъни $\sup\{s_P\} = \underline{I}$ ($\inf\{S_P\} = \bar{I}$) миқдорлар мос равишда $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги қуйи икки каррали (юқори икки каррали) интеграллари деб аталади ва у

$$\underline{I} = \iint_{(D)} f(x, y) dD = \sup\{s_P\} \quad (\bar{I} = \overline{\iint_{(D)} f(x, y) dD} = \inf\{S_P\})$$

каби белгиланади.

17.6- таъриф. Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада қуйи ҳамда юқори икки каррали интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи, уларнинг умумий қиймати $I = \underline{I} = \bar{I}$ $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги икки каррали интеграллари (Риман интеграллари) дейилади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \overline{\iint_{(D)} f(x, y) dD} = \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

каби белгиланади.

Агар $\underline{I} \neq \bar{I}$ бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланмайди деб аталади.

17.4. Икки каррали интегралнинг мавжудлик шarti

17.1- теорема. $f(x, y)$ функциянинг (D) интегралланувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишга нисбатан Дарбу йиғиндилари

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon \quad (17.1)$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Агар $f(x, y)$ функциянинг $(D_k) \left(k = \overline{1, n} \right)$ соҳадаги тебранишни ω_k

деб белгиласак, у ҳолда (17.1) шарт

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D_k < \varepsilon \quad (17.2)$$

шартга эквивалент бўлади.

17.5. Интегралланувчи функцияларнинг синфлари

17.2- теорема. Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёпик $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.

17.3- теорема. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаги нол юзли чизиқларида узилишга эга бўлиб, (D) соҳанинг қолган барча нукталарда узлуксиз бўлса, бу функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.

Икки қаррали интеграллар ёрдамида текис шаклнинг юзи, жисмнинг ҳажмларини топиш мумкин. Интеграл таърифидан бевосита (D) шаклнинг юзи

$$D = \iint_{(D)} dx dy$$

бўлиши келиб чиқади.

17.6. Икки қаррали интегралнинг хоссалари

1°. $f(x, y)$ функция $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг (D) соҳада бўтунлай ётувчи нол юзага эга бўлган Γ чизиқдаги $(\Gamma \subset (D))$ қийматларинигина (чегараланганлигини сақлаган ҳолда) ўзгартиришдан ҳосил бўлган $F(x, y)$ функция ҳам (D) соҳада интегралланувчи бўлиб,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D)} F(x, y) dD$$

бўлади.

2°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, (D) соҳа нол юзли Γ чизик ёрдамида (D_1) ва (D_2) соҳаларга ажралган бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у (D_1) ва (D_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \iint_{(D_1)} f(x, y) dD + \iint_{(D_2)} f(x, y) dD \quad (*)$$

муносабат ўринли.

3°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $C \cdot f(x, y)$ ($C = const$) ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint_{(D)} C \cdot f(x, y) dD = C \iint_{(D)} f(x, y) dD$$

формула ўринли.

4°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint_{(D)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dD = \iint_{(D)} f(x, y) dD \pm \iint_{(D)} g(x, y) dD$$

формула ўринли бўлади.

Натижа. Агар $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{k=1}^n C_k \cdot f_k(x, y)$ ($C_k = const, k = 1, 2, \dots, n$) функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint_{(D)} \sum_{k=1}^n C_k \cdot f_k(x, y) dD = \sum_{k=1}^n C_k \iint_{(D)} f_k(x, y) dD$$

тенглик ўринли бўлади.

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD \geq 0$$

бўлади.

Натижа. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлиб ва $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \leq g(x, y)$ бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD \leq \iint_{(D)} g(x, y) dD$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left| \iint_{(D)} f(x, y) dD \right| \leq \iint_{(D)} |f(x, y)| dD$$

тенгсизлик ўринли.

7°. *Ўрта қиймат ҳақидаги теорема.* Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас сон

$$\mu \quad (m \leq \mu \leq M, M = \sup_{(x, y) \in (D)} \{f(x, y)\}, m = \inf_{(x, y) \in (D)} \{f(x, y)\})$$

мавжудки,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \mu D$$

формула ўринли, бу ерда D - (D) соҳанинг юзи.

Натижа. Агар $f(x, y)$ функция ёпик (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ топиладики,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = f(a, b) D$$

8⁰.*Ўрта киймат ҳақидаги умумлашган теорема.* Агар $g(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, у шу соҳада ўз ишорасини ўзгартирмаса, $f(x, y)$ функция эса, (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$ топиладики,

$$\iint_{(D)} f(x, y)g(x, y)dD = f(a, b)\iint_{(D)} g(x, y)dD$$

ўринли бўлади.

17.7. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш

17.4-теорема. $f(x, y)$ функция $D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x \in [a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx \text{ интеграл ҳам мавжуд ва } \iint_{(D)} f(x, y)dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$$

формула ўринли бўлади.

17.5-теорема. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $y \in [c, d]$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy \text{ интеграллар ҳам мавжуд ва } \iint_{(D)} f(x, y)dD = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy$$

формула ўринли бўлади.

Натижа. Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёпик $(D) ((D) \subset R^2)$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса,

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD, \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy$$

интегралларнинг ҳар бири мавжуд ва улар бир-бирига тенг бўлади.

17.6- теорема. $f(x,y)$ функция

$$(D) = \left\{ (x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\} \left(\varphi_i(x) \in C[a,b], i=1,2 \right)$$

соҳада берилган ва интеграллаувчи бўлсин. Агар $x \in [a,b]$

ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$ интеграл

мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

тнглик ўринли бўлади.

17.7- теорема. $f(x,y)$ функция

$$(D) = \left\{ (x,y) \in R^2 : c \leq x \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\} \left(\psi_i(y) \in C[c;d], i=1,2 \right)$$

соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $y \in [c,d]$

ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx$ интеграл

мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x,y) dD = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

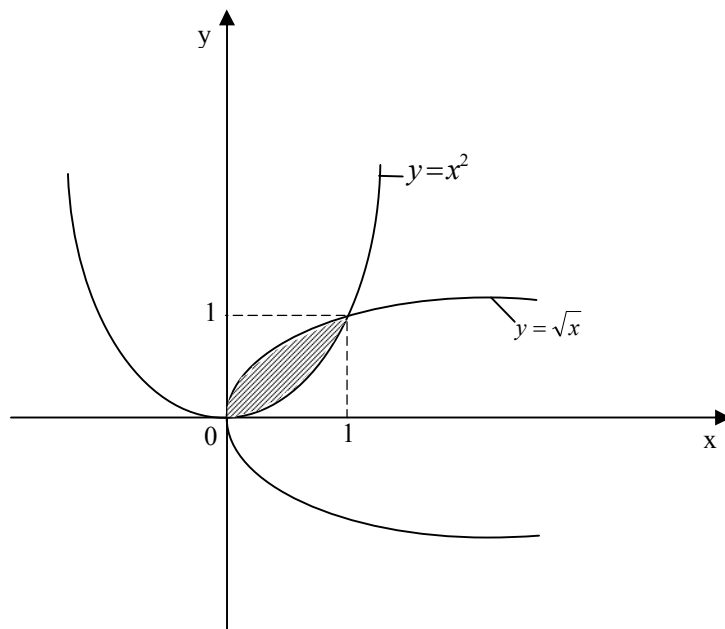
тнглик ўринли бўлади.

17.1– мисол. Икки каррали интегрални ҳисобланг

$$\iint_{(D)} (x^2 + y) dx dy, \quad (D) = \{(x, y) : y = x^2, y^2 = x\}.$$

Ечилиши. (D) соҳа $y = x^2, y^2 = x$ парабодаларнинг кесишган қисмидан иборат (17.2- чизма). Икки каррали интегрални такрорий интегралга келтириш формуласига асосан,

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} (x^2 + y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy = \int_0^1 \left(\frac{yx^2}{3} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^{5/2} - \frac{3}{2} x^4 + \frac{x}{2} \right) dx = \frac{33}{140}. \end{aligned}$$



17.2-чизма.

17.8. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва унинг чекли каррали интегралли

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy \quad (17.3)$$

мавжуд бўлсин ва уни ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция ва (D) соҳа мураккаб бўлса, (17.3) интегрални ҳисоблаш қийинлашади. Бундай ҳолларда x ва y ўзгарувчиларни маълум қоидага кўра бошқа ўзгарувчиларга алмаштириш натижасида интеграл остидаги функция ҳам, интеграллаш соҳаси ҳам соддалашиб икки қарали интегрални ҳисоблаш осонлашади.

Оху ҳамда Ouv координаталар системасида (D) ва (Δ) соҳалар берилган бўлсин. Бу соҳаларнинг чегаралари мос равишда $\partial(D)$ ва $\partial(\Delta)$ лар содда, бўлакли силлиқ чизиклардан иборат бўлсин. (Δ) соҳада

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta) \\ y = \psi(\xi, \eta), \end{cases} (\xi, \eta) \in (\Delta) \subset R^2 \quad (17.4)$$

узлуксиз функциялар системаси берилган бўлсин. Бу функциялар шундай функциялар бўлсинки, улардан тузилган (17.4) система (Δ) даги (ξ, η) нуқтани (D) соҳадаги (x, y) нуқтага акслантирисин ва бу акслантиришни аксларидан иборат $\{(x, y)\}$ тўплам (D) га қарашли бўлсин. Демак, (17.4) система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантиради.

(17.4) акслантириш қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1°. (17.4) акслантириш ўзаро бир қийматли бўлсин, яъни (Δ) соҳанинг турли нуқталарини (D) соҳанинг турли нуқталарига акслантирсин. (D) соҳанинг ҳар бир нуқтаси учун (Δ) соҳада унга мос келадиган нуқта биттагина бўлсин. Бу ҳолда (17.4) система ξ ва η ларга нисбатан бир қийматли ечилади:

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \psi_1(x, y), \end{cases} (x, y) \in (D) \subset R^2 .$$

2°. $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ функциялар (Δ) соҳада, $\varphi_1(x, y)$, $\psi_1(x, y)$ функциялар эса, (D) соҳада узлуксиз ва барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиз бўлсин.

3°. $\forall(\xi, \eta) \in (\Delta)$ учун (17.4) системадаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларидан тузилган ушбу иккинчи тартибли детерминант

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин. Одатда (4) иккинчи тартибли детерминантни (17.4) системанинг *системанинг якобиани* дейилади ва $I(\xi, \eta)$ ёки $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ каби белгиланади.

$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, (17.4) акслантириш 1°, 2°, 3°- шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) |I(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (17.5)$$

формула ўринли. (17.5) формула икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи дейилади.

Декарт координаталар системасидан

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \quad (0 \leq r < +\infty), (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (17.6)$$

алмаштириш ёрдамида (r, φ) қутб координаталар системасига ўтамыз.

Натижа (17.5) формула ушбу

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \quad (17.7)$$

кўринишни олади. Одатда (17.7) муносабат икки каррали интегрални қутб координаталар системасига *алмаштириш формуласи* дейилади.

17.9. Уч каррали интеграл таърифи

$f(x, y, z)$ функция R^3 фазодаги чегараланган (V) соҳада берилган бўлсин. (V) соҳанинг P бўлинишими қарайлик. Бу бўлинишнинг ҳар бир (V_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) бўлагидан ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқта олиб, қўйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V_k$$

интеграл йиғиндини тузамиз, бунда $V_k - (V_k)$ нинг хажми.

17.7-таъриф. Агар $\lambda_p \rightarrow 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг σ интеграл йиғиндиси I чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада *интегралланувчи (Риман маъносида) функция* дейилади. Бу σ интеграл йиғиндининг чекли лимити I сонга эса, $f(x, y, z)$ функциянинг (V) соҳа бўйича *уч каррали интеграл* (Риман интеграл) деб аталади ва у

$$I = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) V_k = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV$$

каби белгиланади.

Уч каррали интегралларнинг мавжудлиги, интегралланувчи функциялар синфи ва интеграл хоссаларига оид теоремалар худди икки каррали интеграллардаги каби бўлади.

$f(x, y, z)$ функция

$$(V) = \{(x, y, z) \in R^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq l\}$$

соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^l f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

бўлади.

Энди (V) соҳа — пастдан $z = \psi_1(x, y)$, юқоридан $z_2 = \psi_2(x, y)$ сиртлар билан, ён томондан Oz ўқиға параллел цилиндрик сирт билан чегараланган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг Oxy текислигига проекцияси (D) бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция шундай (V) соҳада узлуксиз бўлиб, $z = \psi_i(x, y)$ $i = 1, 2$ функциялар (D) да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{(D)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

бўлади. Агар $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ бўлиб,
 $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2$) функциялар $[a; b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

бўлади.

17.2-мисол. Ушбу

$$\iiint_{(V)} (3x + 2y) dx dy dz, (V) = \{(x, y, z) : y = 0, y = x, x = 1, z = 1, z = 1 + x^2 + y^2\}$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. (V) соҳада $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 1 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2$
 тенгсизликлар ўринли. У ҳолда уч каррали интегрални такрорий
 интегралларга келтириш формуласига кўра,

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} (3x + 2y) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_1^{1+x^2+y^2} (3x + 2y) dz = \int_0^1 dx \int_0^x (3x + 2y) z \Big|_1^{1+x^2+y^2} dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x (3x + 2y)(x^2 + y^2) dy = \int_0^1 dx \int_0^x (3x^3 + 3xy^2 + 2yx^2 + 2y^3) dy = \\ &= \int_0^1 \left(3x^3 y + xy^3 + y^2 x^2 + \frac{1}{2} y^4 \right) \Big|_0^x dx = \int_0^1 (3x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + \frac{1}{2} x^4) dx = \frac{11}{10}. \end{aligned}$$

17.10. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

$f(x, y)$ функция (V) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, (V) соҳа
 — силлиқ ёки бўлакли силлиқ сиртлар билан чегараланган бўлсин.

$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$ интегралда ўзгарувчиларни қуйидагича

алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, \omega), \\ y = \psi(u, v, \omega), \\ z = \chi(u, v, \omega), \end{cases} (u, v, \omega) \in (\Delta) \subset R^3. \quad (17.8)$$

(17.8) акслантириш қўйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1°. (17.8) акслантириш ўзаро бир қийматли бўлсин, яъни (Δ) соҳанинг турли нуқталарини (V) соҳанинг турли нуқталарига акслантирсин. (V) соҳанинг ҳар бир нуқтаси учун (Δ) соҳада унга мос келадиган нуқта биттагина бўлсин. Бу ҳолда (17.8) система u, v ва w ларга нисбатан бир қийматли ечилади:

$$\begin{cases} u = \varphi_1(x, y, z), \\ v = \psi_1(x, y, z), \\ w = \chi_1(x, y, z), \end{cases} \quad (x, y, z) \in (V) \subset R^3. .$$

2°. $\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)$ функциялар (Δ) соҳада, $\varphi_1(x, y, z), \psi_1(x, y, z), \chi_1(x, y, z)$ функциялар (V) соҳада узлуксиз ва барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиз бўлсин.

3°. $\forall (u, v, w) \in (\Delta)$ учун (17.8) системадаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларидан тузилган ушбу учинчи тартибли детерминант

$$I(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин. У ҳолда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |I(u, v, w)| du dv dw \quad (17.9)$$

бўлади. (17.9) формула уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласидир. Кўпчилик ҳолларда уч карали интегралларни ҳисоблаш учун ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштириш мақсадга мувофиқ бўлади.

а) Қуйидаги

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (17.10)$$

алмаштиришни қарайлик $(0 \leq \rho < +\infty)$, $(0 \leq \varphi < 2\pi)$, $(-\infty < z < +\infty)$. Натижа (17.9) формула ушбу

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

кўринишни олади. Одатда (17.10) алмаштириш цилиндрик алмаштиришлар, (ρ, φ, z) эса, нуқтанинг *цилиндрик координаталари* дейилади.

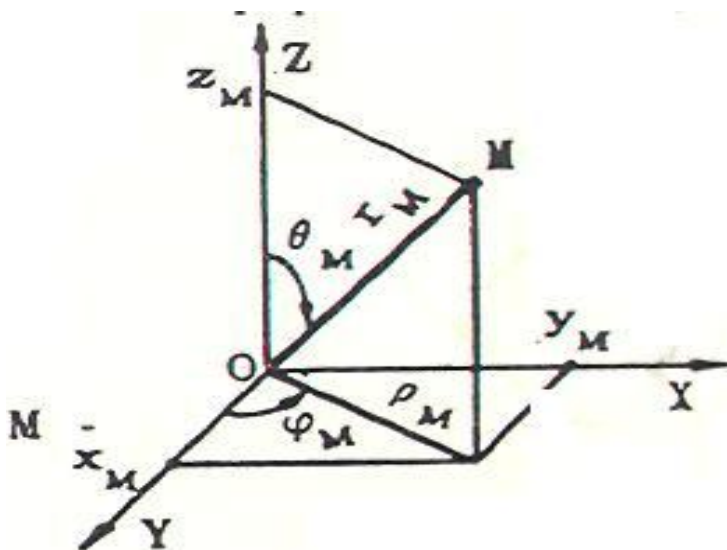
Ушбу

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (17.11)$$

алмаштиришни қарайлик $(0 \leq r < +\infty)$, $(0 \leq \theta \leq \pi)$, $(0 \leq \varphi < 2\pi)$. У ҳолда (17.10) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin^2 \theta dr d\theta d\varphi.$$

Одатда (17.11) алмаштириш *сферик алмаштиришлар*, (r, φ, θ) эса, нуқтанинг *сферик координаталари* дейилади (17.3-чизма).



17.3-чизма.

Ўз-ўзини текшириш саволлари

17.1. Цилиндрик бруснинг ҳажмини топиш ҳақидаги масала. ([2], 291-292 бетлар;).

17.2. Икки қаррали интегралнинг таърифлари ([2], 292-295 бетлар;).

