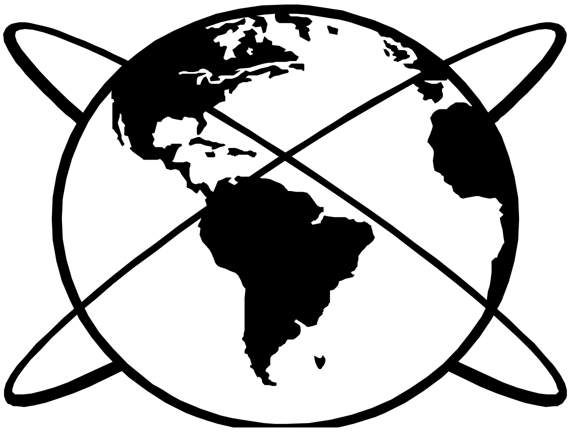
ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ



“Геометрияи аналитики”

Маърузалар матни

Тузувчилар:

Бўриев Т.Е. - Самарқанд Давлат Университети Алгебра ва Геометриякафедраси дотсент, ф-м.ф-н.

А.А.Азимов - Самарқанд Давлат Университети Алгебра ва Геометрия кафедраси ассистенти, .

САМАРҚАНД – 2020

Сарсухан

Ин васоити таълим доир ба ҳалли мисолу масъалаҳо аз фанни “Геометрияи аналитики” ҳамчун воситаи дарси барои талабагони курси якуми шўъбаи бакалавриати факультетҳои математика ва физика тартиб дода шудааст. Васоити таълими мазкур аз ду қисм иборат аст. Қисми якум ба геометрияи аналитики дар ҳамвори ва қисми дуюм ба геометрияи аналитикї дар фазо бахшида шудааст.

Қисми якум аз 4-боб иборат аст. Фанни геометрияи аналитики бо ёрии таҳлили алгебравї шаклҳои геометриро тадқиқ менамояд. Дар геометрияи аналитики бо ёрии ададҳо хусусиятҳои муҳимтарини шаклҳои геометри мавқеи онҳо муайян карда мешавад.

Ададҳоеро, ки мавқеи шаклҳои геометриро муайян мекунад, координатаҳои он меноманд. Тарзе, ки бо ёрии он мавқеи шаклҳои геометри муайян карда мешавад, методи координатї ном дорад. Аз ин рў боби якўми васоит ба методи координатаҳо бахшида шуда, дар он методи координат дар хати рост, дар ҳамвори ва дар фазо таҳлил карда мешавад.

Ҳалли баъзе масъалаҳои геометрияи аналитики, аз љумла, тартиб додани муодилаи хати рост (дар ҳамвори ва дар фазо), муодилаи ҳамвори бо воситаи векторҳо бисьёр қулай ва аён мебошад. Бо муносибати ин боби дуюм ба асосҳои алгебраи векторҳо бахшида шуддаст.

Боби сеюм ба хати рост дар ҳамвори бахшида шудааст. Дар боби чорум хатҳои каљи тартиби дуйўм таҳлил карда мешавад. Қисми якуми ин боб ба муодилаҳои каноникии хатҳои качи тартиби дуюм (давра, эллипс, гипербола ва парабола) ва қисми дуйўм ба намуди каноники овардани муодилаи умумии дараљаи дуйўми дуномаълума бахшида шудааст.

Дар ибтидои ҳар як боб маълумотҳои асосии назарияви ва формулаҳои зарурии мавзўъ оварда шудаанд. Баъд мисол ва масъалаҳои намунави ҳал карда мешаванд. Методҳои асосии ҳалли мисолу масъалаҳо маънидод карда шудаанд. Дар охири ҳар як боб барои кори мустақилии талабагон мисол ва масъалаҳои бисёре оварда шудааст.

Ин воситаи дарсиро талабагони факультетҳои табии университет (физика, химия, биология, география ва ғайра) ва дигар мактабҳои оли ки дар онҳо элементҳои фанни геометрияи аналитики омўхта мешавад, низ метавонанд истифода баранд.

Ин гуна воситаи таълим аз фанни геометрияи аналитики доир ба машғулоти амали ба забони тољики мавчуд набуд, аз ин чи ба талабагон ва чи ба муаллимон ҳангоми омўзиши таълим ба мушкилии муайяне меорад, бинобар ин мақсади асосии тартиб додани чунин дастур бартараф намудани ин норасои мебошад.

Дар хотима хоҳишмандем, ки хонандагон фикру мулоҳизаҳои худро оид ба баландтар бардоштани сифати ин васоит ба кафедраи Алгебра ва Геометрияи факультети математикаи университети давлатии Самарқанд фиристонанд.

Муаллифон ба ҳамаи онҳо пешаки изҳори миннатдори менамоянд.

<u>**Маъруза 1**</u>

Системаи координатии декарти дар ҳамвори ва фазо.

МЕТОДИ КООРДИНАТА ДАР ХАТИ РОСТ ВА ҲАМВОРИ

Методи координата дар хати рост.

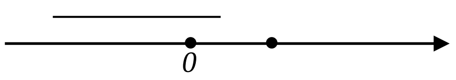
Идеяи асосии методи координата аз муайян кардани мавқеи нуқта дар тир, ҳамвори ва фазо бо ёрии ададҳои ҳақиқи,яъне координатахо иборат аст. Барои муайян намудани мавқеи нуқтахо дар хати рост системаи координатиро ин тавр љори мекунем:

1) Дар хати рости горизонтали ибтидои координата - нуқтаи О-ро (расми 1), ки нисбат ба он мавқеи нуқтаҳои боқимондаи хати рост муайян карда мешавад, интихоб мекунем.

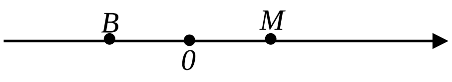
2) Барои чен кардани масофаи байни нуқтаҳо дар хати рости муоинашаванда аз ибтидои координата порчаи воҳиди (l = $|\overline{PQ}|$) интихоб мекунем.

3) Дар хати рост самти мусбат интихоб мекунем (дар расм он бо аќрабак нишон дода шудааст).

Системаи координатии бо хамин тарз мукаррар шуда тир низ номида мешавад. Барои тири ҳосилшударо ба тири ададӣ табдил додан дар байни нуқтаҳои тир ва маљмуи ададҳои ҳақиқи мувофиқгузории яккиматаро љорї кардан лозим аст. Ин мувофиқгузори барои ҳар як нуқтаи тир чунин иљро карда мешавад, ба ҳар як нуқтаи *M*-и тир як адади ягонаи беном ки мавқеи онро нисбат ба ибтидои координата муайян мекунад, яъне $X = \frac{буз \cdot \overline{OM}}{\overline{PQ}}$ - мувофиқ гузошта мешавад. Дар ин љо $|\overline{OM}|$ - масофа аз нуқтаи М то ибтидои координата аст. Аломати х дар кадом тарафи ибтидои координата љойгир шудани нуқтаи М-ро муќаррар мекунад.



Расми 1.



Расми 2.

Адади мусбат ё манфии ба ҳамин тариқ ҳосил шудаи x-ро координатаи нуқтаи M меноманд. Минбаъд координатаи нуқтаро дар қавс дар паҳлуи ҳарфе, ки ин нуқтаро ишорат мекунад, менависем: $M(x)$.

Агар нуқтаҳои $M_1 (x_1)$ ва $M_2 (x_2)$ дода шуда бошанд, бузургии порчаи самтноки $\overline{M_1M_2}$ бо ёрии формулаи

$$\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1 \qquad (1.1)$$

Масофаи байни онҳо бошад, бо ёрии формулаи

$$\overline{M_1M_2} = |x_2 - x_1| \qquad (1.2)$$

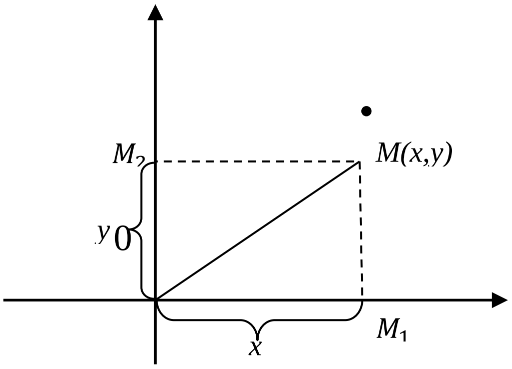
муайян карда мешавад. Проекцияи порчаи самтноки $\overline{M_1M_2}$ дар тири Ox бо ёрии формулаи

$$\text{пр}_x\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1 \qquad (1.3)$$

муайян карда мешавд.

Методи координатаҳои росткунља дар ҳамвори

Барои муайян кардани нуқта дар ҳамвори аз системаи координатаҳои росткунча истифода мебаранд. Ду хати рости ба якдигар перпендикулярро ,ки дар нуқтаи О якдигарро мебурранд интихоб карда, дар ҳар яки онҳо самти мусбатро муайян мекунем. Нуқтаи буриши онҳо О -ро ибтидои системаи координати меномем. Ин хатҳои рост, ки нисбат ба онҳо мавқеи нуқтаҳои ҳамвори муайян карда мешавад тирҳои координата номида мешавад. Тири Ox-ро тири абсисса ва тири Oy-ро тири ордината меноманд.



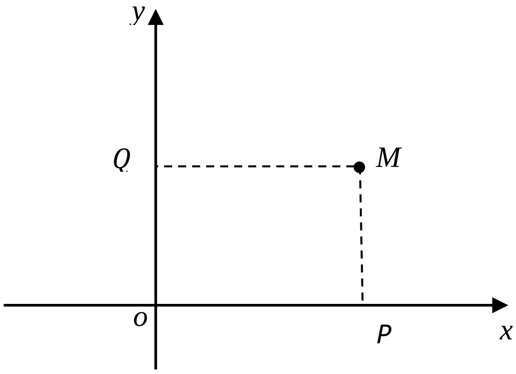
расми 3.

Инак, мавқеи нуқтаҳои дилхоҳи ҳамвори бо ёрии ду адади ҳақиқии бо тартиби муайян гирифташуда (якумаш абссисса ва дуюмаш ордината) x ва y муайян карда мешавад. Ин ду ададҳоро одатан координатаҳои нуқтаи M меноманд ва бо нишонаи $M(x,y)$ менависанд.

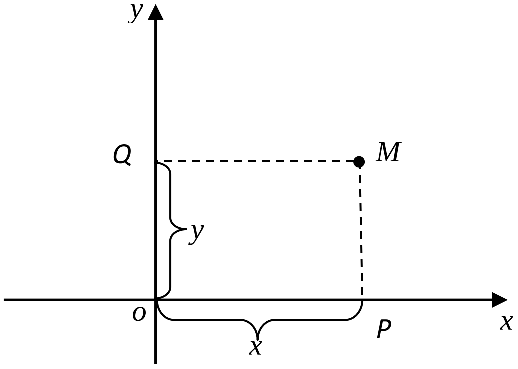
Тирҳои координата ҳамвориро ба љор қисм људо мекунанд, ки ин қисмҳоро одатан чорякҳо меноманд. Аломатҳои x ва y аз рўии мавқеи нуқтаҳо дар ин чорякҳо бо ёрии љадвали зерин муайян карда мешавад

Чорякҳо	Абцисса (x)	Ордината (y)
1	+	+
2	-	+
3	-	-
4	+	-

1. Барои ёфтани координатаҳои нуқтаи M ки он дар ҳамвори дода шудааст, аз нуқтаи M ба тирҳои Оx ва Оy перпендикулярҳо (расми 4) мегузаронем. Асосҳои ин перпендикулярҳо (нуқтаи P ва Q) ҳарду координатаи маҳдудро муайян мекунад. Координатаи якуми нуқтаи M (абсиссаи он x) ба бузургии порчаи самтдори $\overline{OP}$ -и тири Оx баробар аст. Координатаи дуюми нуқтаи М (ординатаи он y) *ба* бузургии самтдори $\overline{OQ}$ –и тири Оy баробар аст.



Расми 4



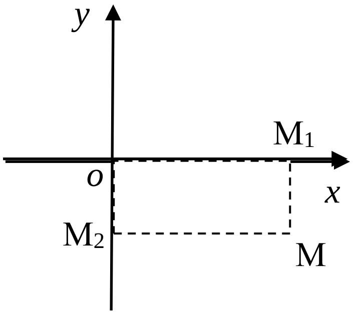
Расми 5

2. Координатаҳои x ва y –и нуқтаи M-ро дониста барои онро сохтан чунин рафтор кардан лозим аст: агар $x \geq 0$ бошад дар тири Ox аз нуқтаи O ба тарафи рости порчаи дарозиаш x воҳид, агар $x \leq 0$ бошад дар тарафи чапи ҳамин тир порчаи дарозиаш $|x|$ воҳид људо мекунем. Интиҳои ин порча (нуқтаи Р) проекцияи нуқтаи М дар тири ох мебошад. Ба монанди ин амал

карда интиҳои порчаи OQ (нуқтаи Q) -ро дар тири *Oy* ки проекцияи нуқтаи М мебошад муайян мекунем. Аз нуқтаҳои *P* ва *Q* хатҳои рости ба тирҳои координата параллелро мегузаронем: хатҳои рости гузаронидашуда ҳамдигарро мебуранд. Нуқтаи буриши онҳо нуқтаи матлуб дар ҳавори мешавад (расми 5). Ҳамин тавр љои гиометрии нуқтаи М дар ҳамворї муайян карда мешавад.

Масъала. Нуқтаи *M(5,-2)* дар системаи росткунљаи координатаи декартї сохта шавад.

Ҳал: Аввал порчаи воҳиди интихоб мекунем ва пас аз ибтидои системаи координатаҳо саркарда дар тарафи рости тири *Ox* порчаи $\overline{OM}$ -ро месозем, ки дарозиаш 5 воҳид баробар бошад. Ба монанди ин рафтор карда координатаи дуюми нуқтаи *М*- ро дар қисми манфии тири *Oy* месозем, ки он порчаи $\overline{OM}_2$ бузургиаш ба -2 баробар буда мешавад. Аз нуқтаи M_1 ва M_2 ба тириҳои координатии параллел карда хатҳои рост мегузаронем ин хатҳои рост ҳам дигарро бурида дар буриш нуқтаи матлуб *М*-ро медиҳад (расми 8).



Расми 8.

Маъруза 2

Масъалаҳои соддатарини геометрияи аналитики:Масофаи байни ду нуқта,тақсими порча дар нисбати додашуда,масоҳати секунжа.

Масофаи байни нуқтаҳои $M_1(x_1y_1)$ ва $M_2(x_2y_2)$ дар ҳамворї бо ёрии формулаи

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.4)$$

ҳисоб карда мешавад.

Дар ҳолати хусуси масофаи нуқтаи *M (x.y)* то ибтидои координата бо ёрии формулаи

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.5)$$

ҳисоб карда мешавад.

Кунљи φ ки порчаи $\overline{M_1M_2}$ бо самти мусбати тири Ox ташкил мекунад, бо ёрии формулаи.

$$tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1.6)$$

муайян карда мешавад. Дар ин љо (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) мувофиқан координатаҳои нуқтаҳои M_1 ва M_2 мебошанд.

Тақсими порча ба нисбати додашуда.

Фарз мекунем ки нуқтаи *M(x.y)* порчаи бо ёрии $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ муайян шударо дар нисбати дода шудаи

$$\frac{бузургии\,\overline{M_1M}}{бузургии\,\overline{MM_2}} = \lambda$$

тақсим кунад. Пас координатаҳои нуқтаи М бо ёрии формулаҳои

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1.7)$$

муайян карда мешавад. Агар нуқтаи M дар дохили порчаи $\overline{M_1M_2}$ љойгир шуда бошад $\lambda \geq 0$ ва агар M дар давоми порчаи $\overline{M_1M_2}$ (ё аз чап, ё аз рост) љойгир шуда бошад $\lambda \leq 0$ мешавад. Дар ҳолати хусуси, ҳангоми $\lambda = 1$ будан нуқтаи *M(x,y)* порчаи $\overline{M_1M_2}$ –ро ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунад,яъне нуқтаи М миёнаљои порча мебошад. Дар ин маврид координатаҳои миёнаљои порча - нуқтаи M бо ёрии формулаҳои

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (1.8)$$

муайян карда мешавад.

Масоҳати секунча

а) Масоҳати секунљае, ки қуллахояш дар нуқтаҳои $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ воқеанд бо ёрии формулаи

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} \qquad (1.9)$$

ҳисоб карда мешавад. Азбакси масоҳат бузургии мусбат аст бинобар ин дар тарафи рости формулаи (1.9) аз ду аломат ҳамонаш гирифта мешавад, ки S мусбат шавад.

б) Агар нуқтаҳои *A, B* ва *C* дар як хати рост хобад онгоҳ, *S=0* мешавад. Инак шарти дар як хати рост хобидани се нуқтаҳо чунин аст:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = 0$$

в) Координатаҳои маркази мувозинатии секунљаи якчинсае, ки қуллаҳояш дар нуқтаҳои $A_1(x_1y_1)$ $B_2(x_2y_2)$ *ва* $C(x_3y_3)$ воқеъанд бо ёрии формулаи

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \qquad (1.11)$$

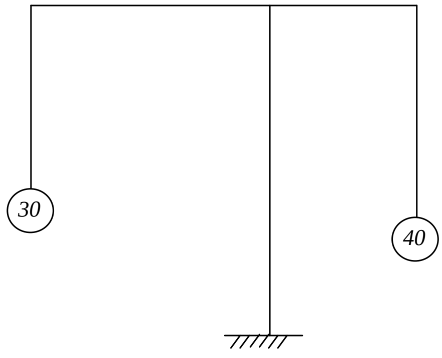
ҳисоб карда мешавад.

Масъала. Дар нуқтаҳои A(-3.-1) ва B(4.6) қувваҳои параллел будаи мувофиқан ба 30 кг ва 40 кг баробар буда гузошта шуда аст .Дар порчаи *AB* координатаҳои нуқтаи баробар таъсир кунанда ёфта шавад.

Ҳал. Бигузор *M(x.y)* нуқтаи матлуб бошад. Дар асоси формулаи (1.7)

$$\frac{бузургии\,\overline{AM}}{бузургии\,\overline{MB}} = \lambda$$

мешавад. Дар асоси формулаи моменти қувва. $\frac{бузург.\overline{AM}}{бузург.\overline{MB}} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$ аст .



расми 12.

Аз ду баробариҳои ҳосилшуда $\lambda = \frac{4}{3}$ буданаш муқаррар мешавад. Агар X_1=-3 $У_1$=-1 ва X_2=4. $У_2$=6 гўем он гоҳ дар асоси формулаи (1.7)

$$X = \frac{-3+\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}} \cdot \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}} = 1 \qquad Y = \frac{-1+\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}} \cdot 6 = \frac{21}{7} = 3.$$

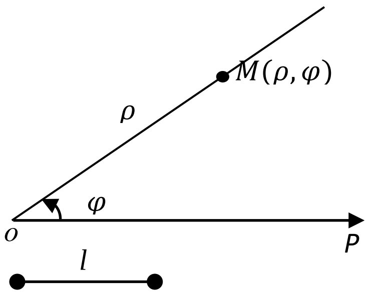
Инак кординатаҳои баробар таъсиркунанда ба $x = 1$ ва $y = 3$ баробар будааст.

Чавоб *M(1, 3)*

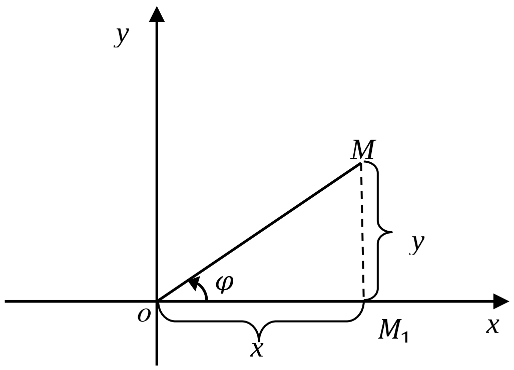
Маъруза 3

Табдилдиҳии системаи координати Декарти. Системаи координатаҳои қутбй

Барои дар ҳамвори муайян кардани мавқеи нуқта аксар вақт аз координатаи қутбї низ истифода мебаранд. Элементҳои системаи координатаи қутбї нуқтаи *O* (қутб) нур *–OP* (тири қутби) ва порчаи воҳиди *L* мебошанд (расми.6) мавқеи нуқтаи *M* дар ҳамвори бо ёрии масофаи нуқтаи *M* то кутб ρ (радиуси қутби) ва кунљи байни радиуси қутбї ва самти мусбати тири қутбї - φ (қунљи қутбї) муайян карда мешавад, ин ду адад ρ ва φ - координатаҳои қутбии нуқтаи М номида шуда ба мисли $M(\rho,\varphi)$ навишта мешавад. Дар ин љо ρ аз ноль то + ∞ ва φ аз ноль то 2π таъғир меёбад. Ҳолатҳое мешавад, ки φ аз 2π калон ё манфи шуданаш ҳам мумкин.



Расми 6



Расми 7

Вобастагии байни коодинатаҳои қутби (ρ, φ) ва координатаҳои декарти (x, y)-и нуқтаи дилхоҳи M бо ёрии формулаҳои

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases} \qquad (1.12).$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \qquad (1.13)$$

муайян карда мешавад (расми 7).

Масъала. Координатаҳои декартии нуқтаи М дода шудааст - *M(1, -1),* координатаҳои қутбии M ёфта шавад.

Ҳал. Мувофиқи (1.13) ρ ва $tg\varphi$-ро меёбем.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

Аз ду қимати $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ва $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ ҳамонашро гирифтан лозим аст ки то ки $\sin\varphi$ манфї шавад, чунки нуқтаи M дар љоряки љорум воқеъ аст. Инак координатаҳои қутбии нуқтаи *M:* $\rho = \sqrt{2}$ ва $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ мебошанд, $M(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

Координатањои росткунља дар фазо

Интихоби системањои координатањои росткунљаи декартї дар фазо имконият медињад, ки ба њар як нуќтаи фазо се адади њаќиќї мувофиќ гузошта шаванд ва баръакс ба њар гуна се адади њаќиќї якто нуќтаи фазо мувофиќ гузошта, шавад. Пас аз ба тартиби муайян овардани ин се адад нуќтаро чунин менависанд: *M(x,y,z),* ки x-абцисса, y-ордината ва z-аппликатаи нуќтаи M ном доранд ва якљоя *(x,y,z)*-ро координатањои ин нуќта меноманд.

Масофаи байни нуќтањои $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ва $M_2(x_2,y_2,z_2)$ бо ёрии формулаи

$$d=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.17)$$

њисоб карда мешавад. Дар ин чо d-дарозии порчаест, ки нуќтањои додашударо мепайвандад.

Дар њолати хусусї, агар яке аз нуќтањо ибтидои системаи координатањо ва дигаре *M(x,y,z)* бошад, он гоњ барои њисоби масофаи байни онњо формулаи

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1.18)$$

ќулай аст.

Бигузор нуќтаи *N(x,y,z)* порчаи байни нуќтањои $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ва $M_2(x_2,y_2,z_2)$-ро ба нисбати γ=таќсим кунад, яъне

$$\gamma=\frac{\text{бузургии M1N}}{\text{бузургии NM2}}$$

Он гоњ координатањои *(x,y,z)*-и нуќтаи N аз рўи формулањои зерин ёфта мешаванд:

$$x=\frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma},\ y=\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma},\ z=\frac{z_1+\gamma z_2}{1+\gamma} \qquad (1.19)$$

Агар нуќтаи N дар миёнаи порчаи M_1M_2 љой гирифта бошад, пас $\gamma=1$ ва аз формулањои (1. 19) њосил мекунем:

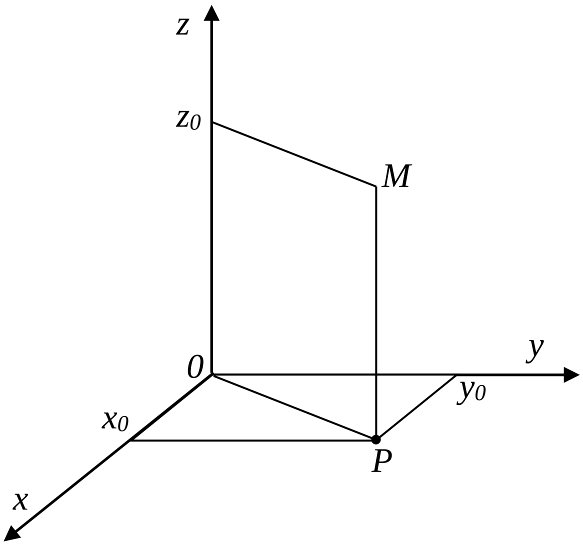
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (1.\ 20)$$

њамин тавр координатањои миёнаи порча бо ёрии формулањои (1. 20) њисоб карда мешаванд.

Ҳалли мисолҳо:

Мисоли 1. Нуќтаи M дар октанти якўм дода шудааст. Координатањои вай ёфта шаванд.

ҳал. Барои ёфтани координатањои нуќтањои додашуда усулҳои гуногун мављуданд. Яке аз онњо чунин аст. Проекцияи нуќтаи M-ро дар њамвории *XOY* месозем. Фарз кунем ин нуќтаи P бошад, Пас координатањои нуќтаи P-ро њамчун нуќтае, ки дар њамвории координатии *ХОУ* дода шудааст, меёбем. Координатањои (x_0, y_0)-и нуќтаи Р- абцисса ва ординатаи нуќтаи М мешаванд. Барои ёфтани апликатаи нуќтаи дода шуда дар тири oz аз нуќтаи О сар карда, порчаеро месозем, ки ба порчаи МР баробар аст.

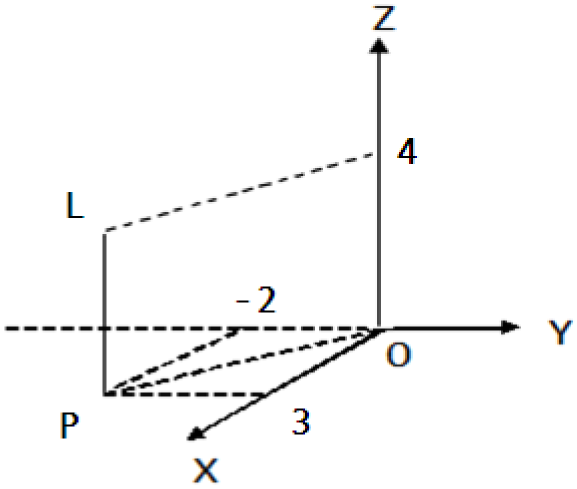


Расми 14

Он гоњ дарозии он порча z_0 апликатаи матлуб мешавад. Њамин тавр координатањои нуќтаи М мањз ададњои њаќиќии x_0;y_0; z_0 мебошанд.

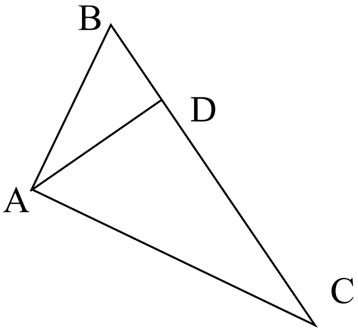
Мисоли 2. Нуќтаи А бо координатањояш (3,-2,4) дода шудааст. Ин нуќта сохта шавад.

ҳал: Азбаски координатањои нуќтаи А: $x>0$, $y<0$, $z>0$, пас маълум мешавад, ки вай дар октанти (њашяки) чорум воќеъ мебошад. Асоси ин октант чоряки чорўми њамвории координатии ОХУ мебошад. Бинобар он дар чоряки чорўми њамвории ОХУ нуќтаи Р-ро месозем, ки координатањояш (3,-2) (абцисса ва ординатаи нуќтаи А) мебошад. Пас ,аз нуќтаи Р ба самти мусбати тири OZ параллель карда порчаи дарозиаш ба 4 воњид баробар бударо месозем. Интињои ин порча нуќтаи матлуби А (3,-2,4) мебошад.



Расми 15

Мисоли 3. Ќуллањои секунљa мањз нуќтањои A(1,1,1), B(5,1,-2) ва C(7,9,-1) мебошад. Биссектрисаи кунљи A тарафи CB-ро дар нуќтаи D мебурад. Координатањои нуќтаи D ёфта шаванд.



Расми 16.

Њал: Пеш аз њама бо ёрии формулаи (1. 17) дарозии тарафњоеро, ки кунљи A-ро ташкил медињанд, меёбем:

AC=$\sqrt{(7-1)^2+(9-1)^2+(1-1)^2}$ =$\sqrt{36+64}$ =10

BC=$\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}$ =$\sqrt{16+9}$ =5

Биссектрисаи кунч, тарафи муќобилро ба ќисмњое таќсим мекунад, ки бо тарафњои кунљ мутаносиб мебошанд. Бинобар ин нуќтаи D тарафи CB-ро ба нисбати

$\gamma = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{5} = 2$ таќсим мекунад.

Њамин тавр,

$$X_D = \frac{x_C + \gamma x_B}{1+\gamma} = \frac{7+2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3};$$

$$У_D = \frac{y_C + \gamma y_B}{1+\gamma} = \frac{11}{3}, \quad z_D = \frac{Zz_C + Z\gamma z_B}{1+\gamma} = \frac{1+2(-2)}{1+2} = -1 .$$

нуќтаи матлуб D $(\frac{17}{3}; \frac{11}{3}; -1)$ мебошад.

Маъруза 4

АСОСҲОИ АЛГЕБРАИ ВЕКТОРИ

Векторҳо ва амалҳои хатти бо онҳо.

Бузургиҳое, ки дар механика, физика ва дар дигар фанҳои амали дуљор мешаванд духеланд. Бузургиҳои ба монанди температура, вакт, масса, зичи, дарозии хат, масохат, хачм ва ғайра фақат бо як қиммати ададии пурра тавсиф мешаванд. Ин гуна бузургиҳоро бузургиҳои скаляри ёки мухтасар скалярҳо меноманд.

Аз дигар тараф бузургиҳои ба монанди қувва, моменти қувва, суръат, суръатноки ва ғайра бо қимати ададии худ ва самти муайяни дар фазо доштаашон пурра муайян мешаванд. Ин гуна бузургиҳоро бузургиҳои вектори ёки мухтасар векторҳо меноманд.

Дар геометрияи аналитики одатан векторҳои озод новобаста аз табиати онҳо омўхта мешавад.

Таъриф. Порчае, ки дарозии муайян ва дар фазо (ҳамвори) самти муайян дорад, яъне порчаи самтдорро вектор меноманд.

Ҳамин тавр вектор барои тасвири геометрии бузургиҳои вектории физики хизмат мекунад.

Таърифи векторҳои баробар: Ду векторҳоро баробар меномем, агар:

1) дарозии онҳо баробар бошанд; 2) векторҳо параллел ёки дар хатҳои рости параллел мехобанд; 3) векторҳо самти якхела дошта бошанд. Векторҳоро бо ҳарфҳои хурди лотинии дар болояш хат ишорат мекунем: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$,……

Агар ибтидои вектор (нуқтаи гузориши он) ва интиҳои он додашуда бошанд, онро бо харфҳои лотинии калони дар болояш хатча кашидашуда: $\overline{AB}, \overline{AD}$ .... - ҳарфи якум ибтидо харфи дуюм интиҳо ёки бо ҳарфҳои лотинии хурди дар болояш хатча кашидашуда $\bar{a}, \bar{b}$, ... -ишорат мекунем.

Агар дарозии вектор ба як баробар бошад, онро вектори воҳиди , агар дарозии вектор ба нул баробар бошад, онро вектори нулї меноманд. Амалҳои љамъи векторҳо, тарҳи векторҳо ва зарби вектор ба ададро амалҳои хатти меноманд.

Векторҳое, ки дар як хати рост ёки дар хатҳои рости параллель мехобанд векторҳои коллинеар меноманд.

Шарти зарури ва кифоягии коллинеарии векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$ мебошад, $(\alpha, \beta) \in R$ $\alpha, \beta \neq 0.$

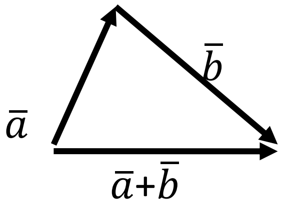
Векторҳое, ки дар як ҳамвори мехобанд, ёки ба як ҳамвори параллел мебошанд векторҳои компланари меноманд.

Шарти зарурии ва компланарии се векторҳои $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$ мебошад, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$

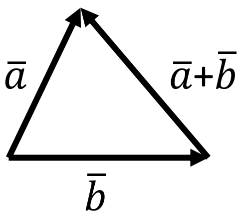
Чамъ ва тарҳи векторҳо. Барои амали љамъ ва тарҳи векторҳо аз усули (қоидаи) секунља ёки усули параллелограм истифода бурда мешавад.

1. Усули секунља.

а) Мувофиқи ин қоида барои љамъ кардани ду вектори $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ дар интиҳои вектори љамъшавандаи якўм вектори љамъшавандаи дуюмро месозем (яъне параллел мекўчонем). Векторе, ки ин хати шикастаро пайваст мекунад суммаи ин векторҳо мебошад ва он аз ибтидои љамъшавандаи якўм ба интиҳои љамъшавандаи дуюм равона мешавад.



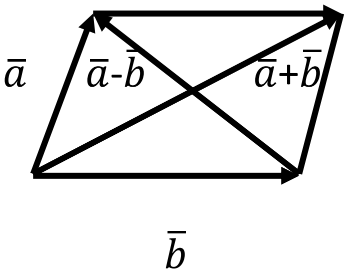
б) Барои аз як вектор тарҳ кардани вектори дигар онҳоро ба як нуқтаи ибтидои месозем (яъне ҳар ду векторро ба ягон нуқта параллел мекўчонем). Векторе, ки аз интихои вектори тарҳшаванда ба интиҳои вектори камшаванда равона аст, тарҳи ин векторҳо мебошад.



2. **Усули паралеллограмм**.

Барои љамъ (тарҳ) кардани ду векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ онҳоро ба ибтидои умуми оварда (ба як нуќта параллел мекўчонем) аз онҳо паралеллограмм месозем. Онгоҳ диогнали паралеллограмм ки аз ибтидои умуми ду вектор мебарояд, љамъи ин ду векторҳо мебошад.

Диогнали дуюми паралеллограмм бошад тарҳи ин векторҳо мебошад ва он ба интихҳои вектори якум равона аст.



Хосиятҳои асосии амалҳои хаттии векторҳо:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ қонуни љойивазкунї.
2. $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$ қонуни тақсимот.

Зарби вектор ба адад.

Зарби вектори $\bar{a}$ ба адади λ , $(\lambda\bar{a})$ гуфта вектореро меномем, ки модули он ба ҳосили зарби модули вектор ва модули адади λ баробар буда, он ба вектори $\bar{a}$ параллель ёки бо ин вектор дар як хати рост мехобад ва самти он бо самти вектори додашуда як хел мешавад, агар $\lambda>0$ бошад ва бо самти $\bar{a}$ муқобил мешавад, агар $\lambda<0$ бошад.

Хосиятҳои зарби вектор ба адад:

1. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
2. $(\lambda_1+\lambda_2)\bar{a}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{a}$
3. $\lambda_1(\lambda_2\bar{a})=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$

4. Ҳалли масъалаҳо

5. ***Масъалаи 1.*** Нуқтаҳои *A(1; 3; 2)* ва *B(5; 8; -1)* дода шуда бошанд, дарозии вектори $\bar{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, ва вектори воҳиди $\bar{a}_0$ ёфта шавад.

6. *Ҳал.* Азбаски радиус –вектори нуқтаҳои *A* ва *B* мувофиқан векторҳои $\vec{r}_1 = \{1;3;2\}$ ва $\vec{r}_2 = \{5;8;-1\}$

7. мебошанд, бинобар ин мувофиқи (2.5)

8. $\bar{a} = \vec{r}_2 - \vec{r_1} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$

9. Аз ин љо мувофиқи формулаи (2.6)

10. $|\bar{a}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

11. Барои ёфтани вектори воҳидии $\overrightarrow{\mathrm{a}_o}$, мо бояд косинусҳои равишдихандаи вектори $\vec{\mathrm{a}}$-ро ёбем. Мувофиқи формулаҳои (2.7)

12. $\cos\alpha = \frac{\mathrm{x}}{|\bar{a}|} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$; $\cos\beta = \frac{\mathrm{y}}{|\bar{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\gamma = \frac{\mathrm{z}}{|\bar{a}|} = -\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

13. Пас $\bar{a}_0 = \left\{\frac{2\sqrt{2}}{5};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ -\ \frac{3}{5\sqrt{2}}\right\}$ ва дидан осон аст, ки шарти (2.8) қаноат мегардад.

14. ***Масъалаи 2.*** Радиус- вектори нуқтаи *M* бо тири тири *Oy* куньи $\beta = 60^o$ ва бо тири *Oz* куньи $\gamma = 45^o$ – ро ташкил медихад; дарозии вай $|\overrightarrow{r}|$=8 мебошад.

15. Координатаҳои нуқта *M* ёфта шавад, агар абсциссаи вай адади манфи бошад.

16. **Ҳал**. Азбаски $\beta = 60^o$, $\gamma = 45^o$ва $|\overrightarrow{r}|$=8, пас $\frac{\mathrm{y}}{|\overrightarrow{r}|} = \cos\beta$ => $\cos 60^o = \frac{1}{2}$; $\mathrm{y} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{r}|$=4. $\frac{z}{|\overrightarrow{r}|} = \cos\gamma \Rightarrow \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ z $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |\overrightarrow{r}| = 4\sqrt{2}. \Rightarrow$

17. Барои даръёфти координатаи якум-x аз формулаи (4.10) истифода мебарем: $\cos{}^2\alpha + \cos{}^2\beta + \cos\gamma{}^2\,\gamma = 1$

18. Аз ин љо $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$=1. Аммо $\cos{}^2\alpha = \frac{\mathrm{x}^2}{|\overrightarrow{r}|^2}$ бинобар ин $\frac{\mathrm{x}^2}{|\overrightarrow{r}|^2} = \frac{1}{4}$; $\mathrm{x}^2 = \frac{1}{4} \cdot |\vec{r}|^2 = 16$, $\mathrm{x}_{1;2} = \pm 4$.

19. Мувофиқи шарти мисол абоциссаи нуқта *M* адади манфи аст, бинобар ин *x = -4* ва дар натиља нуқтаи *M(-4; 4; 4$\sqrt{2}$) ҳосил мешавад.*

20. ***Масъалаи 3.*** Дар секунљаи *ABC* тарафи *BC* бо нуқтаи *D* ба ду ҳиссаи баробар тақсим карда шудааст: *BD=BC*. Агар $AB = \vec{b}$ ва $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \bar{a}$,бошад, вектори $\overrightarrow{AD}$ ёфта шавад.

21. ***Ҳал.*** Азбаски $BC = \vec{\mathrm{a}} - \vec{b}$ пас $BD = \frac{\vec{\mathrm{a}} - \vec{b}}{2}$ бинобар ин

$$22.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Масъалаи 4. Векторҳои $\bar{a}=\{4,-3,\ 6\}$ ва $\bar{b}=\{-2,3,-4\}$ дода шуда бошанд, векторҳои зеринро муайян намоед:

$$a)\ \bar{a}+\bar{b},\qquad б)\ \bar{a}-\bar{b},\qquad b)\ 3\bar{a},\ \ г)-\frac{1}{3}\bar{b},\ \ д)\ 5\bar{a}-2\bar{b}$$

<u>Ҳал.</u> Ин векторҳоро мувофиқи қоидаҳои амалҳои хаттии векторҳои бо координатаашон додашуда ҳисоб мекунем. (формулаҳои пункти 2.2)

$$a)\bar{a}+\bar{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}=\{4+(-2),-3+3,6+(-4)\}=\{2,0,2\}$$

$$\bar{a}+\bar{b}=\{2,0,2\}$$

$$б)\bar{a}-\bar{b}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}=\{4-(-2),-3-3,\ \ 6-(-4)\}=$$
$$=\{6,-6,10\},\ \ \bar{a}-\bar{b}=\{6,-6,10\}$$

$$b)3\bar{a}=\{3x_1,3y_1,3z_1\}=\{12,-9,18\}$$

$$г)-\frac{1}{3}\bar{b}=\left\{-\frac{1}{3}x_2;-\frac{1}{3}y_2;-\frac{1}{3}z_2\right\}=\left\{-\frac{1}{3}\cdot(-2);-\frac{1}{3}\cdot3,-\frac{1}{3}\cdot(-4)\right\}$$
$$=\left\{\frac{2}{3},-1,\frac{4}{3}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}\bar{b}=\left\{\frac{2}{3},-1,\frac{4}{3}\right\}$$

д) Аввал векторҳои $5\bar{a}$ ва $2\bar{b}$-ро муайян мекунем.

$$5\bar{a}=\{5\cdot4,5\cdot(-3),5\cdot6\}=\{20,-15,30\}$$

$$2\bar{b}=\{2\cdot(-2),2\cdot3,2\cdot(-4)\}=\{-4,6,-8\}$$

Акнун вектори $5\bar{a}-2\bar{b}$- ро ҳисоб мекунем.

$$5\bar{a}-2\bar{b}=\{20-(-4);-15-6;30-(-8)\}=\{24;-21;38\}$$

Маъруза 5

Проексияи вектор.Координатаҳои вектор.Косинусҳои самтдиҳандаи вектор.Модули вектор.Амалҳои хатти векторҳои бо координаташон дода шуда.Проексияи вектор ба тир.

Проексяи вектори $\overrightarrow{AB}$ ба тир гуфта дарозии порчаи -$\overrightarrow{ab}$ -и ин тирро меноманд, ки он дар байни проексияҳои a ва b – и нуқтаи ибтидо A ва нуқтаи интиҳо B воқеъ аст ва агар самти порчаи $\overrightarrow{ab}$ бо самти тири проексия ҳамчоя шавад , аломаташ + ва агар самтҳои порчаю тир муқобил бошанд, аломати он — гирифта мешавад . Ба ҳамин тариқ , проексияи вектори $\overrightarrow{AB}$ *ба тир бузургии порчаи самтдори* $\overrightarrow{ab}$ –и тир мебошад .

Қоидаҳои асосии назарияи проексияҳоро ин тавр баён кардан мумкин аст :

1. *Проексияи вектор ба ягон тир ба ҳосили зарби дарозии вектор бар косинуси кунљи байни тир ва вектор баробар аст,* яъне

$$\text{пр}\overrightarrow{AB} = AB\,cos\alpha.$$

Аз он жумла, аз инҳо натича мебарояд, ки векторҳои баробар дар як тир проексияҳои баробар доранд.

2.Проексияи суммаи векторҳо ба ягон тир ба суммаи проексияҳои дар ҳамон тир доштаи векторҳои љамъшаванда баробар аст, яъне, $\text{пр}\left(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{c}}\right) = пр\,\bar{\boldsymbol{a}} + пр\bar{\boldsymbol{b}} + пр\bar{\boldsymbol{c}}$,

дар ин љо векторҳо ба як тир проексия шудаанд.

Ҳақиқатан, суммаи векторҳо вектори сарбасткунандаи хати шикастаест, ки векторҳои љамъшаванда қисмҳои ташкилдиҳандаи он мебошад (ба § 2 нигаред).

Системаи координатии росткунља ва вектори дилхоҳи $\overrightarrow{OM}$ –ро дида мебароем (расми 99). Аз нуқтаи M (интиҳои вектори $\overrightarrow{OM}$) ба тири Oz параллел карда , то ҳамвории **xoy**-ро дар нуқтаи *P* буридан хати рост мегузаронем. Аз нуқтаи *P* –и ҳамвории ***xoy*** ба тири ***oy*** параллел карда, то тири ***ox***-ро дар нуқтаи **M₁** буридан хати рост мегузаронем. Дар натиља, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}.$$

Аз нуқтаи ***O*** векторҳои $\overrightarrow{PM}$ –ро људо карда, онҳоро бо векторҳои баробарашон :

$$\overrightarrow{\mathrm{M_1P}} = \overrightarrow{\mathrm{OM_2}}\,, \quad \overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM_3}}$$

Иваз мекунем ва , дар натиља, баробарии

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OM_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OM_3}}$$

ро ҳосил мекунем, ё ки ба ибораи дигар:

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathbf{1}} + \mathrm{M}_{\mathbf{2}} + \mathrm{M}_{\mathbf{3}} \qquad (2.1)$$

Баробарии (1) нишон медиҳад , *ки ҳаргуна векторро ба се љамъшавандаи дар тирҳои координат хобидагӣ људо кардан мумкин аст.* Векторҳои љамъшавадаи $\mathrm{M}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{M}_{\mathbf{2}}$, $\mathrm{M}_{\mathbf{3}}$–ро *компонентҳо ё ташкилдиҳандаҳои* вектори додашудаи M нисбат ба системаи координати ***Oxyz*** меномем.

Агар дар фазо системаи координатии декарти дода шуда бошад он гоҳ мо дар ин система векторҳои сегонаи муайянро љори мекунем. Аз ибтидои координата - нуқтаи ***O*** ба самти мусбати ҳар як тири координат векторҳои дарозиашон ба як баробарро,яъне векторҳои воҳидиро, људо мекунем. Ин се векторҳои воҳидии љуфт-љуфт ба ҳамдигар перпедикулярро мувофиқан бо ***i, j, k*** ишорат карда , онҳоро векторҳои асоси (ёки орти) меномем. Ба баробарии (1) баргашта , бояд қайд кард , ки вектори **$\mathbf{M_1}$ мисли вектори *i*** , дар тири абсцисса љойгир аст, бинобар ин:

$$M_1 = X\boldsymbol{i},$$

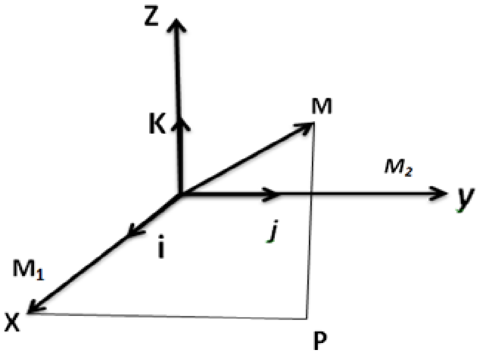
ки дар ин љо X дарозии вектори M_1 мебошад; агар самти векторҳои M_1ва ***i*** ҳамљояшаванд ,аломати X плюс мешавад ва агар самти вектори **$\mathbf{M_1}$** ба самти вектори асоси i муқобил бошад, аломати X минус хоҳад шуд. Ба ибораи дигар , X ададест, ки он проексияи вектори M ба тири абсцисса мебошад. Ҳамин тавр, баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$M_2 = Y\boldsymbol{j}, \quad M_3 = Z\boldsymbol{k}\,,$$

ки дар инљо *Y* ва *Z* проексияҳои вектори **M** мувофиқан ба тирҳои ордината ва апликата мебошанд. Ба ҳамин тариқ, се проексияҳои вектори M - ро ба тирҳои координати ***X, Y, Z***-ро дида баромада , баробарии(I)-ро ба намуди

$$\boldsymbol{M} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}, \qquad (2.1')$$

менависем. Ин баробарӣ аз рӯи векторҳои асосии **i, j, k** људо кардани вектор мебошад (расми 17).



Расми 17

Дар байни компонентҳои вектор ва проексияҳои он фарқи асосӣ мављуд аст. Се адади X, Y, Z проексияҳои векторанд ва онҳо, агар ибтидои вектор дар ибтидои координат воқеъ бошад , координатҳои декартии интиҳои вектор (нуқтаи M) мебошанд. Вектори аз ибтидои координат ба нуқтаи M равандаро *радиус-вектори нуқтаи* M номида , мо гуфта метавонем, ки координатаҳои декартии *(X, Y, Z)* нуқтаи M проексияҳои радиус-вектори $\overrightarrow{OM}$ мебошад. Компонентҳои вектор векторҳои $\boldsymbol{M_1, M_2, M_3}$ мебошанд, ки суммаи онҳо ба вектори додашуда **M** баробар аст. Дар байни компонентҳо ва проексияҳо вобастагиҳои соддаи зерин мављуданд:

$M_1 = X\boldsymbol{i},\ \ M_2 = Y\boldsymbol{j}\ \ , M_3 = Z\boldsymbol{k},$ (2. 2)

яъне, *дар натиљаи ба проексия зарб кардани вектори воҳидии асоси* $\boldsymbol{i}$ *компонентаи вектор ҳосил мешавад.* Баробарии (1′) дар назарияи векторҳо аҳамияти калон дорад. Бо ёрии ин баробарӣ алоқаи байни ду қисми назарияи векторҳо –геометрӣ ва алгебравӣ муайян мешавад . Онҳо якдигарро пурра карда, аппаратеро ташкил медиҳанд, ки алгебраи векторӣ ба воситаи он бо манфиатнокиаш фарқ мекунад: назарияи геометрӣ ба васеъ истифода бурдани тасвири геометрӣ ва назарияи алгебравӣ бошад , ба гузаронидани ҳамаи ҳисобкуниҳо имконият медиҳад.

Ба љои навишти пурраи

$\boldsymbol{M} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ (2.1′)

Аксар вақт навишти мухтасари

$\mathbf{M} = \{X, Y,\ Z\}$

ро истифода мекунанд. Чунон ки дар боло қайд карда шуд , дар ин љо *X*, *Y*, *Z* проексияҳои вектори **М**, ё ки координатаҳои нуқтаи **М**-ро, ки интиҳои радиус-вектори М мебошад, ишорат мекунанд. Масалан:

$$\boldsymbol{M} = \{2,\ 3, -1\} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

1.2. Амалҳои хаттии векторҳои бо координатаашон додашуда.

Агар вектори $\bar{a}$ дар фазои координатии *Oxyz* шавад, он гоҳ вайро нисбат ба векторҳои асосии $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}$ ва $\vec{\boldsymbol{k}}$ људо кардан мумкин аст:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (2.3)$$

Дар ин љо x, y ва z проексияҳои вектори $\bar{\boldsymbol{a}}$ дар тирҳои координати мебошанд. Инчунин *x;y;z* -ҳоро координатаҳои вектор ҳам меноманд ва чунин $\bar{\boldsymbol{a}} = \{x\ ;\ y\ ;\ z\ \}$ ишорат мекунанд.

Дарозии вектори $\bar{\boldsymbol{a}}$ -ро бо ёрии формулаи

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2.4)$$

ҳисоб мекунем.

Агар ибтидои вектори $\bar{\boldsymbol{a}}$ нуқтаи $M_1(x_1, y_1, z\boldsymbol{z}_1)$ ва интиҳояш нуқтаи $M_2(x_2, y_2, z_2)$ бошад, он гоҳ координатаҳои ин векторро чунин муайян мекунанд: $\bar{a} = \overline{M_1 M_2}$

$$\boldsymbol{a} = \{\, x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1 \,\}.$$

Дар ҳақиқат, агар $\overrightarrow{r_1} = \{\, x_1, y_1, \boldsymbol{z}_1 \,\} - радиус -$ *вектори нуқтаи* M_1 *ва* $\overrightarrow{r_2}$=$\{x_2, y_2, \boldsymbol{z}_2\}$

радиус-вектори нуқтаи M_2 бошанд, он гоҳ

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{r_2} - \vec{r}_1 = (x_2 \cdot \boldsymbol{i} + y_2 \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{k}) - (x_1 \cdot \boldsymbol{i} + y_1 \boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{k}) =$$

$$= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 \_ y_1) \cdot \boldsymbol{j} + (\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{z}_1)\boldsymbol{k} \qquad (2.5)$$

Пас, дарозии вектори $\bar{a}$ ба масофаи байни нуқтаҳои M_1 ваM_2 баробар аст ва $|\bar{\boldsymbol{a}}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{z}_1)^2}$

Бигузор вектори $\bar{a}$ *бо тирҳҳои Ох*, *Оу* ва *Oz* мувофиқан кунљҳои α, β ва γ -ро ташкил диҳад. Он гоҳ косинуси ин кунљхо, ки косинусҳои равишдиҳанда ном доранд аз рӯи формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}|}; \ \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}|}$$

Дидан осон аст, ки косинусҳои равишдиҳанда байни худ чунин вобастаанд:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Вектори воҳидии $\boldsymbol{a}_0$ ки бо самти вектори $\boldsymbol{a}$ равона аст, координатаҳои зеринро дорад $\boldsymbol{a}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$.

Фарз мекунем, ки векторҳои $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ бо координатаҳояшон дода шуда бошанд, яъне $\vec{a}$=$x_1 \cdot \boldsymbol{i} + y_1 \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{k}$ ва $\vec{b}$=$x_2 \cdot \boldsymbol{i}+x_2 \cdot \boldsymbol{j}+x_2 \cdot \boldsymbol{k}$ онгоҳ, амалҳои хаттии векторҳо чунин ҳисоб карда мешавад:

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}=\{x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_{2;}\ \boldsymbol{z}_1 \pm \boldsymbol{z}_{2,}\}.$$

$$\lambda\, \boldsymbol{a} = \lambda_1 x_1 \boldsymbol{i} + \lambda y_1 \boldsymbol{j} + \lambda \boldsymbol{z}_1 \boldsymbol{k} = \{\lambda x_{1;} \lambda y_{1;} \lambda \boldsymbol{z}_1\}$$

Масъалаи 1. Агар $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$ ва $|\bar{a}+\bar{b}| = 22$ бошад, $|\bar{a}+\bar{b}|$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал: мувофиқи таърифи љамъи векторҳо аз рӯи қоидаи параллелограмм векторҳои $\bar{a}+\bar{b}$ ва $\bar{a}-\bar{b}$ аз диогоналҳои паралелограмми дар ин векторҳо сохта шуда иборат мебошад. Мувофиқи формулаи вобастагии байни тарафҳо ва диагоналҳои параллелограмм

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2) \qquad (*)$$

d₁ d₂ –диагоналҳо, a, b – тарафҳои паралелограмм.

Инак $d_1 = \bar{a}+\bar{b}$, $d_2 = \bar{a}-\bar{b}$, ишорат мекунем ва мувофиқи формулаи (*)

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2 + |\bar{a}+\bar{b}|^2 = 2(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 => 22^2 + |\bar{a}+\bar{b}|^2 = 2(13^2+19^2).$$

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2 = 2(169+361) - 484$$

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2 = 576 => |\bar{a}+\bar{b}| = 24$$

Љавоб: $|\bar{a}+\bar{b}| = 24$

Масъалаи 2. Кунчи байни векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ - $\varphi = (\bar{a}\,^\wedge\,\bar{b}) = 60°$ ва

$|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$ бошад, $|\bar{a} + \bar{b}|$ ва $|\bar{a} - \bar{b}|$- ро ҳисоб кунед.

<u>Ҳал.</u> $\bar{a} - \bar{b} = BD,\ \bar{a} + \bar{b} = AC$

Дарозии диагонали BD-ро аз рӯи формулаи косинусҳо меёбем.

Дар ΔABD :

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| cos\varphi$$

Мувофиқи шарти масъала:

$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| cos60° = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49,$$

$$|\bar{a} - \bar{b}| = 7$$

Диагонали дуюм $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$–ро аз рӯи формулаи (*) ҳисоб мекунем:

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = 2\left(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2\right) - |\bar{a} - \bar{b}|^2 \quad =>$$

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = 2(5^2 + 8^2) - 7^2 = 129 \quad => |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$$

Ҷавоб: $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 7.$

Маъруза 6

Зарби скалярии векторҳо ва хосиятҳои он векторҳои сегона.Зарби вектории векторҳо.

Таъриф. Зарби скалярии векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ гуфта, ададеро меноманд, ки он ба ҳосили зарби модулҳои ин векторҳо ва бар косинуси кунљи байни онҳо баробар аст.

Зарби скалярии ду векторҳоро бо нишонаи $\bar{a}\bar{b}$ ёки $(\bar{a}\bar{b})$ ишорат мекунанд:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| cos\varphi, \quad (\varphi = \bar{a}^\wedge\bar{b}).$$

Агар аз формулаи проекцияи вектор ба тир истифода барем , зарби скалярии векторҳоро боз чунин навиштан мумкин:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} \quad \text{ёки} \quad \bar{a}\bar{b} = |\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

Хосиятҳои зарби скалярии векторҳо

a) Агар кунљи байни ду векторҳо φ-кунљи тез бошад, $\bar{a}\bar{b} > 0$ ва агар φ-кунљи кунд бошад, $\bar{a}\bar{b} < 0$

b) Агар ҳеч набошад яке аз векторҳо ба нул баробар бошад , зарби скалярии онҳо ба нул баробар мешавад: $\bar{a}\bar{b} = 0$ ва баръакс $\bar{a}\bar{b} = 0$ мешавад, агар яке аз векторҳо вектори нули бошад.

c) Зарби скалярии $\bar{a}\bar{a}$- квадрати скалярии вектор меноманд, яъне

$$\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2.$$

d) Зарби скалярии векторҳои орти (воҳидӣ) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^2 = 1, \ \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}^2 = 1, \ \ \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^2 = 1,$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

4.1 Хосиятҳои зарби скалярӣ:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ хосияти љойивазкуни
2) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ тақсимот
3) $\lambda(\bar{a}\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda\bar{b})$

Маънои физикавии зарби скаляри.

Агар ба нуқтаи материали ягон қувваи $\bar{F}$ таъсир кунад, ин нуқта ягон масофаи $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ - ро тай менамояд. Кори иљро кардаи қувваи $\bar{F}$ ба зарби скалярии вектори $\bar{F}$ ва $\vec{a}$ баробар мешавад:

$$\mathrm{A} = \bar{F}\vec{a}$$

Зарби скалярии векторҳои бо координатаҳояшон додашуда:

Агар $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ бошад:

$$\bar{a}\bar{b} = x_1, x_2 + y_1, y_2 + z_1, z_2$$

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$$

Кунљи байни ду векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ мувофиқи таърифи зарби скалярии векторҳо аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}, \qquad (\varphi = \bar{a}^{\wedge}\bar{b}).$$

Агар векторҳо бо координиатаҳояшон дода шуда бошанд:

$$cos\varphi = \frac{x_1, x_2 + y_1, y_2 + z_1, z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Маърӯза 7

Зарби вектории векторҳо. Зарби омехтаи се векторҳо.

Таърифи зарби векторӣ

Фараз мекунем векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ дода шуда бошад, ки байни хам ягон кунљи φ-ро ташкил медиҳанд. Он гоҳ ба зарби вектории ин векторҳоро чунин таъриф медиҳанд:

Зарби вектории векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ гуфта чунин вектори $\vec{c}$ – ро меноманд, ки он аз рӯи се шартҳои зерин муайян карда мешавад:

1) модули зарби вектори ба ҳосили зарби модулҳои векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ бар синуси кунљи байни онҳо баробар аст , яъне бо ибораи дигар ба масохати параллелограмме ки бо ёрии ин векторҳо сохта шудааст, боробар мебошад:

2) вектори $\bar{c}$ ба ҳamворие ки дар он векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ мехобанд, перпендикуляр аст; яъне ба ҳар яки ин векторҳо перпендикуляр аст: $\bar{c} \perp \bar{a}$ ва $\bar{c} \perp \bar{a}$
3) пас аз ба ибтидои умуми овардани векторҳои $\bar{a}$, $\bar{b}$ ва $\bar{c}$ онҳо нисбат бо ҳамдигар ҳамчун векторҳои асосии $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ љойгир мешаванд.
Зарби векторӣи ду векторҳоро бо нишинаи зерин ишорат мекунем: $[\bar{a}\bar{b}\,]$

мувофиқи шарти (2):

$$|\overline{c}\,| = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \qquad (2.9)$$

Хосиятҳои зарби вектори

1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
2) $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$, агар $\vec{a} = 0$, ё $\vec{b} = 0$, ё ки $\vec{a} // \vec{b}$, бошад,
3) $[\vec{a}\overrightarrow{(b}+\overline{\mathrm{c})}] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]$,
4) $[\lambda\vec{a}\vec{b}] = [\overrightarrow{a(\lambda b)}] = \lambda[\vec{a}\bar{b}]$, барои адади дилхохи λ.

Аз таъриф ва хосиятҳои зарби вектори истифода бурда зарби векторӣи векторҳои воҳидии $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{k}$ чунин натиља мебарояд:

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}] = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}] = 0,$$

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = -[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] = \boldsymbol{k}, \ [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = -[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{i}$$

$$[\vec{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{i}] = -[\boldsymbol{i}, \vec{\boldsymbol{k}}] = \vec{\boldsymbol{j}}.$$

Агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ бо координатаҳояшон дода шуда бошад, яъне

$\vec{a} = x_1 \cdot \boldsymbol{i} + y_1 \cdot \boldsymbol{j} + z_1 \cdot \boldsymbol{k}$, $\bar{b} = x_2 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j} + z_2 \boldsymbol{k}$

Он гоҳ зарби векторӣи онхо бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{k}. \quad (2.10)$$

Татбиқи геометрии зарби векторӣ.

Модули зарби векторӣи векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ ба масоҳати параллелограмме, ки аз ин векторҳо сохта шудаст баробар мебошад, яъне

$$S_{\text{пар}} = |[\bar{a}\bar{b}]|$$

Татбиқи физикавии зарби векторӣ.

Агар вектори $\bar{f}$ қувваи дар ягон нуқтаи M гузошта шуда бошад ва вектори $\bar{a}$ аз ягон нуқтаи О ба нуқтаи нуқтаи М равона бошад, он гоҳ зарби вектории $[\bar{a}\cdot\bar{f}]$- моменти қувваи $\bar{f}$ нисбат ба нуқтаи О - ро тасвир мекунад.

$$\boldsymbol{mom_0 \bar{f}} = [\bar{a}\bar{f}] = [\overline{OM}\cdot\bar{f}]$$

Ҳалли мисолҳо

Масъалаи 1. Агар $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 4$ ва $\bar{a}\bar{b} = 16$ бошад, модули зарби вектории $|[\bar{a}\bar{b}]|$- ро ёбед.

Ҳал. Аввал кунљи байни векторҳоро аз рӯи формулаи зарби скаляри ҳисоб мекунем:

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{16}{5\cdot 4} = \frac{4}{5}$$

Акнун синуси кунљи байни векторҳоро меёбем:

$$sin\varphi = \sqrt{1 - cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

Инак $|[\bar{a}\bar{b}]| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot \sin\varphi = 5\cdot 4\cdot\frac{3}{5} = 12$

Масъалаи 2. Кунљи байни векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ $-$ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ва $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$ бошад, ифодаи $[(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 5\bar{b})]^2$ $-$ ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Аввал зарби вектории $[(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 5\bar{b})]$-ро ҳисоб мекунем:

$$\begin{aligned}[(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 5\bar{b})] &= [2\bar{a}\bar{a}] + [2\bar{a}\cdot 5\bar{b}] - [3\bar{b}\cdot\bar{a}] - [3\bar{b}\cdot 5\bar{b}] \\ &= 2[\bar{a}\bar{a}] + 10[\bar{a}\cdot\bar{b}] - 3[\bar{b}\cdot\bar{a}] - 15[\bar{b}\bar{b}] \\ &= 2\cdot 0 + 10[\bar{a}\bar{b}] + 3[\bar{a}\bar{b}] - 15\cdot 0 = 13[\bar{a}\bar{b}]\end{aligned}$$

Модули зарби векториро ҳисоб мекунем:

$$|[\bar{a}\bar{b}]| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi = 2\cdot 5\cdot\sin\frac{3\pi}{4} = 2\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Ҳамин тавр

$$\left[(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+5\bar{b})\right]^2=\left|\left[(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+5\bar{b})\right]^2\right|=|13[\bar{a}\bar{b}]|^2=13^2\cdot\left(5\sqrt{2}\right)^2$$
$$=169\cdot 25\cdot 2=8450$$

Мисоли 3. Векторҳои $\vec{a}+3\vec{b}$ ва $3\vec{a}+\vec{b}$ дода шудаанд .

Масохати параллелограмме, ки бо ёрии ин векторхо сохта шудааст, ёфта шавад, агар $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ва кунљи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ба $\frac{\pi}{6}$ баробар бошад.

Ҳал. Мувофиқи тадбиқи геометрии зарби вектори масоҳати параллелограмм ба модули зарби вектории ин векторҳо баробар мебошад.Бинобар ин аввал зарби векториро ҳисоб мекунем.

$[(\vec{a}+3\overrightarrow{b})(\,3\vec{a}+\overrightarrow{b})]=3[\vec{a},\vec{a}]+[\vec{a},\vec{b}]+9[\vec{b},\vec{a}]+3[\vec{b},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]-$
$-9[\vec{a},\vec{b}]=-8[\vec{a},\vec{b}]$,чунки $[\vec{a},\vec{a}]=[\vec{b},\vec{b}]=0$ ва $[\vec{b},\vec{a}]=-[\vec{a},\vec{b}]$ аст.

Дар натиља S=$|[\vec{a}+3\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\,]|=8|[\vec{a},\vec{b}]|$ =8·1·1·$sin\frac{\pi}{6}=4$.

Мисоли 4.Хосили зарби вектории векторҳои $\vec{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\vec{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ёфта шавад.

Ҳал. Барои ин аз формулаи (4.17) истифода мебарем.

$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}3&2\\5&1\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}5&2\\1&1\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{k}=-7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$

Мисоли 5.Қуллаҳои секунља маҳз дар нуқтаҳои A(1; 1;1), B(2; 3; 4) ва C(4; 3; 2) љойгир шудаанд. Масохати ин секунља ҳисоб карда шавад.

Ҳал: Векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ – ро меёбем:

$$\overrightarrow{AB}=(2-1)\cdot\boldsymbol{i}+(3-1)\cdot\boldsymbol{j}+(4-1)\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

$$\overrightarrow{AC}=(4-1)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(2-1)\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

Масохати секунљаи *ABC* бо нисфи масохати параллелограмме , ки бо ёрии векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ сохта шудааст, баробар мебошад. Бинобар ин аввало зарби вектории ин векторҳоро меёбем:

$$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

Пас $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \sqrt{24}.$

Масъалаи 6. Қувваи $\bar{f} = \{3\ ,\ 2\ ,\ -1\}$ дар нуқтаи $M(-1,\ 4,\ -2)$ гузошта шудааст. Бузургии моменти қувва ва косинусҳои самтдиҳандаи онро нисбат ба нуқтаи $N(2{,}4{,}0)$ ҳисоб кунед.

Ҳал. Мувофиқи тадбиқи физикавии зарби вектори моменти қувваи $\bar{f}$ нисбат ба нуқтаи N ба зарби векторӣ векторҳои $\bar{f}$ва $\overline{NM}$ баробар мебошад, яъне $\bar{F} = mom_N\bar{f} = [\overline{NM}\cdot\bar{F}]$

Вектори $\overline{NM} = \{3-2; 2-4; -1-0\} = \{1,-2,-1\}$

Зарби векториро ҳисоб мекунем:

$$\bar{F} = [\overline{NM}\cdot\bar{F}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

Инак $\bar{F} = mom_N\bar{f} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 8\bar{k} = \{4,-2{,}8\}$

Бузургии момент ба модули ин вектор баробар аст.

$$|\bar{F}| = |mom_N\bar{f}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

Акнун косинусҳои самтдиҳандаи моментро ҳисоб мекунем:

$$cos\alpha = \frac{x}{|\bar{F}|} = \frac{4}{2\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}};$$

$$cos\beta = \frac{y}{|\bar{F}|} = \frac{-2}{2\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}};$$

$$cos\gamma = \frac{z}{|\bar{F}|} = \frac{8}{2\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}};$$

Зарби омехтаи се векторҳо.

Таъриф. Зарби омехтаи се векторҳои $\bar{a},\bar{b}$ ва $\bar{c}$ гуфта ададеро меноманд, ки он ба ҳосили зарби скалярии вектори $[\bar{a}\bar{b}]$ ба вектори $\bar{c}$ баробар мебошад, яъне $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$ одатан зарби омехтаро бо нишонаи $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$-ишорат мекунанд:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]\bar{c} = \bar{a}[\bar{b}\bar{c}]$$

Зарби омехтаи се векторҳои $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ба ҳачми параллелопипеде, ки аз ин векторҳо сохта шудааст баробар мебошад.

Агар векторҳо компланар бошанд (дар як ҳамвори ёки дар ҳамвориҳои параллель хобанд) зарби омехтаи онҳо ба нул баробар мешавад ва баръакс агар зарби омехтаи се векторҳои $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ бошад, онҳо компланар мебошанд, яъне шарти $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$- шарти зарури ва кифоягии компланарии се векторҳои $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$- мебошад.

Агар векторҳо бо координатаҳояшон дода шуда бошанд:

$$\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \qquad \bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \qquad \bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

зарби омехтаи онҳо аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$\bar{a}\bar{b}\text{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ҳалли масъалаҳо.

Масъалаи 1. Вектори $\bar{c}$ ба векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ перпендикуляр, кунљи байни векторҳои $\bar{a}$, ва $\bar{b}$ $-$ $\varphi = 60°$ ва $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 2\sqrt{3}$ дода шуда бошад, зарби омехтаи ин векторҳоро ҳисоб кунед.

Ҳал. Мувофиқи таърифи зарби омехтаи се векторҳо:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$$

Аввал модули зарби вектории $\bar{d} = [\bar{a}\bar{b}]$-ро меёбем

$$|\bar{d}| = |[\bar{a}\bar{b}]| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin60° = 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Зарби вектории векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ - ро бо $\bar{d}$ ишорат мекунем, он гоҳ $\bar{a}\bar{b}\text{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = |\bar{d}| \cdot |\bar{c}| \cos(\bar{d}\hat{}\bar{c}) = |\bar{d}| \cdot |\bar{c}| cos\alpha$.

α- кунљи байни вектори $\bar{c}$ ва зарби вектории $[\bar{a}\bar{b}]$ мебошад. Бинобар он, ки вектори $\bar{c}$ ба векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ перпендикуляр аст ва зарби вектории $[\bar{a}\bar{b}]$ - вектори $\bar{d}$ ҳам ба векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ перпендикуляр мебошад, пас векторҳои $\bar{d}$ ва $\bar{c}$ ба ҳамдигар параллель мебошанд ва кунљи байни онҳо $\alpha = 0°$ ёки $\alpha = 180°$ мебошад ва $cos\alpha = \pm 1$

Ҳамин тавр зарби омехтаи се векторҳо

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = |\bar{d}| \cdot |\bar{c}|\cos\alpha = 5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot cos\alpha = \pm 30$$

<u>Масъалаи 2.</u> Муайян намоед, ки дар кадом қимати α- се векторҳои $\bar{a} = \{2, -1, \alpha\}$, $\bar{b} = \{1, \alpha, -3\}$, $\bar{c} = \{3, -4, 7\}$ компланар мешаванд.

<u>Ҳал.</u> Мувофиқи шарти зарури ва кифоягии компланарии се векторҳо бояд $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ шавад:

Зарби омехтаро ҳисоб мекунем:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 14\alpha - 4\alpha + 9 - 3\alpha^2 - 24 + 7 = -3\alpha^2 + 10\alpha - 8$$

Мувофиқи шарт

$$-3\alpha^2 + 10\alpha - 8 = 0 => 3\alpha^2 - 10\alpha + 8 = 0$$

$$\alpha_{1.2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{3} = \frac{5 \pm 1}{3}$$

$$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = \frac{4}{3}$$

Ҳамин тавр ҳангоми $\alpha = 2$ ва $\alpha_2 = \frac{4}{3}$ векторҳо компланар яъне векторҳои

$$\bar{a} = \{2, -1, 2\}, \qquad \bar{b} = \{1, 2, -3\}, \bar{c} = \{3, -4,7\}$$

$$\bar{a} = \left\{2, -1, \frac{4}{3}\right\}, \qquad \bar{b} = \left\{1, \frac{4}{3}, -3\right\}, \bar{c} = \{3, -4,7\}$$

Векторҳои компланари.

