ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
УМУМИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

Абдуалимов Муроджон Махмудовичнинг
5460100 – математика таълим йўналиши бўйича бакалавр даражасини олиш учун

«ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИ ЕВКЛИДНИНГ ТАРТИБ ВА ҚЎЙИШ АКСИОМАЛАРИ ЁРДАМИДА ҚУРИШ»

мавзусидаги

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Илмий раҳбар: Досанов М. С.

Гулистон – 2014

МУНДАРИЖА

КИРИШ

Мазкур битирув малакавий иш векторлар алгебрасини масофа, тартиб ва қўйиш аксиомалари асосида ўрганишга бағишланган.

Бу ишда таянч тушунчаларидан бири кесма тушунчаси масофа тушунчаси орқали аниқланган:

$$MN = \{O : \rho(M,O) + \rho(O,N) = \rho(M,N)\}.$$

Тўғри чизиқ, текислик, фазо ва эркин вектор каби таянч тушунчалар эквивалентлик синфлар орқали назарий тўплам тилида аниқланган. Вектор тушунчаси эса параллел кўчириш тушунчаси билан айнан бир хил эканлиги кўрсатилган.

Векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амали корректлиги, яъни натижанинг М нуқтанинг танланишига боғлиқ эмаслиги параллел кўчириш ёрдамида исботланади.

Ушбу татқиқотнинг мақсади векторлар алгебрасини планиметрия аксиомалари асосида қуриш ҳамда кўпўлчамли геометрия ҳолида умумлаштиришдир.

Ҳақиқий сонлар майдони устидаги чекли ўлчамли вектор (чизиқли) фазо мазкур ишнинг татдиқоқ объекти ҳисобланади.

Ушбу битирув малакавий ишда аксиоматик қуриш ва эквивалентлик синфларига ажратиш метод ва усулларидан фойдаланилади.

Битирув малакавий иш кириш, саккиз параграф, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

1§. ДАСТЛАБКИ НАЗАРИЙ ТУШУНЧА ВА ФИКРЛАР (ДАЛИЛЛАР)

Бизга математик анализ курсидан тўплам тушунчаси, бир тўпламни иккинчи тўпламга акслантиришлар ҳамда елементар назарий тўпламли амаллар: $\bigcup$ – бирлашма, $\bigcap$ – кесишма, $\setminus$ – айирма, бир тўпламни иккинчи тўпламга декарт кўпайтмаси маълум.

Агар $\forall x_1, x_2 \in X$ ҳар хил элементлар учун уларнинг $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ акслари ҳам ҳар хил бўлса $f: X \to Y$ акслантириш инъектив ёки ўзаро бир қийматли деб аталади.

Агар ҳар қайси $y \in Y$ элемент учун шундай $x \in X$ елемент мавжуд бўлсаки бунда $f(x) = y$ бўлса $f: X \to Y$ акслантириш сюръектив ёки X тўпламни Y тўплам устига акслантириш деб аталади. Агар бу шартларнинг иккиси ҳам бажарилса, у ҳолда f акслантиришини X тўпламни Y тўплам устига ўзаро бир қийматли акслантириши ёки ўзаро бир қийматли мослик ёки биекция деб аталади. X тўпламда R бинар муносабат – бу X тўпламдан олинган барча тартибланган $\left(x_1, x_2\right)$ жуфтликлар тўплами. R – $X \times X$ декарт кўпайтманинг қисм тўпламидир. Агар $\left(x_1, x_2\right) \in R$ бўлса, у ҳолда x_1 ва x_2 елементлар R муносабатда бўлади дейилади ва $x_1 R x_2$ каби ёзилади. X тўпламда эквивалентлик муносабати–бу қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирувчи R бинар мўносабатдир :

1. Рефлексивлик: ихтиёрий $x \in X$ элемент учун xRx;

2. Симметриклик: Агар $x_1 R x_2$ бўлса, у ҳолда $x_2 R x_1$;

3. Транзитивлик: Агар $x_1 R x_2$ ва $x_2 R x_3$ бўлса, у ҳолда $x_1 R x_3$.

Биттадан ортиқ элементга эга бўлган ихтиёрий X тўпламда битта эмас (биттадан ортиқ) эквивалентлик муносабати мавжуд бўлишига қарамасдан, одатда эквивалентлик муносабати $\sim$ символи билан белгиланади. $\sim$ – X

тўпламда эквивалентлик муносабати бўлсин. $x \in X$ элементи учун C_x орқали бўш бўлмаган $\{x' \in X : x' \sim x\}$ тўпламни белгилаймиз ва уни x элементнинг эквивалентлик синфи деб атаймиз.

1.1. Жумла. Агар $x_1, x_2 \in C_x$ бўлса, у ҳолда $x_1 \sim x_2$.

Ҳақиқатдан ҳам $x_1, x_2 \in C_x \Rightarrow x_1 \sim x$ ва $x_2 \sim x$. $\Rightarrow x_1 \sim x$ ва $x \sim x_2$. $\Rightarrow x_1 \sim x_2$.

1.2. Жумла. Агар $C_x \bigcap C_y \neq \varnothing$ бўлса, у ҳолда $C_x = C_y$.

Ҳақиқатдан ҳам, $C_x \bigcap C_y \neq \varnothing$ эканлигидан шундай x элемент мавжудки: $x \in C_x \bigcap C_y$. $x \in C_x$ ва $x \in C_y$. $\Rightarrow x' \sim x$ ва $x' \sim y$.

Агар $z \in C_x \Rightarrow z \sim x \Rightarrow z \sim x' \Rightarrow z \sim y \Rightarrow z \in C_y \Rightarrow C_x \subset C_y$.

Худди шундай $C_y \subset C_x$ муносабатни исботлаш мумкин. Демак, $C_x = C_y$.

Шундай қилиб, X тўплам ё жуфт-жуфт бўлиб кесишмайдиган ёки устма–уст тушувчи бўш бўлмаган эквивалент синфларига бўлинади. Эквивалент синфлар тўплами — $\sim$ эквивалентлик муносабатига кўра X тўпламнинг фактор тўплами деб аталади ва $X/\sim$ каби белгиланади. 1.2.жумлага мувофиқ X тўпламнинг ҳар қайси элементи битта эквивалент синфга тегишли. Шунинг учун x элементга унинг эквивалентлик синфи C_x ни мос қўйиб X тўпламни $X/\sim$ фактор тўплам устига акслантиришини ҳосил қиламиз.

X тўпламда R бинар муносабат берилган бўлсин. Унда у ихтиёрий $Y \subset X$ қисм тўпламда R_Y бинар муносабатни вужудга келтирилади: $xR_Y y \Leftrightarrow xRy$ ва $x, y \in Y$.

1.3.Жумла. $Y \subset X$ ва X тўпламда R эквивалентлик муносабати берилган бўлсин. Унда R_Y ҳам шунингдек эквивалентлик муносабати булади, R ва R_Y муносабатларнинг C_x^R ва $C_x^{R_Y}$ эквивалентлик синфлари эса бир–бири билан қуйидаги тарзда боғланган:

$$C_x^{R_Y} = Y \bigcap C_x^R .$$

Ҳақиқатдан ҳам, $Y \subset X$ бўлганидан $\forall x \in \mathrm{Y} \Rightarrow xRx$, $\Leftrightarrow xR_Y x$, яъни R_Y муносабат рефлексивдир.

Агар $xR_Y y \Leftrightarrow xRy$, $x, y \in Y \Leftrightarrow yRx$, $y, x \in Y \Rightarrow yR_{\mathrm{Y}}x$, яъни R_Y муносабат симметрик.

Агар $xR_Y y$ ва $yR_Y z$ бўлса, у ҳолда xRy, $x, y \in Y$ ва yRz, $y, z \in R \Rightarrow xRz,\ x, z \in Y \Rightarrow xR_Y z$, яъни R_Y муносабат транзитивдир .

Бундан ташқари $x \in Y$ да $y \in C_x^{R_Y}$ $\Leftrightarrow$ $yR_Y x \Leftrightarrow yRx$ ва $y, x \in Y \Leftrightarrow y \in Y$ ва $y \in C_x^R$ $\Leftrightarrow$ $y \in Y \bigcap C_x^R$, яъни $C_x^{R_Y} = Y \bigcap C_x^R$ бўлади.

2§. КЕСМА ВА ЯРИМ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

Кесма. Кейинчалик биз Эвклид геометриясининг баъзи аксиомаларидан фойдаланамиз. Эвклид аксиомаларининг турли хил кўринишлари мавжуд бўлиб, қуйида тартиб аксиомаларини масофа иборасида ифодалаймиз. E Эвклид фазосининг ихтиёрий M ва N нуқталари учун, бу нуқталар орасидаги масофа $-\rho(M,N)$ номанфий сон аниқланган. ρ масофа функцияси қуйидаги аксиомаларни қаноатлантиради.

I₁. Айният аксиомаси: $\rho(M,N)=0 \Leftrightarrow M=N$.

II₂. Симметрия аксиомаси: $\rho(M,N)=\rho(N,M)$.

III₃. Учбурчак тенгсизлиги: $\rho(M,N)\leq\rho(M,O)+\rho(O,N)$.

1-таъриф. Агар $M\neq O\neq \mathrm{N}$ ва $\rho(M,O)+\rho(O,N)=\rho(M,N)$ бўлса, O нуқта M ва N нуқталар орасида ётади дейилади ва қуйидагича ёзилади: (MON).

2-таъриф. M ва N нуқталар орасида ётувчи барча O нуқталар тўплами

$$(M,N)=\{O:(MON)\}$$

га M ва N нуқталарни туташтирувчи (MN) интервал деб аталади.

(MN) интервалга M ва N нуқталарни қўшиб, M ва N нуқталарни туташтирувчи MN кесмани ҳосил қиламиз. Буни бошқача қилиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$MN=\{O:\rho(M,O)+\rho(O,N)=\rho(M,N)\}.$$

(MN) интервал нуқталари MN кесманинг ички нуқталари, M ва N нуқталар эса унинг чегаравий нуқталари деб аталади. M ва N нуқталар орасидаги масофа MN кесманинг узунлиги деб аталади ва $|MN|$ орқали белгиланади. Шунинг учун MN кесманинг таърифини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$MN=\{O:|M,O|+|O,N|=|M,N|\}.$$

Агар M ва N нуқталар устма-уст тушса, у ҳолда MN кесма нол узунликка эга ва битта нуқтадан иборат бўлади.

Тартиб ва қўйиш аксиомалари:

III₁. Тўғри чизиқдаги ихтиёрий ҳар хил учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитасини орасида ётади.

III₂. Агар O нуқта M ва N нуқталар орасида ётса, у ҳолда M,N,O нуқталар бир тўғри чизиқда ётади.

III₃. l тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий O нуқта ва ихтиёрий $d>0$ сон учун шундай иккита $M_1,M_2 \in l$ нуқталар мавжудки, улар учун $\rho(M_1,O)=\rho(M_2,O)=d$ бўлади.

Қуйида исботланадиган 2.1 ва 2.5 жумлаларга мувофиқ **III₃** аксиомани қуйидагича ифодалаш мумкин:

l тўғри чизиқдаги ихтиёрий $O \in l$ нуқтадан бошлаб берилган d узунликка эга бўлган иккита кесмани қуйиш мумкин.

III₄ (Паш аксиомаси). Текисликда учта M,N,O нуқта ва бу нуқталардан бирортасини ҳам ўз ичига олмаган l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Агар l тўғри чизиқ (MN) интервални кесиб ўтса, у ҳолда у (MO) ва (NO) интерваллардан фақат биттасини кесиб ўтади.

2.1 жумла. Агар **III₃** аксиома шартлари ўринли бўлса, у ҳолда (M_1,O,M_2) бўлади.

Исбот. **III₁** аксиомага мувофиқ M_1, O, M_2 нуқталардан фақат биттаси қолган иккитаси орасида ётади. Фараз қилайлик, (O,M_1,M_2) бўлсин. У ҳолда,

$$\rho(O,M_1)+\rho(M_1,M_2)=\rho(O,M_2)$$

бўлади. Аммо, $\rho(O,M_1)=\rho(O,M_2)$.

Демак, $\rho\left(M_1,M_2\right)=0$, яъни $M_1=M_2$. Зиддият. Худди шундай, $\left(O,M_2,M_1\right)$ ҳоли ўринли эмаслиги исботланади.