- 17.3.** Дарбу йиғиндиларининг таърифи ([2], 295-296 бетлар;).
- 17.4.** Икки каррали интегралнинг мавжудлик ҳақидаги теоремаси ([2], 299-300 бетлар;).
- 17.5.** Интегралланувчи функцияларнинг синфлари ([2], 300-303 бетлар;).
- 17.6.** Икки каррали интегралнинг хоссалари ([2], 303-306 бетлар;).
- 17.7.** Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. ([2], 305-306 бетлар;)
- 17.8.** Интеграллаш соҳаси ўзгарувчи бўлган икки каррали интеграл тушунчаси ([2], 316-321 бетлар;).
- 17.10.** Интеграллаш соҳаси тўғри тўрт бурчакдан иборат бўлган ҳолда икки каррали интегрални ҳисоблаш([2], 306-311 бетлар;).
- 17.11.** Интеграллаш соҳаси эгри чизиқли бўлган ҳолда икки каррали интегрални ҳисоблаш. ([2], 311-316 бетлар;).
- 17.12.** Уч каррали интегралнинг таърифи ([2], 324-327 бетлар;).
- 17.1.17.** Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи ([2], 324-327 бетлар;).

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ҚЎЛЛАНИШИ

Режа:

18.1.Биринчи тур эгри чизикли интегралининг таърифи.

18.2.Биринчи тур эгри чизикли интегралларни оддий интегралга келтириш.

18.3.Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг хоссалари.

18.4. Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг баъзи тадбиқлари.

18.5. Иккинчи тур эгри чизикли интеграллар.

18.6.Иккинчи тур эгри чизикли интегралларнинг мавжудлик шарти ва уларни ҳисоблаш.

18.7.Эгри чизикли интеграллар орасида боғланиш.

18.8.Грин формуласи.

18.9.Грин формуласининг қўлланиши.

18.10.Эгри чизикли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шарти.

Таянч иборалар. Биринчи тур эгри чизикли интеграл, иккинчи тур эгри чизикли интеграл, интеграл йиғинди, эгри чизик, ёй узунлиги, хусусий ҳосила, Грин формуласи.

18.1. Биринчи тур эгри чизикли интегралининг таърифи

Фараз қилайлик, тўғри бурчакли координата системасида содда узлуксиз тўғриланувчи $(K)=(AB)$ эгри чизик берилган бўлиб, унда $f(M)=f(x,y)$ функция аниқланган бўлсин. Юқоридаги сингари $(K)=(AB)$ эгри чизикни элементар $A_i A_{i+1}$ ($i = \overline{0, n-1}$) ёйларга бўламиз, яъни эгри чизикнинг $P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ бўлишини оламиз. Бу бўлишнинг

$A_i A_{i+1}$ ёйидан ихтиёрий $M_i(\xi, \eta_i)$ нуқтани олиб, бу нуқтада функциянинг $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ қийматини ҳисоблаймиз ва $f(M_i)\Delta s_i = f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ кўпайтмадан йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

18.1-таъриф. $(K) = (AB)$ эгри чизикнинг диаметрлари кетма–кетлиги нолга интилувчи ҳар қандай $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ бўлинишлари кетма – кетлиги олинганда ҳам, унга мос келган $\{\sigma_n\}$ йиғиндилар кетма – кетлиги (ξ_i, η_i) нуқтани танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт чекли битта лимитга интилса, бу лимитга $f(x, y)$ функциядан (K) эгри чизик бўйича олинган *биринчи тур эгри чизикли интеграл* дейилади ва у

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y)ds$$

каби белгиланади. Демак,

$$I = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i = \int_{(K)} f(x, y)ds. \quad (18.1)$$

Бу таърифни қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

18.2- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сони олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $\lambda_p < \delta$ бўлганда ҳар қандай P бўлиш учун тузилган σ йиғинди $\forall (\xi_i, \eta_i) \in (A_i A_{i+1})$ нуқталарда

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сон σ йиғиндининг $\lambda_p \rightarrow 0$ даги лимити деб аталади ва у (18.1) каби белгиланади.

1-эслатма. Юқоридаги эгри чизикли интегралнинг таърифида йўналиши ҳеч қандай рол ўйнамайди, яъни

$$\int_{(AB)} f(x, y)ds = \int_{BA} f(x, y)ds$$

биринчи тур эгри чизикли интеграл, интеграллаш йўлига боғлиқ эмас.

Агар (AB) эгри чизик фазода берилган бўлса, у ҳолда эгри чизикли интегралнинг таърифи худди юқоридаги сингари

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_{(AB)} f(x, y, z) ds$$

берилади.

18.2. Биринчи тур эгри чизикли интегралларни оддий интегралга келтириш

18.1-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $(K) = (AB)$ эгри чизикда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциядан (K) эгри чизик бўйича олинган эгри чизикли интеграл мавжуд бўлади ва у

$$\int_0^s f(x(s), y(s)) ds = \int_{(K)} f(x, y) ds \quad (18.2)$$

формула билан ҳисобланади. Бу теорема эгри чизикли интегралнинг мавжудлик шarti ҳам деб юритилади.

Энди (K) эгри чизик ихтиёрий параметрик

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (18.3)$$

тенгламаси билан берилган бўлсин, бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар узлуксиз ва узлуксиз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ хусусий ҳосилага эга деб фараз қилинади. Бундан ташқари (K) чизик каррали нуқталарга эга эмас деб фараз қилинади. Бу ҳолда (K) эгри чизик тўғирланувчи бўлади. Маълумки,

$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$. Бунини эътиборга олсак, (18.2) дан

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (18.4)$$

(18.4) формула, (K) эгри чизик, ихтиёрий параметрик тенгламаси билан берилганда, биринчи тур эгри чизикли интегрални оддий Риман интегралга келтириш ҳисоблаш формуласи бўлиб ҳисобланади.

Агар (K) эгри чизик, $y = y(x) (a \leq x \leq b)$ ошкор шаклдаги тенгламаси билан берилган бўлса (бунда $y(x) [a; b]$ да узлуксиз ва узлуксиз $y'(x)$ ҳосилага эга), у ҳолда (4) формуланинг кўриниши

$$\int_{(K)} (x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (18.5)$$

шаклда бўлади.

(K) эгри чизик, ушбу $\rho = \rho(\theta), (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1)$ тенглама билан қутб координаталар системасида берилган бўлиб, $\rho(\theta)$ функция $[\theta_0; \theta_1]$ да узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция шу (K) эгри чизикда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда (4) нинг кўриниши

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sqrt{\rho^2 + [\rho']^2} d\theta \quad (18.6)$$

шаклда бўлади.

Мисол. $\int_{(K)} \frac{x}{y} ds$, бунда $(K): y^2 = 2x$ параболанинг $A(1; \sqrt{2})$ ва $B(2; 2)$

нуқталар орасидаги ёйи.

Ечилиши. Берилган эгри чизикли интегрални (...) формула бўйича ҳисоблаймиз: $y = \sqrt{2x}, 0 \leq x \leq 2, ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$, бунда

$$y = \sqrt{2x}, y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}, ds = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx = \sqrt{\frac{1+2x}{2x}} dx.$$

$$\int_{(K)} \frac{x}{y} ds = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{4} (1+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}).$$

18.3. Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг хоссалари

Ушбу $x = \varphi(t), y = \psi(t) (t_0 \leq t \leq T)$ система билан аниқланган (AB) эгри чизикда $f(x, y)$ узлуксиз функция берилган бўлсин.

1-хосса. Агар $AB = AC + CB$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{(AB)} f(x, y) ds = \int_{(AC)} f(x, y) ds + \int_{(CB)} f(x, y) ds$$

бўлади.

2-хосса. Ушбу

$$\int_{(AB)} C f(x, y) ds = C \int_{(AB)} f(x, y) ds \quad (C = \text{const})$$

тенглик ўринли.

3-хосса. (AB) эгри чизиқда узлуксиз $f(x, y)$ функция билан биргаликда узлуксиз $g(x, y)$ функция ҳам берилган бўлсин, у ҳолда

$$\int_{(AB)} [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_{(AB)} f(x, y) ds \pm \int_{(AB)} g(x, y) ds$$

формула ўринли бўлади.

4- хосса. Агар $\forall (x, y) \in (AB)$ да $f(x, y) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{(AB)} f(x, y) ds \geq 0$$

бўлади.

5-хосса. $|f(x, y)|$ функция шу (AB) да интегралланувчи ва

$$\left| \int_{(AB)} f(x, y) ds \right| \leq \int_{(AB)} |f(x, y)| ds$$

тенгсизлик ўринли.

6-хосса. Шундай $(\bar{x}, \bar{y}) \in (AB)$ нукта топиладики,

$$\int_{(AB)} f(x, y) ds = f(\bar{x}, \bar{y}) S$$

бўлади, бунда $S = (AB)$ эгри чизиқнинг узунлиги.

18.4. Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг баъзи тадбиқлари

Биринчи тур эгри чизикли интеграл ёрдамида ёй узунлигини жисмнинг массасини, оғирлик марказини, статик моментини топиш мумкин:

1) **Ёй узунлигини топиш.** Текисликда содда тўғирланувчи (AB) эгри чизик берилган бўлсин. Бу чизикда $f(x, y) = 1$ деб фараз қилсак, у ҳолда (5) га асосан

$$\int_{(AB)} f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i = S$$

Демак, $S = \int_{(AB)} ds$.

2) **Жисмнинг массасини топиш.** Текисликда узлуксиз содда эгри чизик берилган бўлиб, бу чизик бўйлаб бирор масса тарқалган бўлсин. Унинг чизикли $\rho(M)$ ($\forall M \in (AB)$) зичлиги берилган бўлсин, бу m масса

$$m = \int_{(AB)} \rho(M) ds = \int_{(AB)} \rho(x, y) ds \quad (18.7)$$

интеграл орқали топилади.

3) **Эгри чизикнинг статик моменти ва оғирлик марказини топиш.** m – массага эга бўлган M материал нуқтанинг бирор ўққа нисбатан K_u статик моменти деб унинг m массани ўқгача бўлган d масофага кўпайтмасига айтилади: $K_u = md$.

(AB) эгри чизикнинг ds элементар бўлгани оламиз. Бундаги масса ҳам ds га тенг, яъни $m = ds$. ds –ни материал нуқта деб қарасак ва бу нуқтадан Ox ўқигача бўлган масафани y деб белгиласак, у ҳолда бу материал нуқтанинг статик моменти

$$dK_x = y ds, \quad K_x = \int_0^S \rho y ds = \int_{(AB)} \rho y ds = \int_{(AB)} y ds,$$

бунда $y(s) = y$, $x(s) = x$, $\rho(x, y) = 1$ деб олинган.

Худди шундай

$$K_y = \int_0^S \rho x ds = \int_0^S x ds = \int_{(AB)} x ds.$$

(AB) эгри чизикнинг маркази $G(\xi, \eta)$ нуқтада жойлашган бўлсин.
 (AB) эгри чизик массаси $S = m$ шу $G(\xi, \eta)$ нуқтада жойлашган бўлсин, у ҳолда

$$S\xi = K_y = \int_0^S x ds, \quad S\eta = K_x = \int_0^S y ds,$$

$$\xi = \frac{K_y}{S} = \frac{\int_0^S x ds}{S}; \quad \eta = \frac{K_x}{S} = \frac{\int_0^S y ds}{S},$$

бундан, $\eta S = \int_0^S y ds, \quad 2\pi\eta S = 2\pi \int_0^S y ds.$

18.2-теорема (Гульдиннинг биринчи теоремаси). (AB) эгри чизикни уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзи Q , унинг маркази чизган айлана узунлигини (AB) эгри чизикнинг ёй узунлигига кўпайтмасига тенг:

$$Q = 2\pi \int_0^S y ds = 2\pi\eta S.$$

4)Текис соҳанинг статик момент ива оғирлик марказининг координаталарини топиш. Юқоридан тенгламаси $y = g(x)$ кўринишда бўлган (AB) эгри чизик билан ён томонларда $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиклар билан, пастдан Ox ўқ билан чегараланган текис соҳа бўйлаб бирор масса текис тақсимланган бўлсин, унинг сирт зичлиги (бир бирлик юзага тарқалган масса) $\rho(x, y)$ ўзгармас бўлсин, у ҳолда текис соҳанинг исталган қисмидаги масса унинг юзи билан ўлчанади. Бу фигуранинг координата ўқларига нисбатан статик моментлари: K_x ва K_y лари ушбу

$$K_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad K_y = \int_a^b xy dx$$

формулалар билан топилади, оғирлик маркази $C(\xi, \eta)$ нинг координаталари эса, ушбу

$$\xi = \frac{K_y}{P} = \frac{\int_a^b xy ds}{P}; \quad \eta = \frac{K_x}{P} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 ds}{P},$$

бунда P , текис фигуранинг юзи. Бундан

$$2\pi\eta S = \pi \int_0^S y^2 ds.$$

18.3-теорема (Гульдиннинг иккинчи теоремаси). Текис фигурани уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажми, унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигини текис фигура юзи P га кўпайтмасига тенг.

18.5. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар

Текисликда бирор $(K) = (AB)$ содда эгри чизиқ берилган ва унда $f(x, y)$ функция аниқланган бўлсин. Бу эгри чизиқнинг $P = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ бўлишини ва бўлишнинг хар бир $(A_i A_{i+1})$ ($i = \overline{0, n-1}$) ёйидан ихтиёрий $M_i(\xi_i, \eta_i)$ нуқтани олиб $f(x, y)$ функциянинг бу нуқтадаги қийматини $A_i A_{i+1}$ ёйининг Ox (Oy) ўқидаги проекциясига кўпайтириб ушбу

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

интеграл йиғиндини тузамиз.

18.4-таъриф. Агар $(K) = (AB)$ эгри чизиқнинг мос диаметрлари кетма–кетлиги нолга интилувчи хар қандай $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ бўлишлар кетма – кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос келган $\{\sigma_n\}$ интеграл йиғиндилар кетма – кетлиги $M_i(\xi_i, \eta_i)$ нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ҳолда $\lambda_p \rightarrow 0$ да ҳамма вақт бита чекли I сонга интилса, у ҳолда бу лимит $f(x, y)$ функциядан (K) эгри чизиқ бўйича олинган *иккинчи тур эгри чизиқли интеграл* дейилади ва у

$$I = \int_{(K)} f(M)dx = \int_{(K)} f(x, y)dx$$

каби белгиланади. Бу ҳолда $f(x, y)$ функция (K) эгри чизик бўйича интегралланувчи ҳам дейилади.

Худди шундай $f(M_i)$ ни $A_i A_{i+1}$ ёнинг OY ўқидаги проекцияси Δy_i га кўпайтириб

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

интеграл йиғинди тузилади ва

$$\int_{(K)} f(x, y)dy$$

эгри чизикли интегралнинг таърифи берилади. Агар (K) эгри чизикда $P(M) = P(x, y)$, $Q(M) = Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\int_{(K)} P(M)dx = \int_{(K)} P(x, y)dx, \int_{(K)} Q(M)dy = \int_{(K)} Q(x, y)dy$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_{(K)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

эгри чизикли интегралга иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг умумий кўриниши дейилади ва

$$\int_{(K)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(K)} P(x, y)dx + \int_{(K)} Q(x, y)dy$$

каби ёзилади.

2-эслатма. Иккинчи тур эгри чизикли интеграл йўлига (йўналишига) боғлиқ бўлади, яъни

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = - \int_{(BA)} f(x, y)dx, \int_{(AB)} f(x, y)dy = - \int_{(BA)} f(x, y)dy$$

ўринли бўлади.

3-эслатма. (AB) эгри чизик Ox ўқиға (Oy ўқиға) перпендикуляр бўлган тўғри чизик кесмасидан иборат бўлса

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = 0, \left(\int_{AB} f(x, y) dy = 0 \right).$$

(K) содда ёпиқ чизикда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. (K) эгри чизикнинг ихтиёрий турли хил A ва B нуқталарини оламиз. Натижада (K) ёпиқ иккита (AaB) ва (BbA) чизикларга бўлинади.

$$\int_{(AaB)} f(x, y) dx + \int_{(BbA)} f(x, y) dx$$

интегралга (агар мавжуд бўлса) $f(x, y)$ функциядан ёпиқ чизик бўйича олинган иккинчи тур эгри чизикли интеграл деб аталади ва

$$\int_{(K)} f(x, y) dx \text{ ёки } \oint_{(K)} f(x, y) dx$$

каби белгиланади. Интеграл (K) нинг мусбат йўналиши олинган.

(K) эгри чизикда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ва $R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб,

$$\int_{(K)} P(x, y, z) dx, \int_{(K)} Q(x, y, z) dy, \int_{(K)} R(x, y, z) dz$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_{(K)} P(x, y, z) dx + \int_{(K)} Q(x, y, z) dy + \int_{(K)} R(x, y, z) dz$$

йиғинди иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\int_{(K)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(K)} P dx + \int_{(K)} Q dy + \int_{(K)} R dz$$

каби белгиланади.

18.6. Икинчи тур эгри чизикли интегралнинг мавжудлик шарти ва уни ҳисоблаш. (K) эгри чизик ўзининг параметрик

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), (\alpha \leq t \leq \beta)$$

шакилдаги тенгламаси билан берилган бўлиб, $\varphi(t), \psi(t)$ функциялар узлуксиз, узлуксиз хусусий $\varphi'(t), \psi'(t)$ ҳосилаларга эга, ҳамда

$(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$, $B = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$ бўлсин. t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ нукта A дан B га қараб $(K) = (AB)$ ни чизсин.

18.4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (K) да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $\int_{(AB)} f(x, y) dx$, $\int_{(AB)} f(x, y) dy$ эгри чизиқли интеграл мавжуд бўлади ва улар

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt,$$

$$\int_{(AB)} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt,$$

формулар билан ҳисобланади.

Умумий ҳолда, юқоридаги шартларда

$$\int_{(K)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt$$

ўринли бўлади.

$(K) = (AB)$ эгри чизиқ тенгламаси $y = y(x)$, $\alpha \leq x \leq b$ шаклда берилганда иккинчи тур эгри чизиқли интеграл

$$\int_{(K)} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^b f(x, y(x)) dx$$

формула билан ҳисобланади.

Худди шундай, эгри чизиқ тенгламаси $x = x(y)$ $c \leq y \leq d$ кўринишда берилган бўлса, у ҳолда

$$\int_{(K)} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy$$

формула билан ҳисобланади.

