ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

“УМУМИЙ МАТЕМАТИКА” КАФЕДРАСИ

5460100- МАТЕМАТИКА ТАЪЛИМ ЙЎНАЛИШИ БЎЙИЧА БАКАЛАВР
ДАРАЖАСИНИ ОЛИШ УЧУН
СУЛАЙМОНОВ ЎТКИР САЙФУЛЛА ЎҒЛИ

ЎРТА МАХСУС МУАСАСАЛАРИДА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРИНИ ЎРГАНИШ

МАВЗУСИДАГИ

Битирув малакавий иши

ИЛМИЙ РАҲБАР: ЎҚ.КУРБАНОВА Х.

ГУЛИСТОН – 2014

Мундарижа:

КИРИШ

Мавзунинг долзарблиги:Ўрта махсус муассасаларида математикани ўқитиш курсига функция, кетма – кетлик, узлуксизлик, ҳосила ва интеграл тушунчаларини ўрганиш киритилган

Функция тушунчаси математиканинг муҳим тушунчаларидан ҳисобланади. Функция тушунчасини мазмун ва моҳиятига етмаслик математиканинг деярли барча тушунчаларини ўрганишда катта муаммо яратади.

Функция тушунчаси бошланғич синфдан бошлаб, ошкормас ҳолда ўрганилади. Бунда содда мазмунли нарх наво билан боғлиқ масалалар орқали функция тушунчаси шакллантирилади.

Функция тушунчасини замонавий педагогик технологияларга асосланиб ўрганиш учун бу тушунчага оид ўқув материалини қайта тузиш ва унга мос бўлган замонавий технологияларни топиш лозим бўлади

Ҳосила тушунчасини ўрганиш лимит ва узлуксизлик тушунчасини ўзлаштирилиши билан чамбарчас боғлиқ.

Агар функция лимити ва узлуксизлиги ўқувчи томонидан чуқур англанилмаса у ҳолда ҳосила тушунчаси юзаки қабул қилинди. Функция ҳосиласини қоидага кўра ўқувчи топа олгани билан унинг маъносини тушунмайди. Худди шунингдек интеграл тушунчаси бевосита ҳосила тушунчаси билан чамбарчас боғлиқ бўлганлигидан ўқувчи ҳосилани чуқур ўзлаштирилиши мақсадга мувофиқ. Бунинг учун эса ҳосила ҳақидаги маълумотлар тез – тез қайтарилиб турилиши ва ҳар доим ҳосила ҳақидаги маълумотлар кенгайиб борилиши лозим.

Интеграл тушунчаси функция, кетма – кетлик, лимит, узлуксизлик, ҳосила каби математик анализнинг асосий тушунчалари билан боғлиқ ҳолда ўрганилади.Интеграл тушунчаси ҳосила тушунчасига тескари амал сифатида киритилади. Ҳосила ва интеграл тушунчаларининг ўқитиш методикаси олий математика курсидагига ўхшаш бўлиб, фақат хажм жиҳатдан камроқ берилган.

Ўрта махсус муассасаларида математик анализ элементларини урганиш мавзусида тайёрланган ушбу битирув малакавий иш функция, ҳосила ва интеграл тушунчаларини янги педагогик технология элементларидан фойдаланиб ўқитиш технологиясига асосланган.Ушбу тадқиқот битирув малакавий иш мавзусини долзарблигини асослайди.

1. **Тадқиқот мақсади.** Урта махсус муасасаларида математик анализ элементларини урганишни модулли технологияга асосланган ўқитиш технологияларини топиш.
2. **Тадқиқот муаммоси.Функция, ҳосила ва интеграл** тушунчаси мазмунини қайта тузиш орқали унга мос бўлган модулли ўқитиш технологияларини яратиш.
3. **Тадқиқот объекти.** Ўқув дастурлари, ўқув адабиётлари,функция, ҳосила ва интеграл тушунчаси мазмуни уни ўқитиш методикаси ва таълим жараёнлари.
4. **Тадқиқот предмети.** Функция, ҳосила ва интеграл тушунчасини модулларга ажратилган ҳолдаги ўқитиш мазмуни ва методларини ўрганиш.
5. **Тадқиқот фарази (гипотезаси) ва ҳимояга олиб чиқиладиган холатлар.** Таълимда педагогик технологияларни қўллаш учун мавжуд адабиётлардаги урта махсус муасасаларида математик анализ элементларига оид ўқув материалини модулли ўқитиш технологияларига мослаштириш таълимда самарадорликни оширади.
6. **Тадқиқот вазифалари.** Ўқув адабиётлардаги математик анализ элементларига оид ўқув материали ва ўқитиш методикасини тахлил қилиш, замонавий педагогик технологияларни қўллашга мослаштирилган янги мазмун тузиш ва унга мос ўқитиш технологияларни топиш.

7. **Тадқиқот янгилиги (илмийлиги).Функция, ҳосила ва** Интеграл тушунчаларини модулли ўқитиш технологиясини яратиш.
8. **Фан учун аҳамияти.** Келажакда математика фани янги авлод дарсликлари мазмуни учун наъмуналар яратиш.
9. **Амалиёт учун аҳамияти.Функция, ҳосила ва интеграл** тушунчасига оид назарий, амалий, мустақил ишлар, кичик гуруҳлар фаолияти, жамоавий таълим учун яхлит лойиҳа яратиш.

I – боб. Математик анализ тушунчаларини ўрганишнинг ўзига хос хусусиятлари.

1.1. Функция тушунчасини шакллантириш усуллари

Функция тушунчасини киритиш методикаси

Функция тушунчаси бошланғич синфдан бошлаб ошкормас ҳолда шакллантирилади. Бунинг учун содда текстли масалалар берилади. Кейинчалик ўзгарувчи ифодалар ва улар устида амаллар ёрдамида шакллантирила борилади. Мисол учун $2x^2y,\quad 4\mathrm{a}^2-b(a+3b), \frac{\mathrm{a}^2}{a-3}, \frac{\mathrm{x}^2-1}{8}, 9x-\frac{1}{2}$ ифодалардаги ҳарфлар ўрнига қийматлар бериш, ифоданинг қийматини топиш а) $x+\frac{8}{x-1}$, бунда $x=\frac{1}{2}$; б) $\frac{y+3}{y}-\frac{y}{y-3}$ бунда $y=1{,}5$ каби мисолларни ишлаш орқали ҳам функция тушунчаси шакллантирилади. Узунлик, юза, хажмларни топишга доир масалалар ечилади. Икки тўплам орасидаги мослик ва муносабат тушунчалари орқали функция тушунчаси ойдинлаштирила борилади. Икки миқдор орасидаги боғланишларни графларини чизиш функция тушунчасини шаклланишига катта ёрдам беради.

Функция жадваллари ёрдамида сўнгра график ёрдамида тасвирлари берилади. Мисол учун $y=\frac{3x+6}{x-2}$ ифодада x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланишни жадвалда кўрсатинг. Ёки ифода x ўзгарувчининг қандай қийматларда маънога эга эмас ва ҳаказо. Тенгламаларни ечиш, тенгсизликларни ечиш ва уларни ечимларини график усулда топиш ҳам функция тушунчасини шакллантирилишига ёрдам беради. Функция тушунчасига ўқувчини тайёрламасдан функция ҳақида кутилган натижа олиш мумкин эмас. Шу туфайли функция тушунчаси пропудиктив ишлар олиб борилади. Функция тушунчасини тўлиқ тасаввур қилиш учун сон ва ўзгарувчи миқдор тушунчаси ҳақида тўлиқ маълумот бериш лозим. Ҳақиқий сонлар тўплами ва унинг асосий хоссалари ўрганилади. Шундан сўнг ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар тушунчаси берилади. Бу мавзуларга оид машқлар ечилади. Ўзгарувчи миқдорнинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар тўплами, ўсувчи, камаювчи ва чегараланган ўзгарувчи миқдорлар ҳақида тушунча берилади. Шу тарзда функция тушунчаси шакллантирилади. Ундан сўнг функция тушунчаси ўрганилади.

Функция тушунчаси турлича ўрганилади. Мактаб курсида ўзгарувчи миқдорлар ҳақида тушунча берилиб, сонли функция тушунчаси киритилади. Функциялар ва уларни графиклари мактаб курсида ошкор ҳолда ўрганилади. Функциялар ва уларнинг графиклари мавзусида: функция нима?, функциянинг қийматларини формула ёрдамида хисоблаш, функциянинг графиги ўрганилади.

Чизиқли функция мавзусида: чизиқли функция ва унинг графиги, тўғри пропорционалник, чизиқли функциялар графикларининг бир – бирига нисбатан жойлашиши каби мавзуларда функция ҳақидаги тушунча ривожлантирилади. Функция тушунчаси жадвал усулда, аналитик усулда (формула), график усулда берилади. Дастлаб, функцияни оғзаки яъни икки ўзгарувчи миқдор орасидаги боғланиш сифатида, сўнгра икки тўплам элементлар орасидаги мослик ва муносабат каби Эйлер Виен диограммалари ёрдамида геометрик тасвирлаш ўқувчиларни функция таърифини тўғри ўрганишга ёрдам беради. Сўнгра функцияга таъриф берилади.

Ўқувчига функция тушунчасига берилган таъриф осон ва содда усулда берилиши, сўнгра уни тўпламлар назарияси асосида таърифини бериш мақсадга мувофиқ. Функция тушунчасини ўрта мактабда ўрганиш мазмуни ва методикаси анъанавий ўқитиш методикасига асосланган. Дарсликлардаги ўқув материалини педагогик технологияларга асосланиб ўтиш бир қатор муаммолар яратади. Ушбу тадқиқотда функция тушунчасини замонавий технологиялар асосида ўрганиш тадқиқот қилинган.

1.2. Ҳосила тушунчасини шакллантириш муаммолари. Ҳосила тушунчаси мазмуни ва уни ўқитиш методикаси

Ҳосила тушунчасини шакллантириш функция тушунчаси билан боғлиқ ҳолда олиб борилади. 1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ кўриншдаги айирмали муносабатларга оид машқлар ечилади. 2) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s-s_0}{t-t_0}$ муносабатга оид машқлар. Бунда моддий нуқтанинг ҳаракат қонуни берилган бўлса, берилган вақт моментида унинг тезлигини топиш масалаларига оид машқлар бажарилади. Бу келажакда ҳосиланинг механик маъносини билдирувчи оний тезликни топиш масаласига олиб келади. 3) Уринманинг бурчак коэффиценти $k=tg\alpha$ ни топиш масаласи. Яъни $y=f(x)$ эгри чизиқнинг $A(x_0;y_0)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг Ox ўқи билан хосил қилган бурчак коэффицетини топиш. $k=tg\alpha$ ни топиш лозим. Бу уринма тўғри чизиқ бўлганлиги учун унинг тенгламаси $y=kx+b$ кўринишда бўлади. 4) Функция лимити ва узлуксизлиги ҳақида тушунчани такомиллаштириш талаб этилади. Функциянинг узилиш нуқталари ва қутблари ҳақида маълумотлар ойдинлаштирилади. 5) Функция орттирмаси, аргумент орттирмаси, функциянинг орттирилган қиймати, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ муносабатни топиш ва бу муносабатнинг лимитини топишга оид машқлар ҳосила тушунчасини шакллантиради. 6) e сони ва натурал логарифм. 7) ажойиб лимитлар ҳақида тушунча ойдинлаштирилади.

Ҳосила тушунчасини ўқитиш методикаси қуйидагича амалга оширилади. 1) Функцияни узлуксизлиги ва узилиш нуқталари ҳақидаги маълумотларни ойдинлаштириш. 2) $y=f(x)$ функция тушунчаси ойдинлаштирилади. Функциянинг аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами такрорланади. Чегараланган ва чегараланмаган функциялар ҳақидаги маълумотлар ойдинлаштирилади. 3) Функция орттирмаси, $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ифодани $\Delta x \to 0$ га лимити текширилади, лимитни қийматига мос ҳолда ҳосила таърифи берилади. 4) Ҳосилаларни хисоблаш қоидалари ўрганилади. 5) Элементар функцияни ҳосилалари ўрганилади. 6) Функцияни дифференциалланувчанлиги ва дифференциалини топиш. 7) Дифференциал хисобнинг асосий теоремалари ўрганилади. 8) Ҳосилалар ёрдамида функцияларни текшириш ва тақрибий хисоблаш масалалари қаралади.