2.2 жумла. Агар $O\in MN$ бўлса, у ҳолда $MO\subset MN$ бўлади.

Исбот. Жумлани исботлаш учун ихтиёрий $P\in MN$ нуқта MN кесмага тегишли эканлигини кўрсатиш етарли. Бунинг учун учбурчак тенгсизлигига мувофиқ, $\rho\left(M,P\right)+\rho\left(P,N\right)\leq\rho\left(M,N\right)$ (1) тенгсизликни текшириш етарлидир, чунки $\rho\left(M,P\right)+\rho\left(P,N\right)\geq\rho\left(M,N\right)$ (*) уринли бўлади. (1) ва (*) тенгсизликлардан $\rho\left(M,P\right)+\rho\left(P,N\right)=\rho\left(M,N\right)$, яъни $\mathrm{P}\in M\mathrm{N}$ бўлади.

$\mathrm{P}=M\Rightarrow\mathrm{P}\in M\mathrm{N}$. $P=O$ ва $O\in MN\Rightarrow P\in MN$. Бу ҳолда тасдиқ тўғридир.

P≠M, P≠O, P∈MO⇒(MPO) эга бўламиз. O∈MN бўлгани учун

O=M⇒MO=NM⊂MN.

O=N⇒MO=MN⊂ MN.

O≠M ва O≠N бўлса, у ҳолда O∈MN эканлигидан (MON) эга бўламиз.

(MON) ва (MPO) ларга мувофиқ ушбуларга эга бўламиз:

$$\rho(M,N)=\rho(M,O)+\rho(O,N)=\rho(M,P)+\rho(P,O)+\rho(O,N)\geq\rho(M,P)+\rho(P,N),$$

яъни $\rho(M,N)\geq\rho(M,P)+\rho(P,N)$ (1) тенгсизлик исбот қилинди.

2.3 Жумла. Агар M,N,O нуқталар битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда MO⊂MN∪NO бўлади.

Исбот. Бунда M,N,O нуқталарни жуфт-жуфти билан ҳар хил деб ҳисоблаймиз. Акс ҳолда тасдиқнинг тўғрилиги аён. Чунки, M=N бўлса, MO=NO⊂MN∪NO. M=N бўлса, у ҳолда MO=MN={M}⊂MN⊂MN∪NO, N=O бўлса, MO=MN⊂MN∪NO.

N нуқтадан фарқли P∈(MO) нуқтани оламиз. M,N,O нуқталар ётган тўғри чизиқни фақат битта P нуқтада кесувчи l тўғри чизиқ мавжуд. Унда Паш аксиомасига мувофиқ, P нуқта (MN) ёки (NO) интерваллардан бирига тегишли бўлади. Демак, P∈(MN)∪(NO) ёки P∈MN∪NO бўлади .

$P=M \Rightarrow P \in MN \cup NO$ бўлади. $P=O \Rightarrow P \in MN \cup NO$ бўлади. Булардан $MO \subset MN \cup NO$ бўлиши келиб чиқади.

2.2 ва 2.3 жумлалардан ушбу натижа келиб чиқади.

2.4 натижа. Агар $N \in MO$ бўлса, у холда $MN \bigcup NO = MO$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $N \in MO$ бўлса, 2.2 жумлага мувофиқ $MN \in MO$. Худди шундай, $N \in MO = OM$ бўлса, 2.2 жумлага мувофиқ $ON \in OM = MO$ бўлиб, $MN \subset MO$ ва $ON \subset MO \Rightarrow MN \bigcup ON \subset MO$.

2.3 жумлага мувофиқ $N \in MO \Rightarrow MO \subset MN \bigcup NO$. Булардан эса $N \in MO \Rightarrow MO = MN \bigcup NO$ келиб чиқади.

2.5 жумла. Агар $N \in MO$ бўлса, у ҳолда N нуқта MN ва NO кесмаларнинг ягона умумий нуқтаси бўлади.

Исбот. Бунда N нуқтадан фарқли $P \in MN \bigcap NO$ нуқта мавжуд деб фараз қиламиз. Унда $P \in MN$ ва $P \neq N$ бўлганидан $\rho(M,P)+\rho(P,N)=\rho(M,N)$ бўлиб, $\rho(P,N)>0$ бўлгани сабабли

$$\rho(M,N)-\rho(M,P)=\rho(P,N)>0\,,\ \ \rho(M,P)<\rho(M,N)$$

бўлади. $P \in NO$ ва $P \neq N$ бўлганидан эса $\rho(N,P)+\rho(P,O)=\rho(N,O)$ ва $\rho(N,P)>0$ бўлиб, $\rho(N,O)-\rho(P,O)=\rho(N,P)>0$ ва $\rho(P,O)<\rho(N,O)$ бўлади.

$N \in MO \Rightarrow MN \subset MO$. $N \in OM \Rightarrow ON \subset OM \Rightarrow NO \subset MO$. Булардан эса $P \in MN \bigcap NO \subset NO \subset MO$ бўлади.

$$P \in MO \Rightarrow \rho(M,O)=\rho(M,P)+\rho(P,O)<\rho(M,N)+\rho(N,O)=\rho(M,O).$$

Зиддият ҳосил қилдик. Фараз нотўғри. 2.5 жумла исботланади.

2.6 жумла. Агар (MNO) ва (NPO) бўлса, у ҳолда (MNP) бўлади.

Исбот. Шартга кўра қуйидагиларга эга бўламиз:

$\rho(M,N)+\rho(N,O)=\rho(M,O)$, (2), $\rho(N,P)+\rho(P,O)=\rho(N,O)$ (3) бўлади.

Бундан ташқари 2.2 жумлага мувофиқ, ҳамда $N \in MO$ га кўра $N \in OM \Rightarrow ON \subset OM \Rightarrow NO \subset MO$.

Демак, $\mathrm{P} \in \mathrm{N}O \subset MO$, яъни $\rho(M,\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)=\rho(M,O)$ (4). (2) ва (3) тенгликлардан ушбуни топамиз:

$$\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)=\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},O)=\rho(M,O) \quad (5).$$

(4) ва (5) тенгликларни таққослаб кўрамиз:

$\rho(M,\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)=\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})+\rho(\mathrm{P},O)$, ёки $\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})=\rho(M,\mathrm{P})$.

(MNO)⇒M≠N≠O ва (NPO)⇒N≠P≠O. $\rho(M,\mathrm{P})=\rho(M,\mathrm{N})+\rho(\mathrm{N},\mathrm{P})$ ва M≠N≠P муносабатлардан (MNP) бўлиши келиб чиқади.

2.6 жумла исботланди.

2.7 жумла. Агар (MNO) ва (NOP) бўлса, у ҳолда (MNP) бўлади.

2.8-жумла. Ихтиёрий номанфий $d \le \rho(O,M)$ сон учун, шундай битта ягона $N \in OM$ нуқта мавжудки бунда $\rho(O,N)=d$ бўлади.

Исбот. Аввал нуқтанинг ягоналигини текширамиз. N нуқтадан фарқли O нуқтадан d масофадан турувчи $P \in OM$ нуқта мавжуд бўлсин деб фараз қиламиз. Унда

$\rho(O,N)+\rho(N,M)=\rho(O,M)$, $\rho(O,P)+\rho(P,M)=\rho(O,M)$

$\rho(P,M)=\rho(O,M)-\rho(O,P)=\rho(O,M)-d=\rho(O,M)-\rho(O,N)=\rho(N,M)$.

Аммо, 2.4-жумлага мувофиқ $N \in OM$ бўлгани туфайли $P \in OM = ON \cup NM$ ва P нуқта ON ёки NM кесмаларнинг бирида ётади, яъни $\rho(O,P)+\rho(P,N)=\rho(O,N)$ ёки $\rho(N,P)+\rho(P,M)=\rho(N,M)$ бўлади. $P \ne N \Rightarrow \rho(P,N)>0$ ва $\rho(O,P)-\rho(O,P)=\rho(P,N)>0$ ва $\rho(O,P)<\rho(O,N)$ ёки $\rho(N,M)-\rho(P,M)=\rho(N,P)>0$ ва $\rho(P,M)>\rho(N,M)$ яьни $\rho(P,M)<\rho(N,M)$ ёки $\rho(O,P)<\rho(O,N)$ тенгсизликларга эга бўламиз, аммо $\rho(P,M)=\rho(N,M)$ ва $\rho(O,P)=\rho(O,N)=d$. Зиддият ҳосил бўлди. Шу билан ягоналиги исботланди.

Мавжудлиги. Бунда $M \neq O$ деб фараз қиламиз. Унда III_3 аксиомага мувофиқ О ва М нуқталардан ўтувчи l тўғри чизиқда М нуқтадан фарқли шундай M_1 нуқта мавжудки бунда, $\rho(M,O) = \rho(O,M)$.

Аввал бунда, агар $N \in l$ ва $\rho(N,O) \leq \rho(O,M)$ бўлса, у ҳолда $N \in M_1M$ бўлишини исботлаймиз. Фараз қилайлик, шундай бўлмасин. Унда III_1 аксиомага мувофиқ, ёки (NM_1M) ёки (M_1MN).

Биринчи ҳолни қараймиз. 2.1-жумлага мувофиқ (M_1OM) эга бўламиз. Шунинг учун 2.6-жумлага асосан (NM_1M) ва (M_1OM) лардан (NM_1O) бўлиши келиб чиқади. Бу ердан $\rho(N,O) - \rho(M,O) = \rho(N,M_1) > 0$. Чунки фаразга кўра, $N \notin MM_1$ ва $N \neq M_1$. $\rho(N,O) > \rho(M_1,O) = \rho(O,M)$. Зиддият ҳосил қилдик.

(M_1MN) ҳол ҳам худди шундай ҳал этилади. Демак 2.8- жумла исботланди.

Ярим тўғри чизиқ

l тўгри чизиқда ихтиёрий О нуқтани оламиз. $l \setminus \{O\}$ тўпламда эквивалентлик муносабатини киритамиз. Агар $O \notin MN$ бўлса $M,N \in l \setminus \{O\}$ нуқталарни О нуқтадан бир томонда ётади деб айтамиз. $l \setminus \{O\}$ тўпламда шундай таьрифланган бинар муносабат эквивалентлик муносабатидир. Хақиқатан хам $\forall M \in l \setminus \{O\}$ нуқта учун $O \notin MM = \{M\}$, яъни М ва М нуқталар О нуқтадан бир томонда ётади. Агар $M,N \in l \setminus \{0\}$ нуқталар О нуқтадан бир томонда ётса, у ҳолда $O \notin MN$ бўлади. Бундан эса $O \notin NM$, я,ни N ва M нуқталар ҳам О нуқтадан бир томонда ётади. Бу муносабатнинг рефлексив, симметрик бўлишини англатади.

Агар $M,N,P \in l \setminus \{O\}$ нуқталар учун $O \notin MN$ ва $O \notin NP$ бўлса, унда $O \notin MN \bigcup NP$ бўлади. Бунда 2.3-жумлага асосан $O \notin MP$ келиб чиқади. Демак, M, N нуқталар ва N, P нуқталар О нуқтадан бир томонда ётса, у ҳолда

M, P нуқталар ҳам O нуқтадан бир томонда ётади. Демак, бу муносабат транзитив муносабатдир.

2.9-жумла. “Нуқталар O нуқтадан бир томонда ётади” муносабати $l\setminus\{O\}$ тўпламни иккита эквивалентлик синфига ажратади.

Исбот. Бирорта d – мусбат сон бўлсин. III_3-аксиомага мувофиқ, мавжуд шундай $M_1, M_2 \in l$ нуқталарни оламизки, бунда $\rho(M_1, O) = d = \rho(O, M_2)$ бўлади. Унда 2.1-жумлага асосан (M_1OM_2) бўлганлигидан $O \in M_1M_2$ бўлади. Демак M_1, M_2 нуқталар O нуқтадан бир томонда ётмайди. Бошқача қилиб айтганда бу нуқталар эквивалент нуқталар эмас, яъни M_1 ва M_2 нуқталар ҳар ҳил эквивалентлик синфларида ётади. Энди бунда ҳар қандай $N \in l\setminus\{0\}$ нуқта ёки M_1 нуқтага ёки M_2 нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. N нуқта M_1 нуқтага ҳам M_2 нуқтага ҳам эквивалинт эмас, яъни $O \in M_1N$, $O \in NM_2$ бўлсин. Аммо, Паш аксиомасидан, агар M_1, M_2, N ҳар ҳил нуқталар битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда ҳеч қандай O нуқта учта (M_1M_2), (M_1N) ва (NM_2) интервалларга бир вақтда тегишли эмаслиги келиб чиқади. Зиддият.

