ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

“Умумий математика “

к а ф е д р а с и

5460100- математика таълим йўналиши бўйича бакалавр даражасини олиш учун

ДУШАЕВ ЭЛМУРОД ЭРГАШУВИЧНИНГ

“ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАДА МАХСУС НУҚТА”

мавзусидаги

Битирув малакавий иши

Илмий рахбар: ф-м.ф.н., доц. Норжигитов Ҳ

Гулистон-2014

М У Н Д А Р И Ж А

КИРИШ

<u>Дарснинг долзарблиги:</u> Ушбу битирув малакавий иш дифференциал тенгламаларнинг махсус ечим ва махсус нуқталарига бағишланган.

Физика, иқтисодиёт, биология, кимё, тиббиёт ва бошқа фанларда учрайдиган кўплаб жараёнлар ҳақида бирор маълумотга, тасаввурга эга бўламиз. Ўша дифференциал тенглама ўрганилаётган жараённинг математик моделларидан иборат бўлади. Бу модел кичик мукаммал бўлса, дифференциал тенглама ўрганиш натижасида олинган маълумотлар жараёнларни шунга тўлиқ тавсифлайди. Шуниси қизиқки табиатда учрайдиган турли ҳил дифференциал тенгламалар билан тавсифлаши мумкин. Бу эса “бир ўқ билан икки қуённи уриш” имконини беради, яъни бирор математик моделни тўла ўрганилса, тегишли натижадан турли жараёнларни тушунтиришда фойдаланса бўлади. Дифференциал тенгламаси ўрганиш турли жараёнларни тушунтиришда фойдаланса бўлади. Дифференциал тенгламани ўрганиш жараёнида бизга боғлиқ бўлганлиги холда махсус нуқта ва махсус ечим тушунчалари пайдо бўлади. Дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси ва махсус ечимини ўрганиш кузатилаётган жараёнларнинг тўлиқ ўрганишга олиб келади. Ҳозирги пайтда дифференциал тенгламалар билан шуғуланаётган олимлар белгиси махсус нуқта ва махсус ечим билан шуғуланадилар. Шу сабабли математик йўналишда таълим олаётган талабалар дифференциал тенгламанинг махсус нуқталар ва махсус ечимларини чуқурроқ ўрганиш фойдадан холи эмас. Ушбу битирув малакавий ишда

$$y' = \frac{\rho(x)}{Q(x)}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламанинг махсус нуқталар ва махсус ечимларнинг мукаммалроқ ўрганиши ҳаракат қилинган.

Юқорида фикирларга асосланганлиги ҳолда ушбу битирув малакавий ишининг ёзилиши долзарб деб ўйлайман.

Битирув малакавий ишнинг мақсади. Диффереціал тенгламанинг махсус нуқтаси ва махсус ечимини ўрганиш жараёнида ажратилган махсус нуқта, фаоус нуқта, маркази ва нуқта каби янги математик тушунчалар билан танишишдан иборат.

Битирув малакавий ишнинг муаммоси. Дифференциал тенгламанинг ечимини тўлиқ тавсифлаш уларнинг махсус ечимларини ўрганишга олиб келади. Бу ечимларни ўрганишда талаба дифференциал геометрия, математик анализ ва бошқа фанларни мукаммал ўрганиш зарур.

Битирув малакавий ишнинг объекти. Дифференциал тенгламани махсус нуқта ва махсус ечимларнинг ўрганиш жараёнида хосила, хосиланинг хоссалари, функциянинг ўқилиш нуқталардан, лимитлар ва қаторлар қутб кардинаталар, фазовий қисмлар ва уларнинг кесмалари ва уларнинг кесмалари каби тушунчаларни ўрганиш.

Битирув малакавий ишнинг предмети. Махсус ечим тушунчасига оид ўқув материалини ўрганиш.

Битирув малакавий вазифаси. Дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси ва махсус ечимларини ўрганишдан иборат. Бунда фақат

$$y' = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Кўринишда дифференциал тенглама қўйилади.

Битирув малакавий ишнинг янгилиги. Мазкур битирув малкавий ишда дифференицал тенгламанинг барча ечимларини топиш учун уларнинг ечими ва агар мавжуд бўлса махсус ечимларини топиш лозимдир. Топилган махсус ечимларни турларга ажратишдан иборат.

Фан учун ахамияти. Иқтисодиёт, биалогия, кимё, тиббиёт ва шу каби фанларда жараёнларини ўрганишда бевосита дифференциал тенгламалар дуч қилади. Шу сабабли мазкур битирув малакавий иш нафақат математика фаннинг ривожига жумладан, физика, иқтисодиёт, биалогия, кимё каби фикрлар ривожи учун ҳам аҳамиятлидир.

Битирув малакавий ишнинг тузилиши ва структураси. Мазкур битирув малакавий иш кириш, иккита боб, 5 параграф, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан иборат.

I БОБ. МАХСУС НУҚТА ВА МАХСУС ЕЧИМ ХАҚИДА

§ 1. 1. Дифференциал тенгламанинг махсус ечими ва махсус нуқталари.

1-таъриф. Агар y=*f*(x) функция учун [*a;b*] кесмадаги барча x ва x_1 ларда

$$|f(x)-f(x_1)|<k|x-x_1|$$

Тенгсизликни қаноатлантирувчи к>0 сони мавжуд бўлса, у холда f(x) функция [*a;b*] кесмада Липшиц шартини қаноатлантиради дейилади.

Липшиц шарти y'=*f*(x) дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги хақидаги теоремада ҳам ишлатилади. Ҳар қандай узлуксиз дифференциалланувчи функция Липшиц шартини қаноатлантиради.

2-таъриф. Текисликнинг бирор соҳасидаги ҳар бир нуқтасида дифференциал тенглама ечимининг ягоналиги бузиладиган ечим махсус ечим дейилади.

Агар дифференциал тенглама биринчи тартибли бўлса, у холда махсус ечимга ўтказилган уринма йўналиши бўйича махсус ечим нинг ҳар бир нуқтасидан яна битта интеграл эгри чизиқ ўтади.

F(x, y, y')=0 ёки $y'=f(x,y)$ тенгламанинг махсус ечим нуқталарида Липшиц шарти бажарилмайди.

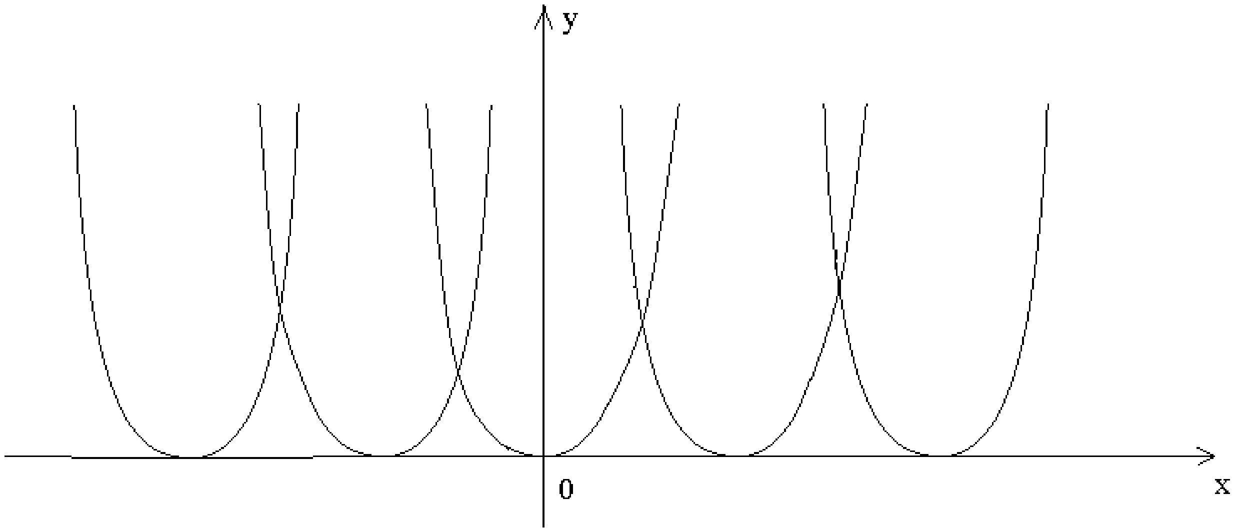
Махсус диффиренциал тенгламанинг умумий интегралини хосил қилувчи F(x, y, C)=0 интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамасидан иборат бўлиб, у умумий ечимдаги C нинг бирор қийматидан ҳосил бўлмайдиган ечимдир.

1-мисол. $y'=\sqrt{y}$ дифференциал тенгламанинг умумий интеграли $y=\dfrac{(x+C)^2}{4}$ параболалар оиласидан иборат. махсус ечим y=0 (Ox ўқи) шу оиланинг ўрамасидир.(1-чизма).

2-мисол. Ушбу $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ дифференциал тенгламанинг махсус ечимини топинг.

Ечиш. Берилган дифференциал тенгламанинг иккала қисмини $\frac{1}{\sqrt{1+x^2 \cdot \sqrt{1+y^2}}}$ га кўпайтириб

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$



1-чизма.

ни ҳосил қиламиз. Буни интеграллаб қуйидаги умумий ечимга эга бўламиз:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C(C>0)$$

Ечимдан кўриниб турибдики, берилган дифференциал тенглама махсус ечимга эга эмас.

3-таъриф. Бирор эгри чизиқ тенгламаси

$$F(x, y) = 0 \qquad (1.1)$$

берилган бўлсин. Агар (2.1) тенглама учун

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|P_0 = 0 \;\; ва \;\; \left.\frac{dF}{dy}\right|P_0 = 0$$

тенглик бажарилса, $P_0(x_0,y_0)$ нуқта (1.1) тенглама билан берилган эгри чизиқнинг махсус нуқтаси, тенглик бажарилмаса, оддий нуқтаси дейилади.

Агар махсус нуқтада моддий нуқта тезлиги нолга тенг бўлса, у холда махсус нуқта тинч холатда (ёки мувозанат холатда) дейилади.

Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси қуйидагича топилади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1.2)$$

Дифференциал тенглама берилган бўлсин. (1.2) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \qquad (1.3)$$

Агар $P_0(x_0,y_0)$ нуқтанинг атрофида (1.2) ва (1.3) тенгламаларнинг ўнг қисмлари Липшиц шартини қаноатлантирмаса, $P_0(x_0,y_0)$ нуқта махсус нуқта бўлади.

Агар $P_0(x_0,y_0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида бошқа махсус нуқталар мавжуд бўлмаса, $P_0(x_0,y_0)$ нуқта яккаланган нуқта дейилади.