Агар $\int_{(AB)} P(x, y) dx$ интеграл Oy ўқиға паралел бўлган (AB) тўғри чизик кесмаси бўйича $\int_{(AB)} Q(x, y) dy$ интеграл Ox ўқиға паралел бўлган (AB) тўғри чизик кесмаси бўйича олинган бўлса, у ҳолда у нолга тенг бўлади.

18.7. Эгри чизикли интеграллар орасидаги боғланиш

Текисликда содда силлик $(K) = (AB)$ эгри чизик ушбу $x = x(s), y = y(s) (0 \leq s \leq S)$ тенгламалар системаси билан берилган бўлиб, бунда s ёй узунлиги, $x(s), y(s)$ функциялар узлуксиз ва $x'(s), y'(s)$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Маълумки бу эгри чизик ҳар бир нуқтасида уринмага эга бўлсин. Уринманинг Ox ва Oy ўқларининг мусбат йўналиши орасидаги бурчаклари мос равишда α ва β бўлсин, у ҳолда $x'(s) = \cos \alpha, y'(s) = \cos \beta$ бўлади.

$f(x, y)$ функция (K) чизикда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{(K)} f(x, y) dx$$

интеграл мавжуд бўлади ва у

$$\begin{aligned} \int_{(K)} f(x, y) dx &= \int_0^S f(x(s), y(s)) y'(s) ds = \\ &= \int_0^S f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds = \int_{(K)} f(x, y) \cos \alpha ds \end{aligned} \quad (18.8)$$

тенглик ўринли бўлади.

Худи шундай

$$\begin{aligned} \int_{(K)} f(x, y) dy &= \int_0^S f(x(s), y(s)) y'(s) ds = \\ &= \int_0^S f(x(s), y(s)) \cos \beta ds = \int_{(K)} f(x, y) \cos \beta ds \end{aligned} \quad (18.9)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар $(K) = (AB)$ эгри чизикда иккита узлуксиз $P(x, y), Q(x, y)$ функциялар берилган бўлса, у ҳолда

$$\int_{(K)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(K)} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta)ds \quad (18.10)$$

формула ўринли бўлади. (18.8), (18.9) ва (18.10) формулалар биринчи тур эгри чизикли интеграл билан иккинчи тур эгри чизикли интеграллар орасидаги боғланишни берувчи формулалар бўлиб ҳисобланади.

Агар (K) эгри чизик фазода берилган бўлса, у ҳолда (18.10) формуланинг кўриниши

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(K)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

шаклда бўлади.

18.8. Грин формуласи

(D) соҳада иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб, улар узлуксиз ва узлуксиз хусусий $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ ҳосилаларга эга бўлсин, у ҳолда ушбу

$$\int_{(K)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (18.11)$$

формула ўринли бўлади. (18.11) формулага Грин формуласи дейлади.

4-эслатма. Грин формуласи соҳа бўйича олинган икки карали интеграл билан шу соҳанинг чегараси бўйича олинган эгри чизикли интегрални боғловчи формула бўлиб ҳисобланади.

18.9. Грин формуласининг қўлланиши

Грин формуласидан фойдаланиб текис фигуранинг юзини эгри чизикли интеграл ёрдамида ҳисоблаш мумкин. Агар (18.11) формулада $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функцияларни шундай танлаш керакки,

натижада $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ ифода айнан 1га тенг бўлсин, у ҳолда икки қаррали интеграл $(D) \left((D) \subset R^2 \right)$ соҳанинг D юзини ифода қилади. Натижада соҳанинг D юзи ёпиқ эгри чизик бўйича олинган интеграл билан ифода қилинади. Масалан, а) агар (11) формулада $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=x$ деб танланса, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}=1$ бўлади. У ҳолда (D) соҳанинг юзи $D = \int_{(K)} x dy$

формула орқали ифода қилинади.

б) агар $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=0$ деб танланса, у ҳолда (D) соҳанинг юзи

$D = - \int_{(K)} y dx$ формула ўринли бўлади.

с) агар $P(x,y)=-\frac{1}{2}y$, $Q(x,y)=\frac{1}{2}x$ деб танланса, у ҳолда (D)

соҳанинг юзи учун $D = \frac{1}{2} \int_{(K)} x dy - y dx$ формулани ҳосил қиламиз.

18.10. Эгри чизикли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шarti

Чегараланган ёпиқ бир боғламли $(D) \left((D) \subset R^2 \right)$ соҳада $P(x,y)$ ва $Q(x,y)$ функциялар берилган бўлиб, улар (D) соҳада узлуксиз ва узлуксиз хусусий $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ ҳосилаларга эга. Шу шартларда қуйидаги теоремалар ўринли бўлади:

18.5-теорема. Агар (D) соҳада

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (18.12)$$

шарт ўринли бўлса, у ҳолда (D) соҳада қарашли ҳар қандай (K) ёпик содда эгри чизик бўйича олинган $\int_{(K)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ $((K) \subset (D))$ интеграл нолга тенг бўлади, яъни $\int_{(K)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

18.6-теорема. (D) соҳада қарашли ҳар қандай (K) содда ёпик эгри чизик бўйича олинган $\int_{(K)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ $((K) \subset (D))$ интеграл нолга тенг бўлса, у ҳолда қуйидаги $\int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ $((AB) \subset (D))$ интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизикнинг кўринишига боғлиқ бўлмайди.

18.7-теорема. Агар $\int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ $((AB) \subset (D))$ интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизик чизикнинг кўринишига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ифода (D) соҳада аниқланган бирор функциянинг тўлиқ дифференциалини ифодалайди.

18.8-теорема. Агар $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ифода (D) соҳада аниқланган бирор икки ўзгарувчили функциянинг тўлиқ дифференциалини ифодаласа, у ҳолда (18.12) шарт ўринли бўлади

$$\int_{(K)} (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy, \quad \text{бунда } (K): \text{ учлар } O(0;0), A(2;0) \text{ ва}$$

$B(0;2)$ нуқталарда учбурчакнинг чегараси - $(OABO)$.

Ечилиши. Берилган иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг интеграллаш контури 2- чизмада тасвирланган.

$(K) = (OABO)$ чизикнинг йўналиши 2- чизмада кўрсатилган. Берилган эгри чизикли интегрални ҳисоблаш учун учбурчакнинг ҳарбир томони бўйича (кўрсатилган йўналишда) интегрални ҳисоблаб, сўнггра эгри чизикли интегралнинг аддитивлик хоссасига асосан, учала томон бўйича ҳисобланган интегралларнинг қийматини қўшамиз.

1) учбурчак OA томонининг тенгламаси $y = 0, dy = 0$.

$$\int_{(OA)} 3x^2 dx = 3 \int_0^2 x^2 dx = 8.$$

2) учбурчак AB томонининг тенгламаси $x + y = 2$,

бунда $y = 2 - x, dy = -dx$.

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy &= \int_2^0 [3x^2 + (2 - x) - x + 2(2 - x)^2] dx = \\ &= \int_2^0 (5x^2 - 10x + 10) dx = \left(\frac{5}{3} x^3 - 5x^2 + 10x \right) \Big|_2^0 = -\frac{40}{3}. \end{aligned}$$

3) учбурчак BO томонининг тенгламаси $x = 0, dx = 0$,

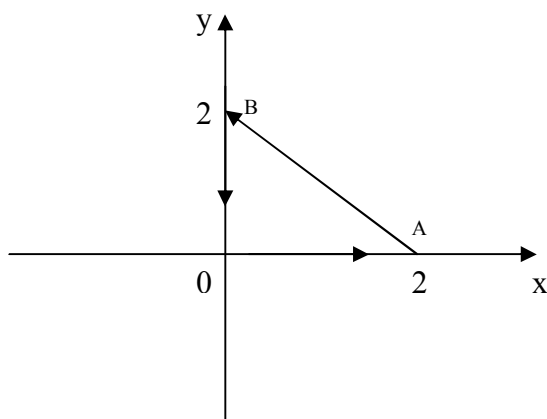
$$\int_{(BO)} -2y^2 dy = - \int_2^0 2y^2 dy = \frac{16}{3}.$$

Шундай қилиб, 1), 2) ва 3) лардан учала томон бўйича ҳисобланган интегралларнинг қийматини қўшамиз:

$$\int_{(ABO)} (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy = 8 - \frac{40}{3} + \frac{16}{3} = 0.$$

Бу натижани интегрални ҳисобланмасдан ҳам олиш мумкин, чунки интеграл остидаги $Pdx + Qdy = (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy$ ифода

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \right) \text{ шартни қаноатлантиради.}$$



Ўз-ўзини текшириш саволлари

18.1. Биринчи тур эгри чизикли интегралнинг таърифи ([2], 335-337 бетлар;).

18.2. Эгри чизикли интегрални оддий интегралга келтириш .

18.3. Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг хоссалари ([2], 339-340 бетлар;).

18.4. Биринчи тур эгри чизикли интегралнинг баъзи тадбиқлари ([2], 343-344 бетлар;).

а) Эгри чизикнинг статик моменти ва оғирлик марказини топиш.

б) Текис фигуранинг статик моменти ва оғирлик марказини топиш.

18.5. Иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг таърифи ([2], 344-349 бетлар;).

18.6. Иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теорема.

18.7. Эгри чизик тенгламаси ошкор шаклда берилганда иккинчи тур эгри чизикли интегрални ҳисоблаш.

18.8. Эгри чизик тенгламаси параметрик шаклда берилганда иккинчи тур чизикли интегрални ҳисоблаш.

18.9. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интеграллар орасидаги боғланиш ([2], 363 бет;).

18.10. Грин формуласи ([2], 354-356 бетлар;).

18.11. Эгри чизикли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шартлари ([2], 359-362 бетлар;).

18.12. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ифода бирор $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиш шarti.

18.13. Эгри чизикли интеграл орқали текис фигуранинг юзини ҳисоблаш.

19 –маъруза.

СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Режа:

- 19.1. Сирт тенгламалари. Сиртнинг юзи.
- 19.2. Биринчи тур сирт интеграллари.
- 19.3. Биринчи тур сирт интегралларини икки каррали ёрдамида ҳисоблаш.
- 19.4. Биринчи тур сирт интегралининг баъзи татбиқлари.
- 19.5. Бир томонли ва икки томонли сиртлар
- 19.6. Иккинчи тур сирт интеграллари.
- 19.7. Иккинчи тур сирт интегралини икки каррали интеграл ёрдамида ҳисоблаш.
- 19.8. Биринчи тур сирт интеграллари билан иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланиш.
- 19.9. Стокс ва Остроградский формулалари.

Таянч иборалари. Сиртнинг юзи, биринчи тур сирт интеграллари, икки каррали интеграл, иккинчи тур сирт интеграллари, уч каррали интеграл, Стокс ва Остроградский формулалари.

19.1. Сирт тенгламалари. Сирт юзи.

Сирт тенгламалари уч хил кўринишда берилади:

1. R^3 фазода $S ((x, y, z) \in S \subset R^3)$ сирт ушбу $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда S сирт *ошкормас* шаклда тенгламаси билан берилган дейлади. Масалан: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ -эллипсоида.

2. R^3 фазода $S ((x, y, z) \in S \subset R^3)$ сирт ушбу

$$z = f(x, y), ((x, y) \in D \subset R^2),$$

$$x = g(y, z), ((y, z) \in D_1 \subset R^2),$$

$$y = f(x, z), ((x, z) \in D_2 \subset R^2).$$

тенгламалардан бири билан берилган бўлса, у ҳолда S сирт *ошкор* шаклда тенгламаси билан берилган дейлади. Масалан: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ -эллиптик параболоида.

3. R^3 фазода $(x, y, z) \in S$ сирт ушбу

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases} \quad (u, v) \in (\Delta) \subset R^2.$$

тенгламалар системаси билан берилган бўлса, у ҳолда S сирт *параметрик* шаклдаги тенгламаси билан берилган дейлади. Масалан: $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v \quad (0 < u < a, \quad 0 < v < 2\pi)$ -геликоида.

Сирт интегралли деб аталувчи тушунчани киритишдан олдин σ сиртнинг юзини ҳисоблаш ҳақидаги масалани ҳал қиламиз.

Фараз қилайлик σ сирт $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган бўлсин, унинг Oxy текисликдаги проекцияси $(D) \subset R^2$ соҳа бўлади. Бу соҳада $z = z(x, y)$ функция узлуксиз ва $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Сиртнинг юзини аниқлаш учун $(D) \subset R^2$ соҳани ихтиёрий $\Delta S_k, \quad k = \overline{1, n}$ юзли n та қисмга бўламиз.

Сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси ΔS_k бўлган қисмини $\Delta \sigma_k$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб, σ сирт ҳам n та бўлакка бўлинган бўлади. Ҳар бир ΔS_k қисмда биттадан ихтиёрий (x_k, y_k) нуқта танлаб оламиз, σ сиртда унга $M_k(x_k, y_k, z_k)$ нуқта мос келади, бунда $z_k = z(x_k, y_k)$. $M_k(x_k, y_k, z_k)$ нуқта орқали сиртга уринма текислик ўтказамиз:

$$z_x(x_k, y_k)(x - x_k) + z_y(x_k, y_k)(y - y_k) - (z - z_k) = 0$$

бунда x, y, z -текислик исталган нуқтасининг координаталари, $x_k, y_k, z_k = z(x_k, y_k)$ - уриниш нуқтасининг координаталари,

$\vec{n}_k = \{z_x(x_k, y_k); z_y(x_k, y_k); -1\}$ текисликка перпендикуляр вектор (шу текисликнинг нормал вектори). Агар нормал $\vec{n}_k = \{z_x(x_k, y_k); z_y(x_k, y_k); -1\}$ вектор билан Oz ўқ орасидаги бурчакни γ_k билан белгиласак, у ҳолда маълум формулага кўра,

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{n_k} = \frac{1}{\sqrt{1 + [z_x(x_k, y_k)]^2 + [z_y(x_k, y_k)]^2}}$$

ни ҳосил қиламиз $\cos \gamma_k > 0$, чунки γ_k - ўткир бурчак). $M_k(x_k, y_k, z_k)$ нуқтадаги уринма текисликнинг ΔS_k га проекцияланган қисмининг юзини $\Delta \rho_k$ билан белгилаймиз, у ҳолда $\Delta S_k = \Delta \rho_k \cos \gamma_k$ бунда

$$\Delta \rho_k = \frac{\Delta S_k}{\cos \gamma_k} = \sqrt{1 + [z_x(x_k, y_k)]^2 + [z_y(x_k, y_k)]^2} \Delta S_k.$$

Ҳосил қилинган юзаларни қўшиб уринма текисликларнинг ҳамма бўлаклари ташкил қилган сиртнинг юзини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [z_x(x_k, y_k)]^2 + [z_y(x_k, y_k)]^2} \Delta S_k. \quad (19.1)$$

Бу йиғиндини σ сиртнинг юзига тақрибан тенг деб ҳисоблаш мумкин. σ сирт юзининганиқ қиймати учун ясалган сиртнинг ΔS_k юзачаларнинг энг катта d_p диаметри нолга интилган шартдаги (19.1) юзининг лимити олинади. Агар бу юзнинг катталигини S билан белгиласак,

$$S = \lim_{d_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [z_x(x_k, y_k)]^2 + [z_y(x_k, y_k)]^2} \Delta S_k$$

га эга бўламиз. Тенгликнинг ўнг томандаги йиғинди $\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$

функциянинг интеграл йиғиндисидир. Бу функция $(D) \subset R^2$ соҳада узлуксиз, демак, у интегралланувчи. Шунинг учун

$$\begin{aligned} S &= \lim_{d_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [z_x(x_k, y_k)]^2 + [z_y(x_k, y_k)]^2} \Delta S_k = \\ &= \iint_{(D)} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy$$

формула $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган S сиртнинг юзи ҳисобланадиган формулани ифодалайди.

19.1 – масала. Ушбу $z = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$ сиртнинг $z = 0$ текислик билан кесилган қисмининг юзини ҳисобланг.

Ечилиши. Талаб қилинган сиртнинг юзи, ушбу

$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$ формуласи бўйича ҳисобланади, бунда

$$z'_x = -3x(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad z'_y = -3y(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} = \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2},$$

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

бунда $z = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$ сиртнинг $z = 0$ текислик билан кесилган қисмининг xOy текисликдаги проекцияси (D) соҳанинг чегараси: $0 = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$

чизикдан, яъни $x^2 + y^2 = 1$ айланадан иборат. $S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2} dx dy,$

интегрални ҳисоблаш учун қутб координаталар системасига ўтамыз:

$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$ Демак,

$$\begin{aligned} S &= \iint_{(D)} \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 9\rho^4} d\rho = \\ &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{3\rho^2}{2} \sqrt{1 + 9\rho^4} + \frac{1}{2} \ln(3\rho^2 + \sqrt{1 + 9\rho^4}) \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})). \end{aligned}$$

19.2. Биринчи тур сирт интеграллари

R^3 фазода силлиқ ёки бўлакли силлиқ икки томонли (S) сирт берилган бўлсин. Бу сиртда $f(x, y, z)$ функция аниқланган. (S) сиртнинг P бўлишини ва бу бўлишининг ҳар бир (S_k) $k = \overline{1, n}$ бўладиган ихтиёрий $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)$ нуқтани олиб, бу нуқтадаги берилган функциянинг қийматига (S_k) сиртнинг юзи S_k ни кўпайтириб ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) S_k$$

интеграл йиғинди тузамиз.

19.1-теорема. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (2) бўлишлари кема – кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос келган (3) интеграл йиғиндилар $\{\sigma_m\}$ кетма – кетлиги $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)$ нуқталарни танлашга боғлиқ бўлмаган ҳолда, ҳамма вақт битта I сонга интелса, бу I сонга $f(x, y, z)$ функциядан (S) сирт бўйича олинган биринчи тур интеграли дейилади ва у

$$I = \iint_{(S)} f(x, y, z) dS$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) S_k = I = \iint_{(S)} f(x, y, z) dS$$

бунда dS элементар сирт юзи.

19.3. Биринчи тур сирт интегралларини икки каррали ёрдамида ҳисоблаш

R^3 да (S) сирт юзининг $z = z(x, y)$ тенгламаси билан берилган бўлсин, бунда $z(x, y)$ функция чегараланган ёпик $(D) \cap ((D) \subset R^2)$ соҳада узлуксиз ва $z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга.