Демак, ҳар қандай $N \in l\setminus\{0\}$ нуқта ё M_1 нуқтага ёки M_2 нуқтага эквивалент. 2.9-жумла исботланди.

Бу эквивалент синифларини l тўғри чизиқни O нуқта бўлгандаги ярим тўғри чизиқлар деб ёки боши O нуқтада бўлган ярим туғри чизиқлар деб атаймиз. Боши O нуқтада бўлган M нуқта орқали ўтувчи ярим тўғри чизиқни $(OM\to)$ билан белгилаймиз. Ярим тўғри чизиқга O бошланғич нуқтасини қўшиб $OM\to$ нурни ҳосил қиламиз. Айрим адабиётларда $OM\to$ нурни $[OM)$ орқали белгиланади.

2.10-жумла. Бошланғич нуқталар O_1 ва O_2 бўлган l тўғри чизиқнинг ихтиёрий икки нури

1) ё кесишмайди;

2) ё O_1O_2 кесма бўйича кесишади;

3) ёки улардан бири иккинчисида ётади.

Исбот. Фараз қилайлик, нурлар кесишсин ва M – уларнинг умумий нуқтаси бўлсин. Умумий ҳол, O_1, O_2, M нуқталар жуфт-жуфт бўлиб ҳар хил бўлган ҳолни қараймиз. Фараз қилайлик, аввал бунда M нуқта O_1O_2 кесмада ётмасин ва масалан (MO_1O_2) бўлсин. Унда $OM\to$ нурнинг ихтиёрий N нуқтаси учун 2.2-жумлага мувофиқ, агар $N\in MO_1$ бўлса, у ҳолда $N\in MO_2$ бўлади. Чунки $(MO_1O_2)\Rightarrow O_1\in MO_2\Rightarrow MO_1\subset MO_2$. Агарда $N\notin MO_1$ бўлса, у ҳолда $N\in O_1M\to$ бўлганлигидан $O_1\notin NM$, яъни O_1 нуқта N ва M нуқталар орасида ётмаганидан, (NMO_1) бўлиб, бунда (MO_1O_2) ва 2.7-жумлага асосан, (NMO_2) бўлади ва демак, $O_2\notin NM$, яъни $N\in O_2M\to$. Худди шундай, (O_1O_2M) бўлса, у ҳолда $N\in O_2M\to$ дан $N\in O_1M\to$ бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, $O_2M\to$ нурнинг ихтиёрий N нуқтаси учун 2.2-жумлага мувофиқ, агар $N\in MO_2$ бўлса, у ҳолда $N\in MO_1$ бўлади. Чунки, $(O_1O_2M)\Rightarrow O_2\in O_1M=MO_1\Rightarrow MO_2\subset MO_1$. Агарда $N\notin MO_2$ бўлса, у ҳолда $N\in O_2M\to$ бўлганидан O_2 нуқта N ва M нуқталар орасида ётмаганидан, (NMO_2) бўлиб, бунда (O_1O_2M) билан биргаликда 2.7-жумлага асосан (NMO_2) ва (MO_1O_2) лардан $\left(NMO_1\right)$ ни беради ва демак, $O_1\notin NM$, яъни $N\in O_1M\to$. Демак, $M\notin O_1O_2$ бўлса, у ҳолда $O_1M\to$ нур бутунлай $O_2M\to$ нурда ётади ёки аксинча, $O_2M\to$ нур бутунлай $O_1M\to$ нурда ётади.

Энди (O_1MO_2) ва N нуқта O_1O_2 кесманинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Унда 2.4 ва 2.3-жумлаларга мувофиқ $\left(MN\right)$ интервал $\left(O_1O_2\right)$ интервалнинг қисми бўлади ва шунинг учун O_1 нуқтани ҳам, O_2 нуқтани ҳам ўз ичига олмайди. Ҳақиқатан ҳам, 2.4-натижага асосан $M\in O_1O_2\Rightarrow O_1M\subset O_1O_2,\ N\in O_1O_2\Rightarrow O_1N\subset O_1O_2$. Бундан эса $O_1M\bigcup O_1N\subset O_1O_2$ ёки $MO_1\bigcup O_1N\subset O_1O_2$ бўлади. 2.3-жумлага асосан

$MN \subset O_1O_2$ эга бўламиз. Бундан эса $(MN) \subset (O_1O_2)$, яъни $O_1 \notin (NM)$ ва $O_2 \notin (N,M)$.

Демак N нуқта O_1 ва O_2 нуқталарнинг шундай томонида ётадики, бунда шу томонда M нуқта ҳам ётади.

$O_1O_2 \subset O_1M \rightarrow$ ва $O_1O_2 \subset O_2M \rightarrow$. Демак, $O_1O_2 \subset (O_1M \rightarrow) \cap (O_2M \rightarrow)$. Иккинчи томондан, агар $N \notin O_1O_2$ ва масалан (NO_1O_2) бўлса, у ҳолда (O_1MO_2) дан ва 2.6-жумладан (NO_1M) бўлиши келиб чиқади, яъни $N \notin O_1M \rightarrow$. 2.10-жумла исботланди.

Ундан тўғри чизиқда ярим тўғри чизиқлар ҳам худди шундай жойлашиши келиб чиқади, фақат 2) ҳолда улар интервал бўйича кесишади.

2.11-жумла. l тўғри чизиқ ва $O \in l$ нуқта ва $d > 0$ сон берилган бўлсин. Унда l тўғри чизиқ О нуқта билан бўлингандаги ҳар қандай ярим тўғри чизиқда О нуқтадан d масофада турувчи битта нуқта мавжуд.

Исбот. III_3 аксиомага мувофиқ l тўғри чизиқда О нуқтадан d масофада турувчи иккита M_1 ва M_2 нуқталар мавжуд. 2.1-жумлага мувофиқ О нуқта M_1 ва M_2 нуқталар орасида ётади, яъни M_1 ва M_2 нуқталар бошланғич нуқтаси О бўлган ҳар ҳил ярим тўғри чизиқларда ётади.

3§. ЯРИМ ТЕКИСЛИК ВА ЯРИМ ФАЗО

π текислик ва унда ётувчи l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Планиметрия аксиомаларидан бири, $\pi \setminus l$ тўпламнинг бўшмаслигини тасдиқлайди. Агар $MN \bigcap l = \varnothing$ бўлса, $M, N \in \pi \setminus l$ нуқталарни l тўғри чизиқдан бир томонда ётади деб айтамиз ($MS_l N$ каби ёзамиз).

3.1 жумла. $\pi \setminus l$ тўпламда S_l эквивалентлик муносабатидир.

Исбот. $\forall M \in \pi \setminus l$ нуқта учун $MM = \{M\}$, $MM \bigcap l = \varnothing$, яъни $MS_l M$. Агар $MS_l N$ бўлса, у ҳолда $MN \bigcap l = \varnothing$ бўлиши келиб чиқади. Бундан $NM \bigcap l = \varnothing$ бўлиб, $NS_l M$ бўлади. Демак, S_l муносабат рефлексив ва симметрик муносабатдир.

Энди транзитивлик аксиомасини текширамиз. $MS_l N$ ва $NS_l O$ бўлсин. Агар M, N, O нуқталар битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда 2.3 жумлага мувофик $MO \subset MN \cup NO$ бўлади ва демак, $MN \bigcap l = \varnothing$ ва $NO \bigcap l = \varnothing$ бўлишидан $(MN \bigcap l) \bigcap (NO \bigcap l) = \varnothing$, $(MN \bigcap NO) \bigcap l = \varnothing$ ёки $MO \bigcap l = \varnothing$ бўлиши келиб чиқади, яъни $MS_l O$ бўлади.

Энди M, N, O нуқталар битта тўғри чизиқда ётмаган бўлсин, шартга кўра $MN \bigcap l = \varnothing$ ва $NO \bigcap l = \varnothing$. Фараз қилайлик, бунда $MO \bigcap l \neq \varnothing$ бўлсин. Аммо унда l тўғри чизиқ MNO учбурчак учларидан ўтмаган тўғри чизиқ учбурчакнинг томонлоридан бири MO ни кесиб, Паш аксиомасига мувофиқ, унинг яъни битта томонини кесиши керак, яъни $MO \bigcap l \neq \varnothing$ ёки $NO \bigcap l \neq \varnothing$. Зиддият. Демак, фараз нотўғри, яъни $MO \bigcap l = \varnothing$ бўлиб, $MS_l O$ бўлади.

3.1-жумла исботланди.

3.2-жумла. S_l муносабатнинг иккита эквивалентлик синфи мавжуд.

Исбот. Ихтиёрий $M \in \pi \setminus l$ ва $O \in l$ нуқталарни оламиз. M ва O нуқталар орқали m тўғри чизиқни ўтказамиз. m тўғри чизиқда 2.9-жумлага мувофиқ

$OM \to$ нурга тегишли бўлмаган N нуқта мавжуд. Шу билан бирга O нуқта MN кесманинг ички нуқтаси бўлиб, M ва N нуқталар эса эквивалент эмасдир.

Энди ихтиёрий $P \in \pi \setminus l$ нуқтанинг ёки M нуқтага, ёки N нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, P ва M нуқталар эквивалент бўлмасин, яъни $l \bigcap MP \neq \varnothing$. Аммо, $M \in \pi \setminus l$ ва $P \in \pi \setminus l$ бўлганидан $l \bigcap (MP) \neq \varnothing$ бўлади. Унда l тўғри чизиқ $O \in MN \bigcap l$ бўлганидан $M \in \pi \setminus l,\ N \in \pi \setminus l$ эканлигидан (MN) ва (MP) интервалларни кесиб Паш аксиомасига мувофиқ (NP) интервални кесмайди, яъни $l \cap (NP) = \varnothing$. $N \in \pi \setminus l,\ P \in \pi \setminus l$ бўлганидан $NP \cap l = \varnothing$, яъни $PS_l N$ бўлади. 3.2-жумла исботланди.

S_l-муносабатининг эквивалент синфларини π текисликни l тўғри чизиқ билан бўлингандаги ярим текисликларни $\pi^-,\ \pi^+$ ёки $\pi_l^-,\ \pi_l^+$ символлар билан белгилаймиз. Ярим тўғри чизиқ ва ярим текиликнинг таърифларидан бевосита қуйидагилар келиб чиқади.

3.3-жумла. $l \subset \pi$ тўғри чизиқ π текисликни π^+ ва π^- ярим текисликларга ажратсин. Бундан ташқари π текисликда l тўғри чизиқни O нуқтада кесувчи бошқа m тўғри чизиқ берилган бўлсин. $m \cap \pi^-$ ва $m \cap \pi^+$ тўпламлар m тўғри чизиқни O нуқтада бўлгандаги ярим тўғри чизиқлар бўлади (қисқача: тўғри чизиқ ярим текисликлар билан тўғри чизиқ бўйича кесишади).

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $l \subset \pi$ ва $\pi^- \neq \varnothing$ ва $\pi^+ \neq \varnothing$ эканлигидан $\mathrm{M} \in \pi^-$ ва $\mathrm{N} \in \pi^+$ бўлиб, M ва N нуқталардан ўтувчи m тўғри чизиқ l тўғри чизиқни O нуқтада кессин. $\mathrm{P} \in m \bigcap \pi^- \Leftrightarrow \mathrm{P} \in m$ ва $\mathrm{P} \in \pi^+ \Rightarrow \mathrm{P} \in m$ ва $\mathrm{MP} \bigcap l = \varnothing \Rightarrow \mathrm{MP} \notin \mathrm{O} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P} \in (\mathrm{OM} \to)$, яъни $m \bigcap \pi^- \subset (\mathrm{OM} \to)$.

Энди аксинча, $P \in (OM \to)$, яъни, $MP \notin O$ бўлсин, унда $MP \bigcap l = \varnothing \Rightarrow P \in \pi^-$. $P \in m$ бўлганидан $P \in m \cap \pi^-$, яъни, $m \in \pi^- \supset (OM \to)$. Демак, $m \in \pi^- = (OM \to)$.