<u>Масъалаи 3 .</u> Қуллаҳои тетраэдр дода шудааст:

$$A(1,2, -1), \qquad B(-1,2,1), \qquad \mathrm{C}(-1 ,2, 1), \qquad D(2,1, -3)$$

Дарозии баландии аз қуллаи D фуроварда шударо ҳисоб кунед.

<u>Ҳал.</u> Барои ёфтани баландии аз қуллаи D фуровардашуда, мо аввал ҳачми тетраэдрро меёбем, ки он ба $\frac{1}{6}$ ҳиссаи параллелопипеди аз векторҳои $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{AD}$ сохта шуда баробар мебошад ва баъд аз рӯи формулаи ҳисоб кардани ҳачми тетраэдр

$$V_{\text{тет}} = \frac{1}{3} S_{\text{асос}} \cdot H$$

Баландии $H = OD$- ро ҳисоб мекунем.

Асоси тетраэдр секунљаи ΔABC мебошад. Ҳачми параллелопипедро ҳисоб мекунем. Барои ин аввал векторҳои $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{AD}$-муайян мекунем:

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\} = \{0 - 1, \quad 1 - 2, \quad 5 - (-1)\} \\ = \{-1, \quad -1, \quad 6\}$$

$$\overline{AC} = \{-1 - 1, \quad 2 - 2, \quad 1 - (-1)\} = \{-2, 0, 2\}$$

$$\overline{AD} = \{2 - 1, \quad 1 - 2, \quad -3 - (-1)\} = \{1, -1, -2\}$$

Ҳачми параллелопипедро ҳисоб мекунем.

$$V_n = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \pm \begin{vmatrix} -1 - 1\ 6 \\ -2\ 0\ 2 \\ 1 - 1\ -2 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 2 + 4 = 12$$

Ҳаљми тетраэдр $V_{\text{т}} = \frac{1}{6} V_n = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$

Акнун масоҳати асоси тетраэдр - масоҳати секунљаи ΔABC - ро меёбем. Масоҳати ΔABC ба ними масоҳати параллелограмме, ки аз векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{AC}$ сохта шудааст баробар аст. Масоҳати параллелограмм ба модули зарби вектории векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{AC}$ баробар. Зарби вектории $[\overline{AB} \cdot \overline{AC}]$–ро ҳисоб мекунем:

$$[\overline{AB} \cdot \overline{AC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{j} = -2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

$$S_{\text{пар}} = |[\overline{AB} \cdot \overline{AC}]| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Масоҳати секунља $S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \sqrt{6}$

Акнун дарозии баландии OD-ро ҳисоб мекунем.

$$V_{\text{Т}} = \frac{1}{3} S_{\text{асос}} \cdot OD \ =>$$

$$2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot OD \;\; => \;\; OD = \frac{6}{\sqrt{6}}$$

Инак баландии $OD = \sqrt{6}$

Маъруза 8

МУОДИЛАИ ХАТИ РОСТ ДАР ҲАМВОРИ

Хатҳо ва муодилаи онҳо.

Таъриф. *Хат*-љои геометрии нуқтахои ба як хосияти умумї молик будаи њамворї мебошад. Муодилаи хат бошад ифодаи тарзи аналитикии ин хосияти умумии нуқтаҳои вай мебошад, ки бо ёрии координатаҳои љории x ва y – и нуқтаи дилхоҳи хат навишта мешавад.

Тағъирёбандаҳои x ва y – и нуқтаи дилхоҳи ба муодилаи хат дохил бударо координатаҳои љори, доимиҳои ҳарфии онро параметрҳо меноманд.

Масалан, дар муодилаи давраи $x^2 + y^2 = \mathcal{R}^2$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

x ва y координатаҳои љорй буда, a , b, R - параметрҳо мебошад.

Барои тартиб додани муодилаи хат чун љои геометрии нуқтаҳои ҳамворй бояд:

1. Нуқтаи ихтиёрии хат $\mathcal{M}(x, y)$ гирифт,
2. Хосияти умумии ҳамаи нуқтаҳои хатро истифода бурда айният тартиб дод.
3. Бузургиҳои дар шарти масъала (кунљ, порча, координатаҳои нуқтаи маълум ва дигарҳо) додашударо бо ёрии координатаҳои љории хат ифода кард.

Мисоли соддатарини тартиб додани муодилаи хати додашударо ҳал мекунем.

Мисоли 1. Муодилаи хати росте тартиб дода шавад, ки он ба порчаи нуқтаҳои $\mathcal{A}\ (3; -2)$ ва $\mathcal{B}\ (5; 3)$-ро пайвасткунанда перпендикуляр буда, онро ба ду қисми баробар тақсим мекунад.

Ҳал. Аз шарти масъала аён аст, ки ҳамаи нуқтаҳои хати рости матлуб аз нуқтаҳои $\mathcal{A}$ ва $\mathcal{B}$ дар масофаҳои баробар љойгир шудаанд. Бинобар он хати ростро чун љои геометрии нуқтаҳои ҳамворй, ки он аз нуқтаҳои $\mathcal{A}$ ва $\mathcal{B}$ дар як хел масофа воқеъ аст, дида мебароем. Фарз мекунем, ки $\mathcal{M}\ (x; y)$ нуқтаи дилхоҳи хати рости матлуб бошад. Баробарии

$$|\overline{\mathcal{AM}}| = |\overline{\mathcal{BM}}| \qquad (3.1)$$

хосияти умумии нуқтаҳои хати рости матлубро ифода мекунад. Агар нуқтаи $\mathcal{M}\ (x, y)$ дар хати рости матлуб нахобад, он гоҳ $|\overline{\mathcal{AM}}| \neq |\overline{\mathcal{BM}}|$ мешавад. Барои тартиб додани муодилаи хати рости матлуб масофаи $|\overline{\mathcal{AM}}|$ ва $|\overline{\mathcal{BM}}|$-ро бо ёрии координатаҳои маълум ва љории нуқтаҳои $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ва $\mathcal{M}$ бо ёрии формулаи (1.4) ифода карда ба баробарии (3.1) мегузорем.

Он гоҳ.

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} \qquad (3.2)$$

Муодилаи ҳосилшуда, муодилаи хати рости матлуб мебошад.

Пас аз ҳар ду қисми баробарии (3.2) –ро ба квадрат бардошта содда кардан муодилаи $4x + 6y - 21 = 0$ -ро ҳосил мекунем.Ин муодилаи хати росте мебошад,ки ба порчаи AB перпендикуляр буда аз миёнаљои он мегузарад.

Маъруза 9

Муодилаи хати рост.

Муодилаи умумии хати рост

Таъриф. Муодилаи тартиби якўми байни тағъирёбандаҳои x ва y, ки онро координатаҳои нуқтаҳои дилхоҳи дар хати рост воқеъ буда қаноат мекунонанд, муодилаи хати рост номида мешавад.

$$\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + c = 0 \qquad (3.3)$$

Ин муодила муодилаи умумии хати рост дар ҳамворї номида мешавад.

Агар дар муодилаи умумии хати рост $\mathrm{A}x + By + C = 0$ баъзе аз коэффициентҳо ба нул баробар бошад, он гоҳ онро муодилаи нопурраи хати рост меноманд. Мавридҳои зерин дуљор мешаванд:

1) $C = 0$ бошад, муодила намуди $\mathrm{A}x + By = 0$ мешавад ва он хати рости аз ибтидои координата гузарандаро тасвир мекунад.
2) $\mathrm{A} = 0,\ B \neq 0$ бошад, муодила намуди $By + C = 0$,

$y = -\frac{C}{B}$ ёки $y = b$ ва ин муодила хати рости ба тири Ox параллел бударо тасвир мекунад.

Агар $C = 0$ ҳам бошад, он гоҳ муодилаи $y = 0$, муодилаи тири Ox мешавад.

3) $B = 0$ $(A \neq 0)$ бошад, он гоҳ муодила намуди $Ax + C = 0$ ёки

$x = -\frac{C}{A}$, $x = a$ буда ин муодила хати рости ба тири Оy параллел бударо тасвир мекунад. Агар $C = 0$ ҳам бошад, он гоҳ муодилаи $x = 0$, муодилаи тири Oy мешавад.

Муодилаи хати рост дар порчаҳо

Бигузор дар муодилаи умумии хати рост А$x + By + C = 0$ ҳеч яке аз коэффициентҳо ба нул нобаробар бошад, он гоҳ ин муодиларо ба намуди соддатар овардан мумкин аст:

$$\text{А}x + By + C = 0 \quad , \qquad \text{А}x + By = -\text{C}$$

$$\frac{\text{А}x}{-C} + \frac{By}{-C} = 1\,, \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{By}{\frac{-C}{B}} = 1$$

$-\frac{C}{A} = a,$ $\quad -\frac{C}{B} = b$ ишорат кунем, муодилаи

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3.4)$$

ҳосил мекунем, ки ин муодила муодилаи хати рост дар порчаҳо номида мешавад.

Дар ин љо бузургиҳои a ва b дарозии порчаҳое мебошад, ки хати рост дар тирҳои Ox ва Oy мувофиқан људо мекунанд (расми 15). Ин муодила барои сохтани хати рост дар системаи координати људо ҳам қулай мебошад.

Муодилаи каноники ва параметрии хати рост.

Бигузор хати рост аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ гузарад ва вектори $\vec{a} = \{l, m\}$ ягон вектори ба хати рост параллел ёки дар хати рост хобида бошад. Ин гунна векторро вектори самтдиҳандаи (равишдиҳанда) хати рост меноманд. Нуқтаи $M(x,\ y)$ ягон нуқтаи дилхоҳи ҳамвори бошад. Вектори $\overrightarrow{M_0\text{M}}$ ро тартиб медиҳем: $\overrightarrow{M_0\text{M}} = \{x - x_0,\ y - y_0\}$

Агар нуқтаи $M(x,\ y)$ нуқтаи хати рост бошад , он гоҳ векторҳои $\vec{a}$ ва $\overrightarrow{M_0\text{M}}$ ба ҳамдигар параллель яъне коллинеар мешаванд ва баръакс ,агар $\vec{a} \sim \overrightarrow{M_0\text{M}}$ бошад, нуқтаи $M(x,\ y)$ дар хати рости L мехобад. Пас мувофиқи шарти коллениарии векторҳои бо координатаашон додашуда мо шарти зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \qquad (3.16)$$

Ин муодилаи хати рост нисбат ба тағирёбандаҳои x ва y буда, муодилаи каноникии хати рост номида мешавад.

Ҳар яки ифодаҳои баробарии (*)-ро бо $\boldsymbol{t}$ ифода карда муодилаи намуди

$$\begin{cases} x = x_0 - lt \\ y = y_0 - mt \end{cases} \qquad (3.17)$$

ҳосил мекунем, ки дар ин љо t – параметр буда қиймати дилхоҳ қабул мекунад ва нуқтаи хати ростро муайян менамояд. Ин гуна муодиларо муодилаи параметрии хати рост меноманд. Агар параметри t - ро дар муодилаи параметри ҳамчун вақти тағирёбанда қабул кунем, он гоҳ муодилаи параметри муодилаи ҳаракати ростхаттаи мунтазами нуқтаи M ро муайян мекунад. Суръати ҳаракати ин нуқта аз рўи формулаи

$$V=\sqrt{l^2+m^2} \qquad (3.18)$$

ҳисоб карда мешавад.

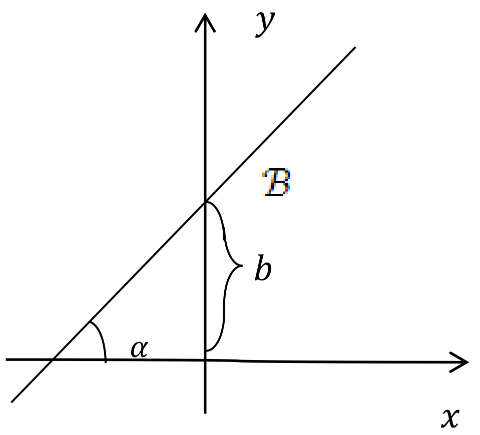
Маъруза 10

Муодилаи хати рост бо коэффициенти кунљї

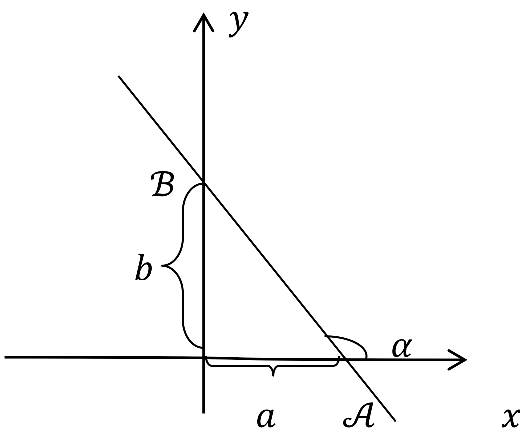
Муодилаи хати росте, ки нисбат ба y ҳал карда шудааст, яъне, муодилаи намуди

$$y = kx + b \qquad (3.5)$$

муодилаи хати рост бо коэффициенти кунљй номида мешавад. Дар муодилаи (3.4) k - коэффициенти кунљї, (дар ин љо $k = tg\alpha$ буда, α –кунљи моилй мебошад, ки хати рост бо самти мусбати тири OX ташкил мекунад) b-бошад бузургии порчае мебошад, ки хати рост аз тири ордината људо мекунад (расми 14).



Расми 18.



Расми 19.

Муодилаи хати росте, ки аз нуқтаҳои додашуда мегузарад

1. Агар хати рост аз нуқтаи $M_1(x_1,\ y_1)$ гузарад ва коэффиценти кунљии он k дода шуда бошад,он гоҳ муодилаи он ба намуди зерин навишта мешавад:

$$\boldsymbol{y-y_1=k(x-x_1).} \tag{3.6}$$

2. Бигузор хати рост аз ду нуқтаҳои $M_1(x_1,\ y_1)$ ва $M_2(x_2,\ y_2)$ гузарад. Дар ин маврид коэффиценти кунљии он аз руи формулаи

$$\boldsymbol{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}} \tag{3.7}$$

ҳисоб карда мешавад ва муодилаи хати рост ба намуди зерин навишта мешавад:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{3.8}$$

Кунљи байни ду хати рост.

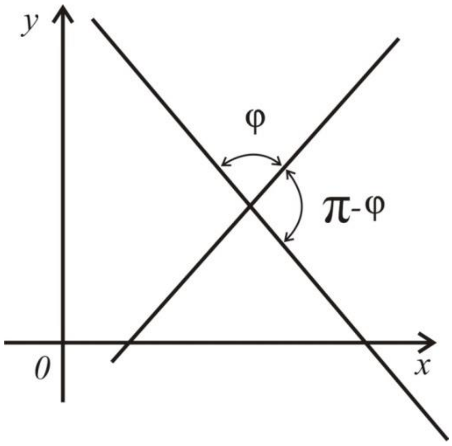
Кунљи байни хатҳои рости

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases} \tag{3.9}$$

бо ёрии формулаи

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \tag{3.10}$$

ҳисоб карда мешавад (расми 20).



Расми 20.

Шарти параллелии ду хати рост $k_1 = k_2$ буда, шарти перпендикулярии онҳо

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{ё ки} \quad k_1 = -\frac{1}{k_2} \qquad (3.11)$$

Бигзор муодилаи хатҳои рост ба намуди умумй дода шуда бошанд:

$$\mathcal{A}_1 x + \mathcal{B}_1 y + \mathcal{C}_1 = 0$$
$$\mathcal{A}_2 x + \mathcal{B}_2 y + \mathcal{C}_2 = 0$$

Он гоҳ коэффиценти кунљии онҳо $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ пас,

1) Шарти параллелии ду хати рост баробарии

$$\mathcal{A}_1 : \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_1 : \mathcal{B}_2, \qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \qquad (3.12)$$

2) шарти перпендикуляриаш бо ёрии баробарии

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = 0 \qquad (3.13)$$

муайян карда мешавад.

3) агар $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ бошад, хатҳои рост ҳамљоя мешавад , яъне ҳар ду муодила якто хати ростро муайян мекунад.

4) агар $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ бошад, хатҳои рост дар як нуқта мебуранд, яъне нуқтаи умуми доранд ва координатаҳои нуқтаи буриш $\text{M}_0(x_0, y_0)$аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad y_0 = \frac{A_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad (3.14)$$

Муодилаи дастаи хатҳои рост.

Таъриф: Маљмуи ҳаммаи хатҳои ростеро, ки аз ягон нуқтаи ҳамвори мегузаранд, дастаи хатҳои рост ва нуқтаи умумии онҳоро маркази дастаи хатҳо меноманд.

Маълум аст, ки муодилаи хати росте, ки аз нуқтаи $M_1(x_1,\ y_1)$ мегузарад ва коэффициенти кунљиаш k мебошад намуди зерин дорад: $y - y_1 = k(x - x_1)$

Дар ин муодила k қиматҳои дилхоҳ қабул мекунад ва ин муодила дастаи хатҳои марказаш дар нуқтаи $M_1(x_1,\ y_1)$ бударо тасвир мекунад.

Одатан муодилаи дастаи хатҳои ростро бо воситаи чуфти хатҳои росте, ки ба даста таалуқ доранд муайян кардан мумкин аст.

Фараз мекунем, ки хатҳои рости $\text{A}_1x + B_1y + C_1 = 0$ ва $\text{A}_2x + B_2y + C_2 = 0$ дар ягон нуқтаи $M_1(x_1,\ y_1)$ якдигарро мебуранд. Он гоҳ муодилаи

$$\text{A}_1x + B_1y + C_1 + \gamma(\text{A}_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (3.15)$$

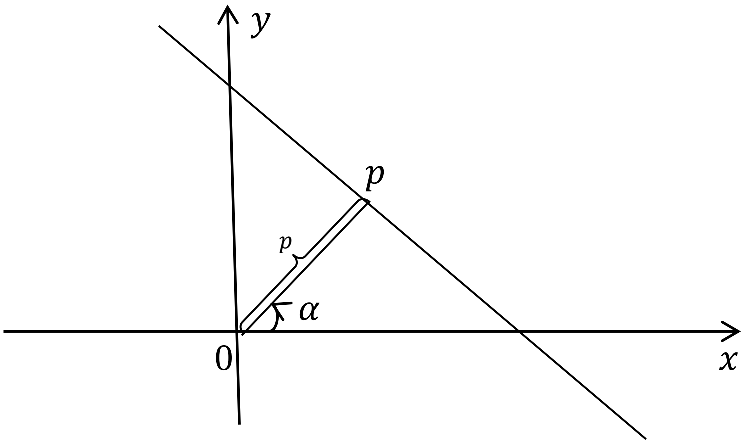
ки дар ин љо γ —параметри дилхоҳ мебошад, дастаи хатҳои ростеро муайян мекунад, ки маркази он дар нуқтаи $M_1(x_1,\ y_1)$ мебошад. Ин муодила муодилаи дастаи хатҳои рост номида мешавад.

Муодилаи нормалии хати рост. Масофа аз нуқта то хати рост.

Муодилаи намуди

$$xcos\alpha + ysin\alpha - p = 0 \qquad (3.19)$$

муодилаи нормалии хати рост номида мешавад, ки дар инљо p —дарозии перпендикуляри (нормали) аз ибтидои координата то хати рост дода шуда (яъне масофа аз ибтидои координата то хати рост) буда, α кунље мебошад, ки ин перпендикуляр бо самти мусбати тири $0x$ ташкил мекунад (расми 21).



Расми 21.

Ҳар гуна муодилаи хати ростро, ки ба намуди умумӣ

$\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C} = 0$

дода шуда аст, дар натиљаи ба зарбкунандаи нормалй

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2}} \qquad (3.20)$$

зарб кардан, ба намуди нормалй овардан мумкин аст:

$$\frac{\mathcal{A}}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2}}x + \frac{\mathcal{B}}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2}}y + \frac{\mathcal{C}}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2}} = 0 \qquad (3.21)$$

Аломати μ акси аломати $\mathcal{C}$ гирифта мешавад.

Моилшавии нуқтаи додашуда $-\mathcal{M}(x_0; y_0)$ аз хати рости додашудаи

$$x\ cos\alpha + y\ sin\alpha - p = 0.$$

ё ки $\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C} = 0.$

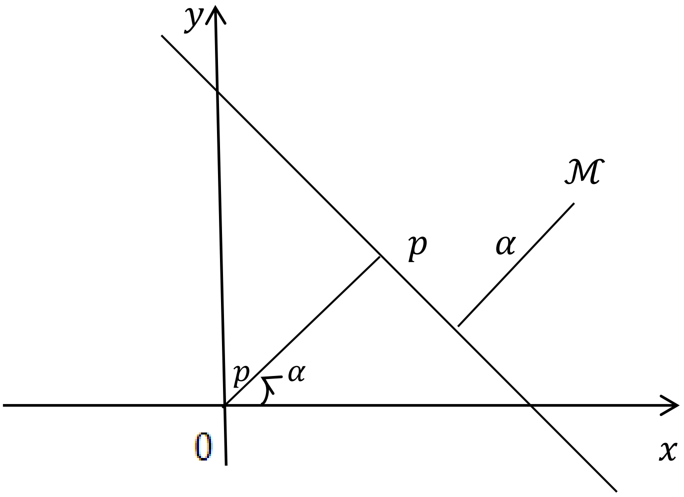
бо ёрии формулаи .

$$\delta = x_0 cos\alpha + y_0 sin\alpha - p \qquad (3.22)$$

ё ки

$$\delta = \frac{\mathcal{A}x_0+\mathcal{B}y_0+\mathcal{C}}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2}} \qquad (3.23)$$

муайян карда мешавад (расми 22).



Расми 22.

Масофа аз нуқта то хати рост ба бузургии мутлақи моилшавӣ баробар буда, бо формулаҳои

$$d = |\delta| = |x_0 cos\alpha + y_0 sin\alpha - p| \qquad (3.24)$$

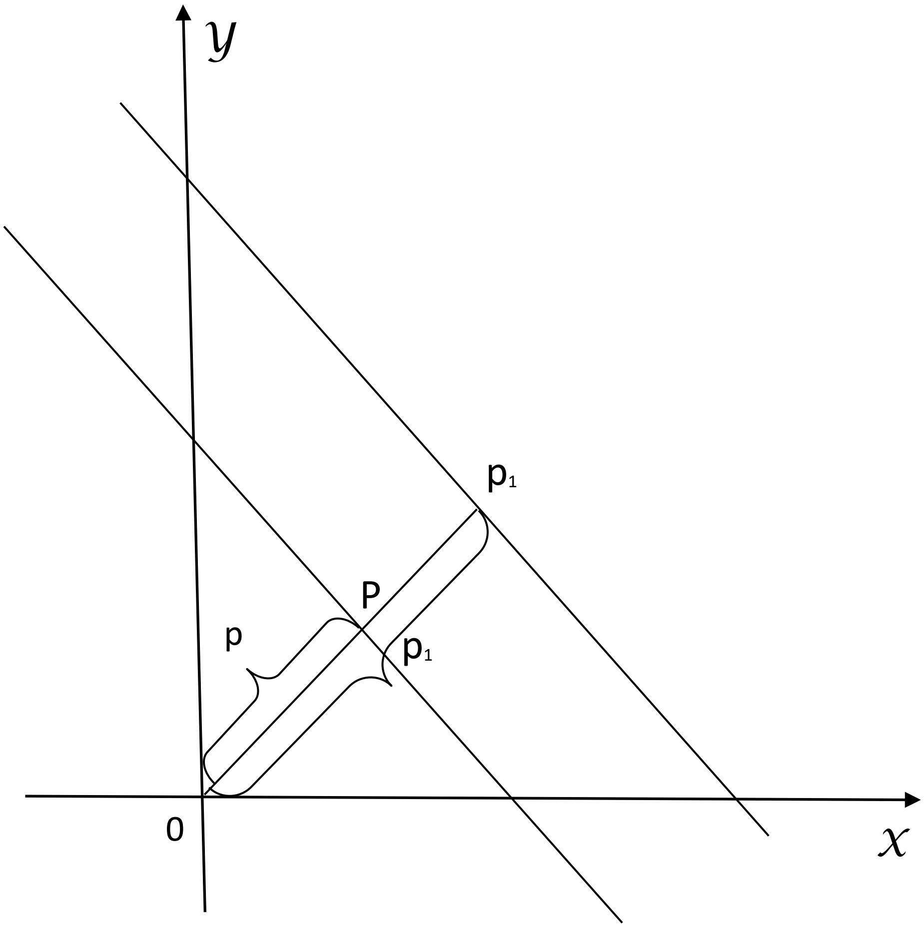
ё ки

$$d = |\delta| = \frac{|\mathcal{A}x_0 + \mathcal{B}y_0 + \mathcal{C}|}{\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}} \qquad (3.25)$$

ҳисоб карда мешавад.

Бигузор, хатҳои рости $\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C} = 0$ ва $\mathcal{A}_1 x + \mathcal{B}_1 y + \mathcal{C} = 0$ байни худ параллель бошанд. Барои масофаи байни ин ду хатҳоро ёфтан кофист, ки аз хати рости якӯм (ё ки дуюм) нуқтаи ихтиёрӣ интихоб карда, масофаи онро то хати рости дуюм (ё ки якӯм) ҳисоб карда шавад.

Ин намуд масъалаҳоро бо дигар усул низ ҳал кардан мумкин аст. Яъне аввал муодилаҳои хатҳои додашударо ба намуди нормалӣ оварда параметрҳои онҳо p ва p_1 ёфта шаванд. Он гоҳ масофаи байни хатҳои рости параллель ба $\delta = |p - p_1|$ баробар мешавад (расми 23).



Расми 23.

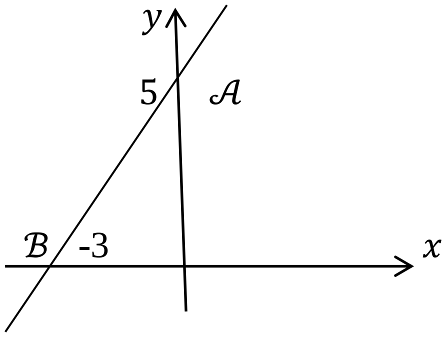
Ҳалли масъалаҳо

Масъалаи 1. Хати рости $5x - 3y + 15 = 0$ сохта шавад.

Ҳал: Ҳар гуна хати рост бо ёрии ду нуқта, ки ба он мансуб аст сохта мешавад. Бинобар ин барои ёфтани ду нуќтаи хати рости мазкур дар муодилаи хати рост ба яке аз координатаҳои он (х ёки у) қимати ихтиёрй дода қимати мувофиқ будаи координатаи дигарро меёбем. Масалан $x = 0$ гуфта, $-3y + 15 = 0$ –ро ҳосил мекунем . Аз ин љо $y = 5$ буданашро муайян мекунем. Дар натиља яке аз нуқтаҳои ба хати рости додашуда мансуб будаи $\mathcal{A}(0;5)$ – ро пайдо мекунем. Акнун $x = 3$ гӯем, онгоҳ, $-3y = 0$ ҳосил мешавад. Аз ин љо $y = 0$.

Инак, нуқтаи дуюми ба хати рости додашуда мансуб $\mathcal{B}\,(-3;0)$ ҳосил мегардад.

Нуқтаҳои $\mathcal{A}$ ва $\mathcal{B}$ – ро рӯи координатаҳояшон дар системаи координата дар асоси қоидаи дар боби 1 баёншуда месозем. Нуқтаҳои $\mathcal{A}$ ва $\mathcal{B}$ –ро пайваст карда ба ҳар ду тараф давом медиҳем. Дар натиља хати рости додашуда хосил мешавад(расми 24). Услуби дигари сохтани графики хати рости додашударо дида мебароем. Муодилаи хати рости додашударо бо ёрии формулаи (2.5) ба намуди порчаҳо менависем.



Расми 24.

Барои ин аъзои озоди муодиларо ба тарафи рости баробарӣ мегузаронем:

$$5x - 3y = -15$$

Ҳар ду тарафи баробарии ҳосилшударо ба -15 тақсим мекунем.

Он гоҳ,

$$\frac{5x}{-15} - \frac{3y}{-15} = 1$$

ё ки

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$$

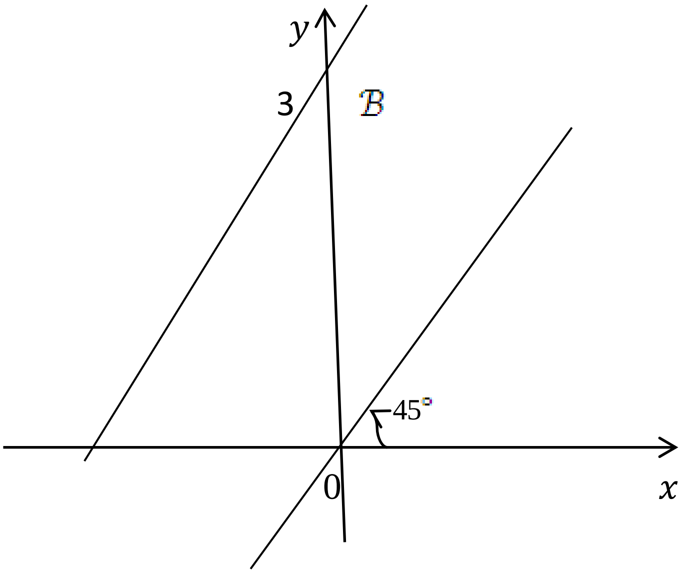
ҳосил мешавад.

Баробарии (2.20)- ро бо баробарии (2.5) муқоиса карда $a = -3$ ва $b = 5$ буданашро муайян мекунем. Қиматҳои a ва $b -$ ро мувофиқан ба тирҳои Ох ва $0y$ гузошта графики дар расми 21 бударо ҳосил мекунем.

Масъалаи 2. Хати росте сохта шавад, ки вай аз тири Oy порчаи бузургиаш $b = 3$ бударо људо кунад ва бо самти мусбати тири $\mathrm{O}x$ кунљи бузургиаш 45° бударо ташкил кунад.

Муодилаи ин хати рост тартиб дода шавад.

Ҳал. Дар системаи росткунљаи декартӣ хати росте месозем, ки вай аз ибтидои координата гузарад ва бо самти мусбати тири $0x$ кунљи бузургиаш 45° бударо ташкил кунад (расми 25). Аз самти мусбати тири Oy порчаи дарозиаш ба 3 воҳид баробарро људо карда онро бо $\mathcal{B}$ ишорат мекунем. Аз нуқтаи $\mathcal{B}$ хати росте мегузаронем, ки ба хати рости сохташуда параллель бошад. Хати рости аз нуқтаи $\mathcal{B}$ гузаранда ва ба хати рости сохташуда параллель буда хати росте мешавад, ки дар шарти масъала талаб карда шудааст.



Расми 25.

Барои муодилаи ин хатро тартиб додан аз формулаи (2.5) истифода мебарем. Азбаски $k = tg45° = 1$ аст, бинобар он муодилаи хати рости матлуб $y = x + 3$ мешавад.

Масъала. Кунљи байни хатҳои рости $2x - 3y + 5 = 0$ ва $3x + y - 2 = 0$ ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Барои коэффициенти кунљии хатҳои рости додашударо ёфтан, муодилаҳоро нисбат ба y ҳал карда, онҳоро ба намуди системаи (2.6) навишта мегирем:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} & (1) \\ y = -3x + 2 & (2) \end{cases}$$

Агар ба муодилаҳои хатҳои рост бо тартиби додашавиашон рақам гузорем, он гоҳ $k_1 = \frac{2}{3}$ коэффициенти кунљии хати рости (1) ва $k_2 = -3$ коэффициенти кунљии хати рости (2) мешавад. Мувофиқи формулаи (2.7) $tg\varphi = -\frac{11}{3}$ ва аз ин љо $\varphi = arctg\left(-\frac{11}{3}\right)$ мешавад.

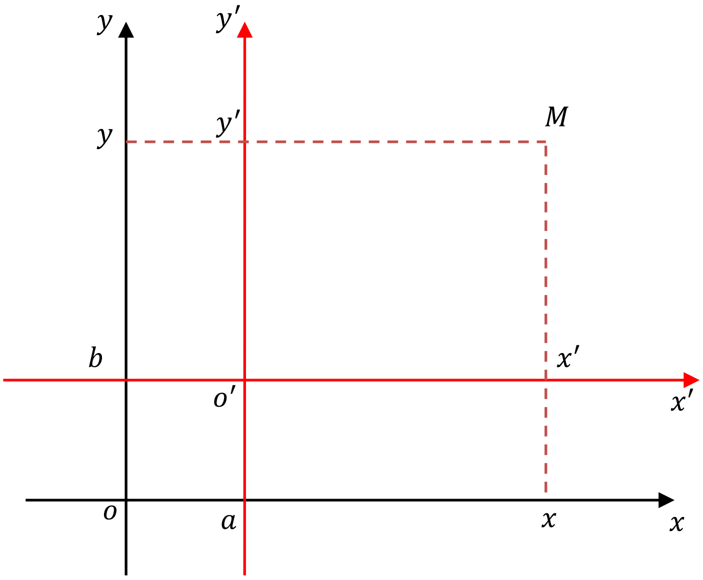
Маъруза 11

Хатҳои каљи тартиби дуюм

Табдилдиҳии системаи координатии декартӣ.

Кӯчондани ибтидои координата

Бигузор дар ҳамвори ду системаи координатаҳо дода шудаанд, тирҳои мувофиқи онҳо параллель мебошанд. (Нигаред ба расми 26.)



Расми 26.

Агар a ва b координатаҳои ибтидоии системаи $x'o'y'$ нисбат ба системаи xoy бошанд, он гоҳ байни координатаҳои нуқтаи M дар системаҳои xoy ва $x'o'y'$ чунин вобастаги љой дорад:

$$\begin{cases} \text{x} = x' + \text{a} \\ \text{y} = y' + \text{в} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \qquad (4.1)$$

Мисоли 1. Ибтидои системаро ба нуқтаи $O'(2;-1)$ кӯчонида муодилаи $x^2+2y^2-4x+4y+2=0$ – ро содда намоед ва графики онро созед.

Ҳал: Дар ин муодила гузориши $x=x'+2$, $y=y'-1$-ро иљро намоем:

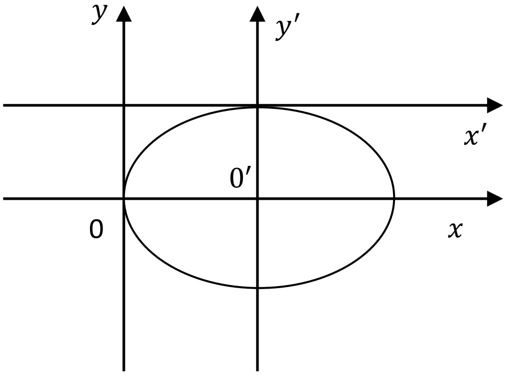
$(x'+2)^2+2(y'-1)^2-4(x'+2)+4(y'-1)+2=0$

Ин муодиларо содда намуда, муодилаи зеринро ҳосил менамоем: $x'^2+2y'^2=4$

ё ин ки $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{2}=1.$

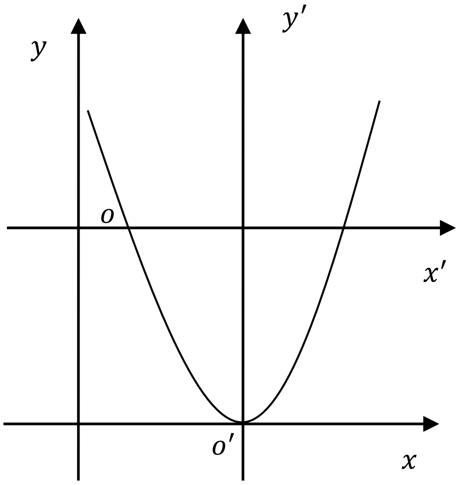
Мисоли 2. Муодилаи параболаи $y=2x^2-8x+5$ (4.2)

ба намуди каноники оварда шавад. Қуллаи парабола муайян карда шавад.



Расми 27.

Ҳал: Муодилаи (4.2) - ро ба намуди зерин менависем:



Расми 28.

$y=2(x^2-4x+4)-3,$

ё ки

$y+3=2(x-2)^2$

Ивазкунии $x-2=x'$, $y+3=y'$

–ро љори мекунем, он гоҳ

муодилаи парабола дар

системаи нав чунин шаклро мегирад:

$$y'=2x'^2$$

Аз ин љо дида мешавад, ки қуллаи ин парабола, дар нуқтаи o' *(2;-3)* љой гирифтааст.

1.2 Даврзанонии тирҳои координати.

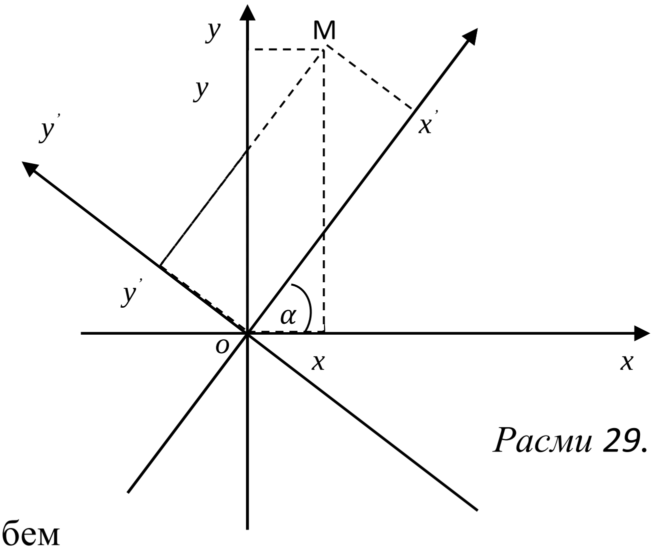
Бигузор ибтидои ду системаи координатаҳои росткунљаи декарти дар як нуқта љойгиранд ва кунљи байни тирҳои *Ox ва* Ox' ба α баробар бошад,

Он гоҳ вобастагии координатаҳои ягон нуқтаи *M-и* системаҳои *xoy* ва $x'oy'$ *ба воситаи формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:*

$$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = xcos\alpha + ysin\alpha \\ y' = ysin\alpha + xcos\alpha \end{cases} \qquad (4.3)$$

Ин формула координатаҳои *x ва y-и* нуқтаи *M*-ро бо воситаи координатаҳои нави x' *ва* y' *ва баръакс* ифода мекунад.

Мисоли 1. Пас аз ба кунљи $\alpha = 30^0$ *давр занонидани* тирҳои координати координатаҳои нави нуқтаи *A(*$\sqrt{3}$*;3)* ёфта шаванд.



Расми 29.

Ҳал: Мувофиқи формулаи (4.3) меёбем

$x'=\sqrt{3}\cos 30°+3\sin 30°=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=3,$

$y'=-\sqrt{3}\sin 30°+3\cos 30°=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3},$

Ҳамин тавр координатаҳои нави нуқтаи *A(*$\sqrt{3}, 3$*).*

Мисоли 2. Ба воситаи даврзанонидани тирҳои координати ба кунљи 45° муодилаи $5x^2-6x+5y=32$ (4.4)

содда карда шавад.

Ҳал: Дар вақти $\alpha=45°$ будан, формулаи (4.3) намуди зеринро мегирад:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \qquad (4.5)$$

Дар муодилаи (4.4) гузориш (4.5)-ро иљро мекунем.

$$5\cdot\frac{1}{2}(x'-y')^2- 6\cdot\frac{1}{2}(x'^2-y'^2)+5(x'+y')=32,$$

$$5\ x'^2\ -10\ x'y'\ +5\ y'^2\ -\ 6\ x'^2\ +6\ x'^2\ +5\ x'^2\ +10\ x'y'\ +5\ y'^2\ -$$

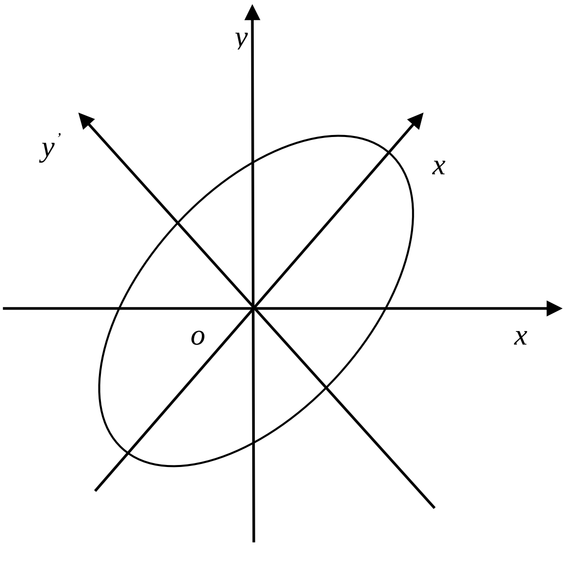
$$6x'^2+6y'^2+5x'^2+10x'y'+5y'^2=32$$

$$4x'^2+16y'^2=32$$

ё ки

$$\frac{x'^2}{8}+\frac{y'^2}{2}=1$$

Ҳамин тавр муодилаи додашуда, эллипсро тасвир мекунад (расми 29):



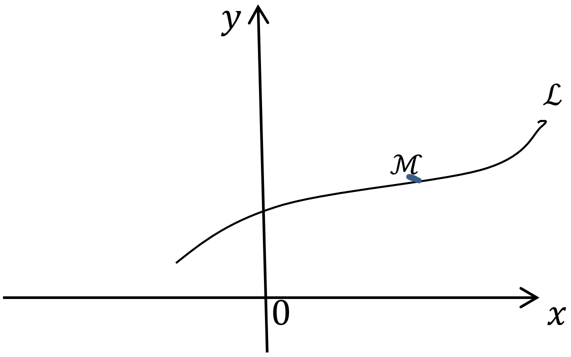
Расми 30

Давра ва муодилаи он

Бигузор дар ҳамворӣ хати $\mathcal{L}$ дода шудааст (расми 31). Агар муодилаи $\mathcal{F}(x;y)=0-$ро координатаҳои нуқтаи ихтиёрии ин хат қаноат кунонаду координатаҳои нуқтаҳои берун аз ин хат љойгирифта қаноат накунонад баробарии $\mathcal{F}(x;y)=0$ муодилаи хати $\mathcal{L}$ номида мешавад.

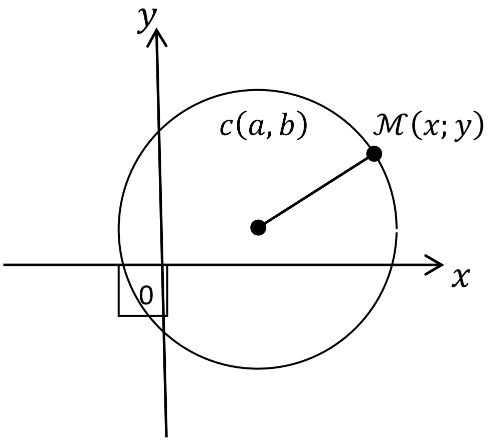
Муодилаи умумии хати тартиби дуюм намуди зерин дорад:

$$\mathcal{A}x^2+\mathcal{B}xy+\mathcal{C}y^2+\mathcal{D}x+Ey+\mathcal{F}=0. \qquad (4.6)$$



Расми 31.

Таъриф: Љои геометрии нуқтаҳои ҳамворї, ки масофаи онҳо аз нуқтаи додашуда (марказ) бузургии доимї (радиус) мебошад, давра номида мешавад.



Расми 32.

Аз рӯи таърифи додашуда ба осонӣ муайян менамоем , ки муодилаи

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\mathcal{R}^2 \qquad (4.6\ )$$

муодилаи давраи радиусаш $\mathcal{R}$ ва марказаш дар нуқтаи $c(a,b)$ љойгирифта мебошад. Муодилаи (4. 6) муодилаи каноникии давра номида мешавад. Муодилаи (4.6)-ро дар намуди зерин менависем.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - \mathcal{R}^2 = 0. \quad (4.7)$$

Ишораҳои $\mathcal{D} = -2a, \quad E = -2b, \quad \mathcal{F} = a^2 + b^2 - \mathcal{R}^2$ – ро дохил намуда, муодилаи (4.6)-ро ба шакли

$$x^2 + y^2 + \mathcal{D}x + Ey + \mathcal{F} = 0 \quad (4.8)$$

меорем. Аз ин љо хулоса мебарояд, ки ҳангоми $\mathcal{A} = 1 = \mathcal{C} = 1, \ \mathcal{B} = 0$ ва $\mathcal{F} < 0,$ муодилаи (4.6) муодилаи давра мебошад.

Мисоли 1. Координатаҳои марказ ва радиуси даврае, ки муодилаи он

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \quad (4.9)$$

аст, ёфта шаванд.

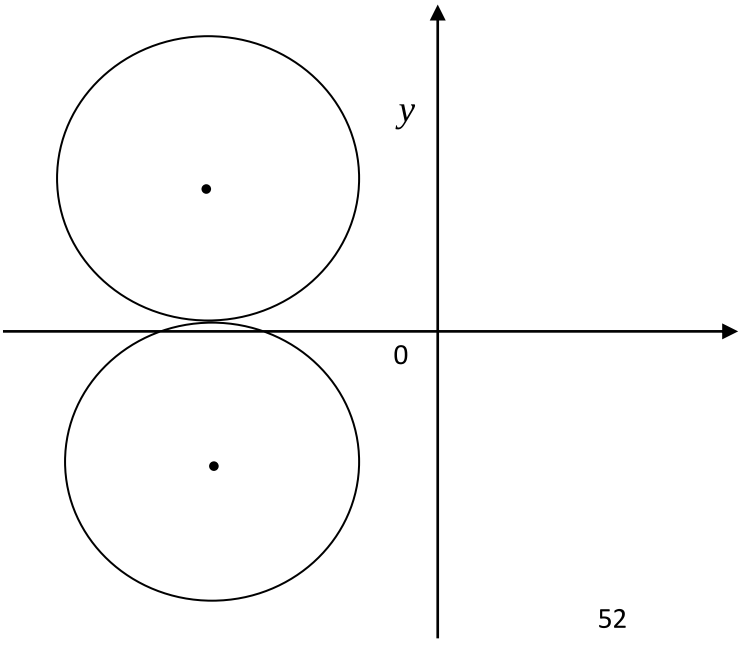
Ҳал. Тарафи чапи муодилаи (4.9)-ро ба квадратҳои пурра оварда, дар намуди

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

менависем. Аз ин љо дида мешавад, ки нуқтаи $\mathcal{C}\ (2;1)$ маркази давра буда, радиуси он $\mathcal{R} = 2$ мебошад.

Мисоли 2. Муодилаи даврае, ки радиуси он $\mathcal{R} = 3$ буда, ба тири $0x$ дар нуқтаи (-5,0) мерасад, тартиб дода шавад.

Ҳал. Азбаски дар нуқтаи расиш радиус ба тири $0x$ перпендикуляр аст, абсциссаи марказ $a = -5$ ва ординатаи он $b = \pm 3$ ва радиуси он ба R=3 баробар мешавад.



Расми 33.

Яъне ин хел давра дуто мебошад маркази якеи он нуқтаи A(- 5 , 3) маркази дуйумаш B(-5 , -3).

Муодилаи яке аз онҳо

$$(x+5)^2+(y-3)^2=9$$

ва дигаре

$$(x+5)^2+(y+3)^2=9$$

мебошад.

Мисоли 3. Муодилаи давраи марказаш дар нуқтаи $\mathcal{C}(1{,}0)$ будае, ки аз ибтидои системаи координатаҳо мегузарад, тартиб дода шавад.

Ҳал. Дар муодилаи каноникии ин давра

$$(x-1)^2+y^2=\mathcal{R}^2$$

радиус $\mathcal{R}$ номаълум аст. Азбаски давра аз нуқтаи 0 (0,0) мегузарад, пас

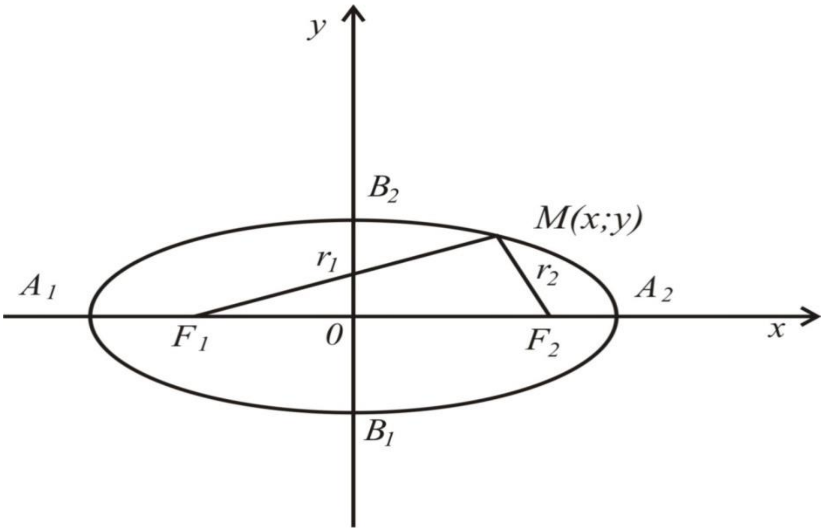
$$(0-1)^2+0^2=\mathcal{R}^2$$

Аз ин љо $\mathcal{R}=1$. Ҳамин тариқ, муодилаи каноникии давра чунин мешавад: $(x-1)^2+y^2=1$.

Маъруза 12

Эллипс ва муодилаи каноникии он

Таъриф: Љои геометрии нуқтаҳои ҳамворие, ки суммаи масофаи онҳо то ду нуқтаҳои додашудаи $\mathcal{F}_1$ ва $\mathcal{F}_2$ (фоқусҳо) бузургии доимӣ (калон аз масофаи байни фоқусҳо) аст, эллипс номида мешавад.



Расми 34.

Мувофиқи таъриф

$$r_1 + r_2 = 2a,\ \ a > 0. \tag{4.10}$$

мебошад. Агар $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 = 2c$, бошад он гоҳ

$$\mathcal{F}_1(-c;0),\ \mathcal{F}_2(c;0),\quad a > c$$

буда

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{4.11}$$

Қиматҳои r_1 ва r_2-ро ба (4.10) гузошта, баъд аз содда намудан, муодилаи каноникии эллипсро ба намуди зерин ҳосил менамоем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.12}$$

Дар ин љо $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = 2a-$ тири калон, $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 = 2b-$ тири хурд, $a-$нимтираи калон, b - нимтираи хурди эллипс номида мешаванд. Дар байни бузургиҳои a, b ва c вобастагии зерин љой дорад:

$$a^2 - b^2 = c^2 \tag{4.13}$$

$\mathcal{E} = \frac{c}{a}$ $-$эксцентриситети эллипс номида мешавад. Азбаски $c < a$, пас $\text{c} < 1$ аст. r_1 ва r_2-радиусҳои фокалии эллипс номида мешаванд ва барои онҳо формулаҳои зерин љой доранд:

$$r_1 = a + \mathcal{E}x. \tag{4.14}$$

$$r_2 = a - \mathcal{E}x.$$

Масъалаи 1. Эксцентриситети эллипсй

$$\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{25}=1$$

ёфта шавад.

Ҳал. Дар ин љо $a=13,\ b=5$ аст. Бинобар он

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12.$$

Пас $\mathcal{E}=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}=0.92$ аст.

Масъалаи 2. Тири хурди эллипс ба 6 ва эксцентриситети он ба 0,8 баробар аст. Муодилаи эллипс тартиб дода шавад.

Ҳал. Дар ин љо $b=6$ ва $\mathcal{E}=0{,}8$ аст.

Нимтираи калонро ҳисоб мекунем:

аз ифодаи

$$\mathcal{E}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

меёбем, ки

$$\mathcal{E}^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

Аз ин љо

$$a^2=\frac{b^2}{1-\mathcal{E}^2}=\frac{36}{1-0{,}64}=\frac{36}{0{,}86}=100.$$

Яъне $a=10$. Ҳамин тариқ, маълум гардид, ки муодилаи каноникии эллипс чунин аст:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

Масъалаи 3. Дар эллипси $9x^2+25y^2=225$ чунин нуқтае ёфта шавад, ки масофаи он аз фокуси рост нисбат ба фокуси чап љор маротиба калон бошад.

Ҳал. Муодилаи эллипсро ба намуди каноникї меорем:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Дар ин љо $a=5, b=3$ аст.

Бинобар он

$$C=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4.$$

Аз рӯи формулаи (3.10) пайдо мекунем

$$r_1=5+\frac{4}{5}x\,,\quad r_2=5-\frac{4}{5}x.$$

Мувофиқи шарти масъала $4r_1=r_{2.}$

Пас,

$$20+\frac{16}{5}x=5-\frac{4}{5}x$$

ё ин ки

$$4x=-15.$$

$$x=-\frac{15}{4}.$$

Ин қиматро ба муодилаи эллипс гузашта ординатаро муайян менамоем.

$$25y^2=225-9\left(-\frac{15}{4}\right)^2$$

$$y^2=\frac{225(16-9)}{25:16},\qquad y=\pm\frac{\sqrt{63}}{4}$$

Ҳамин тариқ, ин хел нуқтаҳо дуто мављуд мебошанд:

$$M_1\left(-\frac{15}{4};\frac{\sqrt{63}}{4}\right)\quad \text{ва } M_2\left(-\frac{15}{4};-\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$$

Масъалаи 4 . Эллипс бо муодилаи $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ додашуда бошад, фокусҳои он, экссентриситет, директрисаҳо ва радиусҳои фокалии нуқтаи M_1 (5,-$3\sqrt{3}$) -ро ҳисоб кунед.

Ҳал: а) Дар ин љо нимтираҳои эллипс а= 10 ва в=6 аст, фокуси эллипсро аз рӯи формулаи зерин ҳисоб мекунем:

$$c^2 = \alpha^2 - в^2 = 100 - 36 = 64; \ c = 8$$

Инак фокусҳои эллипс нуқтаҳои $F_1(8,0)$ ва F_2 $(-8{,}0)$ мебошад.

a) экссентриситети эллипс:

$$\varepsilon = \frac{c}{\alpha} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \ \varepsilon = \frac{4}{5}$$

b) директрисаҳои эллипс:

$x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$ => $x = \pm\frac{10}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{25}{2}$; яъне директрисаҳои эллипс хатҳои рости

$x = \frac{25}{2}$ ва $x = -\frac{25}{2}$ мебошанд.

c) Радиусҳои фокалии эллипсро аз рӯи формулаҳои

$r_1 = \alpha - \varepsilon x$ барои фокуси рост ва

$r_2 = \alpha - \varepsilon x$ барои фокуси чап ҳисоб карда мешаванд.

Пас, $r_1 = 10 - \frac{4}{5}x$ ва

$r_2 = 10 + \frac{4}{5}x$

Нуқтаи $M_1(-5,\text{-}3\sqrt{3})$ нуқтаи эллипс мебошад; Ҳақиқаттан ҳам координатаҳои ин нуқтаро бо муодила гузорем:

$$\frac{5^2}{100} + \frac{\left(-3\sqrt{3}\right)^2}{36} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Яъне M_1 – нуқтаи эллипс аст: Акнун радиусҳои фокалии онро ҳисоб мекунем:

$$r_1 = 10 - \frac{4}{5} \cdot (-5) = 10 + 4 = 14.$$

$$r_2 = 10 + \frac{4}{5} \cdot (-5) = 6.$$

Масъалаи 5. Нуқтаи буриши хати рости 3х- 4у- 40= 0 ва эллипси $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$ – ро ёбед.

Ҳал: Барои ёфтани нуқтаҳои буриш муодилаҳои хати рост ва эллипсро ҳамъоя ҳал менамоем, яъне системаи зеринро ҳал менамоем:

$$3x- 4y- 40= 0$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

Аз муодилаи якум $x=\frac{1}{3}(4y + 40)$ - ро ба муодилаи дуюм мегузорем:

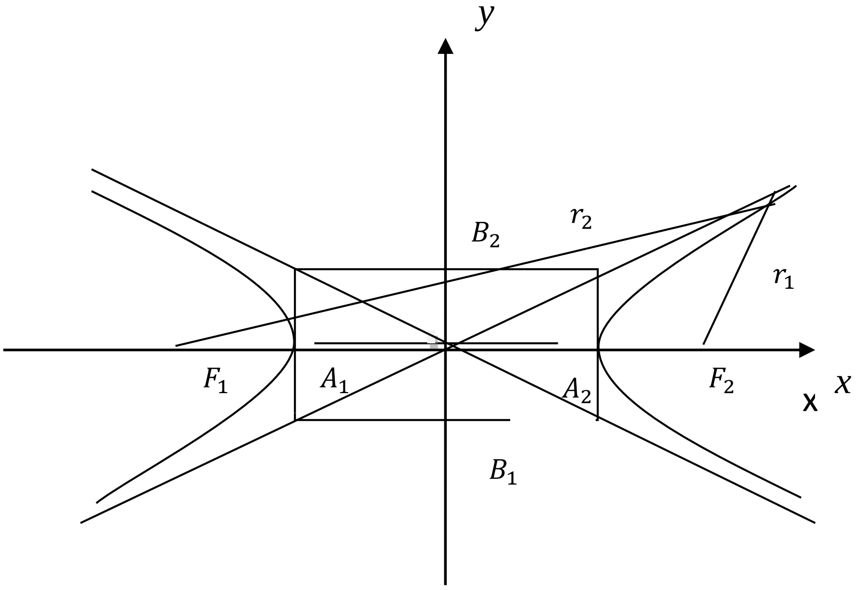
$$\frac{\left(\frac{1}{3}(4y+40)\right)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{9}\cdot 16(x+10)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow (y+10)^2+\ y^2$$
$$=1 \Rightarrow y^2+20y+100+y^2=9 \Rightarrow 2y^2+20y+91=0$$

$$\mathcal{D}=10^2-2\cdot 91=100-182=-82<0$$

Муодилаи квадратии ҳосил шуда решаҳои ҳақиқи надорад, яъне, система ҳал надорад. Инак, хати рости $3x- 4y- 40= 0$ эллипсро намебурад, яъне хатти рост берун аз эллипс мегузарад.

Гипербола ва муодилаи канонии он

Љойи геометрии нуқтаҳои ҳамвори, ки фарқи масофаи онҳо аз ду нуқтаҳои додашудаи *F₁* ва *F₂* (фокусҳо) бузургии доими аст, гипербола номида мешавад.



расми 35.

Аз рӯйи таъриф $r_1 - r_2 = \pm 2a$ (4.15)

Агар F_1 F_2 =2c бошад, он гоҳ дар гипербола ҳам r_1 ва r_2 ба воситаи формулаҳои (4.11) ифода меёбанд. Инро ба ҳисоб гирифта, муодилаи (4.15) баъд аз содда намудан ба шакли зерин меорем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.16)$$

ки онро муодилаи каноники гипербола меноманд. дар ин љо A_1 A_2= 2a –тири ҳақиқи, B_1B_2 = 2b – тири мавҳум, a – нимтираи ҳақиқї ва b- нимтираи мавҳуми гипербола номида мешаванд. Дар байни a, b ва с вобастагии

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad (4.17)$$

љой дорад, Эксцентриситети гипербола $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ аст.

Радиусҳои фокалии гипербола ба воситаи чунин формулаҳо ифода меёбанд:

$$\left.\begin{matrix} r_1 = -a + \varepsilon x. \\ r_2 = a + \varepsilon x \end{matrix}\right\}$$ барои шохаи рост, (4.18)

$$\left.\begin{matrix} r_1 = a - \varepsilon x. \\ r_2 = -a - \varepsilon x \end{matrix}\right\}$$ барои шохаи чап, (4.19)

хатҳои рости

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

асимптотаҳои гипербола номида мешавад.

Директрисаҳои гипербола.

Хатҳои рости $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$ - ро, ки ба тири фокалии (ҳақиқии) гипербола перпендикуляр буда аз марказ дар масофаи $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ воқеанд , директрисаҳои ба фокусҳои росту чап мувофиқ оянда меноманд.

Азбаски барои гипербола

$\varepsilon > 1$ мебошад. пас, $\frac{\alpha}{\varepsilon} < \alpha$ аст ва аз ҳамин сабаб директрисаҳои гипербола дар байни қуллаҳои он воқеъ мешаванд. Хосияти директрисаҳои гипербола ба монанди хосияти директрисаҳои эллипс мебошад,яъне $\frac{r}{d} = \varepsilon$

Муодилаи расанда дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ба гиперболаи $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{в^2}=1$ ба намуди зерин навишта мешавад:

$$\frac{xx_0}{\alpha^2} - \frac{yy_0}{в^2}=1$$

Муодилаи диаметри гипербола,ки бо хордаҳои параллели самташон муайян ҳамроҳшуда мебошанд, намуди зерин дорад:

$$\frac{x}{\alpha^2} - \frac{y}{в^2}\ \kappa_1\ = 0 \quad \text{ёки} \quad y = \frac{в^2}{\alpha^2\ \kappa_1}x$$

ки дар ин љо κ_1 -коэффисиенти кунљии хордаҳои параллел мебошад.

Масъалаи 1. Нимтираҳо, координатаҳои фокусҳо ва эксцентриситети гиперболаи $9x^2$-$16y^2$=36 ёфта шавад.

Ҳал: Муодилаи гиперболаро б муодилаи каноники меорем:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Аз ин љо нимтираи ҳақиқи a=2, нимтираи мавҳум $b = \frac{3}{2}$ аст, азбаски

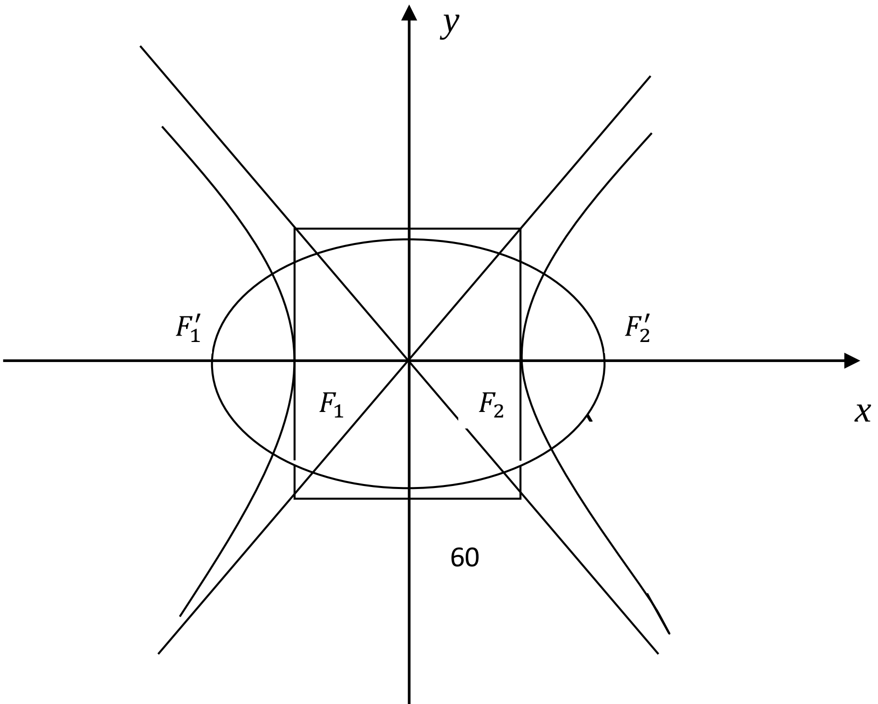
$c=\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$,

эксцентриситети гипербола $\varepsilon = \frac{5}{2}: 2 = \frac{5}{4}$

аст ва фокусҳои гипербола $F_1(-\frac{5}{2}; 0)$ ва $F_1(\frac{5}{2}; 0)$ мебошад.

Масъалаи 2. Эллипси $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5}$=1 дода шудааст. Муодилаи гиперболае, ки қуллаҳои он дар фокусҳо ва фокусҳояш дар қуллаҳои ин эллипс љой гирифтаанд, тартиб дода шавад.

Ҳал: Координатаҳои фокусҳои эллипсро муайян мекунем. Азбаски a^2=8 ва b^2=5 аст, аз рўи формулаи $c=\sqrt{a^2 - b^2}$ муайян менамоем, ки $c=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$ аст, инак фокусҳои эллипс нуқтаҳои $F_1(-\sqrt{3;0})$ ва $F_1(\sqrt{3;0})$ мебошанд.



расми 36.

Мувофиқи шарти масъала нимтираҳои гипербола $a^*=\sqrt{3}$ нимтираи ҳақиқи ва $F_2(2\sqrt{2}\ ; 0)$ ва $F_1(-2\sqrt{2}\ ; 0)$ фокусҳои гипербола мебошанд. Аз рӯи формулаи $b^2= c^2 - a^2$

нимтираи мавҳумро муайян мекунем:

$b^2 = \sqrt{8-3} = \sqrt{5}$

Ҳамин тариқ муодилаи гипербола ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5}=1$$

Масъалаи 3. Гипербола аз нуқтаи М $(4;-2\sqrt{2})$ мегузарад ва нисбат ба тирҳои координати симметри буда, нимтираи мавҳуми он ба 2 баробар аст. Муодилаи гиперболаро тартиб диҳед ва масофаи аз нуқтаи М то фокусҳои онро муайян намоед.

Ҳал: Мувофиқи шарт нимтираи мавҳуми гипербола $b=2$ аст ва ин гипербола аз нуқтаи $M(6; -2\sqrt{2})$ мегузарад, пас

$$\frac{6^2}{a^2} - \frac{-2\sqrt{2}}{2}=1$$

аз ин љо

$$\frac{36}{a^2} - 2=1$$

$$a^2 = 12$$

$$a = 2\sqrt{3}$$

Бинобар он муодилаи гипербола чунин аст:

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4}=1$$

Дар ин љо $c = \sqrt{12+4}=4$ аст. Бинобар он $\varepsilon = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ аст.

Акнун аз формулаҳои радиусҳои фокали истифода бурда, масофаи нуқтаи М-ро то фокусҳо муайян мекунем:

$r_1= -\sqrt{12} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 6 = -2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$r_2= -\sqrt{12} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 6 = 2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

Масъалаи 4. Аз дастур илова асимптотаҳо ва директрисаҳо .

Ҳал: Муодилаи ассимптотаҳо $y= \pm\frac{в}{\alpha}x$, мувофи*қ*и шарт

$\alpha = 4,\ в = \frac{9}{4}$ ва муодилаи ассимптотаҳо: $y = \pm\frac{9}{4\cdot4}x = \pm\frac{9}{16}x$

Муодилаи директрисаҳо $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$; мувофиқи шарт α=4, c = $\frac{5}{4}$,пас муодилаи директрисаҳо:

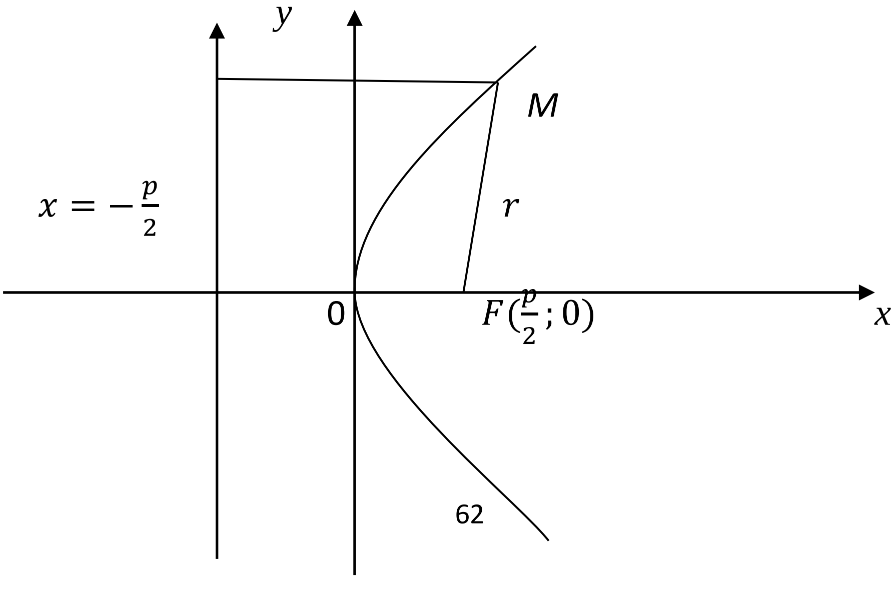
$$x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon} = \pm\frac{4}{\frac{5}{4}} = \pm\frac{16}{5}$$

$$x = \pm\frac{16}{5}:$$

Парабола ва муодилаи каноникии он

Таъриф. Љойи геометрии нуқтахои хамворӣ, ки аз нуқтаи дода шуда (фокус) ва аз хати рости дода шуда(директрисса), дар як хел масофа љойгир шудаанд, парабола номида мешавад.

Агар тири симметрии парабола тири Ox бошад, он гох муодилаи он намуди $y^2=2px$, $p>0$ (3.16) мегирад(ба расм нигаред).



Расми 37.

Агар тири симметрии парабола тири Оу бошад, он гоњ, муодилаи он намуди

$x^2=2py$, $p>0$ - ро мегирад. (4.20)

Радиуси фокалии параболаи (4.19) аз рӯи формулаи

$r=x+\frac{p}{2}$, барои параболаи (4.17) $r=y+\frac{p}{2}$, $(p>0)$ муайян карда мешавад. Барои параболаи (4.16) хати рости ба тири симметри параллели

$x=-\frac{p}{2}$ ва барои параболаи (4.17) хати рости

$y=-\frac{p}{2}$ директриса мебошанд.

Мисоли 1. Парабола нисбат ба тири Ох симметрӣ аст ва аз нуқтаи

M(2;-4) мегузарад, муодилаи он тартиб дода шавад.

Хал: Мувофиқи шарти мисол парабола намуди (3,16)-ро дорад. Азбаски парабола аз нуқтаи M(2;-4) мегузарад, пас координатаҳои ин нуқта муодилаи (3,16) - ро бояд қаноат кунонанд.

$$(-4^2)=2\cdot 2p$$

Аз ин љо p=4. Бинобар ин муодилаи ин парабола чунин аст.

$$y^2=8x$$

Мисоли 2. Муодилаи љойи геометрии нуқтаҳое, ки аз нуқтаи A(0;2) ва аз тири Ох дар як хел масофа љойгир шудаанд, тартиб дода шавад.

Хал: Бигзор M(x , y) нуқтаи дилхоҳи ҳамвори бошад, он гоҳ мувофиқи шарт бояд баробарии (чи тавре ки аз расми 31 мебинем)

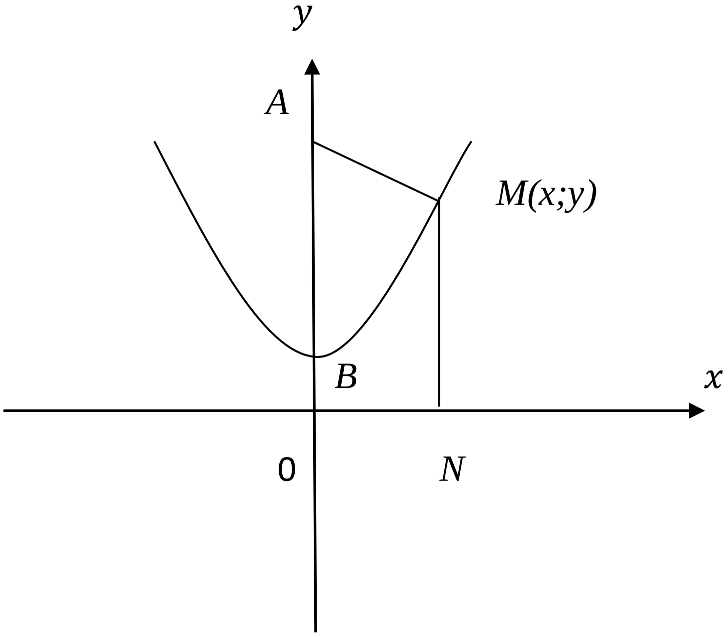
$|AM|=|MN|$ иљро шавад.