19.2-теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича олинган

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS$$

биринчи тур сирт интеграли мавжуд ва ушбу

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy \quad (19.2)$$

формула билан ҳисобланади.

2-эслатма. Агар (S) сирт умумий ҳолда узининг параметрик $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), ((u, v) \in (\Delta))$ тенгламаси билан берилган

бўлиб, унга $f(x, y, z)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда биринчи тур сирт интегралли мавжуд ва

$$\begin{aligned} \int\limits_{(S)} f(x, y, z) dS &= \int\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \int\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \end{aligned}$$

формула ўринли бўлади, бунда

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ A &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3-эслатма. (S) сирт $x = x(y, z)$, $(y = y(x, z))$ тенглама билан берилган бўлиб, $x(y, z)$ ($y(x, z)$) функция (D) соҳада узлуксиз ва $x'_y(y, z)x'_{z'}(y, z)(y'_z(x, z), y'_x(x, z))$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функцияси (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциядан (S) сирт бўйича олинган биринчи тур сирт интеграла мавжуд бўлади ва

$$\begin{aligned} \int\limits_{(S)} f(x, y, z) dS &= \int\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x'^2_y(y, z) + x'^2_z(y, z)} dy dz, \\ \left(\int\limits_{(S)} f(x, y, z) dS &= \int\limits_{(D)} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y'^2_x(x, z) + y'^2_z(x, z)} dx dz \right) \end{aligned}$$

формула ўринли бўлади.

19.2 – масала. Ушбу $\int\limits_{(S)} (4x - 4y - z) ds$ интегрални ҳисобланг, бунда (S)

сирт - $(P): x + 2y + 2z = 4$ текисликнинг $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ координаталар текисликлари билан кесилган қисми.

Ечилиши. Масала шартидан кўринадики, (S) - учбурчакли пирамиданинг сирти бўлади ва унинг шакли 19.1- чизмада тасвирланган. Интеграл остидаги функция $f(x, y, z) = 4x - 4y - z$. (S) сирт

тенгламасини $z = 2 - \frac{1}{2}x - y$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу функциядан

$z'_x = -\frac{1}{2}$, $z'_y = -1$ хусусий ҳосилалар олиб, биринчи тур сирт интегралини

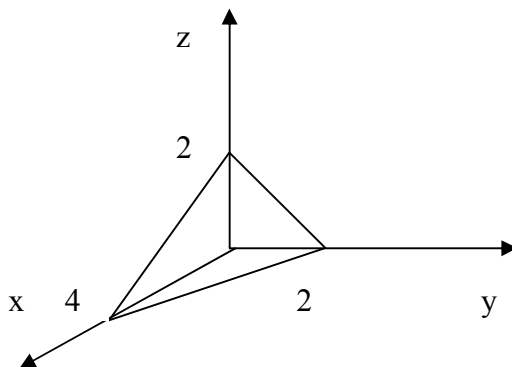
(19.2) формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (4x - 4yz) ds &= \iint_{(D)} \left(4x - 4y - 2 + \frac{1}{2}x + y \right) \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dx dy = \\ &= \frac{3}{2} \iint_{(D)} \left(\frac{9}{2}x - 3y - 2 \right) dx dy, \end{aligned}$$

бунда $(D) = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x \right\}$. Энди икки қаррали

интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (4x - 4y - z) ds &= \frac{3}{2} \int_0^4 dx \int_0^{2-\frac{1}{2}x} \left(\frac{9}{2}x - 3y - 2 \right) dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^4 \left(\frac{9}{2}xy - \frac{3}{2}y^2 - 2y \right) \Big|_0^{2-\frac{1}{2}x} dx = \frac{3}{2} \int_0^4 \left(-6 + 12x - \frac{21}{8}x^2 \right) dx = 24. \end{aligned}$$



19.1- чизма.

19.4. Биринчи тур сирт интегралининг баъзи татбиқлари

Фараз қилайлик S силлиқ ёки бўлакли силлиқ сирт бўйича масса узлуксиз тақсимланган бўлиб, сиртнинг ҳар бир нуқтасида $\rho(x, y, z)$ зичлиги узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) ds,$$

бунда M - S сиртнинг массаси;

$$x_c = \iint_S x\rho(x,y,z)ds, \quad y_c = \iint_S y\rho(x,y,z)ds, \quad z_c = \iint_S z\rho(x,y,z)ds,$$

бунда x_c, y_c, z_c - S сиртнинг оғирлик марказининг координаталари;

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)ds,$$

бунда I_z - Oz ўққа нисбатан S сиртнинг инерция моменти.

19.5. Бир томонлама ва икки томонлама сиртлар

σ силлиқ сиртда ихтиёрий M нуқтани оламыз ва ундан сиртга нормал қилиб $\vec{n}$ векторни ўтказамиз. M нуқтадан ўтувчи ва сиртнинг чегаралари билан умумий нуқтага эга бўлмаган бирор ёпиқ контурни қараб чиқамиз. Агар M нуқтани шу контр бўйича $\vec{n}$ вектор билан бирга бу вектор σ силлиқ сиртга доим нормал бўладиган қилиб, узлуксиз кўчирилса, у ҳолда M нуқта бошланғич вазиятига нормалнинг ўша йўналиши билан ёки қарама-қарши йўналиши билан қайтиб келади.

Биринчи ҳолда сирт *икки томонлама* сирт, иккинчи ҳолда эса *бир томонлама* сирт дейилади. Масалан, текислик, эллипсоида, сфералар икки томонлама сиртга мисол бўлади, Мёбиус япроғи эса, бир томонлама сиртга энг содда мисолдир.

Сиртнинг маълум томонини танлаш сиртни *ориентация қилиш* дейилади. Агар сирт ориентацияси танланган бўлса, у ҳолда сирт *ориентацияланган* дейилади.

19.6. Иккинчи тур сирт интеграллари

$f(x,y,z)$ функция (S) сиртда аниқланган бўлсин. Бу сиртнинг маълум бир томонини белгилаймиз. (S) сиртнинг P бўлиниши ва бўлишдан ихтиёрий $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ нуқтани олиб, бу нуқтадаги $f(x,y,z)$ нинг қийматга (S_i) сиртнинг XOY текисликдаги проекцияси (D_i) нинг юзи D_i га кўпайтириб қуйидаги

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) D_i$$

интеграл йиғиндини тузамиз.

19.2- таъриф Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (12) бўлишлар кетма – кетлиги $\{\rho_m\}$ олинган ҳам, унга мос (13) интеграл йиғиндилар кетма – кетлиги $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ нуқталарни танлашга боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта чекли I сонга интилса, бу I сонга $f(x, y, z)$ функциядан (S) сиртнинг белгиланган томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли дейилади ва у

$$\iint_{(S)} (x, y, z) dx dy$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) D_i$$

4– эслатма. Иккинчи тур сирт интегралининг таърифидан кўринадики, (S) сиртнинг белгиланган томонини ўзгартирган иккинчи тур сирт интегралнинг қиймати тескарисига ўзгаради.

Худди юқоридагидек

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz, \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx$$

иккинчи тур сирт интеграллари ҳам таърифланади.

Агар (S) сиртда $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб, ушбу

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dy dx, \iint_{(S)} Q(x, y, z) dz dy, \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dz$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dy dx, \iint_{(S)} Q(x, y, z) dz dy, \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dz$$

йиғинди иккинчи тур сирт интеграллар умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\int\int_{(S)} P(x, y, z) dy dx, \int\int_{(S)} Q(x, y, z) dz dy, \int\int_{(S)} R(x, y, z) dx dz$$

каби белгиланади. Демак,

$$\begin{aligned} & \int\int_{(S)} P(x, y, z) dy dx + \int\int_{(S)} Q(x, y, z) dz dy + \int\int_{(S)} R(x, y, z) dx dz = \\ & = \int\int_{(S)} P(x, y, z) dy dx + \int\int_{(S)} Q(x, y, z) dz dy + \int\int_{(S)} R(x, y, z) dx dz. \end{aligned}$$

19.7. Иккинчи тур сирт интегрални икки каррали интеграл ёрдамида ҳисоблаш

R^3 фазода (S) сирт $z = z(x, y)$ тенгламаси билан берилган бўлиб, $z = z(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ (D) соҳада узлуксиз $z'_x(x, y)$ ва $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

19.2 – теорема. Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциядан (S) сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграл мавжуд бўлади ва у

$$\int\int_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \int\int_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (19.3)$$

формула билан ҳисобланади.

19.3 – масала. Қуйидаги $J = \int\int_{(S)} x dy dz + dx dz + xz^2 dx dy$ 2- тур сирт интегрални сиртнинг кўрсатилган томони бўйича ҳисобланг, бунда $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сфера биринчи октантдаги қисмининг юқори томони.

Ечилиши. Берилган (S) сиртнинг Oyz , Oxz , Oxy текисликлардаги проекциясини, мос равишда, (D_x) , (D_y) ва (D_z) каби белгилаб, берилган J интегрални учта:

$$J_1 = \int\int_{(S)} x dy dz, J_2 = \int\int_{(S)} dx dz, J_3 = \int\int_{(S)} xz^2 dx dy.$$

интеграллар йиғиндиси шаклида тасвирлаймиз. J_1 интегралда $P = x, Q = R = 0$; J_2 интегралда $Q = 1, P = R = 0$; J_3 да эса, $P = Q = 0, R = xz^2$. Ҳар бир интеграл учун (19.3) формулани қўллаймиз:

$$J_1 = \iint_{(D_x)} \sqrt{1-y^2-z^2} dydz, \quad J_2 = \iint_{(D_y)} dx dz, \quad J_3 = \iint_{(D_z)} x(1-x^2-y^2) dx dy.$$

$(D_x), (D_y)$ ва (D_z) соҳалар мос координаталар текисликларида жойлашган радиуси 1 га тенг бўлган доиранинг тўртдан бир қисмига тенг. Шунинг учун $J_2 = \frac{\pi}{4}$. J_1 ва J_3 интегралларда қутб координаталар системасига ўтиб, ҳисоблаш бажарамиз:

$$J_1 = \iint_{(D_x)} \sqrt{1-y^2-z^2} dydz = \iint_{(D_x)} \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2)^{1/2} d(1-\rho^2) = \frac{\pi}{6}.$$

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho \cos \varphi (1-\rho^2) d\rho = \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

$$\text{Демак, } J = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{15} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}.$$

19.8. Биринчи тур сирт интеграли билан иккинчи тур сирт интеграли орасидаги боғланиш

(S) сирт ва унда берилган $f(x, y, z), P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялар тегишли шартларни қаноатлантирганда қуйидаги биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланишни берувчи формулалар

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) dydz &= \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \alpha dS, \\ \iint_{(S)} f(x, y, z) dzdx &= \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \beta dS, \\ \iint_{(S)} f(x, y, z) dxdy &= \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \gamma dS, \end{aligned}$$

умумий ҳолда

$$\iint_{(S)} P dydz + \iint_{(S)} Q dzdx + \iint_{(S)} R dxdy = \iint_{(S)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

ўринли бўлади.

Агар (S) сирт тенгламаси умумий ҳолда параметрик шаклда, яъни

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad ((u, v) \in (\Delta))$$

берилган (19) сирт интеграли ушбу

$$\int_{(S)} \int P dydz + \int_{(S)} \int Q dzdx + \int_{(S)} \int R dxdy = \int_{(\Delta)} \int (AP + BQ + CR) dudv$$

формула ёрдамида оддий икки каррали интегралга келтирилиди, бунда

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad dS = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

19.9. Стокс ва Остроградский формулалари

19.9.1. Стокс формуласи. (S) - сода силлиқ сирт ўзининг параметрик $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(x, y)$, $(u, v) \in (\Delta)$ тенгламаси билан берилган бўлиб, у (K) - содда (K) чизиқ билан чегараланган бўлсин. (Δ) соҳа эса (L) чизиқ билан чегараланган бўлсин. (S) сиртнинг аниқ бир томонини белгилаймиз, яъни (S) ни орендациялаймиз.

Ушбу

$$\int_{(K)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(S)} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dz dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \quad (19.4)$$

формулага эга бўламиз. Бу формулага Стокс формуласи дейилади. Демк, формуласи сирт интеграли билан, унинг чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интеграл орасидаги боғланиш ифода қилар экан. Стокс формуласидан хусусий ҳолда (S) сирт сифатида XOY текисликдаги (D) соҳа олинса, $z = 0$ дейиш Билан Грин формуласи келиб чиқади. (19.4) формуланинг унинг томонидаги иккинчи тур сирт интегралини биринчи тур сирт интегралига айлантирсак, натижада

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(S)} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right] ds \quad (19.5)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулага ҳам Стокс формуласи дейилади.

19.4— масала. Стокс формуласидан фойдаланиб, қуйидаги эгри чизикли интегрални ҳисобланг:

$$\oint_{(K)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

бунда $(K): x^2 + y^2 + z = 3$ параболоид билан $x + y + z = 2$ текисликнинг кесишиши натижасида ҳосил бўлган ёпиқ чизик (мусбат йўналиши).

Ечилиши. Берилган интегрални Стокс формуласидан фойдаланиб ечамиз: берилган интегралда $P = y^2 - z^2, Q = z^2 - x^2, R = x^2 - y^2$ бўлиб,

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2(z + y), \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2(x + z), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(y + x).$$

(19.5) Стокс формуласига асосан, яъни

$$\begin{aligned} J &= -2 \iint_{(S)} (z + y)dydz + (x + z)dzdx + (x + y)dxdy = \\ &= -2 \iint_{(S)} [(z + y)\cos \alpha + (x + z)\cos \beta + (x + y)\cos \gamma] ds, \end{aligned}$$

бунда $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$J = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{(S)} (x + y + z) ds = -\frac{8}{\sqrt{3}} \iint_{(S)} ds.$$

(S) сиртда $z = 2 - x - y$ бўлгани учун $ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dxdy = \sqrt{3} dxdy$.

Демак, $J = -8 \iint_{(D)} dxdy$, бунда $(D) - (S)$ сиртнинг xOy текисликдаги

проекцияси.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}, \text{ системадан } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \text{ ни топамиз.}$$

Шундай қилиб, (S) сиртнинг xOy текисликдаги проекцияси бўлган (D) соҳа - радиуси $\sqrt{\frac{3}{2}}$ га тенг бўлган доирадан иборат экан.

$$\text{Демак, } \iint_{(D)} dx dy = \frac{3}{2} \pi, \quad J = -12\pi.$$

19.9.2.Остроградский формуласи. R^3 фазодан юқоридан $z = z_2(x, y)$ тенглама билан берилган (S_2) сирт билан, қуйидаги $z = z_1(x, y)$ тенглама билан берилган, (S_1) сирт билан, ён томондан эса ясовчилар OZ ўқиға паралел бўлган цилиндрик (S_3) сирт билан чегараланган (V) соҳа берилган бўлсин. (V) соҳада $R(x, y, z)$ функция берилган ва узлуксиз, узлуксиз хусусий $\frac{\partial R}{\partial z}$ ҳосилаға эға бўлсин. Шу шартларда

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S)} R dx dy$$

формула ўринли бўлади, бунда $(S), (V)$ жисмни чегаралановчи сирт (26) нинг ўнг томондаги интеграл сиртнинг ташқи томони бўйича олинган.

Ушбу

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (19.6)$$

Бу формулага Остроградский формуласи деб аталади. (19.6) нинг чап томонидаги иккинчи тур сирт интегралини биринчи тур сирт интегралиға айлантирсак, у ҳолда

$$\iint_{(S)} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] ds = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ҳосил қиламиз. Бу формулага ҳам *Остроградский формуласи* дейилади, бунда $\alpha, \beta, \gamma(S)$ сирт ташқи нормалнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари.

Шундай қилиб Остроградский формуласи (V) соҳа бўйича олинган уч қаррали интеграл билан (V) нинг сирти бўйича олинган сирт интегрални орасидаги боғланишни ифода қилар экан.

19.5— масала. Остроградский формуласидан фойдаланиб сирт интегрални ҳисобланг:

$$\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

бунда $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ сферанинг ташқи томони.

Ечилиши. Берилган 2-тур сирт интегрални ушбу

$$\iint_{(S)} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

Остроградский формуласи ёрдамида ечамиз: $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$,

$$(V) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2\}.$$

Остроградский теоремасининг ҳамма шартлари бажарилади.

$$\iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2 \iiint_{(V)} (x + y + z) dxdydz.$$

Кейинги уч қаррали интегрални ҳисоблаш учун сферик координаталар системасига ўтамыз:

$$x = a + \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = b + \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c + \rho \cos \theta,$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq R$. Бу алмаштиришда якобиан $J = \rho^2 \sin \theta$ ва

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy &= 2 \iiint_{(V)} (x + y + z) dxdydz = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin \theta [a + b + c + \rho(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin \theta + \cos \theta)] d\rho = \\ &= \frac{8}{3} \pi (a + b + c) R^3. \end{aligned}$$

Ўз-ўзини текшириш саволлари

1. Сиртнинг берилиш усуллари.
2. Силлиқ сирт тушунчаси.

3. Сиртнинг юзи тушунчаси.
4. Биринчи тур сирт интегралининг таърифи ([2], 364-365 бетлар;).
5. Биринчи тур сирт интегралининг мавжудлик шarti ([2], 365-369 бетлар;).
6. Биринчи тур сирт интегралининг хоссалари.
7. Биринчи тур сирт интегралини ҳисоблаш ([2], 369-370 бетлар;).
8. Биринчи тур сирт интегралининг тадбиқлари: а) сиртнинг юзи; б) сиртнинг массаси; в) сиртнинг оғирлик марказини топиш; г) сиртнинг $0x, 0y, 0z$ координаталар ўқларига нисбатан инерция моментлари.
9. Бир томонли ва икки томонли сиртлар тушунчаси.
10. Иккинчи тур сирт интегралнинг таърифи ([2], 372-374 бетлар;).
11. Иккинчи тур сирт интегралининг мавжудлик шarti ([2], 374-376 бетлар;).
12. Иккинчи тур сирт интегралининг хоссалари.
13. Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланиш ([2], 377 бет;).
14. Иккинчи тур сирт интегралининг ҳисоблаш ([2], 376-377 бетлар;).
19. Стокс формуласи ([2], 378-380 бетлар;).
16. Остроградский формуласи ([2], 380-382 бетлар;).

