Математика ва уни ўқитиш методикаси кафедраси

Математиканинг долзарб муаммолари. Алгебра ва математик мантиқ элементлари.

Тузувчилар: доцент Юнусов А.С., доцент Юнусова Д.И.

СЎЗ БОШИ

«Таълим тўғрисида»ги қонун ва «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури» белгилаб берган вазифаларни амалга ошириш жараёнида умумий ўрта, ўрта махсус таълими стандартлари ишлаб чиқилди ва тасдиқланди. Мазкур стандартлар асосида намунавий дарсликлар тайёрланиб ўқитувчи ва ўқувчилар муҳокамасига топширилди. Стандартларда келтирилган фанлар таълим мазмуни, янги дарсликлар юзасидан келиб чиқадиган муаммоларни ҳал этиш масаласи кўпроқ кадрлар малакасини ошириш ва қайта тайёрлаш муассасалари зиммасига тушмоқда.

Шу жумладан, академик лицей, касб-ҳунар коллежлари математик фанларининг ўқитувчиларига амалий ёрдам бериш мақсадида малака ошириш курсларига келган тингловчиларнинг таклиф ва истаклари асосида янги стандартлар талабидан келиб чиққан ҳолда алгебра фанини ўқитиш муаммоларининг айрим қирраларини ҳал этиш мақсадида ушбу методик қўлланмани тайёрладик.

Методик қўлланмада келтирилган маъруза матнларининг содда ва равон тилда баён этилганлиги учун уни на фақат математика ўқитувчилари, балки, талаба ва ўқувчиларга хам тавсия этиш мумкин.

Маърузалар мавзулари

1. **Математик мантиқ элементлари**.

1.1. Мулоҳаза ва улар устида мантиқ амаллари. Мулоҳазалар алгебрасининг тадбиқлари.

1.2. Предикатлар. Кванторлар. Элементар математикада кванторларнинг қўлланилиши.

1.3. Теорема. Теореманинг турлари.

2. Тўпламлар ва муносабатлар.

2.1. Тўпламлар устида амаллар ва уларнинг хоссалари.

2.2. Декарт кўпайтма. Бинар, n-ар муносабатлар. Функция тушунчаси.

2.3. Бинар, n-ар алгебраик амаллар. Алгебралар.

3. **Комплекс сонлар майдони.**

3.1. Комплекс сонлар майдонини қуриш.

3.2. Комплекс сондан илдиз чиқариш.

3.3. Комплекс соннинг тадбиқлари.

4. Бир ўзгарувчили кўпҳадлар.

4.1. Кўпҳадни (x-c) иккиҳадга бўлиш. Безу теоремаси. Горнер схемаси.

4.2. Алгебранинг асосий теоремаси (исботсиз). Виет формулалари.

4.3. Евклид алгоритми. Иккита кўпҳаднинг ЭКУБи.

4.4. Рационал коэффициентли кўпҳадлар.

4.5. 3-, 4-даражали тенгламалар.

5. Таққосламалар назарияси.

5.1. Бутун сонлар ҳалқасида таққослама тушунчаси. Хоссалари.

5.2. Бўлиниш белгилари.

5.3. Эйлер ва Ферма теоремалари.

1-маъруза. Математик мантиқ элементлари.

Режа:

1. Мулоҳаза ва улар устида мантиқ амаллари. Мулоҳазалар алгебрасининг тадбиқлари.
2. Предикатлар. Кванторлар. Элементар математикада кванторларнинг қўлланилиши.
3. Теорема. Теореманинг турлари.

Адабиётлар :

1. [1] – I боб , 1-6, 10 -§§.
2. [2] – I боб , 1-6 -§§.
3. [1], III боб, 1-5-§§.
4. [2], III боб, 1, 2-§§.

1-таъриф. Рост ёки ёлғонлигини бир қийматли аниқлаш мумкин бўлган дарак гап мулоҳаза дейилади.

Ўзбек тилидаги барча мулоҳазалар тўпламини m орқали белгилайлик. A мулоҳаза рост бўлса, унга 1 ни, ёлғон бўлса, 0 ни мос қўямиз.

2-таъриф. A ва B мулоҳазаларнинг конъюнкцияси деб, A ва B мулоҳазалар рост бўлгандагина рост, қолган ҳолларда ёлғон бўладиган
$A \wedge B$ мулоҳазага айтилади.

3-таъриф. A ва B мулоҳазалар дизъюнкцияси деб, A ва B мулоҳазаларнинг иккаласи ҳам ёлғон бўлгандагина ёлғон, қолган ҳолларда рост бўладиган $A \vee B$ мулоҳазага айтилади.

4-таъриф. A мулоҳаза рост бўлганда ёлғон, ёлғон бўлганда рост бўладиган $\rceil A$ мулоҳаза A мулоҳазанинг инкори дейилади.

Юқорида таърифланган амаллар ростлик жадвали қуйидаги кўринишда бўлади :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\rceil A$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Бундан ташқари яна бир қанча амаллар, яъни :

$\Rightarrow$ - импликация ёки мантиқий ҳулоса,

$\Leftrightarrow$ ёки $\sim$ - эквиваленция ёки мантиқий тенг кучлилик,

$|$ - Шефер штрихи ,

$\downarrow$ - Пирс стрелкаси ,

$\oplus$ - қатъий дизъюнкция , яъни 2 модул бўйича қўшиш амаллари қуйидаги жадвал орқали берилади :

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0

5-таъриф. $< \mathcal{M}, \rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow >$ - универсал алгебра мулоҳазалар алгебраси дейилади.

6-таъриф. 1). Хар бир мулоҳаза формуладир.

2). Агар $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ лар формулалар бўлса , у ҳолда $(\rceil \mathfrak{I})$, $(\mathfrak{I} \wedge \mathfrak{R})$, $(\mathfrak{I} \vee \mathfrak{R})$, $(\mathfrak{I} \Rightarrow \mathfrak{R})$, $(\mathfrak{I} \Leftrightarrow \mathfrak{R})$ лар ҳам формулалардир.

3). 1) ва 2) лар ёрдамида ҳосил қилинган ифодаларгина формулалардир.

Формулаларнинг таркибидаги қавсларни камайтириш мақсадида мантиқ амалларининг бажарилиш тартибини $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ деб белгилаб оламиз. $((A \wedge B) \vee ((\rceil A) \Rightarrow C))$ ифода ўрнига $A \wedge B \vee (\rceil A \Rightarrow C)$ ифодадан фойдаланиш мумкин.

7-таъриф. Формулада қатнашган мантиқ амаллари сони формуланинг ранги дейилади.

Юқорида келтирилган формуланинг ранги 4 га тенг.

8-таъриф. Мулоҳазалар алгебрасининг $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ формулалари берилган бўлиб, бу формулалар таркибига кирган барча мулоҳазалар $A_1, \ldots, A_m$ -лардан иборат бўлсин. Агар $A_1, \ldots, A_m$ мулоҳазаларнинг барча қийматлар тизимлари $(i_1, \ldots, i_m)$ лар учун $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ формулалар бир хил қийматлар қабул қилсалар, у холда, бу формулалар тенг кучли формулалар дейилади хамда $\mathfrak{I}$

$\equiv \Re$ кўринишда ифодаланади.

9-таъриф. Мулоҳазалар алгебрасининг $\Im$ формуласи, формула таркибига кирган барча мулоҳазаларнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларида рост бўлса, бу формула айнан рост формула ёки тавтология ёки мантиқ қонуни ёки умумқийматли дейилади.

10-таъриф. Мулоҳазалар алгебрасининг $\Im(A_1, \ldots, A_n)$ формуласи $A_1, \ldots, A_n$ мулоҳазаларнинг барча қийматлари тизими $(i_1, \ldots, i_n)$ лар учун 0 қиймат қабул қилса, айнан ёлғон ёки зиддият дейилади.

11-таъриф. Агар мулоҳазалар алгебрасининг $\Im(A_1, \ldots, A_n)$ формуласи учун $A_1, \ldots, A_n$ ларнинг камида битта $(i_1, \ldots, i_n)$ қийматлари тизими учун 1 га тенг қиймат қабул қилса, бажарилувчи формула дейилади.

1-теорема **.**Мулоҳазалар алгебрасининг $\Im$ ва $\Re$ формулалари тенг кучли формулалар бўлиши учун $\Im \Leftrightarrow \Re$ формула айнан рост формула бўлиши зарур ва етарли.

Асосий тенг кучли формулалар.

1. $A \wedge A = A$ (конъюнкциянинг идемпотентлик қонуни).
2. $A \vee A = A$ (дизъюнкциянинг идемпотентлик қонуни).
3. $A \wedge 1 = A$.
4. $A \vee 1 = 1$.
5. $A \wedge 0 = 0$.
6. $A \vee 0 = A$.
7. $A \vee \rceil A = 1$ – учинчисини инкор қилиш қонуни.
8. $A \wedge \rceil A = 0$ - зиддиятга келтириш қонуни.
9. $\rceil\rceil A = A$ - қўш инкор қонуни.
10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$.
11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$.
12. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

13. $A \Rightarrow B \equiv \rceil A \vee B$.

14. $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$.

15. $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$.

16. $A \wedge B \equiv \rceil(\rceil A \vee \rceil B)$.

17. $A \vee B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$.

18. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ –конъюнкциянинг коммутативлик қонуни.

19. $A \vee B \equiv B \vee A$ – дизъюнкциянинг коммутативлик қонуни.

20. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ -$\wedge$ нинг $\vee$ га нисбатан дистрибутивлик қонуни.

21. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ - $\vee$ нинг $\wedge$ га нисбатан дистрибутивлик қонуни.

22. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ –конъюнкциянинг ассоциативлик қонуни.

23. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ – дизъюнкциянинг ассоциативлик қонуни.

12-таъриф .Бўш бўлмаган $\mathcal{M}$ тўплам ва унда аниқланган " + " - қўшиш , " $\cdot$ " – кўпайтириш, " $\rceil$ " – инкор амалларига нисбатан қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин :

1. $x + y = y + x$ - қўшишга нисбатан коммутативлик қонуни.

2. $x \cdot y = y \cdot x$ - кўпайтиришга нисбатан коммутативлик қонуни.

3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ -қўшишга нисбатан ассоциативлик қонуни..

4. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ – кўпайтиришга нисбатан ассоциативлик қонуни.

5. $x + x = x$ - қўшишга нисбатан идемпотентлик қонуни.

6. $x \cdot x = x$ – кўпайтиришга нисбатан идемпотентлик қонуни.

7. $\rceil\rceil x = x$ - қўш инкор қонуни.

8. $\rceil(x + y) = \rceil x \cdot \rceil y$

9. $\rceil(x \cdot y) = \rceil x + \rceil y$ - де – Морган қонунлари.

10. $x + (y \cdot x) = x$

11. $x \cdot (y + x) = x$ - ютилиш қонунлари.

12. $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ -қўшишнинг кўпайтиришга нисбатан дистрибутивлик қонуни.

13. $(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$ –кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан дистрибутивлик қонуни.

$< m ; + , \cdot , \rceil >$ -алгебрага Буль алгебраси дейилади.

Мисол *.* Асосий тенгкучлиликлардан кўринадики, мулоҳазалар алгебрасида конъюнкцияни - " $\cdot$ " , дизъюнкцияни - " + " га мос қўйсак, мулоҳазалар алгебраси Буль алгебрасига мисол бўла олади.

13-таъриф. $X = \{ 0 , 1 \}$ –икки элементли тўплам берилган бўлсин. У ҳолда $f : X^n \to X$ ($n = 0, 1, 2, . . .$) - функция n – ўзгарувчили Буль функцияси ёки 2 - қийматли функция дейилади.

$n = 0$, бўлганда , X тўпламнинг ажратилган элементларини , яъни 0 ёки 1 ни ҳосил қиламиз. Мулоҳазалар алгебрасининг ихтиёрий формуласи икки қийматли функцияга мисол бўла олади.

1. Формуладаги ҳар бир қўшилувчида $F (X_1, . . . , X_n)$ функцияга кирган барча $X_1, . . . , X_n$ ўзгарувчилар қатнашади.

2. Формулада бир хил қўшилувчилар йўқ.

Ҳар бир қўшилувчида $X_1, . . . , X_n$ ўзгарувчилар фақат бир мартагина қатнашади.

Агар $F (X_1, . . . , X_n)$ функциянинг ростлик жадвали берилган бўлса , уни мулоҳазалар алгебрасининг формуласи орқали ифода қилиш учун $X_1, . . . , X_n$ ўзгарувчиларнинг $F (X_1, . . . , X_n)$ функция 1 га тенг қиймат қабул қиладиган қийматлари тизимларинигина ажратиб оламиз. Бундай қийматлар тизими учун $X_к$ ўзгарувчи 1 га тенг қиймат қабул қилса ,$X_к$ ни ўзини, акс ҳолда $X_к$ нинг инкорини олиб $X_1, . . . , X_k$ ўзгарувчилардан конъюнкциялар тузиб оламиз. Ҳосил бўлган барча конъюнкцияларнинг йиғиндиси $F (X_1, . . . , X_n)$ формуланинг ифодаси бўлади.

14-таъриф. Мулоҳазалар алгебрасининг $\Im$ формуласида фақат $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ мантиқ амаллари қатнашиб, $\rceil$ фақат пропозиционал ўзгарувчиларга тегишли бўлса, у ҳолда $\Im$ келтирилган формула (форма) дейилади.

Лемма . Агар мулоҳазалар алгебрасининг $\Im$ формуласи келтирилган формула бўлса, мулоҳазалар алгебрасининг $\rceil \Im$ формулага тенг кучли келтирилган формуласи мавжуд.

2-теорема. Мулоҳазалар алгебрасининг ихтиёрий $\Im$ формуласига тенг кучли келтирилган формула мавжуд.

Исбот. Формула ранги бўйича математик индукция методи билан исбот қилинади. Агар формуланинг ранги 0 га тенг бўлса, у пропозиционал ўзгарувчи бўлиб исбот равшан.

Ихтиёрий натурал $k \geq 1$ учун ранги k дан кичик формулага тенг кучли келтирилган формула мавжуд бўлсин. У ҳолда, формула таърифига кўра $\Im$ формула $\rceil\Re$, $\Re \wedge \wp$, $\Re \vee \wp$, $\Re \Rightarrow \wp$, $\Re \Leftrightarrow \wp$ формулалардан бири кўринишида бўлади.

$\Re \wedge \wp$, $\Re \vee \wp$ - келтирилган формулалар, $\rceil \Re$ учун эса леммага асосан тенг кучли келтирилган формула мавжуд.

$\Re \Rightarrow \wp$ формулани $\rceil \Re \vee \wp$ формула билан , $\Re \Leftrightarrow \wp$ формулани $(\rceil \Re \vee \wp) \wedge (\Re \vee \rceil \wp)$ формула билан, бу формуладаги $\rceil\Re$, $\rceil \wp$ формулаларни леммага асосан тенг кучли келтирилган формулалар билан алмаштирамиз. Натижада берилган формулага тенг кучли келтирилган формула ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $\Im$ формулага тенг кучли келтирилган формула мавжуд.

$\Im$ - келтирилган формула, яъни $\Im$ формулада $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ - мантиқ амалларигина қатнашиб, $\rceil$ фақат пропозиционал ўзгарувчиларгагина тегишли бўлсин.

15-таъриф. Мулоҳазалар алгебрасининг $\mathfrak{I}^*$ формуласи $\mathfrak{I}$ формуладан конъюнкцияни дизъюнкция билан, дизъюнкцияни эса конъюнкция билан алмаштириш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $\mathfrak{I}^*$ ва $\mathfrak{I}$ формулалар ўзаро қўшма формулалар дейилади.

3-теорема. Агар $\mathfrak{I}$ ва $\mathfrak{R}$ формулалар тенг кучли формулалар бўлса, у ҳолда $\mathfrak{I}^*$ ва $\mathfrak{R}^*$ формулалар ҳам тенг кучли формулалар бўлади.

$\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots, \mathfrak{I}_n$ $(n \geq 1)$ мулоҳазалар алгебрасининг формулалари бўлсин, у ҳолда $(\ldots((\mathfrak{I}_1 \wedge \mathfrak{I}_2) \wedge \mathfrak{I}_3)\ldots \mathfrak{I}_n)$ –формула $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots, \mathfrak{I}_n$ – формулаларнинг конъюнкцияси дейилади ва $\mathfrak{I}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{I}_n$ орқали белгиланади. $(\ldots((\mathfrak{I}_1 \vee \mathfrak{I}_2) \vee \mathfrak{I}_3)\ldots \mathfrak{I}_n)$ – формула эса $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots, \mathfrak{I}_n$ - формулаларнинг дизъюнкцияси дейилади ва $(\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_n)$- орқали белгиланади.

16-таъриф. Пропозиционал ўзгарувчилар ёки уларнинг инкорларидан тузилган ихтиёрий конъюнкция (дизъюнкция) элементар конъюнкция (дизъюнкция) дейилади.

17-таъриф. Элементар конъюнкцияларнинг ихтиёрий дизъюнкцияси - дизъюнктив нормал форма (днф), элементар дизъюнкцияларнинг ихтиёрий конъюнкцияси- конъюнктив нормал форма (кнф) дейилади.

Мисол . X_1, X_2, X_3 – пропозиционал ўзгарувчилар берилган бўлсин, у ҳолда $(X_1 \wedge X_2) \vee X_3$ – днфга , $(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3)$ – кнфга мисол бўлади.

18-таъриф. $\mathfrak{I}$ формула $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – пропозиционал ўзгаручилардан тузилган элементар конъюнкция бўлсин. Агар ҳар бир пропозиционал ўзгарувчи, инкори ҳам ҳисобланганда, $\mathfrak{I}$ да бир мартадан ортиқ қатнашмаса $\mathfrak{I}$ - тўғри, камида бир марта қатнашса, $\mathfrak{I}$ - тўлиқ, фақат бир марта қатнашса, $\mathfrak{I}$ - мукаммал элементар конъюнкция дейилади.

Тўғри ва тўлиқ элементар конъюнкция мукаммал элементар конъюнкция бўлиши равшан.

Мисол . X_1, X_2, X_3 –пропозиционал ўзгарувчилар берилган бўлсин. У ҳолда $\rceil X_1 \wedge X_2$ –тўғри, $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \rceil X_1 \wedge \rceil X_2$- тўлиқ, $X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3$ – мукаммал элементар конъюнкциялардир.

19-таъриф. $\Im$ - формула $X_1, \ldots, X_n$ – ўзгарувчилардан тузилган элементар дизъюнкция бўлсин. Агар ҳар бир пропозиционал ўзгарувчи, инкори ҳам ҳисобланганда, $\Im$ - формулада бир мартадан ортиқ қатнашмаса, тўғри, камида бир марта қатнашса, тўлиқ, фақат бир марта қатнашса, мукаммал элементар дизъюнкция дейилади.

20-таъриф. Турли мукаммал элементар конъюнкция (дизъюнкция) лардан тузилган дизъюнкция (конъюнкция) мукаммал дизъюнктив (конъюнктив) нормал форма МДНФ (МКНФ) дейилади.

Мисол . X_1, X_2, X_3 –пропозиционал ўзгарувчилар берилган бўлсин. У ҳолда $(X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3) \vee (\rceil X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$- М.Н.Д.Ф. ; $(X_1 \vee \rceil X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee X_3)$ – М.К.Н.Ф. бўлади.

21-таъриф. Мулоҳазалар алгебрасининг $\Im$ формуласига тенг кучли Д.Н.Ф. (К.Н.Ф., М.Д.Н.Ф., М.К.Н.Ф.) $\Im$ - формуланинг Д.Н.Ф (К.Н.Ф., М.Д.Н.Ф., М.К.Н.Ф.) си дейилади.

4-теорема. Мулоҳазалар алгебрасининг ихтиёрий формасини Д.Н.Ф. си (К.Н.Ф.си) мавжуд.

5-теорема. Мулоҳазалар алгебрасининг ихтиёрий $\Im$ - формуласининг М.Д.Н.Ф. (М.К.Н.Ф.) и мавжуд.

Мисол. $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$ формуланинг М.Д.Н.Ф. ини топинг. Аввал $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$ нинг Д.Н.Ф ини топайлик. 20 - тенг кучлиликка асосан : $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3)$. $X_1 \wedge X_2$ ва

$X_1 \wedge X_3$ –ларнинг М.Д.Н.Ф. ларини юқорида келтирилган асосий тенг кучлиликлар ёрдамида топамиз.