$|AM|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ ва MN = y.

Аз ин љо $\sqrt{x^2+(y-2)^2} = y$.

Инро содда карда муодилаи параболаро ба намуди зерин ҳосил менамоем:

$x^2 = 4(y-1)$, яъне тири симметрии ин парабола тири Oy аст ва қуллаи он дар нуқтаи B(0;1) љой гирифтааст.



Расми 38.

Мисоли 3. Дар параболаи $y^2=6x$

чунин нуқтае ёфта шавад, ки масофаи он то фокус ба 4,5 баробар бошад.

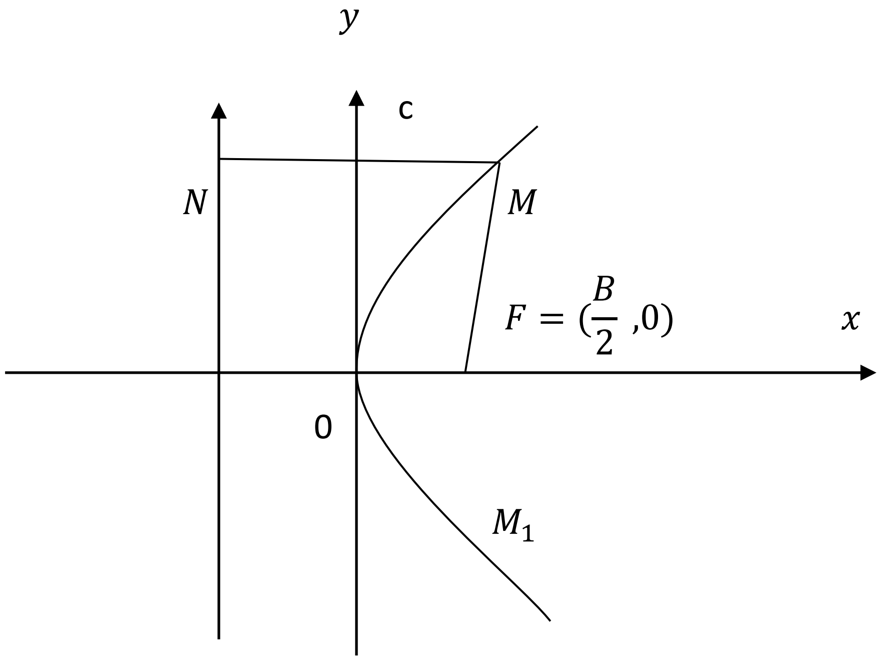
Хал: Дар ин љо p=3 аст. Бинобар ин F($\frac{4}{3}$; 0) фокус аст. Мувофиқи шарти мисол агар M(x, y) ягон нуқтаи парабола бошад он гоҳ бояд баробарии MN= MF=4.5 иљро шавад (расми 45);

пас, x=CM= $\mathrm{NM} - \mathrm{NC} = 4.5 - \frac{3}{2} = 3$

x=3

Инро ба муодилаи парабола гузошта ординатаи нуқтаи M-ро муайян мекунем: y^2=6*3=18. Аз ин љо y=±3$\sqrt{2}$Хамин тариқ ин гуна нуқта 2 то

мавчуд будаанд : $M_1(3, 3\sqrt{2})$ ва $M_2(3, -3\sqrt{2})$.



Расми 39.

Мисоли 4. Муодилаи параболаро тартиб диҳед ,ки фокуси он дар нуқтаи $F(4{,}3)$ буда директрисааш хати рости $y + 1 = 0$ мебошад.

Ҳал. Азбаски фокуси парабола дар нуқтаи $F(4{,}3)$ буда директрисаи он хати рости $y = -1$ аст, тири симметрияи парабола аз нуқтаи $F(4{,}3)$ ба директрисаи $y = -1$ перпендикуляр бояд гузарад, бинобар он тири симметрияи параболаи мазкур хати рости $x = 4$ мешавад ва муодилаи умумии парабола ба намуди

$$(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$$

мебошад, ки дар инљо $A(\alpha, \beta) -$ қуллаи парабола аст. Қуллаи парабола мувофиқи таъриф аз фокус ва директриса дар як хел масофа мехобад. Бинобар он абсциссаи қуллаи парабола $\alpha = 4$ бояд баробар бошад ва ординатаи он

$$\beta = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

Параметри парабола ба ними масофаи аз фокус то директриса баробар мешавад, яъне

$$\frac{p}{2} = AF \implies \frac{p}{2} = 2 \implies p = 4$$

қиматҳои α, β ва p –ро ба муодилаи мегузорем:

$$(x - 4)^2 = 2 \cdot 4(y - 1)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 8y - 8 \implies$$

$$8y = x^2 - 8x + 24 \implies y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$$

Љавоб: Муодилаи парабола:

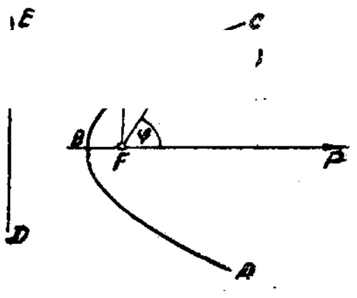
$$y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$$

Маъруза 13

Муодилаи буриши конусӣ дар координатҳои қутбӣ. Мо дар ин параграф ба сифати қутб яке аз фокусҳо ва ба сифати тири қутбӣ тири фокалии буриши конусиро қабул карда, муодилаи буриши конусиро дар координатҳои қутбӣ ҳосил менамоем.

Фарз мекунем, ки *ABC*(расми 60) камони буриши конусӣ (эллипс, гипербола ё парабола), *B* қулла, *F*фокус ва*DE* директирисаи мувофиқ мебошад. Дар тири қутбӣ самтро аз фокус *F* ба тарафи муқобили директриса интихоб карда, ба сифати қутб нуқтаи Fваба сифати тири қутбӣхати рости BFP –ро қабул мекунем: эксцентириситети хти каҷро бо ε ишорат менамоем. Бигузор M_0 нуқтаи камони BC – и буриши конусӣ бошад, ки он дар перпендикуляри аз қутб (F)ба тири қутбӣ гузаронидашуда мехобад. Дарозии FM_0 – ро бо pишорат карда, онро параметри буриши конусӣ меномем.

Расми 59.



Расми 60.

Фарз мекунем, ки $M\,(r,\varphi)$ нуқтаи дилхоҳи хати каҷ мебошад. Муодилаеро тартиб медиҳем, ки он вобастагии байни координатҳои қутбӣ(r ва φ) ва ададҳои додашудаи ε ва p – ро ифода менамояд. Мувофиқи хосияти умумии ҳамаи нуқтаҳои буриши конусӣ баробарии зеринро навишта метавонем:

$$\frac{FM_0}{M_0N_0} = \varepsilon$$

Ҳангоми дар буриши конусӣ дилхоҳ ҷойгир шудани нуқтаи M

$$FM = r \text{ ва } NM = N_0M_0 + rcos\varphi.$$

$\frac{FM_0}{M_0N_0} = \varepsilon \text{ ва } FM_0 = \text{раст, пас } N_0M_0\text{ҳ}\frac{p}{\varepsilon}$.бинобар ин,

$$NM = \frac{p}{\varepsilon} + rcos\,\varphi. \qquad (13)$$

Он гоҳ баробарии (12) – ро ба намуди

$$\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon} + rcos\,\varphi} = \varepsilon$$

навиштан мумкин аст, ки аз ин ҷо$r = \frac{\mathrm{p}}{1-rcos\,\varphi}$. (14)

Агар $\varepsilon < 1$ бошад, муодилаи (14) муодилаи эллипс, агар $\varepsilon = 1$ бошад, муодилаи парабола ва агар $\varepsilon < 1$ бошад, муодилаи гипербола мешавад.

Дар муодилаи (14) бузургии p барои парабола ба қимати аввалааш, яъне ба ҳамон қимате, ки дар муодилаи $y^2 = 2px$ дошт, соҳиб аст. Воқеан, барои парабола $p = FM_0 = M_0N_0$, яъне pмасофаи байни фокус ва директриса (параметри парабола) мебошад.

Барои мавриди эллипс ва гипербола чунин савол гузоштан мумкин аст: параметри фокалӣp – ро ба воситаҳои нимтирҳои a ва b чӣ тавр ифода мекунанд?

Барои мавриди эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ба муодилааш координатҳои яке аз нуқтаҳои эллипс, яъне $M_0(-c,p) - po$ мегузорем; баъди ин ифодаи зайлро ҳосил мекунем:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1.$$

ё ки

$$\frac{p^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

аз ин ҷо

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2} \ \ ва \ \ p = \frac{b^2}{a}.$$

Дар мавриди гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ будан координатҳои нуқтаи он $M_0(c,p)$ – ро ба муодила гузошта, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \ \ ё \, ки \frac{p^2}{b^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

аз ин ҷо

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2} \ \ ва \ \ p = \frac{b^4}{a}.$$

Инак муодилаи эллипс, гипербола ва парабола дар координатҳои футбӣ (дар мавриди интихоби нишон додашудаи қутб ва тири қутбӣ) намуди якхела доранд:

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon \cos \varphi}, \qquad (14)$$

Ғайр аз ин барои эллипс ва гипербола параметри фокалӣp бо формулаи

$$p = \frac{b^2}{a} \qquad (15)$$

ба параметрҳои aва bалоқаманд аст.

Дар мавриди гипербола будан муодилаи (14) барои яке аз шохаҳои он ҳосил карда шудааст. Локин бовар кардан мумкин аст, ки координатҳои нуқтаи дилхоҳи шохаи дигари гипербола онро қаноат мекунонанд

Маъруза 14

Табдилдиҳии муодилаи умумии дараҷаи дуйум. Муодилаи умумии хатҳои качи тартиби дуйум ва таснифи он.Маркази хати качи тартиби дуюм.Хатҳои качи маркази ва номаркази

Тадқиқи муодилаи умумии хатҳои тартиби дуйум (муодилаи дараҷаи дуйуми ду номаълума) ва ба намуди соддатарин (каноники) овардани он яке аз масъалаи муҳими геометрияи аналитикӣ мебошад.

Ин масъаларо дар ҳолати умуми ҳал накарда мо ин масъалаҳоро дар мавридҳои хусуси дар мисолҳои алоҳида ҳал мекунем. Муодилаи умумии дараҷаи дуйуми дуномаълумнок намуди зерин дорад:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4.21)$$

Лекин дар бисьер мавридҳо дар назарияи хатҳои тартиби дуйум коэффициентҳои $B\,, D, E$ ба 2 тақсим шуда дохил мешаванд, бинобар он муодилаи умумии дараҷаи дуйумро ба намуди

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (4.22)$$

гирифтан мувофиқи мақсад мебошад.

Мисол: Агар муодила:

$x^2 + 3xy + 2y^2 + 5x + 4y + 1 = 0$ бошад,

$A = 1, B = \frac{3}{2}, C = 2, D = \frac{5}{2}, E = 2, F = 1$ мебошад.

Ададҳои A, B, C, D, E, F коэффициентҳои муодила $A, B, C -$ коэффициентҳои калон, D , E – коэффициентҳои хатти ва F – аъзои озод мебошад.

Муодилаи (2) – ро ба намуди зерин ҳам навиштан мумкин:

$$(Ax + By + D)x + (Bx + Cy + E)y + (Dx + Ey + F) = 0 \qquad (4.23)$$

Ин намуди муодилаи умуми дар оянда истифода бурда мешавад.

Маъруза 15

Ба намуди каноники овардани муодилаи умумий хати качи маркази Содда намудани муодилаи умуми.

Бигзор муодилаи (2) дода шуда бошад. Ин муодиларо ба воситаи ба системаи координатии дигар гузаштан ба намуди соддатарин овардан талаб карда мешавад.

Талабҳои зерин гузошта мешавад:

1) Бояд аз коэффициентҳои калон коэффициенти назди ҳосили зарби координатаҳо x, y хориљ шавад, яъне $(B = 0)$,
2) Бояд шумораи аъзоҳои дараљаи якум (хаттӣ D, E) аз хама кам бо овардани муодилаи шад.
3) Агар имкон бошад, аъзои озод хориљ шавад.

Муодилае, ки дар натиљаи иљро шудани ин талабҳо ҳосил мешавад, муодилаи каноникии хати каљ номида мешавад.

Дар мисолҳои алоҳида чи тавр ба иљро овардани ин талабҳоро дида мебароем.

Барои иљро намудани талабҳои дар боло гузошта шуда , яъне барои ба намуди каноники овардани муодилаи умумии дараљаи дуйум мо аз табдилдиҳии системаи координатии Декарти – параллель кўчонии ибтидои координата ва даврзанонии тирҳои координати истифода мебарем.

Аввало мо самтҳои тирҳои координатиро иваз накарда ибтидои координатаро ба ягон нуқтаи ҳоло номаълум буда $\bar{O}(x_0, y_0)$ ме кўчонем. Мувофики формулаи параллель кўчонии ибтидои координат

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_0 \\ y &= \bar{y} + y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.24)$$

Инро ба муодилаи (4.22) гузорем, муодилаи намуди зерин ҳосил мешавад:

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + 2D_x\bar{x} + 2E_y\bar{y} + \bar{F} = 0 \qquad (4.25)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2D_x = 2(Ax_0 + By_0 + D) = \bar{F}'_{x_0}(x_0, y_0) \\ 2E_y = 2(Bx_0 + Cy_0 + E) = \bar{F}'_{y_0}(x_0, y_0) \\ \bar{F} = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F = \bar{F}(x_0, y_0) \end{array}\right\} \qquad (4.26)$$

Яъне дар натиљаи ин ивазкуни коэффициентҳои назди дараљаҳои якум ба ҳосилаи хусусии қисми чапи муодила нисбат ба тағъирёбандаҳои мувофиқ баробар мешаванд; аъзои озод бошад ба қисми чапи муодила ҳангоми ба љои таъғирёбандаҳо қимати (x_0, y_0) гузаштан баробар мешавад.

Акнун мо ибтидои системаи координатии нав $\bar{O}(x_0, y_0)$ -ро, яъне киматҳои x_0, y_0 –ро ҳамин тавр интихоб мекунем, ки (агар имкон бошад) дар муодилаи ҳосил шудаи (4.25) коэффициенти назди аъзоҳои дараљаи якум D_x ва E_y хориљ шавад (ба нул баробар шавад) яъне

$$\left.\begin{array}{l} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.27) \quad \text{бошад}$$

Инак координатаҳои нуқтаи $\bar{O}(x_0, y_0)$ ибтидои координатаи нав ҳалли системаи (4.27) мешаванд. Ҳалли ин система:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \dfrac{BE - CD}{AC - B^2}; \\ y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \dfrac{AE - BD}{AC - B^2}. \end{array}\right\} \qquad (4.28)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \qquad \bar{F} = \frac{\Delta}{\delta}$$

Равшан аст, ки системаи (4.27) дорои ҳал мебошад агар $\delta = AC - B^2 \neq 0$ бошад. Ҳамин тавр дар натиљаи ин ивазкуни муодилаи умумии (4.22) намуди зеринро кабул мекунад:

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + \bar{F} = 0 \qquad (4.29)$$

Дар ин муодила мо $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ – ро бо $-\bar{x}$ ва $-\bar{y}$ иваз кунем муодила таъғир намеёбад. Яъне агар $M(\bar{x},\bar{y})$ нуқтаи хати каљ бошад, нуқтаи $N(-\bar{x},-\bar{y})$ ҳам нуқтаи ин хат мешавад. Нуќтаҳои M ва N нисбат ба ибтидои координата симметрӣ мебошанд , яъне хати каљ нисбат ба ибтидои координатии нав $\bar{O}(x_0,y_0)$ симметри мебошад ва нуқтаи $\bar{O}(x_0,y_0)$ маркази симметрияи хати каљ мебошад. Инак ибтидои координатаи нав ба маркази симметрияи (ё худ маркази) хати каљ кўчонида шудааст.

Ҳамин тавр агар муносибати $\delta = AC - B^2 \neq 0$ иљро шуда бошад хати каљ дорои маркази симметрия мешавад ва ин гуна хати каљ хати каљи маркази номида мешавад.($\delta > 0$ эллипс, $\delta < 0$ гипербола).

Агар $\delta = AC - B^2 = 0$ бошад, яъне системаи (4.27) ноҳамљоя бошад, (система ҳал надорад) он гоҳ хати каљ маркази симметрия надорад ва онро хати каљи номаркази ёки хати каљи параболи меноманд.

Системаи (4.27) - ро тадқиқ менамоем:

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.30)$$

Детерминанти ин система

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \qquad (4.31)$$

Агар $\delta \neq 0$ бошад система ҳалли ягона дорад, ва дар ин маврид хати каљи тартиби дуйум маркази ягона дорад ва эллипс (давра) ёки гипербола мешавад.

Агар коэффициентҳои A ва C ишораҳои якхела дошта бошанд, он гоҳ $\delta > 0$ ва хати каљ эллипс мебошад.

Агар A ва C ишораҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ $\delta < 0$ ва хати каљ гипербола мебошад.

Ҳамин хел мавридҳо ҳам мавчуд аст, ки ҳангоми $\delta \neq 0$ будан муодилаи умуми ба намуди каноникии ба муодилаи каноникии эллипс ёки гипербола монанд буда оварда мешавад, лекин бо ин муодилаҳо пурра якхела намешавад ва ягон хел хати каљро тасвир намекунад, (масалан қисми рост ёки 0 ёки манфи мешавад).

Баъд аз иљро кардани ивазкунии параллелкуљони ба маркази хати каљ боз соддакуниро давом медиҳем.

Бигзор дар муодилаи умумии хати каљи тартиби дуйум $\delta = 0$ бошад . Ҳангоми $\delta = 0$ будан ду маврид мавчуд:

а) системаи (4.27) умуман ҳал надорад, он гоҳ хати каљи тартиби дуйум марказ надорад, ва ин гуна хати каљ хати каљи номарказии номида мешавад. Дар ин маврид муодилаи умумиро бо ёрии табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координати ба ягон кунљ ба намуди соддатарин овардан мумкин аст. Дар натиљаи ин ивазкуни мо ҳама вақт муодилаи параболаро ҳосил мекунем.

в) системаи (4.27) ҳалли беҳад бисьёр дорад, дар ин маврид хати каљ дорои марказҳои беҳад бисьёр мешавад. Дар ин маврид муодилаи тартиби дуйум як чуфт хатҳои рости параллелро тасвир мекунад.

Дар мавриде, ки муодилаи тартиби дуйум хати каљи дорои беҳад бисьёр марказ доштаро тасвир мекунад, онро параболаи ниходвайрон номидан қабул карда шудааст.

Мисолҳо.

$$1)\; x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad \text{парабола}$$

$$2)\; 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 16 \;\; > 0, \qquad \text{эллипс}$$

$$3)\; x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 24y + 39 = 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8 < 0, \quad \text{гипербола}$$

Акнун мо муодилаи ҳосил шудаи (4.29) - ро содда мекунем. Барои ин мо аз давр занонидани тирҳои координати (ибтидои координатаро таъғир надода) истифода мебарем.

Мо чунин системаи координатии навро љорй мекунем (яъне тирҳои координатиро ба ягон кунљи α давра мезанонем), ки дар натиља дар системаи координатии нав, дар муодилаи ҳосилшуда аъзои ҳосили зарби тағъирёбандаҳо $(\bar{x}\bar{y})$ иштирок накунад, яъне $\bar{B} = 0$ шавад.

Мувофиқи формулаи табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координати

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ \bar{y} = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (4.32)$$

Ин муносибатҳоро ба муодилаи (4.29) мегузорем:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$

$$+C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + \bar{F} = 0$$

$$A\left(x'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\cos\mathrm{\alpha}\sin\alpha + y'^2\sin^2\alpha\right)^2 +$$

$$+2B\left(x'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'\cos^2\alpha - \mathrm{x'y'}\sin^2\alpha - y'^2\sin\alpha\cos\alpha\right) +$$

$$+C\left(x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha + y'^2\cos^2\alpha\right) + \bar{F} = 0 \ =>$$

$$(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha\,)x'^2 +$$

$$+(-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B\ \cos^2\alpha - 2B\ \sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha)x'y' +$$

$$+(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\ \cos^2\alpha)y'^2 + \bar{F} = 0$$

Акнун коэфициенти назди $x'y'$ –ро ба 0 баробар мекунем:

$$-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B\ \cos^2\alpha - 2B\ \sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0 \ \Longrightarrow$$

$$A\sin\alpha\cos\alpha - B\ \cos^2\alpha + B\ \sin^2\alpha - C\sin\alpha\cos\alpha = 0 \ \Longrightarrow$$

Ба $\cos^2\alpha$ – тақсим мекунем:

$$Btg^2\alpha - (C - A)tg\alpha - B = 0 \qquad (4.33)$$

Ин муодилаи квадрати нисбат ба $tg\alpha$ буда дискриминанти он

$$D = (C - A)^2 + 4B^2$$

Равшан аст, ки ҳамма вакт $D > 0$ ва бинобар он кунљи α – ро ҳама вақт ёфтан мумкин аст. Аз муодилаи квадратии (4.33) кимати $tg\alpha$ – ро ёфта аз рўи формулаҳои тригонометрї қиматҳои $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ – ро ҳисоб мекунем:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}}\ ; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

Ҳамин тавр баъд аз љорӣ намудани ивазкунии (4.32) муодилаи намуди зерин ҳосил мешавад:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + \tilde{F} = 0 \qquad (4.34)$$

Муодилаи (4.34) вобаста аз ишораҳои коэффициентҳои A', B' ва $\tilde{F}$ хатҳои каљи гуногунро муайян мекунад. Мавридҳои зерин дуљор мешаванд:

1) Агар $A' > 0,\ C' > 0$ ва $\tilde{F} < 0$ бошад муодила эллипсро муайян мекунад.
2) Агар $A' > 0,\ C' > 0$ ва $\tilde{F} > 0$ бошад муодила ҳеч ягон хатро муайян намекунад, яъне муодила маъно надорад.
3) Агар коэффициентҳои A' ва C' ишораҳои гуногун дошта бошанд (яъне $A' > 0, C' < 0$ ёки баръакс бошад) муодила гиперболаро муайян мекунад.

Акнун мавриди $\delta = 0$ –ро муоина мекунем. Агар $\delta = 0$ бошад, хати каљ номаркази мебошад (яъне марказ надорад) ва хати каљ намуди параболӣ мешавад.

Дар ин маврид барои содда намудани муодилаи умуми мо табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координатиро, яъне ивазкунии (4.32)-ро тадбиқ менамоем. Дар натиља муодила дар координатаҳои нав x' ва y' ба яке аз ду намудҳои зерин оварда мешавад:

$$A'\bar{x}^2 + 2D'x' + 2E'y' + \bar{F} = 0 \qquad (4.35)$$

Дар ин љо $A' \neq 0$ ёки ба намуди:

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + \bar{F} = 0 \qquad (4.36)$$

Дар ин љо $C' \neq 0$.

Акнун ин муодилаҳо бо ёрии табдилдиҳии параллель кўчонии ибтидои координата ба намуди каноники оварда мешаванд.

Мисоли 1 Муодилаи

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$$

ба шакли каноникӣ оварда , намуди хати каљро муайян намоед:

Ҳал

$$A = 6; B = -2; C = 9; D = -2; E = -16; F = -6.$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 4 = 50 > 0$$

$\delta > 0$ пас хати каљ эллипси мебошад.Маркази хати каљро меёбем:

$$x_0 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} = \frac{1}{50}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 9 & -16 \end{vmatrix} = \frac{1}{50}(32 + 18) = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} = \frac{1}{50}\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -16 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{50}(4 + 96) = 2$$

Маркази эллипс дар нуқтаи $M(1,2)$ воқеъ мебошад. Ивазкунии параллел кӯчониро љори   мекунем, яъне ибтидои координатаро ба маркази эллипс нуқтаи $M(1,2)$ ме кӯчонем:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + 1 \\ y = \bar{y} + 2 \end{cases}$$

Ивазкуниро ба муодила мегузорем:

$$6(\bar{x} + 1)^2 - 4(\bar{x} + 1)(\bar{y} + 2) + 9(\bar{y} + 2)^2 - 4(\bar{x} + 1) - 32(\bar{y} + 2) - 6 = 0$$

$$6\bar{x}^2 + 12\bar{x} + 6 - 4\bar{x}\,\bar{y} - 8\bar{x} - 4\bar{y} - 8 + 9\bar{y}^2 + 36\bar{y} + 36 - 4\bar{x} - 4 - 32\bar{y} - 64 - 6 = 0$$

$$6\bar{x}^2 - 4\bar{x}\,\bar{y} + 9\bar{y}^2 - 40 = 0$$

Акнун табдилдиҳии даврзанонидани тирҳои координатиро љори   мекунем ва кунљи даврзанониро ҳамин тавр интихоб мекунем, ки дар муодилаи ҳосилшуда аъзои ҳосили зарби тағирёбандаҳо хориљ шавад.Формулаи табдилдихии даврзаниро љори   мекунем:

$$\begin{cases} \bar{x} = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ \bar{y} = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$$

Ивазкуниро ба муодила мегузорем:

$$6(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 - 4(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 9(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 40 = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$6x'^2\cos^2\alpha - 12x'y'\sin\alpha\cos\alpha + 6y'^2\sin^2\alpha - 4x'^2\sin\alpha\cos\alpha - 4x'y'\cos^2\alpha + 4x'y'\sin^2\alpha + 4y'^2\sin\alpha\cos\alpha + 9x'^2\sin^2\alpha + 18x'y'\sin\alpha\cos\alpha + 9y'^2\cos^2\alpha - 40 = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$(6\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 9\sin^2\alpha)x'^2 + (4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha)x'y' + (6\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 9\cos^2\alpha)y'^2 - 40 = 0$$

Коефисенти назди аъзои ҳосили зарби таъгирёбандаҳоро бо нул баробар мекунем:

$$4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad /2\cos^2\alpha$$

$$2\mathrm{tg}^2\alpha + 3\mathrm{tg}\alpha - 2 = 0$$

$$\mathrm{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{-3 - 5}{4} = -2; \qquad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}.$$

$\mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{1}{2}$; ро интихоб мекунем: Қийматҳои $sin\alpha$ ва $cos\alpha$ ро хисоб мекунем:

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

Хамин тавр ивазкунии даврзанонии тирҳои координат намуди зеринро қабул мекунад:

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \\ \overline{y} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \end{cases}$$

Коефисентҳои назди аъзоҳои x'^2 ва y'^2- ро ҳисоб мекунем:

$$A' = 6\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 9\sin^2\alpha = \frac{6 \cdot 4}{5} - \frac{4 \cdot 2}{5} + \frac{9}{5} = 5$$

$$B' = 6\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 9\cos^2\alpha = \frac{6}{5} + \frac{4 \cdot 2}{5} + \frac{9 \cdot 4}{5} = 10$$

Ҳамин тавр муодила намуди зерин қабул мекунад:

$$5x'^2 + 10y'^2 = 40 \qquad /40$$

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Ин муодилаи эллипси нитираҳояш $a = \sqrt{8}$ ва $b = 2$ мебошад.

Маъруза 17

Расанда ба эллипс. Диаметрҳои эллипс .

Таъриф. Расанда ба хати каљ дар нуқтаи додашудаи $M_0(x_0, y_0) -$ и хати каљ гуфта мавқеи ҳудудии буррандаи M_0M – ро ҳангоми ҳамљоя шудани нуқтаи M_0 бо нуқтаи M-ро меноманд. Расанда бо хати каљ нуқтаи умумии ягона дорад, ин нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$-ро нуқтаи расиш меноманд. Муодилаи расанда ба эллипси $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{в^2}=1$

дар нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$ намуди зерин дорад:

$$\frac{xx_0}{\alpha^2} + \frac{yy_0}{в^2} = 1$$

Таърифи диаметр. Хати росте, ки аз миёнаҳои хордаҳои параллели эллипс мегузарад диаметри эллипс номида мешавад. Диаметрҳои эллипс аз марказ мегузаранд. Коэффисиенти кунљи диаметри эллипсро $\mathbf{к_2}$, коэффисиенти кунљии хордаҳои параллелро бо $\mathbf{к_1}$ ишорат кунем, муносибати зеринро ҳосил мекунем:

$$к_1 \ . \ к_2 = -\frac{\alpha^2}{в^2}$$

ва муодилаи диаметри эллипс ба намуди зерин навишта мешавад:

$y = -\frac{\alpha^2}{б^2 \ к_1} x$ **Диаметрҳои эллипс. Диаметрҳои ҳамроҳшуда.** Эллипси дар тирҳои симметрияаш камшуда[1]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (16)$$

ва системаи хордаҳои байни якдигар паралели коэффициенти кунҷашон $к_1$ – ро дида мебароем (расми 61). Дида мебароем, ки миёнаҳои ин хордаҳо чӣ гуна мавқеъ доранд. Ба ибораи дигар гӯем, муайян мекунем, ки

---

[1] Тирҳои симметрияи эллипс ба сифати тирҳои координат қабул карда шудаанд.

координатҳои миёнаҳои хордаҳои ба якдигар параллели эллипс бо кадом шарт алоқаманд. Хордаи дилхоҳро гирифта, нӯгҳои онро бо $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ ва миёнаашро бо $M(X,Y)$ ишорат мекунем. Аз баски нуқтаҳои M_1 *ва* M_2 дар эллипс мехобанд, пас координатҳои онҳо бояд муодилаи (16) – ро қаноат кунонанд, яъне

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \qquad (17)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \qquad (18)$$

Коэффициенти кунҷии хати рости M_1M_2, яъне κ_1 – ро бо координатҳои ду нуқтаи он ифода мекунем (боби 111, § 12):

$$k = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_2}. \qquad (19)$$

Ниҳоят, нуқтаи М миёнаи порча M_1M_2 буданашро ба ҳисоб гирифта, баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (20)$$

$$Y = \frac{y_1 - y_2}{2}. \qquad (21)$$

Аз баробариҳои (17) - (21) чор бузургии ёрирасони x_1, x_2, y_1, y_2 – ро хориҷ мекунем. Бо ин мақсад, аз баробарии (17) – ро тарҳ мекунем:

$$\frac{x_2^2 - x_1}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1}{b^2} = 0$$

$$\frac{(x_2 + x_1)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0$$

Дар баробарии охирин, мувофиқи (20), ба ҷои суммаи $x_1 + x_2$ қимати 2X ва мувофиқи (21), ба ҷои суммаи $y_1 + y_2$ қимати 2Y, мувофиқи (19) ба ҷои фарқи $y_2 - y_1$ қимати $k_1(x_2 - x_1)$– ро гузошта баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{(x_2 + x_1)2X}{a^2} + \frac{k_1(y_2 - y_1)2Y}{b^2} = 0$$

ба $2(x_2 - x_1)^2$ихтисор мекунем:

$$\frac{X}{a^2} + \frac{k_1 Y}{b^2} = 0$$

аз ин ҷо (ҳангоми $k_1 \neq 0$)

$$Y = \frac{b^2}{a^2 k_1} X. \qquad (22)$$

воқеъанд.

Мо дар ин вақти муҳокимаронӣ фарз карда будем, ки хордаҳои муоинашаванда коэффициенти кунҷии k_1 доранд ва аз ҳамин сабаб, тири 0у паралел нестанд. Миёнаҳои хордаҳои ба тири 0у паралел (дар асоси нисбат ба тири 0х симметрия будани эллипс) низ дар хати рост (дар тири 0х) мехобанд

Инак, миёнаҳои хордаҳои паралели эллипс дар хати рост мехобанд.

Хати росте, ки аз миёнаҳои хордаҳои паралели эллипс мегузарад, диаметри эллипс номида мешавад. Диаметрҳои эллипс ва марказ мегузаранд. Коэффициенти кунҷии диаметри эллипсро бо k_2 ишорат карда,

$$k_2 = \frac{b^2}{a^2 k_1} \qquad (23)$$

-ро ҳосил мекунем, ё ки

$$k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (23`)$$

Диаметри эллипсро ба хордаҳое ҳамроҳшуда меномем, ки вай аз миёнаҷойҳои онҳо мегузарад. Шарти (23) ё ки (23`) коэффициентҳои кунҷии хордаҳои паралел ва диаметри ба онҳо ҳамроҳшударо ба якдигар алоқаманд мекунад. Аз баски ин шарт (23`) нисба k_1 *ва* k_2 симметри мебошад, яъне баъди ҷойивазкунии k_1 *ва* k_2 тағйир намеёбанд, пас чунин хулоса мебарорем: агар диаметри коэффициенти кунҷиаш k_2 хордаҳои коэффициенти кунҷиашон k_1 ҳамроҳшуда бошад, онгоҳ диаметри

---

[2] $x_2 - x_1 \neq 0$, чунки мувофиқи шарт хордаҳои муоинашаванда коэффиценти кунҷии k_1 доранд ва, аз ҳамин сабаб, ба тири 0у паралел нестанд.

коэффициенти кунҷаш k_1 ба хордаҳои коэффициенти кунҷиашон k_2 ҳамроҳшуда мебошад.

Ба ҳамин тариқ, мо ду диаметреро ҳосил мекунем, ки ҳар якеаш хордаи ба диаметри дигар паралелро ба ду ҳаиссаи баробар тақсим мекунад (расми 61). Ҳамин гуна ду диаметри эллипсро байни якдигар ҳамроҳшуда меноманд. Коэффициентҳои кунҷии онҳо k_1 ва k_2 бо шарти (23) ё ки (23`) алоқаманданд. Инак, дар эллипс маҷмӯи беохири ҷуфти диаметрҳои байни якдигар ҳамроҳшуда мавҷуданд. Ба ҳар як диаметр диаметри ҳамроҳшудааш мувофиқ меояд. Аз он ҷумла, тирҳои координат (тирҳои симметрияи эллипс) ҷуфти диаметрҳои ҳамроҳшударо ифода мекунанд. ин ду диаметри байни якдигар ҳамроҳшудаи эллипс ба ҳамдигар перпендикуляр мебошанд. ин гуна диаметрҳоро диаметрҳои асосии эллипс меноманд.

Аз шарти (23`) натиҷа мебарояд, ки кунҷи байни ҷуфти дилхоҳи диаметрҳои дигари ҳамроҳшудаи эллипс $(b \neq a)$ аз кунҷи рост фарқ мекунад. Агар $b = a$ бошад, яъне агар эллипс ба давра табдил ёбад, онгоҳ шарти (23`) ба шарти перпендикулярӣ: $k_1 \cdot k_2 = -1$ мубаддал мешавад. Ба ҳамин тариқ, ду диаметри дилхоҳи ҳамроҳшудаи давра ба якдигар перпендикуляр мебошанд, яъне ҳар гуна диаметри давра диаметри асосӣ (тири симметрия) мебошад.

Агар шарти (23) намоён аст, ки коэффициентҳои кунҷии ду диаметри ҳамроҳшудаи эллипс k_1 ва k_2 аломатҳои гуногун доранд,яъне диаметрҳо аз чорякҳои ҳамсоя мегузаранд.

Дар вақти калон шудани k_1 $(k_1 > 0)$ коэффициенти кунҷии k_2 аз рӯи бузургии мутлақаш хурд мешавад, яъне ба таври алгебравӣ зиёд хоҳад шуд. Ин нишон медиҳад, ки дар вақти ба муқобили ҳаракати ақрабаки соат чарх задани диаметри эллипс диаметри ба он ҳамроҳшуда ҳам ба ҳамон самт чарх мезанад.

Мисол. Дарозии диамтрии эллипси $x^2 + 2y^2 = 1$ – ро муайян кунед. Ин ба диаметре, ки кунҷи координатии якӯмро ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунем, ҳамроҳшуда мебошад (масофаи байни нуқтаҳои буриши диаметру хати каҷро дарозии диаметр меҳисобем).

Коэффициенти кунҷии диаметри мазкур ба 1 баробар аст. Аз шарти (23) коэффиценти кунҷи диаметри ба он ҳамроҳшуда k_2 – ро меёбем.

$$k_2 = -\frac{b^2}{a^2k_1}$$

Дар ин ҷо $k_1 = 1, a^2 = 1, b^2 = \frac{1}{2}$.пас, $k_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{y} = -\frac{1}{2}x$$

муодилаи ин диаметр мебошад. Барои ёфтани дарозии он нуқтаҳои буриши диаметру эллипсро муайян кардан лозим аст; барои ин муодилаҳои эллипсу диамтрро якҷоя ҳал мекунем:

$$x^2 + 2y^2 = 1 \text{ ва } \text{y} = -\frac{1}{2}x.$$

ифодаи *у* – ро аз муодилаи дуйўм ба муодилаи якўм мегузорем:

$$\text{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1,\ \frac{3}{2}x^2 = 1,\ \text{x}^2 = \frac{2}{3}, \textit{аз ин } \text{ҷо } x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Абсциссаи нуқтаҳои буришро динста, ординати онҳоро меёбем:

$$y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Аз рўи формулаи масофаи байни ду нуқта дарозии диаметри матлуб d–ро меёбем:

$$\text{d}^2 = \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3},$$

аз ин ҷо $\text{d}^2 = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{30}.$

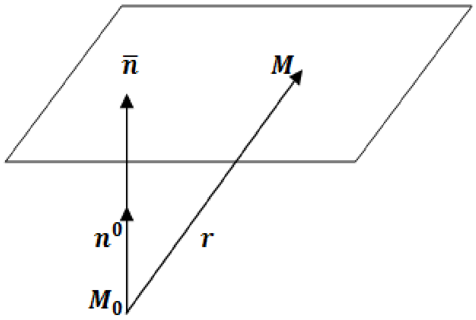
Маърузаи 18.

Хамвори дар фазо ,муодилаи уммуии хамвори ва тадкии он.Муодилаи хавори дар порчахо.

Вектори нормалии ҳамвори. Муодилаи ҳамворие, ки аз нуқтаи додашуда мегузарад.

Дар фазо ҳамвории P – ро дида мебароем. Мавқеи он бо воситаи вектори ба ҳамвори перпиндекуляр $\bar{n} = \{A, B, C\}$ ва ягон нуқтаи $M_0(x_0, y_0, z_0)$–и дар ҳамвории P хобанда пурра муайян карда мешавад. Вектори $\bar{n}$-и ба ҳамвории P перпендекулярро вектори нормалии ин ҳамвори меноманд (расми 1). Бигузор $M(x, y, z)$ нуқтаи *дилхоҳи фазо бошад.* Вектори $\overline{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0\ ,\ z - z_0\}$ -ро тартиб медиҳем. Он гоҳ нуқтаи M ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт дар ҳамвории P мехобад, агар векторҳои $\bar{n}$ ва $\overline{M_0M}$ ба ҳамдигар перпендикуляр бошанд.Барои ин ба нул баробар шудани зарби скалярии онҳо зарур ва кифоя мебошад, яъне ичро шудани баробарии $(\overline{M_0M} \cdot \bar{n}) = 0$зарур аст. Ин шартро дар шакли координатӣ навишта баробарии зеринро ҳосил мекунем:

Расми 1



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1.1)$$

Ин аст муодилаи ҳамворие, ки аз нуқтаи додашудаи $M_0\ (x_0, y_0\ , z_0)$ мегузарад ва ба вектори $\bar{n} = \{A, B, C\}$ перпендикуляр мебошад.

1.2. Муодилаи умумии ҳамворӣ

Дар муодилаи (1.1) қавсҳоро кушода ва ифодаи $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + Po)$ - *ро* истифода бурда, онро ба намуди зерин менависем:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1.2)$$

Муодилаи (1.2)-ро муодилаи умумии ҳамворӣ меноманд. Вектори $\bar{n} = \{A, B, C\}$ вектори нормали ҳамвории (1.2) номида мешавад.

1.3. Муодилаи нопурраи ҳамвори

Мавридҳои махсуси муодилаи умумии ҳамвори (1.2) –ро дида мебароем:

1. Бигзор $D = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $Ax + By + Cz = 0$ - ҳамвории аз ибтидои координата мегузарад;
2. $A = 0$ бошад муодилаи $By + Cz + D = 0$ - ҳамвори ба тири OX параллел аст. Агар $A = 0$, $D = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $By + Cz = 0$ – ҳамвориеро муайян мекунад, ки он ба тири OX параллел шуда, аз ибтидои координата мегузарад, яъне аз тири OX мегузарад.
3. $B = 0; Ax + Cz + D = 0$ - ҳамворӣ ба тири OY параллел аст. Агар $B = 0$, $D = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $Ax + Cz = 0$ – ҳамвориеро муайян мекунад, ки он ба тири OY параллел шуда, аз ибтидои координата мегузарад, яъне аз тири OY мегузарад.
4. $C = 0; Ax + By + D = 0$ - ҳамворӣ ба тири OZ параллел аст. Агар $C = 0$, $D = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $Ax + By = 0$ – ҳамвориеро муайян мекунад, ки он ба тири OZ параллел шуда аз ибтидои координата мегузарад, яъне аз тири OZ мегузарад.
5. $A = B = 0 ;\ Cz + D = 0$ - ҳамвори ба ҳамвории координати XOY параллел аст (ба тири OZ перпендекуляр аст); агар $D = 0$ ҳам бошад, ҳамворӣ бо ҳамвории XOY $(z = 0)$ ҳамҷоя мешавад.
6. $A = C = 0;\quad By + D = 0$ - ҳамворӣ ба ҳамвории XOZ параллел аст (ба тири OY перпендикуляр аст); агар $D = 0$ ҳам бошад, ҳамворӣ бо ҳамвории XOZ $(y = 0)$ ҳамҷоя мешавад.

7. $B = C = 0;\ Ax + D = 0$ - ҳамворй ба ҳамвории YOZ параллел аст (ба тири OX перпендикуляр аст); агар $D = 0$ ҳам, бошад ҳамворй бо ҳамвории YOZ $(X = 0)$ ҳамчоя мешавад.

Муодилаи ҳамворй дар порчаҳо.

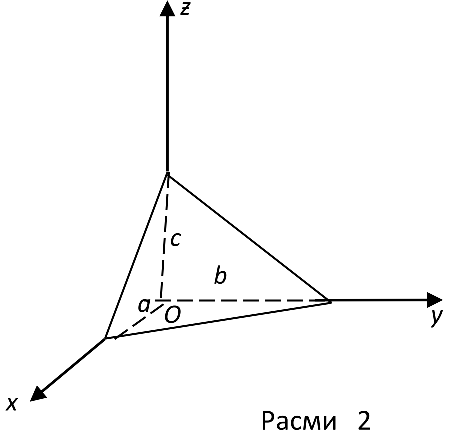
Агар дар муодилаи (1.2) ҳамаи коэффициентҳои A, B, C, D ба нол нобаробар бошанд, он гоҳ ин муодиларо ба намуди хусусии зерин табдил додан мумкин аст:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{1.3}$$

Ки дар ин чо $a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}$.

Муодилаи (1.3)-ро муодилаи ҳамворй дар порчаҳо меноманд.

Дар муодилаи (1.3) a –абсциссаи нуқтаи буриши ҳамвори бо тири OX, b ва c мувофиқан ордината ва аппликатаи нуқтаи буриши ҳамворй бо тирҳои OY ва OZ мебошанд (расми 2.)



Расми 2

Маърузаи 19.

Муодилаи нормалии ҳамвори

Муодилаи нормалии ҳамворй гуфта муодилаи намуди

$$x\cos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma - p = 0 \tag{1.4}$$

-ро меноманд, ки дар ин чо α, β, γ – кунчҳои байни нормал ба ҳамвори (векторе, ки аз ибтидои координата ба ҳамвори перпендикуляр мегузарад, вектори нормалии ҳамвори номида мешавад) ва тирҳои координати буда p бошад масофа аз ибтидои координата то ҳамвори аст. Дар муодилаи (1.4) коэффициентҳои назди x, y, z координатаҳои вектори воҳидии

$$\bar{n}^0=\{cos\alpha;\ cos\beta; cos\gamma\} \tag{1.5}$$

аст, ки бо вектори нормалӣ самти якхела дорад. Равшан аст, ки коэффициентҳои муодилаи нормали шарти зеринро қаноат мекунонад:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1.6}$$

Барои муодилаи умумии ҳамворӣ (1.2)-ро ба намуди норомалӣ (1.4) овардан ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба зарбшавандаи нормироникунанда --

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{1.7}$$

зарб кардан лозим аст. Дар ин чо аломати назди решаи квадратӣ ба аломати узви озод D муқобил гирифта мешавад.

Масофаи байни нуқта ва ҳамворӣ

Масофа аз нуқтаи дода шудаи $M_0(x_0, y_0, z_0)$ то ҳамвории

$$x\cos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma-p=0$$

бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад;

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0cos\beta+z_0cos\gamma-p| \tag{1.8a}$$

Агар ҳамвори бо муодилаи умуми $Ax+By+Cz+D=0$

додашуда бошад, масофа аз рӯи формулаи

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \tag{1.8b}$$

ҳисоб карда мешавад.

Маърузаи 20.

Кунчи байни ду ҳамвори

Бигузор ҳамвориҳои

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{ва} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

дода шуда бошанд. Кунчи байни онҳо ба кунчи байни векторҳои нормалии онҳо

$$\overline{n_1} = \{\mathrm{A}_1,\ B_{1,}C_1\} \text{ ва } \overline{n_2} = \{\mathrm{A}_2,\ B_{2,}C_2\}$$

баробар мебошад ва бо формулаи

$$cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (1.9)$$

ҳисоб карда карда мешавад.

Шарти параллелии ду ҳамвориҳо:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (1.10)$$

Шарти перпендекулярии ду ҳамвориҳо:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (1.11)$$

Муодилаи дастаи ҳамвориҳо

Таъриф: Мачмӯи ҳамаи ҳамвориҳое, ки аз як хати рост мегузаранд дастаи ҳамвориҳо меноманд ва хати рости додашуда тири дастаи ҳамвориҳо номида мешавад .

Бигзор хати рости буриши ду ҳамвориҳои L_1 ва L_2 дода шуда бошад:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 & L_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 & L_2 \end{cases} \qquad (1.12)$$

Ин муодилаҳоро мувофиқан ба ададҳои p *ва* q–и дар як вақт ба нул нобаробар зарб намуда чамъ намоем, баробарии ҳосил мешавад:

$p(A_1x + B_1y + C_1z + D) + q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) =$
$0 \qquad\qquad\qquad (*)$

ёки $(pA_1 + qA_2)x + (pB_1 + qB_2)y + (pC_1 + qC_2)z + pD_1 + qD_2 = 0 \qquad (A)'$

Дар ин баробари коэффициентҳои $pA_1 + qA_2$, $pB_1 + qB_2$, $pC_1 + qC_2$ дар як вақт ба нол нобаробар мебошанд, чунки дар акси ҳол мо муносабатҳои зеринро ҳосил мекунем :

$$\begin{cases} pA_1 + qA_2 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = -\frac{q}{p} \\ pB_1 + qB_2 = 0 \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = -\frac{q}{p} \\ pC_1 + qC_2 = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = -\frac{q}{p} \end{cases} \qquad (1.13)$$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ яъне ҳамвориҳои L_1 ва L_2 параллел мешаванд, ки ин муқобили шарт мебошад. Муодилаи $(A)'$ муодилаи ягон ҳамвори мебошад.

Координатаҳои нуқтаи дилхоҳи хати рости аз буриши ҳамвориҳои L_1 ва L_2 ҳосил шуда, яъне хати рости L муодилаи $(A)'$ - ро ҳам қаноат мекунонад. Бинобар он ҳамвории $(A)'$ ҳам аз хати рости L яъне буриши ҳамвориҳои L_1 ва L_2 мегузарад. Барои қиматҳои гуногуни $\frac{p}{q}$ мо ҳамвориҳои гуногунро ҳосил мекунем, ки онҳо аз хати рости додашудаи L мегузаранд. Ҳамин тавр исбот намудем, ки муодилаи (A) муодилаи дастаи ҳамвориҳо мебошад.

Мисоли.1. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед,ки он аз нуқтаи A$(2, -3{,}4)$ ва аз хати рости

$$\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad (1.14)$$

мегузарад.

Ҳал: Муодилаи дастаи ҳамвориҳоро, ки аз ин хати рости додашуда мегузарад, тартиб медиҳем.

$$p(x + 2y - z - 2) + q(x + 3y + z - 1 = 0) = 0 \quad \text{ёки}$$

$$(p+q)x+(2P+3q)y+(-p+q)z-2p-q=0 \qquad (1.15)$$

Акнун аз ин дастаи ҳамвориҳо чунин ҳамвориро интихоб мекунем, ки он аз нуқтаи додашуда А гузарад. Барои ин кординатаҳои нуқтаи А -ро ба муодилаи дастаи ҳамвориҳо (1.15) мегузорем ва қимати p *ва* q-ро муайян мекунем:

$$(p+q)\cdot 2+(2p+3q)\cdot(-3)+(-p+q)\cdot 4-2p-q=0 \Longrightarrow$$

$$2p-6p-4p-2p+2q-9q+4q-q=0 \Longrightarrow$$

$$-10p-4q=0 \Longrightarrow \frac{p}{q}=-\frac{2}{5} \text{ ёки } p=-\frac{2}{5}q$$

Ин қиймати p-ро ба муодилаи (1.15) мегузорем:

$-\frac{2}{5}q(x+2y-z-2)+q(x+3y+z-1)=0 \ /\frac{5}{q}$

$-2(x+2y-z-2)+5(x+3y+z-1)=0$

Ҳамин тавр, муодилаи ҳамвории мазкур:

$3x+11y+7z-1=0$ мешавад.

Маърузаи 21

Баъзе масъалаҳо оид ба муодилаи ҳамвори

Муодилаи ҳамворие, ки аз се нуқтаи додашуда мегузарад

Бигузор ҳамвори аз се нуқтаҳои $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ гузарад ва $M(x,y,z)$ нуқтаи дилхоҳи ин ҳамворӣ бошад. Яке аз ин нуқтаҳои додашуда, масалан, M_1 – ро бо нуқтаҳои M, M_2 ва M_3 пайваст карда векторҳои $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$ва $\overrightarrow{M_1M_3}$-ро тартиб медиҳем. Ин ҳар се векторҳо дар ҳамвории додашуда мехобанд, яъне онҳо компланарӣ мебошанд ва бинобар ин бояд шарти компланарии векторҳо

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (1.16)$$

бояд ичро шавад. Ин муодилаи ҳосил кардашуда (1.16) муодилаи ҳамвории аз се нуқтаи додашуда гузаранда мебошад.

2. **Муодилаи ҳамворие**, ки аз нуқтаи $\mathrm{M}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ мегузарад ва ба ду векторҳои

$\boldsymbol{a_1} = \{l_1, m_1, n_1\}$ ва $\boldsymbol{a_2} = \{l_2, m_2, n_2\}$ параллел мебошад ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-\mathrm{y}_0 & z-z_0 \\ l_1 & \mathrm{m}_1 & \mathrm{n}_1 \\ l_2 & \mathrm{m}_2 & \mathrm{n}_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.17)$$

3. **Муодилаи ҳамворие,**ки аз нуқтаҳои $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ гузашта ба вектори

$\boldsymbol{a_1} = \{l_1, m_1, n_1\}$ параллел аст ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.18)$$

4. **Муодилаи ҳамворие**, ки аз нуқтаи $\mathrm{M}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ мегузарад ва ба ду ҳамвориҳои $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ перпендикуляр аст, ба намуди зерин мебошад:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.19)$$

5. **Муодилаи ҳамворие**, ки аз нуқтаҳои $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ гузашта ба ҳамвории $Ax + By + Cz + D = 0$ перпендикуляр аст, ба намуди зерин мебошад:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.20)$$

Чойгиршавии се ҳамвориҳо дар фазо.

Бигзор дар фазо се ҳамвориҳои P_1, P_2, P_3 бо муодилаи умумиашон дода шуда бошанд;

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \qquad (1.21)$$

Барои муайян намудани чойгиршавии ин се ҳамвориҳо дар фазо системаи муодилаҳои хатти (1.21) -ро тадқиқ менамоем. Аз коэффициентҳои муодилаҳои система матрицаҳои зеринро тартиб медиҳем:

$$N_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}; N_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Ранги ин матрицаҳоро бо r_1 ва r_2 ишорат мекунем:

$r_1 = rang\,N_1$,$r_2 = rangN_2$, дар ин мавридд $r_1 \leq r_2$мешавад. Вобаста аз ранги матрицаҳо мавридҳои зерин дучор мешаванд.

1.Бигзор .$r_1 = 3$ бошад. Дар ин мавридд $r_2 = 3$ ҳам мешавад, ва системаи (1.21) дорои ҳалли ягона мешавад, яъне ҳамвориҳои P_1 , P_2 , P_3 нуқтаи умумии ягона доранд. Координатаҳои нуқтаи умуми ҳалли системаи муодилаҳои хаттии (1.21) мебошад, ки онро аз рӯи формулаҳои Крамер ёфтан мумкин аст.

2. Бигзор $r_1 = 2$ ва $r_2 = 3$ бошад.

Он гоҳ системаи муодилаҳои хаттии (1.21) ноҳамчоя мешавад, яъне система ҳал надорад ва ҳамвориҳо нуқтаи умуми надоранд.

Дар ин мавридд ду ҳолати чойгиршавии ҳамвориҳо дучор мешавад:

а). Дар матритсаи N_1 ду сатрҳои элементҳояш пропорционал буда вучуд надорад ва бинобар он ҳар як чуфти ҳамвориҳои P_1, P_2, P_3 аз рӯи хати рост якдигарро мебурранд ва ҳар се хатҳои рости ҳосил шуда бо ҳамдигар параллеланд.

б) Дар матритсаи N_1 элементҳои ягон ду сатр бо ҳам пропортционал мешаванд, он гоҳ бинобар он ки $r_1=2$ аст ,яке аз ҳамвориҳо ду ҳамвориҳои дигари параллелро мебуррад, ва се ҳамвориҳо нуқтаи умуми надоранд.

3. Бигзор $r_1 = r_2 = 2$ бошад.

Дар ин маврид дар матритсаи N_1 чунин ду сатрҳо мавчуд аст, ки элементҳои он бо ҳам хатти новобаста мебошанд (номутаносиб) ва бинобар он ду ҳамвориҳо масалан P_1 ва P_2 аз рӯи хати рости l якдигарро мебурранд. Дар ин ҳолат мувофиқи хосияти вобастагии хаттии сатрҳои матрица, сатри сеюми ин гуна матрица аз комбинацияи хаттии ду сатрҳои дигар иборат мешавад, яъне чунин ададҳои дар як вақт ба нол нобаробари p *ва* q мавчуд аст, ки баробарии зерин ичро мешавад:

$$p(A_1x + B_1y + C_1z + D) + q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \\ = \ A_3x + \ B_3y + C_3z + D_3$$

Аз ин меояд, ки хати рости l ба ҳамвории P_3 мансуб аст (мехобад). Ҳамин тавр ҳар се ҳамвориҳо аз хати рости l мегузаранд.

Дар ин маврид ду ҳолатҳои зерин дучор мешаванд:

а) Дар матрицаи N_2 ду сатрҳои элементҳояшон пропорционал буда мавчуд нест. Аз ин меояд, ки ҳар се ҳамвориҳо гуногун мебошанд.

б) Дар матрицаи N_2 ду сатрҳои элементҳояшон пропорционал буда мавчуд бошад. Он гоҳ ду муодилаҳои системаи (1.21) якто ҳамвориро муайян мекунад ва он ҳамвории сейӯмро аз рӯи хати рост мебуррад.

4) Бигзор ***$r_1 = 1$, $r_2 = 2$ бошад***. Дар ин маврид ду ҳол дучор мешавад:

а) Дар матрицаи N_2 ду сатрҳои элементҳояшон пропорционал буда мавчуд нест. Аз ин меояд , ки ду ҳамвориҳои дилхоҳ параллеланд.

б) Дар матрицаи N_2 ду сатрҳои элементҳояшон пропорционал буда мавчуд бошад. Он гоҳ ду муодилаҳои системаи (1.21) якто ҳамвориро муайян мекунад ва он ба ҳамвории сеюм параллел мешавад.

5) Бигзор ***$r_1 = r_2 = 1$ бошад.***

Дар ин маврид ҳар се муодилаҳои системаи (1.21) муодилаи якто ҳамвори мешаванд.

Ҳалли масъалаҳо

1.Муодилаи ҳамвориеро тартиб дихед, ки он аз нуқтаи $M(3;\ 2;\ 0)$ гузашта, вектори нормали $\vec{N}\ = \{2;\ -1;\ \ 4\}$-ро дорад.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1.1) муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$2(x\text{-}3)\text{-}1(y\text{-}2)+4(z\text{-}0)=0$ ёки $2x - y + 4z - 4 = 0.$

2.Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз тири OZ ва аз нуқтаи $M(2;\ -1;\ \ 2)$ мегузарад.

Ҳал.Мувофиқи пункти 3.4 муодилаи ин гуна ҳамвори ба намуди зерин мешавад: $Ax + By = 0$. Мувофиқи шарт, нуқтаи М дар ин ҳамворӣ мехобад, бинобар ин координатаҳои он ин муодиларо бояд қаноат кунонад:

$A \cdot 2 + B \cdot (-1) = 0.$

Аз ин чо $B = 2A$, қимати B – ро ба муодилаи ҳамвори гузошта ва ба A ихтисор карда муодилаи ҳамвории мазкурро ҳосил мекунем:

$Ax+2Ay=0$ ёки $x+2y=0.$

3.Муодилаи ҳамвориеро тартиб даҳед, ки он аз нуқтаи $M(4;\ 3;\ 2)$ гузашта, дар тири абсисса порчаи $a=3$ ва аз тири ордината порчаи $b=\text{-}2$-ро бурида чудо мекунад.

Ҳал.Муодилаи ҳамвори дар порчаҳо (1.3) –ро истифода мебарем. Мувофиқи шарт $a=3,\quad b= \text{-}2.$

Бинобар он

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{c} = 1$$

Аз нуқтаи M гузаштани ҳамвориро истифода бурда с-ро меёбем:

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{-2} + \frac{2}{c} = 1, \qquad c = \frac{12}{7}$$

ҳамин тавр муодилаи ҳамворӣ ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{\mathrm{x}}{3}+\frac{\mathrm{y}}{-2}+\frac{\mathrm{z}}{\frac{12}{7}}=1$$

Маърузаи 22

ХАТИ РОСТ ДАР ФАЗО

§2.1 Муодилаи каноникии хати рост.

Муодилаи хати ростеро, ки аз нуқтаи додашудаи A(a,b,c) мегузарад ва ба вектори додашудаи $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}=\{m,n,p\}$ параллел аст, тартиб медиҳем.

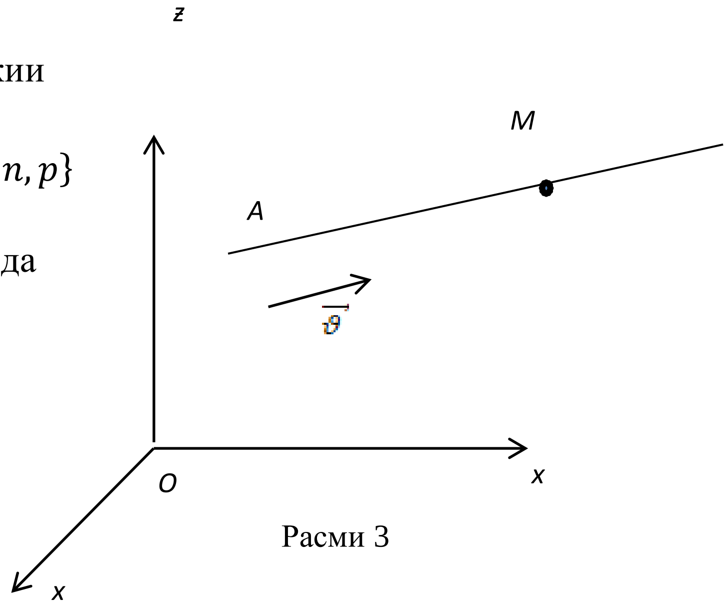
Бигузор M(x, y, z) нуқтаи дилхоҳи хати рост бошад (расми 47). Вектори $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ - ро тартиб медиҳем:

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ =\{x-a\,,y-b\,,z-c\}$$

Он гоҳ мувофиқи шарти параллелии векторҳои $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ва $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}$ баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\mathrm{x}-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}\qquad(2.1)$$

Муодилаи (2.1) –ро муодилаи каноникии хати рост меноманд. Вектори $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}=\{m,n,p\}$ вектори самтдиҳиндаи хати рост номида мешавад. Ба воситаи α,β,γ кунчҳое , ки хати рост бо тирҳои координатӣ ташкил медиҳад, ишорат мекунем.



Расми 3

Он гоҳ, $m=\left|\vec{\boldsymbol{\vartheta}}\right|\cdot cos\alpha,\ n=\left|\vec{\boldsymbol{\vartheta}}\right|\cdot cos\beta,\ p=\left|\vec{\boldsymbol{\vartheta}}\right|\cdot cos\gamma$

ва косинусҳои самтдиҳандаи хати рост бо формулаҳои (ба қисми 1 боби 2, §2 нигаред) зерин ҳисоб карда мешаванд :

$$cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \qquad cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \qquad (2.2)$$

§2.2 .Муодилаи параметрии хати рост.

Ҳар яке аз нисбатҳои баробарии (2.1)-ро ба параметри t баробар карда муодилаи хати ростро ба намуди зерин ҳосил мекунем:

$$x=mt+a, \quad y=nt+b, \quad z=pt+c \qquad (2.3)$$

Ин муодила муодилаи параметрии хати рост номида мешавад.

Маърузаи 23

Кунчи байни ду хатҳои рост.

Бигзор ду хатҳои рост бо муодилаҳои каноники дода шуда бошанд:

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1} \quad \text{ва} \quad \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2} \qquad (2.7)$$

Ба сифати кунчи байни онҳо $-\alpha$, кунчи байни векторҳои самтдиҳандаи онҳо $\overrightarrow{\boldsymbol{\vartheta_1}} = \{m_1,\ n_1, p_1\}$ *ва* $\overrightarrow{\boldsymbol{\vartheta_2}} = \{m_2,\ n_2, p_2\}$ ёки кунчи то π пуркунандаи онро қабул кардан мумкин аст. Бинобар он кунчи байни ду хати рост бо ёрии формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$cos\alpha = \frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}, \qquad (2.8)$$

Шарти параллели ду хатҳои рост : $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

(2.9) Шарти перпендекулярии хатҳои рост; $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

Шарти зарурӣ ва кифоягии якдигарро буридани ду хати рост.

Агар ду хатҳои рост бо муодилаи каноники (2.7) дода шуда бошанд,он гоҳ шарти якдигарро буридани онҳо баробари зерин мебошад:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (2.11)$$

Масофа аз нуқта то хати рост.

Бигзор дар фазо хати росте , ки аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0, z_0)$ мегузарад ва вектори самтдиҳандааш $\vec{\boldsymbol{a}}=\{l,m,n\}$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

ва нуқтаи $M_1(x_1, y_1, z_1)$ берун аз ин хати рост додашуда бошад.

<u>Таъриф:</u> Масофа аз нуқта то хати рост гуфта, дарозии перпендикуляри аз ин нуқта ба хати рост фуровардашударо меноманд.

Барои ҳисоб кардани масофа аз нуқтаи додашуда то хати рост мо аз вектори $\overline{M_0M_1}=\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$ ва вектори самтдиҳандаи хати рост

$\overline{\boldsymbol{a}}=\{l, m, n\}$ параллелограм месозем, он гоҳ масофаи мазкур баландии ин параллелограм h мешавад. Масоҳати параллелограм ба модули зарби вектории ин векторҳо баробар: $S=|[\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{M_0M_1}]|$ Аз тарафи дигар масоҳати параллелограмм ба ҳосили зарби асос бар баланди баробар аст : $S=|\bar{a}|\cdot h.$

Инак масофа аз нуқтаи додашуда то хати рост h аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад: $h=\frac{|[\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{M_0M_1}}]|}{|\overline{\boldsymbol{a}}|}$ **,**дар ин чо

$$[\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{M_0M_1}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & \mathrm{m} & \mathrm{n}\end{vmatrix};\ |\overline{\boldsymbol{a}}|=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

Чойгиршавии ду хати рост дар фазо

Бигзор ду хати рост бо муодилаи параметри дода шуда бошад:

$$\boldsymbol{L_1}:\begin{cases} x=x_1+l_1t \\ \mathrm{y}=y_1+\mathrm{m_1t} \\ \mathrm{z}=z_1+\mathrm{n_1t}\end{cases}\qquad \boldsymbol{L_2}:\begin{cases} x=x_2+l_2t \\ y=y_2+m_2t \\ z=z_2+n_2t\end{cases}$$

Мавридҳои дар фазо чойгиршавии ин хатҳои ростро тадқиқ менамоем.

Матритсаҳои аз кординатаҳои векторҳои самтдиҳандаҳои хатҳои рост

$\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}}=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}}=\{l_2, m_2, n_2\}$ ва вектори

$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ -ро тартиб медиҳем:

$$N_1=\begin{pmatrix} l_1\,m_1\,n_1 \\ l_2m_2n_2\end{pmatrix}\ \text{ва}\ N_2=\begin{pmatrix} x_2-x_{1\text{о}} & y_2-y_{1\text{о}} & z_2-z_{0\text{о}} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2\end{pmatrix}$$

Бигзор $r_1=rang\ N_1$, $r_2=rang\ N_2$ бошад. Он гоҳ вобаста аз қиматҳои r_1 ва r_2 мавридҳои зерин дучор мешаванд :

1. **Бигзор $r_2=3$ бошад.**

Дар ин маврид $detN_2\neq 0$ ва векторҳои $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}}$ ва $\overline{M_1M_2}$ - компланар намешаванд , ва бинобар он хатҳои рости L_1 ва L_2 якдигарро намебуранд , хатҳои чиллики мешаванд.

2. **Бигзор $r_1=r_2=2$ бошад**.

Дар ин маврид $detN_2=0$ва векторҳои $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}}$ ва $\overline{M_1M_2}$ компланар мешаванд ва бинобар он хатҳои рост дар як ҳамвори мансуб мебошанд (мехобанд).

Инчунин бинобар он ки $\boldsymbol{r_1=2}$ аст,

пас векторҳои $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{1}}$ ва $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{2}}$ ноколлинеар мебошанд ва бинобар он хатхои рост якдигарро мебурранд (хатхои бурранда).

3. $\boldsymbol{r_1 = 1, r_2 = 2}$. Дар ин мавридхатхои рост параллел мешаванд.

4. $\boldsymbol{r_1 = r_2 = 1}$. Дарин мавридвекторхои $\boldsymbol{\bar{a}_1}$, $\boldsymbol{\bar{a}_2}$ ва $\overline{M_1M_2}$ коллинеар мешаванд ва муодилахои (L_1) ва (L_2) якто хати ростро муайян мекунанд.

Аз ин натичаҳо равшан мешавад, ки шартхои зарури ва кифоягии дар як ҳамвори хобидани ду хатхои рости L_1 ва L_2 ба нол баробар будани $\det N_2$ мебошад:

$$\det N_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.11.1)$$

Маърузаи 24

Муодилаи ҳамворие,ки аз хати рости $\frac{x - \mathrm{x}_0}{\mathrm{l}} = \frac{y - \mathrm{y}_0}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{z} - \mathrm{z}_0}{\mathrm{n}}$ мегузарад ва ба ҳамвории додашуда $Ax + By + Cz + D = 0$ перпендикуляр мебошад ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & \mathrm{m} & n \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = 0$$

Муодилаи ҳамворие,ки аз нуқтаи $\mathrm{M}_0(x_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0)$ мегузарад ва ба хатҳои рости

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{ва} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

параллел мебошад ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.20)$$

Муодилаи ҳаморие, ки аз нуқтаҳои $M_1(x_1y_1z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$ мегузарад ва ба хати рости $\frac{x-x_0}{l} = \frac{\mathrm{y-y_0}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{z-z_0}}{\mathrm{n}}$ паралел мебошад ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.21)$$

Муодилаи ҳамворие, ки аз хати рости $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ ва нуқтаи $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – и дар ин хати рост нахобида мегузарад, ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \qquad (2.23)$$

Муодилаи ҳамворие,ки аз хати рости $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ мегузарад ва ба хати рости $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ параллел мебошад , ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (2.24)$$

Муодилаи ҳамворие,ки аз нуқтаи $M_0(x_0, y_0, z_0)$ мегузарад ва ба хати рости

$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ перпендикуляр мебошад ба намуди зерин мешавад:

$$l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0 \qquad (2.25)$$

Маърузаи 25

Баъзе масъалаҳо оид ба ҳамвори ва хати рост дар фазо.

Муодилаи дастаи ҳамвориҳо.

Таъриф: Мачмӯи ҳамаи ҳамвориҳое, ки аз як хати рост мегузаранд дастаи ҳамвориҳо меноманд ва хати рости додашуда тири дастаи ҳамвориҳо номида мешавад .

Бигзор хати рости буриши ду ҳамвориҳои L_1 ва L_2 дода шуда бошад:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \qquad\qquad L_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \qquad\qquad L_2 \end{cases} \qquad (2.12)$$

Ин муодилаҳоро мувофиқан ба ададҳои *p ва q*–и дар як вақт ба нол нобаробар буда зарб карда чаъм намоем баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$p(A_1x + B_1y + C_1z + D) + q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ ёки

$(pA_1 + qA_2)x + (pB_1 + qB_2)y + (pC_1 + qC_2)z + pD_1 + qD_2 =$
$0.$ (2.13)

Дар ин баробари коэффициентҳои $pA_1 + qA_2$, $pB_1 + qB_2$, $pC_1 + qC_2$ дар як вақт ба нол нобаробар мебошанд, чунки дар акси ҳол мо муносабатҳои зеринро ҳосил мекардем:

$$\begin{cases} pA_1 + qA_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{q}{P} \\ pB_1 + qB_2 \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = -\frac{q}{P} \\ pC_1 + qC_2 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = -\frac{q}{P} \end{cases}$$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$,яъне ҳамвориҳои L_1 ва L_2 параллел мешаванд, ки ин муқобили шарт мебошад. Муодилаи (2.13)' муодилаи ягон ҳамвори мебошад. Кординатоҳои нуқтаи дилхоҳи хати рости аз буриши ҳамвориҳои L_1 ва L_2 ҳосил шуда , яъне хати рости L муодилаи (2.13)' - ро ҳам қаноат мекунонад. Бинобар он ҳамвории (2.13)' ҳам аз хати рости L яъне буриши ҳамвориҳои

L₁ ва *L₂* мегузарад барои қиматҳои гуногуни $\frac{p}{q}$ мо ҳамвориҳои гуногунро ҳосил мекунем, ки онҳо аз хати рости додашудаи L мегузаранд. Ҳамин тавр исбот намудем,ки муодилаи (2.13) муодилаи дастаи ҳамвориҳо мебошад.