Ушбу битирув малакавий ишда ҳосилани тадбиқи қаралмайди. Ўрта махсус ва касб – хунар ўқув юртларининг алгебра ва математик анализ асослари курсида ҳосила тушунчаси ўрганилади. Бу тушунча анъанавий ўқитиш методикасига асосланиб ўрганилади. Ушбу тадқиқотда ҳосила тушунчасини педагогик технологияларга асосланиб ўрганиш тадқиқот этилган.

1.3. Интеграл тушунчасини ўрганишни шакллантириш усуллари

Интеграл тушунчасини ўрганиш мазмуни ва методикаси

Интеграл тушунчасини ўрганиш учун функция, кетма – кетлик, лимит, узлуксизлик, аргумент орттирмаси, функция орттирмаси, функциянинг орттирилган қиймати, ҳосиланинг таърифи, ҳосиланинг геометрик маъноси, ҳосиланинг механик маъноси, ҳосилани хисоблаш қоидалари, элементар функцияларнинг ҳосилалари, функциянинг дифференциалланувчанлиги, мураккаб функция, мураккаб функция ҳосиласи, юқори тартибли ҳосилалар, функция дифференциали, дифференциалнинг геометрик маъноси, уринма ва нормал масаласи, ҳосилани тадбиқлари каби тушунчалар ўқувчилар томонидан пухта ўзлаштирилиши лозим. Ҳосиланинг геометрик маъноси ва унга тескари масала, моддий нуқтанинг оний тезлигини топиш ва унга тескари маса лалар ўқувчини интеграл тушунчасига тайёрлаган. Ҳосила ва дифференциаллар жадвали ва жадвалга кўра тескари масалаларни топиш интеграл тушунчасини шаклланишига катта ёрдам беради. Геометрия курсидан жисмларни юзалари хажмларини топиш ёки ёй узунликларини топиш ҳам интеграл тушунчасини шаклланишига олиб келади. Бунинг учун эса мавжуд адабиётлардан дидактик материаллар тайёрлаш мақсадга мувофиқ. Тажрибаларимиздан ҳосила ва интеграл тушунчаларини ўзаро тескари амаллар сифатида ўрганиш сўнгра уларни моҳияти ва мазмунини кенгайтириш аҳамияти катта эканлиги кўрсатди.

Интеграл тушунчаси икки бўлимдан иборат. Аниқмас интеграл бошланғич функция орқали берилади. Аниқмас интеграл бошланғич функциялар мажмуаси сифатида қаралади ва унинг хоссалари ўргатилади. Аниқмас интегрални бошланғич функциядан фарқ қилувчи жиҳатлари чизмаларда кўрсатилади. Аниқмас интегрални хисоблаш усуллари берилади. Бунда бевосита интеграллаш усули, ўзгарувчини алмаштириш усули, бўлаклаб интеграллаш усули берилади. Интеграллаш усулини мустахкамлашга оид бир қатор машқлар берилади. Аниқ интеграл тушунчаси эгри чизиқли терапецияни юзини топиш масаласи орқали киритилади. Бунда бошланғич функция орттирмаси ёрдамида аниқ интеграл тушунчаси киритилади. Ньютон Лейбниц теоремаси берилади ва унга доир машқлар ишланади. Геометрик ва физик катталикларни аниқ интеграл ёрдамида хисоблаш, аниқ интегралнинг қиймат тақрибий хисоблашга доир масалалар ечилади.

Интеграл тушунчасини ўрганиш мазмуни ва ўқитиш методикасини тахлил қилиш аниқмас интегрални етарлича ўрганилмаётганлигини яъни баъзи бир мухим интеграллаш усуллари жумладан содда касрларни интеграллаш, аниқмас коэффицентлар усулини қўллашга доир машқларга жуда кам эътибор бераётганлигини кўрсатди. Интеграл тушунчасини геометрик маъноси ўқувчиларга етарлича ойдинлашмаган.

Интеграл тушунчаси ўқув адабиётларда анъанавий ўқитиш усулига мослаштирилган. Бу тушунчани замонавий таълим технологияларга асосланиб ўрганиш учун унинг ўқув мазмуни ва ўқитиш методикасини қайта ишлаш лозим бўлади. Ушбу битирув малакавий ишда интеграл тушунчасини мазмунини модулларга ажратиб, таълим жараёнини лойиҳалаш қаралган.

II – боб. Математик анализ элементларини ўрганиш технологияси

2.1. $y = kx$ функцияни ўрганиш усуллари

Таянч иборалари

Ўзгармас миқдор, ўзгарувчи миқдор, ўзгарувчили ифода, тўплам, ўзгарувчининг аниқланиш соҳаси, ўзгарувчининг қийматлар соҳаси, пропорционал боғланиш, икки ўзгарувчи миқдорнинг ўзаро боғланиши.

1. Текисликда иккита ўзаро перпендикулар тўғри чизиқ ўтказамиз: бири — горизонтал, иккинчиси — вертикал (1- расм). Уларнинг кесишиш нуқтасини O ҳарфи билан белгилаймиз. Шу тўғри чизиқларда йўналишлар танлаймиз: горизонтал тўғри чизиқда чапдан ўнгга, вертикал тўғричизиқда пастдан юқорига. Ҳар бир тўғри чизиқда бир хил узунлик бирлигини ажратамиз.

Горизонтал тўғричизиқ Ox билан белгиланади ва абсциссалар ўқи дейилади; вертикал тўғри чизиқ Oy билан белгиланади ва ординаталар ўқидейилади. Абсциссалар ўқини ва ординаталар ўқини координата ўқлари, уларнинг кесишиш нуқтасини координаталар боши дейилади. Координаталар боши ҳар бир ўқдаги нол сонини тасвирлайди.

Абсциссалар ўқида мусбат сонлар O нуқтадан ўнгда жойлашган нуқталар билан, манфий сонлар эса O нуқтадан чапда жойлашган нуқталар билан тасвирланади. Ординаталар ўқида мусбат сонлар O нуқтадан юқорида жойлашган нуқталар билан, манфий сонлар эса O нуқтадан пастда жойлашган нуқталар билан тасвирланади.

Йўналишлар ва узунлик бирлиги танланган иккита ўзаро перпендикулар тўғричизиқ текисликда тўғри бурчакли координаталар системасини ҳосил қилади. Координаталар системаси танланган текислик координата текислиги дейилади. Координата ўқлари ташкил қилган тўғрибурчаклар координата бурчаклари (квадрантлар) дейилади ва 1- расмда кўрсатилган тартибда рақамланади.

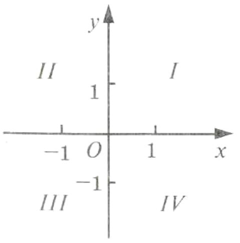
Айтайлик, M — координата текислигининг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (2-расм). M нуқтадан абссиссалар ўқига перпендикулар туширамиз.

Шу перпендикулярнинг асоси M нуқтанинг абссиссаси деб аталадиган бирор x сонни тасвирлайди,

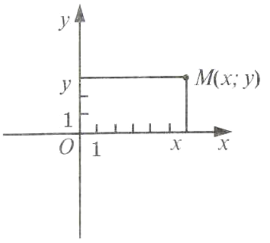
M нуқтадан ординаталар ўқига перпендикулар туширамиз. Шу перпендикулярнинг асоси M нуқтанинг ординатаси деб аталадиган бирор y сонни тасвирлайди.

M нуқтанинг абссиссаси ва ординатаси M нуқтанинг координаталари дейилади. $M(x;y)$ ёзуви M нуқта x абссиссага ва y ординатага эга эканини билдиради. Бу ҳолда M нуқта $(x;y)$ координаталарга эга деб ҳам айтилади. Масалан, $A/(3;5)$ ёзувида 3 сон! — абссисса, 5 сони — ордината.

Нуқталарнинг координаталарини ёзишда сонларнинг тартиби муҳим аҳамиятга эга. Масалан, $M_1(1;2)$ ва $M_2(2;1)$ нуқталар текисликдаги ҳар хил нуқталардир (3- расм).



1- rasm.



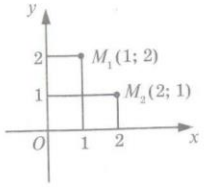
2- rasm.

Хусусий ҳолларни қараймиз:

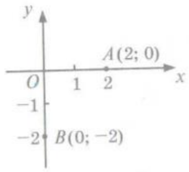
1. Агар нуқта абссиссалар ўқида ёйса, у ҳолда унинг ординатаси нолга тенг бўлади. Масалан, A нуқта (4- расм) $(2;0)$ координаталарга эга.

2. Агар нуқта ординаталар ўқида ёйса, у нолда унинг абссиссаси нолга тенг бўлади. Масалан, B нуқта (4- расм) $(0;-2)$ координаталарга эга.

3. Координаталар бошининг абсциссаси ва ординатаси нолга тенг: $O(0;0)$.



3- rasm.

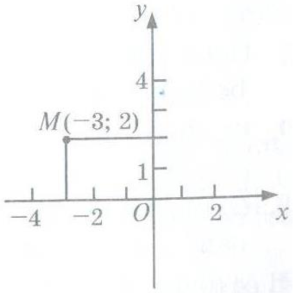


4- rasm.

Координата текислигининг ҳар бир M нуқтасига $(x;y)$ сонлар жуфти _ унинг координаталари мос келади ва ҳар бир $(x;y)$ сонлар жуфтига координата текислигининг координаталари $(x;y)$ бўлган биргина М нуқтаси мос келади.

Масала. $M(-3;2)$ нуқтани ясанг.

Δ Абсциссалар ўқида -3 координатали нуқтани белгилаймиз ва бу нуқта орқали шу ўққа перпендикулар ўтказамиз. Ординаталар ўқида координатаси 2 бўлган нуқтани белгилаймиз ва у орқали ординаталар ўқига перпендикулар ўтказамиз. Шу перпендикулярнинг кесишиш нуқтаси изланаётган M нуқта бўлади (5- расм).



5- rasm.

Машқлар

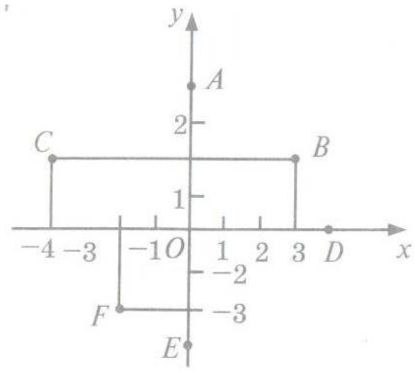
1. Нуқтанинг абсциссаси ва ординатасми айтинг ҳамда шу нуқтани ясанг: $(1;0),(4;0),(0;-2),(-6;0),(0;-7),(0;0)$ 2. 6- расм бўйича A, B, C, D, E, F

нуқталарнинг координаталарини топинг.

3. Нуқталарни ясанг:

1) $A(3;4)$, $B(2;-5)$, $C(-2;5)$, $E(-6;-2)$, $F(3;-0{,}5)$, $K(3;0)$, $M(0;1{,}5)$, $N(-3{,}5;3{,}5)$, $L\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

2) $A(-1{,}5;2{,}5)$, $B(-2{,}5;1;5)$, $C\left(3\frac{1}{2};1\right)$; $F(2;-2)$, $M(0;2{,}5)$.



6- rasm.

2. Функция тушунчаси

Ушбу масалани қарайлик.

1 - масала. Поъезд Тошкентдан Самарқандга томон 60 км/соат тезлик билан ҳаракат қилмоқда. У жўнагандан t соат кейин Тошкентдаи қанча масофада бўлади?