Худди шундай, $Q \in m \bigcap \pi^+ \Leftrightarrow Q \in m$ ва $Q \in \pi^+ \Rightarrow Q \in m$ ва $O \notin NQ \Rightarrow$ $\Rightarrow Q \in (ON \to)$, яъни $m \bigcap \pi^+ \subset (ON \to)$.

Энди аксинча, $Q \in (ON \to)$, яъни, $O \notin QN$ бўлсин, унда $NQ \bigcap l = \varnothing \Rightarrow Q \in \pi^+$. Аммо $Q \in m$ бўлганидан $Q \in m \bigcap \pi^+$, яъни, $m \bigcap \pi^+ \supset (ON \to)$. Демак $m \cap \pi^+ \subset (ON \to)$ ва $m \cap \pi^+ \supset (ON \to)$ эканлигидан $m \cap \pi^+ = (ON \to)$. 3.3-жумла исботланди.

E фазода π текислик берилган бўлсин. Стереометрия аксиомаларидан бири $E \setminus \pi$ тўпламнинг бўш эмаслигини тасдиқлайди. Агар $M, N \in E \setminus \pi$ нуқталар учун $MN \cap \pi = \varnothing$ бўлса, $M, N \in E \setminus \pi$ нуқталарни π текисликдан бир томонда ётади деб атаймиз ($MS_\pi N$ каби ёзамиз).

3.4-жумла. S_π муносабат $E \setminus \pi$ тўпламнинг эквивалентлик муносабатидир.

Исбот. $\forall M \in E \setminus \pi$ нуқта учун $MM = \{M\}$ бўлганидан $MM \bigcap \pi = \varnothing$, яъни $MS_\pi M$ бўлади. Агар $MS_\pi N$ бўлса, у ҳолда $MN \cap \pi = \varnothing \Rightarrow NM \cap \pi = \varnothing \Rightarrow NS_\pi M$.

Энди факат транзитивлик аксиомаларини текширамиз: $MS_\pi N$ ва $NS_\pi O$ бўлсин. M, N, O нуқталардан ўтувчи π_1 текислик мавжуд. π ва π_1 текисликлар параллел, яъни $\pi \cap \pi_1 = \varnothing$ бўлса, у ҳолда $MO \subset \pi_1$ бўлгани туфайли $\pi \cap MO = \varnothing$. Демак, $MS_\pi O$ бўлади.

Энди π ва π_1 текисликлар π_1 текисликни π_1^- ва π_1^+ яримтекисликларга ажратувчи l тўғри чизиқ бўйича кесишган бўлсин. M ва N нуқталар бу ярим текисликларнинг бирида ётади, чунки акс ҳолда MN кесма l тўғри чизиқ билан кесишиб боз устига $\pi \supset l$ текислик билан ҳам кесишган бўлар эди. Худди шундай N ва O нуқталар ҳам битта ярим текисликда ётади. Унда M, N, O учта нуқталарнинг ҳаммаси N нуқта ётган ярим текисликда ётади ва демак, $MO \bigcap l = \varnothing$ бўлиб,

$$MO \cap \pi = (MO \subset \pi_1 \text{ эканидан}) = \left(MO \cap \pi_1\right) \cap \pi = MO \cap \left(\pi_1 \cap \pi\right) = MO \cap l = \varnothing$$

бўлади, яъни $MO \cap \pi = \varnothing$ бўлиб, $MS_\pi O$ бўлади.

3.4-жумла исботланди.

3.5-жумла. S_π муносабатнинг иккита эквивалентлик синфи мавжуд.

Исбот. Ихтиёрий $M \in E \setminus \pi$ ва $O \in \pi$ нуқталарни оламиз. M ва O нуқталар орқали m тўғри чизиқни ўтказамиз. m тўғри чизиқда, 2.9-жумлага мувофиқ, $OM \rightarrow$ нурга тегишли бўлмаган N нуқта мавжуд. Шу билан бирга O нуқта MN кесманинг ички нуқтаси бўлиб, M ва N нуқталар эса эквивалент эмасдир. Энди ихтиёрий учинчи $P \in E \setminus \pi$ нуқтанинг ёки M нуқтага, ёки N нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, P ва M нуқталар эквивалент бўлмасин. Яъни, $MP \cap \pi \neq \varnothing$. Аммо $M \in E \setminus \pi$ ва $P \in E \setminus \pi$ бўлганидан $(MP) \cap \pi \neq \varnothing$ бўлади. Унда π текислик (MN) ва (NP) интервалларни кесиб, (NP) интервални кесмайди, яъни $\pi \cap (NP) = \varnothing$. Чунки, учбурчакнинг учларидан ўтмаган текислик учбурчак томонларидан бирини кесиб ўтса, у ҳолда қолган икки томондан фақат биттасини кесади. Аммо, $N \in E \setminus \pi$ ва $P \in E \setminus \pi$ бўлганидан $MP \cap \pi = \varnothing$ бўлади, яъни $PS_\pi N$.

3.5-жумла исботланди.

S_π муносабатнинг эквивалент синфларини E фазони π текислик билан бўлингандаги ярим фазолар ёки π текислик билан чегараланган ярим фазолар деб атаймиз. Ярим фазо, ярим текислик, ярим тўғри яизикнинг таърифидан қуйидаги иккита тасдиқ бевосита келиб чикади.

3.6-жумла. π_1 ва π_2 – l тўғри чизиқ бўйича кесишувчи текисликлар, E^-, E^+ – π_1 текислик билан чегараланган ярим фазолар бўлсин. Унда

$E^{-}\bigcap\pi_2$ ва $E^{+}\bigcap\pi_2$ тўпламлар l тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлардир.

3.7-жумла. π текислик E фазони E^{-}, E^{+} ярим фазоларга ажратсин ва l тўғри чизиқ π текислик билан O нуқтада кесишсин. Унда $E^{-}\bigcap l$ ва $E^{+}\bigcap l$ тўпламлар l тўғри чизиқ O нуқта билан бўлингандаги ярим тўғри чизиқлардир.

4§. ВЕКТОР ТАЪРИФИ

M нуқта боши, N нуқта охири деб эълон қилинган MN йўналган кесмани боши M нуқтада ва охири N нуқтада бўлган $\vec{MN}$ вектор деб аталади. (M,N) тартибланган нуқталар жуфтлигини ҳам $\vec{MN}$ вектор деб аташ мумкин.

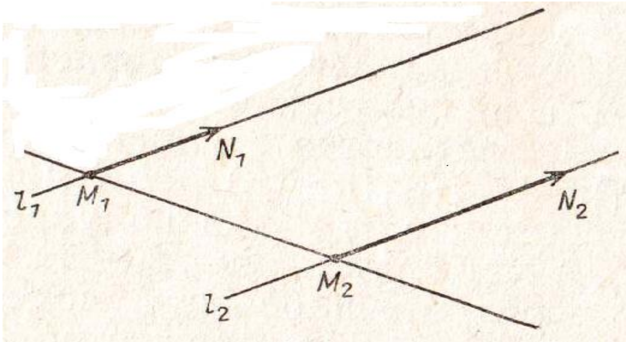
MN кесманинг $|MN|$ узунлигини, шунингдек $\vec{MN}$ векторнинг $\left|\vec{MN}\right|$ узунлиги деб аталади. Узунлиги нолга тенг бўлган вектор нол вектор деб аталади.

Агар $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар бир хил йўналган бўлса, у ҳолда $\vec{M_1N_1} \to$ ва $\vec{M_2N_2} \to$ нолмас векторлар бир хил йўналган векторлар деб аталади. $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурларнинг бир хил йўналган бўлиши эса ўз навбатида қуйидагиларни англатади. Бунда ё:

1) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар битта тўғри чизиқда ётади ва $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар нур буйича кесишади **(1-расм)**.

1-расм.

2) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқларда ётади ва $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар эса l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда M_1M_2 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади **(2-расм).**



2-расм.

4.1-эслатма. 3.3-жумладан $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар M_1M_2 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади, факат ва факат ва ҳолда, қачонки $N_1^1 \in M_1N_1 \to$ ва $N_2^1 \in M_2N_2 \to$ қандайдир нуқталар жуфтлиги учун $N_1^1N_2^1$ кесма M_1M_2 тўғри чизиқ билан кесишмаса, деган тасдиқ келиб чикади.

Агар икки шарт:

а) $\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right| = \left|\overrightarrow{M_2N_2}\right|$;

ва ($\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right| \neq 0$ бўлган ҳолда)

б) $\overrightarrow{M_1N_1}$ ва $\overrightarrow{M_2N_2}$ бир хил йўналган;

бажарилса, у ҳолда $\overrightarrow{M_1N_1}$ ва $\overrightarrow{M_2N_2}$ векторлар тенг деб аталади ва $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$ каби ёзилади.

4.2-жумла. Ихтиёрий $\overrightarrow{MN}$ вектор учун ва ихтиёрий M_1 нуқта учун шундай ягона N_1 нуқта мавжудки, бунда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1}$ бўлади.

Исбот. M_1 нуқта MN тўғри чизиқда ётмаган ҳолни кўриб чиқайлик. Унда N_1 нуқта M_1 нуқта орқали ўтувчи ва MN тўғри чизиқка параллел бўлган l тўғри чизиқда ётиши керак. Шундай l тўғри чизиқ мавжуд ва Евклиднинг V постулатига кўра ягонадир.

M, N, M_1 нуқталар орқали ўтувчи π текисликни қараймиз. MM_1 тўғри чизиқ π текисликни иккита π^- ва π^+ ярим текисликларга ажратади. Фараз қилайлик, N нуқта π^+ ярим текисликда ётсин. Унда N_1 нуқта ҳам π^+ ярим текисликда ётиши керак. Демак, N_1 нуқта $l \cap \pi^+$ тўпламга тегишли бўлиши керак, яъни 3.3-жумлага мувофиқ, бошланғич нуқтаси M_1 бўлган ярим тўғри чизиққа тегишлидир. Аммо, 2.11-жумлага мувофиқ, бу ярим тўғри чизиқда M_1 нуқтадан $d = \left|\overrightarrow{MN}\right|$ масофада жойлашган фақат битта ягона N_1 нуқта мавжуд.

Энди M_1 нуқта MN тўғри чизиқда ётган бўлсин. Боши M_1 нуқтада бўлган $MN \rightarrow$ нур билан нур бўйича кесишувчи нурни оламиз. Аммо яна 2.11-жумлага мувофиқ, бу нурнинг ярим тўғри чизиғида M_1 нуқтадан $d = \left|\overrightarrow{MN}\right|$ масофада жойлашган фақат битта ягона N_1 нуқта мавжуд.

Энди $\overrightarrow{MN}$ нол вектор бўлса, у ҳолда унинг узунлиги $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 0$, яъни M нуқта N нуқта билан устма-уст тушади. Демак, бу ҳолда N_1 нуқта сифатида M_1 нуқтанинг ўзини оламиз. 4.2-жумла исботланди.

4.3-жумла. Барча нурлар тўпламида бир хил йўналганлик муносабати эквивалентлик муносати бўлади.

Исбот. Нурларнинг бир хил йўналганлик муносабатини ~ символ билан белгилаймиз. Унда $(MN \rightarrow) \cap (MN \rightarrow) = MN \rightarrow$ бўлганидан $MN \rightarrow \sim MN \rightarrow$, яъни бир хил йўналганлик муносабати рефлексивдир.

$M_1N_1 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$ бўлса, ёки:

1) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар битта тўғри чизиқда ётади ва $M_1N_1 \rightarrow$ ва $M_2N_2 \rightarrow$ нурлар нур буйича кесишади, ёки

2) M_1N_1 ва M_2N_2 кесмалар l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқларда ётади ва $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурлар эса l_1 ва l_2 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда M_1M_2 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади;

ёки:

1) M_2N_2 ва M_1N_1 кесмалар битта тўғри чизиқда ётади ва $M_2N_2 \to$ ва $M_1N_1 \to$ нурлар нур буйича кесишади, ёки

2) M_2N_2 ва M_1N_1 кесмалар l_2 ва l_1 параллел тўғри чизиқларда ётади ва $M_2N_2 \to$ ва $M_1N_1 \to$ нурлар эса l_2 ва l_1 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда M_2M_1 тўғри чизиқнинг бир томонида ётади, яъни $M_2N_2 \to \sim M_1N_1 \to$ ва бир хил йўналганлик муносабати симметрикдир.