Мисоли.1. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед,ки он аз нуқтаи *A(2,-3,4)* ва хати рости

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + z - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{мегузарад.}$$

Ҳал: Муодилаи дастаи ҳамвориҳоро, ки аз ин хати рости додашуда мегузарад, тартиб медиҳем.

$$p(x + 2y - z - 2) + q(x + 3y + z - 1 = 0) = 0 \qquad \text{ёки}$$

$$(p + q)x + (2p + 3q)y + (-p + q)z - 2p - q = 0 \qquad (2.14)$$

Акнун аз ин дастаи ҳамвориҳо чунин ҳамвориро интихоб мекунем, ки он аз нуқтаи додашудаи *A* гузарад. Барои ин координатаҳои нуқтаи *A*-ро ба муодилаи дастаи ҳамвориҳо (2.14) мегузорем ва қиматҳои p ва q-ро муайян мекунем:

$$(p + q) \cdot 2 + (2p + 3q) \cdot (-3) + (-p + q) \cdot 4 - 2p - q = 0 \gg$$

$$2p - 6p - 4p - 2p + 2q - 9q + 4q - q = 0 \gg$$

$$-10p - 4q = 0 \gg \frac{p}{q} = -\frac{2}{5} \quad \text{ёки} \quad p = -\frac{2}{5}q$$

Ин қимати p - ро ба муодилаи (2.14) мегузорем:

$$-\frac{2}{5}q(x + 2y - z - 2) + q(x + 3y + z - 1) = 0\ , \quad / \frac{5}{q}$$

$$-2(x + 2y - z - 2) + 5(x + 3y + z - 1) = 0$$

Ҳамин тавр, муодилаи ҳамвории мазкур:

$$3x + 11y + 7z - 1 = 0.$$

Муодилаи ҳамворие,ки аз хати рости

$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$ ва нуқтаи $M_1(x_1, y_1, z_1)$мегузарад, ба намуди зерин мебошад:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{2.16}$$

Муодилаи ҳамворие,ки аз ду хатҳои рости параллели

$$x = x_1 + lt, \; y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt \tag{2.17}$$

$$x = x_2 + lt, y = y_2 + mt, \quad z = z_2 + nt$$

мегузарад, ба намуди зерин навишта мешавад :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

Агар ду хатҳои рости

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{ва} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

буранда бошанд, он гоҳ муодилаи ҳамворие,ки ин хатҳо мехобанд ба намуди зерин навишта мешавад:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.19}$$

Муодилаи хати росте , ки аз нуқтаи $M_1(x_1.y_1.z_1)$ мегузарад ва ба ҳамвории $Ax + By + Cz + D = 0$ - перпендикуляр мебошад ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C} \tag{2.22}$$

Ҳалли масъалаҳо

1. Муодилаи хати ростеро тартиб дихед, ки он аз нуқтаи А(3; 2; 1) ба вектори $\vec{\vartheta} = \{1, 2, 2\}$ параллел шуда мегузарад.Косинусҳои самтдиҳандаи ин хати ростро муайян кунед.

Ҳал.Координатаҳои нуқтаи А ва вектори $\vec{\vartheta}$ –ро ба муодилаи (2.1) гузошта муодилаи кононикии хати ростро ҳосил мекунем:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}$$

Косинусҳои самтдиҳандаи хати ростро мувофиқи формулаи (2.2) ҳисоб мекунем:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}\ ,\qquad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}\ ,$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

2. Муодилаи хати росте, ки аз нуқтаҳои A(5; 3; 0) ва B(-1; 4; -2) мегузарад, тартиб диҳед.

Ҳал: Аз формулаи (2.4) –ро истифода мебарем:

Ба сифати нуқтаи хати рост нуқтаи $A(5;3;0)$ – ро мегирем ва ба сифати вектори

самтдиҳанда вектори $\overrightarrow{AB}$ -ро мегирем : $\overrightarrow{AB}$={-1-5; 4-3; -2-0 }={-6; 1; -2}

Ҳамин тавр муодилаи хати рости мазкур ба намуди зерин навишта мешавад:

$$\frac{x-5}{-6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-2}$$

3. Муодилаи умуми хати ростро:

$$\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\x+3y-4z-2=0\end{cases}\qquad\text{(U)}$$

а) дар проекцияҳо; б) дар намуди каноники нависед;

Ҳал: а) Аз муодилаи умумии хати рости додашуда бо навбат *y ва x* –ро хорич карда, муодилаҳои намуди зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases}7x+5z=5,\\7y-11z=3,\end{cases}\ \text{аз ин чо}\ \begin{cases}x=-\frac{5}{7}z+\frac{5}{7}\\ y=\frac{11}{7}x+\frac{3}{7}\end{cases}\qquad (A)$$

Муодилаҳои (*A*) муодилаи хати рост дар проекцияҳо аст:

б) Усули якум. Барои ба намуди каноники овардани муодилаи умумии хати рост аз ҳар яки муодилаҳои (A) z-ро меёбем:

$$Z = \frac{x - \frac{5}{7}}{-\frac{5}{7}} \text{ ва } z = \frac{y - \frac{3}{7}}{\frac{11}{7}}$$

Ифодаҳои ҳосилшударо ба якдигаро баробар карда, муодилаи каноникии хати ростро ҳосил мекунем:

$$\frac{\text{x}-\frac{5}{7}}{-\frac{5}{7}} = \frac{\text{y}-\frac{3}{7}}{\frac{11}{7}} = \frac{z}{1} \quad \text{ёки} \quad \frac{\text{x}-\frac{5}{7}}{-5} = \frac{\text{y}-\frac{3}{7}}{11} = \frac{z}{7}$$

Усули дуюми ба намуди каноникӣ овардани муодилаи умумии хати рост. Аввало мо ягон нуқтаи хати ростро меёбем, яъне координатаҳои ягон нуқтаи дилхоҳи хати ростро муайян мекунем. Барои ин, дар муодилаҳои (U) ба чои яке аз номаълумҳо ягон қимати дилхоҳ мегузорем ва системаи ду муодилаҳои ду номаълумаи ҳосил шударо ҳал намуда қимати ду номаълумҳои боқимондаро меёбем: масалан $z = 0$ мегузорем ва ҳалли системаи ҳосилшударо меёбем:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Аз ин ҷо $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{3}{7}$.

Ҳамин тавр, яке аз нуқтаи хати рост $A\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)$ мебошад.

Вектори самтдиҳандаи хати рост $\vec{\boldsymbol{\vartheta}} = m \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + n \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + p \cdot \vec{\boldsymbol{k}}$

-ро меёбем. Азбаски он бояд ба векторҳои нормалии ҳамвориҳои додашуда:

$$\bar{N}_1 = 2\vec{i} - j + 3k \text{ ва } \bar{N}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

ки хати рост дар ҳар яки онҳо мехобад перпендекуляр мебошад , пас ба сифати вектори самтдиҳанда $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}$ зарби вектории $[\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2]$ --ро гирифтан мумкин аст:

$$\vec{\boldsymbol{\vartheta}} = [\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} + 11\vec{\jmath} + 7\vec{k}$$

Ҳамин тавр муодилаи каноникии хати рост ба намуди зерин навишта мешавад.

$$\frac{x - \frac{5}{7}}{-5} = \frac{y - \frac{3}{7}}{11} = \frac{z}{7}$$

Маърузаи 26

САТҲҲОИ ТАРТИБИ ДУЮМ

Классификатсияи сатҳҳо.

Мисли хат дар ҳамворӣ сатҳҳо ҳам аз рӯи муодилаашон дар системаи координатии декарти ба сатҳҳои алгебравӣ ва трансцендентӣ тақсим мешаванд. Муодилаи сатҳи алгебравиро баъд аз шаклдигаркуни ба намуди.

$$F(x, y, z,) = 0$$

овардан мумкин аст, ки дар ин чо қисми чапи муодила нисбат ба номаълумҳои x, y, z бисёраъзогиҳои бутун мебошад. Дарачаи ин бисёраъзогӣ нисбат ба x, y, z тартиби сатҳи алгебравӣ мебошад. Нишон додан мумкин аст,ки тартиби сатҳ аз интихоби тирҳои координати вобаста нест. Мо медонем, ки ҳамворӣ сатҳи тартиби якӯм аст. Ба тадқиқи муодилаи умумии сатҳи тартиби дуюм кордор нашуда, дар ин боб ҳама намудҳои имконпазири чунин сатҳҳоро аз муодилаҳои соддатаринашон сар карда, татқиқ мекунем.

Эллипсоид.

Чунон ки исбот кардем (§ 3.4), муодилаи сатҳе, ки дар натичаи дар гирди тири Oz чархзании эллипси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ҳосил мешавад, чунин аст:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{c}^2}=1$$

Ин муодила сатҳеро муайян мекунад, ки он *эллипсоиди чархзанй* номида мешавад. Ин эллипсоидро бо ҳамвории $z = h$ ($|h| \leq c$), ки ба ҳамвории xOy параллел аст, бурида, дар буриш давраеро ҳосил мекунем, ки муодилааш

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{\mathrm{h}^2}{\mathrm{c}^2}, \quad z=\mathrm{h}. \tag{3.9}$$

буда, радиусаш ба $a\sqrt{1-\frac{h}{c^2}}$ баробар мебошад.Пас, дар вақти аз қиммати $-c$ то $+c$ таъғир ёфтани h давраи (3.9) эллипсоиди чархзаниро мекашад.

Акнун ба чои давраи (3.9) эллипси

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1-\frac{\mathrm{h}^2}{\mathrm{c}^2}, \quad z=h. \tag{3.10}$$

ро мегирем, ки он дар ҳамвории $\mathrm{z}=h$ – и ба ҳамвории XOY паралел буда мехобад ва нимтираҳояш чунин аст:

$$a\sqrt{1-\frac{h}{c^2}} \qquad \text{ва} \qquad b\sqrt{1-\frac{h}{c^2}}. \tag{3.11}$$

Дар вақти аз -c то $+c$ тағъир ёфтани h ин эллипс сатҳеро мекашад, ки аз ду муодилаи (3.10) h – ро хорич карда, муодилаи онро ҳосил мекунем:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1-\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{c}^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}+\frac{z^2}{\mathrm{c}^2}=1 \tag{I}$$

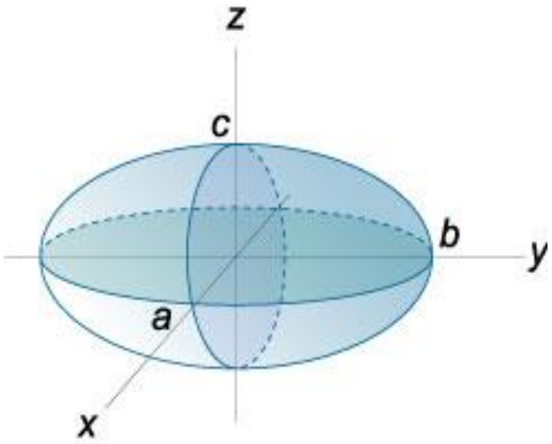
Сатҳи тартиби дуюми бо муодилаи (I) муайяншавандаро*, эллипсоид* ва бузургиҳои *a, b, c – ро нимтираҳои* эллипсоид меноманд.

Эллипсоидро бо ҳамвориҳои координати $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ бурида, дар буриш эллипсҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0;\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad y=0;$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0. \tag{3.12}$$

Чунон ки дидем, дар буриши эллипсоиду ҳамвории $z=h$ – и ба ҳамвории xOy параллел эллипси (3.10) – и дорои нимтираҳои (3.11) ҳосил мешавад.Дар вақти аз $-c$ *то* $+c$ тағъир ёфтани h ин нимтираҳо ба нимтираҳои a ва b – и эллипсе, ки дар ҳамвории XOY мехобад, мутаносибан тағъир меёбад (расми 6). Ду эллипси дорои нимтираҳои мутаносибро эллипсҳои монанд меноманд.



Расми 6.

Ба ҳамин тариқ , эллипсоидро чун сатҳе, ки онро эллипси ҳаракаткунанда (ки ҳамвориаш ба ҳамвории XOY параллел мемонад) ташкил медиҳад, дида баромадан мумкин аст; ин эллипс дар вақти ҳаракат ба худаш монанд мешавад ва нӯгҳои тирҳояш дар ҳамвориҳои XOZ *ва* YOZ аз рӯи эллипсҳои (3.12) мелағжанд. Агар $a \geq$ b $\geq$ c ҳисоб кунем, умумият вайрон намешавад. Агар $a = b = c$ бошад, муодилаи (I) сфераро муайян мекунад;

Агар $a > b = c$ бошад, муодилаи (I) эллипсоиди дарозшудаи чархзании тири чархзаниаш $0x$ – муайян мекунад ; агар $a = b > c$ бошад, муодилаи (I) эллипсоиди фишурдашудаи чархзании тири чархзаниаш $0z$ – ро муайян менамояд. Агар ададҳои *a,* b ва c ба якдигар баробар набошанд, он гоҳ эллипсоидро *эллипсоиди сетира* меноманд.

Муодилаи (I) фақат квадратҳои координатҳоро дорост; аз ин чо натича мебарояд, ки эллипсоид нисбат ба ибтидои координат симметрӣ буда, ҳамвориҳои координати ҳамвориҳои симметрии он мебошанд, чунки агар ягон нуқтаи *M (x, y, z)* дар эллипсоид воқеъ бошад, он гоҳ нуқтаҳои $M(\pm x, \pm y, \pm z)$ ҳам дар ҳолати интихоби дилхоҳи аломати координатҳо дар ин эллипсоид воқеъ мешаванд.

Муодилаи ҳамвории расанда ба эллипсоид дар нуқтаи $M(x_1, y_1, z_1)$,ба намуди зерин мешавад;

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

Маърузаи 27

Гиперболоиди яккома

Муодилаи сатҳе, ки дар натичаи дар гирди тири Oz чархзании гиперболаи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

ҳосил мешавад, мувофиқи қоидаи дар § 3.4 оварда шуда ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ин муодила сатҳеро муайян мекунад, ки он *гиперболоиди яккомаи чархзани* номида мешавад. Онро бо ҳамвории $z = h$– и ба ҳамвории $x0y$ параллел бурида, дар буриш давраеро ҳосил мекунем, ки муодилааш

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\ z=h. \qquad (3.13)$$

мебошад ва радиусаш ба $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ баробар аст. Пас, дар вақти аз

$-\infty$ то $+\infty$ тағьир ёфтани h давраи (3.13) гиперболоиди яккомаи чархзаниро мекашад.

Акнун ба чои давраи (3.13) эллипси

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\ z=h. \qquad (3.14)$$

ро мегирем, ки он дар ҳамвории *z* = *h*– и ба ҳамвории *XOY* параллел мехобад ва нимтираҳояш чунин аст:

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \text{ ва } b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \qquad (3.15)$$

ҳангоми аз $-\infty$ то $+\infty$ тағир ёфтани h ин эллипс сатҳеро мекашад, ки аз ду муодилаи (3.14) h – ро хорич карда, муодилаи онро ҳосил мекунем:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(II)

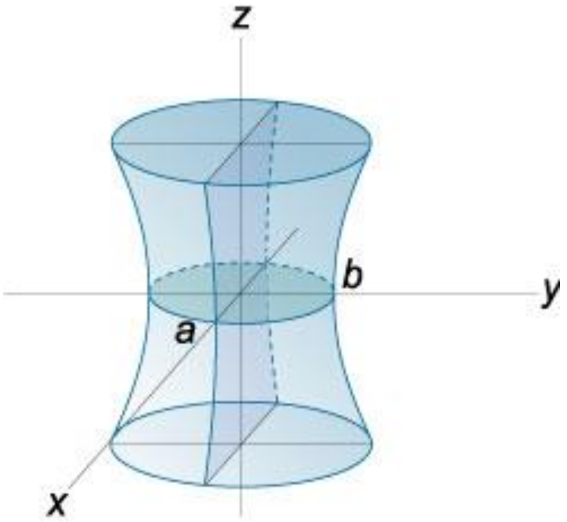
Сатҳи тартиби дуюм, ки онро муодилаи (II) муайян мекунад, *гиперболоиди яккома* ва бузургиҳои *a, b,c нимтираҳои* он номида мешаванд.

Сатҳи (II) – ро бо ҳамвориҳои координати *z = 0, y = 0, x = 0* бурида дар буриш мувофиқан эллипс ва ду гиперболаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1,\ z=0; \qquad \frac{\mathrm{x}^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0;$$

$$\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ x=0. \qquad (3.16)$$

Аз ин чо чунин натича мебарояд, ки дар буриши гиперболоиди яккомаю ҳамвории z = h – ки ба ҳамвории XOY параллел аст, эллипси (3.14) – и нимтирҳояш (3.15) ҳосил мешавад. Дар ҳолати аз -∞ то $+\infty$ тағъир ёфтани h ин нимтираҳо ба нимтираҳои a ва b – и эллипсе, ки дар ҳамвории xOy мехобад, мутаносибан тағъир меёбанд,



Расми 7.

ва мо гиперболоиди яккомаро чун сатҳе, ки онро эллипси ҳаракаткунанда (ки ҳамвориаш ба ҳамвории XOY параллел мемонад) ташкил додааст, муоина карда метавонем. Ин эллипс дар вақти ҳаракат ба худаш монанд мешавад ва нӯгҳои тирҳояш дар ҳамвориҳои XOZ ,YOZ аз рӯи гиперболаҳои (3.16) (расми 7.) мелағчанд. Агар $a = b$ бошад, муодилаи (II) гиперболоиди яккомаи чархзании тири чархзаниаш Oz – ро муайян мекунад.

Муодилаи (II) фақат квадратҳои координатаҳоро дорост; аз ин чо натича мебарояд, ки гиперболоиди яккома нисбат ба ибтидои координат симметрӣ буда, ҳамвориҳои координати ҳамвориҳои симметрии он мебошанд.

Муодилаи ҳамвории расанда ба гиперболоиди яккома дар нуқтаи $M(x_1, y_1, z_1)$ ба намуди зерин мешавад;

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}= 1$$

§ 3.7. Гиперболоиди дукома.

Агар гиперболаи

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\,.$$

- ро дар атрофи тири ҳақиқии он - Oz чарх занонем, *гиперболоиди дукомаи чархзаниро* ҳосил менамоем, ки муодилааш

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1$$

мешавад. Онро бо ҳамвории $z = h$ ($|h| \geq c$) , ки ба тири чархзании Oz перпендикуляр мебошад, бурида, дар буриш давраеро ҳосил мекунем, ки муодилааш

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \quad z=h\,. \tag{3.17}$$

мебошад ва радиусаш ба $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ баробар аст.

Дар вақти аз c то $+\infty$ тағъир ёфтани h давраи (3.17) як комаи гиперболоид ва ҳангоми аз $-c$ то $-\infty$ тағъир ёфтани h комаи дигари онро мекашад.

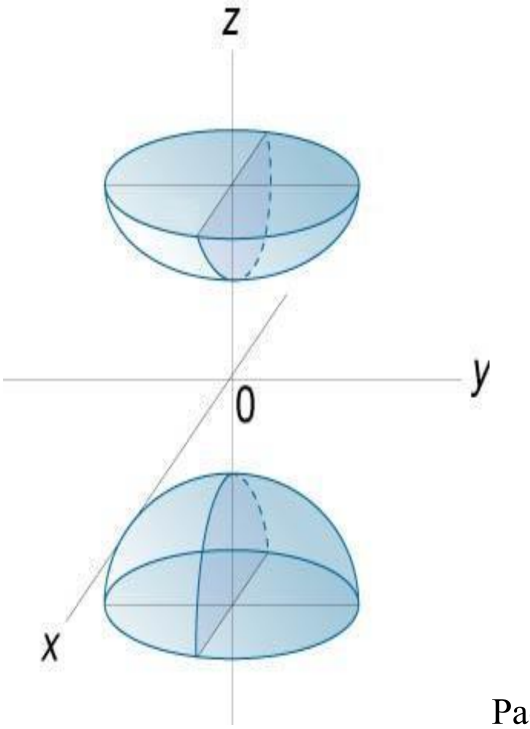
Ба чои давраи (3.17) эллипси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\ z=h\,. \tag{3.18}$$

ро мегирем, ки он дар ҳамвории $z=h$ - и ба ҳамвории XOY параллел мехобад ва нимтирҳояш ба

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\ \ \text{ва}\ \ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \tag{3.19}$$

баробаранд.



Расми 8.

Ҳангоми аз $-\infty$ то $-c$ ва аз $+c$ то $+\infty$ тағъир ёфтани h ин эллипс сатҳи дукомаеро мекашад, ки аз ду муодилаи (3.18) h- ро хорич карда, муодилаи онро ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,. \qquad \text{(III)}$$

Сатҳи тартиби дуюмро, ки бо муодилаи (III) муайян мешавад,

гиперболоиди дукома ва бузургиҳои a, b, c *– ро нимтираҳои* он меноманд (Расми 8.). Ин сатҳро бо ҳамвориҳои координати $z=0$, $y=0$, $x=0$ бурида, дар буриш мувофиқан чои мавҳум ва ду гиперболаҳои зеринро ҳосил менамоем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1\ ,\ z=0;\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\ ,\ y=0;\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,\ x=0 \qquad (3.20)$$

Чунон ки дар боло гуфта шуд, агар $|h|\geq c$ бошад, дар буриши гиперболоиди дукомаву ҳамвории $z=h$, ки ба ҳамвории $x0y$ параллел аст, эллипси (3.18) – и дорои нимтираҳои (3.19) ҳосил мешавад. Аз ин чо натича мебарояд, ки гиперболоиди дукомаро чун сатҳе муоина карда метавонем, ки эллипси ҳаракаткунанда (ки ҳамвориаш ба ҳамвории *x0y* параллел мемонад) ташкил медиҳад ва дар вақти ҳаракат ба худаш монанд мешавад ва нӯгҳои тирҳояш дар ҳамвориҳои *XOZ ва YOZ* аз рӯи гиперболаҳои (3.20) (расми 8) мелағчанд. Сатҳ нисбат ба ибтидои координат симметри буда, ҳамвориҳои координати ҳамвориҳои симметрии он мебошанд.

Дар вақти $a = b$ будан муодилаи (III) гиперболоиди дукомаи чархзаниеро муайян мекунад, ки тири чархзаниаш Oz мебошад.

Муодилаи ҳамвории расанда ба гиперболоиди дукома дар нуқтаи $M(x_1, y_1, z_1)$,ба намуди зерин мешавад;

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = -1 \qquad (3.21)$$

§ 3.8. Параболоиди эллипси

Дар натичаи дар атрофи тири Oz чархзании параболаи $y^2 = 2pz$ параболоиди чархзани ҳосил мешавад. Мувофиқи қоидаи сатҳи чархзани (§ 3.4) муодилаи параболоиди ҳосил шуда ба намуди зерин мешавад:

$$x^2 + y^2 = 2pz \qquad (3.22)$$

Дар буриши параболоиду ҳамвории $z = h$ (h≥ 0), ки ба тири чархзани Oz перпендикуляр аст, даврае ҳосил мешавад, ки муодилааш

$$x^2 + y^2 = 2ph, \quad z = h \qquad (3.23)$$

буда, радиусаш ба $\sqrt{2ph}$ баробар мебошад. Пас, дар вақти аз 0 то +∞ тағир ёфтани h давраи (3.23) параболоиди чархзаниро мекашад.

Ба чои давраи (3.23) эллипси

$$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \quad z = h \qquad (3.24)$$

(p, q ва h – ададҳои мусбат) – ро мегирем, ки он дар ҳамвории

$z = h$ - и ба ҳамвории XOY параллел мехобад ва нимтираҳояш

$$a = \sqrt{2\mathrm{p}h} \quad , \; b = \sqrt{2qh} \, , \tag{3.25}$$

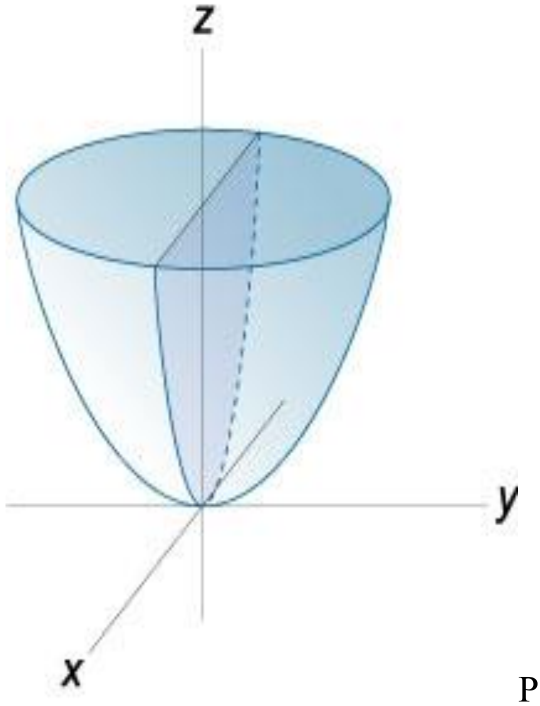
мебошанд. Дар вақти аз 0 то $+\infty$ тағьир ёфтани h ин эллипс сатҳи тартиби дуюми **параболоиди эллипси** номидашавандаро мекашад (расми 9), ки аз ду муодилаи (3.24) h - ро хорич карда, муодилаи онро ҳосил менамоем:

$$\frac{x^2}{2\mathrm{p}z} + \frac{y^2}{2qz} = 1, \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{\mathrm{p}} + \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{IV}$$

Ин сатҳро бо ҳамворихои координати $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ бурида, дар буриш мувофиқан нуқта ва ду параболаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$x^2 = 2pz\,, \quad y = 0; \qquad y^2 = 2qz, \quad x = 0 \tag{3.26}$$

Аз ин рӯ параболоиди эллипсиро чун сатҳе муоина кардан мумкин аст, ки вайро эллипси ҳаракаткунандае ташкил медиҳад, ки он ба худаш монанд мешавад ва нӯгҳои тирҳояш аз рӯи параболаҳои (3.26) мелағчанд (расми 9); ҳамвории эллипс дар вақти ҳаракат ба ҳамвории xOyпараллел мемонад.



Расми 9.

Муодилаи (IV) фақат квадратҳои координатаҳои *х ва у* – ро дорост ва аз ҳамин сабаб, ҳамвориҳои *XOZ ва YOZ* ҳамвориҳои симметрии сатҳ мебошанд. *Ҳангоми* р = q будан муодилаи (IV) параболоиди чархзаниеро муайян мекунад, ки тири чархзаниаш Oz мебошад.

Муодилаи ҳамвории расанда ба параболоиди эллипси дар нуқтаи $M(x_1, y_1, z_1)$,ба намуди зерин мешавад;

$$\frac{xx_1}{p} + \frac{yy_1}{q} = z + z_1 \qquad (3.27)$$

§3. 9.Параболоиди гиперболӣ.

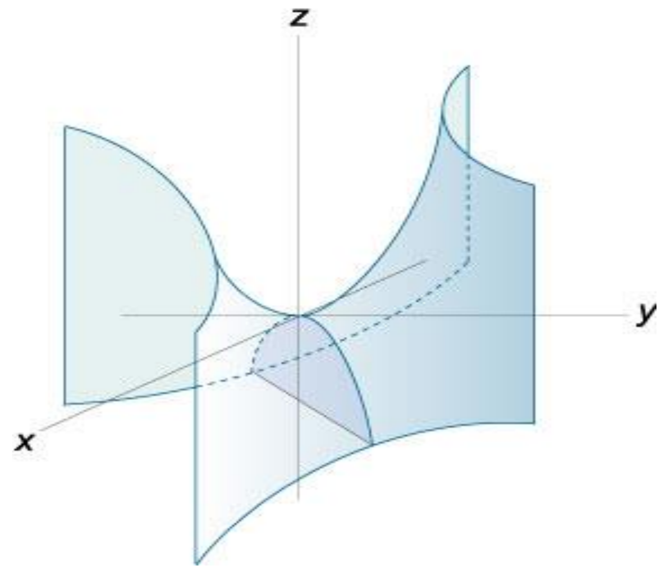
Муодилаи оддитарини параболоиди гиперболӣ намуди зеринро

$$\frac{x^2}{\mathrm{p}} - \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (\mathrm{p}>0, \ \ \mathrm{q}>0), \qquad (V)$$

дорад, яъне аз муодипаи (IV) фақат бо аломати назди y^2 фарқ мекунад. Ҳамвории координатии *XOZ* ин сатҳро аз рӯи параболаи

$$x^2 = 2pz \qquad (3.28)$$

мебурад, ки тири *OZ* тири симметрии он буда, ин парабола дар самти мусбати тири *OZ* воқеъ аст. *Ҳамвории* $x = h$ - и ба ҳамвории *YOZ* параллел, сатҳи (V) – ро аз рӯи параболае мебурад, ки муодилаҳояш чунинанд:



Расми 10.

$$\begin{cases} y^2 = -2qz + \frac{qh^2}{p}, \\ x = h, \end{cases} \quad \text{ёки} \begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right), \\ x = h. \end{cases} \tag{3.29}$$

Аз муодилаҳои (3.29) намоён аст, ки ин параболаҳо дар ҳамвориҳои $x = h$ воқеъ буда фақат ҳамон як параметрро доранд; тирҳои симметриашон дар ҳамвории XOZ воқеанд ва ба тири Oz параллел мебошанд; шохаҳои параболаҳо ба поён (ба самти манфии тири 0z) равон буда, координатаи қуллаҳояшон $z = \frac{h^2}{2p}$ - мебошад. Азбаски муодилаи параболаи (3.28), ки дар ҳамвории XOZ воқеъ аст, ҳангоми $x = h$ будан низ ҳамон қиммати $z -$ро дорост, пас аз ин чо хулоса меборояд, ки қуллаҳои параболаҳои (3.29) дар параболаи (3.28) воқеъ мебошанд (расми10).

Ба ҳамин тариқ, параболоиди гиперболии (V) – ро чун сатҳе дида баромадан мумкин аст, ки онро параболаи ҳаракаткунандае ташкил медихад, ки тири симметриаш дар ҳамвории XOZ мемонад ва қуллааш аз рӯи параболаи (3.28) ҳаракат мекунад. Ҳамвории парабола ба ҳамвории YOZ параллел мемонад. Параболоиди гиперболии (V) – ро бо ҳамвории $z = h$ бурида, дар буриш гиперболаеро ҳосил мекунем, ки муодилааш чунин аст:

$$\frac{x^2}{\mathrm{p}} - \frac{y^2}{q} = 2z\ , \qquad z = h\,.$$

Дар вақти $h > 0$ будан тири симметрии гипербола ба тири Оx параллел мешавад; ҳангоми $h < 0$ будан тири ҳақиқии симметрии гипербола ба тири Oy параллел хоҳад шуд.

Ҳамвории XOY дар буриш бо сатҳи (V) хати

$$\frac{x^2}{\mathrm{p}} - \frac{y^2}{q} = 0.\ z = 0$$

-ро ҳосил мекунад, ки муодилааш ба ду чуфт муодилаҳои хати рост чудо мешавад:

$$\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{p}}} + \frac{y}{\sqrt{\mathrm{q}}} = 0, \quad z = 0,$$

ва

$$\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{p}}} - \frac{y}{\sqrt{\mathrm{q}}} = 0, \quad z = 0,$$

ва аз ҳамин сабаб ин буриш мачмӯи ду хатҳои рости якдигарро бурранда мебошад. Хатҳои рости буриши ҳамвории $z = 0$ хизмати аз як оилаи гиперболаҳо (ки дар буриши ҳамвории $z = h$, ҳангоми $h > 0$ будан, ҳосил мешаванд) ба оилаи дигари гиперболаҳо гузаштанро адо мекунанд.

Азбаски муодилаи (V) фақат квадратҳои координатҳои *x ва y* ро дорост, пас ҳамвориҳои *XOZ ва YOZ* барои сатҳ ҳамвориҳои симметрӣ мебошанд. Муодилаи ҳамвории расанда ба параболоиди гиперболи дар нуқтаи $M(x_1, y_1, z_1)$,ба намуди зерин мешавад;

$$\frac{xx_1}{p} - \frac{yy_1}{q} = z + z_1$$

<u>Маърузаи 28</u>

Сатҳҳои силиндрӣ (мавриди умуми).

Таъриф. Сатҳеро, ки онро хатҳои рост – ташнкилдиҳандаҳо ба ягон хати рости додашуда параллелу хати качи додашудаи L – равишдиҳандаро бурранда ташкил додаанд , сатҳи силиндрӣ меноманд.

Бигзор равишдиҳандаи сатҳи силиндри бо муодилаҳои намуди.

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0 \tag{3.1}$$

муайян карда шаванд. Фараз мекунем, ки m, n, p координатаҳои вектори равишдиҳандаи ташкилдиҳандаҳои сатҳи силиндрӣ бошанд. Он гоҳ муодилаи

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{\text{p}} \tag{3.2}$$

муодилаҳои каноникии ташкилдиҳандаҳо хоҳанд шуд, ки дар ин чо (x, y, z) нуқтаи мансуб ба равишдиҳанда буда, $X, У, Z$ координатаҳои чори мебошанд. Аз чор муодилаи (3.1) ва (3.2) x, y ва z –ҳоро хорич карда, муодилаи сатҳи силиндириро ҳосил мекунем.

Мисоли 1. Муодилаи сатҳи силиндриро тартиб диҳед, ки ташнкилдиҳандаҳояш ба хати рости $x = y = z$ параллел буда, хати рости.

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (A\,)$$ равишдиҳандаи он мебошад.

Ҳал. Муодилаҳои каноникии ташкилдиҳандаҳо чунин мешаванд:

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{1} = \frac{Z-z}{1}. \qquad (B)$$

Аз чор муодилаи охирини *(A)ва (B)* x , у ва z – ро хорич мекунем. Бузургии ҳар яки нисбатҳои охиринро бо е - ишорат карда, меёбем , ки

$$x = X - e\,,\ y = У - e\,,\ z = Z - e.$$

Ин қиматҳои x, y ва z – ро ба муодилаҳои додашудаи равишдиҳанда гузошта, ифодаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$X + У - Z - e - 1 = 0, \qquad X - У + Z - e = 0$$

Ниҳоят, е – ро хорич карда, меёбем, ки

$$2У - 2Z - 1 = 0.$$

Ин муодилаи ҳамвориест, ки аз ташкилдиҳандаи додашуда мегузарад ва ба хати рости $x = y = z$ параллел аст.

Маърузаи 29

Буриши сатҳи тартиби дуюм бо хати рост.Самтҳои асимптотики. Сатҳҳои конуси.

Таъриф. Сатҳеро, ки онро хатҳои рости – ташкилдиҳандаҳои конус –

аз нуқтаи додашуда – қуллаи конус - гузаранда ва хати додашуда – равишдиҳандаи конусро бурранда ташкил додаанд, сатҳи конуси меноманд.

Фарз мекунем, ки $F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0$ (3.3)

муодилаҳои равишдиҳандаҳои конус ва x_0, y_0, z_0 - координатаҳои қуллаи конус мебошанд. Муодилаи қаноникии ташнкилдиҳандаҳои конус чун хатҳои росте, ки аз нуқтаи (x_0, y_0, z_0) ва аз нуқтаи (x, y, z)-и равишдиҳанда мегузарад, чунин мешаванд:

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0}. \tag{3.4}$$

Аз чор муодилаҳои (3.3) ва (3.4) x, y ва z – ро хорич карда, муодилаи матлуби сатҳи конусиро ҳосил мекунем. Ин муодила ба ҳосияти ниҳоят одди молик аст: ин муодила нисбат *фарқҳои* $X - x_0$, $Y - y_0$, $Z - z_0$, якчинса мебошад (яъне, ҳама аъзоҳояш якхел ченак доранд). Воқеан, аввал фарз мекунем, ки қуллаи конус дар ибтидои координат $(x_0 = y_0 = z_0 = 0)$ воқеъ аст. Бигузор X, $У$ *ва* Z координатаҳои нуқтаи дилхоҳи конус бошанд; пас, онҳо муодилаи конусро қаноат мекунонанд. Баъди дар муодилаи конус баλX, $\lambda У$, λZ (λ - зарбкунандаи дилхоҳ) мувофиқан иваз кардани X, $У$ *ва*

Z муодила бояд қаноат кунонида шавад, чунки λX, λУ, ва λZ координатаҳои нуқтаи хати ростеанд, ки он аз ибтидои координат ва нуқтаи (X, $У$, Z) мегузарад, яъне ташнкилдиҳандаи конус мебошад. Пас, агар ҳама координатаҳои чориро ба як адади λ зарб кунем, муодилаи конус таъғир намеёбад. Аз ин чо натича мебарояд, ки ин муодила нисбат ба координатаҳои чорй бояд якчинса бошад. Агар қуллаи конус дар нуқтаи (x_0, y_0, z_0) воқеъ бошад, мо ибтидои координатаро ба қулла мекӯчонем ва мувофиқи исбот муодилаи табдилдодашудаи конус нисбат ба координатаҳои нав, яъне

$\mathrm{X}_0-\mathrm{x}_0, \mathrm{У}_0-\mathrm{y}_0, \; Z_0-z_0$ якчинса хоҳад шуд.

Мисоли 2. Муодилаи конусеро тартиб диҳед, ки қуллааш дар ибтидои координата буда, муодилаҳои равишдиҳандааш

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b}=1, \quad z = c$$

мебошанд.

Ҳал. Муодилаҳои кононикии ташнкилдиҳандаҳое, ки аз қуллаи (0, 0, 0) – и конус ва аз нуқтаи (x, y, z)-и равишдиҳанда мегузарад, чунин мешавад.

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{\mathrm{y}} = \frac{Z}{z}$$

Аз чор муодилаи додашуда x, y *ва* z – ро хорич мекунем. z – ро бо c иваз карда аз ду муодилаи охирин x *ва* y – ро муайян намоем:

$$x = c\frac{X}{Z}. \quad y = c\frac{Y}{Z}.$$

Ин қимматҳои x ва y – ро ба муодилаи якӯми равишдиҳанда гузошта, ифодаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\mathrm{c}^2}{a^2}\cdot\frac{\mathrm{X}^2}{Z^2}+\frac{\mathrm{c}^2}{b^2}\cdot\frac{Y^2}{Z^2}=1,$$

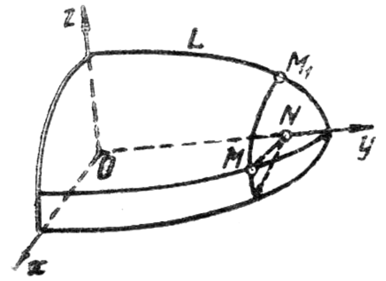
ёки $$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0. \qquad (3.5)$$

Дар вақти a = b будан, равишдиҳандаи сатҳи конуси давра мешавад ва мо конуси доиравиро пайдо мекунем.

§ 3.4. Сатҳҳои чархзанӣ.

Фараз мекунем, ки дар ҳамвории YOZ хати L дода шудаасту $F(Y, Z)=0$ муодилаи он мебошад.

Муодилаи сатҳеро, ки дар натичаи дар гирди тири OY чархзанонии ин хат ҳосил мешавад, (расми 119), меёбем.



Расми 119.

Дар ин сатҳ нуқтаи дилхоҳи $M(x, y, z)$ - ро интихоб карда, аз он ҳамвории ба тири чархзани Оу перпендикулярро мегузаронем. Дар буриши ин ҳамворию сатҳ даврае ҳосил мешавад, ки марказаш N дар тири чархзани воқеъ аст ва (0,y, 0) координатаҳои нуқтаи N мешаванд. Радиуси давра MN, чун масофаи байни нуқтаҳои N ва M, ба $R = MN = \sqrt{x^2+z^2}$ баробар аст. Аз тарафи дигар, маълум аст, ки ин радиус бузургии мутлақи апликатаи ҳамон нуқтаи M_1 – и хати додашудаи L аст, ки ординатааш y мебошад. Пас, дар муодилаи додашуда

$$Y = y,\ Z = \pm\sqrt{x^2+z^2}$$

(координатаҳои нуқтаи M_1) фарз карда, муодилаи матлуби сатҳи чархзаниро ҳосил мекунем:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0.$$

Ба ҳамин тариқ мо ба қоидаи зерин меоем:

Барои ҳосил кардани муодилаи сатҳе , ки дар натичаи дар гирди тири Оу чархзании хати L, ки дар ҳамвории уOz мехобад, ташкил ёфта аст, дар муодилаи ин хат z – ро ба $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ *иваз кардан лозим аст.*

Ҳамин гуна қоида нисбат ба сатҳҳое, ки дар натичаи дар гирди тирҳои дигари координати чархзании хати ҳамвор ҳосил мешаванд, низ чой дорад.

Мисоли 3. Муодилаи сатҳе, ки дар натичаи дар гирди тири *Ox* чархзании эллипси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ҳосил мешавад, чунин аст: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$

(3.6)

Агар худи ҳамин эллипс дар атрофи тири Oz чарх занад, он гоҳ муодилаи сатҳи чархзании ҳосилшуда чунин намудро мегирад:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.6')$$

Агар *a* > c бошад, он гоҳ дар мавриди якўм эллипсоиди дарозшуда ва дар мавриди дуюм эллипсоиди фишурдашудаи чархзаниро соҳиб мешавем. Дар мавриди *a =c* будан сфера ҳосил мешавад.

Мисоли 4. Муодилае сатҳе, ки дар натичаи дар гирди тири *Ox* чархзании гиперболаи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ҳосил мешавад, чунин аст: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$

(3.7)

Ин сатҳ *гиперболоиди дуккомаи чархзанӣ* номидашаванда мебошад.

Агар худи ҳамон гиперболаро дар атрофи тири *Oz* чарх занонем, он гоҳ муодилаи ин сатҳи чархзани чунин мешавад.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.7a)$$

Ин сатҳ *гиперболоиди яккомаи чархзанӣ* номида шаванда мебошад.

Мисоли 5. Муодилае сатҳе, ки дар натичаи дар атрофи тири Oz чархзании параболаи $y^2 = 2pz$ ҳосил шудааст, чунин мешавад:

$$x^2 + y^2 = 2pz \qquad (3.8)$$

Ин *сатҳ параболоиди чархзанӣ* номидашаванда мебошад.

Маърузаи 30

НАЗАРИЯИ УМУМИИ САТҲҲОИ ТАРТИБИ ДУЮМ.

§4.1. Содда намудани муодилаи умумии сатҳи маркази.

Муодилаи дарачаи дуюм нисбат ба тағирёбандахои x, y, z (координатаҳои декарти) муодилаи умумии сатҳҳои тартиби дуюм мебошад,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (4.1)$$

Дар ин ҷо коэффициентҳои a_{ij} ададҳои ҳақиқи буда индекси якум тағъирёбандаи x, 2 ум $- y$ ва $3 -$ ум z, аъзоҳои дарачаи якӯм (хатти) бо индекси 4 ифода карда мешаванд ва $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$.

Агар сатҳи тартиби дуюм маркази симметрия дошта бошад ва нуқтаи $\mathcal{M}_0(x_0, y_{0,}z_0)$ маркази сатҳ бошад, он гоҳ ибтидои координатаро ба ин маркази симметри $\mathcal{M}_0(x_0, y_{0,}z_0)$ параллел мекӯчонем, яъне ивазкунии параллел кӯчониро чори мекунем:

$$x = x' + x_0 , \qquad y = y' + y_0, \qquad z = z' + z_0$$

Он гоҳ дар муодилаи (4.1) аъзохои хатти хорич мешаванд (иштирок намекунад) ва коэффисентҳои назди аъзоҳои даражаи дуюм таъғир намеёбанд ва муодила ба намуди зерин оварда мешавад:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}yz + 2\bar{\mathcal{F}} = 0 \quad (4.2)$$

Ҳамин тавр координатаҳои марказ коэффисентҳои аъзои хаттиро ба нол баробар мекунанд . Координатаҳои маркази сатҳ аз системаи муодилаҳои хаттии зерин муайян карда мешаванд:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Коэффисентҳои назди аъзоҳои дарачаи якӯм баъд аз ивазкунии параллел кӯчони ба ҳосилаҳои хусусии қисми чапи муодилаи сатҳ (4.1) дар нуқтаи (x_0, y_0, z_0) баробар мебошанд, аъзои озоди нав $\bar{\mathcal{F}}$ бошад ба қимати қисми чапи муодила дар нуқтаи (x_0, y_0, z_0) баробар мешавад:

$$\left.\begin{aligned} 2\mathcal{F}'_{x_0} = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}) \\ 2\mathcal{F}'_{y_0} = 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}) \\ 2\mathcal{F}'_{z_0} = 2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}) \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(x_0, y_0, z_0)$.

Равшанаст , ки агар детерминанти асосии системаи (4.3)

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ба нол нобаробар бошад ($\delta \neq 0$), система дорои ҳалли ягона мебошад ва сатҳро сатҳи маркази меноманд . Координатаҳои маркази сатҳро, яъне ҳалли системаро аз рӯи формулаҳои Крамер ҳисоб мекунем:

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{\begin{vmatrix} -a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\delta} \\ y_0 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}}{\delta} \\ z_0 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{34} \end{vmatrix}}{\delta} \end{aligned}\right. \qquad (4.5)$$

Агар $\delta = 0$ бошад,сатҳ марказ надорад ёки марказҳои беҳад бисьёр дорад. Агар системаи (4.3) номуайян бошад (яъне $\delta = 0$ бошад) вобаста аз қимати ранги матрицаи асосии системаи (4.3) сатҳ ё марказҳои беҳад бисёр дорад ёки дорои ҳамвории марказҳо мешавад. Аъзои озоди муодилаи (4.2) $\bar{\mathcal{F}}$-ро аз рӯи формулаи зерин ҳам ҳисоб кардан мумкин аст:

$$2\bar{\mathcal{F}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{\mathcal{K}_4}{\delta} \qquad (4.6)$$

Детерминанти $\mathcal{K}_4$ дискриминанти сатҳ номида мешавад.

Агар $\mathcal{K}_4 = 0$,бошад муодилаи (4.1) конусро муайян мекунад.

Қуллаи конус аз системаи зерин муайян карда мешавад;

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Агар системаи (4.8) ҳал надошта бошад он гоҳ муодилаи дода шуда (4.1) сатҳи силиндри ро муайян мекунад.

Маърузаи 31

§4.2.Табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координати.

Акнун барои боз ҳам соддатар намудани муодилаи сатҳ (4.2) мо аз табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координати дар фазо истифода мебарем. Формулаҳоии ивазшавии координатаҳо дар натичаи даврзанонии тирҳои координати ба кунчҳои α, β, γ (тири $OX-$ ро ба кунчи α , тириOY –ро ба кунчи,β $-$тири OZ –ро бакунчи γ) ба намуди зерин мебошанд:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \bar{x}\,cos\,\alpha_1 + \bar{y}\,cos\,\beta_1 + \bar{z}\,cos\,\gamma_1 \\ y' = \bar{x}\,cos\,\alpha_2 + \bar{y}\,cos\,\beta_2 + \bar{z}\,cos\,\gamma_2 \\ z' = \bar{x}\,cos\,\alpha_3 + \bar{y}\,cos\,\beta_3 + \bar{z}\,cos\,\gamma_3 \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

Кунчҳои даврзани α, β, γ -- ҳоро ҳамин тавр интихоб мекунем , ки дар натичаи ивазкуни дар муодилаи ҳосил шуда ба таври имкон аъзоҳои ҳосили зарби ду тағъирёбандаҳо (*xy , xz , yz)* хорич шаванд.

Дар натичаи ин ивазкуни ифодаҳои зерин инварианти мешаванд,яъне тағъир намеёбанд:

$$\mathrm{I}_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (4.10)$$

$$\mathcal{K}_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Агар $\mathrm{I}_3 \neq 0$ бошад, яъне сатҳи маркази бошад, он гоҳ муодилаи (4.2) баъд аз чори намудани ивазкунии (4.9) ба намуди зерин оварда мешавад:

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \lambda_3\bar{z}^2 + \frac{\mathcal{K}_4}{\delta} = 0 \qquad (4.11)$$

ки дар инчо λ_1, λ_2,λ_3 решаҳои муодилаи характеристикии сатҳ мебошанд::

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.12)$$

ёки $$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - \mathrm{I}_3 = 0 \qquad (4.12')$$

Мавридҳои гуногуни решаҳои муодилаи характеристикии $(4.12')$ –ро муоина мекунем. Аввало мавриди $\mathrm{I}_3 \neq 0$ – ро мебинем.

I. Бигзор $\mathbf{I_3 \neq 0}$ бошад .

Вобаста аз ишораҳои решаҳои характеристики ва қимати $\bar{\mathcal{F}}$ мавридҳои зерин дучор мешаванд.

Маърузаи -32

Инвариантҳои қисми чапи муодилаи умумии сатҳ.Муайян намудани коэффитциентҳои муодилаи каноникии сатҳ.

1.Бигзор решаҳои муодилаи характеристики $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – ишораашон якхела бошанд ва бо ишораи аъзои озод $\bar{\mathcal{F}}$ – муқобил бошанд, он гоҳ муодилаи (4.1) эллипсоидро муайян мекунад.

$|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$ гуфта қабул карда муодилаи сатҳро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\frac{\bar{x}^2}{-\bar{\mathcal{F}}/\lambda_1} + \frac{\bar{y}^2}{-\bar{\mathcal{F}}/\lambda_2} + \frac{\bar{z}^2}{-\bar{\mathcal{F}}/\lambda_3} = 1 \qquad (4.13)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{c}^2} = 1$$

яъне эллипсоиди, нимтираҳояш

$$\overline{a^*} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_1}};\ \overline{b^*} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_2}};\ \overline{c^*} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_3}}$$

Мувофиқи шарт $\overline{a^*} > \overline{b^*} > \overline{c^*}$

2. Агар $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ва $\bar{\mathcal{F}}$ ишораҳояшон якхела бошад, он гоҳ муодилаи (4.2) эллипсоиди мавҳумро муайян мекунад. Дар ин маврид муодила ба намуди

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{c}^2} = -1 \qquad (4.14)$$

оварда мешавад.

3. Бигзор $\lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_3$ ишораҳояшон якхела бошанд ва $\bar{\mathcal{F}} = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи (4.11) ба намуди зерин

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \lambda_3\bar{z}^2 = 0 \quad \text{ёки} \quad \frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{\bar{z}^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 0$$

(4.15)

мешавад ва ин муодила конуси мавҳумро муайян мекунад

4. Агар ду решаҳои муодилаи характеристики ишораашон якхела буда, ишораи решаи сеюм ва аъзои озод $\bar{\mathcal{F}}$ ба онҳо муқобил бошад, он гоҳ муодилаи (1) гиперболоиди яккомаро муайян мекунад.

Ишораҳои λ_1 ва λ_2- якхела гуфта ва $|\lambda_1| > |\lambda_2|$қабул карда муодилаи сатҳ (4.11)-ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{-\mathcal{F}}{\lambda_1}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{-\mathcal{F}}{\lambda_2}} + \frac{\bar{z}^2}{\frac{-\mathcal{F}}{\lambda_3}} = 1 \qquad (4.16)$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2} - \frac{\bar{z}^2}{\bar{c}^2} = 1 \quad (4.16'), \quad \bar{a} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_1}}, \qquad \bar{b} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_2}},\ \bar{c} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_3}}$$

5. Агар ду решаҳои муодилаи характеристики ва аъзои озод $\bar{\mathcal{F}}$ ишораҳои якхела дошта бошанд , ва ишораи решаи сеюм ба ишораи онҳо муқобил бошад, он гоҳ муодилаи (4.1) гиперболоиди дупаллагиро муайян мекунад.

Дар ин маврид бо λ_1 ва λ_2 решаҳои ишораашон якхела доштаро ишорат кунем ва $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ гуфта муодилаи (4.11)–ро ба намуди зерин менависем:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_1}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_2}} - \frac{\bar{z}^2}{\frac{-\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_3}} = -1 \quad (4.17) \quad \text{ёки} \quad \frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{\mathscr{b}}^2} - \frac{\bar{z}^2}{\bar{c}^2} = -1 \quad (4.17')$$

$$\bar{a} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_1}}, \qquad \bar{\mathscr{b}} = \sqrt{\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_2}}, \quad \bar{c} = \sqrt{-\frac{\bar{\mathcal{F}}}{\lambda_3}}$$

6. Агар ду решаҳои муодилаи характеристики ишораҳои якхела ва ишораи решаи сеюм ба онҳо муқобил ва $\mathcal{K}_4 = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи (4.1) конусро муайян мекунад.

λ_1 ва λ_2 ишораашон якхела ва $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ гуфта муодилаи (4.11) ба намуди зерин навиштан мумкин:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{\lambda_2}} - \frac{\bar{z}^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 0 \quad \text{ёки} \quad \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{\mathscr{b}^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 0 \qquad (4.18)$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, \ \mathscr{b} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}, \ z = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_3|}} \quad \text{дар ин чо } a \geq \mathscr{b}$$

II. Акнун бигзор $\mathbf{I_3 = 0}$ ва $\mathcal{K}_4 \neq \mathbf{0}$ бошад.

Дар ин маврид муодилаи характеристики намуди

$$\lambda(\lambda^2 - I_1\lambda + I_2) = 0$$

мешавад, ва муодилаи характеристики дорои якто решаи нули $\lambda = 0$ мебошад ва ду решаҳои дигар решаҳои муодилаи квадратии

$$\lambda^2 - \mathrm{I}_1\lambda + \mathrm{I}_2 = 0 \tag{4.19}$$

мебошанд. Дискриминанти ин муодила $\mathcal{D} = \mathrm{I}_1^2 - 4\mathrm{I}_2$.

Вобаста аз қимати дискриминант D мавридҳои гуногун дучор мешаванд. Аввало бигзор дискриминант $\mathcal{D} \geq 0$ бошад, он гоҳ муодилаи сатҳ (4.11) ба намуди зерин оварда мешавад:

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{\mathrm{I}_2}}\bar{z} = 0 \tag{4.20}$$

λ_1 , λ_2 решаҳои муодилаи (4.19).

Мавридҳои гуногуни ишораҳои решаҳои муодилаи характеристики λ_1 , λ_2 - ро муоина мекунем:

7. Агар λ_1 ва λ_2 ишораҳои якхела дошта бошанд он гоҳ муодилаи (4.20) параболоиди эллипсиро муайян мекунад

$|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ гуфта муодилаи (4.20) – ро ба намуди зерин менависем:

$$\frac{\bar{x}^2}{\pm\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{I_2}}} + \frac{\bar{y}^2}{\pm\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{I_2}}} = 2z$$

Ишораҳои назди радикалро ба ишораҳои λ_1 ва λ_2 муқобил гирифта ва нишонаҳои

$p = \pm\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{\mathrm{I}_2}}$ ва $q = \pm\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{\mathrm{I}_2}}$ (дар ин чо $p \geq q > 0$)

чори намуда муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\bar{x}^2}{p} + \frac{\bar{y}^2}{q} = 2z \tag{4.21}$$

8. Бигзор λ_1 ва λ_2 ишораҳояшон гуногун бошад. Дар ин маврид муодилаи (4.20) параболоиди гиперболиро муайян мекунад.

Решаи мусбатро λ_1 ва манфиро λ_2 гуфта, ишораи назди радикалро манфи гирифта муодилаи (4.20) - ро ба намуди зерин менависем:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{I_2}}} - \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{I_2}}} = 2z \qquad \text{ёки } \frac{\bar{x}^2}{\mathscr{p}} - \frac{\bar{y}^2}{\mathscr{q}} = 2z \qquad (4.22)$$

дар ин чо $\mathscr{p} = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{\mathrm{I}_2}}$, $\mathscr{q} = -\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{\mathcal{K}_4}{\mathrm{I}_2}}$

III.$\boldsymbol{I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 \neq 0}$ бошад.

Дар ин маврид муодилаи сатҳи тартиби дуйум (4.20) бо ёрии табдилдиҳии параллелкӯчони ва даврзанонии тирҳои координати ба намуди зерин оварда мешавад:

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \qquad (4.23)$$

дар ин чо λ_1 ва λ_2 решаҳои ғайри нулии муодилаи характеристикии (4.19). Вобаста аз қимати решаҳо мавридҳои зерин дучор мешаванд:

9). Агар λ_1 ва λ_2 ишораҳояш якхела ва бо ишораи $\frac{K_3}{I_2}$ – муқобил бошад, он гоҳ муодила цилиндри эллипсиро муайян мекунад. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ гуфта муодилаи (4.23) – ро ба намуди зерин менависем:

$$\frac{\bar{x}^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{\bar{y}^2}{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}} = 1$$

Ёки
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \qquad (4.24)$$

дар инчо $a = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_{1I_2}}}$, $b = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_{2I_2}}}$, $a \geq b$

10) . Агар λ_1 , λ_2 ва $\frac{K_3}{I_2}$ ишораҳои якхела доштa бошанд муодилаи (4.23) цилиндри эллипсии мавҳумро муайян мекунад $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ гуфта қабул кунем.Муодила намуди зерин мешавад:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = -1 \qquad (4.25)$$

11). Агар λ_1 ва λ_2 ишораҳои якхела доштa бошанд ва $K_3 = 0$ бошад ,муодила ду ҳамвориҳои буридашавандаи мавҳумро муайян мекунад.Дар ин маврид муодила ба намуди зерин навишта мешавад:

$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{|\lambda_1|}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{|\lambda_2|}} = 0$ ёки $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 0$ дар ин чо $a = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}}$, $a \geq b$

12) . Агар λ_1 ва λ_2 ишораҳои гуногун ва $K_3 \neq 0$ бошад, муодилаи (4.20) цилиндри гиперболиро муайян мекунад.Дар ин маврид λ_1 –гуфта ҳамон решаи характеристикиро қабул мекунем, ки ишорааш ба ишораи $\frac{K_3}{I_2}$ муқобил бошад.Он гоҳ муодила ба намуди зерин навишта мешавад.

$$\frac{\bar{x}^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}} - \frac{\bar{y}^2}{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}} = 1, \qquad \text{ёки} \qquad \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

(4.26)

Дар ин чо $a = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}$, $b = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}$

13) . Агар ишораҳои λ_1 ва λ_2 гуногун ва $K_3 = 0$ бошад, он гоҳ муодила ду ҳамвориҳои буридашавандаро муайян мекунад. $\lambda_1 > 0$ ва $\lambda_2 < 0$ гуфта муодиларо ба намуди зерин менависем:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{\lambda_1}} - \frac{\bar{y}^2}{-\frac{1}{\lambda_2}} = 0 \text{ ёки } \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 0$$

(4.27)

Дар ин чо $a = \frac{1}{\lambda_1}, b = -\frac{1}{\lambda_2}.$

Маърузаи 33

Фазохои хатти ва Евклиди.

Фазохои хатти, базиси фазои хаттӣ.

Бигузор L-мачмуе бошад, ки элементҳои онро чамъ кардан ва ба адади хакики зарб кардан мумкин бошад. Мачмуи ададхои хакикиро бо $\mathbb{R}$ ишора мекунем.

Таъриф. Мачмуи L дар болои $\mathbb{R}$ фазои хатти ёки фазои хатти хакики номида мешавад, агар шартхои зерин ичро шавад.

1) a+b=b+a барои $\forall a$,bϵL.

2) (a+b)+c=a, +(b+c) барои $\forall a$,b, ϵL 3) дар мачмуи L чунин элементи 0 мавчуд аст, ки элементи ноли номида мешавад ва барои $\forall a \epsilon L$ шарти a+0=a - ро каноат менамояд.

4) Барои хар як елементи $a \epsilon L$ чунин элнменти a-ϵL мавчуд аст, ки элементи мукобил номида мешавад ва a+(-a)=0 мешавад.

5) $\alpha(\beta a)$= $(\alpha\beta)a$ барои $\forall \alpha, \beta \epsilon L$. ва $\forall a \ \epsilon L$.

6) $(\alpha$+$\beta)a$= αa+βa барои $\forall \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ ва $\forall a \epsilon L$

7) $\alpha(a$+$b) = \alpha\ a$+αb барои $\forall \alpha \epsilon \mathbb{R}$ ва $\forall a, b \epsilon L$.

8) $1 \cdot a$=a барои $\forall ab \epsilon L$.

Мисолҳои фазоҳои хаттии хакикиро дида мебароем.

Мисоли 1.1. Бигузор (mxn, $\mathbb{R}$) – мачмуи матрисахои ченакаш ба mxn баробар ва элементхояш аз мачмуи $\mathbb{R}$ бошад. Барои ин мачмуъ хамаи картахои таърифи фазои хатти ичро мешавад. (мувофики хосиятихои амалхои хаттии матрисахо). Бинобар он мачмуи M(mxn,$\mathbb{R}$) фазои хаттии хакики мешавад.

Мисоли 1.2. Бигузор $V^{(3)}$ $(V^{(2)})$ $-$мачмуи векторхои озоди фазо (хамвори) бошад. Барои ин мачмъ хам хамаи шартхои таърифи фазои хатти ичро мешавад (мувофики хосиятхои амалхои хатти бо векторхо) хамин тавр мачмуи $V^{(3)}$ $\left(V^{(2)}\right)$ хам фазои хаттии хакики.

Мисоли 1.3. Бигузор $\mathbb{R}^n$- мачмуи пай дар паии n – то ададхои хакики бошад. Дар мачмуи $\mathbb{R}^n$ амалхои чамъи элементхо ва зарби элемент ба ададро дохил мекунем.

Бигузор a,b$\epsilon\mathbb{R}^n$, a=(a_1 ,a_2, … …a_n), $b = (b_1, b_2 \dots \dots b_n)$, $\alpha\epsilon\mathbb{R}$ бошад он гох .

A+b=(a_1+b_1,a_2+b_2, … …,a_n+b_n)

α ·=a(αa_1, αa_2… … αa_n)

Санчидан мумкин аст. Ки барои элементхои ин мачмуъ амалхои дохил кардашуда хамма шартхои таърифро каноат менамояд.

Элементи нули 0=(0,0,…..,0), элнменти мукоби -a=(-a_1,-a_2,……a_n) ешавад. Бинобар он мачмъи $\mathbb{R}^n$ фазо хаттии хакики мешавад ин фазоро фазои хаттии арифметики меноманд элементхои онро векторхои n – ченака меноманд.

Мисоли 1.4. Бигузор $\mathbb{R}$[x] – мачмуи бисёраъзогихои коифисентхояш ададхои хакики бошад. Санчида мумкин аст, ки барои элементхои мачмуйи $\mathbb{R}$[x] хаммаи шартхои таърифи фазои хатти ичро мешавад. Бинобар он ин мачмуъ фазои хаттии хакики мешавад.

Мисоли 1.5. Бигузор C [a,b] – мачмуи функсияхои дар плрчаи [a,b] бефосила бошад. Барои элементхои ин мачмуъ хамма шартхои таърифи фазои хатти ичро шуданашро санчидан мумкин аст. Бинобар он ин мачмуъ фазои хаттии хакики мешавад.

Барои амалхои элементхои фазои хатти амалхои арифметикие, ки бо ададхои хакики ичро карда мешавад, дуруст аст.

Аз тарафи фазои хатти истифода бурда тасдикхои зеринро исбот кардан мумкин аст.

Мисоли 1.1. Бигузор L- дарачаи хаттии хакики бошад. Он гох барои элементхои дилхох $a, в\epsilon L$ ва ададхои дилхохи хакики $\alpha, \beta\epsilon$ муносибатхои зерин дуруст аст:

1) $0 \cdot a=0$, 2) $\alpha \cdot 0 = 0$, 3) $(-\alpha)\cdot a= -\alpha a$, 4) $\alpha \cdot (-a) = -\alpha a$, 5) $(-\alpha) \cdot (-a) =a$, 6) $\alpha\,(a\text{-b})= \alpha a-\alpha b$, 7) $(\alpha - \beta)a= \alpha \cdot a- \beta a$

Исбот: Исботи ду тасдикхои аввалинро меоварем Исбот мекунем, ки $0\cdot a=0$ мешавад. Элементи $\beta \cdot a$ ро дида мебароем. Аз шарти шашуми таъриф истифода мебарем.

$$\beta \cdot a= (\beta + 0)\cdot a= \beta \cdot a+0 \cdot a$$

Ба хар ду тарафи ин баробари элементи $-\beta a$ ро чамъ мекунем.

$$-(\beta \cdot a) +\beta a= -(\beta a) +(\beta \cdot a+0 \cdot a)$$

Мувофики шарти чорум $-(\beta \cdot a) +\beta \cdot a = 0$ мешавад. Мувофики шартхои 2 ва 3 баробархои зеринро хосил мекунем.

$$\text{-}(\beta \cdot a) + (\beta \cdot a+0 \cdot a) = \left(-(\beta \cdot \mathrm{a}) + (\beta \cdot \mathrm{a})\right) + 0 \cdot a= 0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a$$

Бинобар он $0 \cdot a= 0$ мешава.

Эзозхо. 1. Дар оянда мавхуми фазои хаттиро истифода мебарем, ки он фазои хакики мебошад.

2. Элементхои фазохи хаттиро вектор гуфта меномем.

Халли масъалахо.

Мисоли 1.6. Дар мисолхои 1.3 амали чамъи элементхои $\mathbb{R}^n$ ва зарби он ба адади хакики дохил карда шуда буд. Исбот кунед, ки мачмуи $\mathbb{R}^2$ фазои хатти буданашро исбот намудан ичро шудани шартхои 1 - 8 - и таърифи фазои хаттиро санчидан кифоя аст кайд менамоем, ки агар $a =(a_1,a_2)$ $b = (b_1, b_2)$, $\epsilon\mathbb{R}^2, \alpha\epsilon\mathbb{R}$ бошад он гох.

$$a\text{+b}=(a_1,a_2) +(b_1, b_2) =(a_1+b_1;a_2+b_2)$$

$\alpha \cdot a = \alpha(a_1, a_2) + (\alpha a_1, \alpha a_2)$.

1) Барои хамма векторхои $a = (a_1, a_2) b = (b_1, b_2),\ \epsilon \mathbb{R}^2$ $a + b = b + a$ буданашро нишон медихем. Аз баски a_1, a_2, $b_1, b_2\ \epsilon \mathbb{R}$ он гох $a_1 + b_1 = b_1 + a_1$, $a_2 + b_2 = b_2 + a_2$ ва бинобар он муносибати зерин дуруст аст a+в$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) =$ $= (b_1, b_2) + (a_1, a_2) = b + a$

2) $(b + a) + c = a + (b + c)$ буданашро исбот мекунем ки $\forall a = (a_1, a_2)\ b = (b_1, b_2),\ c = (c_1, c_2)\ \epsilon \mathbb{R}^2$ $(a + b) + c = ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) = (a_1 + b_1 + c_1,\ a_2 + b_2 + c_2) =$ $(a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) + (c_1, c_2) = a + (b + c)$

3) нишон медихем, ки чунин элементи нули мавчуд аст, ки барои элементи дилхохи $a = (a_1, a_2),\ \epsilon \mathbb{R}^2$ $a + 0 = a$ мешавад. Агар $0 = (0,0)$ гуфта ишора кунем он гох чунин мешавад.

$a + 0 = (a_1, a_2) + (0,0) = (a_1 + 0,\ a_2 + 0) = (a_1, a_2) = a$ 4) Нишон медихем, ки барои хар як элементи $a = (a_1, a_2) \epsilon \mathbb{R}^2$ элементи мукобил $-a$ мавчуд аст, ки $a + (-a) = 0$ мебошад.

Агар $-a = (-a_1, -a_2)$ ишора кунем, он гох

$a + (-a) = (a_1, a_2) + (-a_1, -a) = (a_1, -a_1, a_2, -a_2) = (0,0) = 0$.

5) Барои ададхои дилхохи хакики $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ ва вектори дилхохи $a = (a_1, a_2) \epsilon \mathbb{R}^2$ буданашро нишон медихем.

$\alpha(\beta a) = \alpha\ (\beta(a_1, a_2)) = \alpha(\beta a_1, \beta a_2) = (\alpha\beta a_1,)(\alpha\ \beta a_2) = (\alpha\beta) =$ $= (a_1, a_2)\ (\alpha\ \beta) a$

6) Барои хар гуна $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ ва вектори дилхохи $a = (a_1, a_2) \epsilon \mathbb{R}^2$ $(\alpha\beta) a = \alpha a + \beta a$ буданашро месанчем .
$(\alpha + \beta) a = (\alpha + \beta)\ (a_1, a_2) = ((\alpha + \beta) a_1, (\alpha + \beta)\ a_2) =$
$(\alpha a_1 + \beta\ a_1, \alpha a_2 + \beta a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2) + (\beta a_1, \beta a_2) = \alpha\ (a_1, a_2) + \beta\ (a_1, a_2)$
7) Барои хар гуна $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ ва векторхои ихтиёрии $a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2)\ \epsilon \mathbb{R}^2$ муносибатхои зерин чой дорад.

$\alpha\ (a+b)=\alpha(a_1+b_1,\ a_2+b_2)=(\alpha(a_1+b_1),\ \alpha(a_2+b_2))(\alpha a_1+\alpha b_1,\alpha a_2+\alpha b_2)=$
$=(\alpha a_1,\alpha a_2)+(\alpha b_1,\alpha b_2)=\alpha(a_1,a_2)+\alpha(b_1,b_2)=\alpha a+\alpha b.$

8) Барои хар гуна $a=(a_1,a_2)\epsilon\mathbb{R}^2$ муносибати зерин дуруст аст.

$$1\cdot a=1\cdot(a_1,a_2)=(1\cdot a_1,1\cdot a_2)=(a_1,a_2)=a$$

Масъалаи 1.7. Дар мачмуи $\mathbb{R}^+=\{x\epsilon\mathbb{R},x>0)$ амалхои чамъ ва зарб адад чунин дохил карда мешавад.

$$A\oplus b=a\cdot b$$

$$\alpha\circ a=a^\alpha$$

Барои $\forall a,b\epsilon\mathbb{R}^+,\ \forall\alpha,\epsilon\mathbb{R}$. Мачмуи $\mathbb{R}^+$ фазои хатти мешавадми?

Хал. Шартхои 1 – 8 аз таърифи фазои хаттиичро шуданашро месанчем. Бигузор a, в, $c\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha,\beta\epsilon\mathbb{R}$ бошад.

1) $a\oplus b=a-b=b-a=b\oplus a$

2) $(a\oplus b)\oplus c=(a\cdot b)\oplus c=a\cdot b\cdot c=a\cdot(b-c)=a\oplus(b\cdot c)=a\oplus(b\oplus c)$

3) 0=1 гуфта ишора мекунем. Он гох $a\oplus 0=a\cdot 1=a$

4) Агар $-a=a^{-1}$ ишора кунем, он гох $a\oplus a^{-1}=a\cdot a^{-1}=1=0$

5) $\alpha\circ(\beta\circ a)=\alpha\circ(a^\beta)=(a^\beta)^\alpha=a^{\alpha\beta}=\alpha\beta\circ a,$ 6) $(\alpha+\beta)\circ a=a^{\alpha+\beta}=a^\alpha\cdot a^\beta=\alpha^{-\alpha}\oplus\alpha^{-\beta}(\alpha\circ a)\oplus(\beta\circ a)$

7) $\alpha\circ(a\oplus b)=\alpha\circ(a\cdot b)=(ab)^\alpha=a^\alpha\cdot b^\alpha=a^\alpha\oplus b^\alpha=(\alpha\circ a)\oplus(\alpha\circ b)$

8) $1\circ a=a^{-1}=a$ Аз баски хаммаи шартхои таърифи фазои хатти ичро шуда истодааст он гох $\mathbb{R}^+-$ фазои хатти аст.