Агар изланаётган масофа 5 (км ҳисобида) ҳарфи билан белгиланса, жавобни бундай формула билан ёзиш мумкин:

$$S = 60f.A \qquad (1)$$

Пойезднинг ҳаракати давомида s йўл ва t вақт ўзгариб боради. Шу нинг учун улар ўзгарувчи катталик (миқдор)лар ёки ўзгарувчила дейилади. Бунда s ва t ихтиёрий равишда эмас, балки (1) текис ҳарака қонунига бўйсунган ҳолда ўзгариши муҳим аҳамиятга эга.

Бу қонунга мувофиқ, t вақтнинг ҳар бир қийматига s йўлнинг аниқ бир қиймати мос келади (мос қўйилади). Масалан, $t = 2$ бўлганда (1) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$s = 120$$

Шундай қилиб, (1) формула s йўлни t вақтнинг берилган қиймат бўйича ҳисоблаш қоидасини белгилайди. Бу масалада t мусбат ва пойезднинг Тошкентдан Самарқандгача ҳаракат яқтидан катта бўлиш мумкин эмас.

Ўзгарувчи миқдор (катталик)лар орасидаги боғланишнинг яна биз мисолини қараймиз.

Айтайлик, x квадрат томонининг узунлиги, y эса унинг юзи бўлсин. Бу ҳолда

$$y = x^2 \qquad (2)$$

(2) формула y юзни томоннинг олдиндан берилган қиймати бўйича ҳисоблаш қоидасини беради. Масалан, агар $x = 2$ бўлса, $y = 4$ бўлади; агар $x = 3$ бўлса, $y = 9$ бўлади ва ҳоказо. Бу масалада x мусбат сонлар ўпламидан исталган қийматни қабул қилиши мумкин.

Қаралган мисолларда бир ўзгарувчили миқдорнинг олдиндан берилган қиймати бўйича иккинчисининг қийматини топишга имкон берувчи жоидалар кўрсатилди.

Агар бирор сонлар тўпламидан олинган x нинг бир қийматига бирор қоида бўйича y сон мос қилиб қўйилган бўлса, у ҳолда шу тўпламда функция аниқланган дейилади.

y миқдорнинг x миқдорга боғлиқлигини таъкидлаш учун кўпинча $y(x)$ деб ёзилади (ўқилиши: „игрек иксдан"). Бунда x эркли ўзгарувчи, $y(x)$ эса эрксиз ўзгарувчи ёки функция дейилади.

Масалан: Квадратнинг юзи унинг x томони узунлигининг функцияси бўлади, яъни

$$y(x) = x^2$$

Бундай ёзувда $y(2)$ томони 2 га тенг бўлган квадратнинг юзини билдиради, яъни $y(2)=22=4$. Худди шундай, $y(5)=25$, $y(6)=36$.

$y(2)$ сони $y=x2$ функциянинг $x=2$ бўлгандаги қиймати дейилади. Бу функциянинг $x=5$ бўлгандаги қиймати 25 га, $x\sim 6$ бўлгандаги қиймати эса 36 га тенг.

Одатда эркли ўзгарувчи x ҳарфи билан, эрксиз ўзгарувчи эса y ҳарфи билан белгиланади. Лекин бундай белгилаш мажбурий эмас. Масалан, шу параграфнинг бошида қаралган масалада 5 йўл t вақтга боғлиқ, яъни s йўл вақтнинг функцияси. Бу ҳолда

$$s(t)=60p$$

каби ёзилади. Бундай ёзишда 5(2) ифода 2 соат ичида ўтилган йўлни илометр ҳисобида билдиради, яъни

$$s(2)=60-2=120$$

Худди шу каби $s(1)=60$ ва $s(3)=180$. Функция берилишининг баъзи усулларини қараймиз.

1. Функция формула билан берилиши мумкин. Масалан,

$$y=2x$$

формула x нинг берилган қиймати бўйича y нинг қийматини қандай ҳисоблаш кераклигини кўрсатади. Функциянинг бундай усулда берилиши аналитик усул дейилади.

2- масала. Функция $y=x^2=x=1$ формула билан берилган. $y(-2), y(0), y(I)$ ни топинг.

1) Бу формулага $x=-2$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $y(-2)=(-2)^2=(-2)=1=4-2=1=3$;

2) $y(0)=0^2=0=1=1$;

3) $y(1)=I^2=1=1=3$.

Жавоб: $y(-2)=3,\ \ y(0=1),\quad y(I)=3$.

3- м а с а л а . Функция $y=-3x=5$ формула билан берилган. x иинг шундай қийматини топингки, унда $y=-1$ бўлсин.

A формуладаги y нинг ўрнига -1 сонини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-1=-3x=5.$$

Бу тенгламани йечиб, топамиз: $3x=5=1,$ х - 2.

Жавоб: $x=2$.

2. Функция жадвал билан берилиши мумкин.

Масалан,

x	i	2	3	4	5	6	7	8
y	i	4	9	16	25	36	49	64

Бу жадвалга мувофиқ $x=3$ қийматга $x=9$ қиймат мос келади, $x=5$ қийматга $x=25$ қиймат мос келади. Функциянинг бундай берилиш усули жадвал усули дейилади.

Функциянинг жадвал усулида берилишига доир мисоллар: натурал сонлар квадратлари жадвали, натурал сонтар кублари жадвали, банкка қўйилган пул миқдорига қараб, жамғарманинг кўпайиб бориш жадвали.

3. Амалда кўпинча функцияни унинг графиги ёрдамида берилиш усули қўлланилади.

Функциянинг графиги – бу координата текислигининг абссиссалари эркли ўзгарувчининг қийматларига, ординаталари эса функциянинг мос қийматларига тенг бўлган барча нуқталари тўпламидир.

4-масала, $y=x^2=2$ функция берилган. Шу функциянинг графигига координаталари: 1) $(1;3)$; 2) $(2;2)$ бўлган нуқта тегишли ёки тегишли эмаслигини аниқланг.

1) y нинг қийматини $x=1$ бўлганда топамиз:

$I^2=2=3$ бўлгани учун $(1;3)$ нуқта берилган функция графигига тегишли бўлади.

2) $y(2)=2^2=2=6$

Графикнинг абссиссаси $x=2$ бўлган нуқтаси $x=6$ ординатага эга, шунинг учун $(2;2)$ нуқта берилган функция графигига тегишли эмас. Фараз қилайлик, координата текислигида бирор $y(x)$ функциянинг графиги тасвирланган бўлсин (7- расм). Берилган график бўйича x нинг бирор аниқ қийматига $y(x)$ функциянинг мос қийматини топиш учун бундай йўл тутамиз. Абссиссалар ўқининг x координатали нуқтасидан шу ўққа перпендикулар ўтказамиз ва унинг берилган функция графиги билан кесишган нуқтаси M ни топамиз. Кесишиш нуқтасининг ординатаси функциянинг мос қиймати бўлади (7- расм).

Функциянинг график ёрдамида берилиш усули график усул дейилади

Функциянинг график усулда берилишидан илмий-тадқиқот ишларида ва ҳозирги замон ишлаб чиқаришида кенг фойдаланилади. У ерларда қўлланиладиган ўзи ёзар асбоблар температура, тезлик, босим каби катталикларнинг ўзгариш графикларини автоматик тарзда чизади

Машқлар

4) x нинг қиймати $-2;1;0;2$ га тенг бўлганда:

1) $y=-2x$ 2) $y=20x=4$

функциянинг қийматини ҳисобланг.

Жавоб; 1) 4 ;2;0;-2;-4 . 2) -36; -16; 4;24; 44.

5) . Функция $s=60t$ формула билан берилган, бу ерда s — йўл (км ҳисобида), t — вақт (соат ҳисобида).

1) $s(2)$, $s(3{,}5)$, $s(5)$ ни аниқланг;

2) агар $s=240$ бўлса, t ни аниқланг.

6). (Оғзаки.) қуйидаги жадвал атмосфера босими P нинг денгиз сатҳидан h баландликка боғиқлигини ифодалайди:

x, км ҳисобида	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20
A мм.сим. уст.	760,0	716,0	674,0	596,1	525,7	462,2	404,2	198,1	40,9

1) 1 км; 3 км; 5 км; 10 км баландликдаги босимни айтинг;

2) денгиз сатҳидан қандай баландликда босим 760,0 мм.сим.уст.га; 462,2 мм.сим.уст.га тенг бўлади?

Назорат саволлари

I. Тест олиш ва хотирани тиклаш ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлври

1. Квадратнинг юзи 5 га тенг бўлса унинг юзини топинг.

а) 5 ; б) 10 ; с) 25 ; д) 2.5

2. тўғри тўртбурчакнинг томонлари 5 ва 4 га тенг бўлса унинг юзини топинг

а) 21 ; б) -20 ; с) 20 ; д) 16

3. Ўзгарувчиларнинг қандай қийматларида $\frac{5}{2x-4}$ ифода маънога эга бўлмайди?

а) $x=0$ б) $x=2$ с) $x=-2$ д) $x=1$

4. Ўзгарувчиларнинг қандай қийматларида $\frac{a}{a-b}$ ифода маънога эга бўлади ?

а) $a>b$ б) $a<b$ с) $a=b$ д) $a\neq b$

5 $\frac{2x+y}{x-3y}$ ифоданинг қийматларини топинг

а) $x=4,\ \ y=1{,}5$ б) $x=1,\ \text{y}=0$ с) $x=1{,}3,\ \text{y}=\text{-}2{,}6$ д) $x=-1, \text{y}=\frac{1}{3}$

6 $\frac{2x+y}{x-3y}=1$ ифода $x=2$ бўлганда у ни топинг

а) $y = 0.5$ б) $y = 1$ с) $y = 0$ д) $y = \frac{1}{2}$

7 Тўғри тўртбурчакнинг томонлари турли қийматлар қабул қилса унинг юзи қандай ўзгаришини қуйидаги жадвалда кўрсатинг

a	1	1	3	5	4	0.9
b	1	2	4	1	0.5	6
c						

8 Тўғри тўртбурчакнинг бўйи a см эни b см қуйидаги ифодалар нимани билдиради ?

а) ab б) $a + b$ с) $2a + 2b$ д) $2a$

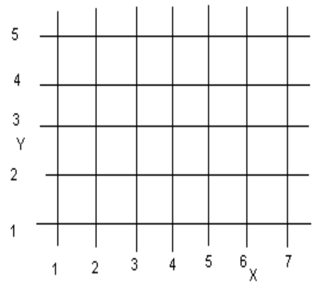
9 Дафтар x- сўм ручка y-сўм . қуйидаги ифода нимани билдиради?

а) $x + y$ б) $3x + y$ с) $2x + 2y$ д) $\frac{x}{y}$

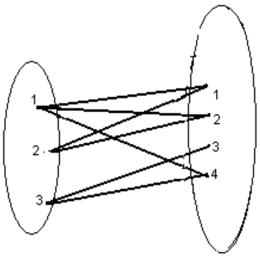
10 Агар $x - y = 5$ га тенг бўлса қуйидагиларни топинг

а) $5(x - y)$ б) $y - x$ с) $\frac{1}{x - y}$ д) $\frac{x - y}{y - x}$

14 Жадвалдан x ва y миқдорлар орасидаги боғланишларни изохлаб беринг



15 x ва y топламлари орасидаги муносабатни изохлаб беринг



II. Репродуктив ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлари

1 Бозорда 1кг олма 500 сўм туради. Сотиб олинадиган олмалар ва унинг нархи орасидаги боғланишни формула Билан ифодаланг

а) $y = 3x$ б) $x = 4y$ с) $y = x$ д) $y = 500 * x$

2 1 та дафтар 300 сўм туради Сотиб олинадиган дафтарлар ва уларнинг нархи орасидаги муносабатни жадвалда кўрсатинг

x	1	10	15	30	31	40
y	300					

3 1 та китобнинг нархи 2 минг сўм турса 2 та китобнинг нархи неча сўм бўлади

а) 10 минг б) 4 минг с) 18 минг д) 4.5 минг

4 $y = \frac{2x-3}{4}$ $-4 \le x < 4$ формуладан x нинг бутун қийматларига мос келувчи у нинг қийматларини топинг ва бу боғланишни жадвалда кўрсатинг

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

5 $y = \frac{2x-3}{4}$ $-4 \le x \le 4$ боғланишда x ўзгарувчининг аниқланиш сохасини кўрсатинг

а) -1 б) 4 с) $x = \pm 3$ д) -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4.