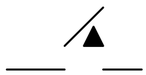
$X_1 \wedge X_2 \equiv X_1 \wedge X_2 \wedge 1 \equiv X_1 \wedge X_2 \wedge (X_3 \vee \rceil X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3)$.

$X_1 \wedge X_3 \equiv X_1 \wedge 1 \wedge X_3 \equiv X_1 \wedge (X_2 \vee \rceil X_2) \wedge X_3 \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3)$.

Бундан, $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee$
$\vee (X_1 \wedge \rceil X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \rceil X_3)$ – М.Д.Н.Ф.

Ҳозирги кунда халқ хўжалигини, инсон фаолиятининг ҳар қандай соҳасини ЭҲМ сиз тасаввур қилиб бўлмайди. Илмий – техника революциясининг юз беришида математик мантиқ фанининг катта ҳиссаси бор. XX асрнинг бошларидан бошлаб тез ривожлана бошлаган математик мантиқдан фанидан янги мустақил соҳалар ажралиб чиқди : автоматлар назарияси, реле – контакт ва электрон схемалар синтези, алгоритмлар назарияси шулар жумласидандир. Ўтган асрнинг ўттизинчи йилларига келиб ЭҲМ нинг математик таъминоти ишлаб чиқилди, қирқинчи йилларнинг боршларида эса биринчи ЭҲМ лар ишга туширилди. Автоматик бошқариш қурилмалари ва электрон ҳисоблаш машиналарида юзлаб ва минглаб реле – контакт, электрон – лампа, яримўтказгич ва магнит элементларини ўз ичига олган реле – контакт ва электрон – лампа схемалар учрайди. Бу схемалар автоматик бошқариш қурилмалари ва ЭҲМ лари таркибида бениҳоя катта тезликда жуда мураккаб операциялар бажаришда бевосита иштирок этади ва автоматларнинг барча иш фаолиятини бошқариб туради. Реле – контакт ва электрон схемаларни анализ ва синтез қилишда мулоҳазалар алгебраси асосий вазифани бажаради. Ҳар қандай схемага мулоҳазалар алгебрасининг бирор формуласини мос қўйиш мумкин. Ва аксинча мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир формуласини реле – контакт схема (РКС) орқали ифода қилиш мумкин. РКС билан мулоҳазалар алгебрасининг формулалари орасидаги бундай муносабат мураккаб РКС ларни мулоҳазалар алгебрасининг формулалари ёрдамида соддалаштириш имкониятини беради.

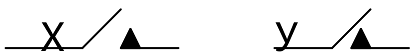
Қуйида РКС ларини мулоҳазалар алгебрасининг формулалари ёрдамида ифодалаш масаласини кўриб чиқамиз.

Контактни шартли равишда 

кўринишда белгилаймиз. Контакт ёпиқ (ток ўтказадиган) ёки очиқ
(ток ўтказмайдиган) ҳолатда бўлиши мумкин. Контактнинг ёпиқ ҳолатига 1 ни , очиқ ҳолатига 0 ни мос қўямиз.

Барча контактлар орасида доимо ток ўтказадиган (доимо ёпиқ) ҳамда бутунлай ток ўтказмайдиган (доимо очиқ) контактлар мавжуддир. Уларни ҳам мос равишда 1 ва 0 билан белгилаймиз ва уларни мос равишда ,
кўринишда ифодалаймиз.

У ҳолда иккита X ва У мулоҳазаларнинг конъюнкциясига



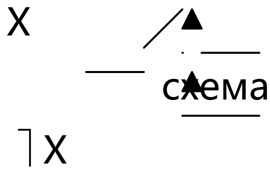
контактларни кетма – кет улаш натижасида ҳосил бўлган ва контактлар бир пайтда ёпиқ бўлгандагина ток ўтказадиган

схемани , X ва У мулоҳазаларнинг

дизъюнкциясига X ва У контактларни параллель улаш натижасида ҳосил бўладиган ва ушбу контактларнинг камида биттаси ёпиқ бўлганда ток ўтказадиган X

схемани, X мулоҳазанинг

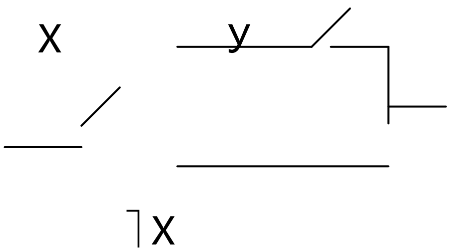
инкори ⌉X га X контакт ёпиқ бўлганда очиқ, X контакт очиқ бўлганда эса ёпиқ бўладиган қарама - қарши контактни ифодаловчи



схемани мос қўйишимиз мумкин.

Мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай формуласини фақат ⌉, $\wedge$, $\vee$ амаллар орқали ифодалаш мумкин. Демак, мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир формуласи РКС орқали ифода қилиниши ва аксинча, ҳар қандай РКС ни мулоҳазалар алгебрасининг формуласи орқали ифодалаш мумкин экан.

Мисол . Мулоҳазалар алгебрасининг (X $\wedge$ У) $\vee$ ⌉X - формуласига



РКС и мос келади.

2. Бўш бўлмаган m тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламнинг ихтиёрий "a" элементи ҳақида айтилган мулоҳазани $P(a)$ орқали белгилаймиз, $P(a)$ - рост ёки ёлғон мулоҳаза бўлиши мумкин.

22-таъриф. P : $m^n \to \{0,1\}$, n = 0,1, . . . кўринишдаги ҳар қандай функция n ўринли предикат дейилади.

$P(a)$ ифодада a – m тўпламнинг бирор бир элементи, P – шу a элемент ҳақидаги тасдиқ - предикатдир, m – предикатнинг аниқланиш соҳаси.

Масалан, «7-туб сон» деган мулоҳазада «7» - элемент,»туб сон» – предикат. Агар 7 сонини натурал сонлар тўпламидан олинган х ўзгарувчи билан алмаштирсак, у ҳолда «х-туб сон» деган мулоҳазавий формани ҳосил қиламиз. Ушбу форма х нинг айрим қийматларида (масалан, $x=13$, $x=17$) рост мулоҳазани, бошқа бир қийматларида (масалан, $x=10$, $x=18$) ёлғон мулоҳазани беради.

Бир ўринли предикат $P(x)$ шу предикатдаги ўзгарувчи х нинг хоссасини, икки ўринли предикат $P(x,y)$ – х ва у ўзгарувчилар орасидаги муносабатни билдиради, n ўринли предикатларни $R^{(n)}$, $Q^{(n)}$, $S^{(n)}$, . . . , $R_1^{(n)}$, $R_2^{(n)}$, . . . лар каби белгилаймиз. Баъзан $x_1, \dots, x_n$ ўзгарувчилар қатнашган n – ўринли предикатни $R^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ каби белгилаймиз.

23-таъриф. $\mathcal{m}$ тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. У ҳолда, $P(x)$ ни рост мулоҳазага айлантирадиган х нинг $\mathcal{m}$ тўпламга тегишли барча қийматларини E_p орқали белгилаймиз. $P(x)$ – $P(x)$ предикатнинг ростлик соҳаси дейилади.

Ростлик соҳасининг хоссалари :

1. $E_P = \mathcal{m} \setminus E_P$.

2. $E_{P \wedge Q} = E_P$.

3. $E_{P \vee Q} = P_P \vee E_Q$.

4. $E_{P \Rightarrow Q} = E_{\urcorner P} \vee E_Q$.

Предикатлар устида ҳам мулоҳазалар устида аниқланган мантиқий амалларни аниқлаш мумкин.

24-таъриф. $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар конъюнкцияси деб шундай $P(x)\ \&\ Q(x)$ предикатга айтиладики, бу предикат х нинг $P(x)$

ва Q(x) предикатларни рост мулоҳазага айлантирадиган қийматларида рост, қолган ҳолларда ёлғон қиймат қабул қилади.

Ҳудди шунга ўхшаш предикатлар дизъюнкцияси, импликацияси, эквиваленцияси ҳамда инкори аниқланади.

Предикатлар тўпламида яна иккита унар амаллар - кванторларни аниқлаймиз.

25-таъриф. $\mathcal{M}$ тўпламда аниқланган P(x) предикат берилган бўлсин. Агар x нинг $\mathcal{M}$ даги барча қийматларида P(x) =1 бўлса, у ҳолда $\forall x P(x)$ – ифода рост мулоҳаза, акс ҳолда, яъни $\mathcal{M}$ тўпламнинг камида битта x_0 қиймати учун $P(x_0) = 0$ бўлса, ёлғон мулоҳазадир.

26-таъриф. $\exists x P(x)$ – ифода x нинг $\mathcal{M}$ даги камида битта x_0 қиймати учун рост бўлса, яъни $P(x_0)=1$ бўлганда рост, қолган ҳолларда ёлғон мулоҳазадир.

$\forall$ - умумийлик кванторининг белгиси бўлиб, $\forall x P(x)$ мулоҳаза «Барча x лар учун P(x) - рост» каби ўқилади.

$\exists$ - мавжудлик кванторининг белгиси. $\exists x P(x)$ мулоҳаза «Шундай x мавжуд-ки P(x) - рост» деб ўқилади.

P(x) предикатдаги x ўзгарувчи эркли (x $\mathcal{M}$ тўпламнинг ихтиёрий қийматини қабул қила олади), $\forall x P(x)$ ёки $\exists x P(x)$ ифодаларда эса $\forall$ ёки $\exists$ кванторлари орқали боғланган дейилади.

$\forall x P(x)$ мулоҳаза P(x) айнан рост предикат бўлгандагина рост ва $\exists x P(x)$ мулоҳаза P(x) айнан ёлғон предикат бўлганда ёлғон мулоҳаза бўлади.

Мавжудлик ва умумийлик кванторларини икки ва ундан юқори ўринли предикатларга ҳам қўллаш мумкин. Масалан, икки ўринли P(x,y) предикатга кванторларни қўллаш натижасида қуйидаги мулоҳазаларни ҳосил қилиш мумкин:

$\forall x \forall y P(x,y)$, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists x \exists y P(x,y)$.