20 –маъруза.

МАЙДОНЛАР НАЗАРИЯСИ

Режа:

- 20.1. Скаляр ва вектор майдон.
- 20.2. Йўналиш бўйича ҳосила ва скаляр майдони градиенти.
- 20.3. Вектор чизиклари ва вектор трубкаси.
- 20.4. Потеналь майдон.
- 20.5. Сиртдан ўтувчи вектор майдон оқими. Вектор майдоннинг дивергенцияси. Соленоидаль майдон.
- 20.6. Вектор майдоннинг циркуляцияси. Вектор майдоннинг ротори.
- 20.7. Иккинчи тартибли дифференциал амаллар.

Таянч иборалар. Скаляр ва вектор майдон, йўналиш бўйича ҳосила, градиент, вектор чизиклар, потеналь майдон, оқим, дивергенция, Соленоидаль майдон, циркуляция, ротор, иккинчи тартибли дифференциал амаллар.

20.1. Скаляр ва вектор майдон

20.1– таъриф. E соҳанинг ихтиёрий $\forall(M)$ нуқтасига бирор қонун бўйича $U(M)$ сон катталиқ мос қўйилган бўлса, у ҳолда бу соҳада *скаляр майдон берилган* дейилади.

Скаляр майдоннинг берилиши, $U(M)$ скаляр функциянинг берилишига эквивалент.

$U(M)$ скаляр майдоннинг бирор Декарт координаталар системасида берилиши $U(x, y, z)$ функциянинг берилишига эквивалент. Биз бу функцияни бундан кейин узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фарз қиламиз.

Скаляр майдоннинг мисоли сифатида: 1) Қиздирилган жисмнинг ичкарисидаги температуралар майдони; 2) Потенциал энергиялар майдони ва ҳ.к. ларни кўрсатиш мумкин.

Агар скаляр $U(M)$ функция t вақтга боғлиқ бўлса, майдон стационар бўлмаган майдон дейилади.

20.2– таъриф. E соҳанинг ҳар бир M нуқтасига бирор $\vec{A}(M)$ вектор мос қўйилган бўлса, у ҳолда E соҳада *вектор майдон берилган дейилади* (вектор функция берилган дейилади).

Вектор майдоннинг беришили $\vec{a}(M)$ вектор функциянинг берилишига эквивалент бўлади.

Агар фазода $\vec{A}(M)$ вектроли майдон берилган бўлиб, бу ерда Декарт координаталар системаси ўрнатилган бўлса, у ҳолда $\vec{A}(M)$ вектор N функция

$$\vec{A}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

шаклда тасвирланади. Биз бундан кейин $P; Q; R$ функцияларни узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

20.2. Йўналиш бўйича ҳосила ва скаляр майдон градиенти

Бирор E соҳада $U(M)$ скаляр майдон берилган бўлсин. Скаляр майдондан барча бир–бирига яқин M_0 ва M нуқталарни оламиз ва

$$\frac{U(M) - U(M_0)}{h}$$

ифодани тузамиз, бунда $h = |M_0M|$. $U(M)$ скаляр майдонда бирор $\vec{e}$ йўналиш берилган бўлсин. M_0M чизиқнинг йўналиши $\vec{e}$ нинг йўналиши билан мос тушсин.

20.3– таъриф. Агар $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{U(M) - U(M_0)}{h}$ лимит мавжуд бўлса, бу лимитга $U(M)$ скаляр майдоннинг M_0 нуқтадаги $\vec{e}$ йўналиш бўйича ҳосиласи дейилади ва $y \frac{\partial U(M)}{\partial \vec{e}}$ каби белгиланади.

$\frac{\partial U(M)}{\partial e}$ ҳосила $U(M)$ скаляр майдоннинг $\vec{e}$ йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини ифодалайди. $\frac{\partial U}{\partial e}$ ҳосилани ҳисоблаш учун Декарт координата системасини оламиз. У ҳолда $U(M)$ скаляр майдон $U(x, y, z)$ шаклида ифода қилинади. M ва M_0 нуқталарнинг координаталари мос равишда $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ бўлсин. У ҳолда $M_0M = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ бирлик вектори. У ҳолда $M(x, y, z)$ нуқтанинг координаталари $x = x_0 + h \cos \alpha, y = y_0 + h \cos \beta, z = z_0 + h \cos \gamma$ каби бўлади.

$$U(x = x_0 + h \cos \alpha, y = y_0 + h \cos \beta, z = z_0 + h \cos \gamma)$$

скаляр майдоннинг $\vec{e}$ йўналиш бўйича ҳосиласи

$$\frac{\partial U(M)}{\partial e} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma \quad (20.1)$$

формула билан топилади.

$U(x, y, z)$ скаляр майдон берилган бўлсин. $U(x, y, z)$ функция узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

20.4– таъриф. Компанентлари $\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$ бўлган векторларга

$U(M)$ скаляр майдон *градиенти* дейилади ва у

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

каби белгиланади.

(20.1) тенгликнинг ўнг томони $\text{grad} U$ ва $\vec{e}$ векторнинг скаляр кўпайтмасини ифодалайди, яъни

$$\frac{\partial U}{\partial e} = (\text{grad} U, \vec{e})$$

Скаляр майдон градиенти қуйидаги хоссаларга эга:

1⁰. Градиент сиртга ўтказилган нормал бўйича йўналган бўлади

2⁰. Агар $\vec{e}$ нинг йўналиши $gradU$ нинг йўналиши билан мос тушса, $\frac{\partial U}{\partial e}$ йўналиш бўйича ҳосила ўзининг энг ката қийматига эришади. Ҳақиқатан ҳам $gradU$ билан $\vec{e}$ нинг орасидаги $L\varphi = 0$ бўлади, $\cos\varphi = 1$

$$\frac{\partial U}{\partial e} = (gradU, \vec{e}) = |gradU| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos\varphi,$$

$$\text{Бундан } \max \frac{\partial U}{\partial e} = |gradU| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \text{ бўлади.}$$

3⁰. Қолган ҳамма йўналишлар бўйича $\frac{\partial U}{\partial e}$ ифода нолдан фарқли қиймат қабул қилади, ва у абсолют қиймати бўйича $|gradU|$ дан ошмайди, яъни

$$\frac{\partial U}{\partial e} = |gradU| |\cos\varphi| < |gradU|$$

Градиентнинг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларни исботлаш қийин эмас:

- 1) $grad(U + C) = gradU$ ($C = const$),
- 2) $grad(CU) = CgradU$,
- 3) $grad(U + V) = gradU + gradV$
- 4) $grad(U, V) = UgradV + VgradU$
- 5) $gradf(U) = f'(U)gradU$

20.1- мисол. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ скаляр майдоннинг $P_1(-2;3;6)$ нуқтадаги $\vec{e} = P_1P_2$, $\vec{e}$ йўналиш бўйича ҳосиласини топинг, бунда $P_2(-1;1;4)$.

Ечилиши. Берилган u – скаляр майдоннинг P_1 нуқтадаги $\vec{e} = P_1P_2$ йўналиш бўйича ҳосиласини, (20.1) формула орқали ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{P_1} = -\frac{2}{7}, \quad \frac{\partial u(P_1)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{P_1} = \frac{3}{7},$$

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{P_1} = \frac{6}{7}.$$

$\vec{P_1 P_2}$ – вектор йўналиши бўйича йўналган $\vec{e^0}$ бирлик вектор

$$\vec{e^0} = \frac{\vec{P_1 P_2}}{|\vec{P_1 P_2}|} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right), \text{ бунда } \cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

(20.1) формулага асосан,

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial \vec{e}} = \left(-\frac{2}{7} \right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{20}{21}.$$

20.2- мисол. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ скаляр майдоннинг $P_1(-2;3;6)$

нуқтадаги градиентини топинг.

Ечилиши. Берилган u скаляр майдоннинг $P_1(-2;3;6)$ нуқтадаги градиенти ушбу

$$\text{gradu}(P_1) = \frac{\partial u(P_1)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(P_1)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(P_1)}{\partial z} \vec{k}$$

формула бўйича ҳисобланади. Равшанки,

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial x} = -\frac{2}{7}, \quad \frac{\partial u(P_1)}{\partial y} = \frac{3}{7}, \quad \frac{\partial u(P_1)}{\partial z} = \frac{6}{7}.$$

Демак,

$$\text{gradu}(P_1) = -\frac{2}{7} \vec{i} + \frac{3}{7} \vec{j} + \frac{6}{7} \vec{k}.$$

20.3- мисол. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ скаляр майдоннинг $P_1(-2;3;6)$ ва $P_2(-1;1;4)$ нуқталардаги градиентлари орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. $\text{gradu}(P_1)$ ва $\text{gradu}(P_2)$ лар орасидаги бурчак ушбу

$$\cos \varphi = \frac{(\text{gradu}(P_1), \text{gradu}(P_2))}{|\text{gradu}(P_1)| \cdot |\text{gradu}(P_2)|} \quad (20.2)$$

формула бўйича ҳисобланади:

Скаляр майдоннинг P_2 нуқтадаги градиентини топамиз:

$$\begin{aligned} \text{grad}(P_2) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \bigg|_{P_2} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \bigg|_{P_2} \vec{j} + \\ &+ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \bigg|_{P_2} \vec{k} = \frac{-1}{3\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \vec{k}. \end{aligned}$$

Энди (20.2) формулага асосан,

$$\cos \varphi = \frac{\frac{2}{21\sqrt{2}} + \frac{3}{21 \cdot \sqrt{2}} + \frac{24}{21 \cdot \sqrt{2}}}{1 \cdot 1} = \frac{29}{21\sqrt{2}}$$

ёки

$$\varphi = \arccos \frac{29}{21\sqrt{2}} \approx \arccos 0,9764.$$

20.3. Вектор чизиқлари ва вектор трубкаси

E соҳада $\vec{A}(M)$ вектор майдон аниқланган бўлсин.

20.5– таъриф. Агар E да ётган (K) чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги уринманинг йўналиши, шу нуқтада $\vec{A}$ векторнинг йўналишига мос тушса, у ҳолда (K) чизиққа *вектор чизиги* дейилади.

Агар вектор майдон $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ кўринишда бўлса, у ҳолда вектор чизигининг тенгламаси $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ шаклда бўлади. Буни

дифференциаллаш натижасида $\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$ икки параметрли вектор

чизиқлар ҳосил бўлади. E соҳада (S) сирт берилган бўлсин, бу сиртда $\vec{A}(M)$ майдон берилган.

20.5– таъриф. Агар (S) сиртнинг ҳар бир нуқтасига ўтказилган нормал, шу нуқтадаги $\vec{A}$ векторга ортаганал бўлса, у ҳолда $\vec{A}(M)$ векторли майдон *вектор трубка* дейилади.

Демак, векторли трубка, сиртнинг бир қисми бўлиб, у бутун вектор чизиклардан ташкил топган бўлади. Бу чизикларнинг ҳаммаси вектор трубканинг ичида ёки ташқарисида жойлашган бўлади.

20.4-мисол. а) $u(x, y) = xy$ скаляр майдоннинг сатҳ чизигини аниқланг;

б) $u(x, y, z) = \sqrt{R - x^2 - y^2 - z^2}$ скаляр майдоннинг сатҳ сиртини аниқланг;

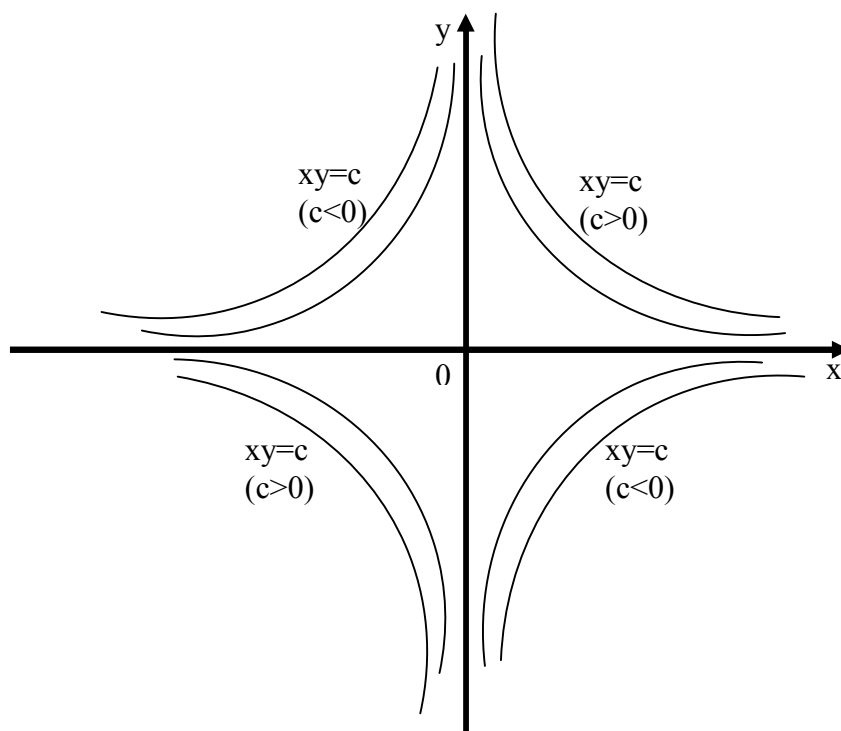
в) $\vec{a} = [\vec{r}, \vec{c}]$, $\left(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, c = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \right)$ векторли майдоннинг

вектор чизигини аниқланг.

Ечилиши. а) Сатҳ чизиги қуйидаги тенглама орқали аниқланади:

$$xy = c, \text{ бунда } c = \text{const}$$

Демак, берилган скаляр майдоннинг сатҳ чизиклари гиперболоидлар оиласидан иборат (20.1-чизма).



20.1-чизма

Агар $c = 0$ бўлса, $xy = 0$ ёки $x = 0$, $y = 0$

b) Берилган скаляр майдоннинг сатҳ сирти қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = c \text{ ёки } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - c^2.$$

Хусусий ҳолда, $c = 0$ да $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера, $c = R$ бўлганда эса $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Бу ҳолда сфера нуқтага айланади, яъни координата бошини ифодалайди.

с) Берилган $\vec{a}$ – векторли майдоннинг вектор чизиғи ушбу

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

формула орқали аниқланади. Равшанки,

$$\vec{a} = [\vec{r}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (cy - bz)\vec{i} + (az - cx)\vec{j} + (bx - ay)\vec{k}, \quad \text{бунда}$$

$$a_x(x, y, z) = (cy - bz), \quad a_y(x, y, z) = (az - cx), \quad a_z(x, y, z) = (bx - ay)$$

Бу ҳолда $\vec{a}$ -векторли майдоннинг дифференциал тенгламаси, ушбу

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - cy}$$

кўринишга эга бўлади. Биринчи касрнинг сурат ва махражини x га, иккинчи касрни y га, учинчи касрни эса z га кўпайтириб, ҳадма–ҳад кўшамиз, ҳамда пропорциялар хоссасига асосан, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

Шундай қилиб,

$$xdx + ydy + zdz = 0 \text{ ёки } d(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$$

Худди шундай, биринчи касрнинг сурат ва махражини a га, иккинчини b га, учинчини c га кўпайтириб, сўнгра ҳадма – ҳад кўшиш натижасида,

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{adx + bdy + cdz}{0}$$

эга бўламиз. Бундан

$$adx + bdy + cdz = 0 \quad \text{ёки} \quad ax + by + cz = C_2$$

Шундай қилиб, векторли майдон вектор чизиғи тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2 & (C_1 \geq 0), \\ ax + by + cz = C_2. \end{cases}$$

Демак, $\vec{a}$ - векторли майдоннинг вектор чизиғи $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ сфера билан $\vec{c}$ векторга перпендикуляр бўлган $ax + by + cz = C_2$ текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган айланани ифодалар экан.

20.4. Потенциаль майдон

$U(M)$ скаляр майдон берилган бўлсин. Бу майдоннинг ҳар бир M нуқтасига $\text{grad}U = \vec{A}$ вектор мос қўйилган бўлсин. Натижада вектор майдоннинг – градиентлар майдони ҳосил бўлади.

20.6 – таъриф Агар $\vec{A}(M)$ вектор майдонни бирор скаляр майдоннинг градиенти яъни $\vec{A} = \text{grad}U$ шаклида тасвирлаш мумкин бўлса, у *потенциал майдон* дейилади.

Қандай шартлард бажарилганда $\vec{A}$ вектор майдон потенциал майдони бўлади? Бу саволга жавоб бериш учун қуйидагини эслаймиз, яъни

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

ифода бирор бир қийматли $U(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциалини ифодалаши учун

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Агар $Pdx + Qdy + Rdz = dU$ бўлса, у ҳолда

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{A} = (P, Q, R) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Демак, (A) шартнинг бажарилиши $\vec{A}$ вектор майдоннинг потенциал майдон бўлиши учун зарур ва етарли бўлар экан.

20.5. Сиртдан ўтувчи вектор майдон оқими. Вектор майдон дивергенцияси. Соленоидаль майдон

$\vec{A}(M)$ векторли майдон берилган бўлсин, яъни $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ва $R(x, y, z)$ функциялар берилган. (S) сиртни оламиз ва унинг томонини белгилаймиз, яъни уни орендлаймиз. Бу сиртга ўтказилган $\vec{n}$ нормалнинг йўналтирувчи косинусларини мос равишда $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ орқали белгилаймиз: $\vec{A} = \{P; Q; R\}$, $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

20.7 – таъриф. Ушбу

$$\iint_{(S)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (20.3)$$

сирт интегралига, (S) сиртнинг белгиланган томонидан ўтган вектор оқими дейилади.

(20.3) ни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин

$$\iint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) dS$$

(S) сирт билан чегараланган (V) жисм берилган бўлсин. $\vec{n}$ эса (S) сиртга ўтзилган нормал бўлсин. $P = A_x, Q = A_y, R = A_z$ деб белгилайлик. У ҳолда Гаусс-Остроградский формуласига асосан,

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) dS &= \iint_{(S)} (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) dS = \\ &= \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

бўлади.