Энди фақат транзитивлик аксиомасини текшириш қолди. $M_1N_1 \to \sim M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to \sim M_3N_3 \to$ бўлсин. l_i орқали $M_iN_i \to$ нур ётган тўғри чизиқни белгилаймиз, бу ерда $i = 1,2,3$. Аввал l_1, l_2, l_3 тўғри чизиқлар битта текисликда ётмаган бўлсин деб фараз қиламиз. M_1, M_2, M_3 нуқталар орқали π текисликни ўтказамиз. У E фазони иккита E^- ва E^+ ярим фазоларга ажратади. Нурларнинг бир хил йўналганлик таърифига мувофиқ, l_1, l_2, l_3 тўғри чизиқлар жуфт-жуфт бўлиб (ихтиёрий иккитаси) параллелдир.

$M_1N_1 \to \sim M_2N_2 \to \Rightarrow l_1 \parallel l_2$, $\quad M_2N_2 \to \sim M_3N_3 \to \Rightarrow l_2 \parallel l_3$ ва $l_1 \parallel l_2 \wedge l_2 \parallel l_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3$.

l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликни π_{12} орқали белгилаймиз. N_1N_2 кесма $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурларнинг бир хил йўналганлиги туфайли M_1 ва M_2 нуқталардан ўтувчи $l_{12} = \pi \cap \pi_{12}$ тўғри чизиқни кесмайди. Демак, N_1N_2 кесма π текислик билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$N_1N_2 \cap \pi = (N_1N_2 \cap \pi_{12}) \cap \pi = N_1N_2 \cap (\pi_{12} \cap \pi) = N_1N_2 \cap \ell_{12} = \varnothing .$$

Шундай қилиб, N_1N_2 кесма ярим фазоларнинг бирида, масалан E^+ да ётади. Худди шундай N_2N_3 кесма, $M_2N_2 \rightarrow$ ва $M_3N_3 \rightarrow$ нурларнинг бир хил йўналганлиги туфайли M_2 ва M_3 нуқталардан ўтувчи $l_{23} = \pi \cap \pi_{23}$ тўғри чизиқни кесмайди. Демак, N_2N_3 кесма π текислик билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам, $N_2N_3 \cap \pi = \left(N_2N_3 \cap \pi_{23}\right) \cap \pi = N_2N_3 \cap \left(\pi_{23} \cap \pi\right) = N_2N_3 \cap l_{23} = \varnothing$.

Шундай килиб N_2N_3 кесма E^- ва E^+ ярим фазоларнинг бирида ётади. Аммо, $N_1N_3 \subset E^+$ бўлганидан $N_1,\, N_2 \in E^+$ бўлади. Агар $N_2N_3 \subset E^-$ бўлса, у ҳолда $N_2,\, N_3 \in E^-$ бўлади. Демак, $N_2 \in E^+$ ва $N_2 \in E^-$ бўлиб, $E^+ \bigcap E^- = \varnothing$ бўлади. Зиддият ҳосил бўлди. Шундай қилиб, $N_2N_3 \subset E^+$ ёки $N_2,\, N_3 \in E^+$ бўлади. $N_1,\, N_2 \in E^+$ ва $N_2,\, N_3 \in E^+$ $\Rightarrow$ $N_1,\, N_3 \in E^+ \Rightarrow$ $N_1N_3 \in E^+$.Демак, $N_1N_3 \subset E^+$.

Бу ердан l_1 ва l_3 тўғри чизиқларни ўз ичига олувчи текисликни π_{13} орқали белгилаб, $N_1N_3 \subset E^+ \cap \pi_{13}$ ҳосил қиламиз.

Аммо $E^+ \cap \pi_{13}$ тўплам 3.6-жумлага мувофиқ M_1 ва M_3 нуқталар орқали ўтувчи l_{13} тўғри чизиқ билан чегараланган π_{13}^+ ярим текислик бўлади. Шундай қилиб, N_1N_3 кесма l_{13} тўғри чизиқ билан кесишмайди, бундан 4.1-натижага кўра $M_1N_1 \rightarrow$ ва $M_3N_3 \rightarrow$ нурларнинг бир хил йўналганлигини ҳосил қиламиз.

Энди турли l_1, l_2, l_3 тўғри чизиқлар битта π текисликда ётсин. π текисликка тегишли бўлмаган M нуқтани оламиз. 4.2-жумлага мувофиқ, шундай N нуқта мавжудки, бунда $MN \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$. Унда $M_1N_1 \rightarrow,\ M_2N_2 \rightarrow,$ $MN \rightarrow$ ва $MN \rightarrow,\ M_2N_2 \rightarrow,\ M_3N_3 \rightarrow$ учлик нурлар юқорида қаралган ҳолни қаноатлантиради. Демак, $M_1N_1 \rightarrow \sim MN \rightarrow,\ MN \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow,\ M_1N_1 \rightarrow,\ MN \rightarrow,$ $M_3N_3 \rightarrow$ нурлар ҳам бир текисликда ётмайди. Демак, $M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$.

Энди $l_2 = l_3$ бўлсин. $M_2N_2 \to$, $M_3N_3 \to$ нурлардан бири иккинчисини ўз ичига олади. Фараз қилайлик, $M_2N_2 \to \supset M_3N_3 \to$ бўлсин.

M_1 ва M_2 нуқталар π текисликни π_{12}^- ва π_{12}^+ ярим текисликларга ажратувчи l_{12} тўғри чизиққа тегишли бўлсин. Худди шундай, M_1 ва M_3 нуқталар π текисликни π_{13}^- ва π_{13}^+ ярим текисликларга ажратувчи l_{13} чизиққа тегишли бўлсин. Бунда $N_1 \in \pi_{13}^+$ деб фараз қиламиз. $M_2\,M_3$ кесмада M ички нуқтани орқали l_{12} тўғри чизиққа параллел қилиб, l тўғри чизиқни ўтказамиз. $(M_1N_1 \to)$ ва $(M_2N_2 \to)$ ярим тўғри чизиқлар π_{12}^+ ярим текисликда ётганидан l тўғри чизиқ $(M_1N_1 \to)$ ярим тўғри чизиқни бирорта N нуқтада кесади. l тўғри чизиқ $M_1M_2M_3$ учбурчакнинг M_2M_3 томонини кесиб, Паш аксиомасига мувофиқ, унинг иккинчи томонини ҳам кесиши керак. l ва l_{12} ларнинг параллеллиги туфайли, бу томон фақат M_1M_3 бўлиши мумкин. Демак, l тўғри чизиқ M_1M_3 кесмани кесади. M_1M_3 кесма l_1 ва l_3 тўғри чизиқлар орасида ётганидан, у ҳолда l тўғри чизиқнинг фақат шундай қисми билан l_1 ва l_3 тўғри чизиқлар орасидаги қисми, яъни MN кесма билан кесишиши мумкин. Демак, MN кесма l_{13} тўғри чизиқ билан кесишади. Шунинг учун M ва N нуқталар бу тўғри чизиқ билан чегараланган ҳар хил ярим текисликларда ётади. Аммо, N нуқта $(M_1N_1 \to)$ ярим тўғри чизиққа тегишли. Биз $N_1 \in \pi_{13}^+$ деб, фараз қилган эдик. Демак, $N \in \pi_{13}^+$ ва $M \in \pi_{13}^-$. Унда (M_3MM_2) дан $M_2 \in \pi_{13}^-$ бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун $(M_2M_3N_3)$ дан $N_3 \in \pi_{13}^+$ ни ҳосил қиламиз. Демак, N ва N_3 нуқталар битта π_{13}^+ ярим текисликка тегишлидир ва $l_{13} \cap NN_3 = \varnothing$. Демак, $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.

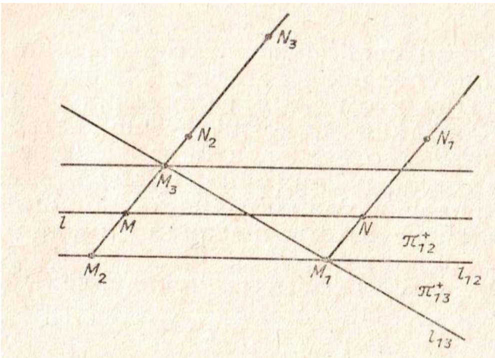
Шундай қилиб, бир хил йуналган нурларни камайтириб, яна бир хил йуналган нурларни ҳосил қиламиз. Бу ердан тўлдирувчи нурларга ўтиб, яъни бир хил йуналган нурларни орттириб яна бир хил йуналган нурларга келамиз. Демак, $l_2 = l_3$ ҳол ва унга ўхшаш $l_1 = l_2$ ҳол тўлиқ ҳал қилинди, бунинг тўлиқ тафсилоти қуйидагичадир.

Энди $M_3N_3 \to \supset M_2N_2 \to$ бўлсин. $M_1N_1 \to \sim M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to \sim M_3N_3 \to$. Унда $M_3N_3^1 \to \subset M_2N_2^1 \to$, $M_1N_1^1 \to \sim M_2N_2^1 \to$ ва $M_2N_2^1 \to \sim M_3N_3^1 \to$.

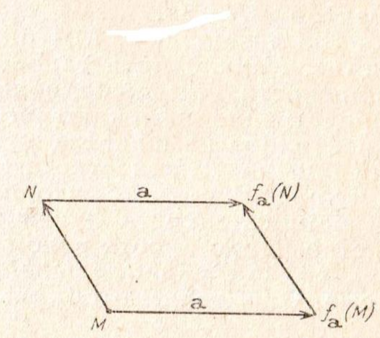
Унда юқоридаги исботга кўра, $M_1N_1^{'} \to \sim M_3N_3^{'} \to$. Бундан эса $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $l_1 = l_2$ бўлса, $M_1N_1 \to \supset M_2N_2 \to$ $\Rightarrow M_2N_2 \to \supset M_1N_1 \to$ $\Rightarrow M_1N_1 \to \sim M_2N_2 \to$ $\Rightarrow$ $M_2N_2 \to \sim M_3N_3 \to$.

Унда $M_3N_3 \to \sim M_2N_2 \to$, $M_2N_2 \to \sim M_1N_1 \to$. Юқоридаги исботга кўра, $M_3N_3 \to \sim M_1N_1 \to$, бундан эса, $M_1N_1 \to \sim M_3N_3 \to$.



2-расм.



3-расм.

Энди $l_1 = l_3$ бўлсин. Фараз қилайлик, $M_1N_1 \to$ ва $M_3N_3 \to$ нурлар ҳар хил томонларга йўналган бўлсин.

$N_3^1 \in l_3$ нуқтани шундай танлаймизки, бунда M_3 нуқта N_3 билан N_3^1 нуқта орасида ётсин. Унда $M_3N_3^1 \to$ ва $M_1N_1 \to$ нурлар бир хил йўналгандир. Бу эса $M_1N_1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурларнинг бир хил йўналганлиги билан биргаликда ҳал қилинган ҳолга мувофиқ, $M_3N_3^1 \to$ ва $M_2N_2 \to$ нурларнинг бир хил йўналган бўлишини беради, бу эса

$M_2N_2 \to$ ва $M_3N_3 \to$ нурларнинг бир хил йўналган бўлишига зиддир. Демак, фараз нотўғри, яъни $M_1N_1 \to$ ва $M_3N_3 \to$ нурлар бир хил йўналгандир.

Ниҳоят, учта нурнинг ҳаммаси битта тўғри чизиқда ётган ҳолни, ҳал этилган иккита тўғри чизиқдаги ҳол, шунингдек, битта текисликда ётган учта бир хил тўғри чизиқли ҳолга фазога чиққан ҳолга келтириш мумкин. Аммо, яна ҳам соддаси текисликка чиқмасдан 2.10–жумладан фойдаланишдир. $M_1N_1 \to\sim M_2N_2 \to$ бўлса, у ҳолда 2.10-жумлага мувофиқ улардан бири иккинчисини ўз ичига олади.