Масъалаи 1.8. Исбот кунед, ки мачмуи матрисахои квадратии тартиби дуйум фазои хатти мебошад.

Векторхои хатти вобаста ва хатти новобаста.

Хотиррасон мекунем, ки агар элементхои мачмуи m – ро чамъ кардан ва ба ададхои хакики зарб кардан мумкин бошад,он гох ифодаи

$\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \cdots + \alpha_к m_к -$ ро, ки $m_1, m_{2,} \ldots., m_к \epsilon M,$

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots..\alpha_к$ - ададхои хакикианд, комбинатсияи хаттии элементхои $m_1, m_{2,} \ldots., m_к$ бо коэффисентхои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots..., \alpha_к$ меноманд.

Агар $m \epsilon M$ ва m комбинасияи хаттии элементхои $m_1, m_{2,} \ldots., m_к$ бошад, яъне

$$m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 \ldots + \alpha_к \cdot m_к$$

он гох мегуянд ки элементи m бо элементхои $m_1, m_{2,} \ldots., m_к$ хатти ифода мешавад ёки бо элементхои $m_1, m_{2,} \ldots., m_к$ пахн карда мешавад.

Бигузор L - фазои хатти, $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к \epsilon L$ бошад.

Таъриф.Векторхои $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к$ хатти вобаста номида мешавад, агар чунин ададхои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots..., \alpha_к$ мавчуд буда хеч набошад яктоаш гайри нол бошад, ки баробарии $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_к \cdot a_к = 0$ 0 - элементи нолии фазои L, ичро шавад.

Агар баробарии $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_к \cdot a_к = 0$ факат хангоми $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_к = 0$ буда ичро шавад, он гох векторхои $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к$ хатти новобаста номида мешавад.

Леммаи 2.1. Векторхои $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к$ хатти новобаста номида мешавад факат ва факат хаегоме , ки акалан яке аз онхо комбинасияи хаттии векторхои бокимонда бошад.

Исбот . Шартхои зарури. Бигузор векторохои $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к$ хатти вобаста бошад. Он гох мувофики таъриф чунин ададхои $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к$ мавчуд аст, ки хаммаи онхо дар як вакт ба нол баробар набуда катии $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_к \cdot a_к = 0$ ичро мешавад. Масалан $a_1 \neq 0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1 \cdot a_1 = -\alpha_2 \cdot a_2 - \alpha_3 \cdot a_3 - \cdots - \alpha_к \cdot a_к =>$$
$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\alpha_3 - \ldots\ldots - \frac{\alpha_к}{\alpha_1}\alpha_к,$$

Яъне вектори a_1 бо вектори $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_к$ хатти ифода шуда истодааст.

Шарти кифояги. Бигузор яке аз векторхои $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к$ бо векторхои бокимонда хатти ифода карда мешавад. Масалан вектори a_1

$$a_1 = \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \cdots + \alpha_к \cdot a_к$$
$$-a_1 = \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \cdots + \alpha_к \cdot a_к$$

Хамин тавр, коэффисенти назди вектори a_1 бо -1 баробар буда гайри нол аст. Бинобар он векторхои $a_1, a_2, \ldots\ldots a_к$ хатти вобастаанд.

Лемма исбот шуд

Баъзе мисолхоро дида мебароем.

Мисоли 2.1. матрисахои зеринро дида мебароем

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрисахои E_1, E_2, E_3, E_4 хати новобастаанд, чунки

$$\alpha_1 \cdot E_1 + \alpha_2 \cdot E_2 + \alpha_3 \cdot E_3 + \alpha_4 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

Ва бинобар он, агар $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = 0$ бошад он гох.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ аз ин } \quad \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 = 0$$

Мисоли 2.2. Бисёраъзогихои $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = (1+x)^2$ – ро дида мебароем. Аз баски $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

мебошад бинобар он g_4(x) камбинатсияи хаттии g_1(x), g_2(x), g_3(x) мешавад . $a_1 = (2; -3; 1)$

$$g_4(x) = g_1(x) + 2g_2(x) + g_3(x)$$

Мувофики леммаи 2.1 бисёраъзогихои g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x) хатти вобастаанд.

Мисоли 2.3. Элементхои зеринро дида мебароем
$a_1 = (2; -3; 1)$, $a_2 = (3; -1; 5)$, $a_3 = (1; -4; 3)$ Бигузор

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 = 0$$ бошад он гох.

$\alpha_1 \mathrm{a}_1 + \alpha_2 \mathrm{a}_2 + \alpha_3 \mathrm{a}_3 = (2\alpha_{1,} - 3\alpha_{1,}\alpha_1)$+$(3\alpha_{2;} - \alpha_{2;} 5\alpha_2)$+
+$(\alpha_{3;} - 4\alpha_{2;}\ 3\alpha_3)$= $\left(2\alpha_{1,} + 3\alpha_{2,} + \alpha_{3;} - 3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_{3;}\ \ \alpha_{1,} + 5\alpha_2 + 3\alpha_3\right) = (0{,}0{,}0)$.

$$=> \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Хамин тавр, векторхои a_1 ,a_2 ,a_3 хатти новобаста мешавад, агар $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ халли ягонаи системаи хосил кардашуда бошад,яъне агар r(A)= n ки A-матрисаи асоси система n-микдори номаълумхо аст.

Дар мисоли додашуда $|A|=35 \neq 0$ буда r(A)= 3 мешавад, Яъне система халли ягонаи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ дорад.

Бинобар он a_1 ,a_2 ,a_3 -хатти новобастаанд.

Маърузаи 34

Фазои Евклиди.Зарби скаляри ва базиси ортонормали дар фазои хатти.

Дар фазои, евклиди хосили зарби скалярии (x, y) мисоли шакли бихаттии симметрии мебошад.

Дар хакикат, аксиомаҳои 1^0, 2^0, 3^0-и ҳосили зарби скалярӣ (§ 2) чунин маъно доранд, ҳосили зарби скалярӣ шакли бихаттии симметрӣ мебошад.

Матрисаи шакли бихаттӣ. Мо шакли бихаттиро ба таври аксиоматт муайян кардем. Акнун дар фазои n-ченака ягон базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ -ро гирифта, дар ин базис шакли бихаттии A (x; y)–ро ба воситаи координатаҳои $\xi_1', \xi_2' ,\dots,\xi_n'$ ва $\eta_1',\eta_2', \dots, \eta_n'$ –и векторҳои ва ифода мекунем. Дар натиҷа ифодаи зерин ҳосил мешавад:

$$A\,(x; y)= A(\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\ldots+\xi_n e_n;\ \ \eta_1 e_1+\ \eta_2 e_2+\ldots+\ \eta_n e_n)$$

Мувофиқи хосиятҳои 1^0 ва 2^0 –и шакли бихаттӣ

$$A(\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\ldots+\xi_n e_n;\ \ \eta_1 e_1+\ \eta_2 e_2+\ldots+\ \eta_n e_n)=$$
$$= \xi_1\eta_1 A(e_1; e_1)+\xi_1\eta_2 A(e_1; e_2)+\ldots.+ \xi_1\eta_n A(e_1; e_n)+$$
$$+ \xi_2\eta_1 A(e_2; e_1)+ \xi_2\eta_2 A(e_2; e_2)+\ldots..+ \xi_2\eta_n A(e_2; e_n)+ \xi_n\eta_n A(e_n;$$
$$e_1)+ \xi_n\eta_2 A(e_n; e_2)+\ldots.+ \xi_n\eta_n A(e_n; e_n)$$

аст, ё ки мухтасар

$$A(x;y)=\sum_{i,k}^{n} A(e_i\,; e_k)\xi_i\eta_k$$

мешавад. Домиҳои $A(e_i; e_k)$-ро бо α_{ik} ишора карда, ҳосил мекунем: дар базиси додашуда $e_1, e_2, \dots, e_n$ ҳар гуна шакли бихаттӣ дар фазои n–ченака дар намуди

$$A(x;y)=\sum_{i,k}^{n} \alpha_{ik}\,\xi_i\eta_k$$

навишта мешавад, ки дар ин чо $\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n$ координатаҳои вектори x ва $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, координатаҳои вектори y дар базиси додашуда мебошанд. Ададҳои α_{ik} аз интихоби базис вобаста буда, бо формулаҳои

$$\alpha_{ik} = A(e_i; e_k)$$

ҳисоб карда мешаванд.

Матрицаи A=$\|\alpha_{ik}\|$ дар базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ матрицаи шакли бихаттии *A(x;y)* номида мешавад.

Ба ҳамин тариқ, дар ҳар як базис шакли бихаттии *A(x;y)* бо матрицаи худ A=$\|\alpha_{ik}\|$ муайян карда мешавад..

Мисол. Фарз мекунем, ки R фазои сеченакаест, ки векторҳои он ададҳои сегонаи $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ мебошад.

Дар шакли R бихаттии *A(x;y)*-ро бо формулаи

$$A(x;y)=\xi_1\eta_1+2\xi_2\eta_2+3\xi_3\eta_3$$

муайян мекунем. Дар ба R сифати базис се вектори

$$e_1=(1, 1, 1),\ e_2=(1, 1, -1),\ e_3=(1, -1, -1),$$

-ро мегирем.

Дар ин базис матрицаи A–и шакли бихаттии *A(x;y)* -ро меёбем. Мувофиқи (4) ҳосил мекунем:

$a_{11}= 1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1=6$

$a_{12}=a_{21}=1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1+3\cdot 1\cdot(-1)=0$

$a_{22}=1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1+3\cdot(-1)\cdot(-1)=6$

$a_{13}=a_{31}=1\cdot 1+2\cdot 1\cdot(-1)+3\cdot 1\cdot(-1)=-4$

$a_{23}=a_{32}=1\cdot 1+2\cdot 1\cdot(-1)+3\cdot(-1)\cdot(-1)=2$

$a_{33}=1\cdot 1+2\cdot(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-1)\cdot(-1)=6$

яъне

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ба ҳамин тариқ агар дар базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ координатаҳои векторҳои x ва y-ро бо $\xi_1^{'}$, $\xi_2^{'}$, $\xi_3^{'}$ ва $\eta_1^{'}, \eta_2^{'}, \eta_3^{'}$ ишора мекунем, он гоҳ

$$A= (x_1, y)= 6\xi_1^{`}\eta_1^{`}-4\xi_1^{`}\eta_3^{`}+6\xi_2^{`}\eta_2^{`}+2\xi_2^{`}\eta_3^{`}-4\xi_3^{`}\eta_1^{`}+2\xi_3^{`}\eta_2^{`}+6\xi_3^{`}\eta_3^{`}$$

мешавад.

4.Дигар шудани матрицаи шакли бихаттӣ дар вақти тағирёбии базис. Фарз мекунем, ки дар фазои –ченака ду базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ ва

$f_1, f_2, \dots, f_n$ дода шудаанд. Фарз мекунем, ки векторҳои ба воситаи векторҳои базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ бо ёрии формулаҳои

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{f}_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \cdots + c_{n1}e_n,\\ \mathfrak{f}_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \cdots + c_{n2}e_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .\\ \mathfrak{f}_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \cdots + c_{nn}e_n,\end{array}\right\} \qquad (5)$$

ифода шуда бошанд.

Ба ҳамин тариқ c_{1k}, c_{2k}….,c_{nk}-координатаҳои векторҳои $\mathfrak{f}_k$ дар базиси $e_1, e_2, \ldots, e_n$ мебошанд. Матрицаи

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots & \underset{\cdots\cdot}{c_{2n}} \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

-ро матрицаи гузариш аз базиси $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ба базиси f_1, $f_2, \ldots, f_n$ меномем.

Фарз мекунем, ки A=$\|\alpha_{ik}\|$ матрицаи шакли бихаттии дар базиси $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ва B=$\|b_{ik}\|$ матрицаи ин шакли бихаттӣ дар базиси $f_1, f_2, \ldots, f_n$ бошад. Вазифаи мо аз он иборат аст, ки аз рӯи матрицаи $\|\alpha_{ik}\|$ ва матрицаи $\|b_{ik}\|$-ро ёбем.

Мувофиқи таъриф [формулаи (4)] ки b_{pq} = A($\mathfrak{f}_p$,$\mathfrak{f}_q$) аст, яъне ки b_{pq} -қимати шакли бихаттии дар ҳолати x=$\mathfrak{f}_p$, y=$\mathfrak{f}_q$ мебошад; он ки b_{pq} -ро ёбем, формулаи (3)-ро истифода мебарем. Дар он ҷои ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n ва η_1, η_2, ..., η_n координатаҳои векторҳои $\mathfrak{f}_p$ ва $\mathfrak{f}_q$ -ро дар базиси $e_1, e_2, \ldots, e_n$ яъне ададҳои c_{1p}, c_{2p}, …c_{np} ва c_{1q}, c_{2q}, …c_{nq} -ро гузошта, ҳосил мекунем:

$$b_{pq}=A\,(\mathfrak{f}_p,\mathfrak{f}_q) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}c_p c_{kq} \qquad (6)$$

Ин аст формулаи матлуб.

Онро дар шакли матрицавӣ менависем. Барои ин фарз мекунем, ки аст, ба ҳамин тариқ элементҳои C`-и ба матрицаи C транспонидашуда мебошанд. Он гоҳ

$$b_{pq}=\sum_{i,k=1}^{n} \grave{c}_{pi}\, a_{ik}c_{kq}$$

мешавад. Дар шакли матрицавӣ ин чунин маъно дорад:

$$\mathbf{B=C'AC} \qquad (7)$$

Ба ҳамин тариқ, агар A ва B дар базисҳои $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ва f_1, $f_2, \ldots, f_n$ матрицаҳои шакли бихаттии A(x; y) бошанд, он гоҳ

B=C′AC аст, ки дар ин ҷо C-матрицаи гузариш аз базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ ба базиси $f_1, f_2, \dots, f_n$ ва C′-матрицаи транпониронидашудаи матрицаи C мебошад.

Шаклҳои квадратӣ.

Таърифи 4. *Фарз мекунем, ки A(x; y) шакли бихаттии симметрӣ бошад. Функсияи A(x; x), ки аз A (x, y) дар ҳолати y=x будан ҳосил мешавад, шакли квдратӣ номида мешавад.*

A (x,y) шакли бихаттии ба шакли квадратии A(x;x) қутбӣ номида мешавад.

Дар таърифи шакли квадратӣ талаботи симметрии шакли A (x;y) бо ҷумлаи зерин шарҳ дода мешавад, ки он бе ин талабот дуруст мебуд.

Шакли қутбии A(x;y) бо шакли квадратии худ A(x;x) якқимата муайян мешавад.

Исбот. Аз таърифи шакли бихаттӣ натиҷа мебарояд, ки

$$A(x+y; x+y) = A(x; x) + A(x; y) + A(y; x) + A(y; y)$$

аст. Аз ин ҷо мувофиқи симметрия (яъне баробарии A(x; y)= A(y; x) ҳосил мекунем:

$$A(x; y) = \frac{1}{2}\left[A(x+y;\ x+y) - A(x;\ x) - A(y;\ y)\right]$$

Дар қисми рости ин баробарӣ қиматҳои шакли квадратӣ ҷойгиранд; ба ҳамин тариқ мо исбот кардем, ки шакли бихаттии A(x; y) бо квадратии худ муайян карда мешавад.

Дар боло исбот кардем, ки ҳар гуна шакли бихаттии симметрии A(x; y) ба воситаи координатаҳои векторҳои x ва y дар намуди

$$A(x; y) = \sum_{i,k}^{n} \alpha_{ik}\, \xi_i \eta_k$$

навишта мешавад, ки дар ин ҷо $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ аст. Бинобар ин: *ҳар гуна шакли квадратии A(x; x) дар бизиси додашуда бо формулаи*

$$A(x; x) = \sum_{i,k}^{n} \alpha_{ik}\, \xi_i \eta_k$$

ифода карда мешавад, ки дар ин ҷо $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ мебошад. Акнун боз як таърифи муҳимро дохил мекунем.

Таърифи 5. Агар барои вектори дилхоҳи $x \neq 0$

$$A(x; x) > 0$$

Бошад, шакли квадратии A(x; x) мусбати муайян номида мешавад.

Мисол. Ошкор аст, ки A(x; x)= $\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$ шакли квадратии мусбати муайян мебошад.

Фарз мекунем, ки A(x; x) шакли квадратии мусбати муайян буда, A(x; y) шакли қутбии он бошад. Мувофиқи таърифҳои дар боло додашудаи ин чунин маъно дорад:

1^0 A(x; y) = A(y; x)

2^0 A (x_1+x_2; y)= A (x_1; y)+ A(x_1;y)

3^0 A (λx; y)= λA(x; y)

4^0 A(x; x)$\geq$0 ва A(x; x)>0 дар вакти x$\neq$0

Мо дида истодаем, ки ин шартҳо бо аксиомаҳои зарби скалярии дар § 2 овардашуда мувофиқанд. Ба ҳамин тариқ, *ҳосили зарби скалярӣ шакли бихаттии ба шакли квадратии мусбати муайян мувофиқ мебошад ва ҳар гуна чунин шаклро чун зарби скалярӣ қабул кардан мумкин аст.*

Бинобар, ин мо фазои евклидриро ба таври зерин таъриф дода метавонем.

Фазои аффиние, ки дар он ягон шакли квадратии мусбати муайян қайдшудаи A(x; x) интихоб шудааст, фазои евклидӣ номида мешавад. Дар ин маврид қимати A(x; y), ки ба он шакли бихаттӣ мувофиқ аст. Ҳосили зарби скалярии векторҳои x ва y карда мешавад.

Машғулотҳои амалий

Маъруза 1

Системаи координатии декарти дар ҳамвори ва фазо.
МЕТОДИ КООРДИНАТА ДАР ХАТИ РОСТ ВА ҲАМВОРИ
Методи координата дар хати рост.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои *A(5)* ва *B(-4)* дода шудаанд.

а) бузургии порчаи $\overline{AB}$ *в*) дарозии порчаи $\overline{AB}$ г) проекцяи порчаи $\overline{AB}$ дар тири *Ox* талаб карда мешавад.

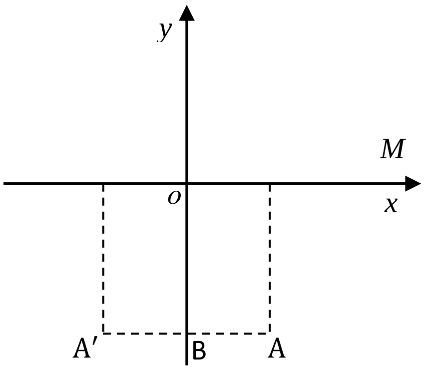
Ҳал: а) дар асоси формулаи (1.1) бузургии $\overline{AB}=-4-5=-9$

б) проекцияи AB дар тири *Ox* дар асоси формулаи (1.3) $пр_x\overline{AB}=-4-5=-9$ баробар аст.

Дарозии порчаи AB бошад (формулаи (1.2) $|\overline{AB}|=9$) аст.

Масъалаи 2. Нуқтаҳои *A(3.-5)* ва A' нисбат ба тири *Oy* симметри љойгир шуданд, координатаҳои нуқтаи A' ёфта шавад.

Ҳал: Агар ду нуқта нисбат ба ягон тир симметрии бошанд, пас ин нуқтаҳо дар охирҳои гуногуни порчаи хати рости ба ҳамон тир перпендикуляр буда мехобанд ва аз тир дар масофаҳои баробар љойгир мешаванд бинобар ин аввал нуқтаи А-ро дар система координатаи росткунљаи декарти месозем.



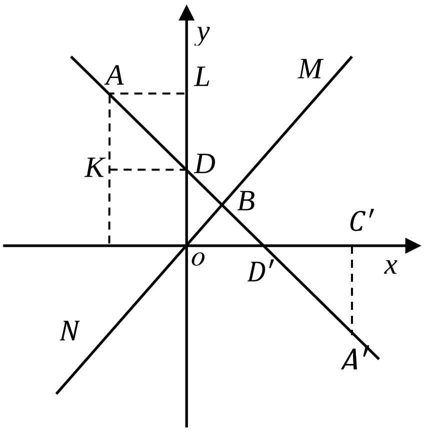
Расми 9.

Аз нуқтаи A ба тири Oy перпендикуляр карда хати рости AB-ро мегузаронем. Дар давоми перпендикуляри гузаронида шуда порчаи $\overline{BA'}$ - дарозиаш ба дарозии порчаи $\overline{AB}$ баробар бударо људо мекунем (расми 9). Интиҳои ин порча A' нуқтаи ба нуқтаи додашудаи A нисбат ба тири Oy нуқтаи симметри мебошад. Азбаски порчаи $\overline{BA'}$

дар тарафи чапи тири Ox љойгир шудааст бинобар ин $BA=AB=3,$ адади 3 абссисаи нуқтаи A' мешавад. Азбакси нуқтаҳои A ва A'дар як хати рости ба тири Ox паралел буда љойгир шудаанд ординатаи онҳо баробаранд . Инак координатаҳои нуқтаи A' ададҳои -3 ва -5 мебошанд .

Љавоб: A' (-3-5)

***Масъалаи* 3**. Координатаҳои нуқтаи A' ки он нисбат ба биссектирисаи кунљи координатаии чоряки якум бо нуқтаи A(-3.5) симметрии мебошад ёфта шавад.



расми 10.

Ҳал. Нуқтаи A-ро дар системаи росткунљаи декарти месозем Биссектрисаи љорякҳои I ва III -ро мегузаронем. Аз нуқтаи A ба биссектрисаи NM перпендикуляр карда хати рости AB-ро мегузаронем. Ба давоми порчаи $\overline{AB}$ порчаи $\overline{BA}$` ки дарозиаш ба дарозии порчаи $\overline{AB}$ баробар аст ва дар давоми хати рости AB мехобад љойгир мекунем (расми 10). Секунљаи ADK секунљаи баробарпаҳлӯ чунки $\angle KAD = \angle ADK = \frac{\pi}{4}$ аст. Љоркунљаи росткунљаи $AKDL$ квадрат аст.

Бинобар он $|AB| = |DK| = 3$ аст. Секунљаи АДК ва A'D^{1}C^1 баробаранд чунки $|\overline{AK}| = |\overline{AC}|$, $|\overline{DK}| = |\overline{CD}|$ ва $|\overline{AD}| = |\overline{AD}|$ Дарозиҳои порчаҳои A'C^1 ва

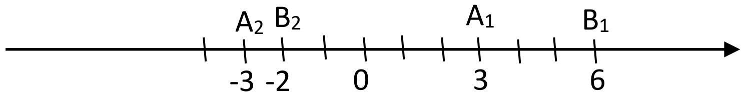
$\overline{AK}$ байни худ баробар буда дар тарафҳои гуногуни тири $ОУ$ љойгир шудаанд, бинобар он $A'C^1 = |\overline{AK}| = -3$ Порчаи $\overline{OC}^{\,1} = \overline{OD}^{\,1} + D^1C^1 = \overline{OD} + C^1D^1 = D^1C = \overline{CK} - \overline{DK} = 2-(-3)=5$ чунки $\overline{CK} = \overline{AC} - \overline{AK} = 5-3=2$ Ҳамин тавр координатаҳои нуқтаи A' $x=5$ ва $y=-3$ шуд. Љавоб A' (5.-3)

Масъалаи 4. Нуқтаҳоеро ёбед, ки координатаҳои онҳо муодилаҳои зеринро қаноат мекунонад.

$$а)\ |x| = 3 \quad б)\ |x-2| = 4 \quad в)\ |1-x| = 5$$

$$г)|2+x| = 1$$

<u>Ҳал.</u> а) Равшан аст, ки муодилаи $|x| = 3$ ба ду муодилаҳои $x = 3$ ва $x = -3$ эквивалент мебошад. Бинобар он мо ду нуқтаҳои $A_1(3)$ ва $A_2(-3)$ – хоро ҳосил мекунем:



б) Айнан ҳамин тавр муодилаи $|x-2| = 4$ ба муодилаҳои $x-2=4$ ва $x-2=-4$ эквивалент бинобар он ду нуқтаҳои $x_1 = 6$ ва $x_2 = -2$ ҳосил мекунем: $B_1(6)$, $B_2(-2)$

Масъалаи 5. Координатаи нуқтаи A-ро ёбед, агар $а)\ B(4)$ ва $AB = 6$, $б)\ B(-5)$, $BA = -3$, $b)\ B(-1)$, $|AB| = 5$

<u>Ҳал.</u>$а)$ $B(4)$, $AB = 6$ бошад. Мувофиқи формулаи (1.1) $AB = X_B - X_A$ яъне,

$X_B - X_A = 6\ ,X_B = 4$ –ро гузорем

$4 - X_A = 6$, $X_A = -2$ ҳосил мекунем.

Инак координатаи нуқтаи $A - X_A = -2$, $A(-2)$

$б)$ $B(-5), BA = -4,\ X_B = -5$ ва $BA = X_A - X_B = -4\ ,X_A - (-5) = -4 \rightarrow X_A = -9$

инак нуқтаи $A(-9)$

$b)$ $B(-1)$ва $|AB| = 5,\ X_B = -1$ мувофиқи формулаи (1.2) $X_B - X_A = 5 \rightarrow -1 - X_A = 5 \quad \rightarrow \quad X_A = 4A_1(-6),\ A_2(4)$

Маъруза 2

Масъалаҳои соддатарини геометрияи аналитики:Масофаи байни ду нуқта,тақсими порча дар нисбати додашуда,масоҳати секунжа.

Масъалаи 1. Координатаҳои марказ ва радиуси даврае ки ба секунљаи қуллахояаш дар нуқтаҳои А(-3.-1) В(5.3) ва С(6.- 4) буда берун кашида шуда аст ёфта шавад.

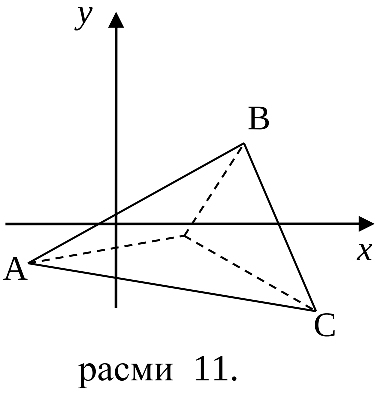
Ҳал. Нуқтаҳои А,В ва С-ро дар системаи росткунљаи декарти сохта онҳоро љуфт-љуфт ба ҳам пайваст мекунем. Дар натиља секунљаи АВС ҳосил мешавад (расми 11). Маркази давраро бо М ишора мекунем, координатаҳои нуқтаи М х ва у мебошад. Он гоҳ дар асоси шарти масаъла бояд $\left|\overline{CM}\right| = \left|\overline{AM}\right| = BM =$R шавад. Дар асоси формулаи (4)

$$\left|\overline{CM}\right| = \sqrt{(x-6)^2+(y+4)^2}$$

$$\left|\overline{BM}\right| = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$$

$$\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} \qquad (1.14)$$

мешавад.



расми 11.

Азбакси тарафи чапи баробариҳои (1.14) байни худ баробаранд, бинобар он тарафи рости онҳо низ байни худ баробар мешаванд Яъне.

$$\sqrt{(x+з)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$$

$$\sqrt{(x+3)^2}+(y+1)^2 = \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \qquad (1.15)$$

Ҳар ду тарафи баробариҳои (1.15) -ро алоҳида ба квадрат бардошта баробарии ҳосилшударо содда карда системаи зеринро

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{cases} \qquad (1.16)$$

-ро ҳосил мекунем.

Системаи ҳосил шударо якљоя ҳал карда координатаҳои маркази давра $x = 2$ ва $y = -1$-ро ҳосил мекунем.

Барои радиуси давраро ёфтан ба яке аз баробариҳои (1.14) координатаҳои марказ *M(2,-1)* –ро гузоштан кифоя аст:

$R^2 = \sqrt{(2+3)^2 + (-1+1)^2} = 5$

Љавоб *M(2,-1)* *R=5.*

Масъалаи 2. Қуллаҳои секунља нуқтаҳои $A(-3;2)$, $B(5;-2)$, $C(1;3)$ дода шудаанд, дарозии баландии аз қуллаи A фуровардашударо ёбед.

Ҳал. Аввал аз рӯи формулаи (I;9) масоҳати секунљаи ΔABC-ро ҳисоб мекунем .

Аз ду аломати тарафи рости формула ҳамонашро интихоб мекунем, ки бо аломати муайянкунанда якхела бошад,

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3-1 & 5-1 \\ 2-3 & -2-3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(20+4) = 12$$

Акнун дарозии баландии аз қуллаи A фуровардашуда AD-ро меёбем. Баландии AD ба тарафи BC фуроварда мешавад, бинобар он масоҳати секунља аз рӯи формулаи

$S = \frac{1}{2}BC \cdot AD$ ҳисоб карда мешавад.

Барои ҳамин мо аввал дарозии тарафи BC меёбем.

$$|BC| = \sqrt{(1-5)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

Акнун аз формулаи масоҳати секунља дарозии баландии AD-ро ҳисоб мекунем.

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AD =>$$

$$12 = \frac{1}{2}\sqrt{41} \cdot AD => AD = \frac{24}{\sqrt{41}};$$

Масъалаи 3. Дар тири абсцисса чунин нуқтаи M-ро ёбед, ки он аз нуқтаи $N(3,-4)$ дар масофаи 5 љойгир шуда бошад.

Ҳал. Бинобар он, ки нуқтаи M мувофиқи шарти масъала дар тири абсцисса мехобад, пас координатаи он $M(x, 0)$ мешавад ва масофаи $|MN| = 5$ мебошад.

Масофаи $|MN|$ –ро меёбем.

$$|MN| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(3 - x)^2 + (-4 - 0)^2}$$

Азбаски $|MN| = 5$,$\sqrt{(3 - x)^2 + 16 = 25 \qquad 3 - x = \pm 9}$

$1)3 - x = 9 \ => x_1 = -6,$
$2)3 - x = -9 \ => x_2 = 12.$

Ҳамин тавр ду нуқтаҳои $M_1(-6,0)$ ва $M_2(12,0)$ мављуд аст, ки онҳо аз нуқтаи $N(3, -4)$ дар масофаи 5 воҳид мехобанд.

Маъруза 3

Табдилдиҳии системаи координати Декарти. Системаи координатаҳои қутбӣ

Масъала. Координатаҳои декартии нуқтаи М дода шудааст - *M(1, -1),* координатаҳои қутбии *M* ёфта шавад.

Ҳал. Мувофиқи (1.13) ρ ва $tg\varphi$-ро меёбем.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad\qquad tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

Аз ду қимати $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ва $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ ҳамонашро гирифтан лозим аст ки то ки $\sin\varphi$ манфї шавад, чунки нуқтаи *M* дар љоряки љорум воқеъ аст. Инак координатаҳои қутбии нуқтаи *M:* $\rho = \sqrt{2}$ ва $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ мебошанд, $M(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

Мисол. Нуќтањои A(2,1,1) ва B(3,-2,-1) дода шудаанд. дар тири Ox нуќтае ёфта шавад, ки аз нуќтањои A ва B дар як хел масофа љойгир шуда бошад,

Њал: Азбаски нуќтаи номаълум M дар тири абцисса мехобад, бинобар ин координатањои вай M(x,0,0) мешаванд. Мувофиќи шарти мисол AM=MB. Бинобар ин мувофиќи формулаи (1.17) њосил мекунем:

$$\sqrt{(\mathrm{x} - 2)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{(\mathrm{x} - 3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}\ .$$

Њар ду тарафи ин баробариро ба квадрат бардошта њисоб мекунем:

$(x-2)^2+2=(x-3)^2+5$

ё ки $x^2-4x+6=x^2-6x+14$

аз ин љо $2x=8$ $x=4$

Њамин тавр, нуќтаи M (4,0,0)-ро њосил мекунем, ки вай дар тири Ox хобида аз нуќтањои A ва B дар масофаи якхела љойгир шудааст.

Масълаҳо барои кори мустақил-1

2. Координатаи нуқтаеро ёбед ки вай бо нуқтаи А(4) нисбат ба. 1) ибтидои координата . 2) нуқтаи В(-3) 3) нуқтаи С(6) симметри бошад.
3. Нуқтаҳои зерин сохта шавад.

А(3.4) В(-3.4) С(1.-2) Д(0.5) Е(-5.0) $F(-2\frac{1}{2}...2\frac{1}{3})$ N($\sqrt{3}\,.\sqrt{5}$) 3.

Исбот кунед ки секунљаи куллаҳояш дар нуқтаҳои А(2.3) , В(9.7) ва С(2.7) буда росткунља мебошад.

4. Дарозии тарафҳои секунљаро ки куллаҳояш дар нуқтаҳои А(5.-3) В(-2.7) ва С(7.9) воқеъ аст муайян кунед.

5. Қуллаҳои секунља дода шудааст.

А(-3.7) , В(2.3) ва С(1.-4), миёнаљои тарафҳои он ёфта шавад.

6.Нуқтаҳои А(2.1) , В(5.2) ва С (7.4) қуллаҳои секунља мебошад. Масоҳати секунља ҳисоб карда шавад.

7. Нуқтаҳоеро созед ки кунљҳои қутбиашон 0^0 , 30^0 , 45^0 , 75^0 ва 90^0 баробар буда , радиус векторҳои мувофик аз муодилаи p=2sinφ ёфта шавад.

Масъалањо барои кори мустаќилона-2

1. Нуќтањои A(4,0,0), B(0,-7,0), C(-5,0,3), Д(1,2,-1), E(-4,-4,-4)-ро созед ва хусусияти мавќеи онњоро нишон дињед.

2. Масофаи байни нуќтаи A(4,-3,5)ва ибтидои координата, инчунин масофаи байни ин нуќта ва тирњои координатањоро муайян кунед.

3. Секунљаи A(1,2,3), B(7,10,3),C(-1,3,1) дода шудааст. Нишон дињед, ки кунљи A кунд аст.

4.Нуќтањои A(2,-2,3) ва B(-1,4,3) дода шудаанд. Нуќтањои C ва Д порчаи AB-ро ба се њиссаи баробар таќсим мекунанд. Координатањои ин нуќтањо ёфта шаванд.

Љавоб:C(1,0,3), Д(0,2,3)

5. Ќуллањои секунља дар нуќтањои A(1,-2,1), B(3,-3,1), C(4,0,3) љойгир шудаанд. Нишон дињед, ки ин секнља росткунља аст.

6. Нуќтањои A(1,-1,5), B(3,4,4) ва C(4,1,6) дода шудаанд. Дар њамвории хоу нуќтае ёфта шавад, ки аз нуќтањои A,B ва дар масофањои баробар љойгир шудаанд. Љавоб: M(16,-5,0)

Маъруза 4

АСОСҲОИ АЛГЕБРАИ ВЕКТОРИ

Векторҳо ва амалҳои хатти бо онҳо.

Масъалаи 4. Векторҳои $\bar{a} = \{4, -3,\ 6\}$ ва $\bar{b} = \{-2, 3, -4\}$ дода шуда бошанд, векторҳои зеринро муайян намоед:

$$a)\ \bar{a} + \bar{b}, \qquad б)\ \bar{a} - \bar{b}, \qquad b)\ 3\bar{a},\ \ г) -\frac{1}{3}\bar{b},\ \ д)\ 5\bar{a} - 2\bar{b}$$

<u>Ҳал.</u> Ин векторҳоро мувофиқи қоидаҳои амалҳои хаттии векторҳои бо координатаашон додашуда ҳисоб мекунем. (формулаҳои пункти 2.2)

$$a)\bar{a} + \bar{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\} = \{4 + (-2), -3 + 3{,}6 + (-4)\} = \{2{,}0{,}2\}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \{2{,}0{,}2\}$$

$$б)\bar{a} - \bar{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\} = \{4 - (-2), -3 - 3,\ \ 6 - (-4)\} =$$
$$= \{6, -6, 10\},\ \ \bar{a} - \bar{b} = \{6, -6, 10\}$$

$$b)3\bar{a} = \{3x_1, 3y_1, 3z_1\} = \{12, -9{,}18\}$$

$$г)\ -\frac{1}{3}\bar{b}=\left\{-\frac{1}{3}x_2;-\frac{1}{3}y_2;-\frac{1}{3}z_2\right\}=\left\{-\frac{1}{3}\cdot(-2);-\frac{1}{3}\cdot 3,-\frac{1}{3}\cdot(-4)\right\}$$
$$=\left\{\frac{2}{3},-1,\frac{4}{3}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}\bar{b}=\left\{\frac{2}{3},-1,\frac{4}{3}\right\}$$

д) Аввал векторҳои $5\bar{a}$ ва $2\bar{b}$-ро муайян мекунем.

$$5\bar{a}=\{5\cdot 4,5\cdot(-3),5\cdot 6\}=\{20,-15,30\}$$

$$2\bar{b}=\{2\cdot(-2),2\cdot 3,2\cdot(-4)\}=\{-4,6,-8\}$$

Акнун вектори $5\bar{a}-2\bar{b}$- ро ҳисоб мекунем.

$$5\bar{a}-2\bar{b}=\{20-(-4);-15-6;30-(-8)\}=\{24;-21;38\}$$

Маъруза 5

Проексияи вектор.Координатаҳои вектор.Косинусҳои самтдиҳандаи вектор.Модули вектор.Амалҳои хатти векторҳои бо координаташон дода шуда.Проексияи вектор ба тир.

Масъала Кунчи байни векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ - $\varphi=\left(\bar{a}\,^\wedge\,\bar{b}\right)=60°$ ва $|\bar{a}|=5,\ |\bar{b}|=8$ бошад, $|\bar{a}+\bar{b}|$ ва $|\bar{a}-\bar{b}|$- ро ҳисоб кунед.

Ҳал. $\bar{a}-\bar{b}=BD,\ \bar{a}+\bar{b}=AC$

Дарозии диагонали BD-ро аз рӯи формулаи косинусҳо меёбем.

Дар ΔABD :

$$|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2\cdot|AB|\cdot|AD|cos\varphi$$

Мувофиқи шарти масъала:

$$|\bar{a}-\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|cos60°=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=49,$$

$$|\bar{a}-\bar{b}|=7$$

Диагонали дуюм $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$–ро аз рӯи формулаи (*) ҳисоб мекунем:

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = 2\left(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2\right) - |\bar{a} - \bar{b}|^2 \quad =>$$

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = 2(5^2 + 8^2) - 7^2 = 129 \quad => |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$$

Чавоб: $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 7.$

Масъала. Кунљи байни векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b} - \varphi = 45°$, $|\bar{a}| = \sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 1$ бошад, кунљи байни векторҳои $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ ва $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$- ро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи формулаи кунљи байни векторҳо

$$\cos(\bar{p}\wedge\bar{q}) = cos\alpha = \frac{\bar{p} \cdot \bar{q}}{|\bar{p}| \cdot |\bar{q}|}$$

Зарби скалярии векторҳои $\bar{p}$ ва $\bar{q}$ ва модулҳои онҳоро ҳисоб мекунем.

$$\bar{p}\bar{q} = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$$

$$|\bar{p}|^2 = \bar{p}^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1cos45° + 1^2$$
$$= 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 5. => |\bar{p}| = \sqrt{5}$$

$$|\bar{q}|^2 = \bar{q}^2 = (\bar{a} - \bar{b})^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1\cos45° + 1$$
$$= 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 \; => |\bar{q}| = 1$$

Ҳамин тавр:

$$cos\alpha = \frac{\bar{p}\bar{q}}{|\bar{p}||\bar{q}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} => \quad \alpha = arccos\frac{1}{\sqrt{5}};$$

Маъруза 6

Зарби скалярии векторҳо ва хосиятҳои он векторҳои сегона.Зарби вектории векторҳо.

Ҳалли масъалаҳо.

Масъалаи 1. Кунљи байни векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ - $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ва

$|\bar{a}| = 5,\ |b| = 6$ бошад, ифодаҳои зеринро ҳисоб кунед:

а) $\bar{a}\bar{b}$, б) $\bar{a}^2$ в) $(\bar{a}-\bar{b})^2$, г) $(5\bar{a}-2\bar{b})(4\bar{b}+3\bar{a})$, д) $(3\bar{a}+5\bar{b})^2$

Ҳал: а) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \cos\varphi = 5 \cdot 6\cos\frac{3\pi}{4} = 30 \cdot \cos 135° = 30 \cdot (-\cos 45°) =$

$= 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -15\sqrt{2}$

б) $|\bar{a}|^2 = \bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}|cos0° = |\bar{a}|^2 = 5^2 = 25$

в) $(\bar{a}-\bar{b})^2 =?$ Аввал аз хосиятҳои зарби скалярии векторҳо истифода бурда ифодаро содда мекунем ва баъд қимати онро ҳисоб мекунем:

$$\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 - 2 \cdot |\bar{a}||\bar{b}|cos\frac{3\pi}{4} + \bar{b}^2$$

$$= 5^2 - 2 \cdot \left(-15\sqrt{2}\right) + 6^2 = 25 + 30\sqrt{2} + 36 = 61 + 30\sqrt{2}.$$

д) $\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)^2 = 9\bar{a}^2 + 30\bar{a}\bar{b} + 25\bar{b}^2 = 9 \cdot 25 - 30 \cdot 15\sqrt{2} + 25 \cdot 36 =$

$$= 1125 - 450\sqrt{2}$$

Масъалаи 2. Агар се векторҳои $\bar{a}, \bar{b}$ ва $\bar{c}$ шарти $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = 0$ –ро қаноат кунонанд ва $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 4,\ |\bar{c}| = 3$ бошад, қимати ифодаи

$\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$- ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Барои ҳисоб кардани қимати ифодаи $\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ – аз шарти додашуда истифода мебарем. Мувофиқи шарт $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = 0$. Ҳар ду тарафи ин баробариро ба квадрат мебардорем:

$$\overline{(a} + \bar{b} + \bar{c})^2 = 0 \ =>$$

$$\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c} = 0 =>$$

$$2\left(\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}\right) = -\left(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2\right) \ =>$$

$$\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}=-\frac{1}{2}(1^2+4^2+3^2)=-\frac{1}{2}(1+16+9)=-13$$

Масъалаи 3. Дар кадом қимати α векторҳои $\bar{a}=-6\bar{\imath}-3\bar{\jmath}+\alpha\bar{k}$ ва $\bar{b}=\bar{\imath}+\alpha\bar{\jmath}+6\bar{k}$ ба ҳамдигар перпендикуляр мешаванд:

<u>Ҳал.</u> Мувофиқи хосияти зарби скалярии векторҳо ду вектор ба ҳамдигар перпендикуляр мебошанд, агар зарби скалярии онҳо ба нул баробар бошад ва баръакс.

Ҳамин тавр бояд $\bar{a}\bar{b}=0$ бошад:

$$\bar{a}=\{-6,-3,\alpha\},\qquad \bar{b}=\{1,\alpha,6\}$$

$$\bar{a}\bar{b}=-6\cdot1-3\cdot\alpha+6\cdot\alpha=0=>$$

$$-6-3\alpha+6\alpha=0=>3\alpha=6=>\ \alpha=2$$

Инак ҳангоми $\alpha=2$ будан векторҳо ба ҳам перпендикуляр : яъне векторҳои

$\bar{a}=\{-6,-3{,}2\}$ва $\bar{b}=\{1{,}2{,}6\}$ бо ҳамдигар перпендикуляранд.

Масъалаи 4. Қуллаҳои секуљаи ΔABCдода шудаанд: $A(-1,3,-7)$, $B(2,-1{,}5)$, $C(0{,}1,-5)$. Кунљи назди қуллаи B – ро ҳисоб кунед.

<u>**Ҳал.**</u> Кунљи назди қуллаи B- и секунљаро ҳамчун кунљи байни векторҳои $\overline{BA}$ ва $\overline{BC}$ мувофиқи формулаи зарби скалярии векторҳо меёбем:

$cosB=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}$.Аввал координатаҳои векторҳои $\overline{BA}$ ва $\overline{BC}$-ро меёбем:

$\overline{BA}=\{x_A-x_B,y_A-y_B,z_A-z_B\}=\{-1-2;\ 3-(-1);-7-5\}=\{-3{,}4,-12\}$

$\overline{BC}=\{x_C-x_B,y_C-y_B,z_C-z_B\}=\{0-2;1-(1);-5-5\}=\{-2;2;-10\}$, акнун модулҳои ин векторҳо ва зарби скалярии онҳоро ҳисоб мекунем:

$$|\overline{BA}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-12)^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

$$|\overline{BC}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-10)^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$$

$$(\overline{BA}\cdot\overline{BC})=-3(-2)+4\cdot2+(-12)\cdot(-10)=134$$

Ҳамин тавр

$$cosB = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{134}{13 \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{67}{39\sqrt{3}} \approx 1$$

$$\angle B = arccos\frac{67}{39\sqrt{3}}$$

Масъалаи 5. Кори қувваи $\bar{f} = \{-3,\ 2\ ,5\}$ $-$ро ҳисоб кунед, агар нуқтаи гузориши он аз нуқтаи $A(3,-2,5)$ ба нуқтаи $B(-2,-1\ 3)$ равона бошад.

Ҳал. Мувофиқи тадбиқи физикавии зарби скаляри агар вектори $\bar{f}$ қувваеро тасвир намояд, ки нуқтаи гузориши он аз ибтидои вектори $\bar{S}$ ба интиҳои он ҳаракат намояд, он гоҳ коре , ки қувваи $\bar{f}$ иљро мекунад ба зарби скалярии векторҳои $\bar{f}$ ва $\bar{S}$ баробар мешавад.

Яъне: $A = \bar{f}\bar{S}$

Ҳамин тавр коре , ки қувваи $\bar{f}$ иљро мекунад аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$A = \bar{f} \cdot \overline{AB}$$

Дар ин љо $\overline{AB} = \{-2-3;\ -1+2;\ 3-5\} = \{-5;\ 1;\ -2\}$

$$A = \bar{f} \cdot \overline{AB} = -5 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) = 15 + 2 - 10 = 7$$

Љавоб: кори қувваи $\bar{f}\ -\ A = 7$ воҳиди кор.

Мисол.Хосили зарби вектории векторҳои $\vec{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k},\ \ \vec{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ёфта шавад.

Ҳал. Барои ин аз формула истифода мебарем.

$[\vec{a},\vec{b}]$=$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$\cdot\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{k} = -7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$

Масъалаҳо барои кори мустақил-1

1. Кунљи байни векторњои $\bar{a}$ ва $\vec{b}$, $\varphi = 150^{\circ}$, $|\bar{a}| = 10,\ |\vec{b}| = 6$ бошад, $|[\bar{a}\vec{b}]| = 7$ ро њисоб кунед.
2. Дода шудааст: $|\bar{a}| = 8, |\vec{b}| = 4,$ ва $\bar{a}\,\vec{b} = -16,\ \ |[\bar{a}\vec{b}]|$ – ро ёбед.

3. Векторњои $\bar{a}$ ва $\vec{b}$ ба њам перпендикуляр, ва $|\bar{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ бошад, ифодањои зеринро њисоб кунед:

а) $|[(2\bar{a} - 3\vec{b})(2\bar{a} + 3\vec{b})]|$, $|[(3\bar{a} - 5\vec{b})(2\vec{b} - 3\bar{a})]|$.

4. Кунљи байни векторњои $\bar{a}$ ва $\vec{b}$ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Агар $|\bar{a}| = 2, |\vec{b}| = 4$ бошад, ифодањоро њисоб кунед:

а) $[\bar{a}\bar{b}]^2$, б) $[(2\bar{a} + 3\bar{b})(\bar{a} - 5\bar{b})]^2$, $[(\bar{a} + 2\bar{b})(3\bar{a} - 7\bar{b})]^2$.

5.Хосили зарби вектории векторҳои $\bar{a} = \{3; 4; 7\}$ ва $\vec{b} = \{2; -5; 2\}$ ёфта шавад.

Љавоб; $[\vec{a}, \vec{b}] = 43\cdot\boldsymbol{i} + 8\cdot\boldsymbol{j} - 23\boldsymbol{k}$.

6. Векторњои $\bar{a} = \{5, -2, 1\}$, $\vec{b} = \{4, 0, 6\}$ дода шуда бошад, координатањои зарби вектории векторњо зеринро њисоб кунед:

а) $[\bar{a}\vec{b}]$, б) $[(2\bar{a} + 3\bar{b})\bar{a}]$, в) $[(3\bar{a} - 2\vec{b})(2\vec{b} + 3\bar{a})]$.

7. Нуќтањои A(3,1,2), B(2,7,4) ва C(1,2,1) дода шудааст. Координатањои зарби вектории зеринро њисоб кунед:

а) $[\overline{AB} \cdot \overline{BC}]$, б) $[(\overline{AC} - 2\overline{BC})\overline{AB}]$, в) $[(3\overline{BC} - \overline{CA})\overline{CB}]$

8.Масохате секунљае, ки қуллахояш дар нуқтаҳои A(2; 2; 2), B(4; 0; 3), ва C(0; 1; 0) воқеъ мебошанд, ёфта шавад.

Љавоб:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{65}.$$

9.Масохати пораллелограмме, ки бо ёрии векторҳои $\vec{a} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ва $\vec{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ сохта шуддаст, ёфта шавад.

Љавоб: S=$|[\vec{a},\vec{b}]| = 49$.

Масъалаҳо барои кори мустаъќилона -2

1. Векторњои $\bar{a}, \bar{b}$ ва $\bar{c}$ сегонаи чап ёки рост мешавад, муайян намоед, агар:

1) $\bar{a} = \bar{\boldsymbol{k}}$, $\bar{b}$=$\boldsymbol{i}$, $\bar{c} = \boldsymbol{j}$ 2) $\bar{a} = \boldsymbol{i}, \bar{b} = \bar{\boldsymbol{k}}, \bar{c} = \boldsymbol{j}$ 3) $\bar{a} = \boldsymbol{j}, \bar{b} = \boldsymbol{i}, \bar{c} = \bar{\boldsymbol{k}}$

4) $\bar{a}=\boldsymbol{j}, \bar{b}=\overline{\boldsymbol{k}}, \bar{c}=\boldsymbol{i}$ 5) $\bar{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \bar{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}, \bar{c}=\boldsymbol{j}$ 6) $\bar{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \bar{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\bar{c}=\overline{\boldsymbol{k}}$

бошад.

2. Векторњои $\bar{a}, \bar{b}$ ва $\bar{c}$ сегона ростро ташкил мекнад ва байни худ перпендикуляр мебошад. Агар $|\bar{a}|=6, |\bar{b}|$=4, $|\bar{c}|=6$ бошад, зарби омехтаи $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$- ро њисоб кунед.

3. Вектори $\bar{c}$ ба вектори $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ ба 150° баробар. Агар $|\bar{a}|=8, |\bar{b}|$=6, $|\bar{c}|=4$ бошад, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$- ро њисоб кунед.

4. Айнияти $\bar{a}\bar{b}(\bar{c}+2\bar{a}+\alpha\bar{b})=\bar{a}\bar{b}\bar{c}$- ро исбот кунед, α- адади дилхоњ.

5. Векторњои 1) $\bar{a}=\{1,-1{,}3\}$, $\bar{b}=\{2{,}1,-3\}$, $\bar{c}=\{1{,}2{,}1\}$

2) $\bar{a}=\{3{,}2,-5\}$, $\bar{b}=\{1,-1{,}4\}$, $\bar{c}=\{1,-3{,}1\}$

3) $\bar{a}=\{1,-1,-3\}$, $\bar{b}=\{-2{,}2{,}1\}$, $\bar{c}=\{3,-2{,}5\}$ зарби омехтаи $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$- ро њисоб кунед.

6. Компланарии векторњои $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$- ро санљед.

а) $\bar{a}=\{1,-2{,}1\}$, $\bar{b}=\{3{,}1,-2\}$, $\bar{c}=\{7{,}14,-13\}$.

б) $\bar{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\overline{\boldsymbol{k}}$, $\bar{b}=\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\overline{\boldsymbol{k}}$, $\bar{c}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\overline{\boldsymbol{k}}$ **.**

в) $\bar{a}=\{3,-2{,}1\}$, $\bar{b}=\{2{,}1{,}2\}$, $\bar{c}=\{3,-1,-2\}$.

г) $\bar{a}=\{2,-1{,}2\}$, $\bar{b}=\{1{,}2,-3\}$, $\bar{c}=\{3,-4,7\}$.

7. Санљед, ки чор нуќтаи А(1, 0, 1), В(4,4,6), С(2,2,3) ва Д(10, 14, 17) дар як њамворї мехобанд.

8. Њаљми паралелопипеди дар векторњои $\bar{a}=\{-3{,}2,-1\}$, $\bar{b}=\{2{,}1{,}2\}$, $\bar{c}=\{-3{,}1{,}2\}$ сохта шудааст, њисоб кунед.

9. Ќуллањои тетраэдр дода шудааст:

А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Дарозї, баландї аз ќуллаи С- фуровардашударо ёбед.

10. Њаљми тетраэдр V=5 ва се ќуллаи он нуќтањои А(2,1,-1), В(3,0,1), С(2,-1,3) координатањои ќуллаи чорўми он Д-ро ёбед, агар он дар тири ОХ хобида бошад.

Ҳалли мисол ва кори мустақилона барои 7-10 мавзӯҳо

Масъала. Муайян кунед, ки дар байни хатҳои рости $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ кадомҳо байни худ параллеланд ва кадомҳо байни худ перпендикуляранд.

Ҳал. Пеш аз ҳама муодилаҳои додашударо нисбат ба y ҳал карда, коэффициенти кунљии хатҳои рости додашударо муайян мекунем:

$$y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2},\qquad y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{4},\qquad y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4},\qquad y=-\frac{2}{3}x+2.$$

Аз ин љо коэффициенти кунљии хатҳои рости додашуда

$$\mathcal{K}_1=\frac{3}{2},\qquad \mathcal{K}_2=\frac{3}{2},\qquad \mathcal{K}_3=-\frac{3}{2},\qquad \mathcal{K}_4=-\frac{2}{3}$$

мешаванд. Акнун дар асоси формулаҳои (2.9) ва (2.10) муайян мекунем, ки хатҳои рости $3x-2y+7=0$ ва $6x-4y-9=0$ байни худ параллель буда, хатҳои рости $3x-2y+7=0$ ва $2x+3y-6=0$,

$$6x-4y-9=0 \text{ ва } 2x+3y-6=0$$

байни худ перпендикуляр мебошанд.

Масъала . Муодилаи хати росте тартиб дода шавад, ки он аз нуқтаи $\mathcal{A}(-3;2)$ гузарад ва ба тири Ox дар таҳти кунљи 150° моил бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи (3.6) муодилаи хати рости матлубро ба намуди

$$y-2=k(x+3)$$

менависем. Азбаски $k=tg150^\circ=-\sqrt{3}$ аст, бинобар

он $y-2=-\sqrt{3}(x+3)$

ё ки $\sqrt{3}\,x-y+3\sqrt{3}-2=0$

мешавад, ки ин муодилаи хати рости матлуб аст.

Масъала . Муодилаи хати ростро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаҳои $\mathcal{A}\ (3;5)$ ва $\mathcal{B}\ (-1;2)$ гузарад.

Ҳал. $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = -1,\ y_2 = 2 -$ ро ба формулаи (3.8) гузошта, баробарии

$$\frac{y-5}{2-5} = \frac{x-3}{-1-3}$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин љо

$$\frac{y-5}{-3} = \frac{x-3}{-4}$$

ё ки $4y - 20 = 3x - 9$ ё ки $3x - 4y + 11 = 0$.

Љавоб: $3x - 4y + 11 = 0$

Масъала. Муодилаи хати росте навишта шавад, ки вай аз нуқтаи буриши хатҳои рости $3x - y + 5 = 0,\ 2x + 3y + 1 = 0$ гузарад ва ба хати рости $7x - 3y + 5 = 0$ параллел бошад (координатаҳои нуқтаи буриши хатҳои рост истифода бурда нашаванд).

Ҳал. Аз формулаи (2.15) истифода бурда

$$3x - y + 5 + \lambda(2x + 3y + 1) = 0$$

-ро ҳосил мекунем. Аз баробарии навишташуда

$$(3 + 2\lambda)x + (3\lambda - 1)y + 5 + \lambda = 0$$

мешавад. Барои муайян кардани λ аз формулаи (2.9) истифода мебарем. Он гоҳ $\frac{7}{(3+2\lambda)} = \frac{3}{(3\lambda-1)}$ ёки $21\lambda - 7 = -9 - 6\lambda,\quad 27\lambda = -2,$

$\lambda = -\frac{2}{27}$. Қимати λ –ро ба љояш гузошта

$$\left(3 - \frac{4}{27}\right)x + \left(-\frac{6}{27} - 1\right)y + 5 - \frac{2}{27} = 0,$$

$$77x - 33y + 133 = 0$$

-ро ҳосил мекунем, ки ин муодилаи хати рости матлуб мебошад.

Масъала. Муодилаи хати рост $3x - 4y + 25 = 0$ ба намуди нормалї оварда шавад.

Ҳал. Зарбкунандаи нормалї $\mathcal{M} = -1{:}\,5 -$ро меёбем. Муодилаи додашударо ба он зарб мекунем:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$$

ё ки

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 0.$$

Ҳамин тариқ, барои хати рости додашуда баробариҳои

$$p - 5, \qquad cos\alpha = \frac{3}{5}\,, \qquad sin\alpha = -\frac{4}{5}\,.$$

-ро ҳосил мекунем.

Масъала Муодилаи љои геометрии нуқтаҳое ёфта шавад, ки моилшавии ин нуқтаҳо аз хати рости $6x - 8y + 5 = 0$ ба адади -5 баробар бошад.

Ҳал. Бигузор $\mathcal{M}\,(x; y)$ нуқтае бошад, ки моилшавии он аз хати рости дода шуда ба адади -5 баробар бошад. Он гоҳ дар асоси формулаи (3.25).

$$-5 = \frac{6x - 8y + 5}{\pm\sqrt{36 + 64}}$$

Азбаски дар муодилаи хати рост $C = 5$ аст, пас зарбкунандаи нормалй бо аломати минус гирифта мешавад.

Бинобарон $$-5 = \frac{6x - 8y + 5}{-10}$$

Аз ин љо

$$50 = 6x - 8y + 5$$

ё ки $$6x - 8y - 45 = 0$$

ҳосил мешавад.

Љои геометрии нуқтаҳои матлуб хате будааст, ки ба хати рости додашуда параллел мебошад.

Масъала. Муодилаи љои геометрии нуқтаҳое ёфта шавад, ки масофаи онҳо то хати рости $5x - 12y - 13 = 0$ ба 3 баробар бошад.

Ҳал. Бигузор $\mathcal{M}(x; y)$ нуқтае бошад, ки масофаи он то хати рости додашуда ба 3 баробар бошад . Он гоҳ, дар асоси формулаи (3.25)

$$3 = \frac{|5x - 12y - 13|}{\sqrt{25 + 144}}, \qquad 3 = \frac{|5x - 12y - 13|}{13}, \qquad 39 = |5x - 12y - 13|$$

Аз таърифи қимати мутлақи ададҳои ҳақиқӣ истифода бурда

$$5x - 12y - 52 = 0$$

ва

$$5x - 12y + 26 = 0$$

-ро ҳосил мекунем.

Инак, љои геометрии матлуб, ки аз хати рости додашуда дар масофаи 3 воҳид дурӣ љойгир шудааст, аз ду хатҳои рости ба хати рости додашуда параллел иборат буда дар тарафҳои гуногуни хати рости додашуда воқеъ мебошанд.

Љавоб: $5x - 12y - 52 = 0, \quad 5x - 12y + 26 = 0.$

Масъала. Масофаи аз нуқтаи $M(5, -15)$ то хати рости $3x - 4\,y + 25 = 0$ ёфта шавад. Муодилаи хати рост $3x - 4y + 25 = 0$ ба намуди нормалӣ оварда шавад.

Ҳал. Аввал муодилаи умумии хати рост $3x - 4y + 25 = 0$ - ро ба намуди нормалӣ мeоремю

Зарбкунандаи нормалӣ $\mathcal{M} = -1/5 -$ ро меёбем. Муодилаи додашударо ба он зарб мекунем:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$$

ё ки

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 0.$$

Ҳамин тариқ, барои хати рости додашуда баробариҳои

$$p = 5, \qquad cos\alpha = \frac{3}{5}, \qquad sin\alpha = -\frac{4}{5}.$$

-ро ҳосил мекунем.

Масъалаи. Муодилаи љои геометрии нуқтаҳое ёфта шавад, ки моилшавии ин нуқтаҳо аз хати рости $6x - 8y + 5 = 0$ ба адади -5 баробар бошад.

Ҳал. Бигузор $\mathcal{M}\,(x; y)$ нуқтае бошад, ки моилшавии он аз хати рости дода шуда ба адади -5 баробар бошад. Он гоҳ дар асоси формулаи (2.25).

$$-5 = \frac{6x - 8y + 5}{\pm\sqrt{36 + 64}}$$

Азбаски дар муодилаи хати рост $C - 5$ аст, пас зарбкунандаи нормалӣ бо аломати минус гирифта мешавад.

Бинобарон $$-5 = \frac{6x-8y+5}{-10}$$

Аз ин љо

$$50 = 6x - 8y + 5$$

ё ки $$6x - 8y - 45 = 0$$

ҳосил мешавад.

Љои геометрии нуқтаҳои матлуб хате будааст, ки ба хати рости додашуда параллел мебошад.

Масъалаи. Муодилаи љои геометрии нуқтаҳое ёфта шавад, ки масофаи онҳо то хати рости $5x - 12y - 13 = 0$ ба 3 баробар бошад.

Ҳал. Бигузор $\mathcal{M}(x; y)$ нуқтае бошад, ки масофаи он то хати рости додашуда ба 3 баробар бошад . Он гоҳ, дар асоси формулаи (2.25)

$$3 = \frac{|5x - 12y - 13|}{\sqrt{25 + 144}}, \qquad 3 = \frac{|5x - 12y - 13|}{13}, \qquad 39 = |5x - 12y - 13|$$

Аз таърифи қимати мутлақи ададҳои ҳақиқӣ истифода бурда

$$5x - 12y - 52 = 0$$

ва

$$5x - 12y + 26 = 0$$

-ро ҳосил мекунем.

Инак, љои геометрии матлуб, ки аз хати рости додашуда дар масофаи 3 воҳид дурй љойгир шудааст, аз ду хатҳои рости ба хати рости додашуда параллел иборат буда дар тарафҳои гуногуни хати рости додашуда воқеъ мебошанд.

Љавоб: $5x - 12y - 52 = 0, \quad 5x - 12y + 26 = 0.$

Акнун масофаи аз нуқтаи $M(5, -15)$ то хати рости додашуда d-ро ҳисоб мекунем. Мувофиқи формулаи (2.18) :

$$d = |\mathrm{x}_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|$$

$$d = \left|\frac{3}{5}\mathrm{x}_0 - \frac{4}{5}y_0 - 5\right| = \left|\frac{3}{5}5 - \frac{4}{5}(-15) - 5\right| = 10$$

Масъала. Қуллаҳои секунљаи ΔABC дода шудаанд:
A(5,-4), B (-1,3), C(-3,-2)

Муодилаи тарафҳои секунља ва баландии аз қуллаи *A* фуроварда шударо тартиб диҳед.

Хал.:Аввал муодилаи тарафҳои секунљаро ҳамчун муодилаи хатҳои рости аз ду нуқтаи додашуда гузарандаро тартиб медиҳем.

Муодилаи тарафи *AB*: *A(5,-4), B (-1,3)*

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

$$\frac{x - 5}{-1 - 5} = \frac{y + 4}{3 - (-4)} \qquad \frac{x - 5}{-6} = \frac{y + 4}{7}$$

$$7x - 35 = -6y - 24$$

$$7x + 6y - 11 = 0$$

Тарафи *BC*: *B (-1,3), C(-3,-2)*

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}$$

$$\frac{x+1}{-1-(-1)}=\frac{y-3}{-2-3}$$

$$-5x-5=-2y+6$$

$$5x-2y+11=0$$

Тарафи *AC*: *A(5,-4), C(-3,-2)*

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}$$

$$\frac{x-5}{-3-5}=\frac{y+4}{-2+4}$$

$$2x-10=-8y-32$$

$$2x+8y+22=0$$

$$x+4y+11=0$$

Аннун муодилаи баландии аз қуллаи *A* фуроварда шударо тартиб медиҳем. Баландии *AM* аз қуллаи *A* фуровардашударо ҳамчун хати рости аз нуқтаи *A(5, -4)* гузашта ба хати рости *BC* перпендикуляр бударо тартиб медиҳем:

Муодилаи ин перпендикуляр: $y-y_A=K_{AM}(x-x_A)$

Коэффиценти кунљии баланди K_{AM} мувофиқи шарти перпендикулярии хатҳои рости *AM* ва *BC* шарти зеринро қаноат мекунонад:

$$K_{AM}=-\frac{1}{K_{\text{вс}}}$$

Коэффиценти кунљии тарафи ВС-ро меебем:

Муодилаи ВС: 5х-2у+11=0 => 2у=5х+11 => $y=\frac{5}{2}x+\frac{11}{2}$

$K_{\text{вс}}=\frac{5}{2}$, пас $K_{AM}=-\frac{1}{K_{\text{вс}}}$ = -2/5;

Инак, муодилаи баландии АМ:

у+4= -2/5 (х-5) => 5у+20=-2х+10 => 2х+5у+10=0

Муодилаи баландии АМ:

2х+5у+10=0.

Масъала . Нуқтаи М.-ро ебед, ки он ба нуқтаи N (8,-9) нисбат ба хати рости аз нуқтаҳои А (3,-4) ва В (-1,-2) гузаранда симметри бошад.

Ҳал. Аввал муодилаи хати рости аз нуқтаҳои А(3,-4) ва В (-1,-2) гузарандаро тартиб медихем:

Муодилаи АВ: $\frac{X-X_A}{X-X_A} = \frac{У-У_A}{У_B-У_A}$ => $\frac{X-3}{-1-3} = \frac{У+4}{-2+4}$ => $\frac{X-3}{-4} = \frac{У+4}{2}$ =>

=> $2x - 6 = -4у - 16$ => 2x+4у+10=0

АВ: x+2у+5=0.

Нуқтаи М –ки ба нуқтаи N (8,-9) нисбат ба хати рости АВ симметри мебошад дар перпендикуляре , ки аз нуқтаи N ба хати рости АВ гузаронида шудааст мехобад. Бинобар он мо муодилаи перпендикулярро, ки аз нуқтаи N (8,-9) ба хати рости АВ фуроварда шудааст , тартиб медихем.

Муодилаи ин перпендикуляр ба намуди зерин мебошад:

$У - У_N = K_{MN}\ (X - X_N)$

Коэффициенти кунљии перпендикуляр:

$$K_{MN} = -\frac{1}{K_{AB}}$$

$K_{AB} = -\frac{1}{2}$,   инак:

$$K_{AM} = -\frac{1}{K_{AB}} = 2.$$

Пас, муодилаи перпендикуляри MN:

Y+9=2(x-8) => Y+9=2X+16 => MN: 2x-у-25=0/

Мувофики таърифи симметрия нуќтаи N дар перпендикуляри MN аз хати рости АВ дар кадом масофа љойгир бошад, нуќтаи М хам дар ин перпендикуляр аз хати рости АВ дар хамон хел масофа мехобад.

Барои ин масофаро ёфтан мо аввал нуќтаи буриши перпендикуляри MN ва хати рости АВ ро меёбем, ки ин нуќта миёнаљои нуќтахои М ва N мебошад.

Нуќтаи бурришро хамчун халли системаи зерин меёбем:

$$\begin{cases} AB\colon \ x+2y+5=0 \\ MN\colon \ 2x-y-25=0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) => 5x-45=0 $=> x=9 \ => \ y=2x-25 => \ 18-25=-7$

Инак нуќтаи бурриш O(9,-7). Ин нуќта миёнаљои порчаи MN мебошад (мувофики таърифи симметрия).

Мувофики формулаи хисоб кардани координатахои миёнаљои порча:

$$X_0=\frac{X_M+X_N}{2}; \qquad Y_0=\frac{Y_M+Y_N}{2};$$

њамин тавр:

$$9=\frac{X_M+8}{2} \ \ => \ \ X_M=10$$

$$-7=\frac{Y_M-9}{2} \ \ => \ \ У_M=-5$$

Инак нуќтаи ба нуќтаи N (8, -9) нисбат ба хати рости AB симметри буда нуќтаи M(10, -5) мешавад.

Масъала. Масофаи d - байни хатҳои рости параллелро ёбед: *24x-10y+39=0* ва *12x-5y-26=0*

Ҳал. Баро ёфтани масофаи байни ду хатҳои рости параллел, ки аз ягон хати росити як нуќтаи михтиёри интихоб карда масофаи онро то хати рост дуюм њисоб карда шавад.

Усули дигари њалли ин масъала њам мављуд аст. Барои ёфтани ин масофа аввал муодилаи хатҳои рости додашударо ба намуди нормал оварда параметрхои онҳо P_1 ва P_2 ро меёбем. Онгоњ масофаи байни хатҳои рости паралел мувофиќи таърифи муодилаи нормалї хати рост ба S = $|P_1-\ P_2|$ баробар мешавад.

Мо бо усули дуюм хал мекунем. Муодилахои хатҳоро ба намуди нормали меорем:

$$\mu_1=\frac{\pm1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{24^2+10^2}}=\frac{\pm1}{\sqrt{676}}=\frac{\pm1}{26}$$

Ишораи манфиро мегузорем , чунки аъзои озоди муодила С$= 39 > 0$ инак

$\mu_1 = -\frac{1}{26}$ намуди нормалї :

$$-\frac{24}{26}x + \frac{10}{26}y - \frac{39}{26} = 0 \;\; => \;\; -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{3}{2} = 0, \;\; p_1 = -\frac{3}{2}.$$

2) 12x - 5y – 26 = 0 ;

$$\mu_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{1}{13}.$$

Намуди нормалї:

$$\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2 = 0$$

$$p_2 = 2$$

Инак масофаи байни хатхои рости параллел $\delta = |p_1 - p_2| = \left|-\frac{3}{2} - 2\right| = 3{,}5$

Љавоб $\delta = 3{,}5.$

Маъруза 11

Хатҳои каљи тартиби дуюм

Табдилдиҳии системаи координатии декартӣ.

Кўчондани ибтидои координата

МАСЪАЛАҲО БАРОИ КОРИ МУСТАҚИЛОНА-1

1. Ба воситаи кўчонидани ибтидои системаи координати муодилаҳои зерин содда карда шаванд:

а) $\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

б) $x^2+4y^2-6x+8y=5$

в) y^2*-8y=4x*

д) $x^2+6x+5=2y$

2. Тирҳои координатиро ба 45^0 даврзанонида муодилаи зерин содда карда шавад:

$3x^2-10xy+3y^2+32=0$

3. Тирҳои координатиро ба 45^0 даврзанонида, муодилаи зерин сода карда шавад:

$xy = - 4$

4. Порчаи тири Ох , ки параболаи $y=-x^2-2x+3$ бурида људо мекунад, диаметри даврае шуда хизмат мекунад. Муодилаи ин давра навишта шавад.

5. Параболаи $y= ax^2+вx+c$ аз нуқтаи О(0,0); А(-1,-3) ва В(-2,-4) мегузарад. Муодилаи даврае, ки диаметри он порчаи тири Ох, парабола бурида људо мекнад, мебошад, тартиб дода шавад.

6. Тирҳои координатиро ба кунљи $\alpha = \frac{\pi}{4}$

гардонида, муодилаи

$3x^2-2xy+3y^2-8=0$ -ро сода кунед.