20.8– таъриф. Ушбу $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ифодага $\vec{A}$ вектор майдоннинг

дивергенцияси дейилади ва у $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ каби белгиланади.

Шундай қилиб, Остроградский формуласини, қисқача,

$$\iint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dV$$

қўбинишда ёзиш мумкин экан. Дивергенциянинг бу таърифи координаталар системасини танлашга боғлиқ. Бу камчиликдан қутулиш учун унинг координата системасига мос бўлган таърифини бериш мумкин.

М нуқтани бирор кичик (V) жисм билан ўраймиз. Бу жисмнинг сиртини (S) билан белгилаймиз.

20.9 – таъриф. Агар

$$\lim_{V \rightarrow M} \frac{\iint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) dS}{V}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимитни $\vec{A}$ векторли майдоннинг М нуқтадаги *дивергенцияси* дейилади.

Векторли майдон оқими қуйидаги хоссаларга эга:

$$1^0 \quad \iint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) dS = - \iint_{(S^-)} (\vec{A}, \vec{n}) dS$$

2⁰ Агар (S) сирт $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ силлиқ сиртлар йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда

$$O = \sum_{k=1}^n \iint_{(S_k)} (\vec{A}, \vec{n}) dS$$

$$3^0 \quad \operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$$

$$4^0 \quad \operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{A})$$

20.10 – таъриф. Агар векторли майдоннинг дивергенцияси нолга тенг, яъни $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ бўлса, у ҳолда вектор майдонга *соленоида*ль (*трубкасимон*) майдон дейилади.

Вектор майдон соленоида

ль майдон бўлиши учун жисмнинг сиртидан ўтаётган вектор оқими нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\Pi = \int \int_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) dS = 0$$

(S_1) ва (S_2) сиртлар билан чегараланган векторли трубкани қарайлик. Трубкани ўзининг сирти (S_3) бўлсин. Бу учала сирт (S) сиртни ташкил этади. У ҳолда векторли майдон оқимининг 2-хоссасига асосан

$$\int \int_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) dS = \int \int_{(S_1)} (\vec{A}, \vec{n}) dS + \int \int_{(S_2)} (\vec{A}, \vec{n}) dS + \int \int_{(S_3)} (\vec{A}, \vec{n}) dS$$

Бу ҳолда нормал ташқарига йўналган бўлади. Шунинг учун

$$\int \int_{(S_3)} (\vec{A}, \vec{n}) dS = 0$$

чунки вектор оқими нормалга перпендикуляр бўлади. Агар (S_1) кесимда нормалнинг йўналиши (S_2) даги нормалнинг йўналиши сингари ўзгартирсак, у ҳолда юқоридаги тенгламадан

$$\int \int_{(S_1)} (\vec{A}, \vec{n}) dS = \int \int_{(S_2)} (\vec{A}, \vec{n}) dS$$

бўлади. Демак, соленоида

ль майдонда вектор майдон оқими трубканинг кўндаланг кесимларида бирлик бўлар экан.

20.5-мисол. Берилган $\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$ векторли майдоннинг соленоида

ль майдон эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. Таърифга кўра, векторли майдон соленоида

ль майдон бўлиши учун унинг дивергенцияси нолга тенг, яъни $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ бўлиши керак:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y - 2 + 0 \neq 0.$$

Демак, берилган векторли майдон соленоидал майдон эмас экан.

20.6– мисол. $\vec{a} = x \vec{i} + z \vec{k}$ векторли майдоннинг $(S): z = x^2 + y^2, z = 4$ сирт бўйича вектор оқимини топинг.

Ечилиши. $(S_1): z = x^2 + y^2$ ва $(S_2): z = 4$ сиртлар бўйича вектор оқимларини алоҳида ҳисоблаймиз:

(S_1) – сиртга ўтказилган нормал векторларни топамиз:

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{\text{grad}(z - x^2 - y^2)}{|\text{grad}(z - x^2 - y^2)|} = \pm \frac{-2x \vec{i} - 2y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

$\left(\vec{n}^0, z \right) > 90^\circ$ бўлгани учун илдиз ишорасини « - » қилиб оламиз,

бундан

$$\left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) = - \frac{z - 2x^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} = \frac{2x^2 - z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}, \quad dS_1 = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \frac{dxdy}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

Демак,

$$O_1 = \iint_{(S_1)} \left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) dS_1 = \iint_{(D_{xy})} (2x^2 - z) \Big|_{z=x^2+y^2} dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 - y^2) dxdy,$$

кейинги интегрални ҳисоблаш учун $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 - y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 \cdot \cos 2\varphi d\rho = 4 \cdot \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = 0.$$

Худди шундай (S_2) сирт бўйича вектор оқимининг ҳисоблаймиз:

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{\text{grad}(z - 4)}{|\text{grad}(z - 4)|} = \pm \vec{k}, \quad \left(\vec{n}^0, z \right) < 90^\circ \Rightarrow \vec{n}^0 = \vec{k},$$

бўлгани учун

$$\left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) = z \vec{k}, \quad dS_2 = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = dxdy,$$

бунда $|\cos \gamma| = 1$.

Шундай қилиб,

$$O_2 = \iint_{(S_2)} \left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) dS_2 = \iint_{(D_{xy})} \left. z \right|_{z=4} dxdy = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho = 16\pi.$$

Демак, $O = O_1 + O_2 = 16\pi$.

20.7– масала. $\vec{a}(M) = xz^2 \vec{i} + yx^2 \vec{j} + zy^2 \vec{k}$ векторли майдоннинг $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$ конус ён сиртининг ташқи томони бўйича ўтаётган O вектор оқимини топинг.

Ечилиши. Конуснинг бутун сирти бўйича олинган интегрални J_1 орқали, унинг асосининг юқори томони бўйича олинган интегрални J_2 билан белгилаймиз. У ҳолда конуснинг ён сирти бўйича олинган интеграл $J = J_1 - J_2$ бўлади. J_1 интегралга Гаусс – Остроградский формуласини қўлаймиз:

$$J_1 = \iiint_{(V)} xz^2 dydz + yx^2 dzdx + zy^2 dxdy = \iiint_{(V)} (z^2 + x^2 + y^2) dxdydz,$$

бунда (S_1) – конуснинг ташқи тўла сирти

Бу интегрални ҳисоблаш учун цилиндрик координатлар системасига ўтамыз:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq z, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

бунда $I = \rho$,

$$J_1 = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z (z^2 + \rho^2) \rho d\rho = \frac{3}{10} \pi.$$

Энди конуснинг (S_2) асоси бўйича олинган J_2 сирт интегрални ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} J_2 &= \iint_{(S_2)} xz^2 dydz + yx^2 dxdz + zy^2 dxdy = \iint_{(D_{xy})} y^2 dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, талаб қилинган оқим

$$O = J = J_1 - J_2 = \frac{3}{10}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}.$$

20.8– масала. $\vec{a}(M) = (x^3 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^3)\vec{j} + (z^2 + x^3)\vec{k}$ векторли майдоннинг $M_0(0; 1; 2)$ нуқтадаги дивергенциясини топинг.

Ечилиши. Векторли майдоннинг дивергенцияси қуйидаги

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

формула орқали топилади. Бу ҳолда

$$P = x^3 + y^2, Q = y^2 + z^3, R = z^2 + x^3, \operatorname{div} \left(\vec{a}(M_0) \right) = (3x^2 + 2y + 2z) \Big|_{M_0} = 6.$$

20.6. Вектор майдон циркуляцияси. Вектор майдон ротори

$\vec{A}(M)$ вектр майдон, яъни P, Q, R функциялар ва (K) силлиқ ёки бўлакли силлиқ чизик берилган бўлсин.

20.11 – таъриф. Ушбу

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy + Rdz \quad (20.5)$$

эгри чизикли интегралга $\vec{A}(M)$ векторли майдоннинг (K) чизик бўйича циркуляцияси дейилади.

Агар $\vec{A}(M)$ майдон кучлар майдонини ташкил қилса, у ҳолда эгри чизикли интеграл майдонини (K) бўйлаб бажарган ишини ифодалайди.

Агар (K) чизик ёпиқ бўлса, у ҳолда (20.5) ни Стокс формуласи ёрдамида

$$\begin{aligned} \int_{(K)} Pdx + Qdy + Rdz &= \int \int_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz \end{aligned}$$

бунда $(S) - (K)$ чизик билан чегараланган сирт.

20.12 – таъриф. Ушбу

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{k}$$

векторга векторли майдонинг *ротори* дейилади ва у қуйидагича белгиланади

$$\text{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{k}$$

Стокс формуласини ротор ёрдамида қуйидагича ёзамиз

$$\int (K) (\vec{A}, \vec{dr}) = \iint_{(S)} (\text{rot}\vec{A}, \vec{n})$$

Демак, (K) ёпиқ чизик бўйича векторли майдоннинг циркуляцияси, шу майдон роторининг (S) сиртдан ётаётган вектор оқимига тенг бўлар экан. Роторнинг координата системасига боғлиқ бўлмаган таърифини қуйидагича таърифлаймиз:

М нуқтадан ўтувчи $\vec{n}$ га перпендикуляр бўлган текислик ўтказамиз. М нуқтани ўраб турган (S) сиртни чегараловчи чизикни (K) дейлик.

20.13 – таъриф. Агар

$$\lim_{(S) \rightarrow M} \frac{\oint_{(K)} (\vec{A}, \vec{dr})}{S}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда бу лимитга $\vec{A}(M)$ векторли майдонинг *ротори* дейилади.

$\vec{A} = (P, Q, R)$ векторли майдонинг роторини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

$\vec{A}(M)$ векторли майдон потенциал майдон бўлиши учун $\text{rot}\vec{A} = 0$ бўлиши зарур ва етарли.

Демак, ротор орқали ифодаланган векторли майдон соленоидал майдон бўлар экан.

Ротор қуйидаги хоссаларга эга:

$$1^0 \operatorname{rot} \vec{c} = 0 (\vec{c} - \text{ўзгармас вектор})$$

$$2^0 \operatorname{rot}(C\vec{A}) = C \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$3^0 \operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$4^0 \operatorname{rot} \vec{r} = 0, \vec{r} - \text{радиус вектори.}$$

20.9 – масала. Векторли майдон циркуляцияси. Стокс формуласи. Векторли майдон уюрмаси (ротори) .

а) $\vec{a} = ye^{xy} \vec{i} + xe^{xy} \vec{j} + xyz \vec{k}$ векторли майдоннинг
(K): $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ конус билан Oxyz координаталар текислигининг
кесишиш чизиғи бўйича олинган циркуляциясини таъриф бўйича топинг.

Ечилиши. (K): Oyz ва Oxz текисликларда жойлашган BC ва CA кесмалар ва AB айлана ёйидан, яъни $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ иборат бўлган ёпиқ чизиқ. Йўналиш 20.2-чизмада кўрсатилган. Берилган $\vec{a}$ векторли майдон циркуляцияси ушбу $\Pi = \oint_{(K)} (\vec{a}, \vec{dr})$ формула билан топилади:

Демак, бу ҳолда циркуляция

$$\Pi = \int_{(K)} (\vec{a}, \vec{dr}) = \int_{(BC)} (\vec{a}, \vec{dr}) + \int_{(CA)} (\vec{a}, \vec{dr}) + \int_{(AB)} (\vec{a}, \vec{dr}).$$

1) BC кесма бўйича олинган эгри чизиқли интегрални ҳисоблаймиз:

$$x = 0, dx = 0, z = 1 - y, dz = -dy, 0 \leq y \leq 1.$$

$$\text{Демак, } \int_{(BC)} (\vec{a}, \vec{dr}) = \int_{(BC)} y dx = 0.$$

2) CA кесма бўйича олинган эгри чизиқли интегрални ҳисоблаймиз:

$$y = 0, dy = 0, z = 1 - x, dz = -dx, 0 \leq x \leq 1,$$

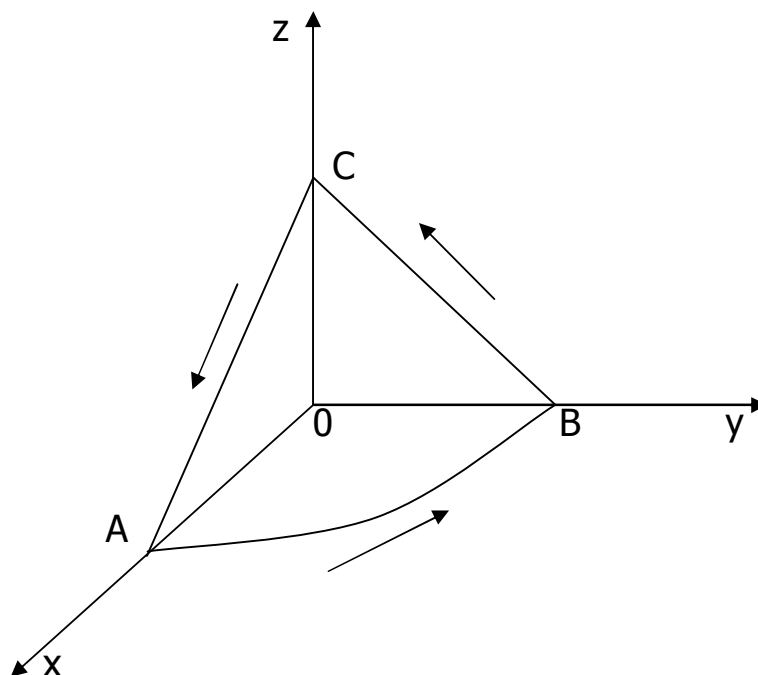
Демак, $\int_{(CA)} (\vec{a}, \vec{dr}) = \int_{(CA)} x dy = 0.$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ айлананинг (AB) ёйи бўйича олинган эгри чизиқли

интегрални ҳисоблаймиз: $z = 0, dz = 0.$

$$\int_{(AB)} (\vec{a}, \vec{dr}) = \int_{(AB)} e^{xy} (y dx + x dy) = \int_{(AB)} e^{xy} d(xy) = e^{xy} \Big|_{A(1;0)}^{B(0;1)} = 1 - 1 = 0.$$

Шундай қилиб, берилган $\vec{a} = y e^{xy} \vec{i} + x e^{xy} \vec{j} + zxy \vec{k}$ векторли майдоннинг циркуляцияси $\Pi = 0$ экан.



20.2-чизма

b) $\vec{a} = y \vec{i} + x^2 \vec{j} - z \vec{k}$ векторли майдоннинг $(K): x^2 + y^2 = 4, z = 3$

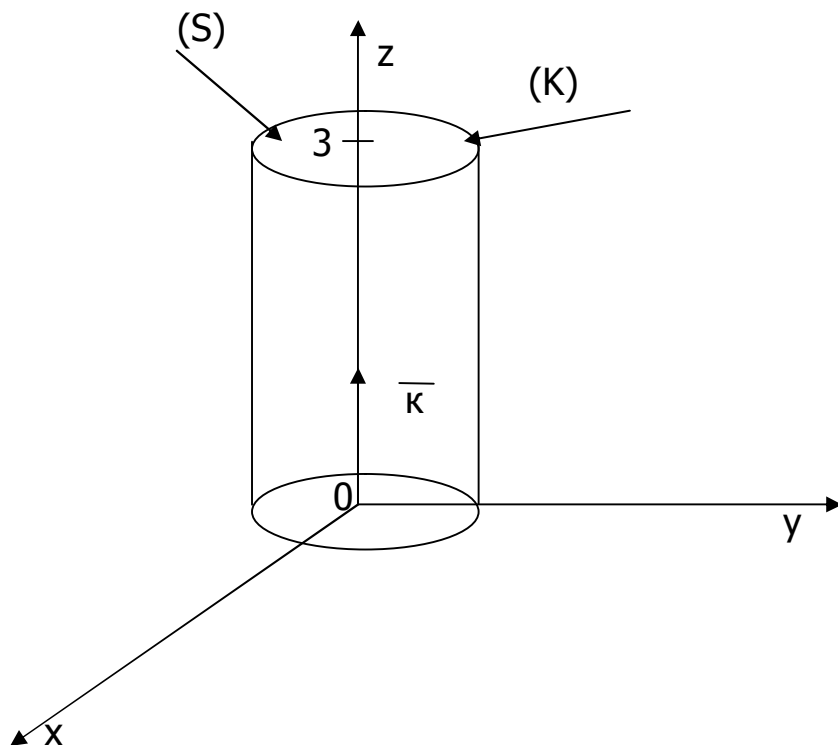
чизик бўйлаб $\vec{k}$ бирлик векторга нисбат мусбат йўналишида олинган циркуляциясини, Стокс формуласидан фойдаланиб, топинг.

Ечилиши. $(S) = \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 3\}$, $\vec{n}^0 = \vec{k}$ бўлгани учун Стокс формуласига кўра,

$$\Pi = \iint_{(S)} (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}^o) ds = \iint_{(D)} (2x-1) dx dy.$$

Охирги интегрални ҳисоблаш учун қутб координатлар системасига ўтамиз (20.3-чизма):

$$\iint_{(D)} (2x-1) dx dy = \iint_{(\Delta)} (2\rho \cos \varphi - 1) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho \cos \varphi - 1) \rho d\rho = -4\pi.$$



20.3-чизма

20.10-мисол. Берилган $\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$ векторли майдоннинг потенциал майдон эканлигини, лекин соленоидаль майдон эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. 1) Таърифга кўра, векторли майдон потенциал майдон бўлиши учун майдоннинг ҳар бир нуқтасида $\text{rot } \vec{a} = 0$ бўлиши керак. Шунинг учун, бу шартни текшириб кўрамиз:

$$P(x, y, z) = 2xy + z, \quad Q(x, y, z) = x^2 - 2y, \quad R(x, y, z) = x,$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z & x^2-2y & x \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (2x-2x)\vec{k} = 0.$$

Демак, берилган майдон потенциал майдон бўлар экан.