Агар $M_1N_1 \to\subset M_2N_2 \to$ бўлса, у ҳолда $M_2N_2 \to\subset M_3N_3 \to$ ёки $M_2N_2 \to\supset M_3N_3 \to$ бўлади. $M_1N_1 \to\subset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to\subset M_3N_3 \to$ дан $M_1N_1 \to\subset M_3N_3 \to$ бўлиши келиб чиқади, яъни $M_1N_1 \to\sim M_3N_3 \to$.

Агар $M_1N_1 \to\subset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to\supset M_3N_3 \to$ бўлса, $M_1N_1^1 \to\supset M_2N_2^1 \to$ ва

$$M_2N_2^1 \to\subset M_3N_3^1 \to \Rightarrow M_1N_1^1 \to \bigcap M_3N_3^1 \to\supset M_2N_2^1 \to \Rightarrow M_1N_1^1 \to\sim M_3N_3^1 \to \Rightarrow$$

$$M_1N_1 \to\sim M_3N_3 \to.$$

Агар $M_1N_1 \to\supset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to\supset M_3N_3 \to\Rightarrow M_1N_1 \to\supset M_3N_3 \to$, яъни $M_1N_1 \to\sim M_3N_3 \to$.

Агар $M_1N_1 \to\supset M_2N_2 \to$ ва $M_2N_2 \to\subset M_3N_3 \to\Rightarrow M_1N_1 \to\supset M_2N_2 \to$ ва $M_3N_3 \to\supset M_2N_2 \to\Rightarrow M_1N_1 \to \bigcap M_3N_3 \to\supset M_2N_2 \to\Rightarrow M_1N_1 \to\sim M_3N_3 \to$.

4.3 жумла тўлиқ исботланди. Ундан қуйидаги жумла бевосита келиб чиқади.

4.4 жумла. Барча векторлар тўпламида векторларнинг тенглик муносабати эквивалентлик муносабати бўлади.

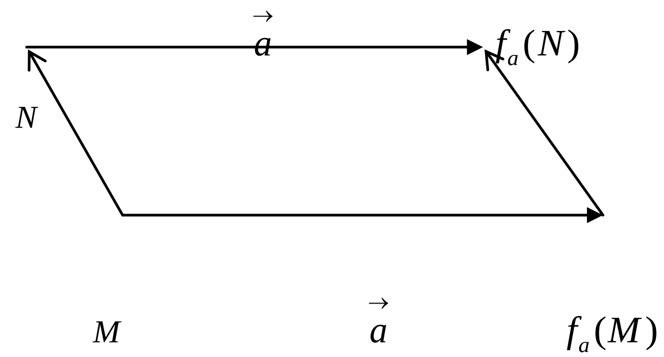
Тенг векторлар синфини эркин векторлар ёки оддийгина вектор деб аталади. Бундан буён “эркин” сўзини одатда тушириб қолдирамиз ва $\vec{MN}$ вектор деганда, MN йўналган кесмани ёки $\vec{MN}$ вектор билан аниқланган $\vec{a}$ эркин векторни, яъни $\vec{MN}$ векторга тенг бўлган барча векторлардан ташкил топган эквивалентлик синфни тушунамиз. Шунинг учун $\vec{MN} \in \vec{a}$ аниқ тасдиқ билан бирга ноформаль $\vec{MN} = \vec{a}$ тенглик ҳам қўлланилади. Узунлиги нолга тенг бўлган векторлар, нол векторлар деб аталувчи эквивалент синфни ҳосил қилади ва $\vec{0}$ каби белгиланади. Ихтиёрий M нуқта учун $\vec{MM} = \vec{0}$ га эга бўламиз. “$\vec{a}$ векторни M нуқтадан қўйиш” ёки “$\vec{a}$ векторни M нуқтага қўйиш” иборалари “4.2 жумлага асосан мавжуд $\vec{MN} = \vec{a}$ векторни олиш”ни англатади.

4.5 эслатма. Биз эркин векторнинг фазодаги таърифини бердик. Шундай таърифни текислик ёки ҳаттоки тўғри чизиқ чегарасида қолиб ҳам бериш мумкин. Шу билан бирга, 4.4 жумладан “фазодаги барча векторлар тўплами”ни ёки “текисликдаги барча векторлар тўплами”га ёки “тўғри чизиқдаги барча векторлар тўплами”га алмаштирилгандаги модификацияси келиб чиқади. Бу ерда ҳам текисликдаги бир хил йўналган векторларнинг транзитивлигини текширишда фазога чиқишдан саросимага тушмаслик керак. Фақат 1.3 жумлани эслаш керак.

Вектор параллел кўчириш сифатида

Ихтиёрий $\vec{a}$ векторни оламиз. M нуқтага M нуқтадан қўйилган $\vec{a}$ векторнинг охирини мос қўювчи $f_a : E \to E$ акс эттириш, бу ерда N 4.2-жумлага мувофиқ ягона, $f_a(M) = N$ ни аниқлаймиз.

Бу акс эттириш қуйидаги асосий хоссага эга: ихтиёрий M ва N нуқталар учун $\vec{MN} = \overrightarrow{f_a(M)\, f_a(N)}$.



Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик, M, N ва $f_a(M)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётмасин. Унда $MNf_a(N)f_a(M)$ тўртбурчакда $Mf_a(M)$ ва $Nf_a(N)$ қарама- қарши томонлар тенг ва параллелдир. Демак, бу тўртбурчак параллелограммдир. Унда N ва $f_a(N)$ нуқталар $Mf_a(M)$ тўғри чизиқнинг бир томонда ётишини эътиборга олиб, $\vec{MN} = \overrightarrow{f_a(M)\, f_a(N)}$ зарурий тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди M, N ва $f_a(M)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётган ҳолни қарайлик. Бу тўғри чизиқда ётмаган бирорта P нуқтани оламиз. Олдинги ҳолга мувофиқ $\vec{MP} = \overrightarrow{f_a(M)\, f_a(P)} \Rightarrow |MP| = |M^1P^1|$ ва $\vec{PN} = \overrightarrow{f_a(P)\, f_a(N)} \Rightarrow |PN| = |P^1N^1|$.

$\angle NMP = \angle N^1M^1P^1$ ва $\angle MNP = \angle M^1N^1P^1$. Чунки, икки параллел тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесишганда мос бурчаклар тенг. Демак, $\angle MPN = \angle M^1P^1N^1$, бундан $\Delta MPN = \Delta M^1P^1N^1$ келиб чиқади. Бундан эса $MN = M^1N^1$ бундан ташқари $MN \rightarrow \sim M^1N^1 \rightarrow$. Демак, $\vec{MN} = \vec{M^1N^1}$ ёки $\vec{MN} = \overrightarrow{f_a(M)\, f_a(N)}$.

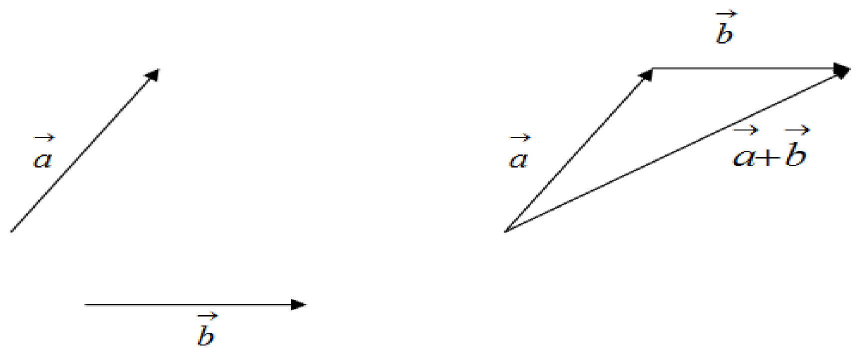
Энди, аксинча, ихтиёрий M ва N нуқталар учун $\vec{MN} = \overrightarrow{f(M)\, f(N)}$ хоссага эга бўлган $f : E \rightarrow E$ акслантириш берилган бўлсин. Унда шундай ягона $\vec{a}$ вектор мавжудки, бунда $f = f_a$. Ҳақиқатан ҳам, M ва $f(M)$

нуқталарнинг тартибланган жуфтлиги ягона $\vec{a} = \overrightarrow{Mf(M)}$ векторни аниқлашидан шундай векторнинг ягоналиги келиб чиқади.

Мавжудлиги. O нуқтани танлаймиз ва $\vec{a} = \overrightarrow{Of(O)}$ деб, фараз қиламиз. $f = f_a$ тенгликнинг бажарилиши учун ихтиёрий M нуқта учун $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Of(O)}$ тенгликнинг бажарилишини текшириш керак. Бу $\vec{OM} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ тенгликка, шунингдек юқорида исботланган $\overrightarrow{Mf_a(M)} = \overrightarrow{Nf_a(N)}$ тенгликдан келтирибчиқарилган $\vec{MN} = \overrightarrow{f_a(M)f_a(N)}$ тенгликка таяниб ҳосил қилинади. $\vec{OM} = \overrightarrow{f(O)f(M)} \Rightarrow \overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{Mf(M)}$ ва $\vec{a} = \overrightarrow{Of(O)}$ бўлганидан ихтиёрий M нуқта учун $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{a}$, яъни $f: E \to E$ шундай акс эттиришки, бунда ихтиёрий $M \in E$ нуқта учун $f(M) = N$ бўлса $\vec{MN} = \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{a}$. Демак, векторни бу векторга параллел кўчириш билан айнан бир нарса деб қараш мумкин.

5§. ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ ВА ВЕКТОРЛАРНИ СОНГА КЎПАЙТИРИШ

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндисини қуйидагича аниқлаймиз. $\vec{a}$ векторни қандайдир M нуқтага қўямиз. N бу векторнинг охири бўлсин, яъни $\vec{a} = \vec{MN}$. Кейин $\vec{b}$ векторни N нуқтага қўямиз. P бу векторнинг охири бўлсин, яъни $\vec{b} = \vec{NP}$. Энди $\vec{a}+\vec{b}$ ни $\vec{MP}$ векторни ўзининг вакили сифатида ўз ичига олган эркин векторга тенг деб фараз қиламиз, яъни $\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$ **(5-расм).**



5-расм

Бу таърифнинг тўғрилигини, яъни M нуқтанинг танланишига натижанинг боғлиқ эмаслигини текширамиз. $\overrightarrow{M_1N_1} \in \vec{a}$ ва $\overrightarrow{N_1P_1} \in \vec{b}$ учун $\vec{MP} = \overrightarrow{M_1P_1}$ бўлишини кўрсатамиз. $\vec{c} = \overrightarrow{MM_1}$ векторга мос $f : E \to E$ параллел кўчиришни қараймиз. У ҳолда, $\vec{MN} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$. Аммо, $f(M) = M_1$ ва $c = \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$. Демак, $f(N) = N_1$. Худди шундай, $\vec{NP} = \overrightarrow{f(N)f(P)}$ ва $\vec{c} = \overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{PP_1}$. Демак, $f(P) = P_1$. Шундай қилиб, $\vec{MP} = \overrightarrow{f(M)f(P)} = \overrightarrow{M_1P_1}$. Мана шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

$\vec{a}$ векторнинг α ҳақиқий сонга кўпайтмасини қуйидагича аниқлаймиз. $\vec{MN}=\vec{a}$ векторни оламиз ва $\alpha\vec{a}$ вектор $\vec{MP}$ векторни ўз ичига олувчи ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи эркин векторга тенг бўлади:

а) $\vec{MP}$ вектор MN тўғри чизиқда ётади;

б) агар $\alpha>0$ бўлса, $\vec{MP}$ вектор $\vec{MN}$ вектор билан бир хил йўналган, агар $\alpha<0$ бўлса, бошқа томонга йўналган бўлади;

в) $\left|\vec{MP}\right|=|\alpha|\left|\vec{MN}\right|$.

$\vec{MP}$ вектор бу шартлар орқали бир қийматли аниқланишини кўриш осон. Векторнинг сонга кўпайтириш амалининг тўғрилигини текшириш векторларни қўшиш амали учун қандай текширилган бўлса, худди шундай амалга оширилади.