Масъалаҳо барои кори мустақи-2

1.Координатаҳои марказ ва радиуси давраҳо аз рӯи муодилаашон муайян карда шаванд:

а) $2x^2 + 2y^2 + 5x - 3y - 2 = 0;$

б) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0;$

в) $x^2 + y^2 + 3y = 0;$

г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0;$

д) $x^2 + y^2 + x = 0;$

е) $x^2 + y^2 + y = 0$.

2. Муодилаи даврае, ки ба тири ox дар ибтидои координатаҳо расида, тири oy –ро дар нуқтаи (0;-8) мебурад, тартиб дода шавад.

3. Муодилаи даврае, ки маркази он дар нуқтаи (4;5) љой гирифта, ба хати рости $3x - 4y + 1 = 0$ мерасад, тартиб дода шавад.

4. Нуқтаҳои $\mathcal{A}(-1; 2)$ ва $\mathcal{B}(5; 6)$ дода шудаанд. Муодилаи даврае, ки диаметри он порчаи $\mathcal{AB}$ мебошад, навишта шавад.

5. Давраҳои зеринро созед:

а) $x^2 + y^2 = 0$;

б) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$;

в) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$;

г) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

6. Муодилаи даврае, ки марказаш дар нуқтаи буриши хатҳои рости $5x + 3y - 13 = 0$ ва $x + 4y + 2 = 0$ љой гирифта аз нуқтаи (5;3) мегузарад, тартиб дода шавад.

7. Нуқтаҳои буриши давраи $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ва хати рости $4x - 3y - 9 = 0$ ёфта шаванд.

8. Муодилаи даврае, ки аз нуқтаҳои $\mathcal{A}\ (1; 2),\ \mathcal{B}(0; 1),\ \mathcal{C}(-3; 0)$

мегузарад, тартиб дода шавад.

9. Давра аз нуқтаҳои $\mathcal{A}(1; 5)$ ва $\mathcal{B}(5; 3)$ мегузарад, маркази он бошад дар хати рости $x + y - 4 = 0$ мехобад. Муодилаи ин давра тартиб дода шавад.

10. Хати рости $x + y - 6 = 0$ тирҳои координатаро дар нуқтаҳои $\mathcal{A}$ ва $\mathcal{B}$ мебурад. Муодилаи даврае, ки аз ин нуқтаҳо ва аз нуқтаи буриши хатҳои рости $x - 2y - 1 = 0$ ва $2x - 5y + 1 = 0$ мегузарад, тартиб дода шавад.

Маъруза 12

Эллипс ва муодилаи каноникии он

Масъалаи 6. Нуқтаи буриши хати рости

$2x - y - 9 = 0$ ва эллипси $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ ро ёбед:

Ҳал: Ба монанди масъалаи боло барои ёфтани нуқтаҳои буриши эллипс ва хати рост, муодилаҳои онҳоро ҳамљоя ҳал мекунем, яъне координатаҳои нуқтаҳои буриш ҳалли системаи

$2x – y - 9= 0$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ мебошад.

Аз муодилаи якум $y= 2x - 9$ - ро ба муодилаи дуюм мегузорем:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{(2x - y)^2}{12} = 1 \Rightarrow x^2 + 3(2x - 9)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + 12x^2 - 108x + 243 = 36$$

$13x^2 - 108x + 207 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 13 \cdot 207}}{13} = \frac{54 \pm \sqrt{225}}{13} = \frac{54 \pm 15}{13};$$

$$x_1 = \frac{54 + 15}{13} = \frac{69}{13}; \quad x_2 = \frac{54 - 15}{13} = \frac{39}{13} = 3;$$

Акнун қимматҳои ординатаи нуқтаи буришро меёбем.

$$y_1 = 2x_1 - 9 = 2 \cdot \frac{69}{13} - 9 = \frac{138 - 117}{13} = \frac{21}{13};$$

$$y_2 = 2x_2 - 9 = 2 \cdot 3 - 9 = -3.$$

Пас, нуқтаҳои буриш:

$$M_1\left(\frac{69}{19}; \frac{21}{13}\right), \qquad \text{ва} \quad M_2(3, -3)$$

Масъалаи 7. Аз нуқтаи M(-6,3) ба эллипси

$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$

расандаҳо гузаронида шудаанд , муодилаи расандаҳоро тартиб диҳед.

Ҳал: Аввал месанљем,ки нуқтаи М(-6,3) дар эллипс мехобад ё не, барои ин координатаҳои нуқтаро ба муодила мегузорем:

$$\frac{(-6)^2}{5}+\frac{3^2}{9}=\frac{36}{15}+\frac{9}{9}=\frac{12}{5}+1=3\frac{2}{5}\neq 1$$

Пас, нуқтаи М(-6,3) дар эллипс намехобад. Маълум аст,ки муодилаи расанда ба эллипс дар нуқтаи $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)$ -и он ба намуди зерин

$\frac{xx_1}{15}+\frac{yy_1}{9}=1$ мебошад.

Коэффисиенти кунљии расандаро муайян мекунем:

$$\frac{xx_1}{15}+\frac{yy_1}{9}=1\Rightarrow 3\mathrm{x}_1\mathrm{x}+5\mathrm{y}_1\mathrm{y}=45\Rightarrow$$

$$\mathrm{y}=-\frac{3\mathrm{x}_1}{5\mathrm{y}_1}x-9y_1$$

инак, коэффисиенти кунљи расанда

$$k_{\mathrm{p}}=-\frac{3x_1}{5y_1}$$

Нуқтаи М(-6,3) дар расанда мехобад , бинобар он координатаҳои он муодилаи расандаро бояд қаноат кунонад. Координатаҳои нуќтаи М-ро ба муодилан расанда мегузорем;

$$\frac{-6\mathrm{x}_1}{15}+\frac{3\mathrm{y}_1}{9}=1\ \Rightarrow\ \frac{-2\mathrm{x}_1}{5}+\frac{\mathrm{y}_1}{3}=1\ \Rightarrow\ \mathrm{y}_1=3\left(1+\frac{2\mathrm{x}_1}{5}\right)$$

Аз тарафи дигар координатаҳои нуқтаи расиш $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)$ бояд муодилаи элипсро ҳам қаноат кунонад, яъне

$$\frac{\mathrm{x}_1^2}{15}+\frac{\mathrm{y}_1^2}{9}=1$$

Ифодаи y_1- ро аз муодилаи расанда дар ин муодила мегузорем:

$$\frac{x_1^2}{15}+\frac{\left(3\left(1+\frac{2x_1}{5}\right)\right)^2}{9}=1\Rightarrow\frac{x_1^2}{15}+\left(1+\frac{2x_1}{5}\right)^2=1\Rightarrow\frac{x_1^2}{15}+1+\frac{4x_1}{5}+\frac{4x_1^2}{25}=1$$

$$\Rightarrow 5x_1^2+75+60x_1+12x_1^2=75$$

$17x_1^2+60x_1=0\Rightarrow\ x_1(17x_1+60)=0$

а) $x_1=0$, *б)* $x_2=-\frac{60}{17}$;

$$y_1=3\ ;\ y_2=3\left(1-\frac{2\cdot 60}{17\cdot 5}\right)=3\left(1-\frac{24}{17}\right)=-\frac{21}{17}$$

Ҳамин тавр мо ду нуқтаҳои расишро ҳосил намудем, яъне аз нуқтаи M (-6,3) ба эллипс ду расандаҳоро гузаронидан мумкин,нуқтаҳои расиш:

$$M_1(0,3)\quad\text{ва}\quad M_2\left(-\frac{60}{17};-\frac{21}{17}\right)$$

Муодилаҳои расандаҳоро тартиб медиҳем:

$$\frac{x\cdot x_1}{15}+\frac{yy_1}{9}=1\Rightarrow$$

а) $M_1(0,3)$: $\frac{3y}{9}=1\Rightarrow\ \boxed{y=3}$

b) $M_2\left(-\frac{60}{17};-\frac{21}{17}\right)\ =>\ \frac{-\frac{60}{17}x}{15}+\frac{-\frac{21}{17}y}{9}=1\Rightarrow-\frac{4x}{17}-\frac{7y}{51}=1\Rightarrow$ $\boxed{12x+7y+51=0}$

Инак, муодилаҳои расандаҳо: $\boxed{\begin{array}{c}y=3\\12x+7y+51=0.\end{array}}$

Масъалаи 8. Дарозии диаметрҳои эллипси $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ ба $2\sqrt{7}$ баробаранд, муодилаҳои ин диаметрҳоро тартиб диҳед.

Ҳал: Нӯгҳои диаметрҳои эллипс нисбат ба ибтидои координата симметрӣ мебошанд,яъне координатаҳои нӯгҳо аз рӯи бузургии мутлақашон якхела буда аз рӯи аломатҳояшон муқобиланд. Бинобар ин агар мо координатаҳои яке аз нӯги диаметрро бо $M_1(x_{1,}\ ,y_1)$ ишорат намоем, он гоҳ координатаҳои нӯги дигари он $M_2(\ -x_{1,}\ ,-y_1)$ мешавад ва онҳо муодилаи эллипсро қаноат менамоянд, яъне

$$\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{6}=1, \quad \frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{6}=1. \quad (\cdot)$$

Мувофиқи шарт дарозии диаметрҳо ба $2\sqrt{7}$ баробар аст, яъне

$|M_1\, M_2| = 2\sqrt{7}$ пас,

$|M_1\, M_2| = \sqrt{(-x_1 - x_1)^2 + (-y_1 - y_1)^2} = \sqrt{4x_1^2 + 4y_1^2} = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,яъне $2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{7}$

аз ин љо $x_1^2 + y_1^2 = 7$

Ин муодиларо ҳамљоя бо муодилаи эллипс ҳал намуда координатаҳои нӯгҳои диаметрро меёбем

$$\left.\begin{array}{c} \frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{6}=1 \\ x_1^2 + y_1^2 = 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 24 \\ x_1^2 + y_1^2 = 7 \end{array}\right\}$$

$y_1^2 = 3, \ y_1 = \pm\sqrt{3}$ акнун x_1 –ро меёбем.

$x_1^2 + y_1^2 = 7 \Rightarrow x_1^2 = 7 - y_1^2 = 7 - 3 = 4$

$$x_1^2 = 4, \qquad x_1 = \pm 2$$

Ҳамин тавр нӯгҳои диаметр нуқтаҳои зерин мебошанд:

$M_1(2, \sqrt{3}\,), \quad M_2\left(-2, -\sqrt{3}\right)$

Муодилаи диаметрҳоро тартиб медиҳем:

$$M_1\, M_2 : \ \frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-\sqrt{3}} \ \Rightarrow \ \frac{x-2}{-4} = \frac{y-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} \ \Rightarrow$$

$$2\sqrt{3}(x-2) = 4\left(y-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 2y - 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Инак муодилаҳои диаметрҳои дарозиашон ба $2\sqrt{7}$ баробар буда:

$$\boxed{y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

Масъалаҳо барои кори мустаъқил.

1. Аз рӯи шартҳои додашудаи зерин муодилаи эллипсро тартиб диҳед:

а) Дарозии тири хурди эллипс ба 6 ва масофаи байни фоқусҳои он ба 8 баробар аст.

б) Масофаи байни охирҳои тири калон ва тири хурди эллипс ба 5 ва суммаи дарозии нимтирҳои он ба 7 баробар аст.

в) Тири калони он ба 10 баробар буда, масофаи байни фоқусҳо $2c = 8$ аст;

г) Тири хурди он ба 24 баробар буда, масофаи байни фоқусҳо $2c = 10$ аст;

д) Масофаи байни фоқусҳо $2c = 6$ буда, эксцентриситети он $\mathcal{E} = \frac{3}{5}$ аст;

е) Тири калони он ба 20 баробар буда, эксцентриситети он $\mathcal{E} = \frac{12}{13}$ аст;

ж) Тири хурди он ба 10 баробар буда, эксцентриситети он $\mathcal{E} = \frac{12}{13}$ аст;

з) Суммаи нимтирҳо ба 8 ва масофаи байни фоқусҳо ҳам ба 8 баробар аст.

2. Замин аз рӯи эллипсе, ки дар яке аз фоқусҳои он офтоб љойгир шудааст, ҳаракат мекунад. Масофаи хурдтарини байни замину офтоб ба 147,5 млн.км. ва масофаи калонтарини байни онҳо ба 152,5 млн.км. баробар аст. Тири калон ва эксцентриситети мадори замин муайян карда шаванд.

Масъалаи 5. Муодилаи соддатарини гиперболаро тартиб диҳед,агар фокусҳои он дар тири OX љойгир бошанд , нисбат ба ибтидои координата симметрӣ бошад ва агар маълум бошад,ки:

а) тири мавҳум ба 8 эксентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$

в) муодилаи асимптотаҳо y=$\pm\frac{4}{3}$x ва масофаи байни фокусҳо ба 20 баробар,

г) масофаи байни директрисаҳо $\frac{8}{3}$ ва экссентриситет ба $\frac{3}{2}$

д) муодилаи асимптотаҳо y= $\pm\frac{3}{4}x$ ва масофаи байни директрисаҳо ба $12\frac{4}{5}$ баробар бошад.

Ҳал: а) тири мавҳум 2в= 8, $в = 4$ ва экссентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$

Аз ин љо $\varepsilon = \frac{c}{\alpha} \Rightarrow \varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{5}{4}\alpha.$

Мувофиқи таърифи гипербола муносибати зерин дуруст аст:

$в^2 = c^2 - \alpha^2$ (*)

Қимматҳои в ва -с ро дар ин формула гузорем:

$$4^2 = \left(\frac{5}{4}\alpha\right)^2 - \alpha^2 \Rightarrow 16 = \frac{25}{16}\alpha^2 - \alpha^2 \Rightarrow 16 = \frac{9\alpha^2}{16} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{16^2}{9}$$

$$\alpha = \frac{16}{3}$$

Инак , муодилаи гипербола:

$$\frac{x^2}{\frac{256}{9}} - \frac{y^2}{16} = 1$$

в) Муодилаи асимптотаҳо $y = \pm\frac{4}{3}x$ ва масофаи байни фокусҳо 2с= 20 инак , с= 10 ва аз муодилаи асимптотаҳо ; $\frac{в}{\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow в = \frac{4}{3}\alpha,$

Мувофиқи формулаи (*)

$$\left(\frac{4}{3}\alpha\right)^2 = 10^2 - \alpha^2 \Rightarrow \frac{16}{9}\alpha^2 - 100 = \alpha^2 \Rightarrow \frac{16}{9}\alpha^2 - \alpha^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}\alpha^2 = 100$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{900}{25} = 36.$$

$$\alpha = 6, \qquad в = \frac{4}{3}\alpha = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8.$$

Муодилаи гипербола $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

г) масофаи байни директрисаҳо $\frac{2\alpha}{\varepsilon} = \frac{8}{3}$ ва экссентириситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

Аз муносибати якум $\frac{2\alpha}{\varepsilon} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{2\alpha}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \Rightarrow \alpha = 2,$ экссентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$ инак , $\frac{c}{\alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$ $\alpha = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$

Акнун нимтираи мавҳум в - ро ҳисоб мекнем:

$$b^2 = c^2 - \alpha^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$$

Ҳамин тавр муодилаи гиперболаи мазкур; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1.$

д) Муодилаи асимптотаҳо $y = \pm\frac{3}{4}x$ инак,

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}\alpha.$$

масофаи байни директрисаҳо - $12\frac{4}{5}$,

$$\text{яъне, } \frac{2\alpha}{\varepsilon} = 12\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2\alpha}{\varepsilon} = \frac{64}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{32}{5}\varepsilon =>.$$

$$\varepsilon = \frac{5\alpha}{32}$$

аз тарафи дигар $\varepsilon = \frac{c}{\alpha}$ ва $\frac{c}{\alpha} = \frac{5\alpha}{32} \Rightarrow c = \frac{5\alpha^2}{32}$,

инак, мувофиқи формулаи (*) $в^2 = c^2 - \alpha^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\alpha\right)^2 = \left(\frac{5\alpha^2}{32}\right)^2$-
$\alpha^2 \quad => \frac{9}{16}\alpha^2 = \frac{25\alpha^4}{1024} - \alpha^2 \Rightarrow \frac{9}{16} = \frac{25\alpha^2}{1024} - 1 \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{25\alpha^2}{1024} \Rightarrow$
$\alpha^2 = \frac{1024}{16} \Rightarrow \alpha = 8.$

пас, $в = \frac{3}{4} \cdot \alpha = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$, $c = \frac{5 \cdot 64}{32} = 10.$

Ҳамин тавр муодилаи гипербола: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$

Масъалаи 6. Муодилаи гиперболаро тартиб диҳед,агар он нисбат ба ибтидои координат симметрӣ , фокусҳои он дар тири ордината ОУ љойгир бошад ва агар маълум бошад,ки:

а) масофаи байни фокусҳо 10 ва экссентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

б) муодилаи асимптотаҳо $y = \pm\frac{12}{5}x$ ва масофаи байни куллаҳои он ба 48 баробар бошад.

Ҳал: а) муодилаи ин гуна гипербола ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{в^2} = -1$$

дар ин љо α-тири мавҳум, в-тири ҳақиқї мебошад.

Мувофиқи шарт 2c=10 яъне c=5 ва $\varepsilon = \frac{5}{3}$, яъне $\frac{c}{в} = \frac{5}{3} \Rightarrow в = 3.$

Акнун тири мавҳумро ҳисоб мекунем: мувофиқи таърифи гипербола $\alpha^2 = c^2 - в^2$ пас, $\alpha^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 16 = 9.$ Инак, α=3 ва муодилаи гипербола

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$$

б) муодилаи асимптотаҳо барои ин гуна гипербола

$y = \pm\frac{\alpha}{в}x$,бинобар ин мувофиқи шарти масъала муносибати

$y = \pm\frac{12}{5}x$ ва $\frac{\alpha}{в} = \frac{12}{5}$ - ро ҳосил мекунем,

аз ин љо $a = \frac{12}{5}в$. Масофаи байни қуллаҳо ба 48 баробар , ва қуллаҳои гипербола дар тири ордината воқеанд,бинобар он 2в=48 ⇒ в=24. Пас,

$\alpha = \frac{12}{5}в \;=> 24 = \frac{12}{5}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5\cdot 24}{12} = 10$

инак ,муодилаи гипербола

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$$

Масъалаи 7. Нуқтаҳои буриши гиперболаи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ ва хати рости 2x - y-10=0 - ро ёбед:

Ҳал: Барои ёфтани нуқтаҳои буриш, муодилаҳои гипербола ва хати рости додашударо ҳамљоя ҳал мекунем; яъне ҳалли системаи зеринро меёбем.

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

2x-y-10=0 y=2x-10

$$\frac{x^2}{20}-\frac{(2x-10)^2}{5}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{20}-\frac{4x^2-40x+100}{5}=1$$

$$x^2-4(4x^2-40x+100)=20 \Rightarrow$$

$$x^2-16x^2+160x-400=20 \Rightarrow$$

$$-15x^2+160x-420=0 \Rightarrow$$

$$3x^2-32x+84=0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-252}}{3}=\frac{16\pm 2}{3};$$

$$x_1=\frac{16+2}{3}=6, x_2=\frac{16-2}{3}=\frac{14}{3};$$

$$y_1=2x_1-10=2\cdot 6-10=2, \qquad y_2=2x_2-10=2\cdot\frac{14}{2}-10 \;\; y_2=-\frac{2}{3};$$

Инак , хати рост гиперболаро дар ду нуқтаҳо мебуррад ва нуқтаҳои буриш: $M_1(6,\ 2)$ ва $M_2\left(\frac{14}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Масъалаи 8. Исбот намоед,ки муодилаи $2xy$-16=0 гиперболаро тасвир мекунад ва маркази он, нимтираҳо, экссентириситет,муоддилаҳои асимптотаҳои онро тартиб диҳед ва нақшаи онро созед.

Ҳал:Муодилаи $2xy$-25=0 -ро тадқиқ менамоем: $2xy$=25

Барои ин муодиларо ба намуди каноникӣ овадан ивазкунии зеринро љори мекунем.

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \qquad\qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \qquad\qquad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

Онгоҳ, муодила намуди зерин қабул мекунад

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)=25 \Rightarrow x^2-y^2=25 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1.$$

Ин муодила гиперболаи баробартараф дар системаи координатии нави *OXY* буда ,нимтираҳояш *α=в=5* мебошад. Маркази ин гипербола дар ибтидои системаи координатии нав O(o,o) љойгир аст. Муодилаи асимптотаҳоро тартиб медиҳем. Муодилаи асимптотаҳо дар системаи координатии нав OXY

- $y = \pm x$ мебошад. Акнун муодилаи асимптотаҳоро бо номаълумҳои аввала x ва y яъне ,бо системаи координатии аввала оху ифода мекунем:

у=-х ⇒ 1)$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \Rightarrow x-y=-x-y \Rightarrow x=0$, яъне яке аз асимптотаҳо тири ордината мебошад.

2) $y=x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \Rightarrow x-y=x+y \Rightarrow$ у=0, яъне асимптотаи дуйум тири абсцисса мебошад.

Инак, асимптотаҳои ин гипербола тирҳои координати мебошанд.

Масъалаи 9. Аз нуқтаи М(1,-10) ба гиперболаи $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$ расандаҳо гузаронида шудаанд. Муодилаи хордаеро,ки нуқтаҳои расишро пайваст мекунад,тартиб диҳед.

Ҳал: Аввал муодилаҳои расандаҳоро тартиб медиҳем. Бигзор нуқтаи расиш $M_1(X_1,Y_1)$ ва $M_1(X_2,Y_2)$ бошанд. Муодилаи расандаҳо ба гипербола дар ин нуќтаҳо ба намуди зерин мебошад:

$$\frac{xx_1}{8}-\frac{yy_1}{32}=1 \text{ ва } \frac{xx_2}{8}-\frac{yy_1}{32}=1$$

Нуқтаҳои расиш муодилаи гиперболаро бояд қаноат кунонанд,яъне

$$\frac{x_2'}{8}-\frac{y_2'}{32}=1, \qquad \frac{x_2'}{8}-\frac{y_2'}{32}=1$$

Коэффисиенти кунҷии расандаҳоро муайян мекунем:

аз муодилаи якум: $4xx_1-yy_1=32$ => у= $\frac{4x_1}{y_1}x-\frac{32}{y_1}$

пас,коэффисиенти кунҷии расандаҳо;

$$k_p=\frac{4x_1}{y_1} \quad \text{ёки} \quad k_p=\frac{4x_2}{y_2}$$

Аз тарафи дигар расандаҳо аз нуқтаи М(1,-10) ҳам мегузаранд, бинобар он координатаи ин нуқта муодилаи расандаҳоро бояд қаноат кунонад,яъне;

$\frac{xx_1}{8}-\frac{yy_1}{32}=1 \Rightarrow \frac{x_1}{8}$ - $\frac{(-10)y_1}{32}=1 \Rightarrow \frac{x_1}{8}+\frac{5y_1}{16}=1 \Rightarrow 2x_1++5y_1=16 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}(16-5y_1).$

Ин ифодаро бо муодилаи гипербола мегузорем:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}(16-5y_1)\right)^2}{8}-\frac{y_1^2}{32}=1 \Rightarrow \frac{(16-5y_1)^2}{32}-\frac{y_1^2}{32}=1 \Rightarrow (16-5y_1)^2-y_1^2=32$$

$256\text{-}160y_1+25y_1^2-y_1^2=32 \;\Rightarrow\; 24y_1^2-60y_1+224=0$

$$3y_1^2-20y_1+28=0$$

$$y_1=\frac{10\pm\sqrt{100-3\cdot 28}}{3}=\frac{10\pm 4}{3};$$

$$y_{1,1}=\frac{10-4}{3}=2; \qquad y_{1,2}=\frac{14}{3};$$

абссисаҳоро ҳисоб мекунем:

$$x_{1,1}=\frac{1}{2}(16-5\cdot 2)=3; \;\; x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(16-5\cdot\frac{14}{3}\right)=-\frac{11}{3};$$

Ҳамин тавр нуқтаҳои расиш;

$$M_1(3{,}2) \quad \text{ва } M_2\left(-\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right)$$

Акнун муодилаи хордаи $M_1\,M_2$ - ро тартиб медиҳем:

$$\frac{x-3}{-\frac{11}{3}-3}=\frac{y-2}{\frac{14}{3}-2} \;\Rightarrow\; \frac{x-3}{-\frac{20}{3}}=\frac{y-2}{\frac{8}{3}}.$$

§9. **Масъалаҳо барои кори мустақил**

1.Аз рӯи шартҳои зерин муодилаи гиперболаро тартиб диҳед:

А) нимтираи ҳақиқи ба 5 ва эксцентриситети он ба 1,4 баробар аст;

Б) масофаи байни фокусҳо ба $2c=\sqrt{15}$ эксцентриситети он ба $\frac{4}{3}$ баробар аст.

В) масофаи байни фокусҳо 2c=10 ва тири мавҳум 2b=8 аст.

Г)муодилаҳои асимптотаҳо $y=\pm\frac{4}{3}x$

ва масофаи байни қуллаҳо $2a=20$ аст.

д) масофаи байни фокусҳо $2c=10$ ва масофаи байни қулладаҳри гипербола $2a = 8$ аст.

е) тири ҳақиқи ба 6 баробар буда, гипербола аз нуқтаи M(9;-4) мегузарад.

2.Муодилаи оддитарини гиперболае, ки аз нуқтаҳои

$(2\sqrt{7}; -3)$ ва $(-7; 6\sqrt{2})$ мегузарад, тартиб диҳед.

3.Нуқтаи бурриши гиперболаи

$x^2-3y^2= 12$ бо даврае, ки марказаш дар фокуси рости гипербола љой гирифта аз ибтидои системаи координатаҳо мегузарад, ёфта шавад.

4. Гиперболаи $x^2-3y^2= 12$ дода шудааст:

нимтираҳои a ва b, эксцентриситет, фокусҳо, муодилаҳои асимптотаҳо ёфта шаванд.

5.Фокусҳои гипербола дар тири абцисса нисбат ба ибтидои координатаҳо симметри мехобанд. Масофаи байни фокусҳо ба 9 баробар буда, кунљи моилии яке аз асимптотаҳо ба 60^0 баробар аст. Муодилаи гипербола тартиб дода шавад.

6. Нуқтаҳои бурриши гиперболаи

$$\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36}=1$$

ба хати рости $x-5y=0$ ва $2x +y-18=0$

ёфта шаванд.

7. Аз нуқтаи A(4;-5) хати рости ба асимптотаҳои гиперболаи

$$x^2 - 4y^2 = 4$$

параллел буда гузаронида шавад.

8. Гипербола нисбат ба тирҳои координати симмметри буда, , аз нуқтаи M(6; $-2\sqrt{6}$) мегузарад ва нимтири мавҳуми $b=2$-ро дорад. 1). Муодилаи гипербола навишта шавад. 2). масофаи байни нуқтаи M ва фокусҳо ёфта шавад.

Маърузаи 14-17

Масъалаҳо барои кори мустаъқил

1. Параболаи нисбат ба тири Оу симметрӣ нисбат ба нуқтахои буриши хати рости $x+y=0$ бо давраи $x^2+y^2+4y=0$ мегузарад. Муодилаи ин параболаро тартиб дихед. Дар нуқта, давра, парабола ва хати ростро созед.

2. Муодилаи давраеро, ки марказаш дар фокуси параболаи $y^2=2px$ љой гирифтааст ва директрисаи парабола ба давра расондааст, тартиб дихед.

3. Қуллаи парабола дар ибтидои координатахо љойгир шудааст. Муодилаи вайро ёбед. Графикашро созед, агар

а\ парабола нисбат ба тири Ох симметрӣ буда, аз нуқтаи А(9;6) гузарад;

б\ парабола нисбат ба тири Ох симметрӣ буда, аз нуқтаи В(-1;3) гузарад;

в\ парабола нисбат ба тири Оу симметрӣ буда, аз нуқтаи С(1;1) гузарад;

г\ парабола нисбат ба тири Оу симметрӣ буда, аз нуқтаи Д(4;8) гузарад;

4. Дар параболаи $y^2=8x$ нуқтаеро ёбед, ки радиуси фокалии он

а\ ба 20; б\ ба 4 баробар аст.

5. Нуқтаи буриши параболаи $y^2=18x$

бо хатхои рости

а\ $y=6(1-x)$

б\$y=4,5x +1$ ёфта шавад.

6. Фокус F ва муодилаи директрисаи параболаи $y^2=12x$ ёфта шаванд.

7. Радиуси фокалии нуқтаи М-и параболаи $y^2=162x$ –ро ёбед., агар абциссаи вай ба 7 баробар бошад,

8. Радиуси фокалии нуқтаи М-и параболаи $y^2=12x$ ёфта шавад. Агар ординатаи нуқтаи М ба 6 баробар бошад.

9. Чи гуна хатро тасвир намудани муодилахои

а\ у=2$\sqrt{x}$; б\ у=$-\sqrt{x}$; в\ у=-3$\sqrt{-2x}$; г\ у=-2$\sqrt{x}$-ро муайян куне два ин хатхоро дар нақша тасвир намоед.

10. Нуқтахои буриши параболаи у=х^2 ва х=у^2-ро ёбед. Нақшаашро созед.

Мисоли 2 Муодилаи

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$$

ба шакли каноники оварда шавад ва намуди хати каљро муайян намоед:

<u>Ҳал</u>

$$A = 9; B = -12; C = 16; D = -10; E = 55; F = -50.$$

$$\delta = AC - B^2 = 9 \cdot 16 - (-12)^2 = 144 - 144 = 0$$

Инак хати каљ номаркази ва хати каљи параболӣ мебошад. Барои содда кардани муодила табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координатиро тадбиқ менамоем. Формулаҳои ивазкуни:

$$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$$

Кунљи даврзании тирҳои координати α - аз муодилаи зерин

$$Btg^2\alpha - (C - A)tg\alpha - B = 0$$

муайян карда мешавад. Қийматҳои коефисиентҳоро гузошта муодилаи

$$-12tg^2\alpha - (16 - 9)tg\alpha - (-12) = 0$$

$$12tg^2\alpha + 7tg\alpha - 12 = 0$$

Ҳосил мекунем. Решахои муодиларо ҳисоб мекунем:

$$\text{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12 \cdot (-12)}}{2 \cdot 12} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} = \frac{-7 \pm 25}{24};$$

$$tg\alpha_1 = \frac{-7 + 25}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}; \qquad tg\alpha_2 = \frac{-7 - 25}{24} = -\frac{32}{24} = -\frac{3}{4}.$$

Кунљи $tg\alpha = \frac{3}{4}$ ро қабул мекунем ва қийматҳои $sin\alpha$ ва $cos\alpha$ ро ҳисоб мекунем:

$$sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5};$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{4}{5};$$

Ҳамин тавр ивазкунии зеринро љори й мекунем:

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{1}{5}(4x' - 3y') \\ \overline{y} = \frac{1}{5}(3x' + 4y') \end{cases}$$

Ба муодила мегузорем:

$$9\left(\frac{1}{5}(4x' - 3y')\right)^2 - 24 \cdot \frac{1}{5}(4x' - 3y')\frac{1}{5}(3x' + 4y') + 16\left(\frac{1}{5}(3x' + 4y')\right)^2$$
$$- 20 \cdot \frac{1}{5}(4x' - 3y') + 110 \cdot \frac{1}{5}(3x' + 4y') - 50 = 0$$

$$\frac{9}{25}\left(16x'^{2} - 24x'y' + 9y'^{2}\right) - \frac{24}{25}\left(12x'^{2} + 16x'y' - 9x'y' - 12y'^{2}\right)$$
$$+ \frac{16}{25}\left(9x'^{2} + 24x'y' + 16y'^{2}\right) - 16x' + 12y' + 66x' + 88y' - 50$$
$$= 0$$

$$144x'^{2} - 9 \cdot 24x'y' + 81y'^{2} - 288x'^{2} - 7 \cdot 24x'y' + 288y'^{2} + 144x'^{2} + 16$$
$$\cdot 24x'y' + 256y'^{2} - 50 \cdot 25x' + 50 \cdot 100y' - 50 \cdot 25 = 0$$

$$625\text{й}'^{2} - 50 \cdot 25\text{х}' + 50 \cdot 100\text{й}' - 50 \cdot 25 = 0 \qquad /625$$

$$\text{й}'^{2} - 2x' + 8y' - 2 = 0$$

Акнун ин муодиларо ба намуди муодилаи каноникии $y^2 = 2px$ меорем:

$$y'^2 + 8y' - 2 = 2x' \;\Rightarrow\; \left(y'^2 + 2\cdot 4y' + 4^2\right) - 4^2 - 2 = 2x'$$

$$(y' + 4)^2 = 2(x' + 9)$$

Ивазкунии параллел куљониро љори й мекунем:

$$\begin{cases} \overline{x} = x' + 9 \\ \overline{y} = y' + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \overline{x} - 9 \\ y' = \overline{y} - 4 \end{cases}$$

Инак муодилаи намуди зеринро ҳосил мекунем:

$$\overline{y}^2 = 2\overline{x}$$

Ҳамин тавр параметри парабола $p = 1$ қуллаи парабола дар ибтидои координатаи $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ ёки дар нуқтаи $M'(9{,}4)$ дар системаи $O'x'y'$.

Мисоли 3 Муодилаи

$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

ба шакли каноникий оварда шавад ва намуди хати каљро муайян намоед:

Ҳал

$$A = 19; B = 3; C = 11; D = 19; E = 3; F = 29.$$

$$\delta = AC - B^2 = 11 \cdot 19 - (3)^2 = 209 - 9 = 200$$

Пас муодилаи хати каљи эллипсиро мебошад. Маркази хати каљро меёбем:

$$x_0 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} = \frac{1}{200}\begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{200}(9 - 209) = -1$$

$$y_0 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} = \frac{1}{200}\begin{vmatrix} 19 & 19 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{200}(57 - 57) = 0$$

Марказ нуқтаи $M(-1{,}0)$ ивазкунии параллел куљониро љори мекунем:

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \end{cases}$$

Аъзои озоди нав $\overline{F}$ ро ҳисоб мекунем: $\overline{F} = \frac{\Delta}{\delta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 3 & 19 \\ 3 & 11 & 3 \\ 19 & 3 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 3 & 0 \\ 3 & 11 & 0 \\ 19 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 10(209 - 9) = 10 \cdot 200 = 2000$$

$$\text{Пас } \overline{F} = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{2000}{200} = 10$$

Ҳамин тавр пас аз табдилдихии параллел куљони муодила намуди зерин қабул мекунад:

$$19x'^2 + 6x'y' + 11y'^2 + 10 = 0$$

Акнун табдилдихии даврзанонидани тирхои координатиро чирий мекунем:

$$\begin{cases} x' = \overline{x}cos\alpha - \overline{y}sin\alpha \\ y' = \overline{x}sin\alpha + \overline{y}cos\alpha \end{cases}$$

Кунљи даврзани α ро аз муодилаи:

$$Btg^2\alpha - (C - A)tg\alpha - B = 0$$

Муайян мекунем:

$$3tg^2\alpha - (11 - 19)tg\alpha - 3 = 0$$

$$3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0$$

$$\text{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 9}}{3} = \frac{-7 \pm 5}{3};$$

$$tg\alpha_1 = \frac{-4 + 5}{3} = \frac{1}{3}; \qquad tg\alpha_2 = \frac{-4 - 5}{3} = -3.$$

Ба сифати кунљи даврзани кунљи $\alpha = arctg\frac{1}{3}$ ро қабул мекунем. Қиймати $sin\alpha$ ва $cos\alpha$ ро ҳисоб мекунем:

$$sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

Ҳамин тавр формулахои табдилдихии координати намуди зерин мешавад:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{x} - \overline{y}) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(\overline{x} + 3\overline{y}) \end{cases}$$

Инро ба муодилаи додашуда мегузорем:

$$19\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{\mathrm{x}}-\overline{\mathrm{y}})\right)^2+6\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{\mathrm{x}}-\overline{\mathrm{y}})\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(\overline{\mathrm{x}}+3\overline{\mathrm{y}})+11\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(\overline{\mathrm{x}}+3\overline{\mathrm{y}})\right)^2$$
$$+10=0$$

$$19(3\overline{x}-\overline{y})^2+6(3\overline{x}-\overline{y})(\overline{x}+3\overline{y})+11(\overline{x}+3\overline{y})^2+100=0$$

$$171\overline{\mathrm{x}}^2-114\overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}+19\overline{\mathrm{y}}^2+18\overline{\mathrm{x}}^2+48\overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}-18\overline{\mathrm{y}}^2+11\overline{\mathrm{x}}^2+66\overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}$$
$$+99\overline{\mathrm{y}}^2+100=0$$

$$200\overline{x}^2+100\overline{y}^2+100=0 \qquad /100$$

$$2\overline{x}^2+\overline{y}^2=1$$

Ин муодилаи эллипси ҳеч як тасвири геометрий муайян намекунад –онро эллипси мавҳум меноманд.

Мисоли 4 Муодилаи $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$ ба шакли каноникий оварда шавад ва намуди хати каљро муайян намоед:

Ҳал

$$A=4; B=12; C=11; D=32; E=21; F=51.$$

$$\delta=AC-B^2=4\cdot 11-(12)^2=-100$$

Пас муодилаи хати каљи додашуда гиперболи мебошад. Маркази хати каљро меёбем:

$$x_0=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}=-\frac{1}{100}\begin{vmatrix}12 & 32\\ 11 & 21\end{vmatrix}=-\frac{1}{100}(252-352)=1$$

$$y_0=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}=-\frac{1}{100}\begin{vmatrix}32 & 4\\ 21 & 12\end{vmatrix}=-\frac{1}{100}(384-84)=-3$$

Инак марказ нуқтаи гипербола $M(1,-3)$ ивазкунии параллел кучониро љори мекунем:

$$\begin{cases}x=\overline{x}+1\\ y=\overline{y}-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{x}=x-1\\ \overline{y}=y+3\end{cases}$$

Акнун аъзои озоди навро аз руи формулаи $\overline{F}=Dx_0+Ey_0+F$ ҳисоб мекунем: $(x_0;y_0)$ –координатаҳои марказ:

$\overline{F} = 32 \cdot 1 + 21(-3) + 51 = 32 - 63 + 51 = 20$

Инак муодила дар системаи нав $O\overline{x}\,\overline{y}$ намуди зерин мегирад:

$$4\overline{\text{х}}^2 + \ 24\overline{\text{х}}\,\overline{\text{й}} + 11\overline{y}^2 + 20 = 0$$

Акнун барои боз ҳам соддатар намудан мо аз табдилдихии даврзанонидани тирхои координати истифода мебарам:

$$\begin{cases} \overline{x} = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ \overline{y} = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$$

Кунљи даврзани α ро аз муодилаи:

$$Btg^2\alpha - (C - A)tg\alpha - B = 0$$

муайян мекунем:

$12tg^2\alpha - 7tg\alpha - 12 = 0$: ҳал мекунем:

$$\text{tg}\alpha_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12 \cdot 12}}{2 \cdot 12} = \frac{7 \pm 25}{24};$$

$$tg\alpha_1 = \frac{7 + 25}{24} = \frac{4}{3}; \qquad tg\alpha_2 = \frac{7 - 25}{24} = -\frac{3}{4}.$$

$tg\alpha = \frac{4}{3}$ ро қабул мекунем. Қиймати $sin\alpha$ ва $cos\alpha$ ро ҳисоб мекунем:

$$sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{4}{5};$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{3}{5};$$

Ҳамин тавр формулахои табдилдихии координати намуди зерин мешавад:

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{1}{5}(3x' - 4y') \\ \overline{y} = \frac{1}{5}(4x' + 3y') \end{cases}$$

Инро ба муодилаи додашуда мегузорем:

$$4\cdot\left(\frac{1}{5}(3\mathrm{x}'-4\mathrm{y}')\right)^2+24\cdot\frac{1}{5}(3\mathrm{x}'-4\mathrm{y}')\cdot\frac{1}{5}(4\mathrm{x}'+3\mathrm{y}')+11\left(\frac{1}{5}(4\mathrm{x}'+3\mathrm{y}')\right)^2$$
$$+20=0$$

$$\frac{4}{25}\left(9x'^2-24x'y'+16y'^2\right)+\frac{24}{25}\left(12x'^2-7x'y'-12y'^2\right)$$
$$+\frac{11}{25}\left(16x'^2+24x'y'+9y'^2\right)+20=0$$

$$36x'^2-96x'y'+64y'^2+288x'^2-168x'y'-288y'^2+176x'^2+264x'y'$$
$$+99y'^2+500=0$$

$$500x'^2-125y'^2=-500\quad\Rightarrow\quad /500$$

$$x'^2-\frac{y'^2}{2}=-1$$

Ин муодилаи гиперболаи нимтирахояш $a=1,\quad b=\sqrt{2}$ буда қуллаҳояш дар тири ордината мехобат, тири ҳақиқи дар тири ордината тири мавҳум тири OX љойгир мешавад.

Мисоли 5 Муодилаи $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$ ба шакли каноникий оварда шавад ва намуди хати каљро муайян намоед:

<u>Ҳал</u>

$$A=7;B=3;C=-1;D=14;E=6;F=28.$$

$$\delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7-9=-16$$

пас хати каљ гиперболи мебошад.Маркази хати каљро меёбем:

$$x_0=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{vmatrix}3 & 14\\ -1 & 6\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}(18+14)=-2$$

$$y_0=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{vmatrix}14 & 7\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}(42-42)=0$$

Инак маркази хати каљ дар нуқтаи $M(-2{,}0)$ ибтидои координата ба маркази хати каљ нуқтаи $M(-2{,}0)$ мекуљонем яъне ивази:

$$\begin{cases}x=\overline{x}+x_o\\ y=\overline{y}+y_o\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{x}-2\\ y=\overline{y}\end{cases}$$ љори мекунем.

Аъзои адади навро ҳисоб мекунем:

$$\overline{F} = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 6 \\ 14 & 6 & 28 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{16}(-196 + 252 + 252 + 196 - 252 - 252) = 0$$

Ҳамин тавр дар натиљаи ивазкуни муодилаи намуди зерин ҳосил мешавад:

$$7\overline{x}^2 + 6\overline{x}\,\overline{y} - \overline{y}^2 = 0$$

Акнун ивазкунии даврзанони тирҳои координатиро љори й намуда аъзои ҳосили зарби тагирёбандаҳоро хориљ мекунем:

$$\begin{cases} \overline{x} = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ \overline{y} = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$$

Кунљи даврзани α ро аз муодилаи:

$$Btg^2\alpha - (C - A)tg\alpha - B = 0$$

муайян мекунем:

$3tg^2\alpha - (-1 - 7)tg\alpha - 3 = 0$: ҳал мекунем:

$$3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0$$

$$\mathrm{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 3(-3)}}{3} = \frac{-4 \pm 5}{3};$$

$$tg\alpha_1 = \frac{-4 - 5}{3} = -3; \qquad tg\alpha_2 = \frac{-4 + 5}{3} = \frac{1}{3}.$$

$tg\alpha = -3$ ро қабул мекунем. Қиймати $sin\alpha$ ва $cos\alpha$ ро ҳисоб мекунем:

$$sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{-3}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

Ҳамин тавр формулахои табдилдихии координати намуди зерин мешавад:

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \\ \overline{y} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y') \end{cases}$$

Ин ифодаро ба муодила мегузорем:

$$7\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(\mathrm{x}'+3\mathrm{y}')\right)^2+6\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(\mathrm{x}'+3\mathrm{y}')\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(-3\mathrm{x}'+\mathrm{y}')$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3\mathrm{x}'+\mathrm{y}')\right)^2=0$$

$$7\left(x'^2+6x'y'+9y'^2\right)^2+6\left(-3x'^2+x'y'-9x'y'+3y'^2\right)$$

$$-\left(9x'^2-6x'y'+y'^2\right)=0$$

$$7x'^2+42x'y'+63y'^2-18x'^2+6x'y'-54x'y'+18y'^2-9x'^2+6x'y'-y'^2$$

$$=0$$

$$-20x'^2+80y'^2=0\quad /-20$$

$$x'^2-4y'^2=0$$

ин муодиларо ба намуди

$(x'-2y')(x'+2y')=0$ ёки $x'=-2y'=0$ ва $x'+2y'=0$

Ҳамин тавр муодилаи додашуда гиперболи буда гиперболаи ниҳодвайронро муайян мекунад ки он аз ду хатҳои рости бурида шавандаи $x'=2y'$ ва $x'=-2y'$ иборат мебошанд. Нуқтаи буриши ин хатҳои рост маркази хат ин нуқтаи $M(-2{,}0)$ мебошад. Муодилаи хатҳои рост дар системаи аввала OXY ба намуди зерин мебошад:

$x+y+2=0$ ва $7x-y+14=0$

Муодилаҳои хати каҷи тартиби дуюмро ба намуди каноники биёред:

1. $16x^2–24xy+8y^2+25x-50y+50=0$;
2. $x^2–2xy+y^2-10x-6y+25=0$;
3. $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$;
4. $3x^2–2xy+3y^2-4x-4y-12=0$;
5. $x^2–6xy+y^2-4x-4y+12=0$;
6. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

7. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

8. $x^2–5xy+y^2+x+2y-2=0$;

9. $5x^2–8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;

10. $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;

11. $6xy–8y^2+12x-26y-11=0$;

12. $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$;

13. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

14. $3x^2–2xy+3y^2+2x-4y+1=0$;

15. $3x^2–2xy+3y^2+2x-4y+2=0$;

16. $x^2+2xy-y^2-6x+4y-3=0$;

17. $x^2+3xy+2y^2+2x+5y-3=0$;

18. $x^2–2xy+y^2+4x-6y+1=0$;

19. $x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3=0$;

20. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

21. $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0$;

22. $4x^2–4xy+y^2-8x+6y-2=0$;

23. $2xy-4y^2+6x+6y+1=0$;

24. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

25. $x^2–2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

26. $x^2–5xy+4y^2+x+2y-2=0$;

27. $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$;

28. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;

29. $6xy-8y^2+12x-26y-11=0$;

30. $7x^2–24xy-38x+24y+175=0$.

Маъруза 18-21

1.Кадоме аз муодилаи ҳамвориҳо дар намуди нормалӣ навишта шудаанд?

а) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}$ z – *5=0* *б)* $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}$ z – *3=0*

Ҳал.а) Вектори $\vec{N}=\left\{\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}$ ба ҳамворӣ перпендекуляр мебошад, дарозии он

$\overline{|N|}=\sqrt{(\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1$ аст.

Азбаски дар муодилаи нормалӣ коэффисентҳои назди *x*,*y*,*z* вектори воҳидиро муайян мекунад ва узви озод *p ба* -*5* баробар аст, пас муодилаи

а) дар намуди нормалӣ навишта шудааст.

б) Вектори ба ҳамвори перпендекуляр $\vec{N}=\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right\}$ мебошад. дарозии он

$N=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 1$ аст.

Бинобар ин муодилаи б) муодилаи намуди нормалии ҳамворӣ намебошад.

2. Муолилаи $4x+5y-3z-2=0$ - ро ба намуди нормалӣ нависед.

Ҳал. Зарбшавандаи нормалӣ M–ро меёбем:

$$M=\frac{\pm 1}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Аломати M плюс гирифта шуд, чунки $D=-2<0$аст. Ҳамаи аъзоҳои муодилаи додашударо ба қимати M зарб карда, муодилаи нормалии ҳамвориро ҳосил мекунем:

$$\frac{4x+5y-3z-2}{5\sqrt{2}}=0 \quad \text{ёки} \quad \frac{4}{5\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{3}{5\sqrt{2}}z-\frac{2}{5\sqrt{2}}=0$$

3.Кунҷи байни ҳамвориҳои

$3x+6y-2z=0$ ва $2x+y+6z-12=0$ -ро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи таъриф (пункти 1.7) кунҷи байни ду ҳамвориҳо ба кунҷи байни векторҳои нормалии онҳо

$\overrightarrow{N_1}=\{3;6;-2\}$, $\overrightarrow{N_2}=\{2;1;6\}$ баробар аст.

Бинобар он мувофиқи формулаи (1.9) : $cos\varphi=\frac{3\cdot2+6\cdot1+(-2)\cdot6}{\sqrt{9+36+4}\cdot\sqrt{4+1+36}}=0,$

$\varphi=\frac{\pi}{2}$,яъне ҳамвориҳо бо ҳам параллеланд.

4.Масофаи аз нуқтаи $P(2;4;-7)$ то ҳамвории

$2x-3y+6z+1=0$ –ро ёбед

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1.8)

$$d=\left|\frac{2\cdot2-3\cdot4+6\cdot(-7)+1}{\sqrt{4+9+36}}\right|=\left|\frac{-49}{7}\right|=7.$$

5. Дар тири OX нуқтаеро ёбед, ки он аз ҳамвории

$4x+2y-4z+9=0$ дар масофаи $d=\frac{1}{2}$ воқеъ аст.

Ҳал. Бинобар он, ки нуқтаи M дар тири OX мехобад, координатаҳои он $M(x;0;0)$ мешавад. Мувофиқи шарти масъала нуқтаи M аз ҳамворӣ дар масофаи $d=\frac{1}{2}$ воқеъ аст , бинобар он мувофиқи формулаи (1.8)

$$\frac{1}{2}=\left|\frac{4\cdot x+2\cdot0-4\cdot0+9}{\sqrt{16+4+16}}\right|=\frac{|4x+9|}{6}$$

Яъне,$|4x+9|=3$, $4x+9=\pm3$

Аз инҷо $x_1=-5$ ва $x_2=-\frac{3}{2}$.

Ҳамин тавр шарти масъаларо ду нуқтаҳои $M_1(-3;0;0)$ ва $M_2\left(-\frac{3}{2};0;0\right)$ қаноат мекунонанд.

6. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи $M_0(2;2;-1)$ гузашта ба векторҳои $\overrightarrow{N_1}=\{2;-3;-1\}$ ва $\overrightarrow{N_2}=\{1;-1;1\}$ параллел аст.

<u>**Ҳал.**</u> Бигузор $M(x;y;z)$ нуқтаи дилхоҳи ҳамвории номаълум бошад.

Он гоҳ векторҳои $\overrightarrow{M_0M}=\{x-2;y-2;z+1\}$, $\overrightarrow{N_1}=\{2;-3;-1\}$ва

$\overrightarrow{N_2}=\{1;-1;1\}$ компланарӣ мешаванд ва бинобар он мувофиқи формулаи (1.17) баробарии зерин бояд ичро шавад:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Ин детерминантро нисбат ба элементҳои сатри якӯм кушода муодилаи ҳамвории матлубро ҳосил мекунем:

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$4x+3y-z-15=0$$

7.Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаҳои $M_1(2;1;-1)$ ва $M_2(4;2;2)$ гузашта ба ҳамвории

$2x-3y+4z-4=0$ перпендикуляр аст.

<u>**Ҳал.**</u> Ин масъаларо бо ду усул ҳал мекунем.

а)Усули якум: Параллел будани векторҳои нормали ҳамвории додашуда $\vec{N}=\{2;-3;4\}$ва ҳамвории номаълум равшан аст. Ҳамин тавр, ҳамвории номаълум аз нуқтаҳои M_1 ва M_2ба вектори $\vec{N}$ параллел шуда мегузарад. Бояд санҷида шавад, ки векторҳои $\overrightarrow{M_1M_2}$ва $\vec{N}$ коллинеарӣ набошанд. Воқеан , координатаҳои вектори

$\overrightarrow{M_1M_2} = (2;1;3)$ ба кординатаҳои вектори $\overrightarrow{N_1} = \{2;-3;4\}$ мутаносиб нестанд ва бинобар ин онҳо ғайри коллинеарианд.

Бигузор $M(x;y;z)$ нуқтаи дилхоҳи ҳамвории номаълум бошад. Он гоҳ векторҳои $\overrightarrow{M_1M}$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ ва $\vec{N}$ бояд векторҳои компланарӣ шаванд, яъне бояд шарти

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

иҷро шавад. Ин детерминантро ҳисоб карда муодилаи ҳамвории матлубро ҳосил мекунем:

$$13x - 2y - 8z - 32 = 0.$$

<u>б)Усули дуюм.</u> Азбаски векторҳои $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{2\imath} + \vec{\jmath} + \overrightarrow{3k}$ва $\vec{N} = \overrightarrow{2\imath} - 3\vec{\jmath} + \overrightarrow{4k}$ ба якдигар параллел нестанд, бинобар ин зарби вектории онҳо вектореро медиҳад, ки ба ҳамвории номаълум перпендикуляр мешавад:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{N}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 13i - 2j - 8k.$$

Азбаски ҳамвории номаълум аз нуқтаи $M_1(2;1;-1)$ гузашта вектори нормалии $\vec{n} = \{13;-2;-8\}$–ро дорад, бинобар он мувофиқи формулаи (1.1) муодилаи зеринро ҳосил мекунем: $13(x-2) - 2(y-1) - 8(z+1) = 0$.

Аз инҷо: $13x - 2y - 8z - 32 = 0$.

8.Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз се нуқтаҳои додашуда $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ ва $M_3(3;0;1)$ мегузарад.

<u>Ҳал.</u> Бигузор $M(x;y;z)$ нуқтаи дилхоҳи ҳамвори бошад. Он гоҳ мувофиқи формулаи (1.16) муносибати зеринро ҳосил мекунем:

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \overline{M_1M_2} = \{4 - 1, -1 - 3, 2 - 0\} = \{3, -4, 2\}$$

$\overline{M_1M_3} = \{3 - 1, 0 - 3, 1 - 0\} = \{3; -4; 2\}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ин детерминантро ҳисоб карда муодилаи ҳамвории матлубро ҳосил мекунем: $2x + y - z - 5 = 0$.

9. Дар кадом қиматхои l ва m ҳамвориҳои

$2x + ly + 3z - 5 = 0$ ва $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ ба ҳамдигар параллел мешаванд.

Ҳал: Мувофиқи шарти паралелии ду ҳамвориҳо бояд шарти зерин ичро шавад:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Барои ҳамвориҳои додашуда баробариҳои зеринро ҳосил мекунем; $\frac{2}{m} = \frac{l}{-6} = \frac{3}{-6}$аз ин чо$\frac{2}{m} = \frac{3}{-6} \Rightarrow m = -4$ ва $\frac{l}{-6} = \frac{3}{-6} \Rightarrow l = 3$. Инак дар мавриди $l = 3$ ва $m = -4$ будан ҳамвориҳо параллел мешаванд, яъне ҳамвориҳои

$$2x + 3y + 3z - 5 = 0 \text{ ва } -4x - 6y - 6z + 2 = 0$$

ба ҳамдигар параллел мебошанд.

10. Дар кадом қимати l ҳамвориҳои зерин ба ҳамдигар перпендикуляр мешаванд;

$5x + y - 3z - 3 = 0$ ва $2x - ly - 3z + 1 = 0$.

Ҳал: Мувофиқи шарти перпендикулярии ду ҳамвориҳо бояд баробарии $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$иҷро шавад. Барои ҳамвориҳои додашуда баробарии зеринро ҳосил мекунем: $5 \cdot 2 + l \cdot 1 - 3 \cdot (-3) = 0$ аз ин ҷо

$l+10+9=0 \quad \Rightarrow l=-19$.Инак, ҳамвориҳо хангоми $l=-19$ будан перпендикуляр мешаванд.

Яъне, ҳамвориҳои

$5x+y-3z=0$ ва $2x-19y-3z+1=0$

перпендикуляр мебошанд.

11. Муайян намоед, ки се ҳамвориҳои дода шуда:

$$x-2yz-7=0, \quad 2x+y-z+2=0 \quad \text{ва} \quad x-3y+2z-11=0$$

якто нуқтаи умуми доранд ва координатаҳои ин нуқтаро ёбед.

Ҳал: Барои муайян кардани нуқтаи умуми доштани ин ҳамвориҳо ҳамҷоя будани системаи муодилаҳои хаттии аз муодилаҳои ин ҳамвориҳо иборат бударо санчидан лозим аст: Системаи муодилаҳои хатти

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z-7=0 \\ 2x+y-z+2=0 \\ x-3y+2z-11=0 \end{array}\right\} \text{ёки} \left.\begin{array}{r} x-2y+z=7 \\ 2x+y-z=-2 \\ x-3y+2z=11 \end{array}\right\}$$

Шарти ҳамчоягии системаи хатти ба нол баробар будани детерминанти матрисаи асосии он мебошад ,яъне $detA \neq 0 \Rightarrow$

$$detA=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2 \neq 0$$

Инак, система ҳамчоя ва ҳамвориҳо якто нуқтаи умуми доранд. Координатаҳои ин нуқтаро, яъне ҳалли системаро бо ёрии формулаи Крамер меёбем:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \; y=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \; z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 11 & -3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=5-3=2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -16 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 12 = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -16 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -16 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4$$

Инак: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{4}{2} = -2\,, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$

Ҳамин тавр нуқтаи умумии се ҳамвориҳои додашуда нуқтаи $O(1, -2,\ 2)$ мебошад.

12. Исбот кунед, ки се ҳамвориҳои

$$7x + 4y + 7z + 1 = 0, \quad x + 2y + 3z - 1 = 0 \text{ ва } 2x - y - z + 2 = 0$$

аз рӯи якто хати рост мегузаранд.

Ҳал. Барои ҳал намудани ин масъала системаи муодилаҳои хаттиро тадқиқ менамоем. Аз коэффисиентҳои муодилаҳо матрисаҳои зеринро тартиб медиҳем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Аввал ранги ин матрисаҳоро ҳисоб мекунем. Минорҳои матрисаро ҳисоб мекунем:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = 7 \neq 0; \; M_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10 \neq 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -14 - 7 + 24 - 28 + 21 + 4 = 0$$

Инак, $rangA_1$=2. Барои ёфтани ранги матрицаи A_2 ҳамаи минорҳои тартиби сейюми онро ҳисоб мекунем:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \; M_3^2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -28 + 1 + 8 + 4 + 7 + 8 = 0;$$

$$M_3^3 = \begin{vmatrix} 7 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -42 + 1 + 14 + 6 + 7 + 14 = 0$$

Ҳамин тавр , $rangA_1 = rangA_2 = 2$ бинобар он §1.10 пункти 3 се ҳамвориҳо аз рӯи якто хати рост мегузаранд.

13.Ҳачми пирамидаро ҳисоб кунед ,ки он бо ҳамвории

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0$$

ва ҳамвориҳои координати маҳдуд мебошад.

<u>Ҳал.</u> Барои ҳалли ин масъала мо аввал муодилаи ҳамвориро ба намуди порчаҳо меорем:

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 3y + 6z = 12 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{6z}{12} = 1 \;\Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$$

Инак ҳамвори аз тирҳои координати мувофиқан порчаҳои дарозиашон $a = 6$, $b = 4$ ва $c = 2$ баробарро бурида мегузарад. Бинобар он , қуллаҳои пирамида нуқтаҳои $A(6,0,0)$, $B(0,-4,0)$, $C(0,0,2)$ ва $O(0,0,0)$мебошанд. Он гоҳ ҳаҷми пирамида ба $\frac{1}{6}$ ҳиссаи ҳачми параллелопипеди ченакҳояш ба

$a = 6$,

$b = 4$ ва $c = 2$ буда баробар мешавад. Ҳачми параллелопипедро ҳисоб мекунем:

$$V_{paral} = abc = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48\ .$$

Ҳачми прамида $V = \frac{1}{6}V_{paral} = \frac{1}{6} \cdot 48 = 6$ воҳиди ҳаҷм.

14. Масофаи байни ду ҳамвориҳои параллели зеринро ёбед:

$$2x - y + 2z + 9 = 0 \text{ ва } 4x - 2y + 4z - 21 = 0$$

Ҳал: Барои ёфтани масофаи байни ин ҳамвориҳои параллел мо аввал дар яке аз ин ҳамвориҳо ягон нуқтаеро мегирем ва баъд масофаи аз ин нуқта то ҳамвории дигарро ҳисоб мекунем, ки он масофаи байни ҳамвориҳои параллел мешавад.

Барои ёфтани нуқтаи ҳамвори мо дар муодилаи якӯм қиматҳои ду номаълумро қайд мекунем,(ягон ададҳои дилхоҳ мегирем) масалан: $y = 1$ ва $z = 1$ гуфта қабул мекунем ва қимати координатаи $x -$ ро аз муодилаи ҳосил шуда ҳисоб мекунем:

$$2x - y + 2z + 9 = 0 \Rightarrow 2x - 1 + 2 \cdot 1 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5$$

Инак нуқтаи мазкур $M_0(-5,1,1)$.

Акнун муодилаи ҳамвории дуюмро ба намуди нормали меорем ва масофаи аз нуқтаи $M_0(-5,1,1)$ то ҳамвориро ҳисоб мекунем:

$$4x - 2y + 4z - 21 = 0$$

Зарб кунандаи нормироникунандаро ҳисоб мекунем:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$$

Муодилаи нормалии ҳамвори

$$\frac{4x - 2y + 4z - 21}{6} = 0$$

Масофаро ҳисоб мекунем:

$$d = \left|\frac{4x_0 - 2y_0 + 4z_0 - 21}{6}\right| = \left|\frac{4\cdot(-5) - 2\cdot 1 + 4\cdot 1 - 21}{6}\right| = \frac{39}{6} = \frac{13}{2} = 6.5$$

Ҳамин тавр масофаи байни ҳамвириҳои параллели дода шуда ба

$d = 6.5$ воҳиди масофа баробар аст.

15.Муодилаи ҳамвориҳое, ки ба ҳамвории додашудаи

$2x - 2y - z - 3 = 0$ параллел буда аз он дар масофаи $d = 5$ мегузарад тартиб диҳед.

Ҳал. Аввал муодилаи ҳамвории дода шударо ба намуди нормали меорем:

$2x - 2y - z - 3 = 0$, зарбкунандаи нормироникунандаро ҳисоб мекунем:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Муодилаи нормалии ҳамвори:

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$$

Барои он ки ҳамвориҳои мазкур ба ҳамвории дода шуда параллел мебошанд, бояд барои нуқтаи дилхоҳи - ин ҳамвориҳо $M\,(X\,,\,Y\,,\,Z\,)$ бояд шарти

$d = \pm 5$ қаноат кунонад. Ҳамин тавр нуқтаи дилхоҳи ин гуна ҳамвориҳо баробарии зеринро қаноат мекунонанд:

$$\frac{2x - 2y - z - 3}{3} = \pm 5$$

аз ин ҷо

1) $\frac{2x-2y-z-3}{3} = 5 \Rightarrow\ 2x - 2y - z - 3\ = 15\ \ \Rightarrow 2x - 2y - z - 18 = 0$

ва

2) $\frac{2x-2y-z-3}{3} = -5 \Rightarrow \quad 2x-2y-z-3 = -15 \Rightarrow \; 2x-2y-z+12 = 0$

Ҳамвориҳои мазкур :$2x-2y-z-18 = 0$ ва $2x-2y-z+12 = 0$

Масъалаҳо барои кори мустақил

1. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи $M(1;-2;4)$ гузашта, вектори нормалии $\vec{N} = \{3,2,1\}$–ро дорад.

Ҷавоб. $3\,x+2y+z-3 = 0.$

2. Нуқтаҳои $M_1(1;0;4)$ ва $M_2(2;4;6)$ дода шудаанд. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи M_1 гузашта ба вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ перпендикуляр аст.

Ҷавоб.$x+4y+2z-9 = 0.$

3. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз ибтидои координата гузашта ба вектори $\vec{N} = \{4,\ 2,-3\}$ перпендикуляр аст.

Ҷавоб.$4x+2y-3z = 0.$

4. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи $M\,(1\,,2\,,-2)$ ба ҳамвории $3x\ -5y\ +2z-6 = 0$ параллел шуда мегузарад.

Ҷавоб. $3x-5y+2z+11 = 0.$

5. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи $M(2;1;-3)$ ба ҳамвории $\boldsymbol{yoz}$ параллел шуда мегузарад.

Ҷавоб. $x-2 = 0.$

6. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он :

   a)аз нуқтаи$N(3\,,2\,,2\,)$ ба ҳамвории $\boldsymbol{xoz}$ параллел шуда мегузарад;

   б)аз нуқтаи $M(2\,,1\,,-6\,)$ ба ҳамвории $\boldsymbol{xoy}$параллел шудамегузарад;

   в)аз нуқтаи P(4 , 3 , -1) ба ҳамвории $\boldsymbol{yoz}$ параллел шуда мегузарад.

Ҷавоб.а)$y-2=0$; б) $z+5=0$; в) $x-4=0$.

7. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он :

а) аз тири $\boldsymbol{ox}$ ва нуқтаи Р(3,1,4) мегузарад;

б) аз тири $\boldsymbol{oy}$ ва нуқтаи $Q(-3,-1,2)$мегузарад.

Ҷавоб.а) $4y-z=0$; б) $2x+3z=0$

8. Муодилаи ҳамворй$2x+3y-4z-12=0$ дода шуда аст. Барои он муодилаи " дар порчаҳо" – ро нависед.

Ҷавоб.$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-3}=1$

9. Порчаҳое, ки ҳамвории $3x-4y-12z-24=0$ дар тирҳои координати бурида ҷудо мекунад , ёфта шаванд.

Ҷавоб. $a=8; b=-6; c=-2$.

10. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед , ки он аз нуқтаҳои $M_1(-2;3;2)$ ва $M_2(-6;1;4)$ гузашта, дар тирҳои абсисса ва апликата порчаҳои ғайри нулии дарозиашон баробарро бурида ҷудо мекунад.

Ҷавоб $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-3}=1$.

11.Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи $M(2;3;4)$ гузашта дар тирҳои координата порчаҳои баробарро бурида ҷудо мекунад.

Ҷавоб.$x+y+z-9=0$

12.Муодилаи ҷои геометрии нуқтаҳоеро тартиб диҳед, ки онҳо аз нуқтаҳои $A(4,-2,4)$ ва $B(0,2,0)$ дар як хел дурй воқеанд.

Ҷавоб. $x-y+z=4$.

13. Кадоме аз муодилаҳои ҳамворӣ ба намуди нормалӣ навишта шудаанд?

$$\text{а)} -\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0, \ \text{б)} \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 = 0,$$

$$\text{в)} \ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z - 3 = 0; \ \text{г)} \ x + 2 = 0; \text{д)} \ y - 1 = 0.$$

Ҷавоб. Ҳамвориҳои а), в), д) ба намуди нормалӣ навишта шудаанд.

14. Муодилаҳои зерин ба намуди нормалӣ навишта шавад:

$$\text{а)} \ 2x - 2y + z - 18 = 0;$$

$$\text{б)} \ 3x - 6y + 2z + 21 = 0;$$

$$\text{в)} - 4x - 4y + 2x + 1 = 0;$$

$$\text{г)} \ -x + 2 = 0.$$

Ҷавоб.

$$\text{а)} \ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0;$$

$$\text{б)} -\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 3 = 0;$$

$$\text{в)} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{6} = 0;$$

$$\text{г)} \ x - 2 = 0.$$

15. Масофаи байни нуқтаи дода шуда ва ҳамвориро дар мавридҳои зерин ҳисоб кунед:

$$\text{а)} \ P_1(-2; \ -4; 3), \ \ x - 2y + 2z + 3 = 0;$$

$$\text{б)} \ P_2(3; 7; -8), \ \ 4x - 3y - 6 = 0;$$

$$\text{в)} \ P_3(1; 2; -1), \ \ 5x - 3y + z + 4 = 0.$$

а) $d = 5$,   б) $d = 3$,   в) $d = 0$.

<u>Ҷавоб.</u> а) $d = 5$, б) $d = 3$, в) $d = 0$, яъне нуқтаи P_3 дар ҳамвори мехобад.

16.Масофаи байни ҳамвориҳои параллелро дар мавридҳои зерин ҳисоб кунед:

а) $2x - 2y + z - 6 = 0$, $3x - 2y + z - 9 = 0$;

б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$;

в) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$, $4x - 12y - 6z - 1 = 0$.

Нишондод: дар ҳамвории якўм ягон нуқтаи дилхоҳ масъалан $M(0; -3; 0)$ – ро гирифта масофаи онро то ҳамвории дуюм ёфтан кифоя аст.

<u>Ҷавоб.</u>а) $d = 1$; б) $d = 3{,}5$ в) $d = \frac{5}{6}$.

17.Муодилаи ҳамвориҳои ба ҳамвории $2x - y - 2z - 3 = 0$ параллел ва аз он дар масофаи $d = 2$ воқеъ бударо тартиб диҳед.

<u>Ҷавоб.</u> 1)$2x - y - 2z - 9 = 0$;

2)$2x - y - 2z + 3 = 0$.

18. Дар тири $\boldsymbol{oy}$ нуқтаеро ёбед, ки он аз ҳамвории

$2x - 2y + z + 3 = 0$ дар масофаи $d = 4$ воқеъ аст.

<u>Ҷавоб.</u>$M_1(0; -4{,}5; 0)$

$M_2(0; 7{,}5; 0)$.

19.Дар тири $\boldsymbol{oz}$ нуқтаҳоеро ёбед, ки он аз ҳамвории

$2x + 3y - 6z + 4 = 0$ дар масофаи $d = 2$ воқеъ аст.

<u>Ҷавоб.</u> $M_1\left(0; 0; \frac{5}{6}\right)$, $M_2(0; 0; 3)$

20.Кунчи байни ҳамвориҳои зеринро ҳисоб кунед:

а) $x-y\sqrt{2}+z=1$ *ва* $x+y\sqrt{2}-z+2=0;$

б) $x+2y-z=0$ ва $2x+y+4z+3=0;$

в) $2x-y+2z+15=0$ ва $6x+2y-3x-1=0$

Чавоб: *а)* $\frac{\pi}{3}$ *б)* $\frac{\pi}{2}$ *в)* $arcos\frac{4}{21}$.

21. Муайян карда шавад, ки кадоме аз чуфти муодилаҳои додашуда ҳамвориҳои байни худ параллел ёки байни худ перпендикулярро тасвир мекунанд:

а)$3x-y+3z-9=0$

$2x-\frac{2}{3}y+2z-3=0$

б)$3x-6y+6z-3=0$

$x+3y+2z+6=0;$

в)$\frac{6}{5}x-3y+2z+1=0,$

$2x-5y+\frac{10}{3}z=0$

г) $5x+y-3z-2=0$

$2x-19y-3z+1=0$

22. Муодилаи ҳамвориеро ёбед, ки он:

а) аз нуқтаи *M(1; -2; 4)* ба векторҳои $\overrightarrow{N_1}\{3.\ 2.-1\}$, ва $\overrightarrow{N_2}\{2.\ 2.\ 2\}$ параллел шуда мегузарад;

б) аз нуқтаи *P(1; -4; 2)* ба векторҳои $\vec{a}=-\overrightarrow{2\imath}+\overrightarrow{3\jmath}+\vec{k}$ ва

$\vec{b}=\overrightarrow{3\imath}+\overrightarrow{2\jmath}+\vec{k}$ параллел шуда мегузарад.

Чавоб: *а)*$3x-4y+z-15=0$

б) $x+5y-13z+45=0$

23. Муодилаи ҳамвориеро ёбед, ки он аз нуқтаҳои $M_1(1;\ 1;\ 1)$ ва

M_2(-1; 1; -1) ба вектори $\vec{N}\{1; 3; \ -3\}$ параллел шуда мегузарад.

Чавоб:$3x-4y-3z+4=0$

24. Муодилаи ҳамвориеро ёбед, ки он аз нуқтаҳои $M_1(2; -5; 1)$ ва

$M_2(2; 1; 3)$ ба ҳамвории $x - 3y - 4z = 0$ перпендекуляр шуда мегузарад.