20.7. Иккинчи тартибли дифференциал амаллар

Майдонлар назариясининг асосий тушунчалари қуйидагилардир:

1. $u(x, y, z)$ скаляр функциянинг градиенти

$$\vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k};$$

2. $\vec{a}(x, y, z)$ вектр функция дивергенцияси

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \text{ бу ерда } P, Q, R - \vec{a} \text{ вектор координаталари.}$$

3. $\vec{a}(x, y, z)$ вектор уюрмаси

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{a}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Бу тушунчалар математик Гамельтон томонидан таклиф қилинган символик вектор ∇ (небла) оператори ёрдамида соддагина қилиб ёзилди:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \vec{\text{grad}} u.$$

Демак, $\nabla u = \vec{\text{grad}} u$. Худди шунга ўхшаша $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a}$.

∇ набла – векторнинг $\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ вектор – функцияга векторли кўпайтмаси шу вектор урюмаси беради.

$$[\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{rot } \vec{a}}.$$

Градиент, дивергенция, уюмани олиш амаллари биринчи тартибли дифференциал амаллардир.

Маълумки, $\overrightarrow{\text{grad}} u$, $\text{rot } \vec{a}$ амаллари вектор майдонларини, $\text{div } \vec{a}$ амали эса скаляр майдонни вужудга келтиради. Бу амалларнинг қуйидаги комбинациялар бўлиши мумкин:

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} u, \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{a}, \text{rot } \overrightarrow{\text{grad}} u, \overrightarrow{\text{rot}} \text{rot } \vec{a}, \text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$$

булар иккинчи тартибли дифференциал амаллар дейилади. Бу дифференциал амалларнинг аниқ бўлиши учун жадвал кўринишда тасвирлаш мумкин:

↑	u скаляр майдон	$\vec{a}$ вектор майдон	
	grad	div	rot
grad		$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{a}$	
div	$\text{div } \text{grad } u = \Delta u$		$\text{div } \text{rot } \vec{a} = 0$
rot	$\text{rot } \text{grad } u = 0$		$\text{rot } \text{rot } \vec{a} =$ $= \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$

20.11-мисол. а) $\text{div}(u \text{ grad } v) = \text{grad } u \cdot \text{grad } v + u \Delta v$,

$$b) \text{div}(u \text{ gradu}) = |\text{gradu}|^2 + u \Delta u$$

ни исботланг.

Ечилиши: а) Маълумки, $\vec{a}(M)$ векторнинг дивергенцияси ушбу

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

формула орқали, $v(x, y, z)$ – скаляр майдоннинг градиенти эса,

$$\operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k}$$

формула орқали топилади. У ҳолда,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \\ &= u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = \\ &= \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \Delta v, \text{ бунда } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

b) ∇ – операторнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагича исботлаш мумкин:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) &= (\nabla, u \operatorname{grad} u) = (\operatorname{grad} u, \nabla u) + \\ &+ u(\nabla, \operatorname{grad} u) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \\ &= |\operatorname{grad} u|^2 + u \Delta u. \end{aligned}$$

Ўз-ўзини текшириш саволлари

1. Скаляр ва векторли майдоннинг таърифлари ва уларга мисоллар.
2. Сирт сатҳи тушунчаси.
3. Вектор чизиги тушунчаси ва унинг ҳар хил кўринишдаги тенгламаси.
4. Йўналиш бўйича ҳосила, скаляр майдон таърифлари.
5. Йўналиш бўйича ҳосилани топиш формуласи.
6. Скаляр майдон градиенти ва унинг содда хоссалари.
7. Потенциал майдон таърифини беринг ва унга мисоллар келтиринг.
8. Векторли майдон дивергенцияси ва унинг физик маъноси.
9. Векторли майдон ротори ва унинг физик маъноси. Векторли майдон потенциали
10. Соленоидаль майдон ва унинг физик маъноси. Мисоллар келтиринг.
11. Гамильтон оператори ва унинг содда хоссалари.
12. Градиент, дивергенция ва роторни Гамильтон оператори орқали ёзинг.
13. Векторли майдон циркуляцияси ва оқими.

21 – маъруза.

ФУРЬЕ ҚАТОРИ

Режа:

21.1. Даврий функция. Бўлакли силлиқ ва бўлакли узлуксиз функциялар.

21.2. Гармониклар.

21.3. Асосий масаланинг қўйилиши .Тригонометрик Фурье қатори.

21.4. Жуфт ва тоқ функцияларини Фурье қаторига ёйиш.

21.5. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги. Фурье қаторини ҳадма – хад дифференциаллаш ва интеграллаш.

21.6. $[0, l]$ ораликда функцияни фақат синуслар ва косинуслар бўйича Фурье қаторига ёйиш.

21.7. Ортогонал функциялар системаси. Ортогонал системалар бўйича Фурье қаторининг коэффицентлари.

Таянч иборалар. Даврий функция, жуфт функция, тоқ функция, Фурье қатори, Фурье коэффицентлари, ортогонал функциялар системаси, яқинлашувчи, текис яқинлашувчи, дифференциаллаш, интеграллаш.

21.1. Даврий функция. Бўлакли силлиқ ва бўлакли узлуксиз функциялар

$f(x)$ функция X ($X \subset \mathbb{R}$) тўпламда берилган бўлсин.

21.1- таъриф. Агар шундай ўзгармас $T (T \neq 0)$ сон мавжуд бўлиб, $\forall x \in X$ учун $x - T$ ва $x + T$ сонлар T тўпламга қарашли бўлиб,

$$f(x - T) = f(x + T) = f(x)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ *даврий функция* дейилади. Бунда T сонга ($T \neq 0$) функциянинг даври дейилади.

Энг содда даврий функцияларга $\sin x$ ва $\cos x$ мисол бўла олади. Буларнинг энг кичик мусбат даври $T = 2\pi$.

Физикада энг содда даврий функция сифатида гармоник тебраниш олинади: $\xi(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $-\infty < x < \infty$, бунда $T = \frac{2\pi}{\omega}$ гармоник тебранишнинг даври. A, ω, φ ўзгармас сонлар мос равишда гармоник тебранишнинг амплитудаси, частотаси ва бошланғич фазалар дейилади.

Даврий функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1⁰. Агар X тўпلامда берилган $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири даврий функциялар бўлиб, $T \neq 0$ сон уларнинг даври бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциялар ҳам T даврга эга бўлган даврий функциялар бўлади.

2⁰. X тўпلامда берилган $f(x)$ даврий функция бўлиб, $T \neq 0$ сон унинг даври бўлсин, $g(x)$ эса, $f(x)$ нинг қийматлар тўплами $\{f(x): x \in X\}$ да берилган ихтиёрий функция бўлсин. У ҳолда $g(f(x))$ мураккаб функция ҳам даврий функция бўлади ва T унинг даври бўлади.

3⁰. $f(x)$ даврий функция, $T \neq 0$ сон унинг даври бўлсин. Агар x_0 нуқта бу функциянинг берилиш соҳасига тегишли, яъни $x_0 \in X$ бўлса, у ҳолда $x_0 + kT$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) нуқта ҳам шу соҳага тегишли бўлади: $x_0 + kT \in X$.

Агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг берилиш соҳасига тегишли бўлмаса ($x_0 \notin X$), у ҳолда $x_0 + kT \notin X$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ бўлмайди.

Бу хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1- натижа. Даврий функциянинг аниқланиш соҳасида абсолют қиймати бўйича исталганча катта ва манфий сонлар бўлади.

4⁰. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, бу функция ўзининг ҳар бир қийматини x аргументнинг чексиз кўп қийматларида қабул қилади.

2- натижа. Агар $f(x)$ функция даврий функция бўлса, у аниқланиш соҳасида монотон функция бўлмайди.

Функцияларни даврий давом эттириш. $f(x)$ функция $(a, b]$ да берилган бўлсин. Бу функция ёрдамида

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), x \in (a + m(b - a), b + m(b - a)] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

функцияни тузамиз. Бундай тузилган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да

аниқланган ва даврий функция бўлади. Унинг асосий даври $T_0 = b - a$ га тенг.

Агар берилган $f(x)$ функция $(a, b]$ да узлуксиз бўлиб ва $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(b)$ бўлса, у ҳолда, давом эттирилган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлади.

$f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалда берилган бўлса, уни даврий давом эттириш ҳам юқоридаги сингари бажарилади:

$$f^*(x) = f(x - (b - a)m), x \in [a + m(b - a), b + m(b - a)] (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ нуқтасида узлуксиз, a нуқтада ўнгдан, b нуқтада эса, чапдан узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз дейилар эди.

Агар $[a, b]$ ни шундай

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n] \quad (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$$

бўлакларга ажратиш мумкин бўлиб,

$$([a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n])$$

ҳар бир $(a_k, a_{k+1}) (k = \overline{0, n-1})$ да функция узлуксиз бўлса, ҳамда $x = a_k$ нуқтада ўнг $f(a_k + 0)$, $k = \overline{0, n-1}$ ва чап $f(a_k - 0)$, $k = \overline{1, n}$ лимитларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли узлуксиз дейилади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида биринчи тур узилишга эга бўлиб, бошқа барча нуқталарда узлуксиз бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли узлуксиз дейилади.

Агар $f(x)$ функция $\forall x \in (a, b)$ да дифференциалланувчи бўлиб, ҳамда унинг a нуқтадаги ўнг ҳосиласи

$$f'(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

b нуқтадаги чап ҳосиласи

$$f'(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да дифференциалланувчи дейилар эди.

Агар $[a, b]$ ни $[a, b] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n] (a_0 = a, a_n = b)$ бўладиган шундай $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ бўлақларга ажратиш мумкин бўлиб, ҳар бир $(a_k, a_{k+1}) k = \overline{0, n-1}$ да функция дифференциалланувчи бўлса, ҳамда $x = a_k$ нукталарда чекли ўнг $f'(a_k + 0), k = \overline{0, n-1}$ ва чап $f'(a_k - 0), k = \overline{1, n}$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли дифференциалланувчи дейилади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ ни шундай $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ бўлақларга бўлиш мумкин бўлсаки, ҳар бир $(a_k, a_{k+1}) k = \overline{0, n-1}$ да ҳосила узлуксиз бўлса, ҳамда $x = a_k$ нукталар чекли ўнг $f'(a_k + 0), k = \overline{0, n-1}$ ва чап $f'(a_k - 0), k = \overline{1, n}$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да бўлакли *силлиқ* деб аталади.

21.2. Гармониклар

Ушбу $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (бунда A, ω, φ ўзгармас сонлар) функция одатда *гармоника* деб аталади. Бу функция, даврий функция бўлиб, унинг даври $T = \frac{2\pi}{\omega}$ га тенг. Ушбу

$$A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right), k = 1, 2, \dots, -\infty < x < +\infty \quad (1)$$

гармоникаларнинг даври $T_k = \frac{T}{k}$ сонга тенг. (1) гармоникаларнинг

хаммасининг даври $T = kT_k$, частотаси эса $\lambda_k = \frac{2\pi k}{T}$ га тенг.

Демак, (1) гармоникалар кетма-кетлигининг частоталари $\frac{2\pi}{T}$ га каррали бўлар экан. Чекли сонлаги гармоникаларнинг йиғиндисини қарайлик:

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx + \varphi_k\right) \quad (2)$$

Маълумки, $f_N(x)$ функция даврий функция бўлиб, унинг даври T га тенг.

Худди шундай, агар гармоникалар чексиз йиғиндиси, яъни

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx + \varphi_k\right) \quad (3)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг йиғиндиси ҳам даврий функция бўлади ва унинг даври T га тенг бўлади. (2) ва (3) да қуйидагича шакл алмаштирамиз:

$$A_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx + \varphi_k\right) = A_k \sin \varphi_k \cos \frac{2\pi k}{T} x + A_k \cos \varphi_k \sin \frac{2\pi k}{T} x,$$

$$\frac{a_0}{2} = A_0, a_k = A_k \sin \varphi_k, b_k = A_k \cos \varphi_k, T = 2l$$

деб белгиласак у ҳолда (2) ва (3) нинг кўринишлари

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} X + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \right) \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} X + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \right) \quad (5)$$

шаклларга келади.

(5) қаторга тригонометрик қатор дейилади. Агар (5) да тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция тригонометрик қаторга ёйилган дейилади.

21.3. Асосий масаланинг қўйилиши. Тригонометрик Фурье қатори

1) Даври $T = 2l$ га тенг бўлган ҳар қандай даврий функцияни (5) шаклдаги тригонометрик қаторга ёйиш мумкин, яъни (5) шаклдаги қаторнинг йиғиндиси шаклида тасвирланадими?

2) Агар (5) да тенглик ўринли бўлса, у ҳолда a_0, a_k, b_k коэффицентлар қандай топилади?

3) (5) қаторнинг яқинлашиш характери билан $f(x)$ функциянинг хусусияти орасида қандай боғланиш бор?

Қуйидаги

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots, \quad (6)$$

асосий тригонометрик функциялар системасини қараймиз. $f(x)$ функциянинг (5) шаклдаги тригонометрик қаторга ёйилмаси (6) система орқали ёйилган.

21.15 – таъриф. *Ушбу*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

тригонометрик қаторга $f(x)$ функциянинг Фурье қатори дейилади. Бунда коэффицентлар

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, \quad (7)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} \xi d\xi, \quad (8)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi \quad (9)$$

формулар билан топиладиган

2– таъриф. (7), (8), (9) формулар билан топиладиган a_0, a_n, b_n сонларни $f(x)$ функциянинг Фурье коэффицентлари дейилади.

(7), (8) ва (9) интегралларнинг мавжуд бўлиш учун $f(x)$ функциянинг $[-l; l]$ да интегралланувчи бўлиши етарли.

Демак, ҳар бир $[-l; l]$ да интегралланувчи $f(x)$ функцияга, унинг Фурье қаторини мос қўйиш мумкин, яъни

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (10)$$

Бунда a_0, a_n, b_n коэффициентлар (7), (8) ва (9) формулалар орқали топилади. Агар $f(x)$ функциядан $[-l; l]$ да интегралланувчилардан бошқа ҳеч қандай қўшимча шартни талаб қилмасак, у ҳолда (10) даги мослик белгисини тенглик ишорасига алмаштириб бўлмайди.

21.4. Жуфт ва тоқ функцияларини Фурье қаторига ёйиш

Биз маълумки $[-l; l]$ да аниқланган $f(x)$ функция $\forall x \in [-l; l]$ учун $f(-x) = f(x)$, шартни қаноатлантирса, у ҳолда $f(x)$ функция *жуфт функция* дейилади.

Агар $\forall x \in [-l; l]$ учун $f(-x) = -f(x)$, шартни қаноатлантирса, у ҳолда у *тоқ функция* дейилади.

Маълумки, жуфт функциянинг графиги координата ўқиға симметрик, тоқ функциянинг графиги эса, координата бошиға нисбаттан симметрик бўлиши келиб чиқади.

Агар $f(x) \in [-l; l]$ да аниқланган ихтиёрий функция бўлса, у ҳолда $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ жуфт функция, $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ функция эса, тоқ функция бўлади, ҳамда $\forall x \in [-l; l]$ учун $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Шундай қилиб, $[-l; l]$ да аниқланган ихтиёрий $f(x)$ функцияни жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида тасвирлаш мумкин бўлар экан.

$f(x)$ функция $[-l; l]$ да интегралланувчи бўлиб, у жуфт функция бўлса, у ҳолда унинг Фурье қатори

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x$$

қатори кўринишда бўлади, бунда

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi, a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} \xi d\xi,$$

Агар $f(x)$ тоқ функция бўлса, унинг Фурье қатори

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

кўринишда бўлади, бунда $a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$.

21.5. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги. Фурье қаторини ҳадма – ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш
 $f(x)$ функция $[-l; l]$ да аниқланган бўлсин.

Теорема (асосий). Агар $f(x)[-l; l]$ да бўлакли- силлиқ функция бўлса, у ҳолда унинг тригонометрик Фурье қатори ораллиқнинг ҳар бир x нуқтасида яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндисини

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

1) $S(x) = f(x)$ агар $-l < x < l$, x $f(x)$ нинг узлуксиз нуқтаси

2) $S(x) = \frac{f(x+0) + f(l-0)}{2}$ агар $-l < x < l, x$ $f(x)$ нинг узилиш

нуқтаси

3) $S(l) = S(-l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$ тенгликлар ўринли бўлади.

1- эслатма. Агар $-l < x < l$ бўлиб, $x, f(x)$ функция узлуксизлик нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$f(x+0) = f(x-0) = f(x),$$

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Шунинг учун юқоридаги 1) ва 2) тенгликларни

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad x \in [-l; l]$$

тенглик билан алмаштириш мумкин.

Асосий лемма. Агар $f(x) [a, b]$ да бўлакли силлиқ функция бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \alpha x dx = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \alpha x dx = 0$$

ўринли бўлади.

2– эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи бўлса ҳам, яъни

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$$

бўлганда ҳам лемма ўринли.

Натижа. $[-\pi, \pi)$ да бўлакли силлиқ ёки шу ораликда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi = 0$$

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi)$ ораликда берилган ва шу ораликда абсолют интегралланувчи (хос ёки хосмас маънода) бўлсин, у ҳолда Фурье қаторининг $F_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ қисмий йиғиндиси қуйидагича ифодаланади:

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (1)$$

(1) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функциянинг Дирихли интегралли деб аталади.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ ораликда берилган ва унинг Фурье қатори

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2)$$

$[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлсин.

Теорема. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралықта берілген, үзлуксіз хамда $f(-\pi) = f(\pi)$ бұлсин. Агар бу функция бұлалы-сыллы бұлса, $f(x)$ функциянын Фурье қаторы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$[-\pi, \pi]$ оралықта текис яқинлаувчы бұлады.

Теорема. Агар Фурье қаторы $[-\pi, \pi]$ оралықта текис яқинлаувчы бұлса, у ҳолда бу қаторнын $f(x)$ йиғиндиси $[-\pi, \pi]$ оралықта үзлуксіз функция бұлады.

Теорема. Агар Фурье қаторы $[-\pi, \pi]$ оралықта текис яқинлаувчы бұлса, у ҳолда Фурье қатор ҳадыларини интегралларидан тузилген

$$\int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx$$

қатор $(-\pi \leq a < b \leq \pi)$ хам яқинлашувчы бұлады ва унын йиғиндиси

$$\int_a^b f(x) dx \text{ га тенг бұлады, яъни}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx.$$

Теорема. Фурье қаторнын ҳар бир ҳадыннын ҳосилаларидан тузилген

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin kx + b_k k \cos kx) \text{ қатор } [-\pi, \pi] \text{ оралықта текис яқинлаувчы бұлса,}$$

Фурье қаторнын йиғиндиси $f(x)$ шу $[-\pi, \pi]$ оралықта $f'(x)$ ҳосилага эга ва

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx)$$

бұлады.

21.1 – масала. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

функцияни $[-\pi; \pi]$ кесмада Фурье қаторига ёйинг.

Ечилиши. Берилган функция $[-\pi; \pi]$ да узлуксиз. Унинг ҳосиласи x нинг $x_n = \pi n$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ нукталардан ташқари ҳамма қийматларида узлуксиз ва ўзининг аниқланиш соҳасида чегараланган.

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори x нинг ҳамма қийматларида $f(x)$ га яқинлашади. Фурье коэффицентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} dx = -\frac{x^2}{2\pi} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x^3}{3\pi^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \cos nx dx \right).$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни бўлаклаб интеграллаш натижасида

$$a_n = \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

бўлишни топамиз. Энди b_n ларни топамиз

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3},$$

бундан

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2m, m \in N, \\ -\frac{4}{\pi^2 (2m-1)^3}, & n = 2m-1, m \in N. \end{cases}$$

Шундай қилиб, берилган функциянинг Фурье қатори, қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{3(-1)^m - 1}{\pi m^2} \cos mx - \frac{4}{\pi^2 (2m-1)^3} \sin(2m-1)x \right].$$

Бу ёйилмада $x = \pi$ дейилса, у ҳолда

$$\pi = \frac{5\pi}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3(-1)^m - 1}{\pi m^2} (-1)^m.$$

21.6. $[0, l]$ ораликда функцияни фақат синуслар ва косинуслар

бўйича Фурье қаторига ёйиш

$f(x)$ $[0; l]$ бўлакли силлиқ функция бўлсин. Бу функция $-l \leq x \leq 0$ ораликқа ҳар хил, яъни жуфт ёки тоқ даврий давом эттириш мумкин. Агар жуфт давом эттирилса, у ҳолда $[-l; l]$ да жуфт функция ҳосил бўлади. Унинг коэффициентлари

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} d\xi, \quad b_k = 0$$

бўлиб, Фурье қатори

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (11)$$

кўринишда бўлади.

Агар тоқ даврий давом эттирилса, у ҳолда $[-l; l]$ да тоқ функция ҳосил бўлади, унинг Фурье коэффициентлари

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$$

бўлиб, Фурье қатори

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (12)$$

кўринишда бўлади.

$0 < x < l$ ораликда (11) ва (12) қаторларининг ҳар бири $f(x)$ нинг узлуксиз нуқталарда $f(x)$ га яқинлашади.

21.2– масала. $f(x) = x$ функцияни $(0; \pi)$ ораликда: а) жуфт (косинуслар); б) тоқ (синуслар) давом эттириб (қайта аниқлаб) Фурье қаторига ёйинг.

Ечилиши. а) Бу ҳолда, берилган функцияни жуфт давом эттириб, сон ўқида аниқланган, ушбу

$$f^*(x) = |x - 2k\pi|, \quad |x - 2k\pi| \leq \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ёрдамчи функция тузамиз. Тузилган ёрдамчи функция, x функцияни Фурье қаторига ёйиш тўғрисидаги Фурье теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Маълумки, $f^*(x)$ жуфт функция бўлганлиги учун барча n ларда $b_n = 0$. Энди a_0 ва a_n ларни топамиз:

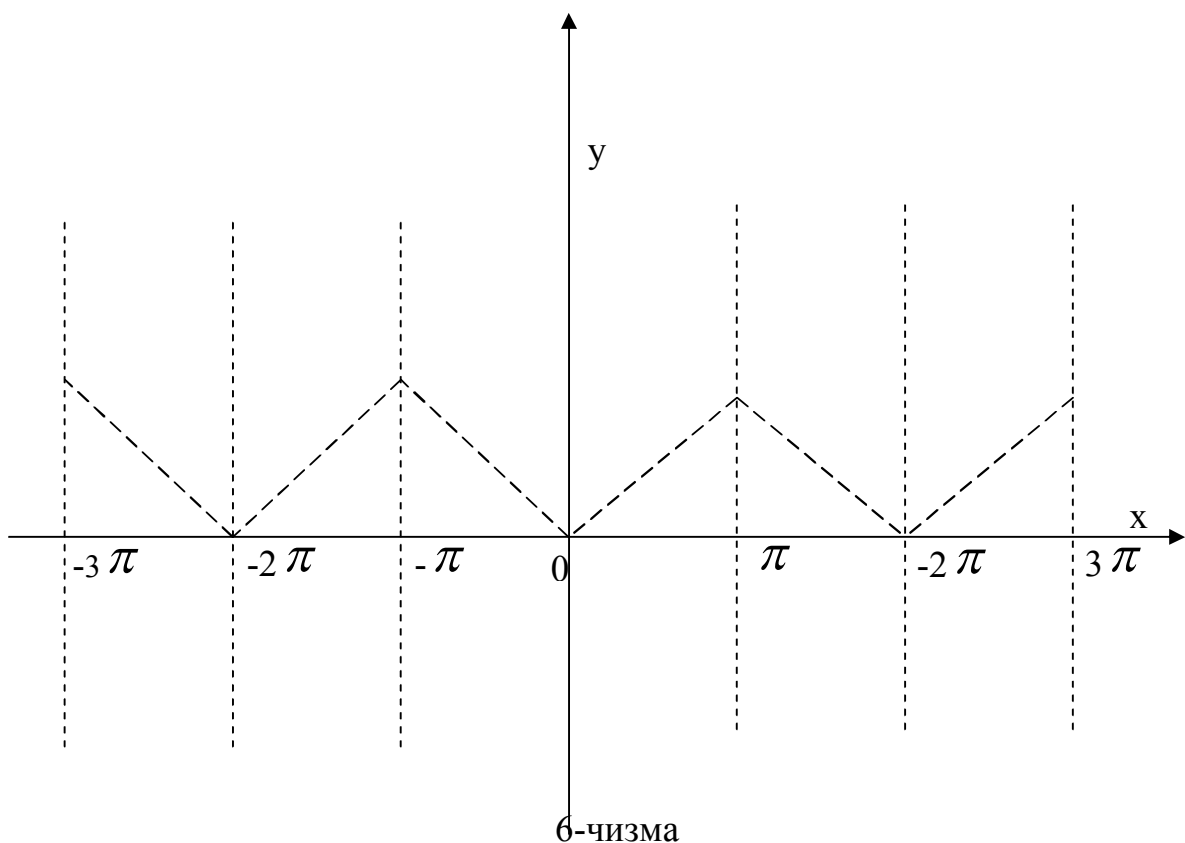
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m, \quad m \in N, \\ -\frac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n = 2m-1, m \in N. \end{cases} \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} \quad (-\infty < x < \infty), \\ f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} \quad (0 < x < \pi) \end{aligned}$$

Бу қатор ҳамма нуқталарда яқинлашада ва унинг йиғиндиси берилган функцияга тенг (6-чизма).



б) Бу ҳолда, берилган функцияни тоқ (синуслар бўйича) давом эттириб, бутун сон ўқида аниқланган ушбу

$$f^*(x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & (2k-1)\pi < x < \pi(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

функцияни тузамиз. $f^*(x)$ функция тоқ бўлганлиги учун, $a_0 = 0$, $a_n = 0$ бўлади. Энди b_n ларни топамиз:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Шундай қилиб,

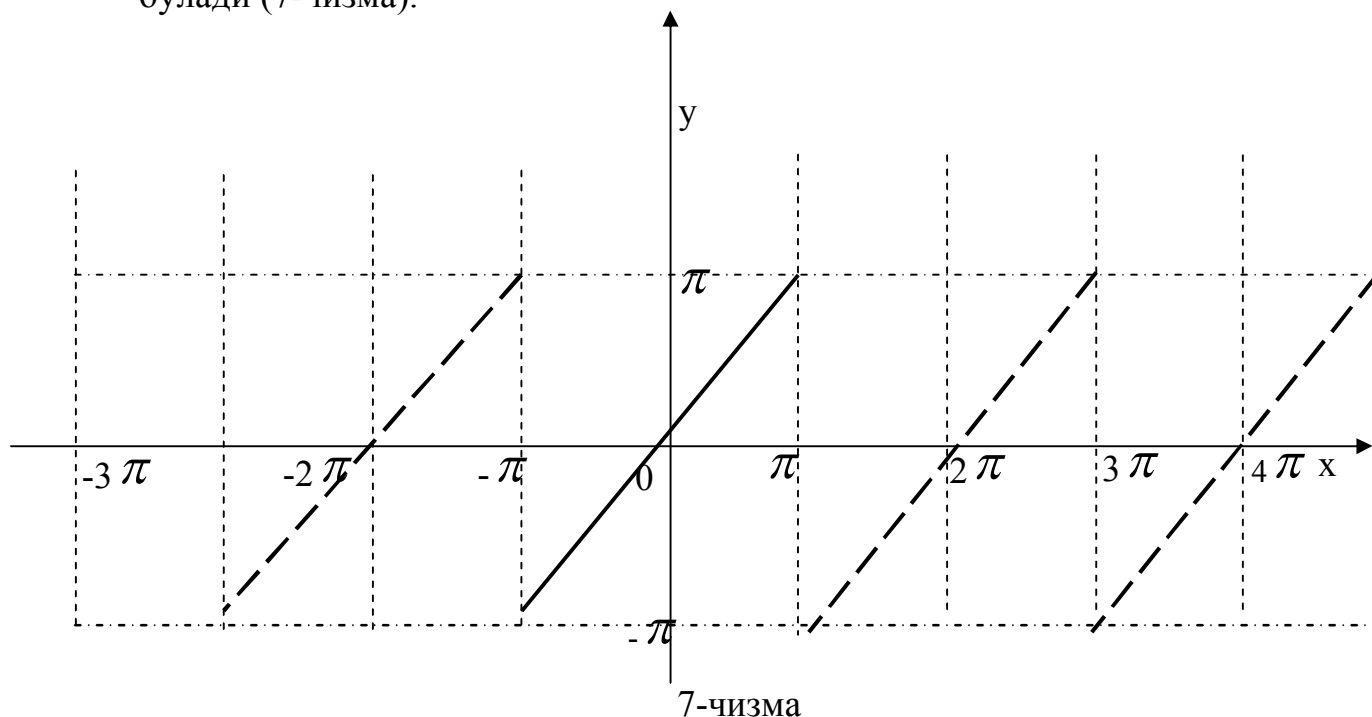
$$f^*(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$f(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \quad (0 < x < \pi)$$

Бу тенглик узилиш нуқталаридан бошқа барча нуқталарда ўринли бўлиб, ҳар бир узилиш нуқтаси, яъни $x = (2k - 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ нуқталардаги каторнинг йиғиндиси

$$\frac{f[(2k-1)\pi-0] + f[(2k-1)\pi+0]}{2} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

бўлади (7-чизма).



21.7. Ортогонал функциялар системаси. Ортогонал системалар бўйича Фурье каторининг коэффиценлари

21.16 – таъриф. Агар

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0$$

бўлса, $[a, b]$ да интегралланувчи $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар шу ораликда ортогонал дейилади,

21.17 – таъриф. Агар

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{агар } i \neq k \text{ булса} \\ \lambda > 0, & \text{агар } i = k \text{ булса} \end{cases}$$

$[a, b]$ да интегралланувчи $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ функциялар системаси шу ораликда *ортogonal система* дейилади,

21.18 – таъриф. Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлса, у холда

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

сонга $\varphi(x)$ функциянинг *нормаси* дейилади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлиб,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (*)$$

тенглик ўринли бўлсин, бунда a_k ўзгармас сон, φ_k $[a, b]$ да ортогонал бўлган функциялар.

Агар $\{\varphi_k(x)\}$ системанинг ихтиёрий $\varphi_n(x)$ функцияни $(*)$ тенгликка кўпайтириб уни хадма-хад интеграллаш мумкин бўлса, $\{\varphi_k(x)\}$ системасининг ортогоналлигидан a_k коэффицентини $f(x)$ орқали ифодалаш мумкин. $(*)$ тенгликнинг икала томонини $\varphi_n(x)$ га кўпайтириб x бўйича a дан b гача интеграллаймиз

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx$$

Бундан $\{\varphi_n\}$ системанинг ортогоналлигини эътиборга олиб

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx &= a_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = a_n \|\varphi_n\|^2, \\ a_n &= \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \end{aligned} \quad (**)$$

ни топамиз. $(**)$ формула билан топиладиган a_n сонга ортогонал $\{\varphi_n\}$ системалар бўйича $f(x)$ функция Фурье каторнинг коэффицентини

дейилади, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ қаторга эса, $f(x)$ функциянинг ортогонал бўйича Фурье қатори дейилади.

Энг кичик квадратик четланиш.

$[a, b]$ да ортогонал бўлган системанинг белгиланган

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) (n - \text{белиланган})$$

қисмнинг ихтиёрий чизиқли комбинациясини қараймиз.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x),$$

бунда $\alpha_k (k = \overline{1, n})$ ихтиёрий сонлар.

4 – таъриф. Агар

$$\int_a^b f(x) dx \text{ ва } \int_a^b f^2(x) dx$$

интеграллар оддий ёки хосмас маънода мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да квадрати бўйича *интегралланувчи* дейилади.

1– теорема. Агар $f(x)$ функция $[-l; l]$ да узлуксиз, бўлакли силлиқ ва $f(-l) = f(l)$ бўлса, у ҳолда унинг тригонометрик Фурье қатори

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + \sin \frac{k\pi}{l} x \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} \xi d\xi,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi$$

$[-l; l]$ да текис яқинлашувчи бўлади ва оралиқнинг ҳамма нуқталарда $S(x) = f(x)$ тенглик ўринли.

2 – теорема. (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). Агар

$[-l; l]$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда $\varepsilon > 0$ сон учун шундай

$$P_m(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m$$

алгебраик кўп ҳад мавжуд бўлиб, бу кўпҳад $[a,b]$ да $f(x)$ га ε аппроксимацияланади (ε – яқинлашади), яъни

$$|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b]$$

тенгсизлик бажарилади.

3 – таъриф. Агар $[a,b]$ да $\{\varphi_n\}$ ортогонал системанинг ҳамма элементлари ортогонал бўлган $\forall f(x) \in Q([a;b])$ функция $Q([a;b])$ фазонинг нолини ташкил қилса, яъни узлуксиз нуқталарда $f(x)$ нолга тенг бўлиб, чекли сондаги нуқталарда эса, нолдан фарқли бўлса, у ҳолда $\{\varphi_n\}$ система $Q([a;b])$ да ёпиқ дейилади.

3 – теорема. Агар $[a,b]$ да ортогонал бўлган $\{\varphi_n\}$ система $Q([a;b])$ да тўлиқ бўлса, у $Q([a;b])$ да ёпиқ ҳам бўлади.

4 – теорема. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $[a,b]$ да тўлиқ ортогонал системалари бўйича Фурье қаторлари бир хил бўлса, у ҳолда улар $Q([a;b])$ фазонинг элементи сифатида бир хил бўлади, яъни улар $[a,b]$ нинг чекли сондаги нуқталарида бир – биридан фарқ қилиши мумкин.

5 – теорема. Агар $\{\varphi_n\}$ ортогонал системаси $Q([a;b])$ да тўлиқ бўлса, у ҳолда $\forall f(x), g(x) \in Q([a;b])$ функциялар учун умумлашган Парсевал

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^f C_k^g \|\varphi_k\|^2$$

тенглиги ўринли бўлади.

Ўз-ўзини текшириш саволлари

1. Асосий тригонометрик функциялар системасининг $[-l;l]$ да ортогоналлиги.
2. 2π даврли $f(x)$ функцияга учун тригонометрик Фурье қатори ва унинг коэффициентларини ҳисоблаш формулалари.
3. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қатори.
4. Булакли узлуксиз ва силлиқ функциялар тушунчаси ва уларга мисоллар.

5. Тригонометрик Фурье қаторининг текис яқинлашиши тўғрисидаги Дирихле теоремаси.
6. $f(x)$ функция $[-l;l]$ да бўлган силлиқ функция бўлса, унинг Фурье қатори йғиндиси $S(x)$ учун қандай тенгликлар ўринли бўлади?
7. Тригонометрик Фурье қаторининг абсолют ва текис яқинлашишига оид теорема.
8. Асосий тригонометрик функциялар системаси учун Бессел тенгсизлиги.
9. Парсевал айнияти.
10. Текис яқинлашуви тригонометрик Фурье қатори йғиндисининг функционал хоссалари.

Адабиётлар

1. Азларов Т.А, Мансуров Х.Т. Математик анализ. 1-қисм. -Т. 1994.
2. Азларов Т.А, Мансуров Х.Т. Математик анализ. 2-қисм. -Т. 1995.
3. Ильин В.А, Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. -М.: Наука, 1979.
4. Ильин В.А, Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. -М.: Наука, 1987.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. -М.: Наука, 1969.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2.- М. :Наука, 1984.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.Т. 1.- М.: Высшая школа, 1981.
8. Никольский С.М. Курс математического анализа.Т. 1.-М.: Наука, 1983.
9. Садуллаев А., Мансуров Х., Худойбергенов Г., Ворисов А., Гуламов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. Т. 1-қисм.- Т.. 1993.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. -М. : Наука, 1981.
11. Будаков Б.М, Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. -М. : Наука, 1965.
12. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. - М.: Наука, 1984.
13. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука, 1985.
14. Бруй И.Н., Гаврилюк А.В и др. Лабораторный практикум по математическому анализу. – Минск.: Высшая школа, 1991.
15. Тўйчиев Т.Т., Джумабоев Д.Х. Математик анализ фанидан 2-курс талабалари учун лаборатория ишлари. -Тошкент, ЎзМУ наш., 2003.