Предикатлар алгебрасида (ПА) қуйидаги белгилар ишлатилади:

1. $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ – предмет ўзгарувчилар.
2. $R_0^{(n)}, \dots, R_i^{(m)}, \dots$ – предикат белгилари.
3. $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \rceil$ -мантиқ амаллари белгилари.
4. $\forall, \exists$ - кванторлар.
5. (,) - қавслар.

26-таъриф. 1. Ҳар қандай мулоҳаза формуладир.

2. $R_i^n(x_1, \dots, x_n)$ – n ўринли предикат формуладир.

3.ПА нинг бирида боғлиқ бўлган предмет ўзгарувчи иккинчисида эркин бўлмайдиган $\Im$ ва $\wp$ формулалар берилган бўлсин. У ҳолда

$\Im \wedge \wp$, $\Im \vee \wp$, $\Im \Rightarrow \wp$ ифодалар ҳам ПА нинг формулаларидир.

4. Агар $\Im$ ПА нинг формуласи бўлса, $\rceil \Im$ ҳам ПА нинг формуласидир.

5. ПА нинг x эркин ўзгарувчи қатнашган $\Im(x)$ формуласи берилган бўлсин. У ҳолда $\forall x \Im(x)$, $\exists x \Im(x)$ ифодалар ҳам ПА нинг формулаларидир.

6. ПА нинг 1-5 ларда санаб ўтилган формулалардан ташқари бошқа формулалари йўқ.

28-таъриф. ПА нинг ўзлари аниқланган ҳар қандай соҳада тенг кучли бўлган формулалари тенг кучли формулалар дейилади.

Асосий тенгкучлиликлар :

1. $\rceil(\forall x A(x)) \equiv \exists x \rceil A(x)$,
2. $\rceil(\exists x A(x)) \equiv \forall x \rceil A(x)$,
3. $\forall x A(x) \equiv \rceil(\exists x \rceil A(x))$,
4. $\exists x A(x) \equiv \rceil(\forall x \rceil A(x))$,
5. $\forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x) \equiv \forall x(A(x) \,\&\, B(x))$,
6. $C \,\&\, \forall x B(x) \equiv \forall x(C \,\&\, B(x))$,

7. $C \vee \forall xB(x) \equiv \forall x(C \vee B(x))$,

8. $C \Rightarrow \forall xB(x) \equiv \forall x(C \Rightarrow B(x))$,

9. $\forall x(B(x) \Rightarrow C) \equiv \exists xB(x) \Rightarrow C$,

10. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$,

11. $\exists x(C \vee B(x)) \equiv C \vee \exists xB(x)$,

12. $\exists x(C \,\&\, B(x)) \equiv C \,\&\, \exists xB(x)$,

13. $\exists xA(x) \,\&\, \exists yB(y) \equiv \exists x\exists y(A(x) \,\&\, B(y))$,

14. $\exists x(C \Rightarrow B(x)) \equiv C \Rightarrow \exists xB(x)$,

15. $\exists x(B(x) \Rightarrow C) \equiv \forall xB(x) \Rightarrow C$.

3. Ҳар қандай теоремани $A \Rightarrow B$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда A мулоҳаза теореманинг шарти, B мулоҳаза эса теореманинг хулосасидир. A мулоҳазани етарли ва B мулоҳазани зарурий шарт деб атаймиз.

Қуйидаги 4 та кўринишдаги теоремаларни қарайлик:

2. $A \Rightarrow B$;

II. $B \Rightarrow A$;

III. $\rceil A \Rightarrow \rceil B$;

IV. $\rceil B \Rightarrow \rceil A$.

29-таъриф. II теорема I теоремага тескари, III теорема эса I теоремага қарама-қарши теорема дейилади.

Таърифдан кўринадики, IV теорема II теоремага қарама-қарши, III теоремага тескари теорема экан. Ростлик жадвали ёрдамида I теорема билан IV теореманинг тенг кучли теоремалар бўлишини исбот қилиш мумкин:

A	B	$\rceil A$	$\rceil B$	$A \Rightarrow B$	$\rceil B \Rightarrow \rceil A$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1

0	0	1	1	1	1

II ва III теоремалар ҳам тенг кучли теоремалар эканлигини кўриш қийин эмас.

Шундай қилиб, $(A \Rightarrow B) \equiv (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$ ва $(B \Rightarrow A) \equiv (\rceil A \Rightarrow \rceil B)$.

Бизга $A \Rightarrow B$ теорема берилган бўлсин. Кўп ҳолларда амалиётда

$A \Rightarrow B$ теорема ўрнига $\rceil B \Rightarrow \rceil A$ теорема исбот қилинади ва сўнгра

$A \Rightarrow B$ теорема ҳам тўғри деб хулоса чиқарилади. Бундай исбот қилиш усули тескарисидан исбот қилиш усули дейилади.

$A \Rightarrow B$ теорема тўғри бўлиб, унга тескари $B \Rightarrow A$ теорема тўғри бўлмаслиги мумкин.

Мисол. А мулоҳаза «m бутун сон 12 га бўлинади»-жумладан, В эса «m сон 3 га бўлинади»- жумладан иборат бўлсин, у холда аёнки, $A \Rightarrow B$ теорема рост яъни тўғри, лекин $B \Rightarrow A$ теорема эса нотўғри, яъни ёлғон мулоҳазалардир.

Мисол. Пифагор теоремаси. Агар учбурчак тўғри бурчакли учбурчак бўлса, ката томонининг квадрати қолган иккита томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг.

«Учбурчак тўғри бурчакли» учбурчак бўлиши А мулоҳаза, «учбурчакнинг катта томони квадрати қолган иккита томонлари квадратлари йиғиндисига тенг» бўлиши В мулоҳаза бўлсин. У холда Пифагор теоремасини $A \Rightarrow B$ кўринишда ёзишимиз мумкин. Равшанки, Пифагор теоремаси учун $B \Rightarrow A$, $\rceil A \Rightarrow \rceil B$, $\rceil B \Rightarrow \rceil A$ теоремаларнинг ҳаммаси тўғридир.

Такрорлаш учун саволлар:

1. Мулоҳаза, улар устида мантиқ амаллари.
2. Формула, тенг кучли формулалар.
3. Умумқийматли, бажарилувчи, айнан ёлғон формулалар.

4. Буль алгебраси, икки қийматли функциялар
5. Предикат нима ?
6. Предикат тушунчасига мисоллар келтиринг.
7. Мулоҳаза предикат бўла оладими ?
8. Предикат ростлик соҳасининг хоссалари.
9. Предикатлар устида мантиқ амаллари.
10. $\forall$ ва $\exists$ кванторларининг моҳиятини тушунтиринг.
11. $\exists x(x^4-5x^2+4=0)$ предикатнинг ҳақиқий сонлар тўпламидаги қийматини топинг.
12. $\forall x \exists y(P(x) \vee \rceil P(y))$ предикатни сўзлар ёрдамида ифодаланг.
13. Предикатлар алгебраси нима?
14. ПА нинг формуласига таъриф беринг.
15. Тенг кучли формулалар.
16. Асосий тенг кучлиликларни айтинг.
17. Теореманинг тузилиши.
18. Зарурий ва етарли шартлар.
19. Теоремани тескарисидан исбот қилиш усулини тушунтиринг.
20. Теоремани тескарисидан исбот қилиш усулига мисоллар келтиринг.

Таянч тушунчалар: мулоҳаза, мантиқ амаллари, формула, формула ранги, тенг кучли формула, умумқийматли, бажарилувчи, айнан ёлғон формулалар; Буль алгебраси, икки қийматли функция, реле - контакт схема, контактларни кетма-кет, параллел улаш, предикат, мавжудлик квантори, умумийлик квантори, эркли ўзгарувчи, квантор орқали боғланган ўзгарувчи, функция, ўзгарувчи элемент, предикат, бир ўринли предикат, икки ўринли предикат, ростлик соҳаси, мантиқ амаллари, ПА, формула, тенг кучли формула, теорема, теореманинг шарти, теореманинг хулосаси, тўғри, тескари, қарама-қарши теоремалар.

2-маъруза. **Тўпламлар ва муносабатлар.**

Режа:

1. Тўпламлар устида амаллар ва уларнинг хоссалари.
2. Декарт кўпайтма. Бинар, n-ар муносабатлар. Функция тушунчаси.
3. Бинар, n-ар алгебраик амаллар. Алгебралар.

Адаби¸тлар :

1. [3] , 2- боб, 1-§.
2. [4] , 1-боб, 5-§.
3. [3] , 2-боб, 2-5 - §§.
4. [4] , 1-боб, 5,6 - §§.

1. Тўплам математиканинг бошланғич тушунчаларидан бири бўлиб, таърифсиз қабул қилинади. Тўпламлар лотин алифбосининг бош харфлари билан белгиланади. Тўпламни ташкил қилувчи объектлар тўпламнинг элементлари дейилади.

$a \in A$ ¸зувни a объект А тўпламнинг элементи, $a \notin A$ ¸ки $a \overline{\in} A$ ¸зувни a объект А тўпламга тегишли эмас деб ўқиймиз.

N = { 1,2,3,. . . } тўпламни барча натурал сонлар тўплами;
Z = { . . . ,-3,-2,-1,0,1,2,3, . . . } тўпламни барча бутун сонлар тўплами деймиз. Барча рационал сонлар тўпламини - Q ; барча ҳақиқий сонлар тўпламини - R; барча комплекс сонлар тўпламини – С орқали белгилаб оламиз. Бир хил элементлардан ташкил

топган тўпламлар тенг тўпламлар дейилади ва A = B кўринишда ¸зилади. Битта ҳам элементи бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва $\varnothing$ ¸ки Λ символлар орқали белгиланади. Агар A тўпламнинг барча элементлари B тўпламнинг ҳам элементлари бўлса, A тўплам B тўпламнинг тўпламостиси дейилади ва $A \subset B$ орқали белгиланади.

1-таъриф. A ва B тўпламларнинг камида биттасига тегишли бўлган барча элементлардан ташкил топган тўплам, A ва B тўпламларнинг йиғиндиси дейилади ва $A \cup B$ орқали белгиланади.

2-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча умумий элементларидан ташкил топган тўплам A ва B тўпламларнинг кесишмаси дейилади ва $A \cap B$ орқали белгиланади.