Чавоб:$9x-y+3z-26=0$

25. Масофаи байни нуқтаи $M_0(1; 4; -2)$ ва ҳамвории аз нуқтаҳои $M_1(0; -1; 1)$, $M_2(3; 5; 1)$, $M_3(1, -3, -1)$ гузарандаро ҳисоб кунед.

Чавоб:d=3

26.Нуқтаҳои $M_1(3; 0; 0)$, $M_2(0; 3; 0)$, $M_3(3; 3; 3)$ дода шудаанд. Баландии аз ибтидои координата ба рӯяи $M_1M_2M_3$ фароварда шудаи пирамидаи

$OM_1M_2M_3$- ро ёбед.

Чавоб: $d=\sqrt{3}$

27.Нуқтаҳои A(1, 0, 0) , B(0, -2, 0) , C(0, 0, 3) дода шудаанд. Баландии аз ибтидои координата ба рӯяи ABC фаровардашудаи пирамидаи OABC –ро ёбед.

Чавоб: $d=\frac{6}{7}$

28.Нуқтаҳои буриши ҳамвориҳои зеринро ёбед:

$$\text{а)}\ \begin{array}{l} x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{array} \qquad \text{б)}\ \begin{array}{l} x + 2y + 3z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + 3y + 4z - 6 = 0 \end{array}$$

Чавоб: а) (5; 6; 10)

b) (1; -1; 2)

Маъруза 22-25

4. Кунчи байни хатҳои рости зеринро ҳисоб кунед:

$$\frac{x+4}{10}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{11} \quad \text{ва} \quad \frac{x}{3}=\frac{y+3}{12}=\frac{z}{4}$$

Ҳал: Мувофиқи формулаи (2.8)

$$\cos\alpha=\frac{10\cdot 3+2\cdot 12+11\cdot 4}{\sqrt{10^2+2^2+11^2}\cdot\sqrt{3^2+12^2+4^2}}=\frac{98}{195}\ , \qquad \alpha\approx 59°48$$

5. Параллел будани хатҳои рости зеринро исбот кунед:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}; \qquad \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-6z-8=0 \end{cases}$$

Ҳал: Аввал муодилаи умумии хати рости дуйумро ба намуди каноники менависем (ба ҳалли масъалаи 3 нигаред):

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{1};$$

Бо осони дида мешавад, ки векторҳои самтдиҳандаи хатҳо бо ҳам параллеланд. Бинобар ин хатҳои рости додашуда байни худ параллеланд.

6. Муодилаи хати ростро нависед, ки он аз нуқтаи А(2; -1; 3) гузашта ба хати рости

$$\begin{cases} x+2y+3z-6=0 \\ 2x-3y-z-7=0 \end{cases}$$

параллел бошад .

Ҳал: Муодилаи каноникии хати росте , ки аз нуқтаи А(2; -1; 3) мегузарад ба намуди зерин навишта мешавад:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-3}{p}; \qquad (K)$$

Бинобарон, ки ин хати рост ба хати рости дода шуда параллел мегузарад, пас векторҳои самтдиҳандаи онҳо ҳам ба ҳамдигар параллел мешаванд Ба сифати вектори самтдиҳандаи хати рости дода шуда $\vec{\boldsymbol{\vartheta}} = \{m, n, p\}$

зарби вектории векторҳои нормали ҳамвориҳои дода шударо , ки хати рости дода шуда дар онҳо мехобад , мегирем:

$\overrightarrow{N_1} = \{1, 2, 3\}$ ва $\overrightarrow{N_2} = \{2, -3,\ 1\}$

$$\vec{\boldsymbol{\vartheta}} = [\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} - 7\vec{k}$$

Инак ,$m=7$, $n=7$, $p=-7$.

Ин қиматҳоро ба муодилаи (K) гузошта, муодилаи хати рости талаб карда шударо ҳосил мекунем:

$$\frac{\mathrm{x}-2}{7} = \frac{\mathrm{y}+1}{7} = \frac{z-3}{-7};$$

7. Муодилаи хатҳои ростро, ки дар натичаи бурриши ҳамвории

$$5x - 7y + 2z - 3 = 0$$

бо ҳамвориҳои координати ҳосил мешавад, тартиб диҳед.

Ҳал: Равшан аст, ки муодилаи умумии хати рост дар фазо, ки дар натичаи буриши ду ҳамвори ҳосил мешавад, аз системаи муодилаи ҳар яки ҳамвориҳо иборат мебошад. Бинобар он муодилаи хатҳои рост аз системаи муодилаи ҳамвории додашуда ва муодилаи ҳамвориҳои координати иборат мебошад .

1) Бо ҳамвории координатии OXY:

муодилаи хати рост:

$$\left.\begin{matrix} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ Z = 0 \end{matrix}\right\} \text{ ёки } \left.\begin{matrix} 5x - 7y - 3 = 0 \\ Z = 0 \end{matrix}\right\}$$

2) Бо ҳам координатаҳои OXZ:

Муодилаи умумии хати рост:

$$\left.\begin{matrix}5x-7y+2z-3=0\\ y=0\end{matrix}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{matrix}5x+2z-3=0\\ y=0\end{matrix}\right\}$$

3) Бо ҳамвори координатаҳои OYZ:

$$\left.\begin{matrix}5x-7y+2z-3=0\\ x=0\end{matrix}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{matrix}7y-2z+3=0\\ x=0\end{matrix}\right\}.$$

8.Муайян намоед, ки дар кадом қиматҳои D хати рости

$$\left.\begin{matrix}3x+2y-z+D=0\\ 2x-3y+2z-8=0\end{matrix}\right\}$$

тирҳои координатии; 1) OX, 2) OY ва 3) OZ ро мебурад.

Ҳал 1) Тири OX; Агар хати рост тири OX-ро бурида гузарад, нуқтаи буриш M_x координатаҳои $(x_0,\ 0,\ 0)$ бояд дошта бошад ин координатаҳоро ба муодилаи хати рост гузошта қимати D -ро муайян мекунем ;

$$\left.\begin{matrix}3x_0+D=0\\ 2x_0-8=0\end{matrix}\right\} \Longrightarrow x_0=4 \text{ ва } D=\ -12$$

Инак, ҳангоми $D\ =-12$ будан хати рост

$$\left.\begin{matrix}3x+2y-z-12=0\\ 2x-3y+2z-8=0\end{matrix}\right\}$$

тири OX -ро дар нуқтаи $\mathrm{M_x}(4,\ \ 0,\ \ 0)$ мебурад.

2) Тири OY: Ба монанди пункти 1) нуқтаи буриш $\mathrm{M_y}(0,\ \mathrm{y_0}, 0)$ бояд бошад.

Ин координатаҳоро ба муодилаи умумии хати рост мегузорем :

$$\left.\begin{matrix}2y_0+D=0\\ 3y_0-8=0\end{matrix}\right\} \Longrightarrow y_0=\frac{8}{3} \text{ ва } D=-\frac{16}{3}$$

Инак хати рости

$$\left.\begin{matrix} 3x + 2y - z - \dfrac{16}{3} = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 8 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{matrix} 9x + 6y - 3z - 16 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 8 = 0 \end{matrix}\right\}$$

тири OY-ро дар нуқтаи $M_y(0, \ \frac{8}{3}, 0)$ мебуррад.

3) Тири ***OZ*****:** Нуқтаи буриш бояд $M_z(0, \ 0, \ z_0)$ бошад, инро ба муодила мегузорем:

$$\left.\begin{matrix} -z_0 + D = 0 \\ 2z_0 - 8 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow z_0 = 4 \ \text{ва} \quad D = 4$$

Инак, хати рости $\left.\begin{matrix} 3x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 8 = 0 \end{matrix}\right\}$ тири OZ-ро дар нуқтаи $M_z(0, \ 0, \ 4)$ мебурад.

9. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед , ки он аз хати рости буриши ҳамвориҳои $3x - 2y + z - 3 = 0$ ва $x - 2z = 0$ иборат буда мегузарад ва ба ҳамвории $3x - 2y + z + 5 = 0$ - перпендикуляр мебошад.

Ҳал: Аввал муодилаи дастаи ҳамвориҳоро тартиб медиҳем ,ки онҳо аз хати рости буриши ҳамвориҳои додашуда мегузаранд;

$$(3x - 2y + z - 3) + \lambda(x - 2z) = 0 \qquad \text{ёки}$$

$$(3 + \lambda)x - 2y + (1 - 2\lambda)z - 3 = 0 \qquad (D)$$

Акнун қимати λ-ро ҳамин тавр интихоб мекунем, ки ҳамвории ин даста ба ҳамвории додашуда $3x - 2y + z + 5 = 0$ перпендикуляр бошад. Шарти перпендикулярии ду ҳамвориҳо мувофиқи формулаи (1.11) чунин аст:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Қиматҳои коэффициентҳои муодилаи (D) ва муодилаи додашударо ба ин формула мегузорем:

$$(3 + \lambda) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 1 - 2\lambda = 0$$

$$3 + \lambda + 4 + 1 - 2\lambda = 0, \Rightarrow \ \lambda = 8.$$

ин қимати λ –ро ба муодилаи додашуда гузошта муодилаи ҳамвории талаб кардашударо ҳосил мекунем:

$\lambda = 8 \Longrightarrow (D) \Longrightarrow (3 + 8)x - 2y + (1 - 2 \cdot 8)z - 3 = 0$,

$11x - 2y - 15z - 3 = 0.$

Ин муодидаи ҳамвории матлуб мебошад.

Масъалаи10.Муодилаи ҳаракати нуқтаи материали $M(x,\ y,\ z)$ дода шудааст;

$x = 5 - 2t,\ \ y = -3 + 2t, \quad z = 5 - t$.

Суръати ҳаракати ин нуқта ва масофае, ки ин нуқта дар интервали вақти аз $t_1 = 0$ то $t_2 = 7$ тай мекунад, ёбед.

Ҳал. Мувофиқи формулаи суръати ҳаракати ростхаттаи нуқтаи материали, ки муодилаи ҳаракати он дода шудааст аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$v^2 = l^2 + m^2 + n^2$, бинобар он $v = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} \ =$

$= \sqrt{4 + 4 + 1}$ =3 воҳиди суръат.

Акнун масофаи дар интервали вақти [0, 7] тай кардаро ҳисоб мекунем

Ҳангоми $t = 0$ будан координатаҳои нуқтаро меёбем;

$x_0 = 5 - 2 \cdot 0 = 5 \ , y_0 = -3 + 2 \cdot 0 = -3, \ \ z_0 = 5,$ яъне нуқтаи

$M_1(5\,, -3\,,\ 5).$ Ҳангоми $t = 7$ будан;

$$x_1 = 5 - 2 \cdot 7 = -9,\ \ y_1 = -3 + 2 \cdot 7 = 11\,, \qquad z_1 = 5 - 7 = -2$$

Яъне, нуқтаи $M_2(-9,\ 11, -2).$

Акнун масофаи тайкардаро ҳамчун дарозии порчаи M_1M_2 - ҳисоб мекунем:

$$|M_1, M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-9-5)^2 + (11-(-3))^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{196 + 196 + 49} =$$

$= \sqrt{441} = 21$ воҳиди масофа.

Чавоб: Нуқтаи материали дар интервали вакти [0,7] , 21 воҳиди масофаро тай мекунад,

11. Муодилаи проексияи хати рости

$\left.\begin{matrix} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$ -ро ба ҳамвории $2x - y + z - 1 = 0$ тартиб диҳед .

Ҳал **:** Аввал мо ҳамвориеро меёбем ки он аз хати рости додашуда гузашта ба ҳамвории додашуда перпендикуляр бошад , он гоҳ проексияи мазкур аз буриши ин ҳамвори ва ҳамвории додашуда иборат мешавад. Барои ин муодилаи дастаи ҳамвориҳои аз хати рости додашуда гузарандаро тартиб медиҳем :

$$5x - 4y - 2z - 5 + \lambda(x + 2z - 2) = 0$$

ёки

$$(5 + \lambda)x - 4y - (2 - 2\lambda)z - 5 - 2\lambda = 0 \qquad \text{(D)}$$

Қимати λ-ро чунин интихоб мекунем, ки ҳамвории ҳосил шуда ба ҳамвории додашудаи $2x - y + z - 1 = 0$ перпендикуляр бошад.Муофиқи шарти перпендикулярии ду ҳамвори баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$2 \cdot (5 + \lambda) + 4 - (2 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow 10 + 2\lambda + 4 - 2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$4\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Ин қимати $\lambda = -3$ -ро ба муодилаи дастаи ҳамвориҳо (D) мегузорем :

$(5-3)x-4y-(2+6)z-5+6=0$

$2x-4y+8z+1=0$

Ин муодилаи ҳаморие , ки аз хати рости додашуда мегузарад ва ба ҳамвории додашуда перпендикуляр мебошад. Ҳамин тавр, проексияи хати рости додашуда ба ҳамвории додашуда хати рости

$$\left.\begin{matrix} 2x-y+z-1=0 \\ 2x-4y+8z+1=0 \end{matrix}\right\} \text{ мебошад.}$$

12.Аз нуқтаи $\mathrm{M}_1(1,\ 2,-4)$ ва $\mathrm{M}_2(-1,\ 2,-4)$ хати рост гузаронида шудааст, нуқтаҳои буриши ин хати ростро бо ҳамвориҳои координати ёбед .

Ҳал. Муодилаи хати ростро, ки аз нуқтаҳои $\mathrm{M}_1(1,\ 2,-7)$ ва $\mathrm{M}_2(-5,\ 14,-3)$ мегузарад, муофиқи формулаи (2.4) тартиб медиҳем. Вектори самтдиҳандаи хати рост:

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{M_{1,}M_2} = \{-5-1, \qquad 14-2, \qquad -3-(-7)\} = \{-6,12,4\}$$

Муодилаи каноники хати рост,ки аз нуқтаи M_1 мегузарад ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{12}=\frac{z+7}{4}$$

Муодилаи параметриро тартиб медиҳем :

$$\left.\begin{matrix} x=-6t+1 \\ y=12t+2 \\ z=4t-7 \end{matrix}\right\} \qquad (A)$$

Акнун нуқтаҳои буриши ин хати ростро бо ҳамвориҳои координати ҳисоб мекунем :

а) Нуқтаи буриши хати ростро бо ҳамвории координатии ОХУ меёбем. Муодилаи ҳамвории ОХУ ; $z=0$ аст.

Ин муодиларо бо муодилаи хати рост (А) ҳамчоя ҳал мекунем, яъне дар муодилаи хати рост (А) $z = 0$ мегузорем :

$z = 0 \Rightarrow 4t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{4}$

Ин қимати t - ро дар муодилаҳои дигар гузошта , координатҳои x ва y- ро меёбем: $x = -6t + 1 \Rightarrow x = -6 \cdot \frac{7}{4} + 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{19}{2}$;

$$y = 12 \cdot \frac{7}{4} + 2 \Rightarrow y_1 = 23$$

инак, нуқтаи буриши хати рост бо ҳамвории координатии *ОХУ* нуқтаи М$\left(-\frac{19}{2}\ ,\ 23,\ 0\right)$ мебошад.

б) Нуқтаи буриш бо ҳамвории координатии *OXZ* –ро меёбем

Муодилаи ҳамвории *OXZ*: $y = 0$ ба монанди пункти а) :

$$y = 12t + 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 12t + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{1}{6} \Rightarrow\ x = -6t + 1 \Rightarrow x_2 = -6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 1 = 2$$

$z = 4t - 7 \Rightarrow z_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - 7 = -\frac{23}{3}$

нуқтаи буриш бо ҳамвории *OXZ;* $N(2,\ 0, -\frac{23}{3})$.

в). Нуқтаи буриш бо ҳамвории координатии *OYZ* .

Муодилаи ҳамвории координати $x = 0 \Rightarrow$

$x = -6t + 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow -6t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$;

$y = 12t + 2 \Rightarrow y_3 = 12 \cdot \frac{1}{6} + 2 = 4 \Rightarrow y_3 = 4,$

$$z = 4t - 7 \Rightarrow z_3 = 4 \cdot \frac{1}{6} - 7 = -\frac{19}{3}$$

нуқтаи бурриш бо ҳамвории координатии OYZ $P\left(0,\ 4, -\frac{19}{3}\right)$.

13. Исбот кунед, ки хати рости

$$\frac{x-13}{8}=\frac{\mathrm{y}-1}{2}=\frac{\mathrm{z}-4}{3}$$

дар ҳамвории $x+2y-4z+1=0$ мехобад.

Ҳал. Мувофиқи шарти дар ҳамвории додашуда хобидани хати рост, бояд баробариҳои зерин ичро шавад:

$$\left.\begin{matrix} Al+Bm+Cn=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{matrix}\right\} \qquad (*)$$

дар инчо:

$$\mathrm{A}=1,\ \mathrm{B}=2,\quad \mathrm{C}=-4,\quad \mathrm{L}=8,\ \mathrm{m}=2\,,\quad \mathrm{n}=3,$$
$$x_0=13,\ y_0=1,\ z_0=4$$

Ин қиматҳоро ба баробариҳои (*) мегузорем:

$$1\cdot 8+2\cdot 2-4\cdot 3=8+4-12=0$$

$$1\cdot 13+2\cdot 1-4\cdot 4+1=13+2-16+1=0$$

Инак, хати рости рости додашуда дар ҳамвории

$x+2y-4z+1=0$ мехобад .

14. Муодилаи хати ростро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи $\mathrm{M}_0(2,-3,-5)$ мегузарад ва ба ҳамвории

$6x-3y-5z+2=0$ перпендикуляр мебошад .

Ҳал : Муодилаи канроникии хати росте ки аз нуқтаи $M_0(2,-3,-5)$ мегузарад, ба намуди зерин мебошад:

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+3}{m}=\frac{z+5}{n}$$

l , m ва n координатаҳои вектори самтдиҳандаи хати рост мебошад. Бинобар он, ки хати рост ба ҳамвории додашуда перпендикуляр аст , пас вектори самтдиҳандаи он ба вектори нормали ҳамвории додашуда $\overline{\boldsymbol{n}}=\{6,-3,-5\}$ паралел мешавад. Инак, мувофиқи шарти параллелии векторҳо бояд шарти

$\frac{\mathrm{A}}{l}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{n}}$ ичро шавад, яъне $\frac{6}{l}=\frac{-3}{\mathrm{m}}=\frac{-5}{\mathrm{n}}$

ҳар яки ин баробариҳоро ба як баробар карда қиматҳои l, m, n -ҳоро меёбем:

$$\frac{6}{l}=1 \Rightarrow l=6\,; \quad \frac{-3}{m}=1 \;\Rightarrow\; m=-3\,; \text{ ва } \frac{-5}{n}=1 \Rightarrow n=-5$$

Ҳамин тавр, муодилаи хати рост ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x-2}{6}=\frac{\mathrm{y}+3}{-3}=\frac{\mathrm{z}+5}{-5}$$

15. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи $M_0(1,-2,\ 1)$ мегузарад ва ба хати рости

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{array}\right\}$$

перпендикуляр мебошад.

Ҳал. Муодилаи умумии ҳамворӣ, ки аз нуқтаи M_0 мегузарад, ба намуди зерин навишта мешавад;

$$A(x-1)+B(y+2)+C(z-1)=0 \qquad (*)$$

бинобар он ки ҳамворӣ ба хати рости рости додашуда перпендикуляр аст, бояд шарти перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ ичро шавад;

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

l, m, n координатаҳои вектори самтдиҳандаи хати рост. Вектори самтдиҳандаи хати ростро ҳисоб мекунем:

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\{l,\ m,\ n\}:\overline{\boldsymbol{a}}=[\overline{\boldsymbol{n_1}}\cdot\overline{\boldsymbol{n_2}}\ ]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=2i+\overline{k}+j+2\overline{k}-\overline{i}+j=$$

$$=i+2j+3\overline{k}:\quad \overline{\boldsymbol{a}}=\{1,\ 2,\ 3\}$$

Инак, шарти перпендикуляри:

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{3}\Longrightarrow\qquad A=1,\ B=2,\ C=3.$$

Ин қиматҳоро ба муодилаи ҳамвори (*) мегузорем:

$$1(x-1)+2(y+2)+3(z-1)=0\quad\Rightarrow\quad x-1+2y+4+3z-3=0$$
$$\Rightarrow x+2y+3z=0.$$

Ҳамин тавр муодилаи ҳамвории талаб карда шуда;

$$x+2y+3z=0.$$

16.Дар кадом қиматхои $\boldsymbol{A}$ ва $\boldsymbol{D}$ хати рости

$$x=3+4t,\qquad y=1-4t,\qquad z=-3+t$$

дар ҳамвории $Ax+2y-4z+D=0$ мехобад.

<u>Хал:</u> Шарти дар ҳамвори хобидани хати рост:

$$\left.\begin{aligned}Al+Bm+Cn=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

Нуқтаи хати рост $M_0(3,1,-3)$, ва $l=4, m=-4, n=1$. Ин қиматҳоро ба баробариҳои (*) мегузорем:

$$\left.\begin{aligned} 4A + 2\cdot(-4) - 4 = 0 \\ 3A + 2 - 4\cdot(-3) + D = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4A - 12 = 0 \\ 3A + D + 14 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$A = 3, \qquad D = -23.$$

Инак, хангоми $A = 3$ ва $D = -23$ будан хати рости додашуда дар ҳамвории

$3x + 2y - 4z + 23 = 0$ мехобад.

17.Чунин нуқтаи $Q(x, y, z)$-ро ёбед , ки он ба нуқтаи $P(4{,}1{,}6)$ нисбат ба хати рости

$$\left.\begin{aligned} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ симметри бошад.}$$

Ҳал: Равшан аст ки нуқтаи ба нуқтаи P симметри буда дар пендикуляри аз ин нуқта ба хати рости додашуда гузаронида шуда мехобад.Бинобар он барои ёфтани ҳалли масъала, мо аввал проексияи нуқтаи $P(4{,}1{,}6)$ -ро ба хати рости додашуда меёбем ва баъд нуқтаи ба он нисбат ба хати рост симметри бударо меёбем.Барои ёфтани проексияи нуқтаи P ба хати рост, мо муодилаи ҳамвориро тартиб медиҳем, ки он аз нуқтаи дода шуда ба хати рост перпендикуляр бошад. Намуди умумии ин гуна ҳамвори чунин аст:

$$A(x-4) + B(y-1) + C(z-6) = 0$$

Координатаҳои вектори нормали ҳамвори $\bar{\boldsymbol{n}} = \{A, B, C\}$ -ро аз шарти перпендикулярии хати рост ва ҳамвори муайян мекунем. Барои ин аз муодилаи умумии хати рост, координатаҳои вектори самтдиҳандаи он $\bar{\boldsymbol{a}} = \{l, m, n\}$-ро меёбем:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \{l, m, n\} = [\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2i + \bar{k} - 8j + 2\bar{k} + 4i + 2j$$
$$= 6i - 6j + 3\bar{k}$$

Инак , $\bar{\boldsymbol{a}} = \{6, -6{,}3\}$. Акнун ягон нуқтаи хати рости додашударо аз муодилаи умумии он меёбем: $z = 0$ гузошта координатаҳои x_0 ва y_0 – ро меёбем: $\Rightarrow$ $\begin{cases} x - y + 12 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = -5;\ y_0 = 7$ ва муодилаи каноникии хати рости додашуда ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x+5}{6} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z}{3}$$ ёки ба намуди параметри

$x = 6t - 5, \quad y = -6t + 7, \quad z = 3t.$

Мувофиқи, шарти перпендикулярии хати рост ва ҳамвори бояд шарти $\bar{\boldsymbol{a}} \parallel \bar{\boldsymbol{n}}$ ичро шавад ва аз шарти параллелии векторҳо баробариҳои зерин ичро мешаванд:

$$\frac{A}{6} = \frac{B}{-6} = \frac{C}{3}$$

Аз ин чо $A = 6,\ B = -6,\ C = 3$ ва муодилаи ҳамвории ба хати рости додашуда перпендикуляр чунин мешавад:

$$6(x-4) - 6(y-1) + 3(z-6) = 0 \ \Rightarrow \quad 2x - 2y + z - 12 = 0$$

Акнун нуқтаи буриши хати рости додашуда ва ин ҳамвориро меёбем:

$$\left.\begin{array}{c} 2x - 2y + z - 12 = 0 \\ x = 6t - 5, \qquad y = -6t + 7,\ \ z = 3t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$2(6t-5) - 2(-6t+7) + 3t - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$12t - 10 + 12t - 14 + 3t - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$27t - 36 = 0 \ \Rightarrow \quad t = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

$$x_0 = 6t - 5 = 6 \cdot \frac{4}{3} - 5 = 3, \qquad y_0 = -6t + 7 = -6 \cdot \frac{4}{3} + 7 = -1,$$

$$z_0 = 3t = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

Ҳамин тавр нуқтаи буриши хати рости дода шуда ва ҳамвории ба он перпендикуляр нуқтаи $P_0(3,-1,4)$ мебошад, яъне ин нуқта проексияи нуқтаи дода шудаи $P(4{,}1{,}6)$ ба хати рости дода шуда мебошад. Аз тарафи дигар ин нуқтаи P_0 миёначои порчаи PQ мебошад, бинобар он координатаҳои нуқтаҳои $P(4{,}1{,}6)$, $Q(x_0, y_0, z_0)$ ва $P_0(3,-1{,}4)$ баробариҳои зеринро бояд қаноат кунонанд:

$$X_{p_0} = \frac{X_P + X_Q}{2}, \ Y_{p_0} = \frac{Y_P + Y_Q}{2}, \ Z_{p_0} = \frac{Z_P + Z_Q}{2} \quad \Rightarrow$$

Ҳамин тавр:

$$3 = \frac{4 + X_Q}{2} \Rightarrow \ 6 = 4 + X_Q \Rightarrow X_Q = 2$$

$$-1 = \frac{1 + Y_Q}{2} \Rightarrow \ Y_Q = -3, \qquad \text{ва } 4 = \frac{6 + Z_Q}{2} \Rightarrow Z_Q = 2.$$

Нуқтаи $Q(2,-3{,}2)$ ба нуқтаи $P(4{,}1{,}6)$ нисбат ба хати рости дода шуда симметри мебошад.

18. Нуқтаи Q ро ёбед, ки он ба нуқтаи $P(1{,}3,-4)$ нисбат ба

ҳамвории $3x + y - 2z = 0$ симметри бошад.

Ҳал. Мувофиқи таърифи нуқтаҳои симметри нуқтаи Q дар перпендикуляре, ки аз нуқтаи P ба ҳамвории дода шуда гузаронида шудааст, мехобад.

Бинобар он аввал муодилаи хати ростро, ки аз нуқтаи $P(1{,}3,-4)$ ба ҳамвории дода шуда перпендикуляр мегузарад тартиб медиҳем.

Муодилаи умумии ин гуна хати рост ба намуди зерин мешавад:

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-3}{m} = \frac{z+4}{n}$$

Вектори самтдиҳандаи ин хати рост $\bar{\boldsymbol{a}} = \{ l, m, n\}$ ба вектори нормалии ҳамвории додашуда $\bar{\boldsymbol{n}} = \{ 3,1,-2\}$ параллел мебошад (чунки хати рост ба ҳамвори перпендикуляр аст).

Мувофиқи шарти параллелии векторҳо $\frac{l}{3} = \frac{m}{1} = \frac{n}{-2} \Rightarrow l = 3, m = 1, n = -2$

Муодилаи каноники хати рост: $\frac{x-1}{l} = \frac{y-3}{m} = \frac{z+4}{n}$.

Муодилаи параметри: $x = 3t + 1, y = t + 3, z = -2t - 4$.

Акнун нуқтаи буриши ин хати рост ва ҳамвории додашударо меёбем, ки он проексияи нуқтаи $P(1,3,-4)$ ба ҳамвори мебошад. Барои ин муодилаҳои онҳоро ҳамчоя ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x = 3t + 1, \quad y = t + 3, \quad z = -2t - 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3(3t + 1) + t + 3 - 2(-2t - 4) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 9t + 3 + t + 3 + 4t + 8 = 0 \Longrightarrow 14t + 14 = 0 \Longrightarrow t = -1.$$

Инак координатаҳои проексияи нуқтаи P ба ҳамвории додашуда

$x_0 = 3 \cdot (-1) + 1 = -2, y_0 = -1 + 3 = 2, z_0 = -2 \cdot (-1) - 4 = -2$

$P_0 = (-2,2,-2)$. Нуқтаи $P_0 = (-2,2,-2)$ миёначои порчаи PQ мебошад, бинобар он мувофиқи формулаи ёфтани координатаҳои миёначои порча:

$$x_0 = \frac{x_p + x_q}{2}, y_0 = \frac{y_p + y_q}{2}, z_0 = \frac{z_p + z_q}{2}.$$

Аз ин формулаҳо координатаҳои нуқтаи $Q(x_q, y_q, z_q)$-ро меёбем:

$$-2 = \frac{1 + x_q}{2} \Longrightarrow x_q + 1 = -4, \qquad x_q = -5.$$

$$2 = \frac{3 + y_q}{2} \Longrightarrow y_q = 1, -2 = \frac{z_q - 4}{2} \Longrightarrow z_q = 0.$$

Ҳамин тавр нуқтаи ба нуқтаи дода шудаи $P(1,3,-4)$
нисбат ба ҳамворӣ симметрӣ Q $(-5,1,0)$ мебошад.

19. Исбот кунед, ки ду хатҳои рости

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \\ x = 3t + 7;\ \ y = 2t + 2;\ z = -2t + 1 \end{cases}$$

дар як ҳамвори мехобанд ва муодилаи ин ҳамвориро тартиб диҳед.

Ҳал. Хатҳои рости дода шуда мувофиқан аз нуқтаҳои $M_1(1,-2,5)$ ва $M_2(7,2,1)$мегузарад. Вектори $\overline{M_1M_2}$ – ро тартиб медиҳем.

$$\overline{M_1M_2} = \{7 - 1, 2—(-2), 1 - 5\} = \{6,4,-4\}$$

Векторҳои самтдиҳандаи ин хатҳои рост:

$$\overline{\boldsymbol{a_1}} = \{\, 2, -3, 4\} \text{ ва } \overline{\boldsymbol{a_2}} = \{3,2,-2\}$$

Агар ду хатҳои рост дар як ҳамвори хобида бошанд, бояд ин се векторҳои $\overline{M_1M_2}$,$\overline{\boldsymbol{a_1}}$ ва $\overline{\boldsymbol{a_2}}$ ҳам дар ҳамин ҳамворӣ хобад (ва баръакс) яъне ин се векторҳо компланар бошанд. Ҳамин тавр шарти дар як ҳамвори хобидани ду хати рост мувофиқи шарти компланарии се векторҳои $\overline{M_1M_2}$,

$\overline{\boldsymbol{a_1}}$ ва $\overline{\boldsymbol{a_2}}$ баробарии зерин мебошад:

$$\overline{M_1M_2} \cdot \overline{\boldsymbol{a_1}} \cdot \overline{\boldsymbol{a_2}} = 0 \quad \Longrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 36 - 16 + 48 - 36 - 48 + 16 = 0$$

Инак хатҳои рост дар як ҳамвори мехобанд. Акнун муодилаи ин ҳамвориро тартиб медиҳем. Бигзор $M(x, y, z)$ нуқтаи дилхоҳи ин ҳамвори бошад. Вектори $\overline{M_1\text{M}}$ -ро тартиб медиҳем:

$$\overline{M_1\text{M}} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} = \{x - 1, y + 2, z - 5\}$$

Барои он, ки нуқтаи $M(x, y, z)$ нуқтаи ҳамвории матлуб бошад, зарур ва кифоя аст, ки векторҳои $\overline{M_1\text{M}}$, $\overline{\boldsymbol{a_1}}$ **ва** $\overline{\boldsymbol{a_2}}$ компланар бошанд (дар як ҳамвори хобанд). Инак муодилаи ҳамвори ба намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x - 1) + 12(y + 2) + 4(z - 5) - 8(x - 1) + 4(y + 2) + 9(z - 5) = 0$$

$$-2x + 2 + 16y + 13z + 32 - 65 = 0$$

Муодилаи ҳамвории мазкур: $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

Масалаҳо барои кори мустақил.

1. Муодилаи хати ростро тартиб диҳед, ки он аз нуқтаи *A(1; -5; 3)* ба вектори $\vec{\boldsymbol{\vartheta}} = \{1, \sqrt{2}, -1\}$ параллел шуда мегузарад. Косинусҳои самтдиҳандаи ин хати ростро муайян кунед

Чавоб:

$$\frac{\text{x} - 1}{1} = \frac{\text{y} + 5}{\sqrt{2}} = \frac{z - 3}{-3}; \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}; \ \beta = \frac{\pi}{4}; \ \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

2. Косинусҳои самтдихандаи хатҳои рости зеринро ёбед.

а) $\frac{\text{x}-1}{4} = \frac{\text{y}-5}{3} = \frac{z+2}{12}$; б) $\frac{\text{x}}{12} = \frac{\text{y}-7}{9} = \frac{z+3}{2}$;

Чавоб: а) $\frac{4}{13}$; $\frac{3}{13}$; $\frac{12}{13}$. **б)** $\frac{12}{25}$; $\frac{9}{25}$; $\frac{25}{25}$.

3. Муодилаи каноникӣ ва параметрии хати ростро нависед, ки он аз нуқтаи $A(1;\ 0;\ 3)$ гузашта ба вектори $\vec{\boldsymbol{\vartheta}} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ параллел аст.

Чавоб: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$, $\quad x = \sqrt{2}t + 1;\ \ y = 1;\ \ z = -t + 3.$

4. Қуллаҳои секунчаи ΔABC, A(-5; 7; 1), B(2, 4. -1) , C(-1, 3, 5) дода шудааст. Муодилаи каноникии медианаҳои AA$_1$, BB$_1$, CC$_1$ –ро тартиб диҳед.

$$\textbf{Чавоб:}\ \frac{x+5}{11} = \frac{y-7}{-7} = \frac{z-1}{2}; \qquad \frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{4};$$

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{-10};$$

5. Секунчаи *A(3, 6. -7), B(-5, 3, 3), C(4, -7, -3)* дода шудааст. Муодилаи параметрии медианаи аз қуллаи С ба тарафи АВ фаровардашудаи онро тартиб диҳед.

Ҷавоб: $x=5t+4$, $y=-11t-7$, $z=-2$.

6. Муодилаҳои каноники ва параметрии хати рости аз нуқтаи А (-1; 2; 2) ба тири ОХ параллел шуда гузарандаро нависед.

Ҷавоб: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-2}{0}$; $\quad x=t - 1, y= - 2 , z =2.$

Нишондод. Вектори $\bar{\imath} = \{1\ ,0\ ,0\}$ дар тири *Ox* воқеъ буда мувофики шарт ба хати рост параллел аст. Бинобар ин, онро ба сифати вектори самтдиҳандаи ин хати рост гирифтан мумкин аст.

7. Муодилаи умумии хати рост

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

-ро а) дар проекцияхо, б) дар намуди каноники нависед.

Ҷавоб: а) $.\begin{cases} x = 9z + 27 \\ y = 5z + 15 \end{cases}$ б) $\frac{x-27}{9} = \frac{y-15}{5} = \frac{z}{1}$.

8. Муодилаи умумии хатҳои рости зеринро ба намуди параметри нависед:

а) $\begin{cases} 2x - 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Ҷавоб: а) $x = t + 1.\ y = -7t.\ \ z = -19t - 2$:

б) $x = -t + 1.\ y = 3t + 2.\ z = 5t - 1$.

9. Косинусҳои самтдиҳандаи хати рости зеринро ёбед:

$$\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Ҷавоб: $\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{6}{11}$.

10. Хати рост аз нуқтаи А(1: -2: 1) ба ҳамвории $2x - 3y + z - 1 = 0$ перпендикуляр шуда мегузарад. Муодилаи каноникии онро тартиб диҳед

Ҷавоб: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{1}$

11. Кунчи байни хатҳои рости зеринро ҳисоб кунед:

а/ $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$

б/ $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ ва $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$

в/ $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$

Ҷавоб: а) $\varphi = arccos\frac{4}{21}$ б) $\varphi = 60^0$ в) $\varphi = arccos\frac{11}{26}$.

12. Параллел будани хатҳои рости зеринро исбот кунед:

$\begin{cases} x = 2\mathrm{t} + 5 \\ y = -\mathrm{t} + 2 \\ z = \mathrm{t} - 7 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$

13. Перпендикуляр будани хатҳои рости зеринро исбот кунед:

а) $\begin{cases} x = 2\mathrm{t} + 1 \\ y = 3\mathrm{t} - z \\ z = -6\mathrm{t} + 1 \end{cases}$ ва $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 6z + 4 = 0 \end{cases}$

б) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ ва $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$

14. Муодилаи хати ростеро тартиб диҳед,ки ёбед, ки он аз нуқтаи додашуда гузашта ба хати рости додашуда параллел аст:

а) $M(2, -5, 3)$, $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$

Ҷавоб: $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9}$

б) $N(3, -4, 4)$,$\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$

Ҷавоб: $\frac{x-3}{-11}=\frac{y+4}{17}=\frac{z-4}{13}$

в) L (-2, 3, -4) , $\begin{cases}x-y=3\\y=3z+5\end{cases}$

Ҷавоб: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{1}$.

15. Муодилаи перпендикуляри аз нуқтаи *A(2; 3; 1)* ба хати рости

$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ фаровардашударо нависед.

Ҷавоб: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

Нишондод: Аз шарти перпендикулярии хатҳои рост $2m-n+3\rho=0$, ва аз шарти буриши ду хати рост ифодаи зерин ҳосил мекунем:

$\begin{vmatrix}3 & 3 & -1\\2 & -1 & 3\\m & n & \rho\end{vmatrix}=0$ ёки $8m-11n-9\rho=0$

Аз системаи муодилаҳои

$$\begin{cases}2m-n+3\rho=0\\8m-11n-9\rho=0\end{cases}$$

Коэффициентҳои m, n, ρ ёфта мешаванд.

16. Санҷида шавад, ки оё хатҳои рости

$\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$ ва $\begin{cases}x=3z-3\\y=-z+2\end{cases}$

якдигарро мебурранд?

Ҷавоб: ҳа, мебурранд.

17. Барои кадом қимати m хатҳои рости

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4} \quad \text{ва} \quad \frac{x-3}{m}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$$

якдигарро мебурранд?

Ҷавоб: m=3

18. Нишон диҳед, ки хатҳои рости.

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1} \text{ ва } \frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$$

якдигарро мебурранд ва нуқтаи буриши онҳоро ёбед.

Ҷавоб: M (-1, 3, 1) .

19. Санҷида шавад, ки оё хатҳои рости

$$\begin{cases}4x+z-1=0\\ x-2y+3=0\end{cases} \text{ва} \begin{cases}3x+y-z+4=0\\ \quad y+2z-8=0\end{cases}$$

Якдигарро мебурранд?

Ҷавоб: ҳа.

20. Кунҷи байни хати рости

$x=4\text{t}+1,\ y=12\text{t},\ z=-3\text{t}+1$ ва ҳамвории $6x$-$3y$+$2z$ =0 –ро ёбед.

Ҷавоб: $\sin\varphi=\frac{18}{91}$.

21. Кунҷи байни хати рости $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-1}{-3}$ ва ҳамвории $2+y+z-4=0$ -ро ҳисоб кунед.

Ҷавоб: $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{6}}$

22. Параллел будани хати рост ва ҳамвориро нишон диҳед:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+5}{4}\ ,\ 4x-3y-6z-5=0$$

23. Барои кадом қимати ρ хати рости

$$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{\rho}$$

ба ҳамвории $2x-3y+2z+1=0$ параллел мешавад?

Ҷавоб: $\rho=-\frac{3}{2}$.

24. Барои кадом қиматҳои m ва n хати рости

$\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{-3}$ ба ҳамвории $3\ x-2y+nz+1=0$ ба якдигар перпендикуляр мешаванд.

Ҷавоб: $m=-6, n=\frac{3}{2}$.

25. Ҳамвории $x+y-z=0$ ва хати рости аз нуқтахои A(0; 0; 4) ва B(2; 2; 0) гузарандаро созед. Нуқтаи буриш ва кунчи байни онҳоро ёбед.

Ҷавоб : $M\,(1,1,2)$; $\sin\varphi=\frac{4}{3\sqrt{2}}$

26. Нуқтаи буриши хати рост ва ҳамвориро ёбед:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$, $2x-3y-z-5=0$;

б) $\frac{x-9}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-4}{-2}$, $3x+2y-z-5=0$;

в) $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, $3x+5y-z-2=0$.

Ҷавоб: а) (1, -1, 0) ; б) (3, 2, 8) ; в) (0, 0, -2).

27. Санҷида шавад, ки оё хати рост дар ҳамвори мехобад?

а) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$, $2x+y-z=0$;

б) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$, $5x-8y-2z-1=0$.

28. Проекцияи нуқтаи P(3; 1; -1)-ро дар ҳамвории $3x+y+z-20=0$ ёбед.

Ҷавоб: Q (6, 2, 0) .

29. Проекцияи нуқтаи P (5; 2; -1) –ро дар ҳамвории $2x-y+3z+23=0$ ёбед.

Ҷавоб: Q (1, 4, -7) .

30. Муодилаи перпендикуляри аз нуқтаи P (3, -2, 4) ба ҳамвории $5x+3y-7z+1=0$ фаровардашударо тартиб диҳед.

Ҷавоб: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$.

31. Проекцияи нуқтаи A(1; 2; 8) –ро дар хати рости зерин ёбед:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

Ҷавоб: B(3; -1; 1) .

32. Проекцияи нуқтаи A (2; -1; 3) –ро дар хати рости зерин ёбед:

x=3t , y=$5t$-7 , z=$2t$+2 .

Ҷавоб: B (3; -2; 4)

33. Муодилаи перпендикуляри аз нуқтаи A (2; 1; 0) ба хати рости $x=3z-1$, $y=2z$ фаровардa шударо нависед.

Ҷавоб: $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z}{11}$.

34. Муодилаи перпендикуляри аз нуқтаи P(4, -3, 1) ба ҳамвории $x+2y-z-3=0$ фаровардашударо нависед.

Ҷавоб: $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$

35. Муодилаи перпендикуляри аз нуқтаи A (1; 2; 1) ба хати рости $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ фаровардa шударо нависед.

Ҷавоб: $\frac{x-1}{18}=\frac{y-2}{33}=\frac{z-1}{-14}$.

36. Муодилаи ҳамвориро тартиб диҳед, ки вай аз хати буриши ҳамвориҳои $4x$-$5y$+$3z$-1=0, $2x$+$5y$+$4z$+3=0 ва нуқтаи M(-2; -2; 1) мегузарад.

Ҷавоб: $36x$-$15y$+$37z$+5=0.

37. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз хати буриши ҳамвориҳои $2x$-$3y$+z-3=0 , x+$3y$+$2z$+1=0 ва нуқтаи N(1; -2; 3) гузарад.

Ҷавоб: $2x+15y+7z+7=0$.

38. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз хати буриши ҳамвориҳои

$x+2y+4z-3=0$ ва $2x-3y-z+1=0$ *гузашта:*

а) ба тири ox параллел бошад;

б) ба тири oz параллел бошад;

Ҷавоб: а) $7y+9z-1=0$

б) $9x-10y+1=0$.

39. Муодилаи ҳамвориеро тартиб диҳед, ки он аз хати буриши ҳамвориҳои

$2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ гузашта ба ҳамвории $2x-y-2z=0$ перпендикуляр бошад.

Ҷавоб: $5x+5z-8=0$.

Маърузаи 26-32

САТҲҲОИ ТАРТИБИ ДУЮМ

Ҳалли масъалаҳо.

1. Маркази сатҳро ёбед ва намуди онро муайян кунед.

$$4x^2+2y^2+12z^2-4xy+8yz+12zx+14x-10y+7=0$$

Хал. Коэффициентҳои муодила:

$$a_{11}=4,\quad a_{33}=12,\quad a_{12}=-2,\quad a_{23}=4, a_{24}=-5, a_{22}=2$$
$$a_{14}=7,\quad a_{34}=0,\quad a_{44}=7,\quad a_{31}=6,$$

Коэффициентҳои маркази сатҳ аз системаи муодилахои хаттии зерин муайян карда мешавад:

$$\begin{cases} 4x_0-2y_0+6z_0+7=0 \\ -2x_0+2y_0+4z_0-5=0 \\ 6x_0+4y_0+12z_0=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Шарти мавчуд будани маркази сатҳ

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{мебошад.}$$

Детерминантро ҳисоб мекунем:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 10 \\ 14 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 14 & 24 \end{vmatrix} = 2(48-140) = -184 \neq 0$$

Координатаҳои марказро ҳисоб мекунем, яъне ҳалли системаи муодилаҳои хаттиро меёбем:

$$\begin{cases} 4x_0 - 2y_0 + 6z_0 = -7 \\ -2x_0 + 2y_0 + 4z_0 = -5 \\ 6x_0 + 4y_0 + 12z_0 = 0 \end{cases}$$

Ҳалли системаро бо ёрии формулахои Крамер меёбем:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 4(42-30-28-30) = -4 \cdot 46 = -184$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & -5 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4(-60+42+45+42) = 4 \cdot 69 = 276$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -56+60-84+80 = 0$$

$$x_0=-\frac{\delta_1}{\delta}=\frac{-(-184)}{-184}=-1$$

Координатаҳои марказ $$y_0=-\frac{\delta_2}{\delta}=\frac{-276}{-184}=\frac{3}{2}$$

$$z_0=-\frac{\delta_3}{\delta}=\frac{0}{-184}=0$$

Маркази сатҳ нуқтаи $O(-1,\ \frac{3}{2},0)$. Акнун ибтидои координатаро ба маркази сатҳ мекўчонем , яъне ивазкунии параллел кўчониро чори мекунем:

$$\begin{cases} x=\bar{x}+x_0, \quad y=\bar{y}+y_0, \quad z=\bar{z}+z_0 \\ \quad x=\bar{x}-1, \quad y=\bar{y}+\frac{3}{2}, \quad z=\bar{z}. \end{cases}$$

Дар натича муодилаи сатҳ ба намуди зерин навишта мешавад:

$$4\bar{x}^2+2\bar{y}^2+12\bar{z}^2-4\bar{x}\bar{y}+8\bar{y}\bar{z}+12\bar{z}\bar{x}+2\bar{a}_{44}=0$$

Аъзои озоди муодилаи хосилшуда $\bar{a}_{44}$ - аз рўи яке аз формулахои зерин ҳисоб карда мешавад: $2\bar{a}_{44}=F(x_0,y_0,z_0)$, $(F(x_0,y_0,z_0))$-кисми чапи муодилаи сатҳи додашуда дар нуқтаи (x_0,y_0,z_0),) ёки

$$2\bar{a}_{44}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\delta}=\frac{\kappa_4}{\delta}$$

$$K_4=\begin{vmatrix}4&-2&6&7\\-2&2&4&-5\\6&4&12&0\\7&-5&0&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-2&6&7\\-2&2&4&-5\\6&4&12&0\\3&-3&-6&0\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}-2&2&4\\6&4&12\\3&-3&-6\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}4&-2&6\\6&4&12\\3&-3&-6\end{vmatrix}=$$

$$-7\cdot12\begin{vmatrix}-1&1&2\\3&2&6\\1&-1&-2\end{vmatrix}-5\cdot12\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&2&6\\1&-1&-2\end{vmatrix}=7\cdot12\begin{vmatrix}-1&1&2\\3&2&6\\-1&1&2\end{vmatrix}-60\left(-8-9-6-6+12-6\right)=$$

$$84\cdot0+60\cdot23=1380$$

$$\bar{a}_{44}=\frac{\kappa_4}{\delta}=-\frac{15}{2}$$

Ҳамин тавр муодилаи сатҳ ба намуди зерин навишта мешавад:

$$4\bar{x}^2+2\bar{y}^2+12\bar{z}^2-4\bar{x}\bar{y}+8\bar{x}\bar{y}+12\bar{z}-\frac{15}{2}=0$$

Масъалаи 2. Маркази сатҳро ёбед ва намуди онро муайян кунед.

$$x^2+9y^2+9z^2-12xy-6zx+12x-36z=0$$

Ҳал.

$$a_{11}=5,\quad a_{22}=9,\quad a_{33}=9,\quad a_{12}=-6,\quad a_{23}=0,\quad a_{31}=-3,$$
$$a_{14}=6,\quad a_{24}=0,\qquad a_{34}=0,\quad a_{44}=0$$

Системаҳои муодилахои хаттии (4.3) ба намуди зерин мешавад.

$$\begin{cases}5x_0-6y-3z_0+6=0\\-6x_0+9y_0-\quad=0\\-3x_0+\quad+9z_0=0\end{cases}$$

Детерминанти асосиро ҳисоб мекунем:

$$\delta=\begin{vmatrix}5&-6&-3\\-6&9&0\\-3&0&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-6&-3\\-6&9&0\\12&-18&0\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}-6&9\\12&-18\end{vmatrix}=-3\cdot(-6)\cdot9\begin{vmatrix}-1&1\\2&-2\end{vmatrix}=-18\cdot9(2-2)=0$$

$\delta=0$. Дар ин маврид системаи хатти ёки ҳал надорад ёки дорои ҳалли беҳад бисёр мешавад. Барои муайян намудан мо ранги матрицаи асосии системаро ҳисоб мекунем. Минорҳоро ҳисоб мекунем.

$$M_1 = 5 \qquad M_2^1 = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 36 = 9 \neq 0 \qquad M_3 = 0$$

Инак ранги система ба ду баробар. Яъне система ҳалли беҳад бисёр дорад ва он ба системаи ду муодилаҳо баробарқувва мешавад.

Муодилахои 2-ум ва 3-умро чамъ карда системаи зеринро ҳосил мекунем;

$$\begin{cases} 5x_0 - 6y_0 - 3z_0 = -6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = 0 \end{cases}$$

Ин муодилаи хати рост мебошад.

Инак маркази сатҳи додашуда хамаи нуқтаҳои ин хати рост мешавад ва сатҳ дорои хати рости марказҳо мебошад.

Муодилаи умумии хати ростро ба намуди каноники меорем. Вектори самтдиҳандаи хати ростро муайян мекунем:

$$\bar{a} = \{e, m, n\}$$

$$\bar{a} = [\bar{n_1} \cdot \overline{n_2}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6i - 5k - 3j + 6k - 3i + 5j = 3i + 2j + k$$

$$\bar{a} = \{3,2,1\}$$

Акнун якто нуқтаи хати ростро мегирем. Агар $x_0 = 0,\quad y_0 = 0,$ гузорем $z_0 = 2$ мешавад, яъне нуқтаи хати рост $M_0 = (0;0;2)$

Хамин тавр муодилаи хати марказҳо

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$$

Сатҳи додашуда қулла надорад ва он сатҳи цилиндри мебошад.

Масалаи 3.

Маркази сатҳро ёбед ва намуди онро муайян кунед.

$$3x^2+2y^2+4yz-2zx-4x-8z-8=0$$

Системаи муодилаҳои хатти барои координатаҳои маркази сатҳ ба намуди зерин мебошад:

$$\begin{cases} 3x_0 - \quad - z_0 = 2 \\ \quad 2y_0 + 2z_0 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 \quad = 4 \end{cases}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2-12 = -14 \neq 0$$

Сатҳи маркази. Координатаҳои марказро меёбем;

$$\begin{cases} 3x_0 - z_0 = 2 \\ 2y_0 + 2z_0 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_0 = -4 - 2z_0 \Rightarrow 3\cdot(-4-2z_0) - z_0 = 2 \Rightarrow -7z_0 = 14, z_0 = -2$$

$$x_0 = -4 - 2\cdot(-2) = 0 \Rightarrow 2y_0 = 4 + x_0 \ \Rightarrow y_0 = 2.$$

Маркази сатҳи нуқтаи $\overline{O}$ $(0,\ 2,\ -2)$. Дискриминанти муодилаи сатҳро ҳособ мекунем.

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(детерминант ду сатри баробар дорад) $K_4 = 0$.

Ибтидои координатаро ба маркази сатҳ, нуқтаи $\bar{O}(0,2,-2)$ мекӯчонем, ивазкунии зеринро чори мекунем:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} + 2 \\ z = \bar{z} - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y - 2 \\ \bar{z} = z + 2 \end{cases}$$

Аъзои озоди муодилаи сатҳ дар системаи координатии нав $\overline{OXY}$,

$\bar{a}_{44} = \frac{K_4}{\delta} = \frac{0}{14} = 0$ ва муодилаи намуди зерин ҳосил мешавад.

$$3\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 4\bar{y}\bar{z} - 2\bar{x}\bar{z} = 0$$

Илова ҳаст

Ин муодила конусро муайян мекунад.

Масъалаи 4. Маркази сатҳро ёбед ва намуди онро муайян кунед.

$$x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$$

Ҳал.

$a_{11} = 1,\quad a_{22} = 4,\quad a_{33} = 5,\quad a_{12} = 2,\quad a_{13} = 0,\quad a_{23} = 0,\quad a_{14} = -6,\quad a_{24} = 3,\quad a_{34} = 0,\quad a_{44} = -9$ Координатаҳои маркази сатҳро муайян мекунем.Системаи муодилаҳо намуди зерин мешавад

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 = 6 \\ 2x_0 + 4y_0 = -3 \\ 5z_0 = 0 \end{cases}$$

Детерминанти матрицаи асоси:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5(4-4) = 0$$

Ранги ин система ба 1 баробар ва система ноҳамчоя мебошад. Система ягонто ҳам ҳал надорад , яъне сатҳи додашуда дар қисми махдуди фазо марказ надорад ва ин сатҳ параболоид мебошад.

Дискриминанти сатҳро ҳисоб мекунем;

$$K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ -6 & 3 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 5(-36-36--36-144-9+36) = 5\cdot(-225) = -1125 \neq 0$$

Масъалаи 5. Маркази сатҳро ёбед ва намуди онро муайян кунед.

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$

Хал. Муодилаи сатҳро ба намуди каноники оварда намуди сатҳро муайян мекунем. Коэффициентҳои муодила:

$a_{11} = 1,\quad a_{22} = 5,\quad a_{33} = 1,\quad a_{12} = 1,\quad a_{31} = 3,\quad a_{23} = 1,\quad a_{14} = -1,\quad a_{24} = 3,\quad a_{34} = 1,\quad a_{44} = 0$

Дискриминанти аз коэффициентҳои назди аъзоҳои дарачаи дуюм тартибдодашударо ҳисоб намуда мавчуд будани маркази сатҳро муайян мекунем.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5+3+3-45-1-1 = -36 \neq 0$$

Сатҳи додашуда сатҳи маркази. Координатаҳои марказро ҳисоб мекунем. Системаи муодилаҳои хатти намуди зерин мебошад:

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 3z_0 = -1 \\ x_0 + 5y_0 + z_0 = 3 \\ 3x_0 + y_0 + z_0 = 1 \end{cases}$$

Ҳалли системаро аз рӯи формулаҳои Крамер ҳисоб мекунем:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5+9+1-15+1-3=-12$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+3-3-27-1+1=-24$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5-1+9+15-3-1=24$$

Координатаҳои маркази сатҳ;

$$x_0 = \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{-12}{-36} = \frac{1}{3}$$

$$y_0 = \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{-24}{-36} = \frac{1}{2}$$

$$z_0 = \frac{\delta_3}{\delta} = \frac{24}{-36} = -\frac{2}{3}$$

Маркази сатҳ нуқтаи $O\ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Акнун табдилдиҳии параллел кӯчониро ҷори мекунем ва ибтидои координатаро ба маркази сатҳ нуқтаи - $O(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3},)$ мекӯчонем , яъне ивазкунии зеринро ҷори мекунем;

$$x = \bar{x} + \frac{1}{3}, \qquad y = \bar{y} + \frac{2}{3}, \qquad z = \bar{z} - \frac{2}{3},$$

Дар натиҷа муодилаи сатҳ ба намуди зерин мешавад :

$$\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 + \bar{z}^2 + 2\overline{xy} + 6\overline{xz} + 2\overline{yz} + \bar{F}$$

Аъзои озоди нав $\bar{F}$ - ро ҳисоб мекунем: $2\bar{F} = \frac{K_4}{\delta}$. Дискри минанти сатҳ K_4 - ро ҳисоб мекунем:

$$\text{к}_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 120 - 32 + 20 - 48 - 32 = 36$$

Аъзои озод $\overline{F} = \frac{K_4}{\delta} = \frac{36}{-36} = -1$. Инак муодилаи сатҳ:

$$\bar{x}^2 + 5\overline{y}^2 + \overline{z}^2 + 2\bar{x}\overline{\text{y}} + 6\bar{x}\overline{z} + 2\overline{\text{y}z} - 1 = 0 \qquad \text{(A)}$$

Барои боз ҳам соддатар намудан,яъне муодилаи сатҳро ба намуди каноники овардан, аз табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координати истифода мебарем. Аввал решаҳои муодилаи характеристикиро ҳисоб мекунем:

$$|\delta - \lambda \text{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow (1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 + 3 - 9(5-\lambda) - 1 + \lambda = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0 \Longrightarrow \lambda^3 + 8 - 7\lambda^2 + +28 = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4 - 7(\lambda - 2) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad (\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \Longrightarrow$$

Решаҳои характеристики: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3\ , \lambda_3 = 6.$

Акнун ивазкунии даврзанонии тирҳои координатиро ҷори мекунем:

$$\overline{\text{x}} = \text{x}' \cos\alpha_1 + \text{y}' \, cos\, \beta_1 + z' \cos\gamma_1$$

$$\overline{\text{y}} = \text{x}' \cos\alpha_2 + \text{y}' \, cos\, \beta_2 + z' \cos\gamma_2 \qquad \text{(B)}$$

$$\overline{z} = \text{x}' \cos\alpha_3 + \text{y}' \, cos\, \beta_3 + z' \cos\gamma_3$$

Қийматҳои кунҷҳои даврзании $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ -ҳо роҳамин тавр интихоб мекунем,ки дар муодилаи сатҳ (А) коэффисиентҳои назди аъзоҳои ҳосили зарби ду номаълумҳо -xy, xz, yz ба нул баробар шаванд. Ивазкунии (B) -ро ба муодилаи сатҳ гузошта коэффисентиҳои a_{12}^1, a_{23}^1, ва a_{13}^1 ро ба нул баробар кунем барои номаълумҳои

$\mathrm{p}_i^1 = \cos\alpha_i$, $\mathrm{p}_i^2 = \cos\beta_i$, ва $\mathrm{p}_i^3 = \cos\gamma_i$ -системаи муодилаҳои хаттии зеринро ҳосил мекунем:

$$\left.\begin{array}{r} (a_{11} - \lambda_i)\,\mathrm{p}_i^1 + a_{12}\,\mathrm{p}_i^2, +a_{13}\,\mathrm{p}_i^3 = 0 \\ a_{21}\mathrm{p}_i^1 + (a_{12} - \lambda_i)\mathrm{p}_i^2, +a_{31}\,\mathrm{p}_i^3 = 0 \\ a_{31}\mathrm{p}_i^2 + a_{32}\,\mathrm{p}_i^2 + (a_{33} - \lambda_i)\mathrm{p}_i^3 = 0 \end{array}\right\} \quad (C)$$

Дар инҷо λ_i - решаҳои муодилаи характеристики мебошанд.Қиматҳои $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ро ба системаи (C) гузошта номаълумҳои p_i^1, p_i^2, ва p_i^3 ро ҳисоб мекунем .

1) . λ=$\boldsymbol{\lambda_1 = -2}$ - ро мегузорем:

$$\left.\begin{array}{r} \big(1 - (-2)\big)\mathrm{p}_1^1 + \mathrm{p}_1^2 + 3\mathrm{p}_1^3 = 0 \\ \mathrm{p}_1^1 + \big(5 - (-2)\big)\mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_1^3 = 0 \\ 3\mathrm{p}_1^1 + \mathrm{p}_1^2 + \big(1 - (-2)\big)\mathrm{p}_1^3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} 3\mathrm{p}_1^1 + \mathrm{p}_1^2 + 3\mathrm{p}_1^3 = 0 \\ \mathrm{p}_1^1 + z\mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_1^3 = 0 \\ 3\mathrm{p}_1^1 + \mathrm{p}_1^2 + 3\mathrm{p}_1^3 = 0 \end{array}$$

Ранги ин системаи муодилаҳои хаттии якҷинса ба 2 баробар аст. Дар ҳақиқат, муодилаи якӯм ва сеюми система якхел мебошанд, бинобар он ду муодилаҳои аввaлаpo ҳал мекунем ва номаълуми p_1^3 -ро дилхоҳ қабул мекунем:

$$\left.\begin{array}{r} 3\mathrm{p}_1^1 + \mathrm{p}_1^2 + 3\mathrm{p}_1^3 = 0 \\ \mathrm{p}_1^1 + z\mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_1^3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{p}_1^1 = -\mathrm{p}_1^3,\ \mathrm{p}_1^3 = -1, \mathrm{p}_1^2 = 0, \mathrm{p}_1^1 = 1$$ мегирем,

ҳамин тавр самти асосии якӯм $\bar{a}_1 = \{1,\ 0, -1\}$ ва вектори самтдиҳандаи воҳидии ин самт : $\overline{\boldsymbol{a}_1^0} = \{\cos\alpha_1, \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1,\}$

$$\cos\alpha_1, = \frac{\mathrm{p}_1^2}{|\overline{a_1}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\mathrm{p}_1^2}{|\overline{a_1}|} = 0, \qquad \cos\gamma_1 = \frac{\mathrm{p}_1^3}{|\overline{a_1}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad 0, \ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

2) . λ=$\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ мегузорем ва самти асосии дуюмро ҳисоб мекунем

$$\left.\begin{matrix} (1-3)l_2 + m_1 + n_1 = 0 \\ l_2 + (5-3)m_2 + n_2 = 0 \\ 3l_1 + m_1 + (1-3)n_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} -2l_2 + m_2 + 3n_2 = 0 \\ l_2 + 2m_2 + n_2 = 0 \\ 3l_2 + m_2 - 2n_2 = 0 \end{matrix}$$

Муодилаи 1 –ум ва дуюмро мегирем ва номаълум n_2 -ро дилхоҳ қабул мекунем:

$$\left.\begin{matrix} -2l_2 + m_2 + 3n_3 = 0 \\ l_2 + 2m_2 + n_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad l_2 = 1, \qquad m = -1, \ \ n = 1$$

Самти асосии дуюм $\overline{\boldsymbol{a_2}} = \{1\ , -1, \ \ 1\}$,ва вектори воҳидии самтдиҳанда - $\overline{\boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{0}}} = \{\cos\alpha_2, \quad \cos\beta_2, \quad \cos\gamma_2,\}$

$$\cos\alpha_2 = \frac{l_2}{|\overline{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad : => \overline{a}_2^0 = \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \ \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ , \ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

3) $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda_3}$ **=6**.

Системаи муодилаҳои хатти :

$$\left.\begin{matrix} (1-6)l_3 + m_3 + 3n_3 = 0 \\ l_3 + (5-6)m_3 + n_3 = 0 \\ 3l_3 + m_3 + (1-6)n_3 = 0 \end{matrix}\right\} => \left.\begin{matrix} -5l_3 + m_3 + 3n_3 = 0 \\ l_3 - m_3 + n_3 = 0 \\ 3l_3 + m_3 - 5n_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\frac{\left.\begin{matrix} -5l_3 + m_3 + 3n_3 = 0 \\ l_3 - m_3 + n_3 = 0 \end{matrix}\right\} =>}{-4l_3 + 4n_3 = 0 =>} l_3 = n_3 = 1, \qquad m_3 = 2$$

Вектори самтдиҳанда $\overline{a_3} = \{1,\ \ 2,\ \ 1\}$ вектори самтдиҳандаи воҳиди $\overline{a}_3^0$ −ро ҳисоб мекунем: $\cos\alpha_3 = \frac{l_3}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\overline{a}_3^0 = (\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}})$

Ҳамин тавр табдилотҳои даврзанонии тирҳои координати ба намуди зерин мешавад:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ \quad \overline{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y' \\ \overline{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{array}\right\}$$

Ин ивазкуниро ба муодилаи сатҳ мегузорем:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'\right)$$

$$+6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) +$$

$$+2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 1 = 0. \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}x'^2 + \frac{1}{6}y'^2 + \frac{1}{2}z'^2 + \frac{2}{\sqrt{18}}x'y' + \frac{2}{\sqrt{6}}x'z' + \frac{2}{\sqrt{12}}y'z' + \frac{5}{3}x'^2 - \frac{20}{\sqrt{18}}$$

$$x'y' + \frac{10}{3}y'^2 + \frac{1}{3}x'^2 + \frac{2}{\sqrt{18}}x'y' - \frac{2}{\sqrt{6}}x'z' - \frac{2}{\sqrt{12}}y'z' + \frac{1}{6}y'^2 + \frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{2}z'^2 - \frac{2}{3}x'^2 - \frac{2}{\sqrt{18}}x'y' - \frac{2}{\sqrt{6}}x'z' + \frac{4}{\sqrt{18}}x'y' + \frac{2}{3}y'^2 + \frac{4}{\sqrt{12}}y'z'$$

$$+2x'^2+\frac{6}{\sqrt{18}}x'y'+\frac{6}{\sqrt{6}}x'z'+\frac{6}{\sqrt{18}}x'y'+y'^2+\frac{6}{\sqrt{12}}y'z'-$$

$$-\frac{6}{\sqrt{6}}x'z'-\frac{6}{\sqrt{12}}y'z'-3z'^2-\frac{2}{3}x'^2-\frac{2}{\sqrt{18}}x'y'+\frac{2}{\sqrt{6}}x'z'+\frac{4}{\sqrt{18}}x'y'$$

$$+\frac{2}{3}y'^2-\frac{4}{\sqrt{12}}y'z'-1=0 =>$$

$$3x'^2+6y'^2-2z'^2-1=0 \Longrightarrow 3x'^2+6y'^2-2z'^2=1 \Longrightarrow$$

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{z'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

Ин намуди каноники муодилаи гиперболоиди яккома мебошад.

Бояд қайд кард, ки дар ин муодила коэффициентҳои назди аъзоҳои квадратии муодила решаҳои муодилаи характеристикии сатҳ

$\lambda_1=3\,,\lambda_2=6$ ва $\lambda_3=-2$ мебошад .

Нимтираҳои гиперболоиди яккома

$$a=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad b=\frac{1}{\sqrt{6}}\ \text{ ва }\ c=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Маркази сатҳ нуқтаи $\overline{O}\left(\frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3},\ \ -\frac{2}{3},\ \right)$мебошад .

Масъалаи 6. Муодилаи умумии сатҳро ба намуди каноники оварда намуди сатҳро муайян намоед .

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$$

$a_{11}=7\ \ a_{22}=6\ \ a_{33}=5\ \ \ a_{12}=-2\ \ \ a_{13}=0\ a_{23}=-2$

$a_{14}=-3\ \ \ a_{24}=-12\ \ \ \ a_{34}=9$

Ҳал: Аввал дискриминанти сатҳро ҳисоб карда мавҷуд будани маркази сатҳро муайян мекунем :

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 210 - 28 - 20 = 162 \neq 0$$

Сатҳи маркази мебошад. Координатаҳои марказро меёбем:

Системаи муодилаҳои хатти барои координатаҳои марказ ба намуди зерин мебошад:

$$\begin{cases} 7x_0 \ -2\,y_0 \quad = \ 3 \\ -2x_0 + 6y_0 \ - 2\,z_0 \ = \ 12 \\ -2y_0 \ + 5\,z_0 \ = -\,9 \end{cases}$$

Ҳалли системаро аз рӯи формулаҳои Крамер ҳисоб мекунем:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 12 & 6 & -2 \\ -9 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 90 - 36 - 12 + 120 = 162$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -2 & 12 & -\,2 \\ 0 & -9 & 5 \end{vmatrix} = 420 - 126 + 30 \ = \ 324$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -378 + 12 + 168 + 36 = -162$$

Координатаҳои марказро ҳисоб мекунем :

$$x_0 = \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{162}{162} = 1, \ \ y_0 = \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{-324}{162} = 2, \ \ z_0 = \frac{\delta_3}{\delta} = \frac{-162}{162} = -1$$

Маркази сатҳ нуқтаи $O(1, \ \ 2, \ -1)$.Табдилдиҳии паралелкӯчониро чори мекунем, яъне ибтидои координатаро ба маркази сатҳ- нуқтаи $O(1, \ \ 2, \ -1)$ мекӯчонем.Ивазкунии зеринро чори мекунем :

$$\left.\begin{matrix} x = \overline{x} + 1, & y = \overline{y} + 2, & z = \overline{z} - 1 \\ \overline{x} = x - 1, & \overline{y} = \ y - 2, & \overline{z} = z + 1 \end{matrix}\right\}$$

Дар натиҷаи ин ивазкуниҳо дар муодилаи сатҳ аъзоҳои дараҷаи якӯми номаълумҳои муодила хориҷ мешаванд ва муодилаи сатҳ ба намуди зерин мешавад:

$$7\overline{x}^2 + 6\overline{y}^2 + 5\overline{z}^2 - 4\overline{xy} - 4\overline{yz} + \overline{F} = 0$$

Дискириминанти муодила К$_4$-ро ҳисоб мекунем:

$$\text{К}_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 0 & 30 \end{vmatrix} =$$

Ин детерминантро аз рӯи сутуни сеюм чудо мекунем:

$$= (-2)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 9 \\ -3 & -12 & 30 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & -12 \\ -3 & -12 & 30 \end{vmatrix} =$$

=2(−420-54 + 18 + 756) + 5(1260 -72 -72 – 54 – 120 - 1008) = 270.

Аъзои озоди нав F ро аз рӯи формулаи $\overline{F} = F(x_0,\ y_{0,}z_{0,})$ меёбем ки дар ин чо $(x_0,\ y_{0,}z_{0,})$ координатаҳои маркази сатҳ мебошад

$$\overline{F} = 7 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 - 24$$

$$\cdot 2 + 18 \cdot (-1) + 30 = -6$$

Ҳамин тавр $\overline{F} = -6$, ва муодилаи сатҳ ба намуди зерин мешавад:

$$7\overline{x}^2 + 6\overline{y}^2 + 5\overline{z}^2 - 4\overline{xy} - 4\overline{yz} - 6 = 0$$

Акнун барои ба намуди каноники овардани ин муодила мо аз табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координати истифода мебарем.Инвариантҳои муодилаи сатҳ I_1 ,I_2 , I_3 – ҳоро ҳисоб карда муодилаи характеристикии сатҳро тартиб медиҳем ва решаҳои онро меёбем:

Муодилаи характеристикии сатҳ намуди зерин мешавад:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ё ки бо ёрии инвариантҳо;

$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$ мебошад. Инвариантҳоро ҳисоб мекунем:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 7 + 6 + 5 = 18$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 42 - 4 + 35 + 30 - 4 = 99$$

$$I_3 = \delta = 162$$

Муодилаи характеристики $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0 \Longrightarrow$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda + 18\lambda - 162 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda(\lambda - 9)^2 + 18(\lambda - 9) = 0 \Longrightarrow \lambda(\lambda - 9)^2 + 18(\lambda - 9) = 0 \Longrightarrow$$

$$(\lambda - 9)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0, \lambda - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda_3 = 9.$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2};$$

$$\lambda_1 = 3, \ \ \lambda_2 = 6, \ \ \lambda_3 = 9.$$

Ҳамин тавр,решаҳои характеристики $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$ - ишораҳояшон якхелаи мусбат ва бо аъзои озод $\overline{F} = -6 < 0$ муқобил мебошад , бинобар ин сатҳи додашуда эллипсоид мебошад, муодилаи каноники он:

$$3\overline{x}^2 + 6\overline{y}^2 + 9\overline{z}^2 - 6 = 0 =>$$

$$\frac{3\overline{x}^2}{6} + \frac{6\overline{y}^2}{6} + \frac{9\overline{z}^2}{6} = 1 =>$$

$$\frac{\overline{x}^2}{2}+\frac{\overline{y}^2}{1}+\frac{\overline{z}^2}{\frac{2}{3}}=1$$

Маркази эллипсоид нуқтаи $O(1,\ 2,\ -1)$ ва нимтираҳои он

$$a=\sqrt{2,}\qquad b=1,\qquad c=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Акнун самтҳои асосиро ҳисоб мекунем

$$\overline{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}}=\{l_1,\ m_1,\ \ n_1\}\ \ ,\overline{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{2}}=\{l_2m_2,n_2\},\qquad \overline{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{3}}=\{l_3m_3,n_3\}$$

Координатаҳои ин векторҳо аз системаи зерин ҳисоб карда мешавад.

$$\left.\begin{array}{r}(a_{12}-\lambda_i)\,(l_2+a_{12}m_i+a_{13}n_i)=0\\ a_{21}l_i+(a_{22}-\lambda_i)m_i+a_{23}n_i=0\\ a_{31}l_i+a_{32}m_i+(a_{33}-\lambda_i)n_i=0\end{array}\right\}\qquad (\ i=1,2,3\ )$$

Ба ҷои λ_i - ҳо қиматҳои онҳоро гузошта координатаҳои самтҳои асосиро ҳисоб мекунем.

1). $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}}=\mathbf{3}$

$$\left.\begin{array}{c}(7-3)l_1-2m_1)=0\\ 2l_1+(6-3)m_1-2n_1=0\\ -2m_1+(5-3)n_i=0\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c}4l_1-2m_1=0\\ -2l_1+3m_1-2n_1=0\\ -2m_1+2n_1=0\end{array}$$

$m_1=2l_1,\ \ n_1\ =m_1\ =>\ ,\ \ n_1\ =m_1\ =\ 2l_1$

$l_1\ =1$,қабул кунем $n_1\ =m_1\ =2$ ва $\overline{a_1}=\{1,2,3\}$ $\quad|\overline{a}|=3.$

Вектори асосии воҳидии якум : $\overline{a_1^0}\ =\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}.$

2). $\boldsymbol{\lambda = \lambda_2 = 6}$

$$\left.\begin{array}{c}(7-6)l_2 - 2m_2 = 0 \\ -2l_2 + (6-6)m_1 - 2n_2 = 0 \\ -2m_2 + (5-6)n_2 = 0\end{array}\right\} =>$$

$$\left.\begin{array}{c}l_2 - 2m_2 = 0 \\ -2l_2 - 2n_1 = 0 \\ -2m_2 - n_2 = 0\end{array}\right\} => l_2 = 2m_2 \quad n_2 = -l_2 \quad n_2 = -2m_2$$

$$m_2 = 1, \qquad n_2 = -2, \qquad l_2 = 2$$

$\overline{a_2} = \{2, 1\ -2\}$; $|\overline{a}_2| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 3}$

Вектори асосии воҳидии дуйум : $\overline{\boldsymbol{a_2^0}} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$

3). $\boldsymbol{\lambda = \lambda_2 = 9}$

$$\left.\begin{array}{c}(7-9)l_3 - 2m_1 = 0 \\ -2l_3 + (6-4)m_3 - 2n_3 = 0 \\ -2m_3 + (5-9)n_3 = 0\end{array}\right\} \quad => \left.\begin{array}{c}-2l_3 - 2m_3 = 0 \\ -2l_3 - 3m_3 - 2n_3 = 0 \\ -2m_3 - 4n_3 = 0\end{array}\right\}$$

$l_3 = m_3$, $\qquad m_3 = -2m_3$, $\; l_3 = 2n_3$

$n_3 = 1$мегирем, он гоҳ$l_3 = 2$,$m_3 = -2$ ва вектори асосии сеюм $\overline{a_3} = \{2, -2,\ 1\}$; $|\overline{a}_3| = 3$,

ва вектори асосии воҳидии сейум : $\overline{\boldsymbol{a_3^0}} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

Ҳамин тавр самтҳои асоси: $\overline{\boldsymbol{a_1^0}} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. $\overline{\boldsymbol{a_2^0}} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$ $\overline{\boldsymbol{a_3^0}} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.

Масъалаи 7. Муодилаи умумии сатҳро ба намуди каноники оварда намуди сатҳро муайян намоед .

$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$

$a_{11} = 2,\ \ a_{22} = 2\ \ a_{33} = 3 \quad a_{12} = 2\ \ a_{13} = 1\ a_{23} = 1\ \ a_{24} = 3$

$$a_{34} = -1, \qquad a_{44} = 3$$

Ҳал. Дискриминанти муодилаи сатҳро ҳисоб мекунем:

$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 2 + 2 - 2 - 2 - 12 = 0\ :\ \delta = 0$, инак сатҳ марказ надорад.

Барои содда намудани муодилаи сатҳ мо аз табдилдиҳии даврзанонии тирҳои координати истифода мебарем. Барои ин муодилаи характеристикии сатҳро тартиб дода решахои характеристикиро ҳисоб мекунем:

$$|\delta = \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 =>$$

$(2-\lambda)^2(3-\lambda) + 2 + 2 - (2-\lambda) - (2-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0 =>$

$(2-\lambda)^2(3-\lambda) + 4 - 4 + 2\lambda - 12 + 4\lambda = 0 =>$

$(2-\lambda)^2(3-\lambda) + 6\lambda - 12 = 0 => (2-\ \lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - 6\big) = 0 =>$

$2 - \lambda = 0,\ \ \lambda_1 = 2$ ва $(2-\ \lambda)(3-\lambda) - 6 = 0\ \ \lambda^2 + 5\lambda = 0 =>$

$(2-\ \lambda)(3-\lambda) - 6 = 0\ => \lambda^2 + 5\lambda + 6 - 6 = 0\ => \lambda^2 + 5\lambda = 0 =>$

$\lambda_2 = 5\ ,\ \lambda_3 = 0\ .$

Ҳамин тавр,решаҳои характеристики якто нули $\lambda_3 = 0$ ва ду решаҳои $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 5$ - ишораҳояшон якхела . Дискриминанти умуми муодила K_4- ро ҳисоб мекунем :

$$K_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$5(-2+3-12+2-18+2)5\cdot(25) = -125$

Ин муодила муофиқи мавриди 7-ум параболоиди эллипсиро тасвир мекунад. Муодилаи каноникии сатҳ ба намуди зерин мешавад :

$$\frac{x^2}{\pm\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{k_4}{I_2}}} + \frac{y^2}{\pm\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{k_4}{I_2}}} + 2z = 0$$

($|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ҳисоб мекунем).

Ишораи назди радикалҳоро ба ишорахои λ_1ва λ_2 муқобил мегирем. Қимати инварианти I_2 – роҳисоб мекунем;

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 5 + 5 = 10 .$$

Ҳамин тавр муодилаи каноникии сатҳ ба намуди зерин мешавад;

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{125}{10}}} + \frac{y^2}{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{125}{10}} = 2z} = 2z$$

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2z.$$

Параметрхои он $p = \frac{5}{2\sqrt{2}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Масъалаҳо барои кори мустқилона .

1. Муодилаи сатҳ дода шудааст:

$$x^2+2y^2+z^2-4xy+6yz-2zx+10x-5=0$$

агар ибтидои координатаро ба нуқтаи $O'(1,-1,2)$ кӯчонем, муодилаи сатҳ чигуна намуд мегирад.

2. Маркази сатҳро ёбед ва намуди онро муайян намоед:

А) $x^2-14y^2+10z^2-4xy-24yz+6zx+2x+20y+8z-9=0$

Б) $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0$

В) $5x^2+2y^2+2z^2-2xy-4yz+2zx+4y-4z+4=0$

Г) $x^2-2y^2+z^2+6yz-4zx-8x+10y=0$

Д)$4x^2+y^2+9z^2-4xy-6yz+12zx+8x+4y+12z-5=0$

Е) $x^2+4y^2+10z^2-4xy-24yz+6zx+2x+20y+8z-9=0$

Ж) $3x^2+2y^2-4yz+2xz-4x+8z+8=0$

К) $x^2+25y^2+9z^2-10xy-30yz+6xz-2x-2y=0$

3. Санчед, ки муодилаи

$$2x^2+4y^2-z^2-8xy+8x-8y+4=0$$

конусро тасвир мекунад ва қуллаи онро ёбед.

4. Дар кадом қимати α муодилаи

$$x^2+3y^2+2\alpha yz+2zx-2x-8y-2z-3=0$$

конусро тасвир мекунад.

5. Тадқиқ намоед, ки кадоме аз муодилаҳо конус, силиндр ёки як чуфт ҳамвориҳоро тасвир мекунанд:

А) $9x^2-4y^2-91z^2+18zx-36=0$

Б) $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0$

В) $2x^2-3z^2+4xy+2yz-5zx-8x-12y+17z+6=0$

Г) $x^2-5z^2+3xy+2yz-7x-6y-2z+10=0$

Д) $x^2+2y^2+4z^2-2xy-4yz+2x-2y-4=0$

Е) $x^2 + 3y^2 + 8z^2 + 2xy + 8yz - 4x + 8z + 6 = 0$

6. Муодилаи якчинсаи дарачаи дуюм чигуна сатҳҳоро тасвир мекунад?

А) $6x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy - 4zx = 0$

Б) $4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 4xy + 12yz = 0$

В) $x^2 - 3y^2 + 4zx - 2yz = 0$

Г) $4x^2 + 2y^2 + 10z^2 - 4xy - 8yz + 12zx = 0$

Д) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 2zx = 0$

7. Нуқтаҳои буриши хати рост ва сатҳро ёбед.

а) $z^2 + xy - yz - 5x = 0$ ва $\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7}$

б) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6zx + 12x - 36z = 0$;

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{1}$$

в) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy - yz + 4zx + 3x - 5z = 0$;

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$$

8.Хатҳои ростро муайян намоед, ки онҳо аз ибтидои координата мегузаранд ва дар сатҳи $y^2 + 3xy + 2yz - zx + 3x + 2y = 0$ мехобанд.

9.Ташкилкунандаҳои ростхаттаи сатҳи

$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2yz - 2zx - 12 = 0$ - ро, ки ба хати рости $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$ параллел мебошад, ёбед.

10. Кадоме аз хатҳои рости зерин:

А) $\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$

Б) $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{1}$

В) $\frac{x}{1} = \frac{y-z}{2} = \frac{x-1}{-4}$

Г) $\frac{x+1}{6} = \frac{y}{-6} = \frac{z-4}{5}$

Д) $\frac{x}{1}=\frac{y-z}{3}=\frac{z-1}{-4}$

нисбат ба сатҳи $x^2-4xy+6yz+2x-5=0$ самти ассимптотики доранд.

11.Хати бурриши сатҳҳои додашуда ва ҳамвориҳоро тадқиқ намоед:

А)$3y^2+4z^2+24x+12y-72z+360=0$ ва $x-y+z=1$.

Б) $x^2-3y^2+z^2-6xy+2yz-3y+z-1=0$ ва

$2x-3y-z+2=0$.

В) $x^2+y^2+z^2-6x-2y+9=0$ ва $x+y-2z-1=0$.

12.Ҳамвории диаметриалии бо хордаҳои додашуда ҳамроҳшуда будаи сатҳи

$$2x^2+5y^2+8z^2+12yz+6zx+2xy+8x+14y+18z=0$$

-ро ёбед ки хордаҳо ба ;

А) хати рости $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-5}$,

Б) тири ox ;

В) тири oz

параллел мебошанд.

13. Сатҳи $6x^2+9y^2+z^2-4zx+6xy-2y-3=0$ дода шудааст. Ҳамвориҳои диаметрии онро, ки ба ҳамвории $x+3y-z+5=0$ параллел мебошад, ёбед.

14. Муодилаи умумии сатҳро ба намуди каноники оварда , намуди сатҳ ва чойгиршавии онро муайян намоед:

А) $6x^2-2y^2+6z^2+4zx+8x-4y+8z+1=0$

Б) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8zx-4yz-14x-4y+14z+16=0$

В) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2zx-2yz-4x+8y-12z+14=0$

Г) $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz-4x+6y+4z-27=0$

Д) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4zx+2yz+2x-10y-2z-1=0$

Е) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8zx + 4zy - 2z = 0$

Ж) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0$

З) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2zx + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$

И) $x^2 - 2y^2 - 4xy - 8zx + 6y - 5 = 0$

К) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 12z + 8 = 0$

Л) $3x^2 + y^2 - z^2 + 6zx - 4y = 0$

М) $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4yz + 2x - 6z + 1 = 0$

Н) $4x^2 - 9z^2 + 2zx - 8x - 4y + 36z - 32 = 0$

О) $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2yz - 2y + 2z - 4 = 0$

Маърузаи 33-34

Фазохои хатти ва Евклиди.

Фазохои хатти, базиси фазои хаттӣ.

Халли мисолхо

Мисоли 2.4. Маълум аст, ки векторхои x, y ва z ки ба ягон фазои хатти талук доранд, хатти новобастаанд. Оё векторхои зерин хатти новохаста мешаванд:

А) x - y; y - z; z-x;

Б) x; x+y; x+y+z

Халли мисол

А) Еайд мекунем, ки x - y= - ((y-z)+(z-x)). Яъне яке аз векторхо комбинасияи хатти ду вектори бокимонда мебошад. Он гох мувофики леммаи 2.1. векторхои x - y, y - z, z – x хатти вобастаанд.

Б)Месанчем, ки векторхои x, x+y, x+y+z хатти вобаста мешавандми. Барои камбинасияи хатти ин векторхоро ба вектори кули бароба мекунем.

$$\alpha_1\text{x} + \alpha_2(\text{x} + \text{y}) + \alpha_3(\text{x} + \text{y} + z) = 0$$

Агар ин баробари факат хангоми $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ буда ичро шавад, он гох векторхои додашуда хатти новобастаанд. Агар ин баробари хеч набошад хангоми яке аз коэффисентхои $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ нобаробари нол будан ичро шавад, он гох векторхои x, x+y, x+y+z хатти вобаста мешаванд.

Баробарии хосил шударо хангоми ичро шудани хосиятхои 1 – 8 – и таърифи фазои хатти табди медихад.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\ \text{x}+(\alpha_2, \alpha_3)\ \text{y}+\alpha_3 z = 0$$

Аз баски векторхои x, y, z хатти новобастаанд, муносибатӯои зерин ичро мешавад.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \qquad = 0 \\ \alpha_3 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

Ва аз ин баробарихо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ хосил мешавад . Хамин тавр векторхои x, x+y, x+y+z хатти новобастаанд.

Мисоли 2.5. Векторхои $f_1(\text{x}) = \text{x}^2+5,\ f_2(\text{x}) = \text{x}^2,\ \ f_3(\text{x}) = 1$ ро ба хатти вобастаги санчед.

Хал. Кайдмекунем, ки $f_1(\text{x}) = f_2(\text{x}) + 5f_1(\text{x})$ аст , яъне вектори $f_1(\text{x})$ комбинасияи хаттии векторхои $f_2(\text{x})$, ва $f_3(\text{x})$мебошад. Он гох мувофики леммаи 2.1 векторхои $f_1(\text{x})$, $f_2(\text{x})$, $f_3(\text{x})$ хатти вобастаанд.

Мисоли 2.6. Векторхои $f_1(\text{x}) = \text{x}^2+\text{x},\ f_2(\text{x}) = \text{x} - 1, f_3(\text{x}) = 3$ ро ба хатти вобастаги санчед.

Хал. Бигузор $\alpha_1 f_1(\text{x}) + \alpha_2 f_2(\text{x}) + \alpha_3 f_3(\text{x}) = 0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1(\mathrm{x}^2+\mathrm{x})+\alpha_2(\mathrm{x}-1)+\alpha_3\cdot 3=$$
$$=\alpha_1\mathrm{x}^2+(\alpha_1+\alpha_2)\mathrm{x}+(-\alpha_2+3\alpha_3)\ =0$$

Аз ин муносибат барои ёфтани коэффисентхои $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ системаи знринро хосил мекунем.

$$\begin{cases}\alpha_1 & =0\\ \alpha_1+\alpha_2 & =0\\ -\alpha_2+3\alpha_3 & =0\end{cases}$$

Ин система халли ягонаи $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ дорад.

Аз ин хулоса мебарояд, ки векторхои $f_1(\mathrm{x}),\ \ f_2(\mathrm{x}),\ \ f_3(\mathrm{x})$ хатти новобастаанд.

Мисоли 2.7. Матрисахоро ба хатти вобастаги тадкик намоед.

$$\mathrm{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{A}_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Хал . бигузор $\alpha_1\mathrm{A}_1(\mathrm{x})+\alpha_2\mathrm{A}_2(\mathrm{x})+\alpha_3\mathrm{A}_3(\mathrm{x})=0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\ \alpha_2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\ \alpha_3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 & 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,0\\ 0\,0\end{pmatrix}.$$

Ва аз ин муносибат барои ёфтани коэффисентхои $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ системаи знринро хосил мекунем.

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2 \qquad\quad =0\\ \qquad\ \alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases}$$

Барои халли гайри нули доштани ин системаро муайян кардан ранги матрисаи асосии система А - ро меёбем.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Сатри якуми матрисаро ба -2 зарб карда ба сатри дуйум, ба -1 зарб карда ба сатри сейум чамъ мекунем.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Сатри чорумро ба 3 зарб карда ба сатри дуйум чамъ мекунем, сатри чорумро ба сатри сейум чамъ мекунем.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрисаи хосил шуда дуто сатрхои гайри нули дорад, бинобар он rang A= 2. Аз баски ранги матрисаи А аз микдори номалумхои система хурд аст, системаи муодилахо халли гайри нули дорад. Хамин тавр матрисахои A_1, A_2, A_3 хатти вобастаанд.

Мисоли 2.8. Матрисаро бо хатти вобастаги созед.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Хал. Бигузор $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$ бошад .Он гох

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3 & -2\alpha_2+\alpha_3\\ -2\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3 & 3\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,0\\ 0\,0\end{pmatrix}$$

Аз ин баробари барои ёфтани коэффисентхои $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ системаи знринро хосил мекунем.

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3 & =0\\ -2\alpha_1+\alpha_2 & =0\\ -2\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3 & =0\\ \quad 3\,\alpha_1\ +\ 5\alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases}$$

Ранги матрисаи асосии система А – ро меёбем.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & 2 & -4\\ 3 & 5 & 2\\ & & \end{pmatrix}$$

Сатри якумро ба 2 зарб карда ба сатри сейум, ба -3 зарб карда ба сатри чорум чамъ карда матрисаи зеринро хосил мекунем.

Мисоли 2.10. Векторхои зеринро бо хати вобастаги санчед:

a₁$=(2;-3;1)$, *a₂*$=(3;-1;5)$, *a₃*$=(1;-4;3)$

Хал. Бигузор $\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\alpha_3\cdot a_3$ бошад.Он гох

$\alpha_1(2;-3;1)+\alpha_2(3;-1;5)+\alpha_3(1;-4;3)=$$(2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3;$

-$3\alpha_1-\alpha_2-4\alpha_{3;}\ \alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=(0{,}0{,}0)$

Аз ин баробари барои ёфтани коэффисентхои $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ системаи знринро хосил мекунем.

$$\begin{cases}2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0\\ -3_1-\alpha_2-4\alpha_3=0\\ \alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3=0\end{cases}$$

Детерминанти матрисаи асосии системаро хисоб кунед.

$$|\mathrm{A}| = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 35$$

Азбаски $|\mathrm{A}| \neq 0$ аст, системаи дода шуда халли ягона дорад:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ Аз ин хулоса мебарояд,ки векторхои $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Хатти новобастаанд.

Мисоли 2.11. Функсияхои $f_1(\mathrm{x}) = 1$,$f_2(\mathrm{x}) = \sin \mathrm{x}, f_3(\mathrm{x}) \cos \mathrm{x}$ ро ба хатти вобастаги созед.

Хал. Бигузор $\alpha_1 f_1(\mathrm{x}) + \alpha_2 f_2(\mathrm{x}) + \alpha_3 f_3(\mathrm{x}) = 0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin \mathrm{x} + \alpha_3 \cos \mathrm{x} = 0$$

Азбаски ин баробари барои кимматхои дилхои хдуруст аст, кимматхои x= 0, x= $\frac{\pi}{2}$ ва x= $-\frac{\pi}{2}$ ро интихоб мекунем. Он гох системаи зерин хосил мешавад.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \sin 0 + \alpha_3 \cos 0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin \frac{\pi}{2} + \alpha_3 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin\ (-\frac{\pi}{2}) + \alpha_3 \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Аз ин хулоса мебарояд, ки функсияхои $f_1(\mathrm{x}) = 1,\ f_2(\mathrm{x}) = \sin \mathrm{x}$, $f_3(\mathrm{x}) = \cos \mathrm{x}$ хатти новобастаанд.

Мисоли 2.12. Функсияхои $f_1(\mathrm{x}) = \mathrm{x},\ f_2(\mathrm{x}) = \sin \mathrm{x}$, $f_3(\mathrm{x}) = \cos \mathrm{x}$ ро ба хатти вобастаги санчед.

Хал. Бигузор $\alpha_1 f_1(\mathrm{x}) + \alpha_2 f_2(\mathrm{x}) + \alpha_3 f_3(\mathrm{x}) = 0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1 \mathrm{x} + \alpha_2 \sin \mathrm{x} + \alpha_3 \cos \mathrm{x} = 0$$

Хангоми х$= 0$ буда $\alpha_1 \cdot$ о $+ \alpha_2 \cdot \sin 0 + \alpha_3 \cos 0 = 0$ мешавад. Ки аз ин $\alpha_3 = 0$ хосил мешавад. Он гох $\alpha_1 \mathrm{x} + \alpha_2 \cdot \sin 0 = 0$

Дифференсиали ин баробариро хисоб мекунем.

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \cos \mathrm{x} = 0$$

Дар ин баробари х$= 0$ ва х$= \frac{\pi}{2}$ ро мегузорем.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \cos 0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} => \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \quad 0 \end{cases} => \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Инак, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ мешавад. Аз ин хулоса мебарояд, ки функсияхои $f_1(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$, $f_2(\mathrm{x}) = \sin \mathrm{x}$, $f_3(\mathrm{x}) = \cos \mathrm{x}$ хатти новобастаанд.

Мисоли 2.13. Функсияхои $f_1(\mathrm{x}) = 1$, $f_2(\mathrm{x}) = \sin \mathrm{x}$, $f_3(\mathrm{x}) = \cos^2 \mathrm{x}$

$f_4(\mathrm{x}) = \cos^2 \mathrm{x}$ ро ба хатти вобастаги созед.

Хал. Азбаски $\sin^2 \mathrm{x} + \cos^2 \mathrm{x} = 1$ аст, $f_1(\mathrm{x}) = f_3(\mathrm{x}) + f_4(\mathrm{x})$ мешавад, бинобар он $f_1(\mathrm{x}) = 0 \cdot f_2(\mathrm{x}) + f_3(\mathrm{x}) + f_4(\mathrm{x})$, яъне функсияи $f_1(\mathrm{x})$ аз комбинасияи хаттии функсияхои $f_2(\mathrm{x}), f_3(\mathrm{x})$, $f_4(\mathrm{x})$ иборат шуда истодааст. Он гох мувофики леммаи 2.1 функсияхои $f_1(\mathrm{x})$, $f_2(\mathrm{x})$, $f_3(\mathrm{x})$, $f_4(\mathrm{x})$ хатти вобастаанд.

Мисоли 2.14. Функсияхои $f_1(\mathrm{x}) = \ell^{\mathrm{x}}$, $f_2(\mathrm{x}) = \ell^{\mathrm{x}}$ ро ба хатти вобастаги санчед.

Хал. Бигузор $\alpha_1 f_1(\mathrm{x}) + \alpha_2 f_2(\mathrm{x}) = 0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1 \ell^{\mathrm{x}} + \alpha_2 \ell^{2\mathrm{x}} = 0.$$

Ин баробариро дифферинсиронида муносибати зеринро хосил мекунем.

$$\alpha_1 \ell^{\mathrm{x}} + 2\alpha_2 \ell^{2\mathrm{x}} = 0.$$

Ба ин баробарихо кимати x= 0 ро гузашта муносибатхои зеринро хосил мекунем.

$$\begin{cases}\alpha_1\cdot\ell^0+\alpha_2\cdot\ell^0=0\\ \alpha_1\cdot\ell^0+2\alpha_2\ell^0=0\end{cases} => \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\,\alpha_2=\ 0\end{cases} => \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}$$

Аз ин хулоса мебарояд, ки функсияхои $\alpha_1\,(\mathrm{x})=\ell^{\mathrm{x}}$, $\alpha_2(\mathrm{x})=\ell^{2\mathrm{x}}$ хатти новобастанд.

Мисоли 2.15. Функсияхои $f_1(\mathrm{x})=\ell^{\mathrm{x}}$, $f_2(\mathrm{x})=1$, $f_3(\mathrm{x})=\sin\mathrm{x}$ ро . Бо хатти вобастаги таткик намоед.

Хал. Бигузор $\alpha_1 f_1(\mathrm{x})+\alpha_2 f_2(\mathrm{x})+\alpha_3 f_3(\mathrm{x})=0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1\,\ell^{\mathrm{x}}+\ \alpha_2+\alpha_3\sin\mathrm{x}=0$$

Ин баробариро ду маротиба дифферинсиронида муносибатхои зеринро хосил мекунем.

$$\alpha_1\,\ell^{\mathrm{x}}+\alpha_3\cos\mathrm{x}=0,\qquad \alpha_1\,\ell^{\mathrm{x}}+\alpha_3\sin\mathrm{x}=0$$

Ба ин баробарихо кимати x= 0 ро гузошта баробарихои зеринро хосил мекунем.

$$\begin{cases}\alpha_1\cdot\ell^0+\alpha_2+\alpha_3\sin 0=0\\ \alpha_1\cdot\ell^0+\alpha_3\cos 0\qquad=0\\ \alpha_1\ell^0-\alpha_3\sin 0\qquad=0\end{cases} => \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_1\qquad=0\end{cases} => \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}$$

Аз ин хулоса мебарояд, ки функсияхои $f_1(\mathrm{x})=\ell^{\mathrm{x}}$, $f_2(\mathrm{x})=1$, $f_3(\mathrm{x})=\sin\mathrm{x}$ ро хатти новобастаанд.

Мисоли 2.15. Функсияхои $f_1(\mathrm{x})=\ell^{\mathrm{x}}$, $f_2(\mathrm{x})=1$, $f_3(\mathrm{x})=\mathrm{x}+1$, $f_4(\mathrm{x})=\mathrm{x}-\ell^{\mathrm{x}}$ ро ба хатти вобастаги санчуд.

Хал. Кайд мекунемки, ки $f_4(\mathrm{x})=\ f_3(\mathrm{x})-\ f_1(\mathrm{x})-f_2(\mathrm{x})$ мешавад. Он гох мувофики леммаи 2.1 функсияхои $f_1(\mathrm{x})=\ell^{\mathrm{x}}$, $f_2(\mathrm{x})=1$, $f_3(\mathrm{x})=\mathrm{x}+1$, $f_4(\mathrm{x})=\mathrm{x}-\ell^{\mathrm{x}}$ хатти вобастаанд.

Мисолхо барои халли мустакили.

Мисоли 2.17. Функсияхои $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x+1)^2$ ро ба хатти вобастаги таткик намоед.

Мисоли 2.18. Матрисахои зеринро бо хаттивобастаги таткик менамоем.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мисоли 2.19. Векторхои $\alpha_1 = (4; -5; 2; 6)$, $\alpha_2 = (2; -2; 1; 3)$, $\alpha_3 = (1; -3; 3; 9), \alpha_1 = (4; -1; 5; 6)$ ро ба хатти вобастаги таткик намоед.

Мисоли 2.20. Функсияхои $f_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $f_2(x) = 2x^3 + 3x^2+4x+5$, $f_3(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$, $f_4(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$ ро ба хатти вобастаги таткик намоед.

Мисоли 2.21. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \ell^x$, $f_3(x) = \ell^{-x}$ ро ба хатти вобастаги таткик намоед.

Мисоли 2.22. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \ell^x$, $f_3(x) = -\ell^x$ ро ба хатти вобастаги таткик намоед.

Мисоли 2.23. Функсияхои $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$,

$f_3(x) = \sin 2x$, ро ба хатти вобастаги таткик намоед.

Тариф. Системаи векторхои хатти новобастаи максималш фазои хатти базиси фазо номида мешавад.

Бо ибораи дигар вектирхои $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$ базиси фазои хаттиро ташкил менамояд, агар ду шартхои зерин ичро шавад:

1) векторхои $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$ хатти новобастаанд.

2) векторхои $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$, ℓ_1 барои вектори ихтиёрии a хатти вобастаанд.

Аз ин хулоса мебарояд ки вектори дилхохи a-ро бо векторхои базис хатти ифода кардан мумкин аст.

Муайян аст ки базисро на ба таври ягона интихоб кардан мумкин аст. Масалан, агар вектирхои $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$ базис бошад он гох барои адади дилхохи $a \neq 0$ веторхои $a\ell_1, a\ell_2, \dots \dots, a\ell_n$ хам базисро ташкил мекунад.

Валекин теоремаи зерин дуруст аст. Теоремаи 3.1 микдори векторхои базисхои ихтиориифазои хатти байни хамдигар баробаранд.

Агар дар фазои хаттии L базиси аз n-то векторхо иборатмавчуд бошад n-ченака фазо номида мешавад ва фазоро фазои хаттии ченакаш охирнок мебошад. Ченаки фазоро бо $\dim L = \mathrm{n}$ ишора менамоянд.Агар дар фазои хатти L барои адади дилхохи натуралии n системаи веторхои хаттии новобастаи аз n векторхо ёфтан мумкин бошад он гох фазоро фазои ченаки беохир меноманд ва бо $\dim L = \infty$ ишорат менамоянд. Базиси базе фазохои хаттии ро меёбем.

<u>Мисоли 3.1</u> Ченаки фазои $V^{(2)}$ки аз векторхои озоди хамвори иборат аст ба 2 баробар аст , яне $\dim V^{(2)} = 2$ ду векторхои ихтиории коениар набудаи хамвори базиси векторхои хамвориро ташкил мекунад.

<u>Мисоли 3.2</u> ченаки фазои хаттии $V^{(3)}$ ки аз векторхои озоди фазо иборат аст ба $\dim V^{(3)} = 3$ баробар аст. Дар ин фазо сето векторхои ихтиории компиланар набуда базисро ташкил мекумад.

<u>Мисоли 3.3</u> ченаки фазои хатти арифметики $\mathbb{R}^n$ хам ба адади охирнок буда $\dim\mathbb{R}^n = n$ баробар аст. Векторхои зерин базиси ин фазоро ташкил мекунад. ℓ_1 =(1; 0;.....0), ℓ_2 =(1; 0;.....,0), ... ℓ_n =(0; 0;.....1), ин базисро базиси стандарти ёки базис калонаки базиси фазои хатти $\mathbb{R}^n$ меномем. Бо осони санчидан мумкин аст ки: 1) ин векторхо хатти новобастаанд 2) вектори дилхохи a= ($a_1, a_2, \dots, a_n$) ро бо векторхои базиси пахн кардан мумкин аст $a = a_1\ell_1 + a_2\ell_2 + \cdots + a_n\ell_n$

<u>Мисоли 3.4</u> Матрисахои тартиби дуюми элементхояш аз мачмуи ℝ мачмуи фазои хатти ро ташкил мекунад онро бо М (2x2, ℝ) ишорат менамоем ва ченакаш dim M (2x2, ℝ)=4 аст базиси ин фазоро матрисахои зерин ташкил мекунад.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Хакикатдан хатти новобаста будани матрисахои E_1, E_2, E_3, E_4 ро аввал нишон дода будем ва барои матрисаи дилхохи A∈ M (2x2, ℝ)

Векторхои E_1, E_2, E_3, E_4 A хатти вобастаанд чунки

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix}$ $=a_{11}$ E_1 $+a_{12}$ E_2 $+a_{21}$ E_3 $+a_{22}$ E_4 . Дар оянда базиси E_1, E_2, E_3, E_4 ро базиси стандартии фазои хаттии М (2x2, ℝ) меномем.

<u>Мисоли 3.5</u> Фазои хатти бисёраъзогихои дарачааш аз n хурд коефисентхояш аз мачмуи ℝ бударо бо $\mathbb{R}^n$ [x] ишорат мекунем ченаки ин фазои хатти бо dim$\mathbb{R}^n$ [x]=n баробар аст. Базиси ин фазоро масалаи бисёраъзогихои зерин ташкил мекунад.

$$f_0(x) = 1,\ \ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2, \dots \dots, f_{n-1}(x) = x^{n-1}$$

Ин базисро базиси стандарти фазои хаттии $\mathbb{R}^n$ [x] меномем.

<u>Мисоли 3.6</u> Фазои хаттии бисёраъзогихои койифисентхояш аз ℝ ро бо $\mathbb{R}^n$ [x] ишорат мекунемва ченаки он беохир мебошад: dimℝ [x]=∞.Барои адади дилхохи натуралии nбисьёраъзогихои

$f_0(x) = 1,\ \ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2, \dots \dots, f_{n-1}(x) = x^{n-1}$ хатти новобастаанд.

Роли базисро теоремаи зерин ифода мекунад.

Теоремаи 3.2. (дар бораи базис) Вектори ихтиёрии фазои хатти бо векторхои базиси дилхох хатти ифода карда мешавад ва бо таври ягона аст.

Исбот Бигузор векторхои $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$ базис, a-вектори ихтиёри бошад. Он гох мувофики таъриф $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$ - хатти новобаста мебошанд, векторхои a_1 $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$-хатти вобастаанд. Бинобар он чунин ададхои $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots \alpha_n, \beta$ мавчуданд, ки на хамаи онхо ба онл баробар нестандва комбинатсияи хаттии онхо ба нол баробар аст.

$a_1 \cdot \ell_1 + \alpha_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \ell_n + \beta \cdot a = 0$ Нишон медихем, ки $\beta \neq 0$ *аст.* Агар $\beta = 0$ *бошад,* он гох

$a_1 \cdot \ell_1 + \alpha_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \ell_n + \beta \cdot a = 0$ мешавад, ки на хаммаи коэффисиентхои $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$ ба нол нобаробаранд. Аз ин хулоса мебарояд, ки векторхои $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$ хати вобастаанд. Аммо мувофики теорема ин векторхо базисро ташкил мекунандва хатти новобастаанд. Ин зиддият нишон медихад, ки фаразамон нодуруст ва $\beta \neq 0$ *аст.* он гох

$$-P\, a = \alpha_1 \cdot \ell_1 + \alpha_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \ell_n, \; a =$$
$$= -\frac{\alpha_1}{\beta}\ell_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\ell_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}\ell_n,$$

Яъне вектори a бо векторхои $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$ хатти ифода карда мешавад.

Исбот мекунем, ки векторхои a бо базис ба таври ягона хатти ифода карда мешавад. Бигузор вектори a ба ду намуд ифода кардашуда бошад.

$$a = \alpha_1 \cdot \ell_1 + \alpha_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \ell_n$$

$$a = \beta_1 \cdot \ell_1 + \beta_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \beta_n \cdot \ell_n$$

Он гох.

$$a\text{-}a = (\alpha_1 \cdot \ell_1 + \alpha_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \ell_n) - (\beta_1 \cdot \ell_1 + \beta_2 \cdot \ell_2 +$$
$$+ \cdots + \beta_n \cdot\cdot \ell_n) \Rightarrow$$

$$O = (\alpha_1 - \beta_1)\ell_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\ell_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) = \ell_n$$

Азбаски векторхои $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$ хатти новобастаанд, муносибатхои зерин хосил мешавад $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \ \dots \ ., \alpha_n - \beta_n = 0 => \alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 - \beta_2, \dots \dots, \alpha_n = \beta_n$ Теорема исбот шуд.

Бигузор $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$- базис a-вектори ихтиёри бошад .

Он гох мувофики теоремаи 3.2 вектори a ро ба намуди комбинатсияи хаттии векторхои базиси ба таври ягона ифода кардан мумкин аст:

$$a = \alpha_1 \cdot \ell_1 + \alpha_2 \cdot \ell_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \ell_n$$

Коэффисиентхои $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ коэффисиентхоивектори a дар базиси $\ell_1, \ell_2, \dots \dots, \ell_n$ номида мешавад.

Яъне дар базис ℓ_1 =(0; 0;10), ℓ_2 =(2; 0;0), ℓ_3 =(0; 1;0) координатахои вектори x ба $\frac{1}{2}; 1; 3$ *баро*бар аст.

<u>Мисоли 3.9</u> Координатахои вектори $3x^2$-2x-2$\in \mathbb{R}^3$ [x] ро ёбед:

1) дар базиси стандартии ин фазои хатти

20 дар базиси $x^2, x - 1, 1$.

<u>Хал.</u>

1) Базиси стандартии фазои хатти $\mathbb{R}^3$ [x] аз векторхои $\ell_1 = 1$, ℓ_2 =x,

$\ell_3 = \mathrm{x}^2$ иборат аст. Бинобар он

$$3\mathrm{x}^2\text{-}2\mathrm{x}+1=2\cdot 1 - 2 \cdot \mathrm{x} + 3 \cdot \mathrm{x}^2 = 2\ell_1 - 2\ell_2 + 3 \ \ \ell_3$$

Яъне координатахои вектори $3\mathrm{x}^2$-2x+2 дар базиси стандарти ба 2; -2; 3 баробар аст.

2) Вектори $3\mathrm{x}^2$-2x+2 ро бо базиси $\mathrm{x}^2, \mathrm{x} - 1, 1$ пахн мекунем.

$$3\mathrm{x}^2\text{-}2\mathrm{x}+2 = 3 \cdot \mathrm{x}^2\text{-}2(\mathrm{x}\text{-}1)+0\cdot 1$$

Яъне координатахои вектори $3x^2$-2x+2 дар базиси $x^2, x-1, 1$ ба 3; -2; 0 баробар аст.

Мисоли 3.10. Координатахои вектори X= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ∈$M(2x2, \mathbb{R})$ ро

Ёбед.

1) дар базиси стандарти ин фазои хатти

2) дар базиси $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Хал.

Базиси стандарти фазои $M(2x2, \mathbb{R})$ аз векторхои зерин иборат аст:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Он гох

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= E_1 + 2E_2 + (-1)\, E_3 + 0 \cdot E_4$$

Яъне координатахои вектори X дар базиси стандарти ба 1, 2, -1 , 0 баробар аст.

2) вектори X= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ро бо базиси A_1, A_2, A_3, A_4пахн мекунем

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 - A_2 + 0 \cdot A_3 - A_4$$

Яъне дар базиси A_1, A_2, A_3, A_4 координатахои вектори X ба 1, -1, 0, -1 баробар аст.

Мисоли 3.11. Ченаки фазои хатти матрисахои диоганали тартиби сеюмро ёбед.

Хал.

Нишон медихем ки системаи векторхои зерин яке аз базисхои фазохои хатти дода шуда

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ба осони нишон додан мумкин аст ки векторхои B_1, B_2, B_3 хатти новобастаанд. Агар А матрисаи диоганалии тартиби сеюм бошад он гох

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a}_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_1\mathrm{B}_1 + a_2\mathrm{B}_2 + a_3\mathrm{B}_3$$ Хамин тавар B_1, B_2, B_3 системаи максимали вектирхои хатти новобаста мебошад. Яъне базиси фазои хаттии матрисахои диогонали тартиби сеюм мебошад. Бинобар он ченаки фазои хаттии матрисаи диоганали тартиби сеюм ба 3 баробар аст.

Мисоли 3.12. Ченаки фазои хатти матрисахои тартиби дуюми стуни якуми аз стуни нули иборат бударо ёбед.

Хал.

Нишон медихад ки системаи векторхои зерин яъне аз базисихои ин фазо мебошад.

$$\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектирхои $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ хатти новобаста буданашро нишон додан мумкин. Агар матрисаи А дода шуда бошад он гох

$$a=\begin{pmatrix}0 & a_1\\ 0 & a_2\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=a_1C_1+a_2C_2$$

Хамин тавр C_1, C_2 системаи хатти новобастаи максимали аст яъне базиси фазои хаттии матрисахои тартиби дуюмистуни якумаш аз нолхо иборат бударо ташкил мекунад. Чунки ин фазо бо ду баробар аст.

Мисоли 3.13. Ченнаки фазои хаттии бисёраъзогихои дарачааш токро ёбед.

Хал.

Бо осони нишон додан мумкин аст ки барои адади дилхохи натуралии n системаи векторхои x,x^3 … … x^{2n-1} хатти новобаста мебошад. Хамин тавар ченаки фазо хаттии бисёраъзогихои дарачааш ток беохир мебошад.

Мисоли 3.14. Ченнаки фазои хаттии бисёраъзогихои дарачааш токи аз 8 хурдро ёбид.

Хал.

Бо осони нишон додан мумкин аст ки векторхои x, x^3, x^5, x^7 хатти новобастаанд. Агар f(x) бисёраъзогии дарачааш аз 8 хурд бошад он гох.

$f(x)=a_1x+a_2x^3+a_3x^5+a_4x^7$ Хамин тавр x, x^3, x^5, x^7 базиси фазои хаттии бисёраъзогихои дарачааш токи аз 8 хурд мебошад чкнаки ин фазои хатти ба 4 баробар аст.

Мисоли 3.15. Исбот кунед ки системаи векторхои $f_1(x) = x-3$ $f_2(x) = 2x-5$ базиси фазои хаттии $\mathbb{R}^2$ [x] ро ташкил мекунад.

Хал.

Азбаски $\dim\mathbb{R}^2$ [x]=2 аст векторхои $f_1(x)$, $f_2(x)$ хатти новобаста буданашро исбот кардан кифоя аст. Бигузор $\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)=$ $\alpha_1(x-3)+\alpha_2(2x-5)=(\alpha_1+\alpha_2)+(-3\alpha_1-5\alpha_2)=0$

Бошад он гох

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Детерминанти ин система чунин мешавад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5+6= 1 \neq 0$$

Бинобар он системаи муодилахо халли ягона дорад $\alpha_1 = 2\alpha_2 = 0$.

Хамин тавр $f_1(x)$, $f_2(x)$ хатти новобаста мебошад ва базиси фазои $\mathbb{R}^2$ [x] ро ташкил мекунад.

Мисоли 3.16. Исбот кунед ки системаи векторхои $f_1(x)= 2x^2 + +3x + 1$, $f_2(x)= -3x^2 + 2x + u$, $f_3(x)= x^2 - x - 5$, базиси фазои хатти $\mathbb{R}^3$ [x] ро ташкил мекунад.

Азбаски $\dim\mathbb{R}^2$ [x]=2 аст векторхои $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ хатти новобаста буданашро. Барои ин муносибати зеринро дида мебароем:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3 x = 0 => \begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Детерминанти асоси ин системаро хисоб мекунем

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = -20 + 3 + 12 - 2 + 8 - 45 = -44 \neq 0$$

Азбаски детерминантисистемаи гайринл аст, системаи муодилахо халли ягона дорад: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ Бинобар он системаи векторхои $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ хатти новобастаанд ва базиси фазои хаттии $\mathbb{R}^3$ [x] ро ташкил мекунад.

Мисоли 3.17. Исбот кунед ки системаи векторхои

$\alpha_1 = (2; 1; -3)$, $\alpha_2 = (3; 2; -5)$, $\alpha_3 = (1; -1; 1)$базиси фазои хатти $\mathbb{R}^3$ ро ташкил мекунад.

Хал.

Азбаски dim$\mathbb{R}^2 = 3$ аст, векторхои $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ хатти новобаста буданашро исбот кардан кифоя аст.

Бигузор $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 = 0$ бошад. Он гох

$$\alpha_1(2;1;-3) + \alpha_2(3;2;-5) + \alpha_3(1;-1;1) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3;\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 & = 0 \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Детерминанти матрисаи асосии ин системаро хисоб мекунем.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = 4 + 9 - 5 + 6 - 10 - 3 = 1 \neq 0.$$

Бинобар он, системаи халли ягона дорад $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ хамин тавр, вектирхои $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ хатти новобастаанд ва базиси фазои хаттии$\mathbb{R}^3$ро ташкил мекунад мисолхо барои халли мустакилона.

Мисоли 3.18.Ченаки фазои хатти матрисахои тартиби сеюми диогнали асосиаш ба нул баробар бударо ёбед.

Мисоли 3.19.Ченаки фазои хаттии бисёраъзогихои дарачааш чуфтро ёбед.

Мисоли 3.20. Исбот кунед,ки системаи векторхои $a_1 = (1;1)$ $a_2 = (2;-1)$ базиси фазои хаттии $\mathbb{R}^2$ ро ташкил мекунад.

Мисоли 3.21. Исбот кунед ки векторхои $f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1$ $f_2(x) = 2x^2 - x + 2$ $f_3(x) = -x^2 + 2x + 2$ базиси фазои хаттии $\mathbb{R}^3$ [x] ро ташкил мекунад.

Мисоли 3.22. Исбот кунед ки векторхои $\vec{P} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ ва q=$\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ базиси фазои хаттии $V^{(2)}$ро (фазои хаттии векторхои озоди хамвори) ташкил мекунад.

Мисоли 3.23. Исбот кунед,ки векторхои $\vec{\mathrm{P}} = 3\vec{\ell} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = -\vec{\imath} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{\imath} + \vec{j} - 3\vec{k}$ базиси фазои хаттии $V^{(3)}$(фазои хаттии векторхои озоди фазо) – ро ташкил мекунанд.

4. Муносибати байни координатахои вектор дар базисхои гуногун.

Дар базиси додашуда координатахои вектор ба ба таври ягона муайян карда мешавад. Аммо дар баъзиси дигар хамон вектор координатахои дигар дорад. Муносибати байни координатахои векторро дар базисхои гуногун теоремаи зерин ифода мекунад.

Мисоли 4.1. Бигузор $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$ ва $\ell'_1, \ell'_2, \dots\dots, \ell'_n$ -ду базисхои фазои хаттии Ŗ бошад ва муносибати зерин дуруст бошад.

$$\begin{cases} \ell'_1 = t_{11}\ell_1 + t_{21}\ell_2 + \cdots + t_{n1}\ell_n \\ \ell'_2 = t_{12}\ell_1 + t_{22}\ell_2 + \cdots + t_{n2}\ell_n \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ \ell'_n = t_{1n}\ell_1 + t_{2n}\ell_2 + \cdots + t_{nn}\ell_n \end{cases}$$

Агар вектори а дар базиси $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$ координатахои $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_n$ дар $\ell'_1, \ell'_2, \dots\dots, \ell'_n$ координатахои $\beta_1, \beta_2, \dots\dots, \beta_n$ дошта бошад, он гох муносибати зерин дуруст аст.

$$\mathrm{A} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{B}, \text{ дар ин чо}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t_{11}, t_{12} \dots\dots t_{1n} \\ t_{21}, t_{22} \dots\dots t_{2n} \\ ------ \\ t_{n1}, t_{n2} \dots\dots t_{nn} \end{pmatrix}$$

Ин гуна матрисаи Тматриса гузориш аз базиси $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$ ба базиси $\ell'_1, \ell'_2, \dots\dots, \ell'_n$ номида мешавад.

Исбот.Мувофики шарти $a = \beta_1\ell'_1 + \beta_2\ell'_2 + \cdots + \beta_n\ell'_n$ мешавад. Он гох векторхои $\ell'_1, \ell'_2, \dots\dots, \ell'_n -$ ро бо базиси $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$ пахн намоем муносибати зерин хосил мешавад.

$a= \beta_1(t_{11}\ell_1 + t_{12}\ell_2 + \cdots + t_{1n}\ell_n)+ \beta_2(t_{12}\ell_1 + t_{22}\ell_2 + \cdots +$
$+t_{n2}\ell_n)+\ldots+ \beta_n(t_{1n}\ell_1 + t_{2n}\ell_2 + \cdots + t_{nn}\ell_n)$

Кавсхор кушода, хадхои монандро гурухбанди намоем, муносибати зерин хосил мешавад.

$$a= (\beta_1 t_{11}+ \beta_2 t_{12} + \cdots + \beta_n t_{1n})\, \ell_1 +$$

$$+(\beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \cdots + \beta_n t_{2n})\ell_2 +$$

$$+ - - - - - - - - - - - - - - +$$

$$+(\beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \cdots + \beta_n t_{nn})\, \ell_n.$$

Аммо мувофики шарт $a= \alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \cdots + \alpha_n\ell_n$ мебошад.

Бинобар он муносибатхои зерин хосил мешавад.

$$\alpha_1 = \beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \cdots + \beta_n t_{1n}$$

$$\alpha_2 = \beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \cdots + \beta_n t_{2n}$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$\alpha_n = \beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \cdots + \beta_n t_{nn}$$

Ёки ба намуди матрисави нависем, А= Т $\cdot$ В мешавад Теорема исбот шуд.

Кайдхо.

1) Сутунхои матрисаи Т аз координатахои векторхои $\ell'_1, \ell'_2, \ldots\ldots, \ell'_n$ дар базиси $\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_n$ иборат аст. Аммо $\ell'_1, \ell'_2, \ldots\ldots, \ell'_n$ базис мебошад яъне хатти новобаста аст хамин тавр Сутунхои матрисаи Т хаттии новобастаанд он гох мувофики шарти ба нол баробар будани детерминанти [Т]$\neq 0$ аст.

2) Акнун матрисаи аз базиси $\ell'_1, \ell'_2, \ldots\ldots, \ell'_n$ базиси $\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_n$ гузоришро меёбем. Баробарии А= Т $\cdot$ В дода шуда аст он гох $\text{Т}^{-1} \cdot$ А $=$ $\text{Т}^{-1} \cdot \text{Т} \cdot \text{В} = \text{В}$, яъне В= $\text{Т}^{-\text{т}} \cdot$ А аст хамин тавр матрисаи

$\ell'_1, \ell'_2, \dots\dots, \ell'_n$ ба базиси $\ell_1, \ell_2, \dots\dots, \ell_n$ гузориш ба T^{-1} баробар аст. Масалаи зеринро дида мебароем.

Мисоли 4.1. Координатахои вектори хдар базиси стандартии фазои хаттии $\mathbb{R}^2$ ба 2;3 баробар аст координатахои ин векторо дар базиси $\mathrm{C}_1 = (4;3), \mathrm{C}_2 = (5;4)$ ро ёбед.

Хал.

Базиси стандартии фазои $\mathbb{R}^2$ ро векторхои $\ell_1 = (1;0)$, $\ell_2 = (0{,}1)$ташкил мекунад матрисаи аз базиси ℓ_1, ℓ_2 ба базиси $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ гузоришро меёбем.

$$\mathrm{C}_1 = 4\ell_1 + 3\ell_2$$

$$\mathrm{C}_2 = 5\ell_1 + 4\ell_2 \Rightarrow \mathrm{T}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathrm{T}\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{pmatrix} = \mathrm{T}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Матрисаи бараксро ёфтан мумки аст $\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ мешавад. Он гох муносибати зерин хосил мешавад $\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ хамин тавар координатахои вектори хдар базиси $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ ба -7 ва 6 баробар аст яъне х$= -7\mathrm{C}_1 + 6\mathrm{C}_2$

Мисолхои хал карда шуда

Мисоли 4.2. Дар базиси $f_1(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 3$, $f_2(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - 5$ фазои хаттии $\mathbb{R}^2[\mathrm{x}]$ координатахои вектори $g(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 4$ ро ёбед.

Хал.

Ин мисолро бо ду усул хал мекунем.

Усули 1. Бигузор $g(\mathrm{x}) = \alpha_1 f_1(\mathrm{x}) + \alpha_2 f_2(\mathrm{x})$ бошад. Он гох

$$\mathrm{X}\text{-}4 = \alpha_1(\mathrm{x} - 3) + \alpha_2(2\mathrm{x} - 5) = (\alpha_1 + 2\alpha_2)\mathrm{x} + (-3\alpha_1 - 5\alpha_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3\alpha_1 - 5\alpha_2 = -4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Ин системаро бо формулаи крамер хал мекунем.

$$\Delta = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -3 \cdot 2 - 1 \cdot (-5) = -6 + 5 = -1;$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -4 \cdot 2 - 1 \cdot (-5) = -8 + 5 = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -3 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) = -3 + 4 = 1.$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3; \qquad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1$$

Хамин тавр координатахои вектори g(x) дар базиси f_1(x), f_2(x) ба 3 ва -1 баробаранд, яъне g(x)= $3f_1$(x) $- f_2$(x).

Усули. 2.

Базисро g(x)= $\alpha_1 f_1$(x) $+ \alpha_2 f_2$(x) бошад стуни координатахои вектори g(x) дар базиси f_1(x), f_2(x) ро бо B,стуни координатахои вектори g(x) дар базиси стандарти 1, x – ро бо A ишора мекунем. Он гох

$$\text{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Мувофики теоремаи 4.1 A = T · B мешавад, ки T-матрисаи аз базиси 1, x ба базиси f_1(x), f_2(x) гузориш аст.

Стуни якуми матрисаи T аз координатахои вектори f_1(x) дар базиси 1, x иборат буда, стуни дуйумаш аз координатахои вектори f_2(x) дар базиси 1, x иборат мешавад. Азбаски

$$f_1(\text{x}) = -3 \cdot 1 + 1 \cdot \text{x}, \qquad f_2(\text{x}) = -5 \cdot 1 + 2 \cdot \text{x}, \qquad \text{T} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Мебошад, аз баробарии A = T · B баробарии A $= \text{T}^{-1} \cdot$ A хосил мешавад. Матрисаи T^{-1} ро меёбем. Барои ин пуркунандахои алгебиравии хар як елементи матрисаи T – ро меёбем.

$$\text{T}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2; \qquad \text{T}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1;$$

$T_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-5) = 5; \quad T_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3$ Он гох

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, S^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, => T^{-1} = \frac{1}{|T|} \cdot S^{T} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Бинобар ин матрисаи зерин хосил мекунем.

$$B = T^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Хамин тавр, координатахои вектори g(x) дар базиси f_1(x), f_2(x)ба 3; -1 баробар аст, яъне g(x)= $3f_1$(x) $- f_2$(x).

Мисоли 4.3. Векторхои $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $f_2(x) = -3x^2 + 2x + 4$; $f_3(x) = x^2 - x - 5$ базиси фазои хаттии $\mathbb{R}^3$ [x] мешавад. Кооординатахои вектори $g(x) = ux^2 + x - 9$ ро дар ин базис ёбед.

Хал.

Бигузор $g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x)$. Аз усули дуйуми Мисоли 4.2 истифода бурда, координатахои $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 -$ ро меёбем.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \; |T| = 2 - 8 + 45 +$$

$$+20 - 3 - 12 = 44$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -13 \\ 11 & 11 & 11 \\ 6 & -14 & 10 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{|T|} \cdot S^{T} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 6 \\ -5 & 11 & -14 \\ -13 & 11 & -10 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{B} = \text{T}^{-1} \cdot \text{A} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 6 \\ -5 & 11 & -14 \\ -13 & 11 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Хамин тавр, координатахои вектори $g(\text{x})$ дар базиси f_1, f_2, f_3 ба 1; 0; 2 баробар аст яъне

$$g(\text{x}) = f_1(x) + 2f_3(x).$$

Мисоли 4.4. Дар базиси $\alpha_1 = (2; 1; -3)$, $\alpha_2 = (3,\ 2, -5)$, α_3 =(1; -1; 1) фазои хаттии $\mathbb{R}^3$ коодинатахои вектори b=(6; 2; 7) ро ёбед.

Хал.

Бигузор b= α_1 ·a_1+α_2 ·a_2+α_3 ·a_3 бошад. Аз усули якуми халли мисоли 4.2 истифода бурда координатахои α_1, α_2, α_3- ро меёбем.

(6; 2; -7)= α_1(2; 1; -3)+$\alpha_2(3;\ 2;\ -5) + \alpha_3(1;\ -1; 0) = (2\,\alpha_1 + 3\alpha_2 + +\alpha_3;\quad \alpha_1 2\alpha_2 - \alpha_3;\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3)$

$$\begin{cases} 2\,\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 6 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ -3\,\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = -7 \end{cases}$$

Ин матрисаро бо усули крамер хал мекунем.

$$\text{Д} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = 1, \qquad \text{Д}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\text{Д}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{bmatrix} = 1, \qquad \text{Д}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{bmatrix} = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{\text{Д}_1}{\text{Д}} = 1; \qquad \alpha_2 = \frac{\text{Д}_2}{\text{Д}} = 1; \qquad \alpha_3 = \frac{\text{Д}_3}{\text{Д}} = 1.$$

Хамин тавр, дар базиси $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ координатахои вектори b ба 1, 1, 1 баробар аст, яъне b= $\alpha_1 + \ \alpha_2 + \alpha_3$

Мисолхо барои халли мустакилона

Мисоли 4.5. Дар фазои хаттии $\mathbb{R}^2$ векторхои $\alpha_1 = (1, 1)$ $\alpha_2 = (2;\ -1)$ базис мебошад. Координатахои вектори b=(2; -4) ро Дар ин базис ёбе.

Мисоли 4.6. Дар фазои $\mathbb{R}^3$[x] векторхои $f_1(x) =$ 2x^2 +2x-1; $f_2(x) =$ 2x^2 –x+2; $f_3(x) = -$x^2 +2x+2 базис ташкил мекунад координатахои вектори g(x)= x^2+x+1 ро дар базис ёбед.

Мисоли 4.7. Координатахои вектори $\vec{a} = 9\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ ро дар базиси $\vec{P} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath},\ \vec{q} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ фазои хаттии V$^{(2)}$.

Мисоли 4.8. Координатахои внктори $\vec{C} = 11\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ ро дар базиси $\vec{P} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k},\quad \vec{q} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k},\quad \vec{r} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ ро фазои хаттии V$^{(3)}$ ро ёбед.

Зери фазохои фазохои хаттии

Бигузор L фазои хаттии хакики L_1тахтмачмуи фазои L бошад, ки $L_1 \neq \emptyset$ аст.

Таъриф. Мачмуи L_1 зери фазои хаттии L номида мешавад. Агар он нисбат ба амалхои дар фазои L муайян карда шуда фазои хаттии ро таўкил мекунад. Доир ба зери фазохо мисолхо дода мебароем

Мисоли 5.1. Фазои хаттии V$^{(2)}$ ки векторхои озоди ханвои иборат аст. Зерифазои фазои V$^{(3)}$ мешавад ки аз векторхои озоди фазо иборат аст.

Мисоли 5.2. Фазои хаттии $\mathbb{R}^n$[x] зерифазои фазои хаттии хамаи бисёраъзогихо $\mathbb{R}$ [x] мешавад. Барои он ки мачмуи додашуда зерифазои фазои хаттии ро ташки кунад нишон додан лозим аст,ки худи он фазои хатти ро ташкил мекунад. Барои ин ичро шудани хаммаи шартхои таърифи фазои хатти ро нишон додан лозим аст. Бо ёри теоремаи зерин микдори санчидани ин гуна шартхоро кам кардан мумкин аст.

Теоремаи 5.1 (шарти зерифазо) бигузор L фазои хаттии хакики L_1 тахтмачмуи холи набудаи L бошад. Барои он ки мачмуи L_1 зерифазои фазои хаттии L ро ташкил кунад ичрошудани шартхои зерин зарур ва кифоя аст.

1) a-d ϵ L_1 $\forall a_1$ $b \in L_1$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Исбот. Шарти зарурӣ. Агар L_1 зерифазои фазои L бошад он гох худи он мажму фазои хаттиро ташкил мекунад бинобар он a-b ϵ L_1 ва $\alpha \cdot a \in L_1$ мешавад.

Шарти кифоягӣ. Бигузор a-b ϵ L_1 ва $\alpha \cdot a \in L_1$ барои $\forall$ $a_1 b \in L_1$ $\alpha \in \mathbb{R}$. бошад. Нишон медиҳем ки L_1 фазои хатти мешавад.

Ичро шудани таърифи шартҳои фазои хаттиро месанчем. Барои он исбот кардан лозим аст ки **а)** $a \in L_1$ ва **б)** бароли елементи дилхоҳи b ϵ L_1 елементи -b ϵ L_1 мешавад шартҳои бокимонда ичро мешавад чунки онҳо дар фазои L ичро мешавад мачмуи L_1 бошад тахмачмуи L мебошад.

Мувофики шарти теорема барои елементхои дилхохи $a-b \in L_1$ мешавад.

а) Бигузор $a= b \in$ L_1 бошад он гох b-b=$\in$ L_1 мешавад

б) Бигузор $a= 0$ бошад. Азбаски 0$\in$ L_1 аст он гох 0-b= $-$b$\in$ L_1 мешавад.

Ғайр аз он нишон додан лозим аст ки хангоми елементхои мачмуи L_1- ро ба адад зарб кардан ва онхоро чам кардан боз елементи мачмуи L_1 мешавад. Мувофики шарти теорема $\alpha \cdot a \in L_1$ барои елементи дилхохи ва $a \in L_1$ ва адади дилхохи $\alpha \in \mathbb{R}$ ичро мешавад. Барои елементхои дилхохи a_1 $b \in L_1$ ва адади дилхохи

$\alpha \in \mathbb{R}$ $a+b \in L_1$буданашро исбот мекунем.

Борои елементхои дилхохи a_1 $b \in L_1$ $a-b \in L_1$ мшавад.

Азбаски $-b \in L_1$ аст он гох a-(b-)=a +b∈ L_1мешавад. Теорема исбот шуд.

Татбики ин теоремаро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисоли 5.3. Бигузор м-мачмуи халхои системаи муодилахои якчинсаи n-номаълума бошад.

Нишон медихем ки ин мачму фазои хаттии хакикиро ташкил мекунад.

Барои ин нишон медихем ки мачмуи мзерифазои фазои $\mathbb{R}^n$ мебошад. Мувофики хосияти халхои системаи муодилаи якчинса комбинатсияи хаттии халхои система хам халли хамон система мешавад. Барои он барои халхои ихтиёрии a_1 b ∈ М ва барои адади дилхохи $\alpha \in \mathbb{R}$ a+b∈ М ва $\alpha \cdot a$∈ М мешавад. Он гох мувофики.

Теоремаи 5.1 мачмуи М зерифазои $\mathbb{R}^n$ мешавад ва яне худи мачмуи М фазои хатти мебошад.

Кайд менамоем ки базиси ин фазо аз системаи хелхои фундаментали иборат мешавад. Хакикитан мувафики теорема доир ба систкмаи хелхои фундаментали ин халхои фундаментали хатти новобаста мебошад хели дигари ихтиёри аз комбинатсияи хаттии онхо иборат мешавад хамин тавр системаи фундаментали аз системаи максималии векторхои хатти новобаста иборат мешавад яъне базиси фазои хаттии халхои системаи муодилахои хаттии якчинсаро ташкил мекунад.

Мисолхои халкардашуда

Мисоли 5.4. Мачмухои зерин зерифазои фазои $\mathbb{R}_5[x]$-ро ташкил мекунанд?

1) b_1-мачмуи бисёраъзогихои дарачааш чуфти аз 5-хурд.
2) b_2-мачмуи бисёраъзогихои дарозиаш 3
3) $\mathbb{R}$-мачмуи ададхои хакикӣ

Ҳал.

1) мачмуи b_1 тахмачмуи $\mathbb{R}_5[x]$ мебошад, ки он аз фазои хатти иборат аст. Аз шарти зерифазо истифода мебарем.

Бигузор $g_1(x)$, $g_2(x) \in b_1$ бошад он гоҳ

$g_1(x) - g_2(x) = (a_1\text{-}a_2)x^4 + (b_1 - b_2)x^2+(C_1 - C_2)$, яъне $g_1(x) - g_2(x) \in B_1$ Хамин тавр,мувофики теоремаи 5.1 мачмуи B_1 зерифазохои фазои хаттии $\mathbb{R}_5[x]$ мешавад.

2) Мачмуи B_2 тахтмачмуи хаттии $\mathbb{R}_5[x]$ мешавад. Аз ўарти зерифазо истифода мебарем. Бигузор $g_1(x) = x^3 + x$, $g_2(x) = x^3 + 1$ бошанд. Он гох $g_1(x) - g_2(x) = x^3 + x - x^3 - 1 = x - 1$ яъне $g_1(x) - g_2(x)$ B_2 хамин тавр мувофики шарти зерифазо мачмуи B_2 зерифазои фазои хаттии $\mathbb{R}_5[x]$ мешавад.

3) Мачмуи $\mathbb{R}$ тахтмачмуи мачмуи $\mathbb{R}_5[x]$ мешавад, ки он фазои хаттии мешавад. Аз теоремаи 5.1 истифода мебарем. Бигузор a_1 $b \in \mathbb{R}$ бошад он гох $ab \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot a \in$ M мешавад. Хамин тавр мувофики шарти зерифазохо мачмуи $\mathbb{R}$ зерифазои фазои хаттии $\mathbb{R}_5[x]$ мешавад.

Мисоли 5.5. Оё мачмуи матрисахои зерин фазои хатти роташкил мекунад агар сумма ва хосили зарби матриса ба адад ба таври стандарти муайян карда шавад.

1) M_1мачмуи матрисахои тартиби дуюм ки сатри якумаш ба 0 баробар аст.

2) M_2мачмуи матрисахои диоганалхои тартиби сеюм.

3) M_3 мачмуи матрисахои тартиби сеюм ниход вайрон (детерминанташ ба нул баробар)

Хал.

1) Мачмуи $\mathbb{R}$ тахтмачмуи мачмуи M (2x2, $\mathbb{R}$) мешавад, ки он фазои хатти мешавад. Аз шарти зерифазо истифода мебарем. Бигузор a, $b \in M_1$бошад. Он гох

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ ва } \mathrm{A{-}B}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{a}_{21} - b_{21} & \mathrm{a}_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

Яъне a- b$\in$ M_1.

Бигузор $a\in$ M_1, $\alpha \in \mathbb{R}$ бошад он гох

$$\alpha \cdot \mathrm{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\mathrm{a}_{21} & \alpha\mathrm{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ яъне } \alpha \cdot \mathrm{A} \in \mathrm{M}_1\text{аст.}$$

Хамин тавр мувофики шарти зерифазо мачмуи M_1зерифазои фазои хаттии М (2x2, $\mathbb{R}$) мешавад яъне худи M_1фазои хаттии мебошад.

2) Мачмуи M_1тахтмачми фазои хаттии М (3x3, $\mathbb{R}$) мебошад .аз шарти зерифазо истифода меьарем. Бигузор ab $\in$ M_2бошад. Он гох

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \text{ва}$$

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 - b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{a}_2 - b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a}_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Яъне a- b$\in$ M_2 бигузор $a\in$ M_2, $\alpha \in \mathbb{R}$ бошад он гох

$$\alpha \cdot \mathrm{A} = \alpha \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\mathrm{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\mathrm{a}_3 \end{pmatrix}, \text{ яъне } \alpha \cdot \mathrm{A} \in \mathrm{M}_2\text{аст.}$$

Ҳамин тавр, мувофики шарти зерифазо мачмуи M_2зерифазои фазои хаттии М (3x3, $\mathbb{R}$) мешавад, яъне худи мачмуъ хам фазои хатти мешавад.

3) мачмуи M_3 тахмачмуи фазои хаттии М (3x3, $\mathbb{R}$) мешавад.

Аз шарти зерин истифода мебарем. Бигзор

$$\mathrm{A}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Азбаски$|A|= 0$ $|B|= 0$ $A_1B\in$ M_3 мебошад, он гох

A-B$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Азбаски $|A - B| = 1$ аст A-B M_3 мебошад. Он гох мувофики шарти зерин M_3 зерифазои фазои хаттии M (3x3, $\mathbb{R}$) намешавад, яъне фазои хаттиро ташкил намекунад.

Мисоли 5.6. Яке аз базисхо ва ченаки фазои хаттии халхои системаи муодилахои зеринро ёбед.

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\end{cases}$$

Хал.

Базиси фазои хаттиро ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттии якчинсаро яке аз системаи ҳалҳои фундаменталии он ташкил мекунад яке аз онҳоро меёбем.

Матрисаи асосии системаро бо намуди зерин меоварем.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -5 & 7\end{pmatrix}$$

Он гоҳ

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 = 3x_3\\ -5x_2 = -7x_3\end{cases} <=> \begin{cases}x_2 = 1{,}4x_3\\ x_1 = 3x_3 - 2x_2\end{cases} <=> \begin{cases}x_1 = 0{,}2x_3\\ x_{2=}1{,}4x_3\end{cases}$$

Ҳамин тавр системаи ҳалҳои фундаментали аз якто хал иборат,

Масалан a$=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 7\end{pmatrix}$

Ва ин ҳал базиси фазои хаттии ҳалҳои системаи додашударо ташкил мекунад. Ченаки ин фазои хатти бо 1 баробар аст.

Мисолҳо барои ҳалли мустакилона

Мисоли 5.7. Санчед, ки мачмуҳои зерин зерифазои фазои хаттии М (2х2, ℝ) мешавандмй?.

1) M_1-Мачмуи матрисаҳои намуди зерин $\begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, ки $a, \mathrm{b}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}$

2) M_2-Мачмуи матрисаҳои тартиби дуйум, ки елементҳои диогонали асосии ба 1 баробар аст.

3) M_3-мачмуи матрисаҳои намуди зерин $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, ки $\mathrm{b} \in \mathbb{R}$

Мисоли 5.8. Оё мачмуи пай дар паиҳои адади зерин фазои хаттиро ташкил мекунад, агар сумма ва зарби пай дар паиҳо бо адад ба таври стандарти ичро карда шавад.

1) M_1-Мачмуи пай дар паиҳои $(a_1, a_2 \ldots\ldots, a_8)$, ки барои онҳо $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$ аст.

2) M_2-Мачмуи пай дар паиҳои ададҳои бутун $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_5)$, ки барои онҳо $a_1 = a_5$ аст.

3) M_3-мачмуи пай дар паиҳои ададҳои бутун (a_1, a_2, a_3, a_4)

Мисоли 5.9. Ченаки фазо ва яке аз базисҳои фазои хаттии системаи решаҳои системаи муодилаҳои хаттиро ёбед.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Адабиётҳои истифодашуда

1. И.Н.Привалов геометрияи аналитики нашриёти “Ирфон” Душанбе 1969 с.
2. Н.В.Ефимов Краткий курс аналитической геометрии. Издательство «Наука», Москва 1972 г.
3. А.Р.Артыков. Аналитик геометрия (услубий қўлланма) Самарқанд 2006.
4. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Аналитическая геометрия.-М.Наука 1998 г.
5. В.В. Александров – Геометрия.- М.Наука 2000 г.
6. В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович – Курси мухтасари математикаи оли. Душанбе, “Ирфон” 2001 с. 15-82 саҳ.
7. Клетенник., - сборник задач по аналитической геометрии. М.Наука, 1980, 375 стр.
8. О.Н. Цубербиллер – Задачи и упражнения по пнплитической геометрии. М.Наука, 1966 г. 336 стр.
9. А.П.Рябушко, В.В.Бархатов, В.В.Державец, И.Е.Юруть- сборник индивидуальных задании по высшей математике. Часть 1, Минск, “Высшейая школа” 1990 г. 2740 стр.