III. Продуктив ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлари

1 $y = \frac{1}{x}$ функционал боғланишда $y -$ орттирма $x -$ функция бўлган

ҳолда функция қандай ёзилади ?

а) $y = \frac{1}{x}$ б) $x = \frac{1}{y}$ с) $xy = 1$ д) бу ҳолда функционал боғланиш мавжут эмас

2 $y = \frac{3}{x-2}$ функционал боғланишда $x -$ функция орттирма бўлган ҳол учун боғланишни ёзинг

а) $(x-2)*y = 3$ б) $x = \frac{3}{y-2}$ с) $\begin{matrix} xy - 2y = 3 \\ xy = 3 + 2y \end{matrix}$ д) $x = \frac{3+2y}{y}$

3 $x = \frac{3+2y}{y}$ функционал боғланишда функция аниқланиш соҳасини кўрсатинг

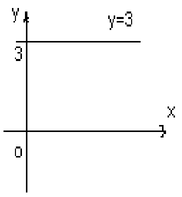
а) $y \neq 0$ б) $y = -1$ с) $y > 0$ д) $y < 0$

4 Автомашина $S = v*t$ ҳаракат қонунига кўра соатига 75 км тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Автомашина 5 соатдан сўнг қанча масофани босиб ўтганлигини топинг ва унинг графигини ясанг.

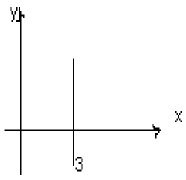
а) Графиги мавжут эмас б) $S = 375\ km$ с) $S = 0$ д) $S = 150$ км

5 Функционал боғланиш $y = 3$ кўринишда берилган бўлса уни графигини чизинг

а)

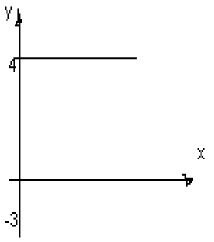


б)



с) графиги мавжут эмас

д)



9 Жадвалдаги x ва y ни қийматлари орасидаги боғланиш графигини ясанг. У функция бўладими ?

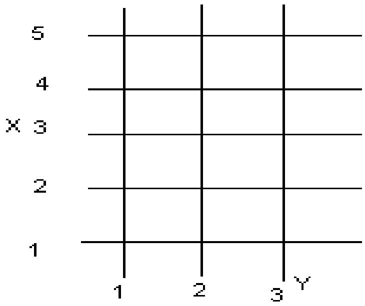
Х	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
У	1	0	-2	-3	-2	0	1	2	3	3.5	4	3.5	2

10 $x=\{-3;-2;0;1;3;4;5\}$ бўлса, $y=\dfrac{2x-5}{3x-4}$ ни ҳисобланг ва функция графигини ясанг

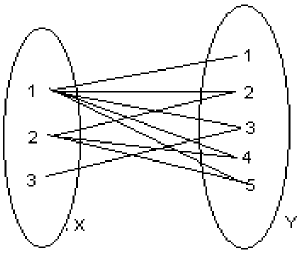
IV. Ижодий ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлари

1 $y=f(x)$ функционал боғланишда функциянинг аниқланиш соҳаси x – билан унга мос y – ни қабул қилган қийматлар тўпламини у билан белгиласак $1\le x\le 3$ бўлганда $y\le y\le 5$ бўладиган қийматлар орасидаги муносабат чизмада ифодаланган.

Чизмадаги бундай боғланиш функция бўладими ?

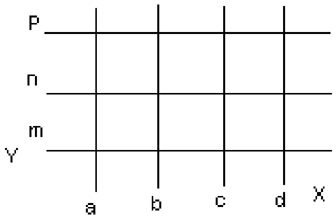


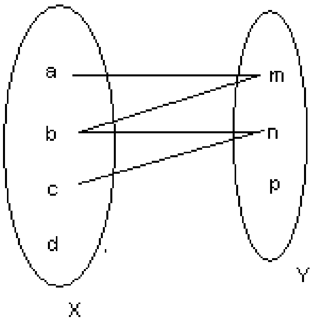
2 1 – чизмадаги x ва y лар орасидаги муносабатни диограммада кўрсатиб унга функция тарифига кўра боғланишни яъни функция бўладими ёки йўқми асослаб беринг



а) йўқ б) ҳа с) мавжут эмас д) Функцияни бундай тасвирлаш билан боғланишни аниқлаб бўлмайди .

3 Чизмалардаги x ва y орасидаги боғланиш функция бўладими?





5 $X = \{a;b;c;d\}$ ва $Y = \{m;n;p\}$ тўпламлар берилган . Бу тўплам элементларда қуйидаги муносабатлар тузилган.

$f = \{(a;m),(b;m),(b,n),(c;n),(d;p)\}$

$y = \{(a;n),(b;m),(c;p),(d;n)\}$

$h = \{(a;p),(b;m),(c;p),(d;p)\}$

1) Бу муносабатларни чизмаларда тасвирлаб уларни қайсилари функционал боғланиш бўлишини кўрсатинг.
2) Бу муносабатларни аниқланиш соҳаларини кўрсатинг.

2.2.Ҳосила тушунчасини ўрганиш технологияси.

Функция, тезлик, оний тезлик, бурчак коэффиценти, орттирма, ҳосила таърифи, ҳосиланинг геометрик маъноси, ҳосиланинг механик маъноси, ҳосила топишнинг умумий қоидаси, ҳосилалар жадвали.

Функция ортирмаси. Биз функциялар қийматлари жадвалини тузиз жараёнида функциянинг $\Delta f(x) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ чекли айирмаси билан танишганмиз. Унда функциялар аргументининг дискет қийматларидан қаралди, функция ўзининг бир $f(x_0)$ қийматидан иккинчи $f(x_0 + \Delta x)$ қийматига сакраб ўтгандек бўлади. Бунда $\wedge x = h$ жадвал қадами. Енди биз аргументнинг узлуксиз ўрганишга боғлиқ масалаларга ўтамиз.

Тўғри чизиқли харакат қилаётган нуқталарнинг x вақт моментдаги кординатаси (ўтилган масофа) $f(x)$ бўлсин. Нуқта $\Delta x = b - a$ вақт оралиғида $|\Delta f(a)| = |f(b) - f(a)|$ радар кўчади. Агар бунда $\Delta f \succ 0$ бўлса, кўчиш муносабати йўналишида, $\Delta f \prec 0$ бўлса, кўчиш манний йўналишда бажарилган бўлади.

$x_0 = 0$ дан x кўчишдаги $\Delta x = h = x - a$ айирма *аргумантнинг* а нуқтадаги *орттирмаси,* $\Delta f(a) = f(x) - f(a)$ айирма *функциясининг* шу нуқтадаги *орттирмаси* дейилади.

1-мисол. Аргументнинг бошланғич қиймати $a = 5,$ орттирмаси $h = 0{,}1. f(x) = x^2$ функція орттирмасни топамиз.

Ечиш . Аргумент $a = 5$ дан $h = 0{,}1$ га ортган: $a + h = 5{,}1.$

У холда $\Delta f(5) = f(5{,}1) - 5{,}1^1 - 5^2 = 1{,}01.$

2-мисол. Аргумент орттирмаси h га тенг. $f(x) = kx + l$ чизиқли функция орттирмасини топамиз.

Ечиш: $f(a + h) = k(a + h) + l;$

$$\Delta f(a) = f(a + h) - f(a) = k(a + h) + l - ka - l = kh$$

3-мисол. Кубнинг томони a га тенг. Агар томонлари h орттирилса, унинг хами қандай ўзгаради?

Ечиш: Томонлар h га орттирилгандан сўнг унинг хами $(a + h)^3$ га тенгбўлади. Натижада кубнинг хами

$$\Delta V = (a + h)^3 - a^3 = 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

га ортади.

Дарс жараёнида бажариладиган топшириқлар

1 $x = a$ дан $x = b$ га ўтишда f функция қабул қиладиган орттирманинг физик, геометирик маьносини тушунтиринг, берилган сонли маълумот бўйича орттирмани топинг.

1) $f(x)$-ўзакчининг кўндаланг кесимидан x вақтидаўтадиган электир миқдори $(a = 4s, b = 7s,\ f(x) = 5xKl, Klon);$

2) $f(x)$-тўғри чизқли харакат қилаётган жисимнинг x вақт ичида ўтган йўли $(a = 0, b = 2s,\ f(x) = x^2 + 18xm);$

3) $f(x)$-бир жинсли бўлмаган цереннинг бир учидан бошлаб x узунликдаги қисимнинг массаси $(a = 0, b = 0{,}35v,\ f(x) = 2x^2 + 3xkg)$

2. Кубнинг қирраси 1 см (5см;10см). Агар мирра 1 см га, 0,5 см га, 0,2 см га орттирилса, кубнинг хами қанчага ортади?

3. $[a;b]$ кесмадан $\Delta f(x)$ орттирма ва Δx орттирмасининг ишоралари бир

хил. Шу кесмада функцiя ўсувчими (камайивчими?)

Ишоралар хар ҳил бўлса-чи?

4. Функциянинг а нуқтадаги орттирмасини топинг:

1) $f(x) = 2x^2 - x, a = 4, h = 0{,}1;$

2) $f(x) = -4 + 3x + x^2, a = -2, h = 0{,}1;$

3) $f(x) = x - 2x^3, a = -1, h = -0{,}2;$

2. Функция ҳосиласи. $y = x^2$ функция графигининг (1; 1) нуқта яқинидаги холатни кузатайлик. V.1-а расмда параболанинг $h - 2$ узунликдаги $[0;2]$ керма устида қисм тасвирланган. Чизиқ ўз эгрилиги билан шу нуқтада ўсувчи $y = kx + l$ уринувчи тўғри чизиқдан кескин фарқ қилади. Шу нуқта атрофини катароқ тасвирлайлик (V.1-б расм) Пароболнинг нисбатан кичик $h = 0{,}2$ узунликка эга.

Бўлган $[0{,}9;1{,}1]$ кесмадаги қисм унча эгри эмас. $\Delta x = h$ нинг знада кичик қийматларидан парабола ва тўғри чизиқ кесмалари дейилади усма-уст тушади, яъни парабола (1; 1) нуқта яқинида «*чизиқ кичик*» холатида бўлади. У бошқа нуқталар яқинида хам шундай «чизиқ кичик» ҳоссага эга бўлади. Физика нуқтайи назардан «чизиқ кичик» ҳоссаси мос физик жараён дерли текис, дерли домий тез лик билан рўй бераётганини англатади. Математика «чизиқли кичик холатидаги функция» тушунчаси дифференцалланувчи номи билан ата лади (лот: дифферентиа-айирма). Холатни математик жихатидан тушунтирамиз.

Агар $x = a$ дан $x = a + h$ га ўтишда f функция орттирмасини

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = (k+\alpha)h \qquad (1)$$

Кўринишда бериш мумкин бўлса, f функция $x = a$ да *дифференцалланувчи функция* дейилади, бунда k -сон, $\alpha(x)$ функция

$\Delta x = h \to 0$ да чексиз кичик, $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(x) = 0$

Масалан, $f(x) = kx + l$ чизиқли функция орттирмаси

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = k(a+h) + l - ka = kh,$$

Яъни $\alpha(x) = 0$ бўлишини кўрамиз. Демак, чизиқли функция ч нинг барча қийматларидан дифференцалланади.