3-таъриф. A тўпламдан B тўпламнинг айирмаси деб, A нинг B га тегишли бўлмаган барча элементларидан ташкил топган тўпламга айтилади ва A \ B орқали белгиланади.

4-таъриф. (A\B) $\cup$ (B\A) – тўплам A ва B тўпламларнинг симметрик айирмаси дейилади ва $A \Delta B$ орқали белгиланади.

5-таъриф. Агар $A \subset B$ бўлса, B \ A тўплам A тўпламнинг B тўпламгача тўлдирувчи тўплам дейилади ва A' ¸ки CA орқали белгиланади.

Агар бирор E тўплам ва фақат E нинг тўпламостилари билангина иш кўрсак, E ни универсал тўплам деймиз. Масалан, планиметрияда текислик универсал тўплам вазифасини бажаради.

Мисол. A = { 1, 2, σ, λ, ν }, B = { 1, λ, σ, 8, 9 } тўпламлар берилган бўлсин, у ҳолда

$A \cup B$ = { 1, 2, σ, λ, ν, 8, 9 } , $A \cap B$ = { λ, σ }

A \ B = {2, ν}.

Тўпламлар устида бажариладиган амаллар қуйидаги хоссаларга эга :

1. $\left.\begin{array}{l} A\cap B=B\cap A \\ A\cup B=B\cup A \end{array}\right\}$ бирлашма ва кесишманинг коммутативлиги.

2. $\left.\begin{array}{l} (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \end{array}\right\}$ кесишма ва бирлашманинг ассоциативлиги.

3. Кесишманинг бирлашмага нисбатан дистрибутивлиги :
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4. Бирлашманинг кесишмага нисбатан дистрибутивлиги :
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

5. $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$.

6. $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

7. $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$.

8. $A\cup A=A$.

9. $A\cap A=A$.

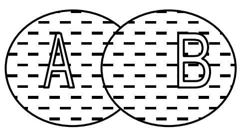
10. $A\subset B$ бўлса, $(A')'=A$ бўлади.

11. Агар $A\subset C$ ва $B\subset C$ бўлса, $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ва $(A\cup B)'=A'\cap B'$ бўлади.

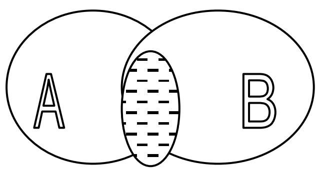
12. $A\cap\varnothing=\varnothing$.

13. $A\cup\varnothing=A$.

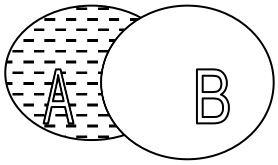
Тўпламлар устида бажариладиган амалларни тушунишни қуйидаги шакллар анча енгиллаштиради :



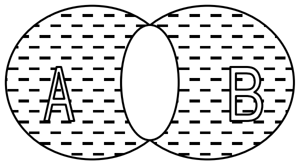
$A\bigcup B$



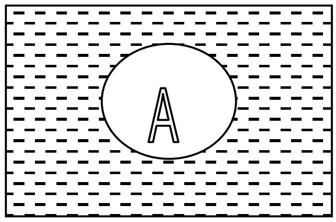
$A\bigcap B$



$A \setminus B$



$A \Delta B$



A'

Бу шакллар Эйлер-Венн диаграммалари дейилади.

2. А ва В ихти¸рий тўпламлар берилган бўлсин. А тўпламнинг ихти¸рий α ва В тўпламнинг ихти¸рий b элементи учун кўрсатилган тартибда олинган (α ,b) тартибланган жуфтлик дейилади. α элемент тартибланган жуфтликнинг биринчи координатаси, b эса иккинчи координатаси дейилади. (α , b) ва (c , d) тартибланган жуфтликларнинг мос координаталари тенг бўлса, у ҳолда бундай тартибланган жуфтликлар тенг дейилади.

$A \times B = \{ (\alpha, b) \mid \forall \alpha \in A \wedge \forall b \in B \}$ тўплам А ва В тўпламларнинг декарт кўпайтмаси дейилади. Агар А= В бўлса, $A \times B$ ўрнига A^2 деб ¸замиз. Масалан, R – ҳақиқий сонлар тўплами бўлса, R^2- текисликдаги нуқталар тўпламидан иборат. Шунга ўхшаш,

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – орқали барча ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) кўринишдаги тартибланган n-ликлар тўпламини белгилаймиз ва у $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламларнинг декарт кўпайтмаси дейилади. Ҳусусан, $A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ та}}$

А тўпламнинг n- даражали декарт кўпайтмаси дейилади. А тўпламнинг 1-даражаси А нинг ўзига тенг. А нинг 0-даражаси сифатида, бир элементли $\{\varnothing\}$ тўпламни тушунамиз.

А ва В тўпламлар берилган бўлсин. А тўпламнинг ҳар бир элементига В тўпламнинг кўпи билан битта элементини мос қўядиган f мослик А тўпламда берилган функция дейилади. ¸ки А тўпламдан В тўпламга акслантириш дейилади ва $f : A \to B$ кўринишда белгиланади. А тўпламнинг x элементига мос келадиган В тўпламнинг y элементини f(x) орқали белгилаймиз ва $y = f(x)$ кўринишда ¸замиз.

$Domf = \{ x \mid \forall x \in A \wedge f(x) \in B \}$ тўплам f функциянинг аниқланиш соҳаси ; $Imf = \{ f(x) \mid \forall x \in A \}$ тўплам f функциянинг ўзгариш соҳаси дейилади.

$f : A \to B$ функция берилган бўлсин. Агар В тўпламнинг ҳар бир y элементи учун шундай $x \in A$ элемент топилиб, $y = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, f- сюръектив; А тўпламнинг ҳар қандай x_1, x_2 элементлари учун $x_1 \neq x_2$ шартдан $f(x_1) \neq f(x_2)$ шарт келиб чиқса, f- инъектив функция дейилади. Ҳам инъектив, ҳам сюръектив функция биектив функция дейилади.

$E : A \to A$, $E(x) = x$ акслантириш бирлик акслантириш дейилади.

$g: A \to B$; $f : B \to C$ акслантиришлар берилган бўлсин. У ҳолда $f \circ g : U \to W$; $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ акслантириш f ва g акслантиришларнинг композицияси дейилади.

1-теорема. Функциялар композицияси ассоциативдир. Яъни, агар $h: U \to V$, $g: V \to W$, $f: W \to T$ учта функция берилган бўлса, $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$.

Исбот. $\forall x\in V$ учун $((f\circ g)\circ h)(x) = (f\circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) =$ $f((g\circ h)(x) = (f\circ(g\circ h))(x)$.

$f : X \to Y$, $g : Y \to X$ функциялар берилган бўлсин. У ҳолда, агар $f\circ g = E$ шарт бажарилса, f функция g га чапдан тескари, g эса f га ўнгдан тескари функция дейилади. f функцияга ҳам чапдан, ҳам ўнгдан тескари функция f га тескари функция дейилади.

2-теорема. $f : A \to B$ функцияга тескари функция мавжуд бўлиши учун f – биектив функция бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. f – биектив функция бўлсин. У ҳолда теорема шартига кўра $\forall x\in A$ элемент учун ягона $y\in B$ элемент топилиб, $x_1 \neq x_2$ бўлса, $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлади. $f : A \to B$ функцияга тескари функция сифатида $\forall y\in B$ элемент учун $y=f(x)$ функцияга $g(x)=y$ тенглик билан аниқланадиган $g : B \to A$ функцияни олиш етарли.

Агар g функция f функцияга тескари функция бўлса, у ҳолда f- биектив бўлишини исбот қилишни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

6*-таъриф.* A ва B тўпламлари учун $A \times B$ декарт кўпайтманинг ихти¸рий тўпламостиси A ва B тўпламлар орасидаги бинар муносабат дейилади.

Агар $R \subset A\times B$ ва $(\alpha , b) \in R$ бўлса, α ва b элементлар R бинар муносабатда дейилади ва αRb кўринишда белгиланади.

Агар $A = B$ бўлса, $A \times B$ нинг ҳар қандай R тўпламостиси A тўпламда берилган бинар муносабат дейилади. R – бинар муносабатидаги барча (α , b) элементларнинг биринчи координаталари R бинар муносабатнинг аниқланиш соҳаси дейилади ва DomR орқали белгиланади. Худди шунга ўхшаш ImR

$= \{ b \mid \forall (\alpha, b) \in R \}$ тўплам R бинар муносабатнинг ўзгариш соҳаси дейилади.

Мисол. $R = \{ (1,2), (1,3), \ldots; (2,3), \ldots \}$ натурал сонлар тўпламида « < » муносабатдир. 1 R 2 ўрнига $1 < 2$ деб ¸замиз.

7-таъриф. X тўпламда ρ бинар муносабат берилган бўлсин.

1. $\forall x \in X$ учун $x\rho x$, яъни $(x,x) \in \rho$ бўлса, у ҳолда ρ - рефлексив.

2. $\forall (x,y) \in \rho$ бўлишидан $(y,x) \in \rho$ эканлиги келиб чиқса, ρ- симметрик.

3. $\forall (x,y) \in \rho$ ва $\forall (y,z) \in \rho$ бўлишидан $(x,z) \in \rho$ келиб чиқса, ρ- транзитив.

4. $\forall x \in X$ учун $(x,x) \notin \rho$ бўлса, антирефлексив.

5. $\forall (x,y) \in \rho$ учун $(y,x) \in \rho$ бўлишидан $x=y$ келиб чиқса, у ҳолда ρ- антисимметрик.

8-таъриф. Рефлексив, симметрик ва транзитив муносабат эквивалент муносабат дейилади. Эквивалент муносабат одатда ~ символи билан белгиланади.

X тўпламда ~ - эквивалентлик муносабати берилган бўлсин.

$\overline{a} = \{ x \mid x \in X \wedge x \sim \alpha \}$ тўплам α элемент яратган эквивалентлик синфи дейилади. $\overline{a}$ нинг ихти¸рий элементи $\overline{a}$ синфининг вакили дейилади.

9-таъриф. A тўпламнинг

1. Ҳар қандай $i \neq j$ лар учун $A_i \cap A_j = \varnothing$;

2. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

шартларни қаноатлантирадиган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламостиларидан

$\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ тўплам A тўпламнинг бўлакланиши дейилади.