Агар дифференциал тенглама

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \text{ёки}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \qquad (1.4)$$

Кўринишда бўлиб, (x_0,y_0) нуқтада $P_0(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$ бўлса, у холда (1.4) тенглама 0/0 кўринишдаги махсус нуқтага эга дейилади. (1.4) тенгламанинг махсус нуқталар сони

$$\begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ситеманинг ечимлар сони билан аниқланади. Аниқланган нуқталар (1.4) ситема учун мувозанат нуқтаси дейилади.

Геометрик нуқтаи назардан қараганда йўналишлар майдони махсус нуқтада аниқмас бўлиб қолади.

Махсус нуқтанинг физик маъноси шундан иборатки, агар (1.4) системадаги $\frac{dx}{dt}=V_x, \frac{dy}{dt}=V_y$ ларни координата ўқлардаги тезликларнинг проекцияси деб қарасак, у холда тезлик

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$$

га тенг бўлади. $V_x=0$, $V_y=0$ бўлганда махсус нуқтада V тезлик нолга тенг бўлади. Шунинг учун бундай махсус нуқтага мувозанат нуқтаси дейилади.

3-мисол. Ушбу y'=1/y тенгламани текширинг.

Ечиш. Берилган мисол учун (x, y) текисликдаги ҳамма нуқталар махсусмас, чунки Ox ўқидаги нуқталарда (y=0 бўлгани учун) берилган тенгламанинг ўнг қисми чексизликка айланади. Аммо

$$\frac{dx}{dy}=y$$

тенгглама учун Ox ўқидаги нуқталарда ўнг қисми нолга, яъни аниқ қийматга эга. Демак, Ox ўқидаги нуқталарда $\frac{dx}{dy}=y$ тенглама учун Коши теоремаси шартлари бажарилади. Ox ўқидаги ҳар бир $(x_0, 0)$ нуқталардан $x=\varphi(y)$ интеграл эгри чизиқлар ўтади.

Ҳақиқатан, y'=1/y тенгламани интеграллаб $x=x_0$, $y_0(x_0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи қуйидаги

$$\frac{y^2}{2}=x+C_0 \quad \text{ёки} \quad y^2=2(x+C_0)$$

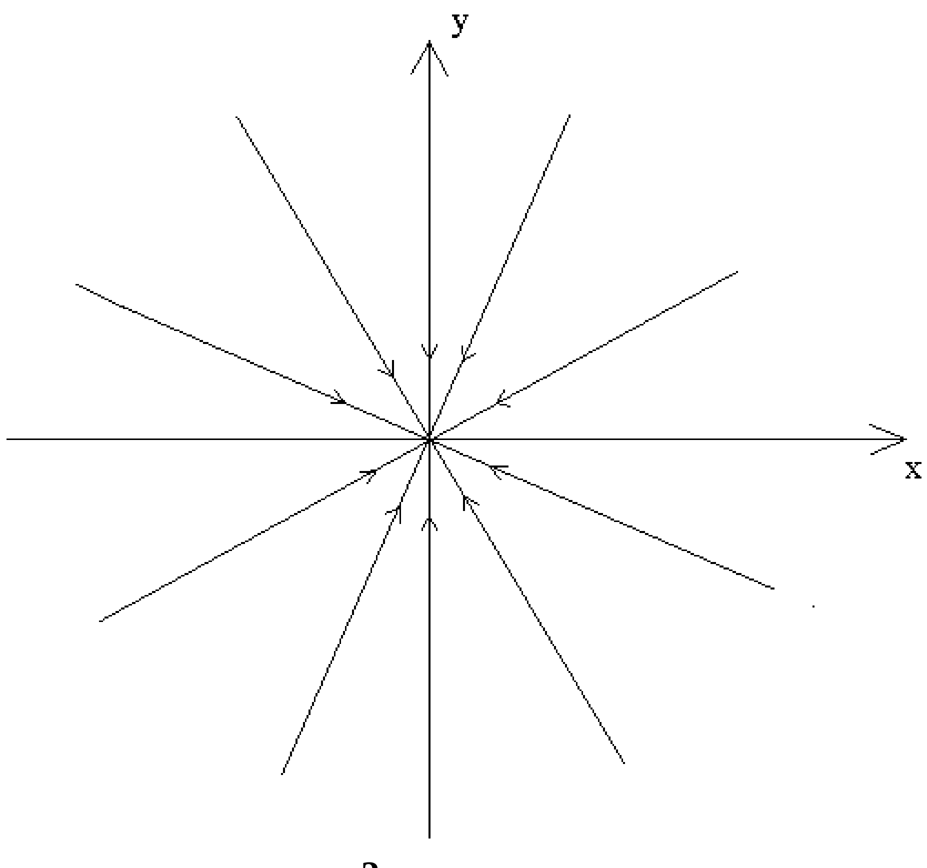
Демак, берилган тенглама махсус нуқтага эга эмас.

4-мисол. Ушбу $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ тенгламанинг махсус нуқталарини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама учун (x, y) текисликдаги Oy ўқида ётувчи нуқталардан ташқари ҳамма нуқталарда Коши теоремаси шартлари бажарилади, шунинг учун бу нуқталар махсусмас нуқталардир. Ox ўқида ётувчи нуқталарни текшириш учун тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}.$$

Бу тенглама учун, Ох ўқида ётувчи нуқталардан ташқари ҳамма нуқталардан Коши теоремаси шартлари бажарилади, шунинг учун бу нуқталар махсусмас нуқталардир. Энди х=0, у=0, яъни координаталар бошини кўриш қолди. Бу (0,0) нуқтада $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ва $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ тенгламаларнинг ўнг қисми 0/0 кўринишдаги аниқмасликдан иборат ва бу нуқта атрофида тенгламалар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирмайди.



2- чизма.

Шунинг учун координаталар боши (0,0) берилган тенглама учун махсус нуқта бўлади. Бу (0,0) нуқта 0/0 типдаги яккаланган махсус нуқта дейилади.

Берилган тенгламани интеграллаб, (0,0) махсус нуқтага йўналган ярим тўғри чизиқлар оиласи y=Cx га эга бўламиз.(2-чизма).

5-мисол. Ушбу y'=-x/y тенгламанинг махсус нуқталарини топинг.

Ечиш. Бу тенглама учун координаталар боши 0/0 типдаги яккаланган махсус нуқта бўлиб, тенгламанинг умумий ечими $x^2+y^2=C^2$ кўринишда бўлади. Ҳамма интеграл эгри чизиқлар ёпиқ, маркази координаталар бошида бўлган айланалар оиласидан иборат бўлади. Бу интеграл эгри чизиқлардан бирортаси (0,0) махсус нуқтадан ўтмайди.

Бу мисоллардан кўриниб турибдики, махсус нуқтадан чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар ўтиши мумкин экан ёки умуман ўтмаслиги ҳам мумкин экан.

Дифференциал тенгламанинг махсус нуқталар сони берилган дифференциал тенгламанинг кўринишига боғлиқ.

6-мисол. Ушбу $y' = \dfrac{2y}{x-x^3}$ дифференциал тенгламанинг махсус нуқталар сонини аниқланг.

Ечиш. Махсус нуқталар сони қуйидаги системани қаноатлантирадиган ечимлар сонига тенг:

$$\left.\begin{aligned} 2y &= 0, \\ x - x^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Бу системани ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} 2y &= 0, \\ x - x^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} y &= 0, \\ x(1-x^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} y &= 0, \\ x(x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Бу ердан (0,0), (-1,0) ечимларга эга бўламиз. Демак, махсус нуқталар сони 3 та экан.

§1. 2. Дифференциал тенгламаларнинг текисликдаги содда махсус нуқталари турлари.

Ушбу тенгламани қараймиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \qquad (2.1)$$

(3.1) тенглама интеграл эгри чизиқларнинг махсус нуқта атрофидаги манзарани ўрганиш учун қуйидаги чизиқли алмаштиришдан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Бунда $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - бирор ҳақиқий ўзгармас сонлар, $\alpha\beta - \gamma\delta \neq 0$. Бу алмаштиришда (2.1) тенгламанинг x=0, y=0 махсус нуқта атрофида текширишга ўтади. (2.2) алмаштириш натижасида қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma dx + \delta dy}{\alpha dx + \beta dy} = \frac{\gamma + \delta \dfrac{dy}{dx}}{\alpha + \beta \dfrac{dy}{dx}} = \frac{\gamma + \delta \dfrac{ax+by}{cx+dy}}{\alpha + \beta \dfrac{ax+by}{cx+dy}} = \frac{\gamma(cx+dy) + \delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by)}$$

Агар

$$\frac{\gamma(cx+dy) + \delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by)} = \frac{\lambda_1(\gamma x + \delta y)}{\lambda_2(\alpha x + \beta y)} \qquad (2.3)$$

бўлса, у холда (2.2)алмаштиришдан сўнг (2.1) тенглама

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi} \qquad (2.4)$$

кўринишга келади. (2.3) айният бажарилиши учун

$$\begin{aligned} \gamma(cx+dy) + \delta(ax+by) &= \lambda_1(\gamma x + \delta y) \\ \alpha(cx+dy) + \beta(ax+by) &= \lambda_2(\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

тенгликлар ўринли бўлиши керак.

Бу тенгликларда x ва y олдидаги коэффициентларини тенглаштириб, (γ, δ) ва (α, β) параметрларга нисбатан бир жинсли бўлган иккита системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} (c-\lambda_1)\gamma + a\delta = 0, \\ d\gamma + (b-\lambda_1)\delta = 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} (c-\lambda_2)a + a\beta = 0, \\ d\alpha + (b-\lambda_2)\beta = 0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

Агар λ_1 ва λ_2 лар

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6)$$

ёки

$$\lambda^2-(b+c)\lambda+bc-ad=0 \qquad (2.6')$$

Тенгламанинг илдизлари бўлса, у холда (2.5) системалар нолга тенг бўлмаган ечимга эга бўладилар.

(2.6) ёки (2.6') тенглама (2.1) тенгламанинг характеристик тенгламаси, λ_1 ва λ_2 сонлар эса характеристик тенгламанинг илдизлари дейилади.

Ушбу

$$\begin{cases}(c-\lambda_1)\gamma+a\delta=0,\\(c-\lambda_2)\alpha+a\beta=0\end{cases} \text{ ва } \begin{cases}d\gamma+(b-\lambda_1)\delta=0\\d\alpha+(b-\lambda_2)\beta=0\end{cases}$$

тенгликлар ситемасидан

а) агар $\lambda_1\neq\lambda_2$, бўлса, $\begin{vmatrix}\gamma\delta\\ \alpha\beta\end{vmatrix}\neq 0,$

б) агар $\lambda_1=\lambda_2$, бўлса $\begin{vmatrix}\gamma\delta\\ \alpha\beta\end{vmatrix}=0$

бўлиши келиб чиқади.

а) ҳол декарт координаталар системасидан қийшиқ бурчакли системага ўтишдан иборат бўлган (2.2) айнимаган (номахсус) шакл алмаштиришга мос келади.

б) ҳол декарт координаталар системасининг айниган шакл алмаштиришга мос келиб, у берилган (2.1) тенгламанинг ўзига хос кўриниши билан тушинтирилади, бу холда a, b, c, d коэффициентлари (2.1) тенгламанинг характеристик тенгламаси дисккриминанти

$$D=(b+c)^2-4(bc-ad)=0$$

Билан боғланган бўладилар.

Қуйида характеристикаларнинг $\lambda_1\neq\lambda_2$, ва $\lambda_1=\lambda_2$, бўлган холларда сокинлик нуқтаси атрофида интеграл чизиқларнинг холатлари батафсил ўрганилади. $\lambda_1\neq\lambda_2$, бўлганда фазовий эгри чизиқлар (2.1) тенгламани бевосита интеграллаш орқали топилишини қайд қилиб ўтамиз:

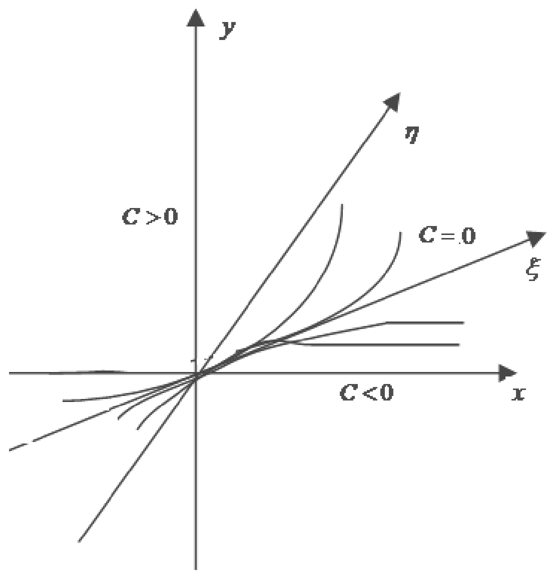
$$\eta=C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \qquad (2.7)$$

(2.6) характеристик тенгламанинг $\lambda_1 ва \lambda_2$, илдизлари қуйидагича бўлиши мумкин.

I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, бўлган холда иккала илдиз хақиқий ва ҳар хил бўлади. Аниқлик учун $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rangle 1$ бўлсин, у холда

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm C\frac{\lambda_1}{\lambda_2}|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1} \quad \text{ва} \quad \lim\frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

Бу эса интеграл эгри чизиқлар Oξ ўққа уриниб, координаталар бошига киришини билдиради. ξ= 0 интеграл чизиқ ҳам махсус нуқта орқали ўтади.(3-чизма).

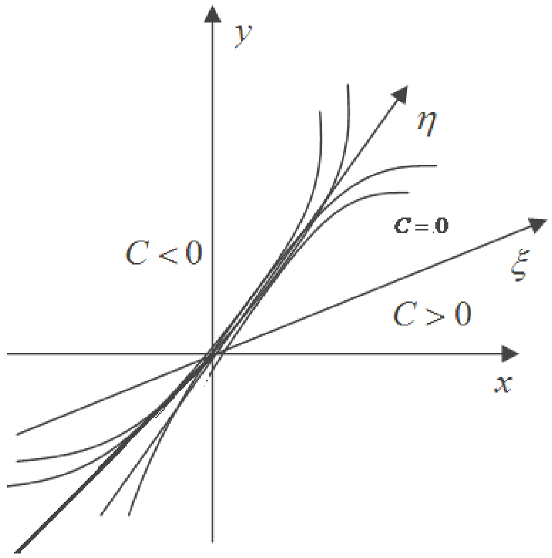


3-чизма

$0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$ бўлганда, ушбу

$$\xi = C|\eta|^{\frac{\lambda 1}{\lambda 2}}$$

Эгри чизиқлар оиласини қараймиз, бу эгри чизиқлар оиласи ή ўққа уриниб координаталар бошига кириши равшандир.(4-чизма).



4-чизма

II. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b+c}{2} = \lambda_0$ бўлсин (D=(b-c)^2+4ad=0).

Бу ҳолда ά ва β коэффициентларни топиш учун битта тенгламага эгамиз:

$$\frac{c-b}{2}\alpha + a\beta = 0$$

($d\alpha + \frac{b-c}{2}\beta = 0$ тенглама D=0 бўлгани учун айнан бажарилади). a≠0 бўлсин, у холда ά=a, β=1/2 (b-c), γ=0, δ=1 деб олиб, (2.1) тенгламани ўзгартирамиз. Бунинг учун қуйидаги айнимаган ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2}y, \\ \eta &= y, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a & \frac{b-c}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \neq 0.$$

Натижада (2.1) тенглама қуйидаги кўринишга келади.:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{adx + \frac{b-c}{2}dy} = \frac{\frac{dy}{dx}}{a + \frac{b-c}{2}\frac{dy}{dx}} = \frac{ax+by}{(cx+dy)(a + \frac{b-c}{2}\cdot\frac{ax+by}{cx+dy})} =$$

$$= \frac{ax + \frac{b-c}{2}y + \frac{b-c}{2}y}{\frac{b-c}{2}ax + \frac{b^2-c^2}{4}y} = \frac{\xi + \frac{b+c}{2}\eta}{\frac{b+c}{2}\xi} = \frac{\xi + \lambda\eta}{\lambda\eta}$$

Шундай қилиб тенгламани

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\lambda_0\eta}{\lambda_0\xi}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\eta}{\xi} \qquad (2.8)$$

Кўринишда ёзиш мумкин экан.

(2.8) тенглама ή=(ξ) функцияга чизиқли дифференциал тенгламалар тенгламадир ва унинг умумий ечими ушбу формула бўйича топилади:

$$\eta(\xi,c)=e^{\int\frac{1}{3}d\xi}\left[c+\frac{1}{\lambda}\int e^{-\int\frac{d\xi}{\xi}}d\xi\right]=e^{\ln|\xi|}\left[c+\frac{1}{\lambda_0}\int e^{-\ln|\xi|}d\xi\right]=$$

$$=|\xi|(c\pm\frac{1}{\lambda_0}\ln|\xi|)=|\xi|(c\pm\frac{1}{\lambda_0}\ln|\xi).|$$

ξ→0 га интилганда

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\pm(c\pm\frac{1}{\lambda_0}\ln|\xi|\pm\frac{1}{\lambda_0})\to\infty$$

Шундай қилиб, барча интеграл эгри чизиқлар оиласи O(0;0) махсус нуқтага киради, бунда улар бир хил йўналишда бўлиб, Oή ўққа уринадилар. Oή (ξ=0) ўқнинг иккала қисми ҳам махсус нуқтага кирувчи интеграл эгри чизиқлардир.

Қаралган ҳолда (a≠0, D=0) махсус нуқта ξ=0, ή=0 ва мос холда x=0, y=0 махсус нуқта ҳам тугун бўлиб, бироқ бундай тугун айнимаган тугун бўлади.(5-чизма).

Агар ά ва β ларни аниқловчи ушбу системада:

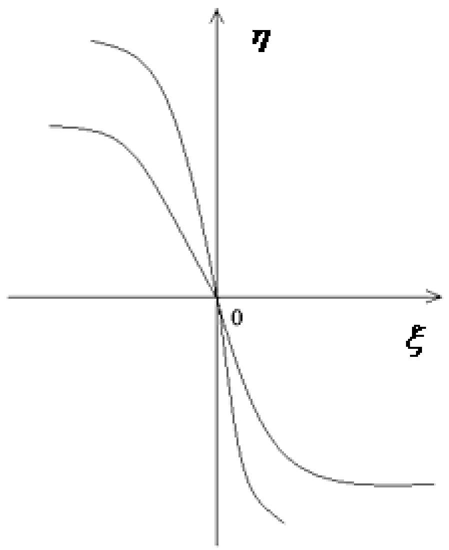
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(c-b)\alpha+a\beta=0,\\ d\alpha+\frac{1}{2}(b-c)\beta=0\end{aligned}\right\}$$

барча коэффициентлар нолга тенг бўлса: a=0, b-c=0, d=0, у ҳолда берилган (2.1) тенглама ушбу

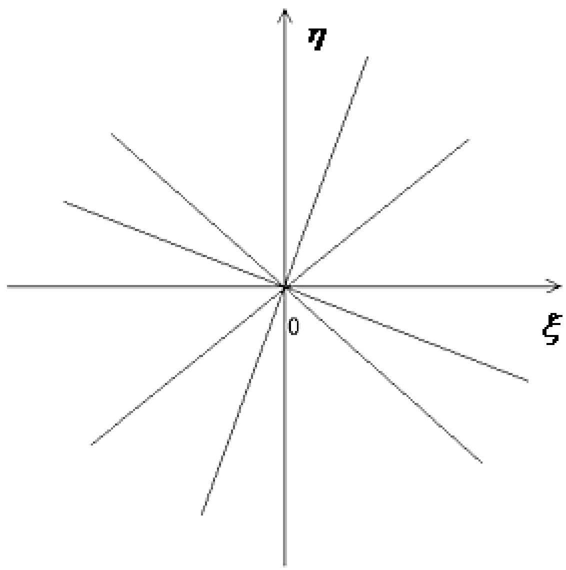
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

Содда ҳолда келади, бу ердан y=Cx (x≠0) ва x=0 (y≠0). Шундай қилиб, интеграл чизиқлар тўплами махсус нуқтага барча йўналишлар бўйича кирувчи мумкин бўлган барча тўғри чизиқлар оиласидан иборатдир. ξ=0, ή=0

(x=0, y=0) нуқта ҳам тугун бўлади. Бундай махсус нуқтага дикритик тугун дейилади.(6-чизма)



5-чизма.



6-чизма.

III. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, λ_1 ва λ_2 илдизлар ҳақиқий ва турли ишорали бўлсин. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -k$ деб белгилаймиз, k>0 бўлсин, у ҳолда

$$\eta = C|\xi|^{-k} \quad \text{ёки} \quad \eta = \frac{C}{|\xi|k}$$

C≠0 бўлганда интеграл эгри чизиқ O (0,0) нуқта орқали ўтмайдиган k-тартибли гипперболалар оиласидан иборат бўлади.

Бироқ тўртта

$$\eta = 0, (\xi \neq 0), \xi = 0 (\eta \neq 0) \qquad \text{(A)}$$

Интеграл эгри чизиқ O(0,0) махсус нуқтадан ўтади.