Бошқа дифференцалланувчи функциялар учун Δx ва Δf орттирмаларнингфарқ тақрибий пропорцоналлиги ўринли бўлади:

$$f(a+h) - f(a) \approx kh,$$

бундаги четланиш $\alpha(x)$ га тенг.

1-мисол. x^2 функция x нинг исталган қийматидан дифференцалланади. Хақиқатан, функция x дан $x+h$ га ўтишда

$$\Delta f = (x+h)^2 - x^2 = (2x+h)h$$

орттирмага эга, ундаги $2x$ тарифи бўйича k ни, h эса α функцияни ифодалайди, $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$

(1) тенгликдан: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \alpha$, бунда $h = (x+h) - x = \Delta x, \lim\limits_{h\to 0}\alpha(x) = 0$

Буларга кўра:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \qquad (2)$$

ва

$$\lim_{h\to 0}\alpha(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\right)=0.$$

Аксинка, бу лимитли ифодадан (1)тенгликни хосил қилиш мумқин. Шу тариқа ушбу терома исбот қилинади.

1-м и с о л. 1) $y=x;$ 2) $y=x^2;$ 3) $y=ax^2+bx+c;$ 4) $y=x^3$ функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

Е ч и ш. 1) $y=x=1\cdot x+0,$ бундан $k=y'=1$, яни $x'=1$ бўлишни аниқлаймиз. Бу мисолда (3) каби лимит формулаларидан фойдаланишга хожат бўлмайди;

2) **(**1) формула бўйича:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-(\Delta x)^2=(2x+\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Орттирма $\Delta y=(k+\alpha)\cdot\Delta x$ кўринишда тасвирланади. Унда $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0, k=2x$ Демак, $\left(x^2\right)'=2x;$

3) функция орттирмаси:

$$\Delta y=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-\left(ax^2+bx+c\right)=2ax\cdot\Delta x+a(\Delta x)^2+b\cdot\Delta x.$$

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатан:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(2ax+a\cdot\Delta x+b)\cdot\Delta x}{\Delta x}=2ax+a\cdot\Delta x+b;$$

топилган нисбатнинг $\Delta x\to 0$ даги лимити:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2ax + a \cdot \Delta x + b\right) = 2ax + b$$

Демак, $\left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b;$

4) $\Delta\left(x^3\right) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \left(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) \cdot \Delta x,$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2$$

Кичик гурухлар фаолияти учун топшириқлар

7. Функцияларнинг дифференцалланишни исбот қилинг.

1) $\sqrt{x}, \ \ x \succ 0;$ 2) $-\frac{1}{x}, x \neq 0;$ 3) $\frac{1}{x-5}, x \neq 5;$

4) $-\frac{1}{\sqrt{x}}, x \succ 0;$ 5) $-\frac{1}{x^2}, x \neq 0;$ 6) x^4

9. Функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1) $\frac{4}{9}x - 1;$ 2) $5 - 7x^2;$ 3) $\sqrt{7x};$

4) $2 + \sqrt{7x}$ 5) $x^3 + \sqrt{3};$

10. $f(x)$ функция $f'(x)$ ҳосиласининг $x = a$ нуқтадаги қийматни топинг:

1) $4 - 5x^2, a = 1;$

2) $\sqrt[3]{4 + \sqrt{6x}}, \ \ a = \frac{8}{3};$

3) $x^3, a = -1, a = 3, a = -0{,}5.$

Мустақил ишлар

18. $f(x)$ функциянинг $x = a$ дан $x = b$ га ўтишдаги чекли айирмаси, орттирмаси, ҳосиласи, дифференциал тушунчаларнинг амъносининг физик ва геометирик мисоллари ёрдамида тушунтиринг.

19. Дифференцалларни топинг:

1) $d\left(\frac{4}{9}x\right)$;   2) $d\sqrt{x}$;   3) $d\left(5x^2\right)$; 4) $d\left(\sqrt[3]{x}\right)$;   5) $d(kx+l)$.

4. Функция графигини урунувчи тўғри чизиқ. $y=f(x)$ функция гирафигида ётган $M(x_0;y_0)$ ва $N(x_1;y_1)$ нуқталар устида кесувчи (a) тўғри чизиқни ўтказайлик (V.2-расм). Унинг тенгламиси:

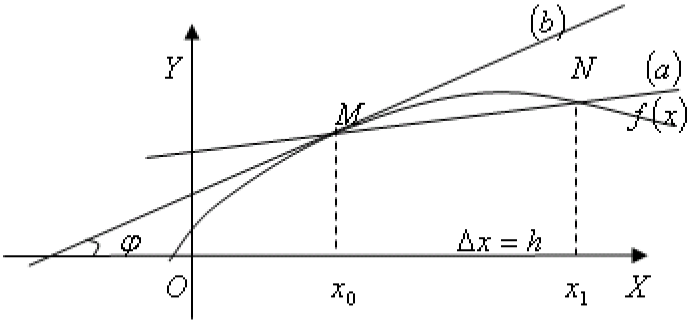
$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(x-x_0\right)+y_0, \qquad (1)$$

бўлади, бунда $\Delta x=x_1-x_0=h, dy=y_1-y_0=f(x_0+h)-f(x_0), N$ нуқтани қўзғалмас M нуқта томон $f(x)$ чизиқ бўйича силжитсак, (a) кесувчи M нуқта атрофида бўриб харакатланади ва M нуқтадан ўсувчи (b) уринмаган яқинлашган. Уринма эса оғма бўлсин, у холда $\Delta x=x_1=x_0$ оралиқ қисқаради. Бунга қараганда $\cup \mathrm{NM}\to 0$ ёки $\Delta x\to 0$ да (a) кесувчи (b) уринма холатида бўлади.

Натижада (a) тўғри чизиқ k_{kes} бурчак койффицентининг $\mathrm{NM}\to 0$ даги лиммит (b) уринманинг $k_{urin}=tg\varphi$ бурчак койффицентига тенг бўлади.

$k_{kes}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ бўлганидан қуйдагиларга эга бўламиз:



ва

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2)$$

бу мулохазалардан уринма ома, яъни $\varphi \neq 90^0$ деб олинади. Уринма вертикал бўлган холда $tg\varphi$ аниқланмаган бўлади $\left(tg90^0 = +\infty\right)$.

Мисол. Абссиаси $x = -3$ бўлган нуқтада $t = 9 - x^2$ эгри чизиққа уринувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз.

Ечиш : (2) форму ладан фойдаланамиз. Биз

$f'(x) = \left(9 - x^2\right)' = -2x,\ k = f'(-3) = -2 \cdot (-3) = 6.$ У холда

$y = \left(-9(-3)^2\right) + 6 \cdot (x - -(-3)) = 6x + 18.$

Уйга вазифа

21. Абиссаси $x_0 = 1$ бўлган нуқтадан $y = 2x^2$ эгри чизиққа урунивчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

22. ординатаси $y_0 = -2$ бўлган нуқтада $y = x^2 - 4x + 1$ эгри чизиққа урунувчи тўғри чизиқнинг тегнламасини тузинг.

23. $y = -2x + 6$ тўғри чизиққа параллел бўлган ва $y = x^2 - 6x + 5$ параболага уринувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

24. В$(2;-5)$ нуқтадан ўтиб, $y = x^2 - 6x + 5$ параболага уринувчи тўғри чизиқлар тенгламаларини тузинг.

Жамоавий таълим учун топшириқлар

олдинги боблардан функсиянинг узлуксизлиги хақида бир қатор маьлумотга егамиз. $f(x)$ функсиянинг $x=a$ нуқтада узлуксиз бўлиши учун:

1) $f(a)=b,$ унда $b-$аниқ қиймат; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ бўлиши керак. Бу шартлардан ақалли бири бажарилмай қолса, функция $x=a$ нуқтада узи лади. Маса лан, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ функция $x=2$ нуқтада узлуксиз. Чунки $f(2)=1,$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1.$ Лекин у $x=1$ да узилади:

1-шарт бажарилмайди (функция аниқ қийматга эга эмас). Унинг графигига, масалан, (1; 3) нуқта киритилиши билан тузиладиган ушбу

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & \text{агар } x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases} \text{ бўлса,}$$

Функция хам узилишга эга: эни 1-шарт бажарилади, 2-шарт эса бажарилмайди: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ (чексиз лимит). Масалани ойдинлаштириш мақсадида ушбу теоремадан фойдалинамиз:

Кичик гурухлар фаолияти учун топшириқлар

25. Қуйидаги функцияларнинг $x=a$ нуқтада узлукизлги, лекин унда дифференциалланмаслигини исбот қилининг:

1) $f(x)=|x-3|, a=3;$ 2)

26. Қуйдаги фнкциалар $x=0$нуқтада дифференциалланадими?

1) $f(x)=\dfrac{3|x|}{x};$ 2) $f(x)=-2|x|;$ 3) $f(x)=\dfrac{x}{4};$

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{4};$

2.2. Интеграл тушунчасини ўрганиш технологияси.

Таянч ибора ва асосий тушунчалар

Функция, лимит, узлуксизлик, ҳосила, орттирма, ҳосиланинг геометрик маъноси, ҳосиланинг механик маъноси, ҳосила олиш қоидалари, уринма ва нормал, дифференциал, дифференциаллаш қоидалари, ҳосилалар жадвали, бошланғич функция, аниқмас интеграл, аниқмас интегралларни асосий хоссалари, интеграллаш усуллари, интегралнинг геометрик маъноси, Ньютон – Лейбниц формуласи.

2.2.1. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1. Интеграллаш амали. Бошланғич функция. Биз $F(x)$ функциянинг $F''(x)$ ҳосиласини топиш зарур бўлса, функцияларни дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланганмиз. Агар ҳосила x аргументнинг функцияси бўлиб, уни *f(x)* орқали белгиласак, $F^{'}(x)=f(x)$ бўлади ва *F(x)* функция дифференциалини $dF(x)-F^{'}(x)dx$ *ёки* $dF(x)=f(x)dx$ кўринишда ёзиш мумкин бўлади. Аксинча функциянинг бирор X оралиқда берилган *f(x)* ҳосиласи бўйича шу оралиқда аниқланган *F(x)* функциянинг ўзини топиш талаб этилса, *f (x)* функцияни *интеграллаш* амалидан, яъни интеграллаш номи билан аталувчи махсус қоидалар ва формулалардан фойдаланилади. Изланаётган *F(x)* функция *f(x)* учун бошланғич функция вазифасини ўтайди. Интеграллаш амали $\int$ белгиси билан белгиланади (лотинча – integrare - тиклаш).

Шундай қилиб, бирор X оралиқдаги барча х лар учун $F^{'}(x)=f(x)$ ўринли бўлса, *F (x)* функция шу оралиқда *f(x)* функциянинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Математикага интеграл атамасини швейцариялик математик Иоганн Бернулли (1997-1748) киритган ва интеграл ҳисобдан биринчи систематик курс тайёрлаган. Унинг шогирди Петербург фанлар академиясининг ҳақиқий аъзоси Леонард Эйлер (1707-1783) иентаграллашни $\int fdx$ белгиси орқали белгиланган. Ҳозирги замон белгилашларини эса француз математиги Ж.Фурье (1768-1860) киритган.

1-мисол. Агар $F^{'}(x)=f(x)=4x^3,\ x\in R$ бўлса, бошланғич функция $F(x)=x^4$ ва умуман $F(x)+C=x^4+C$ бўлади, бунда С-ихтиёрий ўзгармас сон. Чунки $(F(x)+C)^{'}=(x^4+C)^{'}=4x^3+0=4x^3.$

Дифференциаллаш ва интеграллаш амаллари ўзаро тескари амаллардир. *F(x)Ш* функцини интеграллаш $\int fdx=F(x)+C$ кўринишда ёзилади. Хусусан юқоридаги мисол бўйича биз $\int 4x^3dx=x^4+C$ га эга бўламиз, бунда $C=const.$

Теорема: *Агар f(x) функция X оралиқда F(x) бошланғич функцияга эга бўлса, F(x)+C функция ҳам f(x) учун бошланғич функция бўлади, бунда С-*

ихтиёрий ўзгармас сон. X да f(x) функция бошқа кўринишдаги бошланғич функцияга эга эмас.