3-теорема. X тўпламнинг барча эквивалентлик синфларидан тузилган $X/\sim = \{ \overline{x} \mid x \in X \}$ тўплам X тўпламнинг бўлакланишидир. Аксинча, X тўпламнинг ҳар қандай бўлакланиши X тўпламда аниқланган бирорта эквивалентлик муносабати бўйича барча эквивалентлик синфларидан иборатдир. (X/~ = { $\overline{x}$ | x∈X } – тўплам X тўпламнинг ~ - эквивалентлик муносабат бўйича фактор-тўплами дейилади).

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, $\overline{x}, \overline{y} \in$ X /~ бўлсин. Агар z $\in \overline{x} \cap \overline{y}$ бўлса, у ҳолда $\overline{x} \sim$ z , z $\sim \overline{y}$ дан $\overline{x} = \overline{y}$ келиб чиқади. Яъни, X/~ нинг турли элементлари кесишмайди. X = $\bigcup\limits_{x \in X} \overline{x}$ бўлиши а¸н.

Аксинча, агар { A_1, A_2, . . . , A_n } – тўплам X тўпламнинг бўлакланиши бўлса, у ҳолда бўлакланиш (x~y) ↔ (x,y ∈ A_i), i = 1,. . . , n формула билан аниқланган ~ эквивалентлик муносабати ҳосил қилган фактор тўпламдан иборатдир.

10-таъриф. X тўпламни У тўпламга акслантирадиган камида битта f- биектив функция мавжуд бўлса, бу тўпламлар изоморф ¸ки тенг қувватли тўпламлар дейилади.

X ва У тўпламларнинг изоморф эканлиги X ≅ У орқали ифодаланади.

4-теорема. f : X → Y акслантириш сюръектив акслантириш бўлсин, у ҳолда ∀x_1,x_2∈X учун (x_1~x_2) ↔ (f(x_1) = f(x_2)) формула X тўпламда эквивалентлик муносабатини аниқлайди.

Исбот. 1. ~ -рефлексив. Ҳақиқатдан ҳам, ∀x∈X учун x~x. Чунки, f(x)=f(x). 2. ∀x,y∈X учун x~y бўлса, у ҳолда f(x)=f(y). Демак, f(y)=f(x), у ҳолда y~x . Яъни , ~ - симметрик муносабат. 3. ~ - транзитив. Чунки, f(x)=f(y) ва f(y)=f(z) бўлса, f(x)=f(z) бўлиши а¸н.

5-теорема. f : X→У – сюръектив акслантириш берилган бўлсин, у ҳолда X да юқоридаги теоремада аниқланган ~ - эквивалентлик муносабатига нисбатан X/~ - фактор-тўплам У тўпламга изоморфдир. Яъни, X/~ ≅ У.

Исбот. ∀ $\overline{x}$ ∈X/~ учун Ф($\overline{x}$) = f(x) тенглик билан аниқланган Ф – акслантириш биектив акслантиришдир.

11-таъриф. X- тўпламда аниқланган антисимметрик ва транзитив муносабат тартиб муносабат дейилади. Рефлексив бўлган тартиб муносабат ноқатъий, антирефлексив бўлган тартиб муносабат қатъий тартиб муносабат дейилади. Тартиб муносабат $<, \leq, \geq, >$ символлари билан ифодаланади.

Агар $(a,в)\in<$ бўлса, $a<b$ деб ¸зилади;

$a\leq b$ ¸зув $a<b$ ¸ки $a=b$ маъносида ишлатилади;

$b<a$ бўлса, $a>b$; $b\leq a$ бўлса, $a\geq b$ деб ¸замиз.

12-таъриф. X тўпламда ρ - тартиб муносабат аниқланган бўлса (X,ρ) жуфтлик тартибланган тўплам ¸ки қисман тартибланган тўплам дейилади. Агар $\forall a,b\in X$ учун $a=b$ ¸ки $a \;\rho\; b$ ¸ки $b \;\rho\; a$ муносабатлардан бири бажарилса, (X,ρ) – чизиқли тартибланган тўплам дейилади.

Тартибланган тўпламда максимал, минимал, энг катта, энг кичик элементлар одатдагидек тасаввурга мос ҳолда киритилади. Улар устида тўхталиб ўтирмайми.

Мисол. $\mathfrak{B}$ (X) – X нинг барча тўпламостиларининг тўплами бўлсин. У ҳолда ($\mathfrak{B}$ (x),$\subset$) - қисман тартибланган тўпламдир.

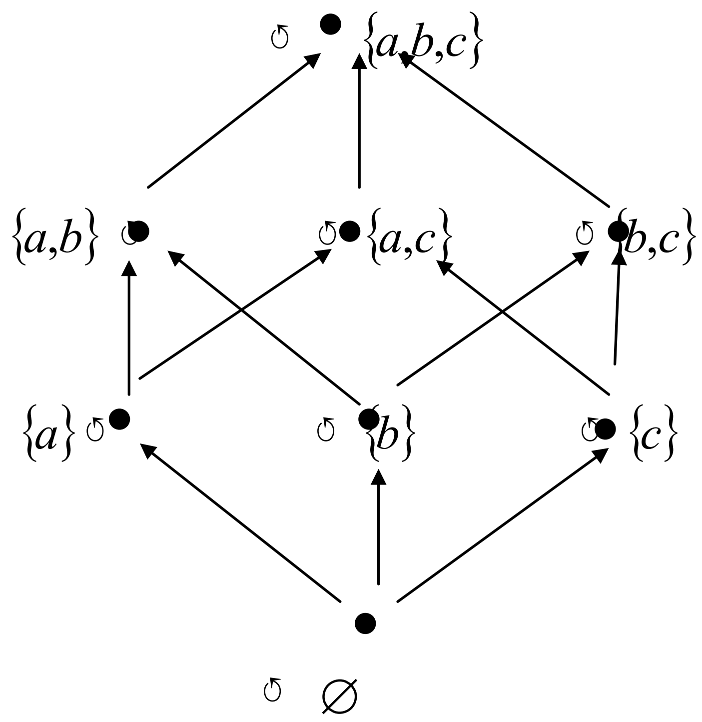
Мисол. N натурал сонлар тўпламида $\forall a,b\in N$ учун агар шундай $k\in N$ топилиб, $a=b\cdot k$ шарт бажарилса $a\vdots b$ деймиз. $(N,\vdots)$ - қисман тартибланган тўпламдир.

Мисол. $\forall a,b\in N$ сонлар учун шундай $k\in N$ топилиб, $a=b+k$ тенглик ўринли бўлса, $a>b$ деймиз. $(N,>)$ - чизиқли тартибланган тўпламдир.

Чекли тўпламларда бинар муносабатни яхши тасаввур қилиш учун унинг графи деб аталувчи геометрик ифодасидан фойдаланилади. X чекли тўплам элементларини текисликда нуқталар орқали ифода қилиб, $\forall a,b\in X$ элементлар учун $(a,b)\in\rho$ бўлса, $a\to b$ орқали, $(a,a)\in\rho$ бўлса, ↻ орқали ифода қиламиз. Ҳосил бўлган геометрик шакл ρ бинар муносабатнинг графи дейилади. $a, b, c, \ldots$ нуқталар графнинг учлари кесмалар графнинг қирралари дейилади.

Мисол. $X = \{a, b, c\}$ - тўплам берилган бўлсин.

X тўпламнинг барча тўпламостиларидан тузилган $\mathfrak{B}$ (X)= $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ - тўпламда $\subset$ - тўпламости бўлиш муносабати қатъий тартиб муносабатдир. Бу муносабатнинг графини келтирамиз.



3.

13-таъриф. A≠∅ тўплам берилган бўлсин. У холда ҳар қандай

f: AxA $\rightarrow$A акслантириш A тўпламда аниқланган бинар алгебраик амал дейилади.

Фараз қилайлик, f(a,b) = c бўлсин. У холда afb=c кўринишда ёзишни келишиб оламиз.

Мисол. N – натурал сонлар тўплами ва $+: N\times N\to N$ N да аниқланган «+» амали бўлса, у холда $+(n,m)=k$ ўрнига $n+m=k$ деб ёзамиз. Масалан, $+(2,3)=5$ ўрнига $2+3=5$ деб ёзамиз.

14-таъриф. $A\neq\varnothing$ тўплам берилган бўлсин. У холда $n=0,1, \ldots$ лар учун

$f:A^n\to A$ кўринишдаги ҳар қандай амал A тўпламда аниқланган n-ар алгебраик амал дейилади.

$n=0$ бўлсин. У холда $A^0=\{\varnothing\}$ бўлиб, $f:\{\varnothing\}\to A$ акслантириш A тўпламдан ажратилган элемент бўлишини тушуниш қийин эмас. Шундай қилиб, 0-ар амал A тўпламнинг ажратилган элементи экан.

$n=1$ бўлса, $f:A\to A$ бўлиб, 1-ар алгебраик амал бу A тўпламда аниқланган ихтиёрий функцияни билдиради.

15-таъриф. A тўпламда аниқланган $*$ ва $\bullet$ бинар алгебраик амаллар берилган бўлсин. Агар $\forall a,b,c\in A$ элементлар учун $a*b=b*a$ шарт бажарилса, * - коммутатив бинар амал; $(a*b)*c=a*(b*c)$ тенглик бажарилса, * алгебраик амал ассоциатив алгебраик амал; $a*(b\bullet c)=(a*b)\bullet(a*c)$ тенглик бажарилса, * алгебраик амал $\bullet$ алгебраик амалга нисбатан дистрибутив алгебраик амал дейилади.

Мисол. Рационал сонлар тўплами Q да қушиш ва кўпайтириш амаллари коммутатив ва ассоциатив, кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутив, айириш амали эса ассоциатив ҳам, коммутатив ҳам эмас.

Мисол. $A\neq\varnothing$ тўпламнинг барча тўпламостилар тўплами B (A) бўлсин. Тўпламлар устида $\cap$, $\cup$ амаллари ассоциатив ва коммутатив амаллардир Хамда улар бир-бирига нисбатан дистрибутивдирлар.

Мисол. Функциялар тўпламида аниқланган композиция амали ассоциатив, лекин умумий холда коммутатив эмас.