5.1 теорема. Векторларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (қўшишнинг коммутативлиги);

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (қўшишнинг ассоциативлиги);

3) шундай $\vec{\theta}$ мавжудки (нол вектор деб аталувчи), бунда $\vec{a}+\vec{\theta}=\vec{a}$;

4) ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $-\vec{a}$ вектор мавжудки, ($\vec{a}$ векторга қарама-қарши вектор деб аталувчи), бунда $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{\theta}$ бўлади;

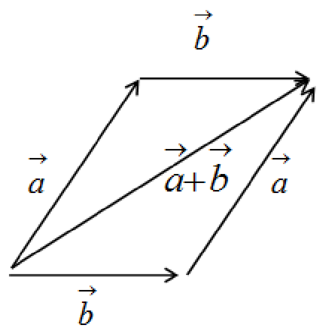
5) ихтиёрий α,β сонлар ва ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;

6) ихтиёрий α, β сонлар ва ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

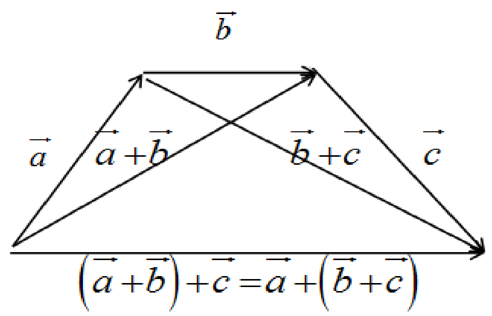
7) ихтиёрий α сон учун ва ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$;

8) ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Исбот. Қўшишнинг коммутативлиги ва ассоциативлиги 6- ва 7-расмларда иллюстрация қилинган.



6-расм.



7-расм.

1) $\left.\begin{matrix} \vec{AC} \in \vec{a}+\vec{b} \\ \vec{AC} \in \vec{b}+\vec{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}.$

2) $\left.\begin{matrix} \vec{AD} \in \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} \\ \vec{AD} \in \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$

1) ва 2) хоссалар исботланди.

A нуқтага $\vec{a}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{AB} \in \vec{a}$. B нуқтага $\vec{\theta}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{BB} \in \vec{\theta}$, унда $\vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} \in \vec{a} + \vec{\theta}$ бўлиб, $\vec{AB} \in \vec{a} + \vec{\theta}$, $\vec{AB} \in \vec{a} \Rightarrow \vec{a} + \vec{\theta} = \vec{a}$.

Демак, 3) хосса ҳам исботланди.

Агар $\vec{MN} \in \vec{a}$ бўлса, $\vec{NM} \in -\vec{a}$ бўлади. Унда $\vec{a} + (-\vec{a}) \in \vec{MN} + \vec{NM} = \vec{MM} \in \vec{\theta}$. Демак, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{\theta}$. 4) хосса ҳам исботланди.

Энди 5) хоссани исботлаймиз:

а) $\alpha\beta > 0$ ва б) $\alpha\beta < 0$ иккита ҳолларни қараймиз. Фараз қилайлик, $\alpha\beta > 0$ бўлсин. Бирорта A нуқтадан $\alpha\vec{a}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{AB} \in \alpha\vec{a}$. B нуқтадан эса $\beta\vec{a}$ векторни қўямиз, яъни $\vec{BC} \in \beta\vec{a}$. Бундан $\left|\vec{AB}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{BC}\right| = |\beta|\left|\vec{a}\right|$. $\alpha\beta > 0$ бўлгани учун $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{AC}$. Шунинг учун B нуқта A ва C нуқталар орасида ётади. Демак, $|AC| = |AB| + |BC|$ ёки $\left|\vec{AC}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right| + |\beta|\left|\vec{a}\right|$. Аммо α ва β сонлар бир хил ишорага эга бўлганидан $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$ бўлади. Шундай қилиб, $\left|\vec{AC}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right| + |\beta|\left|\vec{a}\right| = \left(|\alpha| + |\beta|\right)\left|\vec{a}\right| = |\alpha + \beta|\left|\vec{a}\right|$.

Агар $\alpha > 0$, $\beta > 0$, яъни $\alpha + \beta > 0$ бўлса, $\vec{AC} \uparrow\uparrow \vec{a}$ ва агар $\alpha > 0$, $\beta > 0$, яъни $\alpha + \beta < 0$ бўлса, $\vec{AC} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Бундан эса, $\vec{AC} = (\alpha + \beta)\vec{a}$. Иккинчи томондан $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Шундай қилиб, $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

б) $\alpha\beta < 0$ бўлсин. Агар $\alpha + \beta = 0$ (яъни $\alpha = -\beta$) бўлса, у ҳолда $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ тенгликнинг чап томони нол вектордир. Бу ҳолда ўнг томони ҳам нол вектор эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+(-\alpha)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\left(-\left(\alpha\vec{a}\right)\right)=\vec{\theta}$ ·

$\alpha+\beta\neq 0$ ҳолни қараймиз. α ва β ҳар хил ишорали бўлганидан $-\alpha$, $\alpha+\beta$ ёки $-\beta$, $\alpha+\beta$ бир хил ишорага эгадир.

Агар $(-\alpha)(\alpha+\beta)>0$ бўлса, $(-\alpha)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{a}=\left((-\alpha)+(\alpha+\beta)\right)\vec{a}=\beta\vec{a}$.

Агар $(-\beta)(\alpha+\beta)>0$ бўлса, $(-\beta)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{a}=\left((-\beta)+(\alpha+\beta)\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}$.

Икки ҳолда ҳам $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ёки $\beta=0$ бўлган ҳолда тенглик осонгина текширилади.

6) хоссани исботлаш учун $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ ва $(\alpha\beta)\vec{a}$ векторларнинг узунликлари тенг ва бир хил йўналган бўлишини ўрнатиш керак.

1. $\left|\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\right|=|\alpha|\left|\beta\vec{a}\right|=|\alpha||\beta|\left|\vec{a}\right|=|\alpha\beta|\left|\vec{a}\right|=\left|(\alpha\beta)\vec{a}\right|$. $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\vec{a}\neq\vec{\theta}$ деб фараз қиламиз, акс ҳолда $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=(\alpha\beta)\vec{a}$ тенгликнинг иккала томони ҳам $\vec{\theta}$ вектордир.

1) $\alpha>0$ ва $\beta>0$ бўлсин. У ҳолда $\alpha\beta>0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$ бўлади. $\vec{a}\uparrow\uparrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

2) $\alpha<0$ ва $\beta>0$ бўлсин. У ҳолда $\alpha\beta<0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\downarrow(\alpha\beta)\vec{a}$. $\vec{a}\uparrow\uparrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

3) $\alpha>0$ ва $\beta<0$ бўлсин. У ҳолда, $\alpha\beta<0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\downarrow(\alpha\beta)\vec{a}$. $\vec{a}\uparrow\downarrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

4) $\alpha<0$ ва $\beta<0$ бўлсин. У ҳолда $\alpha\beta>0$ бўлиб, $\vec{a}\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$. $\vec{a}\uparrow\downarrow\beta\vec{a}$ ва $\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Шунинг учун, $\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$. Демак, $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec{a}$.

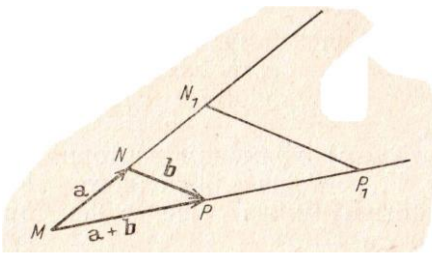
6) хосса тўлиқ исботланди.

8) хоссада $\vec{a}$ векторни 1 сонига кўпайтирилганда, йўналиши ҳам, узунлиги ҳам ўзгармайди. Демак, $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

7) хоссани исботлаймиз. $\vec{a}=\vec{MN}$ бўлсин. N нуқтадан $\vec{b}=\vec{NP}$ векторни қўямиз. Унда $\vec{a}+\vec{b}=\vec{MP}$ бўлади. MN тўғри чизиққа $\vec{MN_1}=\alpha\vec{a}$ векторни қўямиз ва N_1 нуқта орқали NP тўғри чизиққа параллел қилиб, MP тўғри чизиқ билан P_1 нуқтада кесишадиган тўғри чизиқни ўтказамиз **(8-расм)**. Умумий M учга ва N ва N_1 учларга тенг жуфт бурчакларга эга бўлган MNP ва MN_1P_1 учбурчаклар ўхшашдир. Демак,

$$\alpha=\frac{|MN_1|}{|MN|}=\frac{|MP_1|}{|MP|}=\frac{|N_1P_1|}{|NP|}.$$

Бундан эса $\overrightarrow{N_1P_1}=\alpha\vec{b}$ ва $\overrightarrow{MP_1}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ ни ҳосил қиламиз. Натижада ушбу $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\overrightarrow{MP_1}=\overrightarrow{MN_1}+\overrightarrow{N_1P_1}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ тенгликка эга бўламиз.



8-расм

5.1 теорема тўлиқ исботланди.

5.2 эслатма. Ўхшаш учбурчаклар ҳақидаги теореманинг қатъий исботи бурчак томонларини параллел тўғри чизиқлар билан кесилганда кесмаларнинг пропорционаллиги ҳақидаги теоремага таянади (бизнинг белгилашларда $\frac{|MN_1|}{|MN|}=\frac{|MP_1|}{|MP|}$). Охирги йилларда мактаб геометрия курсида бу теорема исботланмайди. Унинг исботи Фалес теоремасидан осонгина келтирилиб чиқарилади:

"Агар бурчак томонларини кесувчи параллел тўғри чизиқлар бурчак томонларининг бирида тенг кесмалар ажратса, у ҳолда бурчакнинг иккинчи томонида ҳам тенг кесмалар ажратади."

5.3 эслатма. Модификация қилинган (шакли ўзгартирилган) Эвклид аксиоматикасига таяниб биз векторни таърифладик ва 1)–8) хоссаларни текширдик. Бу хоссаларни векторлар фазосининг аксиомалари сифатида олиш мумкин ва бу аксиомалардан келиб чиқиб (аксиомаларга асосланиб) геометрияни қуриш мумкин.

5.4 таъриф. V-элементлари векторлар деб аталган, уларнинг табиати ихтиёрий бўлган бирор тўплам ва K бирор майдон бўлсин (китобхон ҳозирча бунда K ни $\boldsymbol{R}$ барча ҳақиқий сонлар тўплами деб ҳисоблаш мумкин). Фараз қилайлик, $\vec{a},\vec{b}\in V$ бўлган ихтиёрий иккита $\vec{a},\vec{b}$ векторлар учун $\vec{a}+\vec{b}$ символ билан белгиланувчи ҳамда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси деб аталувчи учинчи вектор аниқланган бўлсин. Бундан ташқари, фараз қилайлик, ихтиёрий $\alpha\in R$ сон учун ва ихтиёрий $\vec{a}\in V$ вектор учун $\alpha\vec{a}$ символ билан белгиланувчи ҳамда $\vec{a}$ векторнинг α сонга кўпайтмаси деб аталувчи вектор аниқланган бўлсин. Агарда шу билан бирга (5.1 теоремадаги) 1) – 8) хоссалар бажарилса, у ҳолда V тўпламни K майдон устидаги вектор (ёки чизиқли) фазо деб аталади. 1) – 8) хоссаларни вектор (чизиқли) фазонинг аксиомалари деб аталади.

5.1 теоремани шундай қайта ифодалаш мумкин:

Эвклид фазода барча эркин векторлар тўплами ҳақиқий сонлар майдони устидаги вектор фазони ташкил этади.

Битта элемент нол вектордан ташкил топган V тўплам ихтиёрий K майдон устидаги бошқа (содда) вектор фазога мисол бўлади.

Қуйида яна вектор фазонинг баъзи мисоллари билан танишамиз.

5.5 эслатма. Фазода йўналган кесмаларни қараб векторларни сонга кўпайтириш амалларини таърифладик. Аммо биз текисликдаги ёки тўғри чизиқдаги векторлар билан чегараланиш мумкинлигини юқорида (4.5-эслатма) қайд қилган эдик. Векторларни қўшиш ва векторларни сонга кўпайтириш амаллари берилган текислик (ёки берилган тўғри чизиқ) чегарасидан ташқарига чиқармайди. Шунингдек, қаралаётган “кичиклаштирилган” векторлар тўпламида бу амаллар учун 1)–8) хоссалар ўринли бўлаверади. Шундай қилиб, тўғри чизиқдаги, текисликдаги, фазодаги эркин векторлар тўплами векторларни қўшиш ҳамда векторларни сонга кўпайтириш амаллари билан ҳақиқий сонлар майдони устида вектор фазо ташкил этади. Мос равишда уларни $Vect(1)$, $Vect(2)$, $Vect(3)$ орқали белгилаймиз.