Исбот: Барча $x \in X$ *лар* $F^{'}(x) = f(x)$ чунки шу оралиқда *F(x)* функция *f(x)* функция учун бошланғич функция. Лекин ихтиёрий C ҳақиқий сон учун $(F(x)+C)^{'} = f(x)$. Демак, $\int f(x)dx = F(x)+C$. Шу билан бирга *f(x)* функция X да бошқа кўринишидаги бошланғич функцияга эга бўла олмайди. Ҳақиқатдан бирор Ф*(x)* ҳам *f(x)* нинг бошланғич функцияси бўлсин, деб фараз қилайлик: $\Phi^{'}(x) = f(x)$. У ҳолда ҳар бир $x \in X$ учун $\varphi^{'}(x) = \Phi^{'}(x) - F^{'}(x) = 0$ бўлади. $\varphi^{'}(x) = 0$бўлгани учун $\varphi(x) = C$ бўлади. Демак, *Ф(x)-F(x)=C*. Бундан *Ф(x)=F(x)+C*, яъни ихтиёрий бошланғич функция *F(x)+C* кўринишига эга бўлади.

Шундай қилиб, *f(x)* функциянинг барча *F(x)+C* бошланғич функцияларини топиш учун аввал улардан бирини, масалан, *F(x)*ни топиш, сўнгра унга исталган $C \in R$ ўзгармас сонни қўшиш кифоя. C ихтиёрий бўлгани учун функциянинг бошланғич функциялари чексиз кўп бўлади.

Қўшилувчи C сон *интеграллаш доимийси, F(x)+C* бошланғич функциялар тўплами *f(x)* функциянинг $\int f(x)dx$ *аниқмас интеграли* дейилади.

Берилган *f(x)* функциянинг барча бошланғич графиклари $y = F(x)$ графигини ОУ ўқи бўйича C қадар силжитишдан ҳосил қилинади ва шу йўл билан бошланғич функция шграфигини берилган нуқта орқали ўтишига эришилади (VI.1-расм).

2-мисол. $y = x^2$ функциянинг графиги A(1;2) нуқтадан ўтувчи бошланғич функциясини топамиз.

Ечиш. $f(x) = x^2$ функция учун $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, *чунки* $F^{'}(x) = x^2$.

Шундай C сонни топамизки, $y = \frac{x^3}{3}$ функциянинг графиги A (1; 2) нуқта орқали ўтсин. Охирги тенгликка $x = 1; y = 2$ қийматларини қўйиб,

$2=\frac{1}{3}+C$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $C=\frac{5}{3}$. Демак, $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{3}$.

Аниқмас интегралнинг хоссалари:

1) Ихтиёрий С сон учун ушбу тенглик ўринли:

$$d(\int(x)dx)=f(x)dx \qquad (1)$$

Ҳақиқатдан $\int f(x)dx=F(x)+C$ *ва* $F'(x)=f(x)$ бўлганлигидан:

$$d(\int(x)dx)=(F(x)+C)'dx=F'(x)dx=f(x)dx$$

3-мисол. $\int\cos xdx=\sin x+C$ бўлади. Чунки,

$$(\sin x+C)'=\cos x \quad d(\int\cos xdx)=d(\sin x+C)=d(\sin x)=\cos xdx$$

2) Ушбу тенглик ўринли:

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \qquad (2)$$

Чунки $\int F'(x)dx)=\int f(x)dx=F(x)+C$

4-мисол. $\int\cos xdx=\int(\sin x)'dx=\sin x+C$

3) Ушбу тенглик ўринли.

$$\int(\varphi(x)+\psi(x))dx=\int\varphi(x)dx+\int\psi(x)dx \qquad (3)$$

4) Ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси остидан чиқариш мумкин:

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\ k-\text{ ўзгармас сон.} \qquad (4)$$

Ҳақиқатдан, $F'(x)=f(x)$ *ва* $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$ бўлганида

$$\int kf(x)dx=kF(x)+C=k\int f(x)dx$$

Жумладан, 2 ва 4 хоссалар ва $\alpha\neq-1$ учун $(x^{\alpha+1})'=(\alpha+1)x^{\alpha}$ бўйича даражали функция учун

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}\int(\alpha+1)x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \qquad (5)$$

Ҳосил қилинади.

5-мисол. $I=\int(4x^3-9x^2+6x-8)dx$ ни ҳисоблаймиз.

Ечиш. 3 ва 4 хоссаларга асосан:

$$I=4\int x^3dx-9\int x^2dx+6\int xdx-8\int dx$$

(5) формула бўйича:

$$\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C,\ \int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C,\ \int xdx=\frac{x^2}{2}+C,\ \int dx=x+C$$

Биз C ни бир марта ёздик, чунки ўзгармаслар йиғиндисини битта ўзгармас билан алмаштириш мумкин.

6-мисол. $I=\int\left(x\sqrt[4]{x}-\dfrac{8}{x^3}\right)dx$ интегралини ҳисоблаймиз.

Ечиш: $I=\int\left(x^{\frac{5}{4}}-8x^{-3}\right)dx=\dfrac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}-8\cdot\dfrac{x^{-3-1}}{-3+1}+C=\dfrac{4x^2\sqrt[4]{x}}{9}+4x^{-2}+C$

МАШҚЛАР

6.1. Интегралларни ҳисобланг:

1) $\int x^6dx$; 2) $\int x^2\sqrt[5]{x}dx$; 3) $\int\dfrac{x^4-2x^2-\sqrt{x+1}}{x^2\sqrt{x}}dx$; 4) $\int\dfrac{x^6-9}{x^3+3}dx$

6.2. $f(x)$ функция учун $A(x_0;\,y_0)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг:

1) $f(x)=3x-1,\ A(1,3)$; 2) $f(x)=4x+3,\ A(1,2)$; 3) $f(x)=\sqrt{x},\ A(9,10)$

2. Интеграллаш формулалари. Функцияларни интеграллашда уларнинг дифференциаллаш натижаларига асосланилади. Дифференциаллашнинг ҳар бир $F'(x)=f(x)$ формуласидан интеграллашнинг унга мос $\int f(x)dx=F(x)+C$ формуласи ҳосил бўлади. Интеграллаш жадвалини келтирамиз:

№	$\int f(x)dx = F(x) + C$	$F^{'}(x) = f(x)$
1	$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	$\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)^{'} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha+1} x^{\alpha} = x^{\alpha},\ \alpha \neq -1$
2	$\int \cos xdx = \sin x + C$	$(\sin x + C)^{'} = \cos x$
3	$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)^{'} = -(-\sin x) + 0 = \sin x$
4	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$(tgx + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$
5	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	$(-ctgx + C)^{'} = -\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ $x \neq \pi k,\ k \in Z$
6	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$(\arcsin x + C)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x \rvert < 1$
7	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	$(arctgx + C)^{'} = \dfrac{1}{1+x^2}$
8	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$	$\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C\right)^{'}$ $\sqrt{a^2 - x^2},\ \lvert a \rvert \geq \lvert x \rvert$
9	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)^{'} = e^x$
10	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$(a^x + C)^{'} = a^x \ln a$
11	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	$x > 0\ \partial a\ \dfrac{dx}{x} = \ln x + C, (\ln x + C)^{'} = \dfrac{1}{x}$ $x < 0\ \int \dfrac{dx}{x} = \ln(-x) + C,\ (\ln(-x) + C)^{'} = -\dfrac{1}{x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$

1-мисол. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \int \dfrac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2} = \dfrac{1}{a} \int \dfrac{du}{1+u^2} = \dfrac{1}{a} arctgu + C = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C,$

$(u=\frac{x}{a}$ алмаштириш ва жадвалдаги 7-формуладан фойдаландик.

2-мисол. $\int e^{3x}dx$ ни ҳисоблаймиз.

Ечиш. $\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}\cdot e^{3x}\ +C$

3-мисол. $\int\frac{dx}{x+2}(x\neq-2)$ ни ҳисоблаймиз.

Ечиш. $\int\frac{dx}{x+2}=\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\ln(x+2)+C.$

М А Ш Қ Л А Р

6.3. Интегралларни ҳисобланг.

1) $\int 3^x\,dx;$ 2) $\int e^{2x}dx;$ 3) $\int e^{-5x}dx;$ 4) $\int e^x\cos(e^x)dx$

<u>**ЖАВОБ:**</u> 2) Кўрсатма: $2x=t;\ \frac{e^{2x}}{2}+C$

6.4. Интегралларни ҳисобланг:

1) $\int\frac{dx}{x+6};$ 2) $\int\frac{dx}{6x-7};$ 3) $\int\frac{x^4dx}{1+x^5};$ 4) $\int\frac{x^3dx}{1+x^2};$

3. Ўзгарувчини алмаштириш усули. Ушбу усул (бошқача айтганда, ўрнига қўйиш усули) жадвалда кўрсатилмаган интегралларни .жадвалдаги бирор кўринишга келтириб ҳисоблаш мақсадида қўлланилади. Усулнинг асосида мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси ётади: $F(\varphi(t))$ функция берилган ва $x=\varphi(t)$ алмаштириш киритилган бўлсин. У ҳолда:

$$\int f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt=F(\varphi(t))+C \qquad (1)$$

ёки

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=F(\varphi(t))+C \qquad (2)$$

Демак, $F(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)$ функциянинг бошланғич функцияси экан. Хусусан, $\varphi(t)=kt+b$ бўлсин. У ҳолда: $\varphi^{'}(t)=k$ *ёки* $d\varphi(t)=kdt$ ва (2) бўйича

$$\int f(kt+b)kdt = F(kt+b)+C$$

ёки

$$\int f(kt+b)dt = \frac{1}{k}\cdot F(kt+b)+C \qquad (3)$$

1-мисол. $I_1 = \int \sin(10x+8x)dx$ *ва* $I_2 = \int (7x-8)^4 dx$ ларни ҳисоблаймиз.

Ечиш. Интеграллаш жадвалидаги 1 ва 3 формулаларга мувофиқ:

$$I_1 = -\frac{1}{10}\cos(10x+8)+C,\ I_2 = \frac{1}{5\cdot 7}(7x-8)^5 + C = \frac{1}{35}(7x-8)^5$$

2-мисол. $I = \int x^3\cos(x^4)dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Ечиш. $(x^4)'4x^3$ бўлганидан, $x^4 = t$ алмаштириш киритамиз.

У ҳолда, $d(x^4) = dt$ *ёки* $4x^3dx = dt$ *ва бундан* $x^3dx = \frac{dt}{4}$, у ҳолда

$$I = \frac{1}{4}\int \cos tdt = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin(x^4)+C$$

МАШҚЛАР

6.9. Интегралларни ҳисобланг:

1) $\int \frac{x^8-6x^3+x+1}{x^3}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{36+x^2};$ 3) $\int \frac{dx}{9x^2+25};$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}};$ 5) $\int \cos 4xdx;$ 6) $\int \frac{dx}{\cos^2(5x-6)}.$

6.12. Интегралларни ўзгарувчиларнинг алмаштириш усулини қўддаю, ҳисобланг:

1) $\int (5x-6)^7dx;$ 2) $\int \sqrt{16x+11}dx;$ 3) $\int \frac{5xdx}{\sqrt{16-x^4}};$

4. Бўлаклаб интеграллаш. $u = u(x)$ *ва* $\upsilon = \upsilon(x)$ функциялар дифференциалланувчи функциялар бўлсин. бизга маълумки,

$$d(u\upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du \qquad (1)$$

бўлади. (1) ни интеграллаб,

$$u\upsilon = \int u d\upsilon + \int \upsilon du$$

ёки

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du \qquad (2)$$

ни ҳосил қиламиз.

(2) формула *бўлаклаб интеграллаш* формуласи дейилади.