Интеграл эгри чизиқларни тасвирловчи М(ξ,ή) (ёки М(х,у)) нуқталар қуйидаги хоссага эгадир: дастлаб бирор ўқлар бўйлаб махсус нуқтага яқинлашади, сўнгра ундан бошқа ўқ бўйлаб узоқлашади. Бундай нуқтадаги ξ =0, ή=0 (мос холда х=0, у=0) нуқта эгар дейилади.(7-чизма).

IV. характеристик тенгламанинг илдизлари соф мавхум бўлмаган λ_1=p+qi ва λ_2 =p – qi комплекс сонлар бўлсин.

У ҳолда (2.1) тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1}{\lambda 2}\cdot\frac{\eta}{\xi}=\frac{p+qi}{p-qi}\cdot\frac{\eta}{\xi} \qquad (2.9)$$

ά ваβ ларнинг қийматларини

$$\begin{aligned}(c-\lambda_2)\alpha+a\beta=0,\\ d\alpha+(b-\lambda_2)\beta=0\end{aligned}$$

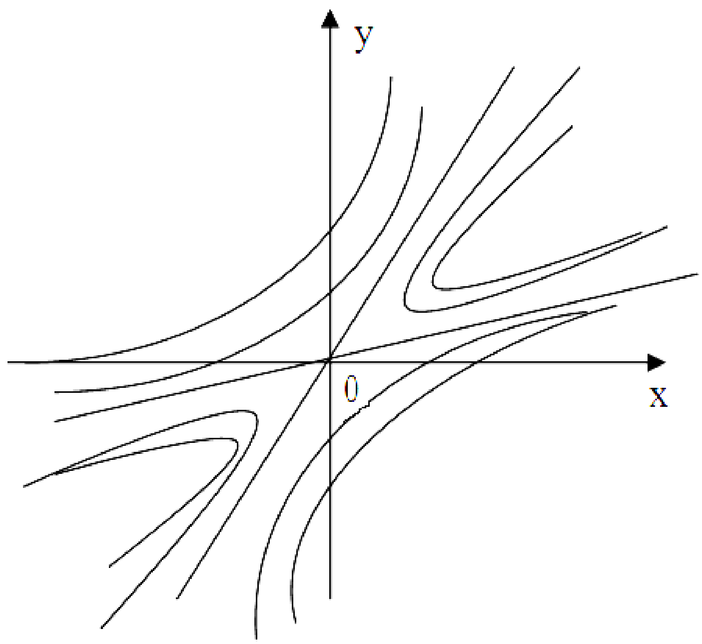
Системадан топамиз, бу ерда а≠0, λ_2=p-qi λ_1=p+qi деб оламиз. Сўнгра

$$\begin{aligned}&c-\lambda_1=\bar{c}-\overline{\lambda_2},\\ &\bar{a}=a,\bar{d}=d,\\ &b-\lambda=\bar{b}-\overline{\lambda_2}\end{aligned}$$

Эканлигини назарда тутиб,

$$(c-\lambda_1)\gamma+a\delta=0 \text{ ва } d\gamma+(b-\lambda_1)\delta=0$$

Тенгликлар системасидан аниқланувчи γ ва δ сонлар мос ҳолда ά ва β сонларга қўшма комплекс эканини кўрамиз: $\gamma=\overline{\alpha,\delta=\bar{\beta}}$



7- чизма.

Демак, (2.2) шакл алмаштириш қаралаётган ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$\xi = \alpha x + \beta y, \eta = \overline{\alpha} x + \overline{\beta} y \qquad (2.10)$$

x ва y хакикий координаталар бўлгани учун

$$\eta = \overline{\xi} : \xi = u + iv, \eta = u - iv \qquad (2.11)$$

(2.11) ни (2.9) га қўямиз:

$$\frac{du - idv}{du + idv} = \frac{p + iq}{p - iq} \cdot \frac{u - iv}{u + iv}$$

Ёки

$$(du - idv)\left[(pu + qv) + i(pv - qu)\right] = (du + idv)\left[(pu + qv) - i(pv - qu)\right]$$

Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларида комплекс қўшма $z=\overline{z}$ ифодалар турибди, яъни бу тенгликнинг ҳақиқий қисмлари тенг, мавхум қисмлари олдидаги коэффициентлар эса нолга тенг бўлиши керак:

$$du(pu + qv) + dv(pv - qu) \equiv du(pu + qv) + dv(pv - qu), \qquad (А)$$

$$du(pv - qu) - dv(pu + qv) = 0 \qquad (Б)$$

(А) тенглик айнан бажарилади, (Б) тенглик эса бир жинсли дифференциал тенгламадан иборат бўлиб, уни ё умумий усулда v=tu,dv=dv=tdu+udt ва хк. Ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш мумкин. Ё интегралловчи кўпайтувчи ёрдамида интеграллаш мумкин.

(Б) тенгликни қутб кординаталардан фойдаланиб ечамиз.

$$u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi$$

Қуйидагига эгамиз:

$$(pr\sin\varphi - qr\cos\varphi)(\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) - (pr\cos\varphi + qr\sin\varphi)$$
$$(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = 0$$

Шакл алмаштиришлар ва соддалаштиришлардан сўнг

$$qdr + prd\varphi = 0$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$\frac{dr}{r} = -\frac{p}{q}d\varphi, \ln r = \ln C - \frac{p}{q}\varphi, r = Ce^{-\frac{p}{q}\varphi} \qquad (2.12)$$

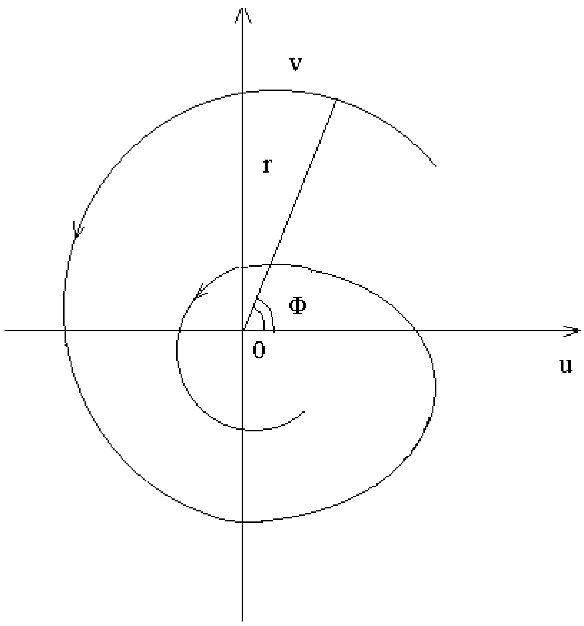
(2.12) тенглик (u,v) тенгсизликдаги O(0,0) махсус нуқтани чексиз кўп айланиб ўтувчи логарифмик спиралнинг тенгламасидир.

Агар p ва q бир хил ишорали бўлса, φ ортиши билан спираллар O(0,0) махсус нуқтага яқинлашиб боради, агар p ва q турли ишорали бўлса, спираллар O(0,0) махсус нуқтадан узоқлашадиган буралувчи бўлади. (8,9-чизмалар)

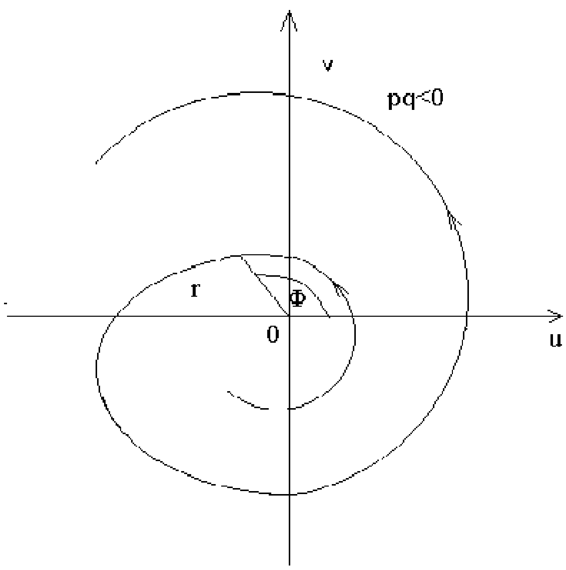
Бироқ агар текширишлар 8,9 – чизмалардаги φ бурчаксиз қараладиган бўлса, эгри чизиқларнинг йўналиши ҳақида фикр юритиб бўлмайди. Бироқ турғунлик назариясида (унда φ=t деб олинса) биринчи эгри чизиқ “Турғунлик ҳолати” га, иккинчи эгри чизиқ эса “Турғунмас холат”га мос келади.

(u, v) ва (x, y) ўзгарувилар орасидаги

$$\xi = u + iv = \alpha x + \beta y,$$
$$\eta = u - iv = \overline{\alpha} x + \overline{\beta} y$$



8-чизма.



9-чизма.

чизиқли боғланишга кўра (u, v) тенгсизликдаги логарифмик спирал Oxy тенгсизлигида ҳам x=0, y=0 нуқта атрофида чексиз айланиб ўтувчи логарифмик спираль бўлади. Кўрилган турдаги x=0, y=0 махсус нуқтага фокус дейилади.

V. Характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = iq, \lambda_2 = -iq$ соф мавхум бўлсин. Қаралаётган ҳол юқоридаги холнинг p=0 деб олингандаги хусусий холидир.

