

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА  
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ  
УМУМИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ**

**Абдуалимов Муроджон Махмудовичнинг**

5460100 – математика таълим йўналиши бўйича бакалавр даражасини  
олиш учун

**«ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИ ЕВКЛИДНИНГ ТАРТИБ ВА ҚЎЙИШ  
АКСИОМАЛАРИ ЁРДАМИДА ҚУРИШ»**

мавзусидаги

**БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ**

**Илмий раҳбар: Досанов М. С.**

**Гулистон – 2014**

## М У Н Д А Р И Ж А

|                                                        |           |
|--------------------------------------------------------|-----------|
| <u>Кириш .....</u>                                     | <u>3</u>  |
| <u>1§. Дастлабки назарий тушунча ва фикрлар .....</u>  | <u>4</u>  |
| <u>2§. Кесма ва ярим тўғри чизик .....</u>             | <u>7</u>  |
| <u>3§. Ярим текислик ва ярим фазо .....</u>            | <u>16</u> |
| <u>4§. Вектор таърифи .....</u>                        | <u>21</u> |
| <u>5§. Векторларни қўшиш ва сонга кўпайтириш .....</u> | <u>32</u> |
| <u>6§. Тўғри чизикда векторлар .....</u>               | <u>40</u> |
| <u>Хулоса .....</u>                                    | <u>44</u> |
| <u>Фойдаланилган адабиётлар .....</u>                  | <u>45</u> |

## **КИРИШ**

Мазкур битирув малакавий иш векторлар алгебрасини масофа, тартиб ва қўйиш аксиомалари асосида ўрганишга бағишланган.

Бу ишда таянч тушунчаларидан бири кесма тушунчаси масофа тушунчаси орқали аниқланган:

$$MN = \{O : \rho(M, O) + \rho(O, N) = \rho(M, N)\}.$$

Тўғри чизиқ, текислик, фазо ва эркин вектор каби таянч тушунчалар эквивалентлик синфлар орқали назарий тўплам тилида аниқланган. Вектор тушунчаси эса параллел кўчириш тушунчаси билан айнан бир хил эканлиги кўрсатилган.

Векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амали корректлиги, яъни натижанинг  $M$  нуқтанинг танланишига боғлиқ эмаслиги параллел кўчириш ёрдамида исботланади.

Ушбу татқиқотнинг мақсади векторлар алгебрасини планиметрия аксиомалари асосида қуриш ҳамда кўпўлчамли геометрия ҳолида умумлаштиришдир.

Ҳақиқий сонлар майдони устидаги чекли ўлчамли вектор (чизиқли) фазо мазкур ишнинг татдиқоқ объекти ҳисобланади.

Ушбу битирув малакавий ишда аксиоматик қуриш ва эквивалентлик синфларига ажратиш метод ва усулларида фойдаланилади.

Битирув малакавий иш кириш, саккиз параграф, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

## 1§. ДАСТЛАБКИ НАЗАРИЙ ТУШУНЧА ВА ФИКРЛАР (ДАЛИЛЛАР)

Бизга математик анализ курсидан тўплам тушунчаси, бир тўпламни иккинчи тўпламга акслантиришлар ҳамда элементар назарий тўпламли амаллар:  $\cup$  – бирлашма,  $\cap$  – кесишма,  $\setminus$  – айирма, бир тўпламни иккинчи тўпламга декарт кўпайтмаси маълум.

Агар  $\forall x_1, x_2 \in X$  ҳар хил элементлар учун уларнинг  $f(x_1), f(x_2)$  акслари ҳам ҳар хил бўлса  $f: X \rightarrow Y$  акслантириш инъектив ёки ўзаро бир қийматли деб аталади.

Агар ҳар қайси  $y \in Y$  элемент учун шундай  $x \in X$  элемент мавжуд бўлсаки бунда  $f(x) = y$  бўлса  $f: X \rightarrow Y$  акслантириш сюръектив ёки  $X$  тўпламни  $Y$  тўплам устига акслантириш деб аталади. Агар бу шартларнинг иккиси ҳам бажарилса, у ҳолда  $f$  акслантиришини  $X$  тўпламни  $Y$  тўплам устига ўзаро бир қийматли акслантириши ёки ўзаро бир қийматли мослик ёки биекция деб аталади.  $X$  тўпламда  $R$  бинар муносабат – бу  $X$  тўпламдан олинган барча тартибланган  $(x_1, x_2)$  жуфтликлар тўплами.  $R - X \times X$  декарт кўпайтманинг қисм тўпламидир. Агар  $(x_1, x_2) \in R$  бўлса, у ҳолда  $x_1$  ва  $x_2$  элементлар  $R$  муносабатда бўлади дейилади ва  $x_1 R x_2$  каби ёзилади.  $X$  тўпламда эквивалентлик муносабати–бу қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирувчи  $R$  бинар муносабатдир :

1. Рефлексивлик: ихтиёрий  $x \in X$  элемент учун  $x R x$ ;
2. Симметриклик: Агар  $x_1 R x_2$  бўлса, у ҳолда  $x_2 R x_1$ ;
3. Транзитивлик: Агар  $x_1 R x_2$  ва  $x_2 R x_3$  бўлса, у ҳолда  $x_1 R x_3$ .

Биттадан ортиқ элементга эга бўлган ихтиёрий  $X$  тўпламда битта эмас (биттадан ортиқ) эквивалентлик муносабати мавжуд бўлишига қарамасдан, одатда эквивалентлик муносабати  $\sim$  симболи билан белгиланади.  $\sim - X$

тўпланда эквивалентлик муносабати бўлсин.  $x \in X$  элементи учун  $C_x$  орқали бўш бўлмаган  $\{x' \in X : x' \sim x\}$  тўплани белгилаймиз ва уни  $x$  элементнинг эквивалентлик синфи деб атаимиз.

**1.1. Жумла.** Агар  $x_1, x_2 \in C_x$  бўлса, у ҳолда  $x_1 \sim x_2$ .

Ҳақиқатдан ҳам  $x_1, x_2 \in C_x \Rightarrow x_1 \sim x$  ва  $x_2 \sim x \Rightarrow x_1 \sim x$  ва  $x \sim x_2 \Rightarrow x_1 \sim x_2$ .

**1.2. Жумла.** Агар  $C_x \cap C_y \neq \emptyset$  бўлса, у ҳолда  $C_x = C_y$ .

Ҳақиқатдан ҳам,  $C_x \cap C_y \neq \emptyset$  эканлигидан шундай  $x$  элемент мавжудки:  $x \in C_x \cap C_y$ .  $x \in C_x$  ва  $x \in C_y \Rightarrow x' \sim x$  ва  $x' \sim y$ .

Агар  $z \in C_x \Rightarrow z \sim x \Rightarrow z \sim x' \Rightarrow z \sim y \Rightarrow z \in C_y \Rightarrow C_x \subset C_y$ .

Худди шундай  $C_y \subset C_x$  муносабатни исботлаш мумкин. Демак,  $C_x = C_y$ .

Шундай қилиб,  $X$  тўплани ё жуфт-жуфт бўлиб кесишмайдиган ёки устма–уст тушувчи бўш бўлмаган эквивалент синфларига бўлинади. Эквивалент синфлар тўплани —  $\sim$  эквивалентлик муносабатига кўра  $X$  тўпланининг фактор тўплани деб аталади ва  $X/\sim$  каби белгиланади. 1.2.жумлага мувофиқ  $X$  тўпланининг ҳар қайси элементи битта эквивалент синфга тегишли. Шунинг учун  $x$  элементга унинг эквивалентлик синфи  $C_x$  ни мос қўйиб  $X$  тўплани  $X/\sim$  фактор тўплани устига акслантиришини ҳосил қиламиз.

$X$  тўпланда  $R$  бинар муносабат берилган бўлсин. Унда у ихтиёрий  $Y \subset X$  қисм тўпланда  $R_Y$  бинар муносабатни вужудга келтирилади:  $xR_Y y \Leftrightarrow xRy$  ва  $x, y \in Y$ .

**1.3.Жумла.**  $Y \subset X$  ва  $X$  тўпланда  $R$  эквивалентлик муносабати берилган бўлсин. Унда  $R_Y$  ҳам шунингдек эквивалентлик муносабати булади,  $R$  ва  $R_Y$  муносабатларнинг  $C_x^R$  ва  $C_x^{R_Y}$  эквивалентлик синфлари эса бир–бири билан қуйидаги тарзда боғланган:

$$C_x^{R_Y} = Y \cap C_x^R.$$

Ҳақиқатдан ҳам,  $Y \subset X$  бўлганидан  $\forall x \in Y \Rightarrow xRx, \Leftrightarrow xR_Y x$ , яъни  $R_Y$  муносабат рефлексивдир.

Агар  $xR_Y y \Leftrightarrow xRy, x, y \in Y \Leftrightarrow yRx, y, x \in Y \Rightarrow yR_Y x$ , яъни  $R_Y$  муносабат симметрик.

Агар  $xR_Y y$  ва  $yR_Y z$  бўлса, у ҳолда  $xRy, x, y \in Y$  ва  $yRz, y, z \in Y \Rightarrow xRz, x, z \in Y \Rightarrow xR_Y z$ , яъни  $R_Y$  муносабат транзитивдир.

Бундан ташқари  $x \in Y$  да  $y \in C_x^{R_Y} \Leftrightarrow yR_Y x \Leftrightarrow yRx$  ва  $y, x \in Y \Leftrightarrow y \in Y$  ва  $y \in C_x^R \Leftrightarrow y \in Y \cap C_x^R$ , яъни  $C_x^{R_Y} = Y \cap C_x^R$  бўлади.

## 2§. КЕСМА ВА ЯРИМ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

**Кесма.** Кейинчалик биз Эвклид геометриясининг баъзи аксиомаларидан фойдаланамиз. Эвклид аксиомаларининг турли хил кўринишлари мавжуд бўлиб, қуйида тартиб аксиомаларини масофа иборасида ифодалаймиз. *E* Эвклид фазосининг ихтиёрий  $M$  ва  $N$  нуқталари учун, бу нуқталар орасидаги масофа  $\rho(M, N)$  номанфий сон аниқланган.  $\rho$  масофа функцияси қуйидаги аксиомаларни қаноатлантиради.

**I<sub>1</sub>.** Айният аксиомаси:  $\rho(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$ .

**II<sub>2</sub>.** Симметрия аксиомаси:  $\rho(M, N) = \rho(N, M)$ .

**III<sub>3</sub>.** Учбурчак тенгсизлиги:  $\rho(M, N) \leq \rho(M, O) + \rho(O, N)$ .

**1-таъриф.** Агар  $M \neq O \neq N$  ва  $\rho(M, O) + \rho(O, N) = \rho(M, N)$  бўлса,  $O$  нуқта  $M$  ва  $N$  нуқталар орасида ётади дейилади ва қуйидагича ёзилади:  $(MON)$ .

**2-таъриф.**  $M$  ва  $N$  нуқталар орасида ётувчи барча  $O$  нуқталар тўплами

$$(M, N) = \{O : (MON)\}$$

га  $M$  ва  $N$  нуқталарни туташтирувчи  $(MN)$  интервал деб аталади.

$(MN)$  интервалга  $M$  ва  $N$  нуқталарни қўшиб,  $M$  ва  $N$  нуқталарни туташтирувчи  $MN$  кесмани ҳосил қиламиз. Буни бошқача қилиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$MN = \{O : \rho(M, O) + \rho(O, N) = \rho(M, N)\}.$$

$(MN)$  интервал нуқталари  $MN$  кесманинг ички нуқталари,  $M$  ва  $N$  нуқталар эса унинг чегаравий нуқталари деб аталади.  $M$  ва  $N$  нуқталар орасидаги масофа  $MN$  кесманинг узунлиги деб аталади ва  $|MN|$  орқали белгиланади. Шунинг учун  $MN$  кесманинг таърифини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$MN = \{O : |M, O| + |O, N| = |M, N|\}.$$

Агар  $M$  ва  $N$  нуқталар устма-уст тушса, у ҳолда  $MN$  кесма нол узунликка эга ва битта нуқтадан иборат бўлади.

**Тартиб ва қўйиш аксиомалари:**

**III<sub>1</sub>.** Тўғри чизиқдаги ихтиёрий ҳар хил учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитасини орасида ётади.

**III<sub>2</sub>.** Агар  $O$  нуқта  $M$  ва  $N$  нуқталар орасида ётса, у ҳолда  $M, N, O$  нуқталар бир тўғри чизиқда ётади.

**III<sub>3</sub>.**  $l$  тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий  $O$  нуқта ва ихтиёрий  $d > 0$  сон учун шундай иккита  $M_1, M_2 \in l$  нуқталар мавжудки, улар учун  $\rho(M_1, O) = \rho(M_2, O) = d$  бўлади.

Қуйида исботланадиган 2.1 ва 2.5 жумлаларга мувофиқ **III<sub>3</sub>** аксиомани қуйидагича ифодалаш мумкин:

$l$  тўғри чизиқдаги ихтиёрий  $O \in l$  нуқтадан бошлаб берилган  $d$  узунликка эга бўлган иккита кесмани қўйиш мумкин.

**III<sub>4</sub>** (Паш аксиомаси). Текисликда учта  $M, N, O$  нуқта ва бу нуқталардан бирортасини ҳам ўз ичига олмаган  $l$  тўғри чизиқ берилган бўлсин. Агар  $l$  тўғри чизиқ  $(MN)$  интервални кесиб ўтса, у ҳолда у  $(MO)$  ва  $(NO)$  интерваллардан фақат биттасини кесиб ўтади.