(2) формула $\int u d\upsilon$ интегрални ундан соддароқ бўлган $\int \upsilon du$ интегрални интеграллашга келтиради.

1-мисол. $\int x \sin x dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Ечиш. $u = x,\ d\upsilon = \sin x dx$ деб фараз қилсак, $u = x$ нинг дифференциали $du = dx$ *га*, $d\upsilon = \sin x dx$ нинг иккала томонини интеграллясак $\upsilon = -\cos x$ га эга бўламиз. Топилганларни (2) формулага қўйсак:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

2-мисол. $\int x e^x dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Ечиш. $u = x,\ d\upsilon = e^x dx$ деб оламиз. Бундан $du = dx,\ \upsilon = e^x$.

(2) формулага асосан

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

МАШҚЛАР

6.13. Интегралларни ҳисобланг.

1) $\int x \sin 2x dx$; 2) $\int x \cos x dx$; 3) $\int x e^{-x} dx$; 4) $\int x 3^x dx$;

5) $\int \ln x dx$; 6) $\int x \ln x dx$; 7) $\int e^x \cos x dx$; 8) $\int x^2 e^x dx$;

2.2.2. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1. Эгри чизиқли трапеция юзи. Бошланғич функция ортирмаси. Аниқ интеграл. Кўп масалалар, жумладан, ясси шаклларнинг юзларини ҳисоблаш масаласи интеграл ҳисоби орқали ҳал этилади.

Геометрия курсидан бизга қуйидаги аксиомалар маълум:

1) ҳар қандай F шакл номанфий $S(F)$ юзага эга;

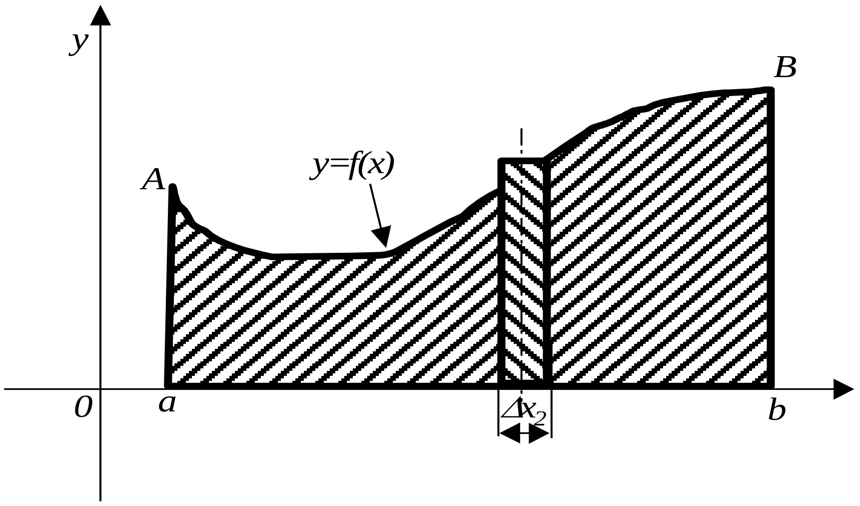
2) томони 1 га тенг квадратнинг юзи 1 га тенг;

3) тенг шаклларнинг юзлари тенг, яъни $F_1=F_2$ бўлса, $S(F_1)=S(F_2)$ бўлади;

4) шаклнинг юзи унинг барча кесишмас қисмлари юзларининг йиғиндисига тенг.

Қуйидаги OX ўқи, юқоридан манфий $y=f(x)$ функция графиги, ён томонларидан $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шакл *эгри чизиқли трапеция* дейилади

Агар [a, b] ва f(x)≥0 булса, у холда аник интеграл a ABb эгри чизикли трапециянинг юзидан, яъни x=a, x=b, y=0 ва y=f(x) чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзидан иборат булади.



∫ - интеграл белгиси, f(x) - интеграл остидаги функция, x-интеграллаш узнарувчиси, f(x)dx ифода интеграл остидаги ифода [a, b] интегрвал интеграллаш интервали “a” ва “b” сонлари интеграллашнинг куйи ва бкори чегаралари дейилади.

1-мисол. $y=3x^2$ функция бошланғич функцияларнинг [1; 2] ва [10; 20] кесмалардаги орттирмаларини топамиз.

Ечиш. $f(x)=\int 3x^2dx=x^3+C,\ C-$ихтиёрий ўзгармас. (1) муносабат бўйича: [1; 2] да $\Delta F=2^3-1^3=7,\ \ [10;\,20]\ \ да\ \ \Delta F=20^3-10^3=7000$

$f(x)$ функция ихтиёрий $F(x)$ бошланғич функциянинг *[a, b]* кесмадаги $\Delta F(x)=F(b)-F(a)$ орттирмаси функциянинг шу кесмадаги *аниқ интеграли* дейилади ва $\int\limits_a^b f(x)dx$ орқали белгиланади:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$F(b)-F(a)$ айирмани $F(x)\Big|_a^b$ билан белгилаймиз. У ҳолда, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b \qquad (2)$$

(2) тенглик *Ньютон-Лейбниц формуласи* деб аталади, *a* ва *b* *интегралаш чегаралари* дейилади.

2-мисол. $1)\int\limits_0^{\pi}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0$

$$2)\int\limits_a^b\sqrt[3]{x^2}dx=\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}\Bigg|_a^b=\frac{3}{5}(b^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{5}{3}})$$

Қуйида аниқ интеграл хоссаларини исботлашда Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланилади.

1-хосса. *Функциялар йиғиндисининг аниқ интеграли шу функциялар аниқ интеглarранинг йиғиндисига, ўзгармас сон ва функция кўпайтмасининг* *аниқ интеграли эса шу функция аниқ интегралининг ўзгармас сонга кўпайтирилганига тенг:*

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \qquad (3)$$

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

Ҳақиқатдан, $\int_a^b f_1(x)dx = F_1(b) - F_1(a),$ $\int_a^b f_2(x)dx = F_2(b) - F_2(a)$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = (F_1(b) + F_2(b)) - (F_1(a) + F(a)) =$$

$$= (F_1(b) - F_2(a)) + (F_2(b) - F_2(a)) = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

2-хосса. *Агар интеграллаш чегаралари алмаштирилса, аниқ интеграл ўз ишорасини ўзгартиради:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (5)$$

Ҳақиқатдан, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - (F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$.

3-хосса.

$$\int_b^a f(x)dx = 0 \qquad (6)$$

Чунки $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

4-хосса. Ихтиёрий a, b, c сонлар учун ушбу тенглик ўринли:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (7)$$

Ҳақиқатдан,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_c^b f(x)dx$$

5-хосса. *Агар [a, b] кесмада* $f(x) > 0$ *ёки* $(f(x) < 0$ *бўлса*$)$ *унинг шу кесмадаги* $\int_{ф}^{и} f(x)dx$ *аниқ интеграли ҳам шундай ишорага эга* бўлади. У ҳолда $b > a$ бўлганида $F(b) > F(a)$ *яъни* $F(b) - F(a) > 0,$ $\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$ *бўлади* $(f(x) < 0)$ ҳоли ҳам шундай исботланади.

3-миосл. $\left[\pi ж\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесмада $\sin x < 0,$ унинг шу кесмадаги аниқ интеграли ҳам манфий бўлишини кўрсатамиз.

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\pi}^{3\pi/2} = -\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi\right) = -(0-(-1)) = -1$$

МАШҚЛАР

6.14. [0; 4] кесма неча қисмга бўлинса, *x=0, x=4, y=0, y=x*^{2} чизиқлар билан чегараланган шакл учун $S(\Phi_2) - S(\Phi_1) < 0{,}1$ бўлади.

6.15. Доиранинг юзга эгалигини исботланг.

6.16. Интегралларни ҳисобланг:

1) $\int_0^2 x^6 dx;$ 2) $\int_0^4 x^2 \sqrt[5]{xdx};$ 3) $\int_0^3 \frac{x^8 - 9}{x^4 + 3} dx;$ 4) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx;$ 5) $\int_0^8 (4\sqrt[3]{x} + 2x)dx;$

6.17. Интегралларни ҳисобланг:

1) $\int_{-1}^{3} (x^2 - 4 + 5)dx;$ 2) $\int_1^2 \frac{6x - 3\sqrt{x}}{x} dx;$ 3) $\int_{-2}^{3} (6x^2 - 2x)dx;$ 4) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos x)dx;$

5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx;$ 6) $\int_0^{\pi} (1 - \cos x)^2 dx;$ 7) $\int_1^2 \frac{x^6 - 9}{x^3 + 3} dx;$ 8) $\int_0^8 (4\sqrt[3]{x} + 2x)dx;$

Ньютон-Лейбниц формуласи

$y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ *эгри чизиқ остида жойлашган эгри чизиқли трапециянинг* S' *юзи* $f(x)$ *функциянинг* $[a; b]$ кесмадаги аниқ интегралига тенг: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Исбот: *ABCD* шаклнинг *S* юзи *S(x)* функциянинг *[a; b]* кесмадаги $S=S(b)-S(a)$ орттирмасига тенг. Лекин *S(x)* нинг ўзи *f(x)* нинг бошланғич функцияси. Шундай қилиб,

$$S=Sb-S(a)=\int\limits_a^b f(x)dx$$

1-мисол. *OX* ўқи, *x=2, x=6* тўғри чизиқлар ва $f(x)=x^3$ функциянинг графиги билан чегараланган эги чизиқли трапециянинг *S(x)* юзини топамиз.

Ечиш: x^3 функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$ бўлсин. Ньютон-Лейбниц формуласи бўйича:

$$S=\int\limits_a^b x^3dx=\frac{x^4}{4}\Bigg|_2^6=\frac{6^4}{4}-\frac{2^4}{4}=\frac{1}{4}(6^4-2^4)=320$$

2-мисол. $x=0,\ y=0,\ x=2$ тўғри чизиқлар ва $y=\frac{1}{x+7}$ функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзини топамиз.

Ечиш. Изланаётган юз $\int\limits_0^2\frac{dx}{x+7}$ интеграл билан ифодаланади. $x+7=t$ алмаштириш киритамиз. У ҳолда:

МАШҚЛАР

6.18. Агар:

$1)\, a=1,\ b=3,\ f(x)=x^3-1;$ $\quad 2)\, a=0,\ b=\frac{\pi}{3},\ \ f(x)=\frac{1}{1+x^2};$

$3)\, a=0,\ b=\pi,\ f(x)=\frac{1}{\cos^2 x};$ $\quad 4)\, a=0,\ b=\frac{\sqrt{2}}{2},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$5)\, a=-1,\ b=3,\ f(x)=x^2+2;$ $\quad 6)\, a=1,\ b=8,\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

бўлса, юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонларидан $x=a$ *ва* $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг.

6.19. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг:

1) $y=\frac{1}{x},\ y=4x,\ x=1,\ y=0;$

2) $y=x^2+2,\ y=2x+1;$

3) $y=x^2-6x+9,\ y=x^2+4x+4,\ y=0;$

4) $y=x^2+1,\ y=3x-x^3;$

5) $y=x^2, y=2\sqrt{2x};$

6) $y=\sqrt{x}, y=\sqrt{4-3x},\ y=0$

6.20. $y=\frac{1}{3x-8}$ гипербола, $x=3,\ y=0,\ x=6$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

ХУЛОСА ВА ТАКЛИФЛАР

"Ўрта махсус муасасаларида математик анализ элементларини ўрганиш" мавзусидаги битирув малакавий ишни бажариш жараёнида АЛ ва коллежларда функция, ҳосила ва интеграл тушунчаларини ўрганишни ўзига хос йуллари ўрганиб чиқилди ва уларни ўрганишни бир бирига боғлиқлиги кўрсатилди. Бу тушунчалар ўрта мактаб, ўрта ва ўрта махсус ўқув юртларида ўрганиш ҳамда бу тушунчани олий ўқув юртида ўрганиш мазмуни ва методикаси таҳлил қилинди. Математик анализ элементларини ўрганишга оид ўқув адабиётлари ва илмий манбалар ўрганиб чиқилди ва таҳлил қилинди. Бу тушунчаларни ўрганишдаги эришиладиган ютуқлар, ғоялар ва йўл қўйилган камчиликлар ўрганилди. Таълим тизимида математик анализ тушунчаларини ўрганиш билан боғлиқ узлуксизлик ва узвийлик муаммолари ҳам қараб чиқилди. Функция, ҳосила ва интеграл тушунчаларини замонавий таълим технологияларини қўллаб ўрганиш усуллари кўрсатилди.