(2.12) тенглик

$$r = C(u^2 + v^2 = c^2)$$

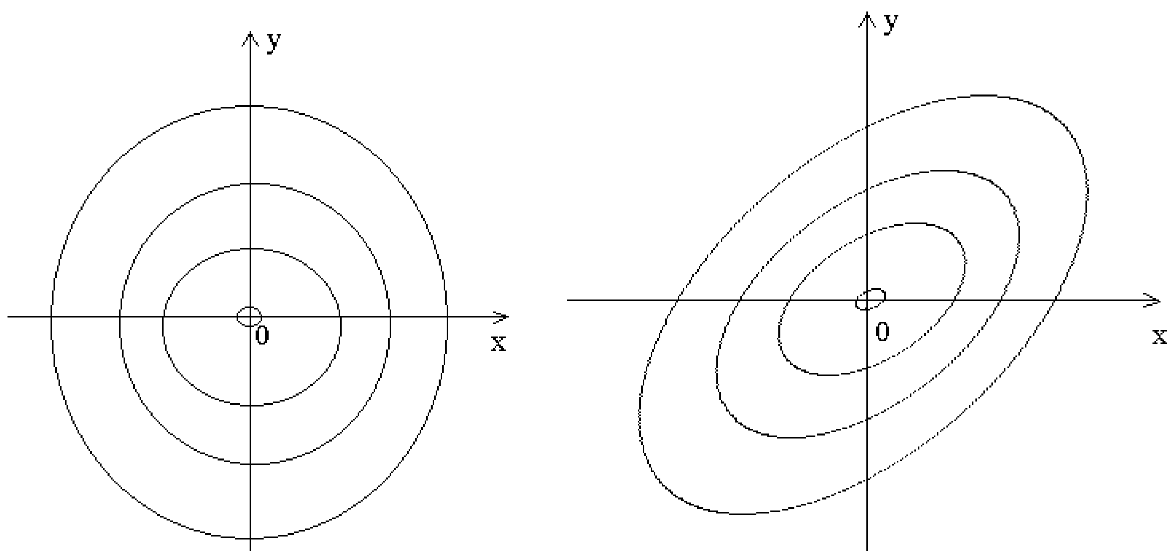
тенгликка, яъни маркази (u, v) текисликда O(0,0) махсус нуқтада, радиуси C га тенг бўлган айланалар оиласи бўлиб, (x, y) текисликда маркази O(0,0) нуқтада бўлган эллипслар оиласига ўтади.(10,11-чизмалар)

Ҳақиқатан ҳам, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_{2,}\beta = \beta_1 + i\beta_2$ деб олсак,

$$r^2 = u^2 + v^2 = c^2,$$
$$r = |u + iv| = |(\alpha_1 x + \beta_1 y) + i(\alpha_2 x + \beta_2 y)|$$

тенгликлар системасидан:

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 + (\alpha_2 x + \beta_2 y)^2 = c^2$$



10-чизма. **11-чизма.**

Ёки

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2)x^2+2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)xy+y^2(\beta_1^2+\beta_2^2)=c^2$$

Ҳосил бўлган тенглама иккинчи тартибли эгри чизиқ - эллипсдан иборат бўлади, чунки унинг дискриминанти ($4AC-B^2$):

$$4(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2-\beta_2^2)-4(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2=$$
$$4(\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2)=4(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$$

$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ тенгликни қаноатлантирувчи ҳар қандай $\alpha_{1,}\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ ларда мусбат бўлади.

$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$ бўлганда (2.10) алмаштиришни бажариб бўлмайди, шунинг учун бунинг бўлиши мумкин эмас.

Бу ҳолда O(0,0) махсус нуқтага марказ дейилади.

Юқоридагилардан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин:

Агар (2.5) тенгламанинг λ_1 ва λ_2 илдизлари:

1) ҳақиқий ва бир хил ишорали бўлса, O(0,0) махсус нуқта, яъни координаталар боши тугун,

2) ҳақиқий ва турли ишорали бўлса, координаталар боши эгар,

3) комплекс (соф мавхум эмас) сонлар бўлса, координаталар боши фокус,

4) соф мавхум бўлса, координаталар боши марказ бўлади.

Бу кўрилган усуллар (2.1) дифференциал тенгламанинг ўнг қисми чизиқли бўлганда ўринли. Агар (2.1) тенгламанинг ўнг қисмига чизиқли бўлмаган, яъни x^2, xy, x^4, x^2y ва бошқалар қўшилса, у холда чизиқли қисми учун махсус нуқта тугун эгар бўлган холда, чизиқлимас қисми қўшилса ҳам тугун, эгарлигича қолади. Махсус нуқта чизиқли қисми учун фокус ёки марказ бўлса, у холда чизиқлимас қисми қўшилса, фокус бўлган махсус нуқта марказ ва аксинча бўлиши мумкин.

Шунинг учун (2.1) тенгламанинг ўнг қисмига чизиқлимас қўшилганда фокус ёки марказ бўлиш муаммоси келиб чиқади.

II БОБ. ЧЕКСИЗЛИКДАГИ МАХСУС НУҚТАЛАР ВА УЛАР АТРОФИДА ИНТЕГРАЛ ЧИЗИҚЛАРНИНГ МАНЗАРАСИ.

§ 2. 1. Пуанкаре сфераси

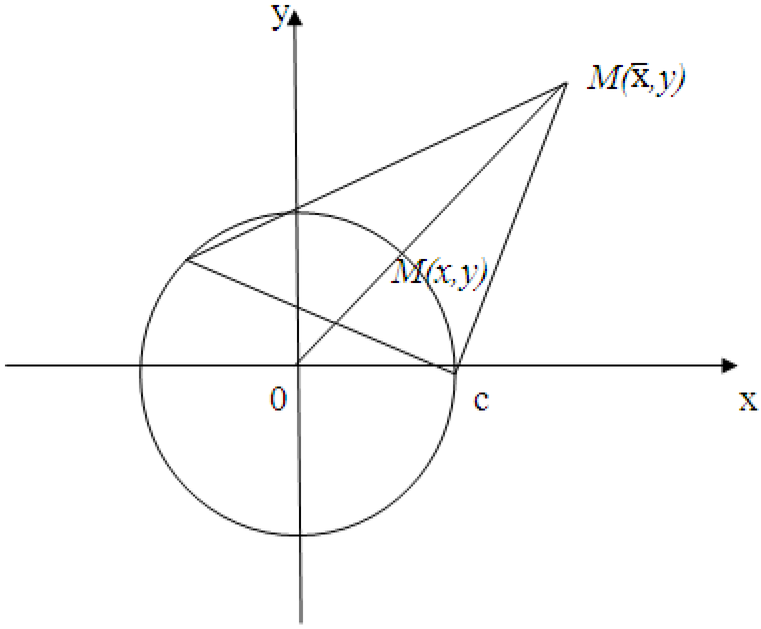
Ушбу

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2} \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}; \quad \bar{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x^2+y^2}; \qquad (2.1)$$

Бендиксон шакл алмаштиришлари мавжуд бўлиб, у *Oxy* текислигидан чексиз узоқлашган махсус нуқталарни $O\bar{x}\bar{y}$ текисликда аниқлаб беради.

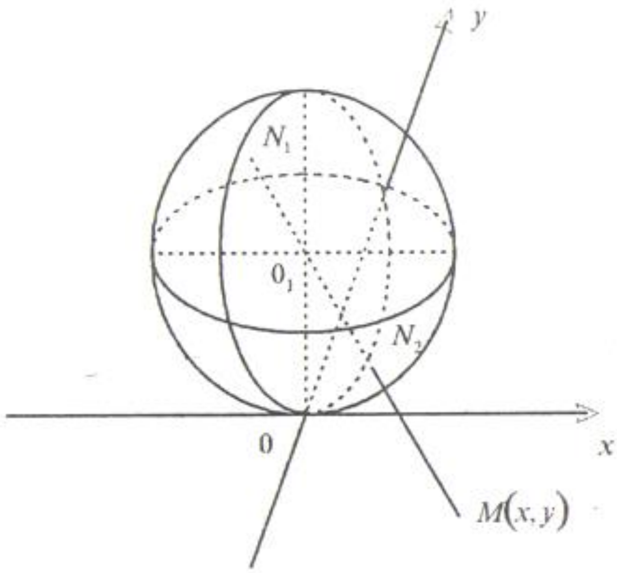
Гиометрик жихатдан бундай алмаштиришлар тескари радуслар билан шакл алмаштириш хам деб йуритилади.(12-чизма)

Аммо, бу (2.1) шакл алмаштриш содда бўлиб кўринсада, $O\bar{x}\bar{y}$ текислигида юуқори тартибли мураккаб махсус нуқталарга олиб келади. Бундай махсус нуқталарни ўрганиш жуда мураккаб бўлгани учун Бендисксон усули кам самаралидир. Шунинг учун унинг ўрнига ғоясига кўра анча мураккаб, лекин анча содда ечимга олиб келувчи Пуанкаре шакл алмаштришларидан фойдаланиш анча қулайдир. Унинг геометрик маъноси қуйдагидан иборат.



12-чизма

Фараз қилайлик, D текисликда ва унда M(x,y) нуқта берилган бўлсин. D текисликка паралел бўлган текислик билан икктa ярим сферага ажратилган сферани қараб чиқамиз. У экватор текислиги деб аталади. (13-чизма) Агар сфера марказини M(x,y) нуқта билан тўғри чизиқ орқали туташтирсак, у сферани N_1N_2 диаметрнинг турли учларида ётган икки N_1 ва N_2 нуктада кесиб утади. *D* текисликда-ги хар кандай тугри чизик. шу сферанинг катта доирасига проекцияланади. Текислик характеристикалари сферанинг тегишли характеристикаларига утади, бунда махсус нуқталарнинг турлари (тугунлар, эгарлар, фокуслар ва д.к.) шакл алмаштириш натижасида сакланади. Бирок, сферада экваторда ётувчи янги махсус нукталар пайдо булиши мумкин. Улар $Q(x, y)=0$ *ва* $P(x, y) = 0$ эгри чизикларнинг кеси-шиш нукталари була олмайдилар, лекин координаталар бошидан чексиз узоклашганда характеристикаларнинг холати билан белгиланадилар. Шундай килиб, зкваторга текисликнинг чексиз узоклашган нукталари аксланади. Бундай ходиса *гномоник* проекция, сферанинг узи *эса. Пуанкаре сфераси* деб аталади. Демак, Пуанкаре шакл алмаш-тиришининг геометрик маъноси *Oxy* текисликни унга координаталар бошида уринувчи сферага акслантиришдан иборат.