**2.1 жумла.** Агар **III<sub>3</sub>** аксиома шартлари ўринли бўлса, у ҳолда  $(M_1, O, M_2)$  бўлади.

**Исбот.** **III<sub>1</sub>** аксиомага мувофиқ  $M_1, O, M_2$  нуқталардан фақат биттаси қолган иккитаси орасида ётади. Фараз қилайлик,  $(O, M_1, M_2)$  бўлсин. У ҳолда,

$$\rho(O, M_1) + \rho(M_1, M_2) = \rho(O, M_2)$$

бўлади. Аммо,  $\rho(O, M_1) = \rho(O, M_2)$ .

Демак,  $\rho(M_1, M_2) = 0$ , яъни  $M_1 = M_2$ . Зиддият. Худди шундай,  $(O, M_2, M_1)$  ҳоли ўринли эмаслиги исботланади.

**2.2 жумла.** Агар  $O \in MN$  бўлса, у ҳолда  $MO \subset MN$  бўлади.

**Исбот.** Жумлани исботлаш учун ихтиёрий  $P \in MN$  нуқта  $MN$  кесмага тегишли эканлигини кўрсатиш етарли. Бунинг учун учбурчак тенгсизлигига мувофиқ,  $\rho(M, P) + \rho(P, N) \leq \rho(M, N)$  (1) тенгсизликни текшириш етарлидир, чунки  $\rho(M, P) + \rho(P, N) \geq \rho(M, N)$  (\*) уринли бўлади. (1) ва (\*) тенгсизликлардан  $\rho(M, P) + \rho(P, N) = \rho(M, N)$ , яъни  $P \in MN$  бўлади.

$P = M \Rightarrow P \in MN$ .  $P = O$  ва  $O \in MN \Rightarrow P \in MN$ . Бу ҳолда тасдиқ тўғридир.

$P \neq M, P \neq O, P \in MO \Rightarrow (MPO)$  эга бўламиз.  $O \in MN$  бўлгани учун

$O = M \Rightarrow MO = NM \subset MN$ .

$O = N \Rightarrow MO = MN \subset MN$ .

$O \neq M$  ва  $O \neq N$  бўлса, у ҳолда  $O \in MN$  эканлигидан  $(MON)$  эга бўламиз.

$(MON)$  ва  $(MPO)$  ларга мувофиқ ушбуларга эга бўламиз:

$\rho(M, N) = \rho(M, O) + \rho(O, N) = \rho(M, P) + \rho(P, O) + \rho(O, N) \geq \rho(M, P) + \rho(P, N)$ ,

яъни  $\rho(M, N) \geq \rho(M, P) + \rho(P, N)$  (1) тенгсизлик исбот қилинди.

**2.3 Жумла.** Агар  $M, N, O$  нуқталар битта тўғри чизикда ётса, у ҳолда  $MO \subset MN \cup NO$  бўлади.

**Исбот.** Бунда  $M, N, O$  нуқталарни жуфт-жуфти билан ҳар хил деб ҳисоблаймиз. Акс ҳолда тасдиқнинг тўғрилиги аён. Чунки,  $M = N$  бўлса,  $MO = NO \subset MN \cup NO$ .  $M = N$  бўлса, у ҳолда  $MO = MN = \{M\} \subset MN \subset MN \cup NO$ ,  $N = O$  бўлса,  $MO = MN \subset MN \cup NO$ .

$N$  нуқтадан фарқли  $P \in (MO)$  нуқтани оламиз.  $M, N, O$  нуқталар ётган тўғри чизикни фақат битта  $P$  нуқтада кесувчи  $l$  тўғри чизик мавжуд. Унда Паш аксиомасига мувофиқ,  $P$  нуқта  $(MN)$  ёки  $(NO)$  интерваллардан бирига тегишли бўлади. Демак,  $P \in (MN) \cup (NO)$  ёки  $P \in MN \cup NO$  бўлади.

$P=M \Rightarrow P \in MN \cup NO$  бўлади.  $P=O \Rightarrow P \in MN \cup NO$  бўлади. Булардан  $MO \subset MN \cup NO$  бўлиши келиб чиқади.

**2.2 ва 2.3 жумлалардан** ушбу натижа келиб чиқади.

**2.4 натижа.** Агар  $N \in MO$  бўлса, у ҳолда  $MN \cup NO = MO$  бўлади. Ҳақиқатан ҳам,  $N \in MO$  бўлса, 2.2 жумлага мувофиқ  $MN \in MO$ . Ҳудди шундай,  $N \in MO = OM$  бўлса, 2.2 жумлага мувофиқ  $ON \in OM = MO$  бўлиб,  $MN \subset MO$  ва  $ON \subset MO \Rightarrow MN \cup ON \subset MO$ .

2.3 жумлага мувофиқ  $N \in MO \Rightarrow MO \subset MN \cup NO$ . Булардан эса  $N \in MO \Rightarrow MO = MN \cup NO$  келиб чиқади.

**2.5 жумла.** Агар  $N \in MO$  бўлса, у ҳолда  $N$  нукта  $MN$  ва  $NO$  кесмаларнинг ягона умумий нуктаси бўлади.

**Исбот.** Бунда  $N$  нуктадан фарқли  $P \in MN \cap NO$  нукта мавжуд деб фараз қиламиз. Унда  $P \in MN$  ва  $P \neq N$  бўлганидан  $\rho(M, P) + \rho(P, N) = \rho(M, N)$  бўлиб,  $\rho(P, N) > 0$  бўлгани сабабли

$$\rho(M, N) - \rho(M, P) = \rho(P, N) > 0, \quad \rho(M, P) < \rho(M, N)$$

бўлади.  $P \in NO$  ва  $P \neq N$  бўлганидан эса  $\rho(N, P) + \rho(P, O) = \rho(N, O)$  ва  $\rho(N, P) > 0$  бўлиб,  $\rho(N, O) - \rho(P, O) = \rho(N, P) > 0$  ва  $\rho(P, O) < \rho(N, O)$  бўлади.

$N \in MO \Rightarrow MN \subset MO$ .  $N \in OM \Rightarrow ON \subset OM \Rightarrow NO \subset MO$ . Булардан эса  $P \in MN \cap NO \subset NO \subset MO$  бўлади.

$$P \in MO \Rightarrow \rho(M, O) = \rho(M, P) + \rho(P, O) < \rho(M, N) + \rho(N, O) = \rho(M, O).$$

Зиддият ҳосил қилдик. Фараз нотўғри. 2.5 жумла исботланади.

**2.6 жумла.** Агар  $(MNO)$  ва  $(NPO)$  бўлса, у ҳолда  $(MNP)$  бўлади.

**Исбот.** Шартга кўра қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\rho(M, N) + \rho(N, O) = \rho(M, O), \quad (2), \quad \rho(N, P) + \rho(P, O) = \rho(N, O) \quad (3) \text{ бўлади.}$$

Бундан ташқари 2.2 жумлага мувофиқ, ҳамда  $N \in MO$  га кўра  $N \in OM \Rightarrow ON \subset OM \Rightarrow NO \subset MO$ .

Демак,  $P \in NO \subset MO$ , яъни  $\rho(M, P) + \rho(P, O) = \rho(M, O)$  (4). (2) ва (3)

тенгликлардан ушбуни топамиз:

$$\rho(M, N) + \rho(N, P) + \rho(P, O) = \rho(M, N) + \rho(N, O) = \rho(M, O) \quad (5).$$

(4) ва (5) тенгликларни таққослаб кўрамиз:

$$\rho(M, P) + \rho(P, O) = \rho(M, N) + \rho(N, P) + \rho(P, O), \quad \text{ёки}$$

$$\rho(M, N) + \rho(N, P) = \rho(M, P).$$

$(MNO) \Rightarrow M \neq N \neq O$  ва  $(NPO) \Rightarrow N \neq P \neq O$ .  $\rho(M, P) = \rho(M, N) + \rho(N, P)$  ва  $M \neq N \neq P$  муносабатлардан  $(MNP)$  бўлиши келиб чиқади.

2.6 жумла исботланди.

**2.7 жумла.** Агар  $(MNO)$  ва  $(NOP)$  бўлса, у ҳолда  $(MNP)$  бўлади.

**2.8-жумла.** Ихтиёрий номанфий  $d \leq \rho(O, M)$  сон учун, шундай битта ягона  $N \in OM$  нуқта мавжудки бунда  $\rho(O, N) = d$  бўлади.

**Исбот.** Аввал нуқтанинг ягоналигини текшираамиз.  $N$  нуқтадан фарқли  $O$  нуқтадан  $d$  масофадан турувчи  $P \in OM$  нуқта мавжуд бўлсин деб фараз қиламиз. Унда

$$\rho(O, N) + \rho(N, M) = \rho(O, M), \quad \rho(O, P) + \rho(P, M) = \rho(O, M)$$

$$\rho(P, M) = \rho(O, M) - \rho(O, P) = \rho(O, M) - d = \rho(O, M) - \rho(O, N) = \rho(N, M).$$

Аммо, 2.4-жумлага мувофиқ  $N \in OM$  бўлгани туфайли  $P \in OM = ON \cup NM$  ва  $P$  нуқта  $ON$  ёки  $NM$  кесмаларнинг бирида ётади, яъни  $\rho(O, P) + \rho(P, N) = \rho(O, N)$  ёки  $\rho(N, P) + \rho(P, M) = \rho(N, M)$  бўлади.  $P \neq N \Rightarrow \rho(P, N) > 0$  ва  $\rho(O, P) - \rho(O, P) = \rho(P, N) > 0$  ва  $\rho(O, P) < \rho(O, N)$  ёки  $\rho(N, M) - \rho(P, M) = \rho(N, P) > 0$  ва  $\rho(P, M) > \rho(N, M)$  яъни  $\rho(P, M) < \rho(N, M)$  ёки  $\rho(O, P) < \rho(O, N)$  тенгсизликларга эга бўламиз, аммо  $\rho(P, M) = \rho(N, M)$  ва  $\rho(O, P) = \rho(O, N) = d$ . Зиддият ҳосил бўлди. Шу билан ягоналиги исботланди.

Мавжудлиги. Бунда  $M \neq O$  деб фараз қиламиз. Унда  $III_3$  аксиомага мувофиқ  $O$  ва  $M$  нукталардан ўтувчи  $l$  тўғри чизикда  $M$  нуктадан фарқли шундай  $M_1$  нукта мавжудки бунда,  $\rho(M, O) = \rho(O, M)$ .

Аввал бунда, агар  $N \in l$  ва  $\rho(N, O) \leq \rho(O, M)$  бўлса, у ҳолда  $N \in M_1M$  бўлишини исботлаймиз. Фараз қилайлик, шундай бўлмасин. Унда  $III_1$  аксиомага мувофиқ, ёки  $(NM_1M)$  ёки  $(M_1MN)$ .

Биринчи ҳолни қараймиз. 2.1-жумлага мувофиқ  $(M_1OM)$  эга бўламиз. Шунинг учун 2.6-жумлага асосан  $(NM_1M)$  ва  $(M_1OM)$  лардан  $(NM_1O)$  бўлиши келиб чиқади. Бу ердан  $\rho(N, O) - \rho(M, O) = \rho(N, M_1) > 0$ . Чунки фаразга кўра,  $N \notin MM_1$  ва  $N \neq M_1$ .  $\rho(N, O) > \rho(M_1, O) = \rho(O, M)$ . Зиддият ҳосил қилдик.

$(M_1MN)$  ҳол ҳам худди шундай ҳал этилади. Демак 2.8- жумла исботланди.

### Ярим тўғри чизик

$l$  тўғри чизикда ихтиёрий  $O$  нуктани оламиз.  $l \setminus \{O\}$  тўпламда эквивалентлик муносабатини киритамиз. Агар  $O \notin MN$  бўлса  $M, N \in l \setminus \{O\}$  нукталарни  $O$  нуктадан бир томонда ётади деб айтамыз.  $l \setminus \{O\}$  тўпламда шундай таърифланган бинар муносабат эквивалентлик муносабатидир. Ҳақиқатан ҳам  $\forall M \in l \setminus \{O\}$  нукта учун  $O \notin MM = \{M\}$ , яъни  $M$  ва  $M$  нукталар  $O$  нуктадан бир томонда ётади. Агар  $M, N \in l \setminus \{O\}$  нукталар  $O$  нуктадан бир томонда ётса, у ҳолда  $O \notin MN$  бўлади. Бундан эса  $O \notin NM$ , яъни  $N$  ва  $M$  нукталар ҳам  $O$  нуктадан бир томонда ётади. Бу муносабатнинг рефлексив, симметрик бўлишини англатади.

Агар  $M, N, P \in l \setminus \{O\}$  нукталар учун  $O \notin MN$  ва  $O \notin NP$  бўлса, унда  $O \notin MN \cup NP$  бўлади. Бунда 2.3-жумлага асосан  $O \notin MP$  келиб чиқади. Демак,  $M, N$  нукталар ва  $N, P$  нукталар  $O$  нуктадан бир томонда ётса, у ҳолда

$M, P$  нукталар ҳам  $O$  нуктадан бир томонда ётади. Демак, бу муносабат транзитив муносабатдир.

**2.9-жумла.** “Нукталар  $O$  нуктадан бир томонда ётади” муносабати  $I \setminus \{O\}$  тўпламни иккита эквивалентлик синфига ажратади.

**Исбот.** Бирорта  $d$  – мусбат сон бўлсин.  $III_3$ -аксиомага мувофиқ, мавжуд шундай  $M_1, M_2 \in I$  нукталарни олампизки, бунда  $\rho(M_1, O) = d = \rho(O, M_2)$  бўлади. Унда 2.1-жумлага асосан  $(M_1OM_2)$  бўлганлигидан  $O \in M_1M_2$  бўлади. Демак  $M_1, M_2$  нукталар  $O$  нуктадан бир томонда ётмайди. Бошқача қилиб айтганда бу нукталар эквивалент нукталар эмас, яъни  $M_1$  ва  $M_2$  нукталар ҳар хил эквивалентлик синфларида ётади. Энди бунда ҳар қандай  $N \in I \setminus \{O\}$  нукта ёки  $M_1$  нуктага ёки  $M_2$  нуктага эквивалент эканлигини кўрсатамиз.  $N$  нукта  $M_1$  нуктага ҳам  $M_2$  нуктага ҳам эквивалент эмас, яъни  $O \in M_1N$ ,  $O \in NM_2$  бўлсин. Аммо, Паш аксиомасидан, агар  $M_1, M_2, N$  ҳар хил нукталар битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда ҳеч қандай  $O$  нукта учта  $(M_1M_2)$ ,  $(M_1N)$  ва  $(NM_2)$  интервалларга бир вақтда тегишли эмаслиги келиб чиқади. Зиддият.

Демак, ҳар қандай  $N \in I \setminus \{O\}$  нукта ё  $M_1$  нуктага ёки  $M_2$  нуктага эквивалент. 2.9-жумла исботланди.

Бу эквивалент синифларини  $I$  тўғри чизиқни  $O$  нукта бўлгандаги ярим тўғри чизиқлар деб ёки боши  $O$  нуктада бўлган ярим тўғри чизиқлар деб атаемиз. Боши  $O$  нуктада бўлган  $M$  нукта орқали ўтувчи ярим тўғри чизиқни  $(OM \rightarrow)$  билан белгилаймиз. Ярим тўғри чизиқга  $O$  бошланғич нуктасини қўшиб  $OM \rightarrow$  нурни ҳосил қиламиз. Айрим адабиётларда  $OM \rightarrow$  нурни  $[OM)$  орқали белгиланади.

**2.10-жумла.** Бошланғич нукталар  $O_1$  ва  $O_2$  бўлган  $I$  тўғри чизиқнинг ихтиёрий икки нури

1) ё кесишмайди;

2) ё  $O_1O_2$  кесма бўйича кесишади;

3) ёки улардан бири иккинчисида ётади.

**Исбот.** Фараз қилайлик, нурлар кесишсин ва  $M$  – уларнинг умумий нуқтаси бўлсин. Умумий ҳол,  $O_1, O_2, M$  нуқталар жуфт-жуфт бўлиб ҳар хил бўлган ҳолни қараймиз. Фараз қилайлик, аввал бунда  $M$  нуқта  $O_1O_2$  кесмада ётмасин ва масалан  $(MO_1O_2)$  бўлсин. Унда  $OM \rightarrow$  нурнинг ихтиёрий  $N$  нуқтаси учун 2.2-жумлага мувофиқ, агар  $N \in MO_1$  бўлса, у ҳолда  $N \in MO_2$  бўлади. Чунки  $(MO_1O_2) \Rightarrow O_1 \in MO_2 \Rightarrow MO_1 \subset MO_2$ . Агарда  $N \notin MO_1$  бўлса, у ҳолда  $N \in O_1M \rightarrow$  бўлганлигидан  $O_1 \notin NM$ , яъни  $O_1$  нуқта  $N$  ва  $M$  нуқталар орасида ётмаганидан,  $(NMO_1)$  бўлиб, бунда  $(MO_1O_2)$  ва 2.7-жумлага асосан,  $(NMO_2)$  бўлади ва демак,  $O_2 \notin NM$ , яъни  $N \in O_2M \rightarrow$ . Худди шундай,  $(O_1O_2M)$  бўлса, у ҳолда  $N \in O_2M \rightarrow$  дан  $N \in O_1M \rightarrow$  бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам,  $O_2M \rightarrow$  нурнинг ихтиёрий  $N$  нуқтаси учун 2.2-жумлага мувофиқ, агар  $N \in MO_2$  бўлса, у ҳолда  $N \in MO_1$  бўлади. Чунки,  $(O_1O_2M) \Rightarrow O_2 \in O_1M = MO_1 \Rightarrow MO_2 \subset MO_1$ . Агарда  $N \notin MO_2$  бўлса, у ҳолда  $N \in O_2M \rightarrow$  бўлганидан  $O_2$  нуқта  $N$  ва  $M$  нуқталар орасида ётмаганидан,  $(NMO_2)$  бўлиб, бунда  $(O_1O_2M)$  билан биргаликда 2.7-жумлага асосан  $(NMO_2)$  ва  $(MO_1O_2)$  лардан  $(NMO_1)$  ни беради ва демак,  $O_1 \notin NM$ , яъни  $N \in O_1M \rightarrow$ . Демак,  $M \notin O_1O_2$  бўлса, у ҳолда  $O_1M \rightarrow$  нур бутунлай  $O_2M \rightarrow$  нурда ётади ёки аксинча,  $O_2M \rightarrow$  нур бутунлай  $O_1M \rightarrow$  нурда ётади.

Энди  $(O_1MO_2)$  ва  $N$  нуқта  $O_1O_2$  кесманинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Унда 2.4 ва 2.3-жумлаларга мувофиқ  $(MN)$  интервал  $(O_1O_2)$  интервалнинг қисми бўлади ва шунинг учун  $O_1$  нуқтани ҳам,  $O_2$  нуқтани ҳам ўз ичига олмайди. Ҳақиқатан ҳам, 2.4-натижага асосан  $M \in O_1O_2 \Rightarrow O_1M \subset O_1O_2$ ,  $N \in O_1O_2 \Rightarrow O_1N \subset O_1O_2$ . Бундан эса  $O_1M \cup O_1N \subset O_1O_2$  ёки  $MO_1 \cup O_1N \subset O_1O_2$  бўлади. 2.3-жумлага асосан

$MN \subset O_1O_2$  эга бўламиз. Бундан эса  $(MN) \subset (O_1O_2)$ , яъни  $O_1 \notin (NM)$  ва  $O_2 \notin (N, M)$ .

Демак  $N$  нукта  $O_1$  ва  $O_2$  нукталарнинг шундай томонида ётадики, бунда шу томонда  $M$  нукта ҳам ётади.

$O_1O_2 \subset O_1M \rightarrow$  ва  $O_1O_2 \subset O_2M \rightarrow$ . Демак,  $O_1O_2 \subset (O_1M \rightarrow) \cap (O_2M \rightarrow)$ .

Иккинчи томондан, агар  $N \notin O_1O_2$  ва масалан  $(NO_1O_2)$  бўлса, у ҳолда  $(O_1MO_2)$  дан ва 2.6-жумладан  $(NO_1M)$  бўлиши келиб чиқади, яъни  $N \notin O_1M \rightarrow$ . 2.10-жумла исботланди.

Ундан тўғри чизикда ярим тўғри чизиклар ҳам худди шундай жойлашиши келиб чиқади, фақат 2) ҳолда улар интервал бўйича кесишади.

**2.11-жумла.**  $l$  тўғри чизик ва  $O \in l$  нукта ва  $d > 0$  сон берилган бўлсин. Унда  $l$  тўғри чизик  $O$  нукта билан бўлинггандаги ҳар қандай ярим тўғри чизикда  $O$  нуктадан  $d$  масофада турувчи битта нукта мавжуд.

**Исбот.**  $III_3$  аксиомага мувофиқ  $l$  тўғри чизикда  $O$  нуктадан  $d$  масофада турувчи иккита  $M_1$  ва  $M_2$  нукталар мавжуд. 2.1-жумлага мувофиқ  $O$  нукта  $M_1$  ва  $M_2$  нукталар орасида ётади, яъни  $M_1$  ва  $M_2$  нукталар бошланғич нуктаси  $O$  бўлган ҳар хил ярим тўғри чизикларда ётади.

### 3§. ЯРИМ ТЕКИСЛИК ВА ЯРИМ ФАЗО

$\pi$  текислик ва унда ётувчи  $l$  тўғри чизик берилган бўлсин. Планиметрия аксиомаларидан бири,  $\pi \setminus l$  тўпламнинг бўшмаслигини тасдиқлайди. Агар  $MN \cap l = \emptyset$  бўлса,  $M, N \in \pi \setminus l$  нуқталарни  $l$  тўғри чизикдан бир томонда ётади деб айтамыз ( $MS_l N$  каби ёзамиз).

**3.1 жумла.**  $\pi \setminus l$  тўпламда  $S_l$  эквивалентлик муносабатидир.

**Исбот.**  $\forall M \in \pi \setminus l$  нуқта учун  $MM = \{M\}$ ,  $MM \cap l = \emptyset$ , яъни  $MS_l M$ .

Агар  $MS_l N$  бўлса, у ҳолда  $MN \cap l = \emptyset$  бўлиши келиб чиқади. Бундан  $NM \cap l = \emptyset$  бўлиб,  $NS_l M$  бўлади. Демак,  $S_l$  муносабат рефлексив ва симметрик муносабатдир.

Энди транзитивлик аксиомасини текширамыз.  $MS_l N$  ва  $NS_l O$  бўлсин. Агар  $M, N, O$  нуқталар битта тўғри чизикда ётса, у ҳолда 2.3 жумлага мувофиқ  $MO \subset MN \cup NO$  бўлади ва демак,  $MN \cap l = \emptyset$  ва  $NO \cap l = \emptyset$  бўлишидан  $(MN \cap l) \cap (NO \cap l) = \emptyset$ ,  $(MN \cap NO) \cap l = \emptyset$  ёки  $MO \cap l = \emptyset$  бўлиши келиб чиқади, яъни  $MS_l O$  бўлади.

Энди  $M, N, O$  нуқталар битта тўғри чизикда ётмаган бўлсин, шартга кўра  $MN \cap l = \emptyset$  ва  $NO \cap l = \emptyset$ . Фараз қилайлик, бунда  $MO \cap l \neq \emptyset$  бўлсин. Аммо унда  $l$  тўғри чизик  $MNO$  учбурчак учларидан ўтмаган тўғри чизик учбурчакнинг томонларидан бири  $MO$  ни кесиб, Паш аксиомасига мувофиқ, унинг яъни битта томонини кесиши керак, яъни  $MO \cap l \neq \emptyset$  ёки  $NO \cap l \neq \emptyset$ . Зиддият. Демак, фараз нотўғри, яъни  $MO \cap l = \emptyset$  бўлиб,  $MS_l O$  бўлади.

3.1-жумла исботланди.

**3.2-жумла.**  $S_l$  муносабатнинг иккита эквивалентлик синфи мавжуд.

**Исбот.** Ихтиёрий  $M \in \pi \setminus l$  ва  $O \in l$  нуқталарни оламиз.  $M$  ва  $O$  нуқталар орқали  $m$  тўғри чизикни ўтказамиз.  $m$  тўғри чизикда 2.9-жумлага мувофиқ

$OM \rightarrow$  нурга тегишли бўлмаган  $N$  нуқта мавжуд. Шу билан бирга  $O$  нуқта  $MN$  кесманинг ички нуқтаси бўлиб,  $M$  ва  $N$  нуқталар эса эквивалент эмасдир.

Энди ихтиёрий  $P \in \pi \setminus l$  нуқтанинг ёки  $M$  нуқтага, ёки  $N$  нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик,  $P$  ва  $M$  нуқталар эквивалент бўлмасин, яъни  $l \cap MP \neq \emptyset$ . Аммо,  $M \in \pi \setminus l$  ва  $P \in \pi \setminus l$  бўлганидан  $l \cap (MP) \neq \emptyset$  бўлади. Унда  $l$  тўғри чизик  $O \in MN \cap l$  бўлганидан  $M \in \pi \setminus l$ ,  $N \in \pi \setminus l$  эканлигидан  $(MN)$  ва  $(MP)$  интервалларни кесиб Паш аксиомасига мувофиқ  $(NP)$  интервални кесмайди, яъни  $l \cap (NP) = \emptyset$ .  $N \in \pi \setminus l$ ,  $P \in \pi \setminus l$  бўлганидан  $NP \cap l = \emptyset$ , яъни  $PS_l N$  бўлади. 3.2-жумла исботланди.

$S_l$ -муносабатининг эквивалент синфларини  $\pi$  текисликни  $l$  тўғри чизик билан бўлингандagi ярим текисликларни  $\pi^-$ ,  $\pi^+$  ёки  $\pi_l^-$ ,  $\pi_l^+$  символлар билан белгилаймиз. Ярим тўғри чизик ва ярим текиликнинг таърифларидан бевосита қуйидагилар келиб чиқади.

**3.3-жумла.**  $l \subset \pi$  тўғри чизик  $\pi$  текисликни  $\pi^+$  ва  $\pi^-$  ярим текисликларга ажратсин. Бундан ташқари  $\pi$  текисликда  $l$  тўғри чизикни  $O$  нуқтада кесувчи бошқа  $m$  тўғри чизик берилган бўлсин.  $m \cap \pi^-$  ва  $m \cap \pi^+$  тўпламлар  $m$  тўғри чизикни  $O$  нуқтада бўлгандagi ярим тўғри чизиклар бўлади (қисқача: тўғри чизик ярим текисликлар билан тўғри чизик бўйича кесишади).

**Исбот.** Ҳақиқатан ҳам,  $l \subset \pi$  ва  $\pi^- \neq \emptyset$  ва  $\pi^+ \neq \emptyset$  эканлигидан  $M \in \pi^-$  ва  $N \in \pi^+$  бўлиб,  $M$  ва  $N$  нуқталардан ўтувчи  $m$  тўғри чизик  $l$  тўғри чизикни  $O$  нуқтада кессин.  $P \in m \cap \pi^- \Leftrightarrow P \in m$  ва  $P \in \pi^+ \Rightarrow P \in m$  ва  $MP \cap l = \emptyset \Rightarrow MP \notin O \Rightarrow$

$\Rightarrow P \in (OM \rightarrow)$ , яъни  $m \cap \pi^- \subset (OM \rightarrow)$ .

Энди аксинча,  $P \in (OM \rightarrow)$ , яъни,  $MP \notin O$  бўлсин, унда  $MP \cap l = \emptyset \Rightarrow P \in \pi^-$ .  $P \in m$  бўлганидан  $P \in m \cap \pi^-$ , яъни,  $m \in \pi^- \supset (OM \rightarrow)$ . Демак,  $m \in \pi^- = (OM \rightarrow)$ .

Худди шундай,  $Q \in m \cap \pi^+ \Leftrightarrow Q \in m$  ва  $Q \in \pi^+ \Rightarrow Q \in m$  ва  $O \notin NQ \Rightarrow Q \in (ON \rightarrow)$ , яъни  $m \cap \pi^+ \subset (ON \rightarrow)$ .

Энди аксинча,  $Q \in (ON \rightarrow)$ , яъни,  $O \notin QN$  бўлсин, унда  $NQ \cap l = \emptyset \Rightarrow Q \in \pi^+$ . Аммо  $Q \in m$  бўлганидан  $Q \in m \cap \pi^+$ , яъни,  $m \cap \pi^+ \supset (ON \rightarrow)$ . Демак  $m \cap \pi^+ \subset (ON \rightarrow)$  ва  $m \cap \pi^+ \supset (ON \rightarrow)$  эканлигидан  $m \cap \pi^+ = (ON \rightarrow)$ . 3.3-жумла исботланди.

Е фазода  $\pi$  текислик берилган бўлсин. Стереометрия аксиомаларидан бири  $E \setminus \pi$  тўпламнинг бўш эмаслигини тасдиқлайди. Агар  $M, N \in E \setminus \pi$  нукталар учун  $MN \cap \pi = \emptyset$  бўлса,  $M, N \in E \setminus \pi$  нукталарни  $\pi$  текисликдан бир томонда ётади деб атаймиз ( $MS_\pi N$  каби ёзамиз).

**3.4-жумла.**  $S_\pi$  муносабат  $E \setminus \pi$  тўпламнинг эквивалентлик муносабатидир.

**Исбот.**  $\forall M \in E \setminus \pi$  нукта учун  $MM = \{M\}$  бўлганидан  $MM \cap \pi = \emptyset$ , яъни  $MS_\pi M$  бўлади. Агар  $MS_\pi N$  бўлса, у ҳолда  $MN \cap \pi = \emptyset \Rightarrow NM \cap \pi = \emptyset \Rightarrow NS_\pi M$ .

Энди факат транзитивлик аксиомаларини текшираемиз:  $MS_\pi N$  ва  $NS_\pi O$  бўлсин.  $M, N, O$  нукталардан ўтувчи  $\pi_1$  текислик мавжуд.  $\pi$  ва  $\pi_1$  текисликлар параллел, яъни  $\pi \cap \pi_1 = \emptyset$  бўлса, у ҳолда  $MO \subset \pi_1$  бўлгани туфайли  $\pi \cap MO = \emptyset$ . Демак,  $MS_\pi O$  бўлади.

Энди  $\pi$  ва  $\pi_1$  текисликлар  $\pi_1$  текисликни  $\pi_1^-$  ва  $\pi_1^+$  яримтекисликларга ажратувчи  $l$  тўғри чизик бўйича кесишган бўлсин.  $M$  ва  $N$  нукталар бу ярим текисликларнинг бирида ётади, чунки акс ҳолда  $MN$  кесма  $l$  тўғри

чизик билан кесишиб боз устига  $\pi \supset l$  текислик билан ҳам кесишган бўлар эди. Худди шундай  $N$  ва  $O$  нуқталар ҳам битта ярим текисликда ётади. Унда  $M, N, O$  учта нуқталарнинг ҳаммаси  $N$  нуқта ётган ярим текисликда ётади ва демак,  $MO \cap l = \emptyset$  бўлиб,

$$MO \cap \pi = (MO \subset \pi_1 \text{ эканидан}) = (MO \cap \pi_1) \cap \pi = MO \cap (\pi_1 \cap \pi) = MO \cap l = \emptyset$$

бўлади, яъни  $MO \cap \pi = \emptyset$  бўлиб,  $MS_\pi O$  бўлади.

3.4-жумла исботланди.

**3.5-жумла.**  $S_\pi$  муносабатнинг иккита эквивалентлик синфи мавжуд.

**Исбот.** Ихтиёрий  $M \in E \setminus \pi$  ва  $O \in \pi$  нуқталарни оламиз.  $M$  ва  $O$  нуқталар орқали  $m$  тўғри чизикни ўтказамиз.  $m$  тўғри чизикда, 2.9-жумлага мувофиқ,  $OM \rightarrow$  нурга тегишли бўлмаган  $N$  нуқта мавжуд. Шу билан бирга  $O$  нуқта  $MN$  кесманинг ички нуқтаси бўлиб,  $M$  ва  $N$  нуқталар эса эквивалент эмасдир. Энди ихтиёрий учинчи  $P \in E \setminus \pi$  нуқтанинг ёки  $M$  нуқтага, ёки  $N$  нуқтага эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик,  $P$  ва  $M$  нуқталар эквивалент бўлмасин. Яъни,  $MP \cap \pi \neq \emptyset$ . Аммо  $M \in E \setminus \pi$  ва  $P \in E \setminus \pi$  бўлганидан  $(MP) \cap \pi \neq \emptyset$  бўлади. Унда  $\pi$  текислик  $(MN)$  ва  $(NP)$  интервалларни кесиб,  $(NP)$  интервални кесмайди, яъни  $\pi \cap (NP) = \emptyset$ . Чунки, учбурчакнинг учларидан ўтмаган текислик учбурчак томонларидан бирини кесиб ўтса, у ҳолда қолган икки томондан фақат биттасини кесади. Аммо,  $N \in E \setminus \pi$  ва  $P \in E \setminus \pi$  бўлганидан  $MP \cap \pi = \emptyset$  бўлади, яъни  $PS_\pi N$ .

3.5-жумла исботланди.

$S_\pi$  муносабатнинг эквивалент синфларини  $E$  фазони  $\pi$  текислик билан бўлингандаги ярим фазолар ёки  $\pi$  текислик билан чегараланган ярим фазолар деб атаймиз. Ярим фазо, ярим текислик, ярим тўғри яизикнинг таърифидан қуйидаги иккита тасдиқ бевосита келиб чиқади.

**3.6-жумла.**  $\pi_1$  ва  $\pi_2 - l$  тўғри чизик бўйича кесишувчи текисликлар,  $E^-, E^+ - \pi_1$  текислик билан чегараланган ярим фазолар бўлсин. Унда

$E^- \cap \pi_2$  ва  $E^+ \cap \pi_2$  тўпламлар  $l$  тўғри чизик билан чегараланган ярим текисликлардир.

**3.7-жумла.**  $\pi$  текислик  $E$  фазони  $E^-$ ,  $E^+$  ярим фазоларга ажратсин ва  $l$  тўғри чизик  $\pi$  текислик билан  $O$  нуқтада кесишсин. Унда  $E^- \cap l$  ва  $E^+ \cap l$  тўпламлар  $l$  тўғри чизик  $O$  нуқта билан бўлингандagi ярим тўғри чизиклардир.

## 4§. ВЕКТОР ТАЪРИФИ

$M$  нукта боши,  $N$  нукта охири деб эълон қилинган  $MN$  йўналган кесмани боши  $M$  нуктада ва охири  $N$  нуктада бўлган  $\vec{MN}$  вектор деб аталади.  $(M, N)$  тартибланган нукталар жуфтлигини ҳам  $\vec{MN}$  вектор деб аташ мумкин.

$MN$  кесманинг  $|MN|$  узунлигини, шунингдек  $\vec{MN}$  векторнинг  $|\vec{MN}|$  узунлиги деб аталади. Узунлиги нолга тенг бўлган вектор нол вектор деб аталади.

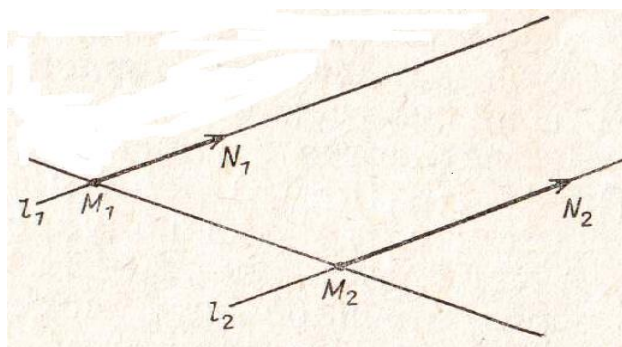
Агар  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурлар бир хил йўналган бўлса, у ҳолда  $\vec{M_1N_1} \rightarrow$  ва  $\vec{M_2N_2} \rightarrow$  нолмас векторлар бир хил йўналган векторлар деб аталади.  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурларнинг бир хил йўналган бўлиши эса ўз навбатида қуйидагиларни англатади. Бунда ё:

1)  $M_1N_1$  ва  $M_2N_2$  кесмалар битта тўғри чизикда ётади ва  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурлар нур буйича кесишади **(1-расм)**.



**1-расм.**

2)  $M_1N_1$  ва  $M_2N_2$  кесмалар  $l_1$  ва  $l_2$  параллел тўғри чизикларда ётади ва  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурлар эса  $l_1$  ва  $l_2$  параллел тўғри чизиклар орқали ўтувчи текисликда  $M_1M_2$  тўғри чизикнинг бир томонида ётади **(2-расм)**.



2-расм.

**4.1-эслатма.** 3.3-жумладан  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурлар  $M_1M_2$  тўғри чизиқнинг бир томонида ётади, фақат ва фақат ва ҳолда, қачонки  $N_1^1 \in M_1N_1 \rightarrow$  ва  $N_2^1 \in M_2N_2 \rightarrow$  қандайдир нуқталар жуфтлиги учун  $N_1^1N_2^1$  кесма  $M_1M_2$  тўғри чизиқ билан кесишмаса, деган тасдиқ келиб чиқади.

Агар икки шарт:

а)  $\left| \vec{M_1N_1} \right| = \left| \vec{M_2N_2} \right|$  ;

ва  $\left( \left| \vec{M_1N_1} \right| \neq 0 \text{ бўлган ҳолда} \right)$

б)  $\vec{M_1N_1}$  ва  $\vec{M_2N_2}$  бир хил йўналган;

бажарилса, у ҳолда  $\vec{M_1N_1}$  ва  $\vec{M_2N_2}$  векторлар тенг деб аталади ва  $\vec{M_1N_1} = \vec{M_2N_2}$  каби ёзилади.

**4.2-жумла.** Ихтиёрий  $\vec{MN}$  вектор учун ва ихтиёрий  $M_1$  нуқта учун шундай ягона  $N_1$  нуқта мавжудки, бунда  $\vec{MN} = \vec{M_1N_1}$  бўлади.

**Исбот.**  $M_1$  нуқта  $MN$  тўғри чизиқда ётмаган ҳолни кўриб чиқайлик. Унда  $N_1$  нуқта  $M_1$  нуқта орқали ўтувчи ва  $MN$  тўғри чизиққа параллел бўлган  $l$  тўғри чизиқда ётиши керак. Шундай  $l$  тўғри чизиқ мавжуд ва Евклиднинг V постулатига кўра ягонадир.

$M, N, M_1$  нуқталар орқали ўтувчи  $\pi$  текисликни қараймиз.  $MM_1$  тўғри чизик  $\pi$  текисликни иккита  $\pi^-$  ва  $\pi^+$  ярим текисликларга ажратади. Фараз қилайлик,  $N$  нуқта  $\pi^+$  ярим текисликда ётсин. Унда  $N_1$  нуқта ҳам  $\pi^+$  ярим текисликда ётиши керак. Демак,  $N_1$  нуқта  $l \cap \pi^+$  тўпламга тегишли бўлиши керак, яъни 3.3-жумлага мувофиқ, бошланғич нуқтаси  $M_1$  бўлган ярим тўғри чизикка тегишлидир. Аммо, 2.11-жумлага мувофиқ, бу ярим тўғри чизикда  $M_1$  нуқтадан  $d = \left| \overrightarrow{MN} \right|$  масофада жойлашган фақат битта ягона  $N_1$  нуқта мавжуд.

Энди  $M_1$  нуқта  $MN$  тўғри чизикда ётган бўлсин. Боши  $M_1$  нуқтада бўлган  $MN \rightarrow$  нур билан нур бўйича кесишувчи нурни оламиз. Аммо яна 2.11-жумлага мувофиқ, бу нурнинг ярим тўғри чизигида  $M_1$  нуқтадан  $d = \left| \overrightarrow{MN} \right|$  масофада жойлашган фақат битта ягона  $N_1$  нуқта мавжуд.

Энди  $\overrightarrow{MN}$  нол вектор бўлса, у ҳолда унинг узунлиги  $\left| \overrightarrow{MN} \right| = 0$ , яъни  $M$  нуқта  $N$  нуқта билан устма-уст тушади. Демак, бу ҳолда  $N_1$  нуқта сифатида  $M_1$  нуқтанинг ўзини оламиз. 4.2-жумла исботланди.

**4.3-жумла.** Барча нурлар тўпламида бир хил йўналганлик муносабати эквивалентлик муносати бўлади.

**Исбот.** Нурларнинг бир хил йўналганлик муносабатини  $\sim$  символ билан белгилаймиз. Унда  $(MN \rightarrow) \cap (MN \rightarrow) = MN \rightarrow$  бўлганидан  $MN \rightarrow \sim MN \rightarrow$ , яъни бир хил йўналганлик муносабати рефлексивдир.

$M_1N_1 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$  бўлса, ёки:

1)  $M_1N_1$  ва  $M_2N_2$  кесмалар битта тўғри чизикда ётади ва  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурлар нур бўйича кесишади, ёки

2)  $M_1N_1$  ва  $M_2N_2$  кесмалар  $l_1$  ва  $l_2$  параллел тўғри чизикларда ётади ва  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурлар эса  $l_1$  ва  $l_2$  параллел тўғри чизиклар орқали ўтувчи текисликда  $M_1M_2$  тўғри чизикнинг бир томонида ётади;

ёки:

1)  $M_2N_2$  ва  $M_1N_1$  кесмалар битта тўғри чизикда ётади ва  $M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_1N_1 \rightarrow$  нурлар нур буйича кесишади, ёки

2)  $M_2N_2$  ва  $M_1N_1$  кесмалар  $l_2$  ва  $l_1$  параллел тўғри чизикларда ётади ва  $M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_1N_1 \rightarrow$  нурлар эса  $l_2$  ва  $l_1$  параллел тўғри чизиклар орқали ўтувчи текисликда  $M_2M_1$  тўғри чизикнинг бир томонида ётади, яъни  $M_2N_2 \rightarrow \sim M_1N_1 \rightarrow$  ва бир хил йўналганлик муносабати симметрикдир.

Энди фақат транзитивлик аксиомасини текшириш қолди.  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$  бўлсин.  $l_i$  орқали  $M_iN_i \rightarrow$  нур ётган тўғри чизикни белгилаймиз, бу ерда  $i=1,2,3$ . Аввал  $l_1, l_2, l_3$  тўғри чизиклар битта текисликда ётмаган бўлсин деб фараз қиламиз.  $M_1, M_2, M_3$  нуқталар орқали  $\pi$  текисликни ўтказамиз. У  $E$  фазони иккита  $E^-$  ва  $E^+$  ярим фазоларга ажратади. Нурларнинг бир хил йўналганлик таърифига мувофиқ,  $l_1, l_2, l_3$  тўғри чизиклар жуфт-жуфт бўлиб (ихтиёрий икkitаси) параллелдир.

$$M_1N_1 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow \Rightarrow l_1 \parallel l_2, \quad M_2N_2 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow \Rightarrow l_2 \parallel l_3 \quad \text{ва} \\ l_1 \parallel l_2 \wedge l_2 \parallel l_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3.$$

$l_1$  ва  $l_2$  тўғри чизиклар орқали ўтувчи текисликни  $\pi_{12}$  орқали белгилаймиз.  $N_1N_2$  кесма  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурларнинг бир хил йўналганлиги туфайли  $M_1$  ва  $M_2$  нуқталардан ўтувчи  $l_{12} = \pi \cap \pi_{12}$  тўғри чизикни кесмайди. Демак,  $N_1N_2$  кесма  $\pi$  текислик билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$N_1N_2 \cap \pi = (N_1N_2 \cap \pi_{12}) \cap \pi = N_1N_2 \cap (\pi_{12} \cap \pi) = N_1N_2 \cap l_{12} = \emptyset.$$

Шундай қилиб,  $N_1N_2$  кесма ярим фазоларнинг бирида, масалан  $E^+$  да ётади. Худди шундай  $N_2N_3$  кесма,  $M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_3N_3 \rightarrow$  нурларнинг бир хил йўналганлиги туфайли  $M_2$  ва  $M_3$  нуқталардан ўтувчи  $l_{23} = \pi \cap \pi_{23}$  тўғри чизикни кесмайди. Демак,  $N_2N_3$  кесма  $\pi$  текислик билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам,  $N_2N_3 \cap \pi = (N_2N_3 \cap \pi_{23}) \cap \pi = N_2N_3 \cap (\pi_{23} \cap \pi) = N_2N_3 \cap l_{23} = \emptyset$ .

Шундай қилиб  $N_2N_3$  кесма  $E^-$  ва  $E^+$  ярим фазоларнинг бирида ётади. Аммо,  $N_1N_3 \subset E^+$  бўлганидан  $N_1, N_2 \in E^+$  бўлади. Агар  $N_2N_3 \subset E^-$  бўлса, у ҳолда  $N_2, N_3 \in E^-$  бўлади. Демак,  $N_2 \in E^+$  ва  $N_2 \in E^-$  бўлиб,  $E^+ \cap E^- = \emptyset$  бўлади. Зиддият ҳосил бўлди. Шундай қилиб,  $N_2N_3 \subset E^+$  ёки  $N_2, N_3 \in E^+$  бўлади.  $N_1, N_2 \in E^+$  ва  $N_2, N_3 \in E^+ \Rightarrow N_1, N_3 \in E^+ \Rightarrow N_1N_3 \in E^+$ . Демак,  $N_1N_3 \subset E^+$ .

Бу ердан  $l_1$  ва  $l_3$  тўғри чизикларни ўз ичига оловчи текисликни  $\pi_{13}$  орқали белгилаб,  $N_1N_3 \subset E^+ \cap \pi_{13}$  ҳосил қиламиз.

Аммо  $E^+ \cap \pi_{13}$  тўплам 3.6-жумлага мувофиқ  $M_1$  ва  $M_3$  нуқталар орқали ўтувчи  $l_{13}$  тўғри чизик билан чегараланган  $\pi_{13}^+$  ярим текислик бўлади. Шундай қилиб,  $N_1N_3$  кесма  $l_{13}$  тўғри чизик билан кесишмайди, бундан 4.1-натижага кўра  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_3N_3 \rightarrow$  нурларнинг бир хил йўналганлигини ҳосил қиламиз.

Энди турли  $l_1, l_2, l_3$  тўғри чизиклар битта  $\pi$  текисликда ётсин.  $\pi$  текисликка тегишли бўлмаган  $M$  нуқтани оламиз. 4.2-жумлага мувофиқ, шундай  $N$  нуқта мавжудки, бунда  $MN \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$ . Унда  $M_1N_1 \rightarrow, M_2N_2 \rightarrow, MN \rightarrow$  ва  $MN \rightarrow, M_2N_2 \rightarrow, M_3N_3 \rightarrow$  учлик нурлар юқорида қаралган ҳолни қаноатлантиради. Демак,  $M_1N_1 \rightarrow \sim MN \rightarrow, MN \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow, M_1N_1 \rightarrow, MN \rightarrow, M_3N_3 \rightarrow$  нурлар ҳам бир текисликда ётмайди. Демак,  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .

Энди  $l_2 = l_3$  бўлсин.  $M_2N_2 \rightarrow, M_3N_3 \rightarrow$  нурлардан бири иккинчисини ўз ичига олади. Фараз қилайлик,  $M_2N_2 \rightarrow \supset M_3N_3 \rightarrow$  бўлсин.

$M_1$  ва  $M_2$  нуқталар  $\pi$  текисликни  $\pi_{12}^-$  ва  $\pi_{12}^+$  ярим текисликларга ажратувчи  $l_{12}$  тўғри чизикка тегишли бўлсин. Худди шундай,  $M_1$  ва  $M_3$  нуқталар  $\pi$  текисликни  $\pi_{13}^-$  ва  $\pi_{13}^+$  ярим текисликларга ажратувчи  $l_{13}$  чизикка тегишли бўлсин. Бунда  $N_1 \in \pi_{13}^+$  деб фараз қиламиз.  $M_2M_3$  кесмада  $M$  ички нуқтани орқали  $l_{12}$  тўғри чизикка параллел қилиб,  $l$  тўғри чизикни ўтказамиз.  $(M_1N_1 \rightarrow)$  ва  $(M_2N_2 \rightarrow)$  ярим тўғри чизиклар  $\pi_{12}^+$  ярим текисликда ётганидан  $l$  тўғри чизик  $(M_1N_1 \rightarrow)$  ярим тўғри чизикни бирорта  $N$  нуқтада кесади.  $l$  тўғри чизик  $M_1M_2M_3$  учбурчакнинг  $M_2M_3$  томонини кесиб, Паш аксиомасига мувофиқ, унинг иккинчи томонини ҳам кесиши керак.  $l$  ва  $l_{12}$  ларнинг параллеллиги туфайли, бу томон фақат  $M_1M_3$  бўлиши мумкин. Демак,  $l$  тўғри чизик  $M_1M_3$  кесмани кесади.  $M_1M_3$  кесма  $l_1$  ва  $l_3$  тўғри чизиклар орасида ётганидан, у ҳолда  $l$  тўғри чизикнинг фақат шундай қисми билан  $l_1$  ва  $l_3$  тўғри чизиклар орасидаги қисми, яъни  $MN$  кесма билан кесишиши мумкин. Демак,  $MN$  кесма  $l_{13}$  тўғри чизик билан кесишади. Шунинг учун  $M$  ва  $N$  нуқталар бу тўғри чизик билан чегараланган ҳар хил ярим текисликларда ётади. Аммо,  $N$  нуқта  $(M_1N_1 \rightarrow)$  ярим тўғри чизикка тегишли. Биз  $N_1 \in \pi_{13}^+$  деб, фараз қилган эдик. Демак,  $N \in \pi_{13}^+$  ва  $M \in \pi_{13}^-$ . Унда  $(M_3MM_2)$  дан  $M_2 \in \pi_{13}^-$  бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун  $(M_2M_3N_3)$  дан  $N_3 \in \pi_{13}^+$  ни ҳосил қиламиз. Демак,  $N$  ва  $N_3$  нуқталар битта  $\pi_{13}^+$  ярим текисликка тегишлидир ва  $l_{13} \cap NN_3 = \emptyset$ . Демак,  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .

Шундай қилиб, бир хил йуналган нурларни камайтириб, яна бир хил йуналган нурларни ҳосил қиламиз. Бу ердан тўлдирувчи нурларга ўтиб, яъни бир хил йуналган нурларни орттириб яна бир хил йуналган нурларга

келамиз. Демак,  $l_2 = l_3$  ҳол ва унга ўхшаш  $l_1 = l_2$  ҳол тўлиқ ҳал қилинди, бунинг тўлиқ тафсилоти қуйидагичадир.

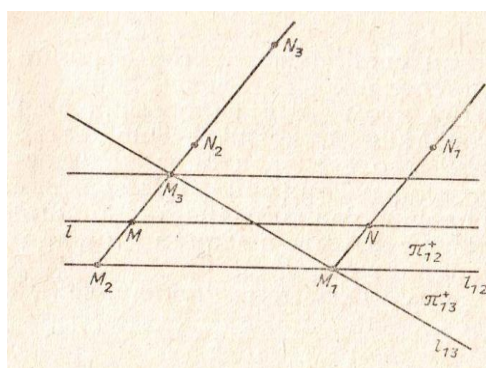
Энди  $M_3N_3 \rightarrow \supset M_2N_2 \rightarrow$  бўлсин.  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .

Унда  $M_3N_3^1 \rightarrow \subset M_2N_2^1 \rightarrow$ ,  $M_1N_1^1 \rightarrow \sim M_2N_2^1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2^1 \rightarrow \sim M_3N_3^1 \rightarrow$ .

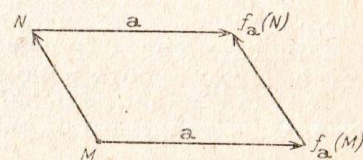
Унда юқоридаги исботга кўра,  $M_1N_1' \rightarrow \sim M_3N_3' \rightarrow$ . Бундан эса  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$  бўлиши келиб чиқади.

Агар  $l_1 = l_2$  бўлса,  $M_1N_1 \rightarrow \supset M_2N_2 \rightarrow \Rightarrow M_2N_2 \rightarrow \supset M_1N_1 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow \Rightarrow M_2N_2 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .

Унда  $M_3N_3 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$ ,  $M_2N_2 \rightarrow \sim M_1N_1 \rightarrow$ . Юқоридаги исботга кўра,  $M_3N_3 \rightarrow \sim M_1N_1 \rightarrow$ , бундан эса,  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .



2-расм.



3-расм.

Энди  $l_1 = l_3$  бўлсин. Фараз қилайлик,  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_3N_3 \rightarrow$  нурлар ҳар хил томонларга йўналган бўлсин.

$N_3^1 \in l_3$  нуқтани шундай танлаймизки, бунда  $M_3$  нуқта  $N_3$  билан  $N_3^1$  нуқта орасида ётсин. Унда  $M_3N_3^1 \rightarrow$  ва  $M_1N_1 \rightarrow$  нурлар бир хил йўналгандир. Бу эса  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурларнинг бир хил йўналганлиги билан биргаликда ҳал қилинган ҳолга мувофиқ,  $M_3N_3^1 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow$  нурларнинг бир хил йўналган бўлишини беради, бу эса

$M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_3N_3 \rightarrow$  нурларнинг бир хил йўналган бўлишига зиддир. Демак, фараз нотўғри, яъни  $M_1N_1 \rightarrow$  ва  $M_3N_3 \rightarrow$  нурлар бир хил йўналгандир.

Ниҳоят, учта нурнинг ҳаммаси битта тўғри чизиқда ётган ҳолни, ҳал этилган иккита тўғри чизиқдаги ҳол, шунингдек, битта текисликда ётган учта бир хил тўғри чизиқли ҳолга фазога чиққан ҳолга келтириш мумкин. Аммо, яна ҳам соддаси текисликка чиқмасдан 2.10-жумладан фойдаланишдир.  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_2N_2 \rightarrow$  бўлса, у ҳолда 2.10-жумлага мувофиқ улардан бири иккинчисини ўз ичига олади.

Агар  $M_1N_1 \rightarrow \subset M_2N_2 \rightarrow$  бўлса, у ҳолда  $M_2N_2 \rightarrow \subset M_3N_3 \rightarrow$  ёки  $M_2N_2 \rightarrow \supset M_3N_3 \rightarrow$  бўлади.  $M_1N_1 \rightarrow \subset M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow \subset M_3N_3 \rightarrow$  дан  $M_1N_1 \rightarrow \subset M_3N_3 \rightarrow$  бўлиши келиб чиқади, яъни  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .

Агар  $M_1N_1 \rightarrow \subset M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow \supset M_3N_3 \rightarrow$  бўлса,  $M_1N_1^1 \rightarrow \supset M_2N_2^1 \rightarrow$  ва

$$M_2N_2^1 \rightarrow \subset M_3N_3^1 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1^1 \rightarrow \cap M_3N_3^1 \rightarrow \supset M_2N_2^1 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1^1 \rightarrow \sim M_3N_3^1 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow.$$

Агар  $M_1N_1 \rightarrow \supset M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow \supset M_3N_3 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1 \rightarrow \supset M_3N_3 \rightarrow$ , яъни  $M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .

Агар  $M_1N_1 \rightarrow \supset M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_2N_2 \rightarrow \subset M_3N_3 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1 \rightarrow \supset M_2N_2 \rightarrow$  ва  $M_3N_3 \rightarrow \supset M_2N_2 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1 \rightarrow \cap M_3N_3 \rightarrow \supset M_2N_2 \rightarrow \Rightarrow M_1N_1 \rightarrow \sim M_3N_3 \rightarrow$ .

4.3 жумла тўлиқ исботланди. Ундан қуйидаги жумла бевосита келиб чиқади.

**4.4 жумла.** Барча векторлар тўпламида векторларнинг тенглик муносабати эквивалентлик муносабати бўлади.

Тенг векторлар синфини эркин векторлар ёки оддийгина вектор деб аталади. Бундан буён “эркин” сўзини одатда тушириб қолдирамиз ва  $\overrightarrow{MN}$  вектор деганда,  $MN$  йўналган кесмани ёки  $\overrightarrow{MN}$  вектор билан

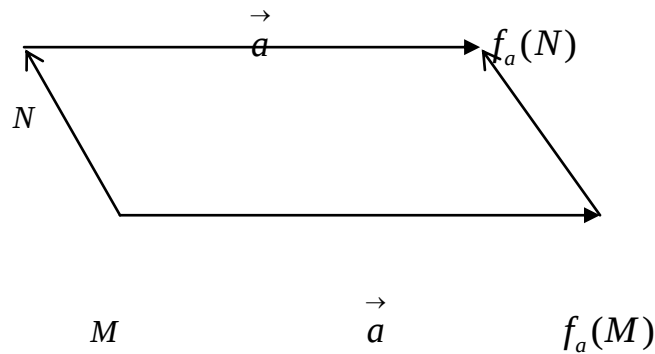
аниқланган  $\vec{a}$  эркин векторни, яъни  $\vec{MN}$  векторга тенг бўлган барча векторлардан ташкил топган эквивалентлик синфни тушунамиз. Шунинг учун  $\vec{MN} \in \vec{a}$  аниқ тасдиқ билан бирга ноформаль  $\vec{MN} = \vec{a}$  тенглик ҳам қўлланилади. Узунлиги нолга тенг бўлган векторлар, нол векторлар деб аталувчи эквивалент синфни ҳосил қилади ва  $\vec{0}$  каби белгиланади. Ихтиёрий  $M$  нукта учун  $\vec{MM} = \vec{0}$  га эга бўламиз. “ $\vec{a}$  векторни  $M$  нуктадан қўйиш” ёки “ $\vec{a}$  векторни  $M$  нуктага қўйиш” иборалари “4.2 жумлага асосан мавжуд  $\vec{MN} = \vec{a}$  векторни олиш”ни англатади.

**4.5 эслатма.** Биз эркин векторнинг фазодаги таърифини бердик. Шундай таърифни текислик ёки ҳаттоки тўғри чизик чегарасида қолиб ҳам бериш мумкин. Шу билан бирга, 4.4 жумладан “фазодаги барча векторлар тўплами”ни ёки “текисликдаги барча векторлар тўплами”га ёки “тўғри чизикдаги барча векторлар тўплами”га алмаштирилгандаги модификацияси келиб чиқади. Бу ерда ҳам текисликдаги бир хил йўналган векторларнинг транзитивлигини текширишда фазога чиқишдан саросимага тушмаслик керак. Фақат 1.3 жумлани эслаш керак.

### Вектор параллел кўчириш сифатида

Ихтиёрий  $\vec{a}$  векторни оламиз.  $M$  нуктага  $M$  нуктадан қўйилган  $\vec{a}$  векторнинг охирини мос қўювчи  $f_a: E \rightarrow E$  акс эттириш, бу ерда  $N$  4.2-жумлага мувофиқ ягона,  $f_a(M) = N$  ни аниқлаймиз.

Бу акс эттириш қуйидаги асосий хоссага эга: ихтиёрий  $M$  ва  $N$  нукталар учун  $\vec{MN} = \overrightarrow{f_a(M)f_a(N)}$ .



Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик,  $M, N$  ва  $f_a(M)$  нуқталар бир тўғри чизикда ётмасин. Унда  $MNf_a(N)f_a(M)$  тўртбурчакда  $Mf_a(M)$  ва  $Nf_a(N)$  қарама-қарши томонлар тенг ва параллелдир. Демак, бу тўртбурчак параллелограммдир. Унда  $N$  ва  $f_a(N)$  нуқталар  $Mf_a(M)$  тўғри чизикнинг бир томонда ётишини эътиборга олиб,  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f_a(M)f_a(N)}$  зарурий тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди  $M, N$  ва  $f_a(M)$  нуқталар бир тўғри чизикда ётган ҳолни қарайлик. Бу тўғри чизикда ётмаган бирорта  $P$  нуқтани оламиз. Олдинги ҳолга мувофиқ

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{f_a(M)f_a(P)} \Rightarrow |MP| = |M^1P^1| \quad \text{ва}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{f_a(P)f_a(N)} \Rightarrow |PN| = |P^1N^1|.$$

$\angle NMP = \angle N^1M^1P^1$  ва  $\angle MNP = \angle M^1N^1P^1$ . Чунки, икки параллел тўғри чизикни учинчи тўғри чизик билан кесишганда мос бурчаклар тенг. Демак,  $\angle MPN = \angle M^1P^1N^1$ , бундан  $\triangle MPN = \triangle M^1P^1N^1$  келиб чиқади. Бундан эса  $MN = M^1N^1$  бундан ташқари  $MN \rightarrow \sim M^1N^1 \rightarrow$ . Демак,  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M^1N^1}$  ёки  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f_a(M)f_a(N)}$ .

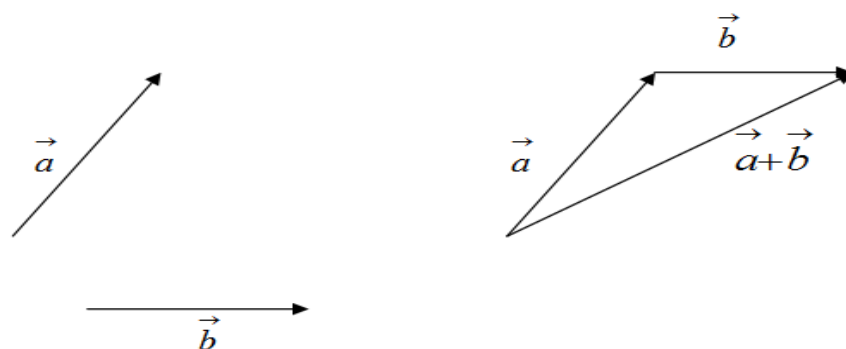
Энди, аксинча, ихтиёрий  $M$  ва  $N$  нуқталар учун  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$  хоссага эга бўлган  $f: E \rightarrow E$  акслантириш берилган бўлсин. Унда шундай ягона  $\overrightarrow{a}$  вектор мавжудки, бунда  $f = f_a$ . Ҳақиқатан ҳам,  $M$  ва  $f(M)$

нуқталарнинг тартибланган жуфтлиги ягона  $\vec{a} = \overrightarrow{Mf(M)}$  векторни аниқлашидан шундай векторнинг ягоналиги келиб чиқади.

Мавжудлиги.  $O$  нуқтани танлаймиз ва  $\vec{a} = \overrightarrow{Of(O)}$  деб, фараз қиламиз.  $f = f_a$  тенгликнинг бажарилиши учун ихтиёрий  $M$  нуқта учун  $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Of(O)}$  тенгликнинг бажарилишини текшириш керак. Бу  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$  тенгликка, шунингдек юқорида исботланган  $\overrightarrow{Mf_a(M)} = \overrightarrow{Nf_a(N)}$  тенгликдан келтирибчиқарилган  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f_a(M)f_a(N)}$  тенгликка таяниб ҳосил қилинади.  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(O)f(M)} \Rightarrow \overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{Mf(M)}$  ва  $\vec{a} = \overrightarrow{Of(O)}$  бўлганидан ихтиёрий  $M$  нуқта учун  $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{a}$ , яъни  $f : E \rightarrow E$  шундай акс эттиришки, бунда ихтиёрий  $M \in E$  нуқта учун  $f(M) = N$  бўлса  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{a}$ . Демак, векторни бу векторга параллел кўчириш билан айнан бир нарсга деб қараш мумкин.

## 5§. ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ ВА ВЕКТОРЛАРНИ СОНГА КЎПАЙТИРИШ

$\vec{a}$  ва  $\vec{b}$  векторларнинг йиғиндисини қуйидагича аниқлаймиз.  $\vec{a}$  векторни қандайдир  $M$  нуқтага қўямиз.  $N$  бу векторнинг охири бўлсин, яъни  $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ . Кейин  $\vec{b}$  векторни  $N$  нуқтага қўямиз.  $P$  бу векторнинг охири бўлсин, яъни  $\vec{b} = \overrightarrow{NP}$ . Энди  $\vec{a} + \vec{b}$  ни  $\overrightarrow{MP}$  векторни ўзининг вақили сифатида ўз ичига олган эркин векторга тенг деб фараз қиламиз, яъни  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$  (5-расм).



5-расм

Бу таърифнинг тўғрилигини, яъни  $M$  нуқтанинг танланишига натижанинг боғлиқ эмаслигини текшираемиз.  $\overrightarrow{M_1N_1} \in \vec{a}$  ва  $\overrightarrow{N_1P_1} \in \vec{b}$  учун  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M_1P_1}$  бўлишини кўрсатамиз.  $\vec{c} = \overrightarrow{MM_1}$  векторга мос  $f: E \rightarrow E$  параллел кўчиришни қараймиз. У ҳолда,  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$ . Аммо,  $f(M) = M_1$  ва  $\vec{c} = \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$ . Демак,  $f(N) = N_1$ . Худди шундай,  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{f(N)f(P)}$  ва  $\vec{c} = \overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{PP_1}$ . Демак,  $f(P) = P_1$ . Шундай қилиб,  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{f(M)f(P)} = \overrightarrow{M_1P_1}$ . Мана шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

$\vec{a}$  векторнинг  $\alpha$  ҳақиқий сонга кўпайтмасини қуйидагича аниқлаймиз.  $\vec{MN} = \vec{a}$  векторни оламиз ва  $\alpha \vec{a}$  вектор  $\vec{MP}$  векторни ўз ичига олувчи ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи эркин векторга тенг бўлади:

а)  $\vec{MP}$  вектор  $\vec{MN}$  тўғри чизикда ётади;

б) агар  $\alpha > 0$  бўлса,  $\vec{MP}$  вектор  $\vec{MN}$  вектор билан бир хил йўналган, агар  $\alpha < 0$  бўлса, бошқа томонга йўналган бўлади;

в)  $|\vec{MP}| = |\alpha| |\vec{MN}|$ .

$\vec{MP}$  вектор бу шартлар орқали бир қийматли аниқланишини кўриш осон. Векторнинг сонга кўпайтириш амалининг тўғрилигини текшириш векторларни қўшиш амали учун қандай текширилган бўлса, худди шундай амалга оширилади.

**5.1 теорема.** Векторларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (қўшишнинг коммутативлиги);

2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (қўшишнинг ассоциативлиги);

3) шундай  $\vec{0}$  мавжудки (нол вектор деб аталувчи), бунда  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ;

4) ҳар қандай  $\vec{a}$  вектор учун шундай  $-\vec{a}$  вектор мавжудки, ( $\vec{a}$  векторга карама-қарши вектор деб аталувчи), бунда  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$  бўлади;

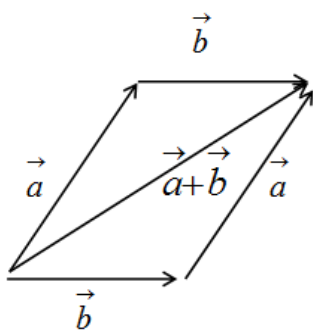
5) ихтиёрий  $\alpha, \beta$  сонлар ва ихтиёрий  $\vec{a}$  вектор учун  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ ;

6) ихтиёрий  $\alpha, \beta$  сонлар ва ихтиёрий  $\vec{a}$  вектор учун  
 $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$ ;

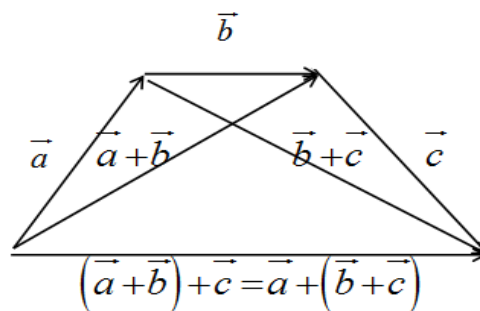
7) ихтиёрий  $\alpha$  сон учун ва ихтиёрий  $\vec{a}$  ва  $\vec{b}$  векторлар учун  
 $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ ;

8) ихтиёрий  $\vec{a}$  вектор учун  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

**Исбот.** Қўшишнинг коммутативлиги ва ассоциативлиги 6- ва 7-расмларда иллюстрация қилинган.



6-расм.



7-расм.

$$1) \left. \begin{array}{l} \vec{AC} \in \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{AC} \in \vec{b} + \vec{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \vec{AD} \in (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \\ \vec{AD} \in \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

1) ва 2) хоссалар исботланди.

А нуктага  $\vec{a}$  векторни қўямиз, яъни  $\vec{AB} \in \vec{a}$ . В нуктага  $\vec{\theta}$  векторни қўямиз, яъни  $\vec{BV} \in \vec{\theta}$ , унда  $\vec{AB} + \vec{BV} = \vec{AV} \in \vec{a} + \vec{\theta}$  бўлиб,  $\vec{AB} \in \vec{a} + \vec{\theta}$ ,  $\vec{AB} \in \vec{a} \Rightarrow \vec{a} + \vec{\theta} = \vec{a}$ .

Демак, 3) хосса ҳам исботланди.

Агар  $\vec{MN} \in \vec{a}$  бўлса,  $\vec{NM} \in -\vec{a}$  бўлади. Унда  $\vec{a} + (-\vec{a}) \in \vec{MN} + \vec{NM} = \vec{MM} \in \vec{\theta}$ . Демак,  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{\theta}$ . 4) хосса ҳам исботланди.

Энди 5) хоссани исботлаймиз:

а)  $\alpha\beta > 0$  ва б)  $\alpha\beta < 0$  иккита ҳолларни қараймиз. Фараз қилайлик,  $\alpha\beta > 0$  бўлсин. Бирорта А нуктадан  $\alpha\vec{a}$  векторни қўямиз, яъни  $\vec{AB} \in \alpha\vec{a}$ . В нуктадан эса  $\beta\vec{a}$  векторни қўямиз, яъни  $\vec{BC} \in \beta\vec{a}$ . Бундан  $|\vec{AB}| = |\alpha||\vec{a}|$ ,  $|\vec{BC}| = |\beta||\vec{a}|$ .  $\alpha\beta > 0$  бўлгани учун  $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{AC}$ . Шунинг учун В нукта А ва С нукталар орасида ётади. Демак,  $|\vec{AC}| = |\vec{AB}| + |\vec{BC}|$  ёки  $|\vec{AC}| = |\alpha||\vec{a}| + |\beta||\vec{a}|$ . Аммо  $\alpha$  ва  $\beta$  сонлар бир хил ишорага эга бўлганидан  $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$  бўлади. Шундай қилиб,  $|\vec{AC}| = |\alpha||\vec{a}| + |\beta||\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}| = |\alpha + \beta||\vec{a}|$ .

Агар  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , яъни  $\alpha + \beta > 0$  бўлса,  $\vec{AC} \uparrow\uparrow \vec{a}$  ва агар  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ , яъни  $\alpha + \beta < 0$  бўлса,  $\vec{AC} \uparrow\downarrow \vec{a}$ . Бундан эса,  $\vec{AC} = (\alpha + \beta)\vec{a}$ . Иккинчи томондан  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ . Шундай қилиб,  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ .

б)  $\alpha\beta < 0$  бўлсин. Агар  $\alpha + \beta = 0$  (яъни  $\alpha = -\beta$ ) бўлса, у ҳолда  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$  тенгликнинг чап томони нол вектордир. Бу ҳолда ўнг

томони ҳам нол вектор эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \left(-\left(\alpha\vec{a}\right)\right) = \vec{0}.$$

$\alpha + \beta \neq 0$  ҳолни қараймиз.  $\alpha$  ва  $\beta$  ҳар хил ишорали бўлганидан  $-\alpha$ ,  $\alpha + \beta$  ёки  $-\beta$ ,  $\alpha + \beta$  бир хил ишорага эгадир.

$$\text{Агар } (-\alpha)(\alpha + \beta) > 0 \text{ бўлса, } (-\alpha)\vec{a} + (\alpha + \beta)\vec{a} = ((-\alpha) + (\alpha + \beta))\vec{a} = \beta\vec{a}.$$

$$\text{Агар } (-\beta)(\alpha + \beta) > 0 \text{ бўлса, } (-\beta)\vec{a} + (\alpha + \beta)\vec{a} = ((-\beta) + (\alpha + \beta))\vec{a} = \alpha\vec{a}.$$

Икки ҳолда ҳам  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ .  $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  ёки  $\beta = 0$  бўлган ҳолда тенглик осонгина текширилади.

б) хоссани исботлаш учун  $\alpha(\beta\vec{a})$  ва  $(\alpha\beta)\vec{a}$  векторларнинг узунликлари тенг ва бир хил йўналган бўлишини ўрнатиш керак.

$$1. \left| \alpha(\beta\vec{a}) \right| = |\alpha| |\beta\vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}| = |\alpha\beta| |\vec{a}| = |(\alpha\beta)\vec{a}|. \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0} \text{ деб}$$

фараз қиламиз, акс ҳолда  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$  тенгликнинг иккала томони ҳам  $\vec{0}$  вектордир.

$$1) \alpha > 0 \text{ ва } \beta > 0 \text{ бўлсин. У ҳолда } \alpha\beta > 0 \text{ бўлиб, } \vec{a} \uparrow\uparrow (\alpha\beta)\vec{a} \text{ бўлади.}$$

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \beta\vec{a} \text{ ва } \beta\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha(\beta\vec{a}) \Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \alpha(\beta\vec{a}). \text{ Демак, } \alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow (\alpha\beta)\vec{a}.$$

$$2) \alpha < 0 \text{ ва } \beta > 0 \text{ бўлсин. У ҳолда } \alpha\beta < 0 \text{ бўлиб, } \vec{a} \uparrow\downarrow (\alpha\beta)\vec{a}. \vec{a} \uparrow\uparrow \beta\vec{a} \text{ ва } \beta\vec{a} \uparrow\downarrow \alpha(\beta\vec{a}) \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \alpha(\beta\vec{a}). \text{ Демак, } \alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow (\alpha\beta)\vec{a}.$$

$$3) \alpha > 0 \text{ ва } \beta < 0 \text{ бўлсин. У ҳолда, } \alpha\beta < 0 \text{ бўлиб, } \vec{a} \uparrow\downarrow (\alpha\beta)\vec{a}. \vec{a} \uparrow\downarrow \beta\vec{a} \text{ ва } \beta\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha(\beta\vec{a}) \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \alpha(\beta\vec{a}). \text{ Демак, } \alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow (\alpha\beta)\vec{a}.$$

4)  $\alpha < 0$  ва  $\beta < 0$  бўлсин. У ҳолда  $\alpha\beta > 0$  бўлиб,  $\vec{a} \uparrow\uparrow (\alpha\beta)\vec{a}$ .  $\vec{a} \uparrow\downarrow \beta\vec{a}$  ва  $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \alpha(\beta\vec{a})$ . Шунинг учун,  $\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha(\beta\vec{a})$ . Демак,  $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow (\alpha\beta)\vec{a}$ .

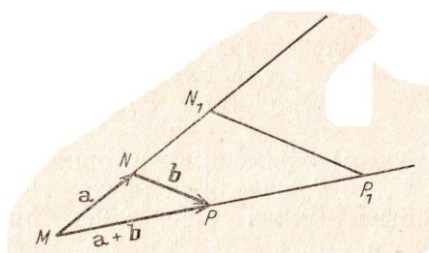
6) хосса тўлиқ исботланди.

8) хоссада  $\vec{a}$  векторни 1 сонига кўпайтирилганда, йўналиши ҳам, узунлиги ҳам ўзгармайди. Демак,  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .

7) хоссани исботлаймиз.  $\vec{a} = \vec{MN}$  бўлсин.  $N$  нуқтадан  $\vec{b} = \vec{NP}$  векторни қўямиз. Унда  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{MP}$  бўлади.  $MN$  тўғри чизиққа  $\vec{MN}_1 = \alpha \vec{a}$  векторни қўямиз ва  $N_1$  нуқта орқали  $NP$  тўғри чизиққа параллел қилиб,  $MP$  тўғри чизиқ билан  $P_1$  нуқтада кесишадиган тўғри чизиқни ўтказамиз (**8-расм**). Умумий  $M$  учга ва  $N$  ва  $N_1$  учларга тенг жуфт бурчакларга эга бўлган  $MNP$  ва  $MN_1P_1$  учбурчаклар ўхшашдир. Демак,

$$\alpha = \frac{|MN_1|}{|MN|} = \frac{|MP_1|}{|MP|} = \frac{|N_1P_1|}{|NP|}.$$

Бундан эса  $\overrightarrow{N_1P_1} = \alpha \vec{b}$  ва  $\overrightarrow{MP_1} = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$  ни ҳосил қиламиз. Натижада ушбу  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{MN_1} + \overrightarrow{N_1P_1} = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$  тенгликка эга бўламиз.



8-расм

5.1 теорема тўлиқ исботланди.

**5.2 эслатма.** Ўхшаш учбурчаклар ҳақидаги теореманинг қатъий исботи бурчак томонларини параллел тўғри чизиқлар билан кесилганда кесмаларнинг пропорционаллиги ҳақидаги теоремага таянади (бизнинг белгилашларда  $\frac{|MN_1|}{|MN|} = \frac{|MP_1|}{|MP|}$ ). Охирги йилларда мактаб геометрия курсида бу теорема исботланмайди. Унинг исботи Фалес теоремасидан осонгина келтирилиб чиқарилади:

“Агар бурчак томонларини кесувчи параллел тўғри чизиқлар бурчак томонларининг бирида тенг кесмалар ажратса, у ҳолда бурчакнинг иккинчи томонида ҳам тенг кесмалар ажратади.”

**5.3 эслатма.** Модификация қилинган (шакли ўзгартирилган) Эвклид аксиоматикасига таяниб биз векторни таърифладик ва 1)–8) хоссаларни текширдик. Бу хоссаларни векторлар фазосининг аксиомалари сифатида олиш мумкин ва бу аксиомалардан келиб чиқиб (аксиомаларга асосланиб) геометрияни қуриш мумкин.

**5.4 таъриф.**  $V$ -элементлари векторлар деб аталган, уларнинг табиати ихтиёрий бўлган бирор тўплам ва  $K$  бирор майдон бўлсин (китобхон ҳозирча бунда  $K$  ни  $R$  барча ҳақиқий сонлар тўплами деб ҳисоблаш мумкин). Фараз қилайлик,  $\vec{a}, \vec{b} \in V$  бўлган ихтиёрий иккита  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлар учун  $\vec{a} + \vec{b}$  символ билан белгиланувчи ҳамда  $\vec{a}$  ва  $\vec{b}$  векторларнинг йиғиндиси деб аталувчи учинчи вектор аниқланган бўлсин. Бундан ташқари, фараз қилайлик, ихтиёрий  $\alpha \in R$  сон учун ва ихтиёрий  $\vec{a} \in V$  вектор учун  $\alpha \vec{a}$  символ билан белгиланувчи ҳамда  $\vec{a}$  векторнинг  $\alpha$  сонга кўпайтмаси деб аталувчи вектор аниқланган бўлсин. Агарда шу билан бирга (5.1 теоремадаги) 1) – 8) хоссалар бажарилса, у ҳолда  $V$  тўплами  $K$  майдон устидаги вектор (ёки чизиқли) фазо деб аталади. 1) – 8) хоссаларни вектор (чизиқли) фазонинг аксиомалари деб аталади.

5.1 теоремани шундай қайта ифодалаш мумкин:

Эвклид фазода барча эркин векторлар тўплами ҳақиқий сонлар майдони устидаги вектор фазони ташкил этади.

Битта элемент нол вектордан ташкил топган  $V$  тўплам ихтиёрий  $K$  майдон устидаги бошқа (содда) вектор фазога мисол бўлади.

Қуйида яна вектор фазонинг баъзи мисоллари билан танишамиз.

**5.5 эслатма.** Фазода йўналган кесмаларни қараб векторларни сонга кўпайтириш амалларини таърифладик. Аммо биз текисликдаги ёки тўғри чизикдаги векторлар билан чегараланиш мумкинлигини юқорида (4.5-эслатма) қайд қилган эдик. Векторларни қўшиш ва векторларни сонга кўпайтириш амаллари берилган текислик (ёки берилган тўғри чизик) чегарасидан ташқарига чиқармайди. Шунингдек, қаралаётган “кичиклаштирилган” векторлар тўпламида бу амаллар учун 1)–8) хоссалар ўринли бўлаверади. Шундай қилиб, тўғри чизикдаги, текисликдаги, фазодаги эркин векторлар тўплами векторларни қўшиш ҳамда векторларни сонга кўпайтириш амаллари билан ҳақиқий сонлар майдони устида вектор фазо ташкил этади. Мос равишда уларни  $Vect(1)$ ,  $Vect(2)$ ,  $Vect(3)$  орқали белгилаймиз.

## 6§. ТҰҒРИ ЧИЗИҚДА ВЕКТОРЛАР

Нурларнинг бир хил йўналганлик таърифидан, 2.9 ва 2.10 жумлалардан тўғри чизикда нурларнинг фақат иккита йўналиши борлиги келиб чиқади. Шунинг учун, векторларнинг икки йўналиши борлиги келиб чиқади. Демак, тўғри чизикдаги барча нолмас векторлар бир хил йўналган векторлардан ташкил топган иккита эквивалент синфларга ажралади. Бу синфлардан биридаги векторларни мусбат йўналган деб эълон қилиб, тўғри чизикда мусбат йўналишни киритамиз (агар  $\overrightarrow{MN}$  вектор мусбат йўналган бўлса, у ҳолда  $M$  нуқтадан  $N$  нуқтага қараб қилинган ҳаракат йўналиши мусбатдир). Шундай қилиб тўғри чизикда ориентация берган бўламиз.  $l$  тўғри чизикни унда танланган нолмас  $\vec{e}$  вектор билан биргаликда  $(l, \vec{e})$  ўқ

деб атаймиз. Ўқда мусбат йўналиш  $\vec{e}$  вектор билан аниқланади.  $(l, \vec{e})$  ўқда

ҳар қайси  $\vec{a}$  вектор  $\vec{a} = \alpha \vec{e}$  кўринишда бир қийматли ёзилиши мумкин.

Ҳақиқатан ҳам,  $\vec{e}$  векторни бирор  $O \in l$  нуқтадан бошлаб қўямиз.  $\vec{e} = \overrightarrow{OO_1}$

бўлсин. Шу  $O$  нуқтадан бошлаб  $\vec{a}$  векторни ҳам қўямиз,  $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$  бўлсин.

Агар  $M = O$  бўлса, у ҳолда  $\vec{a} = 0 \cdot \vec{e}$ . Агар  $\vec{a}$  нолмас вектор бўлса, у ҳолда

$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{e}$  ёки  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{e}$ . Унда векторни сонга кўпайтириш таърифига мувофиқ,

биринчи ҳолда  $\overrightarrow{OM} = \frac{|OM|}{|OO_1|} \overrightarrow{OO_1}$ , чунки  $\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}$  ёки  $\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}$ .

Иккинчи ҳолда эса  $\overrightarrow{OM} = -\frac{|OM|}{|OO_1|} \overrightarrow{OO_1}$ , чунки  $\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = -\frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}$  ёки

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = -\frac{\overrightarrow{OO_1}}{|\overrightarrow{OO_1}|}, \quad \vec{a} = \alpha \vec{e} \text{ тенглик ўринли бўладиган } \alpha \text{ сонини } \vec{a} \text{ векторнинг } \vec{e}$$

вектордаги алгебраик қиймати деб атаймиз ва  $\alpha = \left( aq_{\vec{e}} \vec{a} \right)$  каби ёзамиз.

Демак,

$$\vec{a} = \left( aq_{\vec{e}} \vec{a} \right) \cdot \vec{e}. \quad (7)$$

**6.1 жумла.** Алгебраик қиймат қуйидаги хоссаларга эга:

- 1)  $\left( aq_{\vec{e}} \lambda \vec{a} \right) = \lambda \left( aq_{\vec{e}} \vec{a} \right);$
- 2)  $\left( aq_{\vec{e}} \vec{a} + \vec{b} \right) = \left( aq_{\vec{e}} \vec{a} \right) + \left( aq_{\vec{e}} \vec{b} \right);$

$$\text{Исбот. } \left( aq_{\vec{e}} \lambda \vec{a} \right) \cdot \vec{e} = ((7) \text{ га кўра}) = \lambda \vec{a} = ((7) \text{ га кўра}) = \lambda \left( \left( aq_{\vec{e}} \vec{a} \right) \cdot \vec{e} \right) =$$

$$= (\text{вектор фазонинг 6) аксиомасига га кўра}) = \left( \lambda \cdot aq_{\vec{e}} \vec{a} \right) \cdot \vec{e}, \text{ бундан (1)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Худди шундай,

$$\left( aq_{\vec{e}} \left( \vec{a} + \vec{b} \right) \right) \cdot \vec{e} = \vec{a} + \vec{b} = \left( aq_{\vec{e}} \vec{a} \right) \cdot \vec{e} + \left( aq_{\vec{e}} \vec{b} \right) \cdot \vec{e} = (\text{вектор фазонинг 7)}$$

$$\text{аксиомасига кўра}) = \left( aq_{\vec{e}} \vec{a} + aq_{\vec{e}} \vec{b} \right) \cdot \vec{e}, \text{ бундан (2) тенгликни ҳосил қиламиз.}$$

6.1 жумланинг иккинчи қисмини қуйидагича ифодалаш мумкин:

**6.2. Шаль леммаси.** Тўғри чизиқдаги  $M, N, P$  нуқталарнинг ихтиёрий жойланишида қуйидаги тенглик ўринли:

$$\left( aq_{\vec{e}} \overrightarrow{MP} \right) = \left( aq_{\vec{e}} \overrightarrow{MN} \right) + \left( aq_{\vec{e}} \overrightarrow{NP} \right).$$

**6.3 таъриф.** Бирор  $K$  майдон устида  $V, W$  иккита вектор фазо берилган бўлсин.  $f: V \rightarrow W$  акслантириш қуйидаги иккита хоссани қаноатлантирса, у чизиқли акслантириш деб аталади:

$$1) f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V \text{ учун};$$

$$2) \quad \forall \alpha \in K \text{ ва } \forall \vec{a} \in V \text{ учун } f(\alpha \vec{a}) = \alpha f(\vec{a}).$$

$V$  ва  $W$  вектор фазолар орасида  $f: V \rightarrow W$  чизиқли акслантириш биектив бўлса, у  $V$  ва  $W$  фазолар изоморфизми деб аталади. Бу ҳолда  $f^{-1}: W \rightarrow V$  тескари акслантириш ҳам чизиқли акслантириш бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий  $\vec{a}', \vec{b}' \in W$  векторлар оламиз. Бунда  $f$  – биекция бўлганидан, у сюръекция бўлади ва шунинг учун шундай  $\vec{a}, \vec{b} \in V$  векторлар мавжудки,  $\vec{a}' = f(\vec{a})$ ,  $\vec{b}' = f(\vec{b})$  бўлади. Бундан  $\vec{a} = f^{-1}(\vec{a}')$ ,  $\vec{b} = f^{-1}(\vec{b}')$  ва

$$f^{-1}(\vec{a}' + \vec{b}') = f^{-1}\left(f(\vec{a}) + f(\vec{b})\right) = f^{-1}\left(f(\vec{a} + \vec{b})\right) = \vec{a} + \vec{b} = f^{-1}(\vec{a}') + f^{-1}(\vec{b}')$$

Демак, ихтиёрий  $\vec{a}', \vec{b}' \in W$  учун  $f^{-1}(\vec{a}' + \vec{b}') = f^{-1}(\vec{a}') + f^{-1}(\vec{b}')$  бўлади.

Ихтиёрий  $\alpha \in K$  ва  $\vec{a}' \in W$  учун

$$f^{-1}(\alpha \vec{a}') = f^{-1}\left(\alpha f(\vec{a})\right) = f^{-1}\left(f(\alpha \vec{a})\right) = \alpha \vec{a} = \alpha f^{-1}(\vec{a}') \text{ бўлади.}$$

**6.5. Мисол.** Барча ҳақиқий сонлар тўплами  $\mathbf{R}$ , қўшиш ва қўпайтириш амалларига нисбатан  $\mathbf{R}$  майдон устида чизиқли вектор фазо бўлишини кўрсатиш мумкин.

**6.6-теорема.**  $(l, \vec{e})$  ўқдаги ҳар қайси  $\vec{a}$  векторга  $\vec{e}$  вектордаги унинг

алгебраик қийматини мос қўювчи  $f: Vect(1) \rightarrow \square$  акслантириш вектор фазоларнинг изоморфизми бўлади.

Бу акслантиришнинг чизиқлилиги 6.1-жумладан, биективлиги векторни сонга қўпайтириш таърифидан ҳамда  $\Pi_3$  аксиомадан келиб чиқади.

$(l, \vec{e})$  ўқда аввалдан тайинланган  $O$  нуқтани оламиз. Унда

$f : Vect(1) \rightarrow \square$  акслантириш  $f_O(M) = f(\overrightarrow{OM}) = aq_{\vec{e}} \overrightarrow{OM}$  тенглик билан

$f_O : l \rightarrow \square$  акслантиришни аниқлайди. 4.2-жумлага кўра,  $l$  тўғри чизиқнинг

ҳар бир  $M$  нуқтасига  $\overrightarrow{OM}$  векторни мос қўйиб, нуқталар ва векторлар

орасида бир қийматли мосликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,  $f_O$

акслантириш  $l$  геометрик тўғри чизиқ билан ҳақиқий сонлар, яъни сонли

тўғри чизиқ нуқталари орасидаги биекциядир.  $f_O$  акслантириш  $l$  тўғри

чизиққа сонли тўпламдаги бор тартибни кўчиради:

$M < N \Leftrightarrow f_O(M) < f_O(N)$ . Бу тартиб қуйидаги хоссага эга:

Агар  $M < N$  ва  $(MPN)$  бўлса, у ҳолда  $M < P < N$ . Демак, тўғри чизиқда

нолмас  $\vec{e}$  векторда ориентациясини киритиб, унинг нуқталар тўпламини

тартиблаймиз. Агар  $\vec{e}$  – бирлик вектор бўлса, у ҳолда  $f_O$  акслантириш

нуқталар орасидаги масофани сақлайди.

## ХУЛОСА

Мазкур ишда векторлар алгебрасини планиметрия аксиомалари асосида қуриш масаласи ўрганилган. Бу эса ишнинг ўзига хос хусусиятларидан биридир. Кўзланган мақсад тартиб ва қўйиш аксиомалари ёрдамида кесма, ярим тўғри чизиқ, ярим текислик ва ярим фазо тушунчаларини аниқлашда ва уларнинг баъзи хоссаларини ўрганишда яққол кўринади.

Мазкур иш, мактаб геометрия курси ва аналитик геометрия курси ўртасида зарурий “қўприк” вазифасини бажаради, ва шунингдек, мактаб геометрия курсида баён қилинган аксиоматик маълумотларни тўла тушунтириб беради деган умиддамиз.

## ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси – Т.: Ўзбекистон, 1998. - 48 б.  
Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”/Баркомол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. - Т.:Ўзбекистон. 1997.
2. Ўзбекистон Республикасининг ”Таълим тўғрисида”ги Қонуни (1997 йил 29 августда қабул қилинган)/. Баркомол авлод -Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. -Т.:Ўзбекистон. 1997.
3. Каримов И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. -Т.: “Маънавият”, 2008.
4. Каримов И.А. Баркомол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори.- Т.: Ўзбекистон, 1998. - 62 б.
5. Каримов И.А. Ўзбекистон буюк келажак сари. - Т.: Ўзбекистон, 1998.
6. Алимов Ш. ва бошқ. Алгебра ва анализ асослари.-Т.:Ўзбекистон, 1991.
7. Алихонов С. Математика ўқитиш методикаси. - Т.: Ўқитувчи, 1992.
8. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990, – 328 с.
9. Погорелов А.В. Геометрия. М.: «Наука», 1993, – 288 с.
10. М.С.Досанов, Х. Р. Умаров. «Введение понятия вектора на основе аксиом планиметрии», ГулДУ ахборотномаси, 2014/1 сони, 9-16 бетлар.
11. М.С.Досанов, Х. Р. Умаров. «Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия элементлари», ГулДУ босмахомаси, 2014.
12. Гаимназаров О. Г. Математика ўқитишда амалий масалаларни ечиш намуналари, ўқув-услубий қўлланма, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси “Фан” нашриёти, Тошкент, 2006 йил. 34 бет.
13. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. 1. Аналитическая геометрия, 2. Дифференциальное исчисление, 3. Основы теории чисел. Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования РФ в качестве учебника для вузов. –М. «Высшая школа», 1999.

14. Назаров Р.Н., Тошпулатов Б.Т., Дусумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси 2к. (укув кулланма), - Тошкент. «Уқитувчи», 1995.
15. Абдулхамидов А.И. ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ асослари. Академик лицейлар учун дарслик. Т. 2003 й.
16. Мелиқулов А. Математика 2-қисм, касб-ҳунар коллежлар учун ўқув қўлланма. Т. 2003 й.
17. Ғаймназаров Г. Комбинаторика и бином ньютона, Л. 1990 г.
18. Галицкий М.Л. ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ курсини чуқур ўрганиш Т., «Ўқитувчи», 1995.
19. Аюпов Ш., Рихсиев Б., Кучкаров А. «Математика олимпиадалар масалалари» (2 қисм). Тошкент. Фан. 2004.
20. Погорелов А. В. Геометрия 7-11. –Т.:»Ўқитувчи», 1994 й.
21. [www.ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)
22. [www.edu.uz](http://www.edu.uz)
23. [www.uzpak.uz](http://www.uzpak.uz)
24. [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru)
25. [www.rsl.ru](http://www.rsl.ru)