1. Математик анализ элементларини ўрганиш 50 дан ортиқ ўқув ва илмий адабиётлар таҳлил қилинди. Бу тушунчалар билан боғлиқ муаммолар мактаб, лицей, коллежларнинг математика ўқитувчилари ҳамда Сирдарё вилоят педагогик ўқитувчиларни қайта тайёрлаш ва малакаларини ошириш институти тингловчилари билан ўтказилган суҳбатларда аниқлик киритилди.
2. Функция, ҳосила ва интеграл тушунчаларига оид ўқув материали модулларга ажратилди ва тегишли материал табақалаштирилган назорат саволлари орқали ўқувчиларни ўзини билимини ўзи синаб кўриш имконияти яратилади.
3. Функция, ҳосила ва интеграл тушунчаларига оид ўқув материални ўрганишга педагогик технологиялар тадбиқ қилинган. Таълим жараёнларини лойиҳалаштирилган. Бу тушунчаларга оид назарий, амалий, мустақил ишлар, кичик гуруҳлар фаолиятига тегишли топшириқлар ва жамоавий таълимга мос топшириқларни ўз ичига олиб яхлит лойиҳа яратилган.
4. “Ўрта махсус муасасаларида математик анализ элементларини ўрганиш” мавзусида тайёрланган ушбу битирув малакавий ишдан лицей, коллеж математика ўқитувчилари, математик тўгаракларда, математика бакалаврият йўналишидаги махсус курсларда ҳамда замонавий технологияларни таълим жараёнида қўллаш йўналишида тадқиқот олиб борувчи мутахассислар фойдаланиши мумкин.

Фойдаланилган адабиётлар рўйҳати

1. И.А.Каримов. Юксак маънавият – енгилмас куч. Т. “Маънавият”, 2008 йил.
2. И.А.Каримов. Баркамол авлод пойдевори. Т.”Ўзбекистон”, 2004 й.
3. Умумий ўрта таълим Давлат таълим стандарти ва ўқув дастури. “Шарқ”, 2004 й.
4. Алимов Ш.О. ва бошқалар. Алгебра (умум таълим мактабларининг 7 – синфлари учун дарслик). Т.”Ўқитувчи”, 2006 й.
5. Алимов Ш.О. ва бошқалар. Алгебра (умум таълим мактабларининг 8 – синфлари учун дарслик). Т.”Ўқитувчи”, 2006 й.
6. Алимов Ш.О. ва бошқалар. Алгебра (умум таълим мактабларининг 9 – синфлари учун дарслик). Т.”Ўқитувчи”, 2006 й.

7. Антонов М.С., Гуссев В.А. “Современные проблемы методики преподавания математики”.М.,«Просвещение», 1985 г.
8. Абдуҳамидов А.У., Ҳ.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Ҳусанов. Алгебра ва математик анализ асослари 1 қисм (академик лицейлар учун дасрлик). “Ўқитувчи” нашириёт – матбаа ижодий уйи. Тошкент – 2007 й.
9. Абдуҳамидов А.У., Ҳ.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Ҳусанов. Алгебра ва математик анализ асоалари 2 қисм (академик лицейлар учун дасрлик). “Ўқитувчи” нашириёт – матбаа ижодий уйи. Тошкент – 2007 й.
10. Азларов Т.А. ва бошқалар. “Математикадан қўлланма” 2 – қисм. Т.,”Ўқитувчи”, 1999
11. Биккулова Г.Р. Развитие критического мышления в контексте медиаобразования. Инновации в образовании. № 3, 2009 г., март 4, 18 ст.
12. Бабанский Ю.К. Хозирги замон умумий таълим мактабларида ўқитиш методлари. Т.,”Ўқитувчи”, 1990 й.
13. Бегмат А.Б., М.Я. Якубов Иқтисодчилар учун математика.Самарқанд, 2003й
14. Воронов М.В. Модель оценки уровня информатизации процессов обучения в вузе. Дистанционное и виртуальное обучение. Научный журнал № 6, 2009 г., июнь 4, 16 ст.
15. Дорофеев Г.В. «Математика и интеллектуальные развития школьников». Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1 (29), 2008 г., Москва.
16. Дронов В.П. «Фундаментальное ядро» - содержательная основа для разработки примерных программ по учебным предметам общего образования. Педагогика научно - теоретический журнал Российской академии образования. № 4, 2009 г., 36 – 41 ст.
17. Джўраев Р.Х., Ч.Э.Мирзаев, Б.Рахимов. Замонавий педагогик технологияларни таълим жараёнига тадбиқ этиш жараёнини комплекс

лойиҳалаш. “Узлуксиз таълим” илмий – услубий журнал. Тошкент – 2008 й., 14 – 23 бет.

18. Зиямухамедов Б., М.Тажиев, С.Зиямухамедова, Э.Худойкулов. Основы педагогического мастерства и методология практической модели педагогической технологии. Т.,«Тафаккур» 2010 й.
19. Загвязинский В.И. «Как определять методологии педагогики» Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1 (29), 2008 г., Москва.
20. Купченко В.Е. Личностные особенности молодых людей с разным типом жизненной стратегии (на примере студентов высших учебных заведений). Психология в вузе 2009 г., № 3, май – июнь, Научно – методический журнал. Москва – Обнинск, 28 – 37 ст
21. Кондаков А.М. Стандарт: инновационность и преемственность. Педагогика научно - теоретический журнал Российской академии образования. № 4, 2009 г.,14 – 18 ст.
22. Лунгу К. Модернизация содержания математического образования в техническом вузе. Образовательные технологии. 2009 г., № 2, Народное образование, 49 ст.
23. Латипов Х.Р. ва бошқалар.Аналитик геометрия ва чизиқли алгаебрадан масалалар ечиш бўйича қўлланма.Т., Фан,1999 й.
24. Мишин В.И.. Методика преподавания математики в средней школе. М.,”Просвещение”, 1987 г.
25. Мясников В.А. «Образование сегодня. Новые возможности, новые проверка». Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1 (29), 2008 г., Москва.
26. Мирзаев Ч.Э. Ўқувчи(талаба)ларнинг ҳамкорликда таълим олиш хусусиятлари. (Замонавий педагогик технологиялар фани ўқитиладиган олий ўқув юртлари талабалари ва малака ошириш курси тингловчиларига мўллжалланган ўқув қўлланма). Гулистон – 2003 йил.

27. Мирзаев Ч.Э. Таълим жараёнларини комплекс лойиҳалаш. Тошкент – 2010.
28. Мирзаев Ч.Э. Математика таълимида инновацион ёндашув. “Таълим тизимига ахборот технологияларини татбиқ этишнинг замонавий муаммолари” Республика илмий – амалий анжумани материалларининг тўплами. Гулистон – 2009 йил, 4 декабрь, 93-95 бет.
29. Мирзаев Ч.Э. Таълимнинг сифати ва самаардорлигини таъминлашда дастурнинг роли. Ҳалқ таълими илмий –методик журнал. № 6, 2006 йил, ноябр – декабр, 6 – 10 бет.
30. Мирзаев Ч.Э., Ўразалиев Т. Таълим жараёнини жамулжам лойиҳалаш ҳақида. Мирзо Улуғбек номидаги миллий университет “Инновацион педагогик технологиялар” илмий – амалий маркази. Замонавий контекстида педагогика фани ва унинг методологик муаммолари Республика илмий – назарий конференция материаллари. Тошкент 2005 йил, 20 – 21 май, 117 – 118 бет.
31. Мирзаев Ч.Э. Таълимда ўқув – услубий мажмуага асосланишни лойиҳалаш. “Узлуксиз таълим тизимида маънавий – касбий баркамол шахс тарбияси” Республика илмий - назарий конференцияси тўплами. Гулистон - 2007 йил, 16 – 17 ноябрь, 9 – 10 бет.
32. Мирзаев Ч.Э. Таълим жараёни мақсадларидан самарали фойдаланиш ҳақида. “Узлуксиз таълим тизимида маънавий – касбий баркамол шахс тарбияси” Республика илмий - назарий конференцияси тўплами. Гулистон - 2007 йил, 16 – 17 ноябрь, 271 бет.
33. Мирзаев Ч.Э., Қаландаров А. Замонавий университет таълим мазмунини ўзлаштиришда илмий – тадқиқот йўналишлари. “Замонавий университет таълим тизимида фаннинг ўрни” Республика илмий – амалий конференцияси маърузалари тўплами. Гулистон - 2004 йил, 14 – 15 май, 68 – 71 бет.

34. Мирзаев Ч.Э. Таълимни шахсга йўналтиришнинг баъзи муаммолари. “Узлуксиз таълим тизимида инновацион технологиялар, муаммо ва ечимлар” Республика илмий – амалий конференциясининг материаллари тўплами. Гулистон 2010 йил, 6 – 7 май, 52 – 53 бет.
35. Мирзаев Ч.Э., Норжигитов Х. Ўз – ўзини бошқариш тизимини такомиллаштириш муаммолари. “Узлуксиз таълим тизимида инновацион технологиялар, муаммо ва ечимлар” Республика илмий – амалий конференциясининг материаллари тўплами. Гулистон 2010 йил, 6 – 7 май, 221 – 223 бет.
36. Мирзаев Ч.Э., Б.Рахимов. Таълимда ўқув – услубий мажмуага асосланишни лойиҳалаш. “Педагогик маҳорат” Бухоро давлат университети педагогика ва жисмоний маданият факультетининг назарий ва илмий – методик журнали. № 2, 2008 йил, 29 – 31 бет.
37. Мирзаев Ч.Э. Таълим жараёнларини комплекс лойиҳалаш. “Малака ошириш тизимида тарихий хотира ва педагогик – психологик асослар”. Тошкент – 2009 й., 111-113 бет.
38. Мирзаев Ч.Э., С.Саматов. Таълимда янги педагогика технологиялар (Замонавий педагогик технологиялар фани ўқитиладиган олий ўқув юртлари талабалари ва малака ошириш курси тингловчиларига мўллжалланган ўқув қўлланма) . Гулистон 2003 йил.
39. Мирзаев Ч.Э., Олий математика. Ўқув услубий мажмуа, Гулистон, 2008 й.
40. Новиков А.М., Д.А.Новиков «О предмете и структуре методологии». Мир образования – образование в Мире, журнал, № 1 (29), 2008 г., Москва.
41. Новычков В.Б. «Целепологание в образовании семантика и структура» Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1 (29), 2008 г., Москва.

42. Оганесян В.А., Ю.М.Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я.Саннинский. Методика преподавания математики в средней школе. Москва “Просвещение”, 1980 г.
43. Рыбаков А.С. «Что есть образования?» Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1 (29), 2008 г., Москва.
44. Сахарова В.И. «От традиционного обучения и современного» Мир образования – образования в Мире, журнал, № 3, 2008 г., Москва.
45. Содействие реформированию системы непрерывного образования Республики Узбекистан. по редакцией проф. К.Аллаева. Ташкент 2009 г.
46. Соатов Ё У. Олий математика ,1 2,3 жилд.Т, Ўқитувчи 1992 й.
47. Тожиев М., А.Я.Алимов, Д.У.Кучқаров. Педагогик технология – таълим жараёнига татбиғи (Бошланғич таълимда математика ўқитиш методикаси фани дарсларининг лойиҳаси) 1 – қисм. Т., “Тафаккур” 2010 йил.
48. www.ziyonet.uz
49. www.uzedu.uz
50. www.kitob.uz