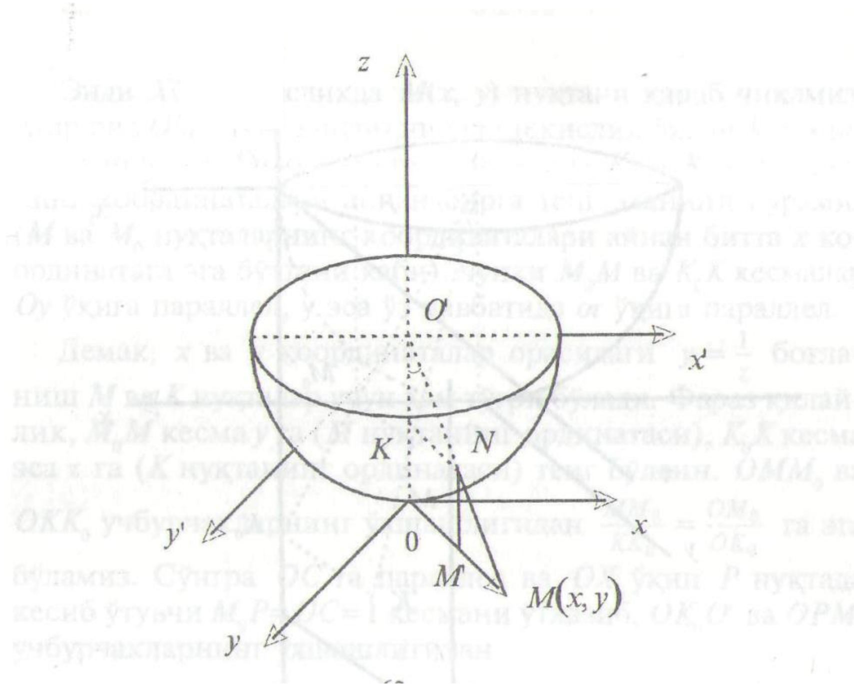
13-чизма

Биз *Oxy* текисликда интеграл эгри чизикларнинг манзараси хакида сферанинг куйи ярим шарини 0_X нук.-тадан караб (14-чизма) ва куйи ярим шарни куйи нуктага уринма текисликка ортогонал проекциялаб аниктасаввурга зга булишимиз мумкин. Шундай килиб, *Oxy* текисликда-ги хар бир *M(x, y)* нуктага куйи ярим сферадаги *Щx', y', Z')* нукта мое келади, охиргисига эса координаталари*N(x', У, z")* нуктаники каби *x'* ва / булган *M'(x', y')* нукта мое келади. *Oxy* текисликда жойлашган хамма *M'{x', y')* нук.-таларх^2+У= 1 Пуанкаре доираси айланаси нукталари ярим сфера экватори нукталарига *Oxy* текисликнинг чексиз узок.-лашган нукталарига мое келади. Шундай килиб, *Ox'y'* текислик *Oxy* текисликнинг бирор кисми, Пуанкаре доира-синининг ичига олинган кисми хисобланади. *M(x, y)* нукта-ларни *M'(x', y')* нукталарга утказувчи формулалар осон чикарилади.4-чиз-мадан куйидагига эга буламиз:

$$OM=OO_1\ tga=tga;\ \ OM'=KH=O_lNsin=sina.$$

Булардан

$$OM' = \frac{OM}{\sqrt{1+(OM)^2}}$$



14-чизма.

га эга

буламиз. OM' ва ОМларни Ox ва Oy укларга проек-циялаб ва $(OM)^2=x^2+y^2$ ни билган хрлда

$$x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \qquad y' = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; \qquad \textbf{(1.2)}$$

ни хосил киламиз. Аммо бу формулалар амалий жщатдан унча кулай эмас, чунки у иддизга эга. Шунинг учун А. Пуанкаре бошка формулалардан, хусусан

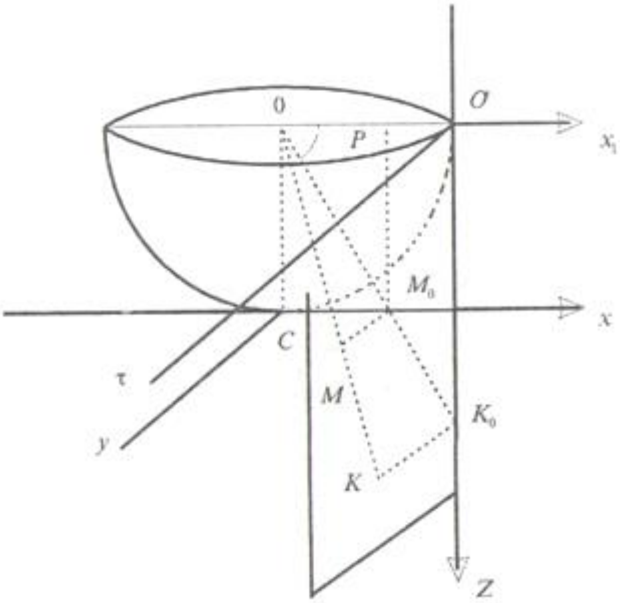
$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{\tau}{z} \qquad \textbf{(1.3)}$$

формулалардан фойдаланишни таклиф этади.

Бу формулани келтириб чикариш мавжуд математикага оид адабиётларда ва ту жумладан А. Пуанкаренинг асарларида хдм йуклиги учун, уни биз келтириб чикарамиз.

Ярим сферанинг энг четки унг O' нуктасидан учта узаро перпендикуляр туфи чизиклар утказамиз: ярим сферага O' нуктада уринувчи $O'z$ тик чизикни, $O'z$ чизик. текислигига перпендикуляр ва O' нукта ва ярим сферанинг маркази

O оркали утувчи *O'z* горизонтал чизик. булсин (15-чизма). Бу уч тугри чизик., учта узаро перпендикуляр текисликни аниклайди:



15-чизма

горизонтал $O'x_1\tau$, фронтал $O'y_1\tau$ ва ён $O'\tau z$. Бундан ташкари чизмадаги $O'x\tau$ га параллел ва ярим сферанинг энг куйи С нуктасига уринувчи *Oxy* текислик мавжуд. *Oxy* текисликда *Cx* укида жойлашган M_0 нук-тани караймиз, бунда бу нуктанинг *x* абсциссаси x_0 га тенг (агар *С* нуктани бош-лангич нукта деб кабул килинса), *y* ординатаси эса нолга тенг. OM_0K_0 тугри чизикни *O* ва M_0 нукталардан бу тугри чизикнинг $O'\tau z$ текислик билан куйи ярим уки *Ox* билан кесишиш нуктаси K_0 оркали угказиб, шу тарзда $O\tau z$ текисликда K_0 нуктани аниклаймиз, бунда шу нуктанинг z координатаси K_0 *O'* кесмага тенг. *O' O*K_0 учбурчакдан

$K_0O' = 00'tga$ ёки $Z=tga$ ни хосил киламиз. Шунингдек OM_0 *C* учбурчакдан:

$CM'_0 = OCctga,$ яъни $x = \text{ctg}a=1/tga$

Демак, $x = \frac{1}{z}$ га эга буламиз.

Энди *XCY* текисликда *M(x, y)* нуктани караб чикамиз. Агар биз ОМКтугри чизикни O'τz текислик билан К нуктада кесишгунча давом этдирсак, у холда *К* ва K_0 нукталарнинг координаталари айнан бирга тенг эканини курамиз *(М* ва M_0 нукталарнинг координаталари айнан битта *x* коорди-натага эга булгани каби), чунки M_0M ва K_0 K кесмалар Oy укига параллел, у эса уз навбатида $o\tau$ укига параллел.

Демак, x *ва* y координаталар орасидаги $\boldsymbol{y=\frac{1}{z}}$ боғланиш M ва К нукталар учун хам тґри булади. Фараз килайлик, M_0M кесма y га (M нуктанинг ординатаси), K_0K кесма эса τ га (K нуктанинг ординатаси) тенг булсин. OMM_0 ва OKK_0 учбурчакларнинг ухшашлигидан $\frac{MM_0}{KK_0}=\frac{OM_0}{OK_0}$ га эга буламиз. Сунгра OC га параллел ва OX_i укни P нуктада кесиб утувчи $M_0P=$ $OC=$ 1 кесмани утказиб, OK_0O' ва OPM_0 учбурчакларнинг ухшашлигидан

$$\frac{MM_0}{KK_0}=\frac{PM_0}{O'K_0}, \text{ яани } \qquad \frac{y}{\tau}=\frac{1}{z},$$

тенгликка эга буламиз. Бундан $\boldsymbol{y=\frac{\tau}{z}}$. Шундай килиб, Oxy текисликдаги M нуктанинг x ва y координаталари билан z ва τ координа-талар (унинг тасвири $C\tau z$ текисликда) уртасида богланиш мавжуд экан, яъни (1.3) алмаштиришни хрсил килди

$$\mathbf{x}=\frac{1}{z}, \qquad \boldsymbol{y=\frac{\tau}{z}} \qquad (1.3)$$

шакл алмаштириш Oxy текисликнинг хамма нукталарини уз ичига олади (бундан Oy укида ётган нукталар мустасно). Бу нукталарни урганиш учун бошка шакл алмаштириш киритилади:

$$\mathbf{x}=\frac{\mu}{z}, \qquad \boldsymbol{y=\frac{1}{z}} \qquad (1.4)$$

бу шакл алмаштириш, агар Ox ва Oy укларнинг уринлари алмаштирилса, (1.3) кабихрсил килинади. $O'xz$ текисликда характеристикаларни тадкик. килиш амалий жихатдан нокулай булгани учун бу характеристикаларни Пуанкаренинг куйи ярим сферасига проекциялаймиз. Шундай килиб, x ва y координаталардан Пуанкаре доирасидаги аввал x ва τ координаталарга утамиз, кейин x' ва y' координаталаргаутамиз. Oxy, $O'\tau z$ ва $Ox\acute{y}$ текислскларидаги ва япим сферадаги характеристикаларнинг ва алохида нукта ларнинг топологик манзараси устма-уст тушгани учун, биз

Пуанкаре доираси $Ox'y'$ текислиги характеристикаларини қараб чиқиш билан бирга (1.3) ёки (1.4) шакл алмаштиришлардан фойдаланамиз.

§ 2.2 Экватордаги махсус нуқталарнинг жойлашиши тўғрисида

Ушбу дифференциал тенглама

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad (2.1)$$

ёки унга эквивалент булган

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j = Q(x,y) \end{cases} \qquad (2.2)$$

системани караймиз, бунда a_{ij}, b_{ij} - узгармас коэффициентлар.

(22) системага (1.3) алмаштиришни куллаб

$$\frac{dz}{dt} = -z^2 P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right),$$

(2.3)

$$\frac{d\tau}{dt} = -\tau z P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right), + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)$$

ни хосил қиламяз. (2.3) дан t вақтни йуқотсак

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-z}{\frac{Q\left(\frac{1}{z},\frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z},\frac{\tau}{z}\right)} - \tau} \qquad (2.4)$$

тенгламага эга буламиз.

Агар (2.4) тенгламада $Q(\frac{1}{z},\frac{\tau}{z}) = \tau P(\frac{1}{z},\frac{\tau}{z})$ тенглик уринли булса, у хрлда z=0 тенглама билан аникданган эк-

ватор характеристика булади ва зкваторда ётувчи махсус нукталар сони

$$Z=0, \qquad \frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} = \tau \qquad (2.5)$$

тенгликларни каноатлантирувчи нукталар сони оркали топилади.

Шунингдек, (2.2) системага (1.4) алмаштиришни куллаб

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -z^2 Q(\frac{\mu}{z},\frac{1}{z}), \\ \frac{d\mu}{dt} = -\mu z Q(\frac{\mu}{z},\frac{1}{z}) + zP(\frac{\mu}{z},\frac{1}{z}) \end{cases} \qquad (2.6)$$

ни хосил киламиз. (2.6) дан τ вактни йукртсак:

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{-z}{\frac{P(\frac{\mu}{z},\frac{1}{z})}{Q(\frac{\mu}{z},\frac{1}{z})} - \mu} \qquad (2.7)$$

тенгламага эга буламиз.