6§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚДА ВЕКТОРЛАР

Нурларнинг бир хил йўналганлик таърифидан, 2.9 ва 2.10 жумлалардан тўғри чизиқда нурларнинг фақат иккита йўналиши борлиги келиб чиқади. Шунинг учун, векторларнинг икки йўналиши борлиги келиб чиқади. Демак, тўғри чизиқдаги барча нолмас векторлар бир хил йўналган векторлардан ташкил топган иккита эквивалент синфларга ажралади. Бу синфлардан биридаги векторларни мусбат йўналган деб эълон қилиб, тўғри чизиқда мусбат йўналишни киритамиз (агар $\overrightarrow{MN}$ вектор мусбат йўналган бўлса, у ҳолда M нуқтадан N нуқтага қараб қилинган ҳаракат йўналиши мусбатдир). Шундай қилиб тўғри чизиқда ориентация берган бўламиз. l тўғри чизиқни унда танланган нолмас $\vec{e}$ вектор билан биргаликда $\left(l, \vec{e}\right)$ ўқ деб атаймиз. Ўқда мусбат йўналиш $\vec{e}$ вектор билан аниқланади. $\left(l, \vec{e}\right)$ ўқда ҳар қайси $\vec{a}$ вектор $\vec{a} = \alpha\vec{e}$ кўринишда бир қийматли ёзилиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{e}$ векторни бирор $O \in l$ нуқтадан бошлаб қўямиз. $\vec{e} = \overrightarrow{OO_1}$ бўлсин. Шу O нуқтадан бошлаб $\vec{a}$ векторни ҳам қўямиз, $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ бўлсин. Агар $M = O$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} = 0 \cdot \vec{e}$. Агар $\vec{a}$ нолмас вектор бўлса, у ҳолда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$ ёки $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}$. Унда векторни сонга кўпайтириш таърифига мувофиқ, биринчи ҳолда $\overrightarrow{OM} = \frac{|OM|}{|OO_1|}\overrightarrow{OO_1}$, чунки $\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|}$ ёки $\frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|}$.

Иккинчи ҳолда эса $\overrightarrow{OM} = -\frac{|OM|}{|OO_1|}\overrightarrow{OO_1}$, чунки $\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = -\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|}$ ёки

$\frac{\overrightarrow{OM}}{\left|OM\right|}=-\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|}$. $\vec{a}=\alpha\vec{e}$ тенглик ўринли бўладиган α сонини $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}$ вектордаги алгебраик қиймати деб атаймиз ва $\alpha=\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}\right)$ каби ёзамиз. Демак,

$$\vec{a}=\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}\right)\cdot\vec{e}\ . \qquad (7)$$

6.1 жумла. Алгебраик қиймат қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\left(aq_{\vec{e}}\lambda\vec{a}\right)=\lambda\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}\right)$;

2) $\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}\right)+\left(aq_{\vec{e}}\vec{b}\right)$;

Исбот. $\left(aq_{\vec{e}}\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{e}=$((7) га кўра)$=\lambda\vec{a}=$((7) га кўра)$=\lambda\left(\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}\right)\cdot\vec{e}\right)=$ $=$(вектор фазонинг 6) аксиомасига га кўра)$=\left(\lambda\cdot aq_{\vec{e}}\vec{a}\right)\cdot\vec{e}$, бундан (1) тенгликни ҳосил қиламиз.Худди шундай,

$\left(aq_{\vec{e}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)\cdot\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}=\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}\right)\cdot\vec{e}+\left(aq_{\vec{e}}\vec{b}\right)\cdot\vec{e}=$(вектор фазонинг 7) аксиомасига кўра)$=\left(aq_{\vec{e}}\vec{a}+aq_{\vec{e}}\vec{b}\right)\cdot\vec{e}$, бундан (2) тенгликни ҳосил қиламиз.

6.1 жумланинг иккинчи қисмини қуйидагича ифодалаш мумкин:

6.2. Шаль леммаси. Тўғри чизиқдаги M, N, P нуқталарнинг ихтиёрий жойланишида қуйидаги тенглик ўринли:

$$\left(aq_{\vec{e}}\overrightarrow{MP}\right)=\left(aq_{\vec{e}}\overrightarrow{MN}\right)+\left(aq_{\vec{e}}\overrightarrow{NP}\right).$$

6.3 таъриф. Бирор K майдон устида V,W иккита вектор фазо берилган бўлсин. $f:V\to W$ акслантириш қуйидаги иккита хоссани қаноатлантирса, у чизиқли акслантириш деб аталади:

1) $f\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=f\left(\vec{a}\right)+f\left(\vec{b}\right),\ \forall\,\vec{a},\vec{b}\in V$ учун;

2) $\forall\alpha\in K$ ва $\forall\vec{a}\in V$ учун $f\left(\alpha\vec{a}\right)=\alpha f\left(\vec{a}\right)$.

V ва W вектор фазолар орасида $f:V\to W$ чизиқли акслантириш биектив бўлса, у V ва W фазолар изоморфизми деб аталади. Бу ҳолда $f^{-1}:W\to V$ тескари акслантириш ҳам чизиқли акслантириш бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $\vec{a}',\vec{b}'\in W$ векторлар оламиз. Бунда f – биекция бўлганидан, у сюрьекция бўлади ва шунинг учун шундай $\vec{a},\vec{b}\in V$ векторлар мавжудки, $\vec{a}'=f\left(\vec{a}\right)$, $\vec{b}'=f\left(\vec{b}\right)$ бўлади. Бундан $\vec{a}=f^{-1}\left(\vec{a}'\right)$, $\vec{b}=f^{-1}\left(\vec{b}'\right)$ ва

$$f^{-1}\left(\vec{a}'+\vec{b}'\right)=f^{-1}\left(f\left(\vec{a}\right)+f\left(\vec{b}\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)=\vec{a}+\vec{b}=f^{-1}\left(\vec{a}'\right)+f^{-1}\left(\vec{b}'\right)$$

.

Демак, ихтиёрий $\vec{a}',\vec{b}'\in W$ учун $f^{-1}\left(\vec{a}'+\vec{b}'\right)=f^{-1}\left(\vec{a}'\right)+f^{-1}\left(\vec{b}'\right)$ бўлади. Ихтиёрий $\alpha\in K$ ва $\vec{a}'\in W$ учун $f^{-1}\left(\alpha\vec{a}'\right)=f^{-1}\left(\alpha f\left(\vec{a}\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(\alpha\vec{a}\right)\right)=\alpha\vec{a}=\alpha f^{-1}\left(\vec{a}'\right)$ бўлади.

6.5. Мисол. Барча ҳақиқий сонлар тўплами ***R***, қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ***R*** майдон устида чизиқли вектор фазо бўлишини кўрсатиш мумкин.

6.6-теорема. $\left(l,\vec{e}\right)$ ўқдаги ҳар қайси $\vec{a}$ векторга $\vec{e}$ вектордаги унинг алгебраик қийматини мос қўювчи $f:Vect(1)\to\mathbb{R}$ акслантириш вектор фазоларнинг изоморфизми бўлади.

Бу акслантиришнинг чизиқлилиги 6.1-жумладан, биективлиги векторни сонга кўпайтириш таърифидан ҳамда III_3 аксиомадан келиб чиқади.

$\left(l, \vec{e}\right)$ ўқда аввлдан тайинланган O нуқтани оламиз. Унда $f: Vect(1) \to \mathbb{R}$ акслантириш $f_O\left(M\right) = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = aq_{\vec{e}}\overrightarrow{OM}$ тенглик билан $f_O: l \to \mathbb{R}$ акслантиришни аниқлайди. 4.2-жумлага кўра, l тўғри чизиқнинг ҳар бир M нуқтасига $\overrightarrow{OM}$ векторни мос қўйиб, нуқталар ва векторлар орасида бир қийматли мосликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, f_O акслантириш l геометрик тўғри чизиқ билан ҳақиқий сонлар, яъни сонли тўғри чизиқ нуқталари орасидаги биекциядир. f_O акслантириш l тўғри чизиққа сонли тўпламдаги бор тартибни кўчиради: $M < N \Leftrightarrow f_O\left(M\right) < f_O\left(N\right)$. Бу тартиб қуйидаги хоссага эга:

Агар $M < N$ ва $\left(MPN\right)$ бўлса, у ҳолда $M < P < N$. Демак, тўғри чизиқда нолмас $\vec{e}$ векторда ориентациясини киритиб, унинг нуқталар тўпламини тартиблаймиз. Агар $\vec{e}$ – бирлик вектор бўлса, у ҳолда f_O акслантириш нуқталар орасидаги масофани сақлайди.

ХУЛОСА

Мазкур ишда векторлар алгебрасини планиметрия аксиомалари асосида қуриш масаласи ўрганилган. Бу эса ишнинг ўзига хос хусусиятларидан биридир. Кўзланган мақсад тартиб ва қўйиш аксиомалари ёрдамида кесма, ярим тўғри чизиқ, ярим текислик ва ярим фазо тушунчаларини аниқлашда ва уларнинг баъзи хоссаларини ўрганишда яққол кўринади.

Мазкур иш, мактаб геометрия курси ва аналитик геометрия курси ўртасида зарурий “кўприк” вазифасини бажаради, ва шунингдек, мактаб геометрия курсида баён қилинган аксиоматик маълумотларни тўла тушунтириб беради деган умиддамиз.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси – Т.: Ўзбекистон, 1998. - 48 б.
   Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”/Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. - Т.:Ўзбекистон. 1997.
2. Ўзбекистон Республикасининг ”Таълим тўғрисида”ги Қонуни (1997 йил 29 августда қабул қилинган)/. Баркамол авлод -Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. -Т.:Ўзбекистон. 1997.
3. Каримов И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. -Т.: “Маънавият”, 2008.
4. Каримов И.А. Баркомол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори.- Т.: Ўзбекистон, 1998. - 62 б.
5. Каримов И.А. Ўзбекистон буюк келажак сари. - Т.: Ўзбекистон, 1998.
6. Алимов Ш. ва бошқ. Алгебра ва анализ асослари.-Т.:Ўзбекистон, 1991.
7. Алихонов С. Математика ўқитиш методикаси. - Т.: Ўқитувчи, 1992.
8. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд–во МГУ, 1990, – 328 с.
9. Погорелов А.В. Геометрия. М.: «Наука», 1993, – 288 с.
10. М.С.Досанов, Х. Р. Умаров. «Введение понятия вектора на основе аксиом планиметрии», ГулДУ ахборотномаси, 2014/1 сони, 9-16 бетлар.
11. М.С.Досанов, Х. Р. Умаров. «Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия элементлари», ГулДУ босмахонаси, 2014.
12. Гаимназаров О. Г. Математика ўқитишда амалий масалаларни ечиш намуналари, ўқув-услубий қўлланма, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси “Фан” нашриёти, Тошкент, 2006 йил. 34 бет.
13. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. 1. Аналитическая геометрия, 2. Дифференциальное исчисление, 3. Основы теории чисел. Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования РФ в качестве учебника для вузов. –М. «Высшая школа», 1999.

14. Назаров Р.Н., Тошпулатов Б.Т., Дусумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси 2к. (укув кулланма), - Тошкент. «Укитувчи», 1995.
15. Абдулхамидов А.И. ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ асослари. Академик лицейлар учун дарслик. Т. 2003 й.
16. Мелиқулов А. Математика 2-қисм, касб-ҳунар коллежлар учун ўқув қўлланма. Т. 2003 й.
17. Ғаймназаров Г. Комбинаторика и бином ньютона, Л. 1990 г.
18. Галицкий М.Л. ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ курсини чуқур ўрганиш Т., «Ўқитувчи» , 1995.
19. Аюпов Ш., Рихсиев Б., Кучкаров А. «Математика олимпиадалар масалалари» (2 қисм). Тошкент. Фан. 2004.
20. Погорелов А. В. Геометрия 7-11. –Т.:”Ўқитувчи”, 1994 й.
21. www.ziyonet.uz
22. www.edu.uz
23. www.uzpak.uz
24. www.mathnet.ru
25. www.rsl.ru