16-таъриф. $A\neq\varnothing$ тўплам ва унда аниқланган * бинар алгебраик амал берилган бўлсин. У холда $e\in A$ элемент ва $\forall a\in A$ элемент учун $e*a=a$ шарт бажарилса, e- чап нейтрал элемент; $a*e=a$ шарт бажарилса, ўнг нейтрал элемент; икала шарт ҳам бажарилса, нейтрал элемент дейилади.

Мисол. Z-бутун сонлар тўплами берилган бўлсин. У ҳолда 0 сони қўшиш амалига нисбатан нейтрал элемент; 1- эса, кўпайтириш амалига нисбатан нейтрал элементдир.

Мисол. $A\neq\varnothing$ тўпламнинг барча тўпламостилар тўплами B (A) да $\varnothing$ тўплам тўпламларнинг бирлашмаси учун нейтрал элемент ва A тўплам тўпламларнинг кесишмаси учун нейтрал элементдир.

Мисол. B тўплам $A\neq\varnothing$ тўпламнинг бўш бўлмаган тўпламостиси бўлсин. У холда, барча f: $A\to B$ функциялар тўпламини A^B кўринишда белгилаймиз. $\forall x\in B$ элемент учун $E_B(x)=x$ шарт билан аниқланадиган ҳар қандай $E_B : A \to B$ функция, функцияларнинг композицияси амалига нисбатан чап нейтрал элемент бўлади. Лекин A^B да бирорта ҳам ўнг нейтрал элемент мавжуд эмас. Ҳақиқатдан ҳам, $(E_B\circ \varphi)(x)= E_B (\varphi(x))=\varphi(x)$. Яъни, E_B чап нейтрал элемент. Фараз қилайлик, $E\in A^B$ ўнг нейтрал элемент бўлсин, у холда $(\varphi\circ E)(x)=\varphi(E(x))=\varphi(x)$ бўлиши керак. Лекин $\forall x\in A\backslash B$ элементлар учун $E(x)=x$ бўлса, у холда $E\notin A^B$.

17-таъриф. $A\neq\varnothing$ тўпламда * бинар алгебраик амал аниқланган бўлсин. A тўпламдан олинган a элемент учун ва ихтиёрий $b,c\in A$ лар учун $a*b=a*c$ шартдан $b=c$ шарт келиб чиқса, у холда a элемент * амалга нисбатан чап регуляр элемент; агар $b*a=c*a$ шартдан $b=c$ шарт келиб чиқса, a элемент * амалга нисбатан ўнг регуляр элемент; ҳам чап ҳам ўнг регуляр элемент регуляр элемент дейилади.

Мисол. Z бутун сонлар тўпламида ҳар қандай элемент қўшиш амалига нисбатан регуляр элементдир; ҳар қандай нолдан фарқли элемент эса кўпайтириш амалига нисбатан регулярдир.

6-теорема. A тўпламда *- ассоциатив бинар алгебраик амал аниқланган бўлсин. Агар $a,b \in A$ элементлар * амалга нисбатан регуляр бўлсалар, у холда $a*b$ элемент ҳам * амалга нисбатан регуляр бўлади.

Исбот. $\forall c,d \in A$ элементлар учун $(a*b)*d=(a*b)*c$ бўлсин. У холда * амалнинг ассоциативлигидан $a*(b*d)=a*(b*c)$ келиб чиқади. Бундан a элементнинг регуляр эканлигини эътиборга олсак, $b*d=b*c$ ҳосил бўлади. b элементнинг регулярлигидан эса d-c га эга бўламиз. Худди шундай $d*(a*b)=c*(a*b)$ тенгликдан $d=c$ ни ҳосил қилиш мумкин.

18-таъриф. A тўпламда * бинар алгебраик амал аниқланган бўлиб, e элемент * амалга нисбатан нейтрал элемент бўлсин. У холда, $a,b \in A$ элементлар учун $a*b=e$ шарт ўринли бўлса, a элемент b элементга * алгебраик амалга нисбатан чапдан, b эса a га * алгебраик амалга нисбатан ўнгдан симметрик элемент дейилади. Ҳам ўнгдан, ҳам чапдан симметрик бўлган элемент симметрик элемент дейилади. Яъни, $a*b=b*a=e$ тенглик бажарилса, a ва b лар бир-бирига симметрик элементлар дейилади.

Мисол. Бутун сонлар тўпламида ихтиёрий a элемент учун -a элемент қўшишга нисбатан симметрик. Кўпайтириш амалига нисбатан эса, фақат 1 ва -1 лар бир-бирига симметрик элементлардир.

7-теорема. Агар A тўпламда аниқланган * ассоциатив бинар алгебраик амалга нисбатан a элементга симметрик бўлган элемент мавжуд бўлса, у элемент ягонадир.

Исбот. Фараз қилайлик, $a*b=b*a=e$ ва $a*c=c*a=e$ бўлсин. У холда $b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c$. Яъни $b=c$/

8-теорема. Агар A тўпламда аниқланган * ассоциатив бинар алгебраик амалга нисбатан $a,b\in A$ элементларга мос равишда c ва d элементлар симметрик элементлар бўлсалар, у холда $a*b$ элементга $d*c$ элемент * амалга нисбатан симметрикдир.

Исбот. $(a*b)*(d*c)=a*((b*d)*c)=a*(e*c)=a*c=e$. Шу сингари $(d*c)*(a*b)=e$ бўлиши исботланади.

A тўпламда ниқланган * бинар алгебраик амалга нисбатан a элементга b элемент симметрик бўлса, у холда b элементни a^{-1} орқали белгилаймиз. A элементни эса симметрияланувчи элемент деймиз.

9-теорема. A тўпламда * ассоциатив бинар алгебраик амал аниқланган бўлсин. У холда ҳар қандай симметрияланувчи элемент регулярдир.

Исбот. $\forall a\in A$ симметрияланувчи элемент берилган бўлиб, $\forall b,c\in A$ лар учун $a*b=a*c$ бўлсин. У холда $a' * (a*b) = a' * (a*c)$ тенгликдан $(a' *a)*b=(a' * a)*c$ ёки $e*b=e*c$, яъни $b=c$ келиб чиқади. Ҳудди шундай $b*a=c*a$ бўлса, $b=c$ келиб чиқишини кўрсатиш мумкин.

Такрорлаш учун саволлар:

1. Тўплам элементи, тўпламости, бўш тўплам тушунчаларига таъриф беринг.
2. Тўпламлар устида қандай амаллар аниқланган?
3. Тўпламлар устида аниқланган амалларнинг хоссаларини исботланг.
4. Эйлер-Венн диаграммалари ¸рдамида тўпламлар устида бажариладиган амаллар хоссаларини ифодаланг.

5. Тўпламларнинг декарт кўпайтмаси деб нимага айтилади?
6. Акслантиришга таъриф беринг.
7. Биектив, инъектив, сюръектив, тескари акслантиришлар деб нимага айтилади?
8. Тартиб, эквивалентлик муносабатларига мисоллар келтиринг.
9. Чекли тўпламда берилган бинар муносабатнинг графи қандай фигура?

Таянч тушунчалар: тўплам, тўплам элементи, бўш тўплам, тўпламости, тўпламлар бирлашмаси, кесишмаси, айирмаси, тўплам тўлдирувчиси, универсал тўплам, Эйлер-Венн диаграммалари. тартибланган жуфтлик**,** декарт кўпайтма, акслантириш, изоморфизм, тартиб муносабат, эквивалентлик муносабати, граф.

3-маъруза. Комплекс сонлар майдони.

Дарс режаси:

1. Комплекс сон. Сонли майдонлар.
2. Комплекс сон қўшмаси, модули.
3. Комплекс соннинг геометрик, тригонометрик шакли.
4. Комплекс сондар илдиз чиқариш.

Адаби¸тлар:

1. [3], 4-боб, 7,8-§§.
2. [4], 5-боб, 1-§.

Маълумки, ҳақиқий сонлар майдонида $x^2+1=0$ тенглама ечимга эга эмас. Бу тенглама ечимга эга бўладиган ҳақиқий сонлар майдонининг энг кичик кенгайтмаси бўлган майдон қурамиз. Бунинг учун $\sqrt{-1}$ ни i орқали белгилаб оламиз. $C=\{a+bi|a,b\in R\}$ тўпламни қараймиз. С тўпламда $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$, $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$, $-(a+bi)=(-a)+(-b)i$ тенгликлар орқали қўшиш, кўпайтириш, қарама-қаршисини олиш амалларини аниқлаймиз.

С тўплам юқорида аниқланган амалларга нисбатан майдон ташкил қилишини текширамиз. Ҳақиқатдан ҳам, қўшиш, кўпайтириш амалларининг коммутативлиги, ассоциативлиги, кўпайтиришнинг қўшишга нисбатан дистрибутивлиги бевосита текширилади. $0+0i$

Элемент С тўпламда қўшишга нисбатан нейтрал элемент бўлиб, уни 0 орқали белгилаймиз. $1+0i$ эса бирлик элементдир. Ихти¸рий $a+bi\neq0$

элемент учун тескари элемент $$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

формула билан аниқланади.

Ҳақиқатдан ҳам, $a+bi\neq0$ бўлса, $a^2+b^2\neq0$ бўлиб, $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ элемент мавжуд ва

$$(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)i =$$

$$=1+0i=1.$$

Шундай қилиб, (С, +, -, . , 0, 1) – алгебра майдон экан. Бу майдонни комплекс сонлар майдони деймиз.

1-таъриф. Комплекс сонлар майдониниг ҳар қандай майдоностисини сонли майдон деб атаймиз. Комплекс сонлар майдонининг ҳар қандай ҳалқаостисини эса сонли ҳалқа дейилади.

Рационал сонлар майдони ва унинг майдоностилари, ҳақиқий сонлар майдони ва унинг майдоностилари сонли майдонлардир.

Мисол. $[i]=\{a+bi|\forall a,b\in Z\}$ - тўплам сонли ҳалқадир.

2-таъриф. $\forall a,b\in R$ учун $z=a+bi$ комплекс сонга $\overline{z}=a-bi$ қўшма комплекс сон дейилади.