Агар

$$Z=0, \qquad \frac{P(0,\frac{1}{z})}{Q(0,\frac{1}{z})} = \mu \qquad (2.8)$$

шарт бир пайтда бажарилса, у хрлда .у уки охирларида ётувчи махсус нукталар мавжуд. Янги $zdt_1=dt$ вактни киритиб ва унинг учун аввалги белгилашларни крддириб, куйидаги системани хрсил киламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -\sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} z^{2-i-j} \tau^{j}, \\ \dfrac{d\tau}{dt} = -\sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}\, z^{2-i-j} \tau^{j+1} + \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} z^{2-i-j} \tau^{j} \end{cases} \tag{2.9}$$

Экватордаги махсус нукталарнинг координаталари $\tau_к = \tau$ булсин. $\tau = u + \tau_к$ кучириш ёрдамида ушбу системани хрсил киламиз:

$$\frac{dz}{dt}=-Z[a_{20} + a_u\tau_K + a_{02}\,\tau_K^2+(a_{10}+a_{01})z+(a_{11}+2a_{02}\tau_К)+a_{00}z^2 + a_{01}zu + a_{02}u^2], \tag{2.10}$$

$$\frac{du}{dt}=-\{[a_{02}\tau_K^3+(a_{11}-b_{02})\tau_K^2+(a_{20}-b_{11})\tau_К-b_{20}]+[a_{01}\tau_K^2+(a_{10}-b_{01})\tau_К-b_{20}]+ [3a_{02}\tau_K^2 + 2(a_{11}-b_{20})\tau_K + (a_{20}-b_{11})]u-(b_{00}-a_{00}\tau_К)z^2-(b_{01}-a_{10}-2a_{01}\tau_К)zu-(b_{02}-a_{11}-3a_{02}\tau_К)u^2+a_{00}z^2u+a_{01}zu^2+a_{02}u^3\}$$

у укидан чексиз узокдашган махсус нукталарни аниқлаш учун $\mu=v+\mu_K$ кучиришни бажариб, куйидаги системага эга буламиз:

$$\frac{dz}{dt}=-Z[b_{02} + b_{11}\mu_K + b_{20}\,\mu_K^2+(b_{01}+b_{10})z+(b_{11}+2b_{20}\mu_К)v+b_{00}vz + b_{20}v^2], \tag{2.11}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\{[b_{20}\mu_K^3-(a_{20}-b_{11})\mu_K^2-(a_{11}-b_{02})\mu_К-a_{02}]-[a_{01}+(a_{10}-b_{01})\mu_К-b_{10}\mu_К]z+ [3b_{20}\mu_K^2 + 2(a_{20}-b_{11})\mu_K + (a_{11}-b_{02})]v-(a_{00}-b_{00}\mu_К)z^2-(a_{10}-b_{01}-2b_{10}\mu_К)vz-(a_{20}-b_{11}-3b_{20}\mu_К)v^2+b_{00}z^2v+b_{10}zv^2+b_{20}v^3\}$$

(2.10) системанинг иккинчи тенгламасида кавсларни очиб чикилса, у $\tau_к$ га нисбатан учинчи даражали купхад-дан иборат булади. Уни $\Phi_3(\tau_K)$

билан белгилаймиз. $\Phi_3(\tau_K)$ =0 тенгламанинг хакикий илдизлари экватордаги махсус нуқталарнинг координаталарини беради:

$$\Phi_3(\tau_K)=a_{02}\,\tau_K^3+(a_{11}-b_{02})\,\tau_K^2+(a_{20}-b_{11})\,\tau_K-b_{20}\,, \qquad (2.12)$$

бунда $\tau_K=\frac{y}{x}$.

y укдан чексиз узоклашган махсус нукталарга мос келувчи экватордаги нукталар хам худди юкрридагига ухшаш топилади:

$$\Phi_3(\mu_K = b_{20}\mu_K^3 + (a_{20} - b_{11})\mu_K^2 + (a_{11} - b_{20})\mu_K - a_{02}, \qquad (2.13)$$

Бунда $\mu_K = \frac{y}{x}$.

(2.10) система характеристик тенгламасининг илдизлари куйидагига тенг:

$$\lambda_1(\tau_K)=-(a_{02}\,\tau_K^2+a_{11}\,\tau_K+a_{20})=-P_2(1,\tau_K)\,,$$

(2.14)

$$\lambda_2(\tau_K) = -[3a_{02}\tau_K^2 + 2(a_{11} - b_{20})\tau_K + (a_{20} - b_{11})] = -\Phi_3'(\tau_K)$$

$\mu_K = 0$ нукта атрофини урганиш учун улар шунга ухшаш хреил килинади:

$$\lambda_1(\mu_K)=-(b_{20}\,\mu_K^2+b_{11}\,\mu_K+b_{02})=-Q_2(\mu_K,1)\,, \qquad (2.15)$$

$$\lambda_2(\mu_K) = -\left[3b_{20}\mu_K^2 + 2(a_{20} - b_{11})\mu_K + (a_{11} - b_{02})\right] = -\Phi_3(\mu_K)$$

бу ерда $\Phi_3'(\tau_K)\left[\Phi_3'(\mu_K)\right]$ хосилалар $\Phi_3(\tau_K)$ $[\Phi_3(\mu_K)]$ функцияларнинг $\tau_K(\mu_K)$ узгарувчи буйича хосиласи.

Хусусан, τ_K=0 нукта махсус нукта булиши учун $b_{20}=0$ булиши керак. У холда

$\lambda_1 = -a_{20}\,, \lambda_2 = b_{11} - a_{20}$

$\mu_K = 0$ нукта махсус нукта булиши учун $a_{20}=0$ булиши керак. У холда

$$\lambda_1 = -b_{02}\,, \lambda_2 = a_{11} - b_{02}$$

(2.12) тенглама учун $\tau_К = \Phi_К - \frac{a_{11}-b_{02}}{3a_{02}}$ урнига куиишни бажарсак, у хрлда куйидагига эга буламиз:

$$\Psi_K^3 + P\Psi_K + q = 0,$$

бу ерда

$$P=\frac{-(a_{11}-b_{02})^2+3a_{02}(a_{20}-b_{11})}{3a_{02}^2}$$

$$q=\frac{2(a_{11}-b_{02})^3-9a_{02}(a_{11}-b_{02})(a_{20}-b_{11})-27b_{20}*a_{02}^2}{27a_{02}^3}$$

Дискриминант куйидаги куринишга эга булади:

$$\Delta(\tau_К)=\frac{[2(a_{11}-b_{02})^3-9a_{02}(a_{11}-b_{02})(a_{20}-b_{11})-27b_{20}*a_{02}^2]^2}{2916a_{02}^6}+$$

$$+\frac{4[3a_{02}(a_{20}-b_{11})-(a_{11}-b_{02})^2]^3}{2916a_{02}^6} \qquad (2.16)$$

Шунга ўхшаш (2.13) тенглама учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\mu_К = Q_К + \frac{a_{20}-b_{11}}{3b_{20}}$$

$$Q_K^3 + pQ_K + q = 0$$

Бунда

$$P=\frac{-(a_{20}-b_{11})^2+3b_{20}(a_{11}-b_{02})}{3b_{02}^2}$$

$$q=-\frac{2(a_{20}-b_{11})^3-9b_{20}(a_{20}-b_{11})(a_{11}-b_{02})-27a_{02}b_{20}^2}{27b_{20}^3}$$

Дискреминант қуйдаги кўринишга эга бўлади:

$$\Delta(\mu_К)=\frac{[2(a_{20}-b_{11})^3-9b_{20}(a_{20}-b_{11})(a_{11}-b_{02})-27a_{02}b_{02}^2]^2}{2916a_{20}^6}+$$

$$-\frac{4[(a_{20}-b_{11})^2+3b_{20}(a_{11}-b_{02})^2]^3}{2916a_{20}^6} \qquad (2.17)$$

(2.12) ва (2.13) тенгламаларни бошка мулохазалар буйича хам хосил килишимиз мумкин. Ҳақиқатан, (2.1) тенгламани

$$Q(x,y)dx-P(x,y)dy = 0 \qquad (2.18)$$

куринишда ёзиш мумкин.

$x = \frac{x_1}{z} \quad y = \frac{y_1}{z}$ алмаштиришни киритамиз, бундан

$\tau = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \quad \mu = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$

Бу алмаштирищдан сунг (2.18) тенглама

$$z\bar{P}dy_1-z\bar{Q}dx_1+(x_1\bar{Q}-y_1\bar{P})dz=0 \qquad (2.19)$$

куринишга келади бу ерда

$\bar{Q}\left(\frac{x_1}{z},\frac{y_1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}(b_{00}z^2 + b_{10}zx_1 + b_{10}zy_1 + b_{11}x_1y_1 + b_{20}x_1^2 + b_{02}y_1^2),$

$\bar{P}\left(\frac{x_1}{z},\frac{y_1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}(a_{00}z^2 + a_{10}zx_1 + a_{10}zy_1 + a_{11}x_1y_1 + a_{20}x_1^2 + a_{02}y_1^2).$

(2.19) дифференциал тенглама уч улчовли фазода Пфафф тенгламаси булади ва махсус нукталар куйидаги

$$z = 0, \quad x_lQ-y_lP =0,$$

муносабатдан, яъни

$$a_{02}\, y_1^3+ (a_{20}-b_{11})x_1^2\, y_1+ (a_{11}-b_{02})y_1^2\, x_1-b_{20}x_1^3 =0 \qquad (2.20)$$

тенгламадан топилади. (2.20) тенгламадан τ ва μ нинг кийматларини назарга олиб (2.12) ва (2.13) тенгламаларни хосил киламиз.

Пфафф тенгламаси учи координаталар бошида булган конуслардан иборат уч улчовли фазодаги сиртлар оиласини ифодалайди. Улар z=0 интеграл сиртни факат махсус чизикларда, яъни (2.12) ёки (2.13) га эквивалент булган (2.20) шарт уринли буладиган махсус чизикларда кесиб утади ёки уринади. (2.20) шарт геометрик жихатдан бошланғич нуктадан утувчи z=0 текисликдаги учта, иккита ёки битта туғри чизикни ифодалайди. (2.19) тенглама билан аникланувчи сиртларнинг *Ох* уқ якинидаги холатини текшириш учун уларнинг $x_1^2 + y_1^2 = 1$ цилиндр билан кеси-мини караб чикамиз (яъни бу цилиндр сиртидаги интеграл эгри чизикларни караб чикамиз). (2.19) тенгламада

$$x_1 = \cos\varphi,\ y_1 = \sin\varphi$$

деб олиб, уни куйидаги куринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sin\varphi\ P\left(\frac{\cos\varphi}{z},\ \frac{\sin\varphi}{z}\right) - \cos\varphi\ Q\left(\frac{\cos\varphi}{z},\ \frac{\sin\varphi}{z}\right)}{\cos\varphi\ P\left(\frac{\cos\varphi}{z},\ \frac{\sin\varphi}{z}\right) + \sin\varphi\ Q\left(\frac{\cos\varphi}{z},\ \frac{\sin\varphi}{z}\right)} \qquad (2.21)$$

Фараз килайлик,

$$Q(x,y) = Qo(x,y) + O_2(x,y) + Q_2(x,y),$$
$$P(x,y) = P_0(x,y) + P_1(x,y) + P_2(x,y), \qquad (2{,}22)$$

булсин, бунда Q_0, Q_1 ва Q_2 мос равишда $Q(x,\ y)$ функция-нинг нолинчи, биринчи ва иккинчи улчовли хадларини, P_0, P_1 ва P_2 эса $P(x,\ y)$ функциянинг нолинчи, биринчи ва иккинчи улчовли хддчарини уз ичига олади.

(2.21) тенглама оддий шакл алмаштиришлардан сунг куйидаги куринишга келтирилиши мумкин:

Бу ерда Q_0 ,Q_1 ,Q_2, P_0, P_1 ,P_2 функциялар (2.22) формулаларга кура аникданади, бунда *x* ва *y* аргументлар мое равишда $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ га алмаштирилган.

(2.21) тенгламанинг махсус нукталари z=0 текисликда

$$z = 0,\ \sin\varphi P_2 - \cos\varphi\ Q_2 = O$$

муносабатлардан аникданишини сезиш осон.

(2.21) тенгламанинг характеристикалари $x_1^2 + y_1^2 = 1$ сиртидаги интеграл эгри чизикдар цилиндрнинг куйи асоси айланасидаги (z=0) махсус нукталар (2.1) тенгламанинг чексиз узоклашган махсус нукталарига мое ке-лади.

Куйи асоси z=0 ва юкори асоси $z=1$ булган $x^2+y^2=1$

цилиндрни бирлик цилиндр деб атаймиз.

$x = \frac{x_1}{z}$, $y = \frac{y_1}{z}$ формуладан , $x = \frac{cos\varphi}{z}$ $y = \frac{sin\varphi}{z}$ бирлик цилиндрнинг ён сиртидаги (2.23) тенгламанинг характе-ристикаларигах $x_1^2 + y_1^2 = 1$ бирлик доирадан ташкарида жой-лашган *Oxy* текисликдаги (2.1) тенгламанинг характеристикалари мое келиши келиб чикади. Бирлик доиранинг ичида жойлашган (2.1) тенгламанинг колган характеристикалари Пфафф (2.19) тенгламаси конус интеграл сирт-ларининг бирлик цилиндрнинг юкори асоси билан кесишиш чизигага мос тушади. (z=1) булганда (2.19) тенглама (2.1) га утади, $x = \frac{x_1}{z}$ ва $y = \frac{y_1}{z}$ утиш формуласи эса $x_1 = x$, $y_1 = y$ ни беради.

Шундай килиб, (2.1) тенгламанинг $x_1^2 + y_1^2 = 1$ дойра ичида жойлашган характеристикалари бирлик цилиндрнинг юкрри асосида, крлганлари эса унинг ён сиртида тасвир-ланади, бунда цилиндрнинг пастки асоси айланасига (2.1) тенгламанинг чексиз узоклашган нукталари мое келади. Характеристикаларни цилиндрнинг юкрри асосида ва ён сиртида тасвирлаш амалий жихатдан нокулай булгани учун биз цилиндрнинг ён томонида жойлашган характеристикаларни бирлик цилиндрни унинг юкрри асоси айланаси буйича кесиб утувчи $x^2+y^2=(z-2)^2$ конусга ортогонал равишда (яъни цилиндрнинг ён сиртига ортогонал радиус векторлар йуналиши буйича) проекциялаймиз (65-чизма). Цилиндрнинг юкрри асоси билан, ундаги характеристикалари билан бирга $z=0$ текисликка ортогонал проекциялаймиз. Натижада (2.1) тенгламанинг $x_1^2 + y_1^2 = 1$ бирлик доиранинг хам ички томонида, хам ташки томонида жойлашган хдмма характеристикалари *S* дойра ичидаги $(x^2+y^2=4)$ битга текисликда тасвирланади, бунда бу доиранинг айланасига (2.1) тенгламанинг чексиз узоклашган ихтиёрий махсус нукталари мое келади ва бинобарин, бу айлана Пуанкаре доирасининг экваторига мое келади. Умуман, цилиндрнинг ён сиртидан конус сиртига, бундан эса *Oxy* текисликка утиш бизга керак, чунки бундай утищда характеристикаларнинг топологик структураси ва махсус нукталарнинг турлари сакданади

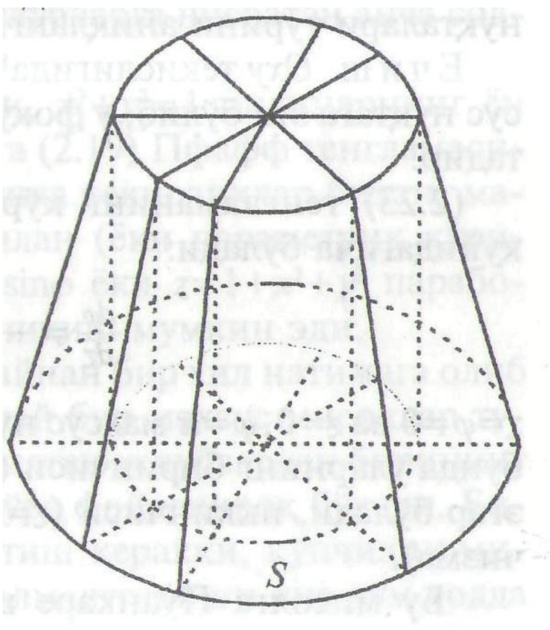
1-м и с о л. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + xy}{x - y^2}$$

дифференциал тенгламанинг чексиз узоклашган махсус нукталари турини аникданг.

Ечиш. *Oxy* текисликда битта O(0, 0) махсус нуктага эга буламиз ва у махсус нуқта тугундан иборат. Бу мисол учун (2.23) тенглама куриниши куйидагича булади:

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{sin\varphi}{z^2}$$



$Z=\varphi=0$ ва $z=0,\varphi=\pi$ махсус нукталар очик. эгар-тугундан иборат, бунда бизг>0 (дойра ичида) нукталарнигина караб чикданимиз учун$N_1(0, 0)$ нукта эгар булади, $N_2(0, \pi)$ эса тугун булади.

Мисолимизга $\mathbf{x}=\frac{1}{z}$, $y=\frac{\tau}{z}$ Пуанкаре шакл алмаштиришларини куллаб, ушбуни хосил киламиз:

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{\tau(1+\tau^2)}{z(z+\tau^2)}$$

Бу тенглама учун координаталар боши эгар-тугун туридаги махсус нукта булади (бунга Фроммер-Куклес усули ёрдамида осон ишонч хосил килиш мумкин). Унгдан координаталар бошига чексиз куп характеристикалар ки-ради, чапдан эса факат τ =0 ярим ук. киради. Пуанкаре доирасининг унт кисми z >0 га, чап кисми эса $z<0$ га мос келади.

Хулоса

Мазкур битирув малакавий иш дифференциал тенгламаларнинг махсус ечими ва махсус нуқтаси атрофида ечимларнинг манзараси ўрганилган бўлиб, дифференциал тенгламалар фанида дифференциал тенгламаларнинг юқорида эслатилган тушунчаларига жуда кам вақт ажратилади. Шу сабабли битирув малакавий ишда дифференциал тенгламанинг махсус нуқта, фокус нуқта, марказ, эгар ва Пуанкаре сфераси каби тушунчалар батафсил ўрганилган.

Битирув малакавий иш кириш, иккита боб, тўртта параграф, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, ишнинг кириш қисмида мавзунинг долзарблиги, мақсади, вазифаси, объекти, янгилиги ва структураси баён этилган.

Биринчи боб асосан, дифференциал тенгламанинг махсус ечими ва махсус нуқталари, дифференциал тенгламаларнинг текисликдаги содда махсус нуқталари турлари ўрганилган. Иккинчи бобда эса, Пуанкаре сфераси, экватордаги махсус нуқталарнинг жойлашиши туғрисида маълумотлар қаралган.

Битирув малакавий ишни тайёрлаш жараёни қуйидаги хулосаларга олиб келди:

- дифференциал тенгламанинг махсус ечим ва махсус нуқталари ўрганилди;
- махсус ечим атрофида ечимларнинг манзараси ўрганилди ва унга доир машқлар ечиб кўрсатилди;
- Пуакаре сфераси тадқиқ қилинди;
- Махсус ечим атрофида ечимни ўрганиш жараёнида турли хил алмаштиришлардан фойдаланилди;

Ушбу битирув малакавий ишдан дифференциал тенгламаларни чуқур ўзлаштирувчилар ва дифференциал тенглама мутахассислик бўйича шуғулланувчи магистрлар фойдаланишлари мумкин.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Понтрягин Л.С. “Обыкновенные дифференциальные уравнения” М., «Наука», 1974г.

2. Матвеев Н.М. «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнения», М., «Высшая школа», 1967г.

3. Салоҳиддинов М.С., Насритдинов Ғ.Н. “Оддий дифференциал тенгламалар”, Т., “Ўзбекистон”, 1994 й.

4. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. “Дифференциал тенгламалар”, Т ., “Ўқитувчи”, 1978й.

5. Степанов В.В. «Качественные дифференциальные уравнений», М., «Гостехиздат», 1957г.

6. Петровский И.Г. «Лекции по теории обыкновенных дифференциалных уравнений», М., Наука, 1954г.

7. Латипов Х.Р ва бошқалар “Д ифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва унинг татбиқлари”., Тошкент,Ўзбекистон», 2002г

8. Амелькин В.В.и др. «Математические модели и дифференциальные уравнения», Минск, «Высшая школа», 1982г

9. Сибирский К.С. «Введение в алгебраическую теореми инвориантов дифференциальных уравнений» Кишинев, 1982г.

10. Латипов Х.Р. «Качественное исследование характеристики одного класса дифференциальных уравнений в целом», Т., «Фан», 1993г.

11. Элегольц Л.Э. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление» , М., «Наука», 1965г.

12. Кори Ниёзов Т.Н. Танлаган асарлар 4-том “Дифференциал тенгламалар”, “Фан”, Тошкент, 1968й.

13. www

14. www

15. www/