1-теорема. Ҳар қандай z_1 ва z_2 комплекс сонлар учун қуйидаги хоссалар ўринли :

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
2. $\overline{(-z_1)}=-\overline{z_1}$.
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
4. $\overline{\overline{z_1}}=z_1$.
5. $z_2\neq 0$ учун $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
6. $\overline{z_1}=z_1$ бўлиши учун $z_1\in R$ бўлиши зарур ва етарли.
7. Агар $z_1=a+bi$ бўлса, $z_1\cdot\overline{z_1}=a^2+b^2$.

3-таъриф. $\sqrt{a^2+b^2}$ сон $a+bi$ $(a,b\in R)$ комплекс соннинг модули дейилади. $z=a+bi$ комплекс соннинг модули $|z|$ орқали белгиланади.

2-теорема. Ҳар қандай z_1,z_2 комплекс сонлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли :

1. $|z_1|^2=z_1\cdot\overline{z_1}$.
2. $(z_1=0)\ \Leftrightarrow\ (|z_1|=0)$.

3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

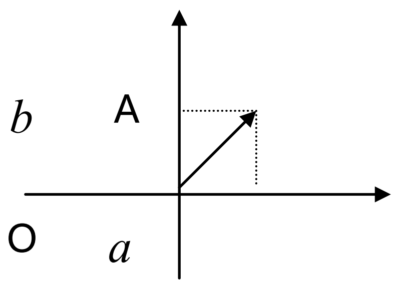
4. $|z_1^{-1}| = |z_1|^{-1}$ $\quad (z_1 \neq 0)$.

5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

6. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

7. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Ҳар бир $a+bi$ комплекс сонга текисликда (a,b) нуқтани мос қўйсак, комплекс сонлар майдони билан текислик орасида биектив мослик ўрнатилади. Демак, ҳар бир комплекс сонга текисликдан ягона нуқта мос қўйилади. Бу нуқта комплекс соннинг геометрик тасвири дейилади. Бу нуқтани координаталар боши билан туташтирсак, боши координаталар бошида, учи эса (a,b) координатали нуқтада бўлган $\overrightarrow{OA}$ вектор ҳосил бўлади. Бу векторнинг узунлиги $a+bi$ комплекс соннинг модулига тенглиги а¸н.



Ҳар бир bi комплекс сонга Оу ўқидаги $(0,b)$ нуқта мос келади. Бу ўқни мавҳум ўқ деб атаймиз. Ох ўқни ҳақиқий ўқ деймиз. Қўшма комплекс сонлар Ох ўқига нисбатан симметрик нуқталар орқали ифода қилинади. Қарама-қарши комплекс сонлар эса, координаталар бошига нисбатан симметрик нуқталар орқали ифодаланади.

Модули r га тенг бўлган барча комплекс сонларнинг геометрик ўрни – радиуси r га тенг, маркази координаталар бошида ¸тувчи айланадан иборатдир.

$\overrightarrow{OA}$ нинг Ох ўқининг мусбат йўналиши (соат стрелкасига қарама – қарши йўналиш) ҳосил қилган энг кичик α_0 бурчак $a+bi$ комплекс соннинг бошланғич аргументи дейилади. Агар комплекс сон биринчи чоракда бўлса, $\alpha_0=arctg\frac{b}{a}$; иккинчи чоракда бўлса, $\alpha_0=\pi-arctg\left|\frac{b}{a}\right|$; учинчи чоракда бўлса, $\alpha_0=\pi+arctg\left|\frac{b}{a}\right|$; тўртинчи чоракда бўлса, $\alpha_0=2\pi-arctg\left|\frac{b}{a}\right|$ тенгликлар билан ҳисобланади.

$\alpha=\alpha_0+2k\pi$, $k\in Z$ бурчаклар комплекс соннинг аргументлари дейилади.

$a+bi$ комплекс сон берилган бўлиб, r унинг модули, α эса аргументи бўлсин. У ҳолда $a=r\cos\alpha, b=r\sin\alpha$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Демак, $a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ тенглик ўринли. Бу эса комплекс соннинг тригонометрик кўриниши дейилади.

3-теорема. $z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$, $z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$ комплекс сонлар берилган бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли:

1. $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$.
2. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$.
3. $z^n=(r(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ (Муавр формуласи).

4-теорема. $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ комплекс сон берилган ва r -комплекс соннинг модули, $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, $k \in Z$ - комплекс соннинг аргументлари, α_0 - бошланғич аргументи бўлсин. У ҳолда z комплекс сон n та ҳар хил n- даражали комплекс илдизларга эга бўлиб, бу илдизлар қуйидаги формула ¸рдамида топилади :

$$v_k = \sqrt[n]{r}\ (\cos\frac{\alpha_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha_0 + 2k\pi}{n}) \quad , k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Такрорлаш учун саволлар:

1. Комплекс сон ҳақида тушунча беринг.
2. Комплекс сонла устида амаллар қандай бажарилади?
3. Сонли майдон деб нимага айтилади?
4. Комплекс соннинг модули, қўшмасининг хоссаларини айтинг.
5. Комплекс соннинг қандай кўринишларини биласиз?
6. Комплекс соннинг тригонометрик кўринишида қандай амаллар бажарилади?

Таянч тушунчалар: ҳақиқий сонлар майдони, комплекс сон, комплекс соннинг тескариси, сонли майдон, қўшма комплекс сон, комплекс сон модули, аргументи, n-даражали илдиз.

4-маъруза. **Бир ўзгарувчили кўпҳадлар.**

Режа:

1. Кўпҳадни (x-c) иккиҳадга бўлиш. Безу теоремаси. Горнер схемаси.
2. Алгебранинг асосий теоремаси (исботсиз). Виет формулалари.
3. Евклид алгоритми. Иккита кўпҳаднинг ЭКУБи.
4. Рационал коэффициентли кўпҳадлар.
5. 3-, 4-даражали тенгламалар.

1. Коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \ . \ . \ . \ + a_{n-1}x + a_n$, $a_0\neq 0$, n-даражали кўпҳад берилган бўлсин. Шу кўринишдаги барча кўпҳадлар тўпламини R[x] орқали белгилаймиз.

1-таъриф. $\forall$ $f(x)\in R[x]$ кўпҳад берилган бўлсин. Агар $a\in R$ ҳақиқий сон учун $f(a)=0$ тенглик ўринли бўлса, у холда a ҳақиқий сон f(x) кўпҳаднинг илдизи дейилади.

1-теорема (Безу). $\forall$ $f(x)\in R[x]$ кўпҳад ва $a\in R$ ҳақиқий сон учун шундай $q(x)\in R[x]$ кўпҳад топилиб, $f(x)=(x-a)q(x)+f(a)$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \ . \ . \ . + a_{n-1}x + a_n$ бўлсин. У ҳолда

$f(a)=a_0a^n+a_1a^{n-1}+ \ . \ . \ . + a_{n-1}a + a_n$ бўлади ва

$f(x)-f(a)= a_0\,(x^n-a^n\,)+a_1\,(x^{n-1}-a^{n-1})+ \ . \ . \ . + a_{n-1}\,(x-a)$.

Демак, $f(x)=(x-a)q(x)+f(a)$. Бу ерда $q(x)=a_0(x^{n-1}+x^{n-2}a+. \ . \ .+xa^{n-2}+a^{n-1})+. \ . \ . +a_{n-1}(x+a)$.

Натижа. $\forall$ $f(x)\in R[x]$ кўпҳад ва $a\in R$ ҳақиқий сон берилган бўлсин. У ҳолда f(x) кўпҳаднинг x-a иккиҳадга бўлиниши учун a ҳақиқий сон f(x) нинг илдизи бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Безу теоремасига асосан $f(x)=(x-a)q(x)+f(a)$. У ҳолда $f(a)=0$ бўлса, $f(x)=(x-a)q(x)$. Аксинча, агар $f(x)=(x-a)q(x)$, яъни $f(x)$ кўпҳад $x-a$ иккиҳадга бўлинса, у ҳолда $f(a)=(a-a)q(a) =0$ бўлади, яъни, а ҳақиқий сон $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлади.

4. Рационал коэффициентли кўпҳадлар.

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ . . . + a_{n-1}x + a_n$ коэффициентлари рационал сонлардан иборат бўлган кўпҳад бериган бўлсин. a_0 ,a_1, . . . , a_n коэффициентларнинг умумий махражи m га тенг бўлса, у ҳолда $mf(x)=g(x)$ (1) кўпҳаднинг барча коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлиши равшан. (1) тенгликдан кўринадики, $f(x)$ нинг ҳар қандай илдизи $g(x)$ нинг ҳам илодизи ва аксинча, $g(x)$ нинг ҳар қандай илдизи $f(x)$ нинг ҳам илдизи бўлади. Шунинг учун ҳам бутун коэффициентли кўпҳадларнинг илдизини топиш масаласини кўриб чиқамиз.

Теорема. Ўзаро туб бўлган p ва q бутун сонлар берилган бўлиб, $\frac{p}{q}$ қисқармас каср коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ . . . + a_{n-1}x + a_n$ кўпҳаднинг илдизи бўлсин. У ҳолда $f(x)$ нинг бош коэффициенти a_0 сон q га, $f(x)$ нинг озод ҳади a_n эса p га қолдиқсиз бўлинади.

Исбот. Шартга кўра $f(\frac{p}{q})=0$. Яъни,

$a_0 (\frac{p}{q})^n + a_1(\frac{p}{q})^{n-1} + . . . + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n= 0$. Бундан

$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + . . . + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$ келиб чиқади. У ҳолда

$a_0p^n = -(a_1p^{n-1} + . . . + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1})q$. Демак, a_0p^n сон q га қолдиқсиз бўлинади. p ва q ларнинг ўзаро туб эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда a_0 q га қолдиқсиз бўлинади. Шунга ўхшаш

$a_nq^n= -(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + . . . + a_{n-1}q^{n-2})p$ тенгликдан a_n озод ҳад p га қолдиқсиз бўлиниши келиб чиқади.

Адабиётлар:

5. 1.¨қубов Т., Каллибеков С. Математик мантиқ элементлари. Т.,1996.
6. Новиков П.С. Элементы математической логики. М., 1973.
7. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел.М.,1979.
8. Кострикин А.И.Введение в алгебру. М., 1977.
9. Розанов Ю.А., Лекции по теории вероятностей. М., 1986.
10. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей