АЛЛАКОВ ИСМАИЛ

ОЦЕНКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ISBN: 978-9943-7311-0-3

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЛЛАКОВ ИСМАИЛ

MSC 2020: 11A25

ОЦЕНКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(монография)

“Surxon-nashr” – 2021

УДК: 511.11
КБК: 22.151.0
А: 45

И. Аллаков. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел (монография). – Термез: Surxon-nashr. 2021 год. 160 стр. Библ. 143 наимен.

Монография посвящена оценкам тригонометрических сумм и их приложению к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. В частности, применение тригонометрических сумм к задачам о представлении четных чисел в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии, о представлении натуральных чисел в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа, об одновременном представлении заданных чисел в виде суммы простых чисел и распределения дробных долей последовательности $\{f(p)\}$. На этой основе раскрыть сущность кругового метода Харди-Литтлвуда и метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова. В книге также содержится важная информация о новом методе итераций Вона и методах Давенпорта для определения варинговых чисел в заданном интервале $(1, X)$. Для лучшего понимания результатов, приведенных в монографии, от читателя требуются знания в объеме, например, книги Г. Дэвенпорта «Мультипликативная теория чисел. -М.: Наука. 1971. -199с.». Поэтому монография предназначена для студентов старших курсов математического направления, а также для магистрантов и докторантов и для всех, кто интересуется аддитивными задачами теории чисел.

Монография тригонометрик йиғиндиларни баҳолаш ва уларнинг сонлар назариясининг баъзи аддитив масалаларини ечишга тадбиқларини баён қилишга бағишланган. Унда хусусан тригонометрик йиғиндиларнинг жуфт сонларни арифметик прогрессиядан олинган иккита туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш, натурал сонларни туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалаш, бир вақтда берилган сонларни туб сонлар йиғиндиси кўринишда ифодалаш ҳамда $\{f(p)\}$кетма кетлик каср кисмларининг тақсимоти масалаларига тадбиқлари қаралган. Шу асосда Харди- Литтлвуднинг доиравий усули ва И.М.Виноградовнинг тригонометрик йиғиндилар усулларининг моҳиятини очиб беришга ҳаракат килинган. Шунингдек китобда берилган $(1, X)$оралиқдаги Варинг сонларини аниқлашда Воннинг янги итерация усули ва Давенпорт усуллари ҳақидаги муҳим маълумотлар келтирилган.

Китобда келтирилган маълумотларни тушуниш учун ўқувчидан мисол учун Г. Дэвенпортнинг «Сонларнинг мультипликатив назарияси. -М.: Наука. 1971. -199б.» китоби ҳажмида билимларга эга бўлишлиги талаб этилади. Шунинг учун ҳам монография университетларнинг математика йўналиши юқори курс талабалари, магистрантлар, докторантлар ва шунингдек сонлар назариясининг аддитив масалаларига қизиқувчиларга мўлжалланган.

The monograph is devoted to estimates of trigonometric sums and their application to the solution of some additive problems in number theory. In particular, the application of trigonometric sums to problems on the representation of even numbers as a sum of two primes from an arithmetic progression, on the representation of natural numbers as a sum of a prime and a fixed power of a prime number, on the simultaneous representation of given numbers as a sum of primes and the distribution of fractional parts sequences $\{f(p)\}$. On this basis, reveal the essence of the Hardy-Littlewood circular method and the method of trigonometric sums of I. M. Vinogradov. The book also contains important information about Vaughan's new iteration method and Davenport's methods for determining Waring numbers over a given interval $(1, X)$.

In order to understand the results presented in the monograph, the reader is required to have knowledge in the volume, for example, the book by G. Davenport "Multiplicative number theory. -M .: Science. 1971. -199s.". Therefore, the book is intended for senior mathematicians, for undergraduates and doctoral students, as well as those who are interested in additive problems of number theory.

Рецензенты:

Заведующий кафедрой «Математический анализ»
Термезского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор
М. Мирсабуров

Профессор кафедры Алгебры и геометрии
Самаркандского государственного университета,
доктор физико-математических наук
А.Солеев

Ответственные редакторы:

Заведующий кафедрой «Вычислительная математика
и информатика» Термезского государственного
университета, доктор физико-математических наук, профессор
Ч. Нармурадов

Старший преподаватель кафедры «Математический
анализ» Термезского государственного университета
О. Савенко

Печатается по решению Научного Совета Термезского государственного университета от "17" июля 2021 года, протокол № 12.5.2

ISBN:978-9943-7311-0-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во всем мире многие научные и практические исследования, часто приводятся к исследованию задач теоретической механики и криптографии. Исследование математических моделей естественных процессов составляет теоретическую основу аддитивных задач теории чисел и важность определения законов шифрования криптографии с помощью аддитивных задач теории чисел.

В настоящее время решение бинарной проблемы Гольдбаха из аддитивных задач теории чисел имеет большое значение во всем мире. Проблема выражения данного четного числа в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии еще не решена. Первые существенные результаты решения аддитивных задач были достигнуты с использованием кругового метода. Затем дополнение кругового метода методом тригонометрических сумм привело к решению тернарной задачи Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел. В связи с этим, различные виды аддитивных задач, связанных с простыми числами, т.е. выражение данного числа в виде суммы простого числа и фиксированной степени натурального числа (проблема Харди-Литтлвуда), выражение данного числа в виде суммы простого числа и фиксированной степени простого числа (проблема Хуа-Ло-Кена), выражение данного числа в виде суммы простых и натуральных чисел в фиксированных степенях (проблема Варинга-Гольдбаха) считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране большое внимание уделяется современным направлениям теории чисел, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы были достигнуты значительные результаты в решении задач о представлении чисел суммой простых чисел, включающих в себе тернарные и бинарные проблемы Гольдбаха.

Основными задачами и направлениями деятельности математики являются проведения исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебра и геометрия»[1]. В целях использования научных результатов в смежных областях

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

науки одним из главных считается развитие аддитивных задач теории чисел.

Результаты приведенные в этой книге в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки. Поэтому исследование аналитическими методами плотности числовых последовательностей является одним из актуальных задач теории чисел.

Монография посвящена оценкам тригонометрических сумм и их приложению к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. В частности, применение тригонометрических сумм к задачам о представлении четных чисел в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии, о представлении натуральных чисел в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа, об одновременном представлении заданных чисел в виде суммы простых чисел и распределения дробных долей последовательности $\{f(p)\}$. На этой основе была раскрыта сущность кругового метода Харди-Литтлвуда и метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

В книге также содержится важная информация о новом методе итераций Вона и методах Давенпорта для определения варинговых чисел в заданном интервале $(1, X)$.

Для лучшего понимания результатов, приведенных в монографии, от читателя требуются знания в объеме, например, книги Г. Дэвенпорта «Мультипликативная теория чисел. -М.: Наука. 1971. -199с.». Поэтому книга предназначена для студентов старших курсов математического направления, а также для магистрантов и докторантов и для всех, кто интересуется аддитивными задачами теории чисел. Из книги можно воспользоваться как учебное пособие при чтение спецкурсов и спецсеминаров.

В заключение благодарю профессоров А.Солеева (СамГУ) и М.Мирсабурова (ТерГУ), а также старшего преподавателя кафедры математического анализа ТерГУ О.В.Савенко, за ценные замечании, которые в конечном счете привели к улучшению содержанию книги.

Автор iallakov@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Пусть M_i бесконечная последовательность целых чисел

$$a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, ... \qquad (0.1)$$

с условием $0 < a_{i1} < a_{i2} < ... < a_{in} < ...$; где $i = 1, 2, ..., k$.

Если даны k последовательностей M_i $(i = 1, 2, ..., k)$ (среди которых могут быть и одинаковые), то суммой M_i будем называть новую последовательность $M = M_1 + M_2 + ... + M_k$ вида $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ где

$$b_j = a_{1j_1} + a_{2j_2} + ... + a_{kj_k} \qquad (0.2)$$

– есть сумма каких-либо из k чисел наших последовательностей, взятых по одному разу. Величину

$$P(M_i) = \inf_x \frac{N(x)}{x},$$

где $N(x) = \sum_{a_{ij} \le x} 1$ - количество членов в последовательности (0.1), не превосходящих x, будем называть плотностью последовательности M_i. Здесь важными являются следующие задачи:

1. При заданных последовательностях M, M_1, $M_2, ...,$ M_k определить плотность последовательности M, элементы которой удовлетворяют условию (0.2).

Аналогично можно рассматривать плотность последовательности M', состоящей из тех элементов M, для которых не выполняется условие (0.2).

2. Исследование функции $R_k(b_j)$ - означающей количество наборов $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{kj_k})$, удовлетворяющих условию (0.2) при заданных b_j и k. Иными словами найти более точные верхние и нижние грани или установить асимптотическую формулу для функции $R_k(b_j)$.

В сформулированных задачах содержатся известные аддитивные проблемы, такие как проблема Варинга, проблема Эйлера-Гольдбаха, Харди - Литтлвуда и другие. А именно, по этим проблемам в последнее время получены наиболее сильные результаты. Например, результаты: И.М.Виноградова, Л.Г.Шнирельмана, Ю.В.Линника, С.Х.Сираждинова, Б.М.Бредихина, Н.П.Романова, А.А.Карацубы, А.И.Виноградова, А.Ф.Лаврика, Хуа-Ло-Кена, Ву Фанга, Чена, Монтгомери, Вона, А.Г.Архипова, В.И. Чубарикова, З.Р.Рахмонова, М.И.Туляганoвой, В.А.Плаксина, М.Митькина, М.И.Исраилова, С.Т.Тулаганова, С.Ш.Шушбаева, А.С.Файнлейба, О.Рамаре, Х. Гельфготта и других.

Разработаны различные методы, такие как круговой метод Харди-Литтлвуда-Рамануджана [141], метод-решето (В.Бруна, А.Сельберга, Ю.Линника) [91], метод тригонометрических сумм И.М.Виноградова [54,55] и другие. Коротко остановимся на двух из этих проблем: проблеме Гольдбаха и проблеме Варинга.

1. В 1742 году из переписки Х.Гольдбаха с Л.Эйлером возникла проблема Гольдбаха, представляющая собою гипотезу, согласно которой всякое четное число ≥ 6 - есть сумма двух нечетных простых чисел (бинарная проблема Гольдбаха), а всякое нечетное число ≥ 9 - есть сумма трех нечетных простых чисел (тернарная проблема Гольдбаха). Очевидно, из справедливости бинарной проблемы Гольдбаха, тривиально следует справедливость тернарной проблемы Гольдбаха.

2. После известных работ Лагранжа о сумме четырех квадратов в 1770 г. Варинг в своих «Алгебраических размышлениях» выдвинул гипотезу о том, что каждое четное натуральное число является суммой не более девяти кубов целых неотрицательных чисел, 19 биквадратов и т.д. Считается, что тем самым он предполагал следующее: для любого целого положительного $k \geq 2$, существует s, что каждое натуральное n является суммой не более s k-ых степеней натуральных чисел, и наименьшее такое s, скажем $g(k)$, удовлетворяет соотношениям $g(3)=9,\ g(4)=19$.

Впервые Д.Гильберт [124] в 1909 г. установил существование конечного $g(k)$ для всех $k \geq 2$.

В 1920 г. Харди и Литтлвуд [118] к проблеме Варинга применили круговой метод и получили асимптотическую формулу для числа представления $R_s(n,k)$, когда n – достаточно большое натуральное число. Но, проблема Гольдбаха оказалась труднее, еще в 1912 г. существовало мнение, что проблема Гольдбаха не доступна средствам современной математики. Только 1919 г. В.Брун [104] разработал метод, представляющий собою видоизменение решета Эратосфена. С помощью этого метода он показал, что всякое достаточное большое натуральное число - есть сумма двух слагаемых, каждое из которых является произведением не более чем девяти простых чисел. В дальнейшем результат В.Бруна был улучшен, но решить проблему Гольдбаха так и не удалось. Тем не менее метод В.Бруна (а в дальнейшем и различные видоизменения этого метода: решето А.Сельберга [90], большое решето Ю.Линника [71]) получил широкое применение в теории распределения простых чисел и позволил получить в этой области ряд важных результатов.

Г.Харди и Дж.Литтлвуд в 1924 г., применив круговой метод в тернарную проблему Гольдбаха, получили асимптотическую формулу для числа представления, опираясь на еще недоказанную гипотезу Римана о нулях L – функции Дирихле [68,69,70,112].

Суть метода Харди-Литтлвуда заключается в следующем: пусть А=$\{a_m\}$ – строго возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел. Рассмотрим функцию

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty} z^{a_m}, \quad (|z|<1)$$

и ее s – ую степень

$$F^s(z)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_s=1}^{\infty} z^{a_{m_1}+\ldots+a_{m_s}}=\sum_{n=0}^{\infty} R_s(n)z^n,$$

где $R_s(n)$ – число представлений n в виде суммы s членов из A. Задача состоит в том, чтобы оценить $R_s(n)$ по крайней мере для больших значений n. По интегральной формуле Коши

$$R_s(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} F^s(z)z^{-n-1}dz,$$

где $0<\rho<1$. По методу Харди-Литлвуда-Рамануджана (Х.-Л.-Р.) интеграл $R_s(n)$ разбивается на два слагаемых I_1 и I_2. Первое слагаемое I_1 дает главный член, а второе слагаемое I_2 является остатком в асимптотической формуле для $R_s(n)$. Таким образом, круговой метод Х.-Л.-Р., это метод выделения из $R_s(n)$ предполагаемого главного члена.

А проблему о двух простых не удалось доказать, даже опираясь на обобщенную гипотезу Римана, лишь смогли установить, что «почти все» четные числа представляются суммой двух простых, то есть они доказали, что, если $E(X)$ – число четных чисел $n\leq X$, непредставимых в виде суммы двух простых чисел, тогда $\lim\limits_{X\to\infty} X^{-1}E(X)=0.$

В 1930 г. Л.Г.Шнирельман [93] предлагает новый метод для решения аддитивных задач теории чисел. Он доказал, что существует абсолютная постоянная r такая, что всякое n представляется суммой не более, чем r простых слагаемых. Однако, это число r оказалось очень большим ($r\leq 8\cdot 10^5$).

В дальнейшем значение r было последовательно улучшено в работах Н.П.Романова, Х.Хейльбронна, Е.Ландау, Шерка, Д.Риччи, Х.Шапиро, Ж.Варга, Ин Вэнь-Линя, Н.И.Климова, Р.Вона и других.

А.Ф.Лаврик доказал, что чистым методом Л.Г.Шнирельмана нельзя получить оценку постоянной r лучше, чем $r \le 8$. В связи с этим отметим, что исследования многих авторов, перечисленных выше, приводятся соединение метода Шнирельмана с другими методами [133].

В 1937 г. И.М.Виноградов [53], используя свой метод тригонометрических сумм, доказал, тернарную проблему Гольдбаха для всех достаточно больших $n > n_0$. Притом, он получил асимптотическую формулу для числа представления n в виде суммы трех нечетных простых чисел. Тернарная проблема Гольдбаха полностью доказана в 2013 г. Харальдом Гельфготтом [117], а справедливость бинарной проблемы проверена для всех четных чисел $\le 4 \cdot 10^{18}$. Из справедливости тернарной проблемы (доказанной в 2013 г.) следует, что любое четное число представимо в виде суммы не более чем 4 простых чисел. Ранее, 1995 г. Оливье Рамаре [133] доказал, что любое четное число представимо в виде суммы не более чем 6 простых чисел.

Сущность метода И.М.Виноградова заключалась в том, что он в круговом методе Х.-Л.-Р. подынтегральную функцию (бесконечные ряды) заменил конечной тригонометрической суммой, а затем I_1 исследовал по методу Х.-Л.-Р., а I_2 оценивал по методу тригонометрических сумм И.М.Виноградова. Метод Виноградова [53,54,55] не только позволил доказать тернарную проблему Гольдбаха и улучшить остаток в проблеме Варинга, но всех задачах до сих пор считавшихся трудными, такие как распределение дробных долей, квадратичных вычетов и других, были получены существенные результаты [62,75,76,81,86,91,92,94,95,129,131] .

Основываясь на методе Виноградова, Н.Г.Чудаков [96], Ван-дер-Корпут [135], Т.Эстерман [113] показали, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел, точнее была доказана оценка $E(X) \ll X / \ln^A X$, где $E(X)$ – число четных натуральных чисел не представимых в виде суммы двух простых чисел. Этот результат также был получен другим методом, доказанным Ю.Линником [72].

Впервые А.Ф.Лавриком [63,64] была получена асимптотическая формула для $R(n)$ – числа представлений n в виде суммы двух простых чисел, справедливая для всех $n \le X$, за исключением не более $\ll X/\ln^A X$ значений n. Дальнейшие улучшения оценки исключительного множества $E(X)$ в этой задаче получили Монтгомери и Вон [128,136].

Улучшение оценок, связанных с проблемой Варинга получены в недавних работах А.А.Карацубы [60], М.Митькина [73], Р.Вона [139,140], Хис Брауна[122,123].

Поэтому исследование аналитическими методами плотности числовых последовательностей является одним из актуальных задач теории чисел.

Основной целью монографии является исследование аналитическими методами задачи о возможности получения данной последовательности целых чисел как сумму специально выбранных последовательностей и изучение плотности этих последовательностей.

Они выражаются в следующем:

1. Обобщение и усиление оценок тригонометрических сумм, полученных классическими методами, когда суммирование ведется по специальным числовым последовательностям, принадлежащим данной арифметической прогрессии и применение полученных результатов к исследованию плотности последовательности M', а также к исследованию плотности дробных долей $\{f(x)\}$ (где $f(x)=\alpha x^s+\beta x^{s-1}+...+\gamma$, $\alpha-$ иррациональное число) в промежутке $[0.1)$.

2. Установление более точных нижних граней для функции $R_k(b_j)$ при заданных значениях k и b_j.

В работе, комбинируя идеи работ А.Ф.Лаврика [66,67], R.C.Vaughan’a [137,138] и Heath Brown’a [123], получены новые оценки тригонометрических сумм. За счет этого, а также удачно используя последние достижения в области аналитической теории чисел получены существенные результаты: относительно распределения дробных долей $\{f(p)\}$; о количестве варинговых чисел в интервале $(1,X)$; в бинарной проблеме Гольдбаха; в исследовании разрешимости системы линейных уравнений с простыми переменными.

В главе 1 монографии получены новые оценки тригонометрических сумм по простым числам из арифметической прогрессии.

При доказательстве этих оценок используется метод, сутью которого является комбинации методов Вона, А.Ф. Лаврика и И.М. Виноградова.

В параграфе 4 полученные оценки тригонометрических сумм применены к изучению распределения дробных долей последовательности $\{f(p)\}$, при этом получена новая оценка остаточного члена асимптотической формулы функции $\pi_D(\gamma,\delta,N)$ и установлена зависимость этого остаточного члена от длины интервала δ.

В параграфе 5 получено улучшение так называемой классической оценки тригонометрической суммы Вейля-Виноградова [141].

Все эти новые результаты получены благодаря методу, использованному при исследовании поставленных задач.

Результаты этой главы используются в исследованиях в последующих главах монографии.

Глава II посвящена исследованию одной из актуальных проблем аддитивной теории чисел, проблеме Варинга с ограниченными числами слагаемых. Изучена функция $N_{k.,s}(x)$, означающая количество натуральных $n \le X$, которые представимы в виде $n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_8^k$, где $k \ge 2$ и $x_1, x_2, \ldots, x_8$-натуральные числа.

Далее, пусть $G(k)$-наименьшее s такое, что каждое достаточно большое натуральное число n представимо в указанном виде. Истинное значение $G(k)$ известно только в случаях $k=2$ и 4, а именно $G(2)=4$, $G(4)=16$, в остальных случаях для $G(k)$ получены оценки сверху, которые являются далекими от истинных. Поэтому изучение функции $N_{k.,s}(x)$ при $s < s_0$ (где s_0 до сих пор известные наиболее точное значение $G(k)$), является актуальной задачей в этой теории. Для этой функции получены новые оценки снизу.

При изучении функции $N_{k.,s}(x)$ используется метод, который является усовершенствованием нового итерационного метода Вона и метода Давенпорта.

В этой главе также впервые получены оценки снизу для $R(n)$-числа представлении n в виде суммы двух нечетных простых чисел из арифметической прогрессии, справедливые для всех $n \le X$ за исключением не более чем $X \exp(-c\sqrt{\ln X})$ значений из них. Ранее полученная асимптотическая формула была справедлива для всех

$n \le X$ за исключением не более, чем $\ll X/\ln^A X$ значений n из них.

При этом использованный в данной работе метод дает возможность получить аналогичные оценки для числа представлений n, представимого в видах: $n = a_1 p_1 + a_2 p_2$, $n = a_1 p_1 + m^k$, здесь a_1 и a_2 целые числа, p_1 и p_2 -простые числа, m и k - натуральные числа.

В главе III исследована разрешимость системы

$$b_i = a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + ... + a_{i,n+1} p_{n+1},\ i = 1, 2, ..., n$$

в простых числах. Разрешимость этой системы завысит от условий конгруент разрешимости (кр) и положительной разрешимости (пр). Доказано, что количество векторов $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n),\ 1 \le b_1, b_2 ..., b_n \le X$, координаты которых удовлетворяют условиям (кр) и (пр) достаточно много, т.е. если мы обозначим через $U(X)$ множество векторов, удовлетворяющих условиям (кр) и (пр), то

$$cardU(X) \gg X^n (B^{2(n-1)2(2n-1)+n} \ln\ln B)^{-1},$$

где $B = \max(3|a_{ij}|),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n+1$. $E(X)$-количество тех векторов из $U(X)$, в которых рассматриваемая система не разрешима в простых числах, удовлетворяет неравенству $E(X) < X^{n-\delta}$ (здесь δ-достаточна малая постоянная).

В такой общей постановке задачи впервые получена оценка для $E(X)$ со степенным положением. Ранее были известны лишь оценки в частном случае при $n = 2$.

При исследованиях используется усовершенствованный метод Монтгомери–Вона [128,129], также обобщение идей из работ Лиу-Цанга [126,127].

Эти результаты включают в себя ранее известные результаты относительно рассматриваемой системы и являются наиболее общими. Поэтому являются существенным вкладом в развитие теории чисел, в частности теорию одновременного представления чисел суммой простых.

В главе IV получены новые численные результаты относительно исключительных множеств в задачах представления чисел суммой простых и фиксированной степени простого числа (проблема Хуа-Ло-Гена [91,92]), одновременного представления двух чисел суммой трех простых чисел, а также приведен алгоритм для нахождения количества решений уравнений $x_1 x_2 ... x_k = n$ в натуральных числах. Эти численные результаты с одной стороны являются усилением теоретических оценок для исключительных множеств, а с другой стороны показывают эффективность теоретических исследований. Они могут служить основой при решении многих теоретико-числовых задач теории чисел.

Обозначения: $a,b,c,d,...$ - целые числа; $m,n,k,l,...$ - натуральные числа; $\alpha,\beta,\gamma,\delta,...$ - действительные числа; X,P,Q - достаточно большие вещественные числа; N - достаточно большое натуральное число; $p_1,p_2,p_3,...$ - простые числа; $c,c_1,c_2,...$ – некоторые положительные постоянные.

$\|x\|$ - расстояние от x до ближайшего целого;

$s=\sigma+it$ - комплексная переменная;

(a,b) - наибольший общий делитель a и b;

$[a,b]$ - наименьший общий кратный a и b;

$\mu(n)$ - функция Мебиуса, определяемый равенством

$$\mu(n)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad n=1; \\ (-1)^k, & \text{если} \quad n=p_1p_2...k_k \text{ и } p_i\neq p_j, i\neq j; \\ 0, & \text{если} \quad p_i^2 \diagdown n; \end{cases}$$

$\Lambda(n)$ - функция Мангольдта:

$$\Lambda(n)=\begin{cases} \ln p, & \text{если} \quad n=p^k,\ k\geq 1; \\ 0, & \text{если} \quad n\neq p^k. \end{cases}$$

$\chi(n)$ - характер Дирихле, $\bar{\chi}$ - характер Дирихле сопряженный с χ. $L(s,\chi)$ - L - функция Дирихле, определяемый при $Res>1$ равенством

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Если $\chi(n)$ - характер Дирихле по модулю q, то через $\tilde{\beta}$ обозначим, возможно, существующий единственный вещественный (исключительный) нуль с условием $\tilde{\beta}>1-c_1(\ln q)^{-1}$.

$$E_{\tilde{\beta}}=\begin{cases} 0, & \text{если не существует исключительный нуль } \tilde{\beta}; \\ 1, & \text{если существует такой нуль.} \end{cases}$$

$$\delta_\chi=\begin{cases} 1, & \text{если } \chi=\chi_0 - \text{главный характер;} \\ 0, & \text{если } \chi\neq\chi_0. \end{cases}$$

$\varphi(a)$ - функция Эйлера;

$\tau_k(n)$ - количество решений уравнения $x_1x_2...x_k=n$ в натуральных числах, в частности $\tau_2(n)=\tau(n)$ - число делителей n.

$\pi(x)$ - число простых чисел $p\leq x$, то есть

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1.$$

$e(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$, суммы $\sum\limits_{\chi}$ и $\sum\limits_{\chi}{}^{*}$ и $\sum\limits_{a=1}^{q}{}'$ - означает соответственно суммированию по всем характерам χ по модулю q, по всем примитивным характерам по модулю q и по всем приведенным классам по модулю q.

$$C_\chi(m)=\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{mh}{q}\right),$$

в частности $C_\chi(1)=\tau(\chi)$ - сумма Гаусса. Для любого вещественного $x>1$ функцию $\psi(x,\chi)$ определим равенством

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n).$$

Запись $f\ll g$ и $f=O(g)$ имеет одинаковый смысл, т.е. $|f|\le Cg$ для $g>0$.

Ссылки на формулы внутри одной и той же главы осуществляются обозначениями типа (1.2) - здесь первая цифра означает номер параграфа, в котором приводится данная формула. Ссылка из одной главы в другую осуществляется обозначениями типа (2.3.4) здесь первая цифра означает номер главы, а вторая цифра номер параграфа, в котором эта формула находится.

Смысл остальных обозначений, встречающихся в настоящей работе, будет объяснен по ходу изложения.

ГЛАВА I
ОЦЕНКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ ИЗ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§1. Оценка линейных тригонометрических сумм с простыми числами из арифметической прогрессии.

Известно, что впервые И.М.Виноградов [51] получил нетривиальную оценку модуля тригонометрической суммы по простым числам, принадлежащим арифметической прогрессии

$$\sum_{\substack{p\le N,\, p\equiv l(modD)\\ (p,l)=1}} e(\alpha p). \tag{1.1}$$

Нетрудно убедиться, при помощи частного суммирования, что сумма (1.1) по существу эквивалентна сумме

$$S_1(\alpha)=S_1(D,\alpha,N)=\sum_{n\le N,\, n\equiv l(modD)} \Lambda(n)e(\alpha n), \tag{1.2}$$

где $1\le l\le D,(l,D)=1$.

А.Ф.Лавриком [66,67] идея плотности распределения нулей L - функций Дирихле была распространена на тригонометрические суммы вида (1.2). Оценка модуля суммы (1.2) можно привести к оценке суммы (см. [6,74])

$$\sum_{\chi_q} |\psi(N,\chi_q)|. \tag{1.3}$$

В [66, 67] сумма (1.3) оценена, используя информацию о плотности нулей L - функций Дирихле $L(s,\chi)$. Вон [137] исследовал сумму (1.3) с помощью теорем о среднем для $L^2(s,\chi)$, полученных из приближенного функционального уравнения А.Ф.Лаврика [65] посредством метода работы P.X.Gallaghera [114].

В этом параграфе, комбинируя идею доказательства А.Ф.Лаврика [66,67] и теоремы 2 работы [114] получим простое, не опирающееся на плотностное распределение нулей L - функции Дирихле, доказательство результатов типа теоремы 1 работы [64]. Притом разность арифметических прогрессии будет иметь степенной порядок роста длины [7].

Сначала приведем общую теорему о сумме (1.2).

Теорема 1.1.1. *Пусть* γ, δ *и* $c\ge 1$ - *положительные постоянные такие, что справедлива оценка*

$$\sum_{\chi_q}|\psi(N,\chi_q)<<\left(N+qN^{1/2}+q^{\gamma}N^{\delta}\right)L^{c}, \qquad (1.4)$$

тогда для суммы $S_1(\alpha)$, *определенной равенством (1.2), при* $|\alpha-aq^{-1}|\le 2N^{-1}$, $(a,q)=1$, $d=(D,q)$ *имеем*

$$S_1(\alpha)<<\left(\frac{d}{D}q^{-1/2}N+q^{1/2}N^{1/2}+\left(\frac{d}{D}\right)^{1-\gamma}q^{-1/2+\gamma}N^{\delta}\right)L^{c+1},$$

где $L=\ln N$.

При справедливости плотностей гипотезы для функции $L(s,\chi)$ в (1.4) имеем $\gamma=0,\ \ \delta=1$. При помощи известной оценки для суммы (1.3), принадлежащей Вону [137], из теоремы 1.1.1 следует следующий безусловный результат.

Теорема 1.1.2. *Если* $|\alpha-aq^{-1}|\le 2N^{-1},\ (a,q)=1,\ d=(q,D)$, *то*

$$S_1(\alpha)<<\left(\frac{d}{D}q^{-1/2}N+q^{1/2}N^{1/2}+\left(\frac{d}{D}\right)^{3/8}q^{1/8}N^{3/4}\right)L^{9/2}.$$

Отсюда легко получить следующие:

Следствие 1. *Пусть* $(D,q)=1,\ q\asymp L^{c},\ c\ge 12$ - *постоянная, тогда для любого* $D\le N^{2/5}L^{-c}$ *имеет место оценка*

$$S_1(\alpha)<<\frac{N}{\varphi(D)}L^{\frac{-c+11}{2}}.$$

Следствие 2. *Если* $P<q\le NP^{-1},\ 1\le P\le N^{1/3},\ |\alpha-aq^{-1}|\le 2P(qN)^{-1}$, $(a,q)=1$, *то*

$$S_1(\alpha)<<\frac{N}{\varphi(D)}\Delta,$$

где $\Delta=DP^{-1/2}L^{11/2}$.

Следствие 3. *Если* $P<q\le NP^{-1},\ 1\le P\le N^{1/3},\ |\alpha-aq^{-1}|\le q^{-2},\ (a,q)=1$, *то* $S_1(\alpha)<<\dfrac{N}{\varphi(D)}\Delta$, *где* $\Delta=DP^{-1/2}L^{11/2}$.

Сравнение теоремы 1.1.2 с соответствующим результатом

$$S_1(\alpha)<<\left(\frac{d}{D}q^{-1/2}N+q^{1/2}N^{1/2}+\left(\frac{d}{D}\right)^{2/7}q^{3/14}N^{5/7}\right)L^{18} \qquad (1.5)$$

работы [66] (см. теорема 1, [66]) показывает, что если $1<q\le N^{2/5}$, то оценка (1.5) существенно лучше, чем до сих пор существующие. В наших следствиях диапазон изменения P шире (полученная оценка при $N^{1/4}\le R\le N^{1/3}$ лучше), а также степень логарифмического множителя во всех оценках ниже и методы доказательств различные.

Доказательство теоремы 1.1.1. Используя частичное суммирование Абеля [59] имеем

$$S_1(\alpha)=S_1\left(\frac{a}{q}\right)e\left(N\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)\right)-2\pi i\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)\int_0^N S_1\left(D,\frac{a}{q},\xi\right)e\left(\xi\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)\right)d\xi.$$

Откуда

$$S_1(\alpha)<<\left|S_1\left(\frac{a}{q}\right)\right|+\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\int_0^X\left|S_1\left(D,\frac{a}{q},\xi\right)\right|d\xi. \tag{1.6}$$

Следовательно, для того чтобы получить нетривиальную оценку для суммы $S_1(\alpha)$, необходимо получить соответствующую оценку для суммы (1.2) в рациональных точках $\alpha=\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$. Поскольку

$$\sum_{\substack{n\le N,n\equiv l(modD)\\(n,q)>1}}\Lambda(n)e\left(\frac{an}{q}\right)<<L^2,$$

то $S_1(a/q)$ можем написать в виде

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right)=\sum_{\substack{n\le N,n\equiv l(modD)\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e\left(\frac{an}{q}\right)+O(L^2). \tag{1.7}$$

Известно, что при $(n,q)=1$

$$e\left(\frac{an}{q}\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(an)\tau(\overline{\chi}_q),$$

поэтому из (1.7) находим

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\tau(\overline{\chi}_q)\sum_{n\le N,n\equiv l(modD)}\Lambda(n)\chi_q(n)+O(L^2). \tag{1.8}$$

Подледную сумму в правой части (1.8), используя свойство характеров Дирихле, можно переписать в виде

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D}\overline{\chi}_D(e)\sum_{n\le N}\Lambda(n)\chi_q(n)\chi_D(n).$$

Следовательно, принимая во внимание, что

$$|\tau(\overline{\chi}_q)|\le q^{1/2},\ \ \varphi(m)<<\frac{m}{\ln\ln m},\ \ m>e^2$$

и обозначая

$$A=\sum_{\chi_q}\sum_{\chi_D}\left|\sum_{n\le N}\Lambda(n)\chi_q(n)\chi_D(n)\right|$$

для $q\le N$ (мы можем считать, что $q\le N$, так как если $q>N$, то теорема тривиальна) и $D \le N$ из (1.8) находим

$$S\left(\frac{a}{q}\right) << \left(LD^{-1}q^{-1/2}A + L^2\right). \qquad (1.9)$$

Так как произведение характеров есть также характер, ведущий модуль которого равен делителю наименьшего кратного ведущих модулей сомножителей, то, полагая $d=(q,D)$, будем иметь $\chi_q(n)\chi_D(n)=\chi_k(n)$, где $k=qDd^{-1}$. Так, что, переходя в A от двойного суммирования по характерам к ординарному, находим

$$A \le d\sum_{\chi_k}|\psi(N,\chi_k)|, \qquad (1.10)$$

где

$$\psi(N,\chi_k)=\sum_{n\le N}\Lambda(n)\chi(n).$$

Таким образом, из (1.9) и (1.10) получим

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) << \left(\frac{dL}{D}q^{-1/2}\sum_{\chi_k}|\psi(N,\chi_k)|+L^2\right). \qquad (1.11)$$

В силу (1.4), отсюда следует

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) << \frac{dL}{Dq^{1/2}}\left(N+kN^{1/2}+k^{\gamma}N^{\delta}\right)L^c+L^2 <<$$

$$<< \left(\frac{d}{D}q^{-1/2}N+q^{1/2}N^{1/2}+\left(\frac{d}{D}\right)^{1-\gamma}q^{-\frac{1}{2}+\gamma}N^{\delta}\right)L^{c+1}+L^2. \qquad (1.12)$$

Теперь, учитывая $|\alpha-aq^{-1}|<2N^{-1}$, из (1.6) и (1.12) получим утверждение теоремы 1.1.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.1.2. Согласно теореме 2 Вона [137] имеем

$$\sum_{\chi_k}\max_{y\le N}\psi(y,\chi_k) << NL^3+N^{3/4}k^{5/4}L^{23/8}+N^{1/2}kL^{7/2}.$$

Используя эту оценку в (1.11), находим

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) << \frac{d}{D}Nq^{-1/2}L^4+\left(\frac{d}{D}\right)^{3/8}N^{3/4}q^{1/8}L^{31/8}+N^{1/2}q^{1/2}L^{9/2}. \qquad (1.13)$$

Из (1.6) и (1.13) при $|\alpha-aq^{-1}|\le 2N^{-1}$ получим теорему 1.1.2.

Следствие 1 и 2 при наличии указанных условий сразу следует из теоремы 1.1.2. Выбор $D\le N^{2/5}L^{-c}$ вследствие 1 обусловлен участием в (1.13) члена

$$\left(\frac{d}{D}\right)^{3/8}N^{3/4}q^{1/8}L^{31/8}.$$

Доказательство следствия 3 совершенно аналогично с доказательством следствия 16.3 работы [74].
В заключении отметим, что A.Balog, A.Perelli [102], используя тождество Вона (см. задача 9, гл. III, [59]), элементарным методом доказали оценку

$$S_1(\alpha) << \left(\frac{dN}{Dq^{1/2}} + \frac{q^{1/2}N^{1/2}}{d^{1/2}} + \frac{N^{4/5}}{D^{2/5}} \right) l^3,$$

которая при $d=(D,q)=1$ и $q \le N^{2/5}D^{1/5}L^{-12}$ является хуже, чем в теореме 1.2.

§2. Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел из арифметических прогрессии

Известно, что во многих аддитивных задачах аналитической теории чисел важную роль играют нетривиальные оценки тригонометрических сумм

$$S_k(D,\alpha,N) = \sum_{n\le N, n\equiv l (modD)} \Lambda(n)e(\alpha n^k).$$

В частности, оценкам суммы $S_k(D,\alpha,N)$ посвящены работы [52,54,55,82,83,92,101,105,116,119,120,138]. В работе [116] получена новая оценка для $S_2(1,h\alpha,N)=S_2(h\alpha)$. А именно показано, что

$$\sum_{h\le H} S_2(h\alpha) \ll HN^{1+\varepsilon}\left(q^{-1}+N^{-1/2}+qH^{-1}N^{-2}\right)^{1/4}. \qquad (2.1)$$

В этом параграфе оценка (2.1) обобщается для арифметической прогрессии [11,12,13]. Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 1.2.1. *Если* $|\alpha - aq^{-1}| < q^{-2}$ *и* $D^2 \le N$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{h\le H} |S_2(D,h\alpha,N)| \ll \frac{HN^{1+\varepsilon}}{D}\left(\frac{d^2}{q}+\frac{D}{N^{1/2}}+\frac{qD}{HN^2 d}\right)^{1/4}, \qquad (2.2)$$

где $d=(q,D)$ *и константа в символе Виноградова* $\ll$ *может зависеть только от* ε.
Заметим, что $\varepsilon>0$ в правой части оценки (2.2) при необходимости можно заменить на $\dfrac{c}{\ln\ln N}$.
Из теоремы следуют:

Следствие 1. *Имеет место оценка*

$$S_2(D,\alpha,N) \ll D^{-1}N^{1+\varepsilon}\left(d^2q^{-1}+DN^{-1/2}+qDN^{-2}d^{-1}\right)^{1/4}.$$

Следствие 2. *Если* $D \le N^{\varepsilon}$ *и* $N^{1/2} < q \le N^{3/2}$, *то*

$$S_2(D,\alpha,N) \ll D^{-1}N^{\frac{7}{8}+\varepsilon}. \qquad (2.3)$$

Заметим, что следствие 1 является обобщением теоремы 2 работы [37] для арифметической прогрессии. Оценка (2.3) в различных применениях используется, когда q меняется в широких пределах. С этой точки зрения оценка (2.3) представляет большой интерес.

Прежде чем доказать сформулированную теорему приведем необходимые леммы. Первые две леммы принадлежат И.М.Виноградову и являются общеизвестными. В дальнейшем запись $m \equiv f$ будет означать, что $m \equiv f(modD)$.

Лемма 1.2.1. *Если* $0<\alpha<1$ *- вещественное число и* X, X' *- положи-тельные целые, то*

$$\sum_{\substack{X<m\le X' \\ m\equiv f}} e(m\alpha) \ll \min\left(\frac{X'}{D}+1; \|\alpha D\|^{-1}\right),$$

где $\|x\|$ *- расстояние от* x *до ближайшего целого числа.*

Лемма 1.2.2. *Если* X *и* Y *– положительные целые числа и вещественное число* α *удовлетворяет условию* $|\alpha - aq^{-1}| < q^{-2}$, *где* a *и* q *–целые числа с условием* $(a,q)=1$, *то*

$$\sum_{m\le X} \min(Y; \|\alpha m\|^{-1}) \ll XYq^{-1}+(X+q)\ln 2q,$$

$$\sum_{m\le X} \min\left(\frac{XY}{m}; \|\alpha m\|^{-1}\right) \ll (XYq^{-1}+X+q)\ln(2XYq).$$

Далее, пусть X, X', Y, Y' – некоторые положительные целые числа с условиями $X < X' \le 2X$, $Y < Y' \le 2Y$ и $XY \le N$. Обозначим

$$S_1 = \sum_{h\le H}\left|\sum_{m}\omega(m)\sum_{\substack{n \\ (m,n)\in G}}\psi(n)e(hm^2n^2\alpha)\right|, \qquad (2.4)$$

где $G=\{(m,n)\,|\, X<m\le X', Y<n\le Y', m\equiv f_1, n\equiv f_2, m\cdot n\le N\}$, $\omega(m)$ и $\psi(n)$ - некоторые арифметические функции, удовлетворяющие условиям

$$|\omega(m)| \le \tau(m)\ln m, |\psi(n)| \le \tau(n)\ln n. \qquad (2.5)$$

Ясно, что $|G| \le ND^{-2}$.

Лемма 1.2.3. *Если* $\ln q \ll \ln N$, *то для суммы* S_1, *определенной равенством (2.4), имеют место следующие оценки:*

a) *если* $\psi(n)=1$ *для всех* $n\in(Y,Y']$, *то*

$$S_1 \ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{N^{1/2}HX}{D^{1/2}}+\frac{dNHX^{1/2}}{Dq^{1/2}}+\left(\frac{HXq}{dD}\right)^{1/2}\right), \tag{2.6}$$

b) если $\psi(n)\neq 1$ для некоторого $n\in(Y,Y']$, то

$$S_1 \ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{N^{1/2}X^{1/2}H}{D^{3/2}}+\frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}}+\frac{HN^{3/4}Y^{1/4}}{D^{3/4}}+\frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right). \tag{2.7}$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши к сумме S_1, получим

$$S_1 \le \left[\sum\nolimits_1\left(\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3\right)\right]^{1/2}, \tag{2.8}$$

где

$$\sum\nolimits_1=\sum_{h\le H}\sum_{\substack{X<m\le X'\\ m\equiv f_1}}|\omega(m)|^2,\quad \sum\nolimits_2=\sum_{h\le H}\sum_{m}\sum_{\substack{n\\ (m,n)\in G}}|\psi(n)|^2,$$

$$\sum\nolimits_3=\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\\ (m,n_i)\in G, i=1,2}}\sum_{n_1\neq n_2}\psi(n_1)\psi(n_2)e(hm^2(n_1^2-n_2^2)\alpha).$$

Учитывая условие (2.5) и оценку

$$\tau_k^e(n)\ll n^{\varepsilon} \tag{2.9}$$

получим

$$\sum\nolimits_1 \ll X^{1+\varepsilon}HD^{-1},\ \sum\nolimits_2\ll NY^{\varepsilon}HD^{-2}. \tag{2.10}$$

Оценим $\sum_3$. Для этого рассмотрим два случая.

а) Пусть $\psi(n)=1$ для всех $n\in(Y,Y']$. Тогда полагая $n_1-n_2=y$ в $\sum_3$ будем иметь

$$\sum\nolimits_3\le\sum_{h\le H}\sum_{X<m\le X'}\sum_{\substack{Y\le|y|\le Y'\\ y\equiv 0}}\left|\sum_{\substack{n\\ (m,n)\in G\\ (m,n+y)\in G}}e(2hm^2yn\alpha)\right|.$$

Далее, обозначим $s=2hm^2y$, тогда $2DX^2<|s|\le 16NHX$ и количество представлений s в указанном виду не больше, чем $\tau_3(|s|)$. Поэтому

$$\sum\nolimits_3<\sum_{\substack{|s|<16NHX\\ s\equiv 0}}\tau_3(|s|)\left|\sum_{\substack{Y<n\le Y'\\ n\equiv f}}e(sn\alpha)\right|.$$

Отсюда, в силу леммы 1.2.1 и оценки (2.9) находим, что

$$\sum\nolimits_3\ll(NHX)^{\varepsilon}\sum_{\substack{|s|<16NHX\\ s\equiv 0}}\min\left(\frac{Y'}{D};\|sD\alpha\|^{-1}\right). \tag{2.11}$$

Поскольку

$$Y' \le \frac{N}{X'} = \frac{N}{|s|}|s|\frac{1}{X'} < \frac{16N^2H}{|s|} \quad \text{и} \quad d=(q,D),\ d \le (D^2,q) < d^2,$$
то, применяя лемму 1.2.2 в правой части (2.11), получим
$$\sum\nolimits_3 \ll (NXH)^{\varepsilon}\left(\frac{d^2N^2H}{Dq} + NHX + \frac{q}{d}\right)\ln\left(\frac{32N^2Hq}{dD}\right). \qquad (2.12)$$
Учитывая (2.10), (2.12) и $\ln q \ll \ln N$ из (2.8) получим утверждение a).
b) Пусть теперь $\psi(n) \ne 1$ для некоторого $n \in (Y;Y']$. Тогда $\sum\nolimits_3$ можем написать в виде
$$\sum\nolimits_3 = \sum_{h \le H}\ \sum_{\substack{X < m \le X' \\ m \equiv f}}\ \sum_{(m,t)\in\Phi} Z(t)e(hm^2t\alpha),$$
где $\Phi = \{(m,t) \mid X < m \le X', D \le |t| < Y'^2, |m^2t| \le N^2, m \equiv f, t \equiv 0\}$ и
$$Z(t) = \sum_{\substack{n_1 \equiv n_2,\, n_1^2 - n_2^2 = t \\ (m,n_i)\in G,\, i=1,2}} \psi(n_1)\psi(n_2).$$
Ясно, что
$$|\Phi| \ll \frac{NY}{D^2},\quad \sum_{h \le H}\ \sum_{\substack{D \le |t| < Y'^2 \\ t \equiv 0}} |Z(t)|^2 \ll \frac{HY^{2+\varepsilon}}{D}.$$
Меняя порядок суммирования в $\sum\nolimits_3$ и применяя неравенство Коши, находим
$$\sum\nolimits_3 = \sum_{h \le H}\ \sum_{D \le |t| < Y'^2} Z(t) \sum_{\substack{m \\ (m,t)\in\Phi}} e(htm^2\alpha) \le$$
$$\le \left(\sum_{h \le H}\ \sum_{D \le |t| < Y'^2} |Z(t)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{h \le H}\ \sum_{D \le |t| < Y'^2} \left|\sum_{\substack{m \\ (m,t)\in\Phi}} e(htm^2\alpha)\right|^2\right)^{1/2} \ll$$
$$\ll \left(\frac{HY^{2+\varepsilon}}{D}\right)^{1/2} \left(HYND^{-2} + \sum\nolimits_4\right)^{1/2}, \qquad (2.13)$$
где
$$\sum\nolimits_4 = \sum_{h \le H}\ \sum_{D \le |t| < Y'^2}\ \sum_{\substack{m_1 \ne m_2 \\ (m_i,t)\in\Phi,\, i=1,2}} e(ht(m_1^2 - m_2^2)\alpha).$$
Сумма $\sum\nolimits_4$ будет оценена точно так же как сумма $\sum\nolimits_3$ в случае a). Поэтому получим оценку
$$\sum\nolimits_4 \ll \sum_{1 \le |s| < 16NHX} \tau_3(|s|)\min\left(\frac{N}{D|t|^{1/2}}; \|sD\alpha\|^{-1}\right) \ll$$

$$\ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{d^2N^2H}{qD}+NHY+\frac{q}{d}\right)\ln\left(\frac{2N^2Hq}{dD}\right). \qquad (2.14)$$

В силу (2.14) из (2.13) следует, что

$$\sum\nolimits_3 \ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{dNHY}{Dq^{1/2}}+\frac{N^{1/2}Y^{3/2}H}{D^{1/2}}+\frac{H^{1/2}q^{1/2}Y}{D^{1/2}d^{1/2}}\right). \qquad (2.15)$$

Комбинируя оценки (2.8), (2.10) и (2.15), получим утверждение b).

Теперь оценки, полученные для S_1 в лемме 2.3, будем применять к оценке суммы

$$S_2=\sum_{h\le H}\left|\sum_{\substack{M_1<m\le M_2\\ m\equiv f_1}}\omega(m)\sum_{\substack{N_1<m\le N_2\\ n\equiv f_2}}\psi(n)e(hm^2n^2\alpha)\right|,$$

где M_1, M_2, N_1, N_2 положительные целые числа, такие, что $M_1<M_2,\ N_1<N_2$ и $M_1N_1\le N$, а все остальные параметры определяются как в лемме 2.3.

Для этого разбиваем каждый из интервалов $(M_1, M_2]$ и $(N_1, N_2]$ на $\ll \ln N$ под интервалы вида $(X, X']$ и $(Y, Y']$, для которых $M_1\le X<X'\le 2X\le M_2$ и $N_1\le Y<Y'\le 2Y\le N_2$. Поскольку при $XY>N$ множество G является пустым, то можем считать, что $XY\le N$. Таким образом, сумму S_2 можно представить с помощью суммы $S_1=S_1(X,Y)$ в следующем виде

$$S_2\le\sum_X\sum_Y S_1(X,Y)\ll\left(\max S_1(X,Y)\right)\ln^2 N.$$

Отсюда получим следующее утверждение.

Лемма 1.2.4. а). *Если* $\psi(n)=1$ *для всех* $n\in(N_1;N_2]$, *то*

$$S_2\ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{N^{1/2}HM_2}{D^{1/2}}+\frac{dNHM_2^{1/2}}{Dq^{1/2}}+\left(\frac{HM_2q}{dD}\right)^{1/2}\right);$$

b). *Если* $\psi(n)\ne 1$ *для некоторого* $n\in(Y;Y']$, *то*

$$S_2\ll (NH)^{\varepsilon}\left(\frac{N^{1/2}HM_2^{1/2}}{D^{3/2}}+\frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}}+\frac{HN^{3/4}N_2^{1/4}}{D^{3/4}}+\frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{D^{3/4}d^{1/4}}\right).$$

Доказательство теоремы 1.2.1. Пусть $q>N^2HdD^{-1}$. Тогда правая часть оценки (2.2) принимает вид $\ll HN^{1+\varepsilon}D^{-1}$ и оценка (2.2) очевидна. Пусть теперь $H\ge N, q\le N^2HdD^{-1}$. Тогда согласно неравенству Коши имеем

$$\sum_{h=1}^{H} S_2(D,h\alpha,N) \le H^{1/2}\left(\sum_{h=1}^{H}\left|\sum_{\substack{1\le n\le N\\ n\equiv f}}\Lambda(n)e(hn^2\alpha)\right|^2\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll H^{1/2}\left(\frac{HN}{D}\ln N + \sum_{\substack{n_1\ne n_2,\, n_1\equiv n_2\\ 1\le n_1,n_2\le N}}\Lambda(n_1)\Lambda(n_2)e(h(n_1^2-n_2^2)\alpha)\right)^{1/2}.$$

Обозначим

$$Z_1(l) = \sum_{\substack{1\le n_1,n_2\le N\\ n_1^2-n_2^2=l,\, n_1\ne n_2}}\Lambda(n_1)\Lambda(n_2) \le (\ln N)^2\tau(|l|).$$

Тогда

$$\sum_{h=1}^{H} S_2(D,h\alpha,N) \ll (D^{-1}N\ln N)^{1/2}\cdot H + H^{1/2}\left|\sum_{h\le H}\sum_{\substack{1\le|l|<N^2\\ l\equiv 0}} Z_1(t)e(hl\alpha)\right|^{1/2}.$$

Меняя порядок суммированиия и используя леммы 2.1 и 2.2, получим

$$\sum_{h=1}^{H} S_2(D,h\alpha,N) \ll \frac{HN^{1/2}}{D^{1/2}}\ln^{1/2}N + H^{1/2}N^{\varepsilon}\left|\sum_{h\le H}\sum_{\substack{1\le|l|<N^2\\ l\equiv 0}} e(hl\alpha)\right|^{1/2} \ll$$

$$\ll \frac{HN^{1/2}}{D^{1/2}}\ln^{1/2}N + H^{1/2}N^{\varepsilon}\left(\sum_{h\le H}\min\left(\frac{N^2}{D};\|hD\alpha\|^{-1}\right)\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll H\left(\frac{N\ln N}{D}\right)^{1/2} + H^{1/2}N^{\varepsilon}\left(\frac{dN^2H}{qD} + H + \frac{q}{d}\right)^{1/2}\ln^{1/2}N \ll$$

$$\ll \frac{HN^{1+\varepsilon}}{D}\left(\frac{D^{1/2}}{N^{1/2}} + \frac{Dq^{1/4}}{H^{1/4}N^{3/4}d^{1/2}} + \frac{D^{1/2}d^{1/2}}{q^{1/4}}\right) \ll \frac{HN^{1+\varepsilon}}{D}\left(\frac{D^2}{N^2} + \frac{D^4q}{HN^3d^2} + \frac{D^2d^2}{q}\right)^{1/4}.$$

Отсюда следует оценка (2.2).

Пусть теперь $H<N, q\le N^2HdD^{-1}$. Будем исходить из тождества (см. задача 9, гл. III, [30])

$$\sum_{u<n\le N}F(1,n) + \sum_{u<n\le Nu^{-1}}\sum_{u<m\le Nn^{-1}} t_m F(m,n) = \sum_{s\le u}\mu(s)\sum_{u<n\le Ns^{-1}}\sum_{r\le N(sn)^{-1}}F(sr,n), \qquad (2.16)$$

где $F(m,n)$ - произвольная функция натуральных аргументов m и n, $\mu(s)$ - функция Мебиуса, u - произвольное целое, $1\le u\le N$, $t_m = \sum_{s\le u,\, s\setminus m}\mu(s)$. Функцию $F(m,n)$ выберем следующим образом

$$F(m,n) = \begin{cases}\Lambda(n)e(hm^2n^2\alpha), & \text{если } u<n<Nm^{-1} \text{ и } m\equiv f_1, n\equiv f_2;\\ 0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

и будем предполагать, что $u < N^{1/3}$. Тогда из тождества (2.16) получим
$$S_2(D,h\alpha,N) = L_1 - L_2 - L_3 + O(N^{1/3}D^{-1}), \qquad (2.17)$$
где
$$L_1(h) = \int_1^N L_1(\beta)\beta^{-1}d\beta, \qquad L_1(\beta) = \sum_{\substack{s\le\min(u,N\beta^{-1})\\ s\equiv f_1\cdot\bar r}} \mu(s) \sum_{\substack{\beta<k<Ns^{-1}\\ k\equiv f_2}} e(hs^2k^2\alpha), (\bar r\cdot r\equiv 1);$$
$$L_2(h) = \sum_{\substack{l\le u^2\\ l\equiv f_3}} C_l \sum_{\substack{r\le Nl^{-1}\\ r\equiv f_1\bar s}} e(hl^2r^2\alpha), (s\bar s\equiv 1;\ f_3\equiv f_1\bar r f_2),$$
$$C_l = \sum_{\substack{s\cdot n=l, s\le u\\ s\equiv f_1\cdot\bar r}} \mu(s)\Lambda(n) \le \tau(l)\ln l,$$
$$L_3(h) = \sum_{\substack{u<m\le Nu^{-1}\\ m\equiv f_1}} t_m \sum_{\substack{u<n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_2}} \Lambda(n)e(hm^2n^2\alpha).$$
Из (2.17) следует, что
$$\sum_{h\le H} S_2(D,h\alpha,N) = L_1 + L_2 + L_3 + O(HN^{1/3}D^{-1}), \qquad (2.18)$$
где $L_i = \sum_{h\le H} L_i(h)$, $i=1,2,3$. Оценим L_1. В лемме 2.4 a) положим $M_1=1$, $M_2 = \min(u,N\beta^{-1}) \le u$, $N_1=\beta$, $N_2=N$ и $|\psi(s)|=|\mu(s)|\le 1$, тогда получим
$$L_1 \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}} + \frac{dHNu^{1/2}}{Dq^{1/2}} + \left(\frac{Hqu}{dD}\right)^{1/2}\right).$$
Для оценки L_2 сумму $L(h)$ будем делить на подсуммы вида
$$L_2(h) = \left(\sum_{\substack{m\le u\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{r\le Nm^{-1}\\ r\equiv f_1\bar s}} + \sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{u<r\le N^{1/2}\\ r\equiv f_1\bar s}} + \sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{r\le u\\ r\equiv f_1\bar s}} + \sum_{\substack{N^{1/2}<m\le u^2\\ m\equiv f_1}}\sum_{\substack{r\le Nm^{-1}\\ r\equiv f_1\bar s}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\sum_{N^{1/2}<r\le Nm^{-1}}\right) C_m e(hm^2r^2\alpha) = \sum_{j=1}^{5} L_2^{(j)}(h).$$
Тогда
$$L_2 \le \sum_{h\le H}\sum_{j=1}^{5} L_2^{(j)}(h) = \sum_{j=1}^{5} L_2^{(j)}. \qquad (2.19)$$
Теперь применяя лемму 1.2.4, оценим каждую $L_2^{(j)}$. Для $L_2^{(1)}$, полагая в лемме 2.4 a) $M_1=1$, $M_2=u$, $N_2=N$, $N_1=1$, $\omega(m)=C_m$, находим
$$L_2^{(1)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}} + \frac{dHNu^{1/2}}{Dq^{1/2}} + \left(\frac{Hqu}{dD}\right)^{1/2}\right).$$
Оценка для $L_2^{(2)}$ получается из леммы 1.2.4 b), если положим

$M_1 = N_1 = u$, $N_2 = M_2 = N^{1/2}$. Тогда имеем

$$L_2^{(2)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{H^{3/4}N^{1/2}q^{1/4}}{D^{3/4}d^{1/4}}\right).$$

$L_2^{(3)}$ оценим тривиальным образом, т.е.

$$L_2^{(3)} \ll N^{1/2+\varepsilon}HD^{-1/2}u.$$

Оценим $L_2^{(4)}$, в лемме 1.2.4 b) полагая $M_1 = N_2 = N^{1/2}$, $M_2 = u^2$, $N_1 = 1$, при $D^2 \le N$, получим

$$L_2^{(4)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{1/2}u}{D^{3/2}} + \frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/2}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right).$$

Наконец, если в лемме 1.2.4 b) положим $M_1 = N_2 = N^{1/2}$, $M_2 = Nu^{-1}$, $N_1 = u$, то для суммы $L_2^{(5)}$ получим следующую оценку

$$L_2^{(5)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{d^{1/2}HN}{Dq^{1/4}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right).$$

Собирая эти оценки для $L_2^{(j)}, (j = 1,2,3,4,5)$, из (2.19) находим

$$L_2 \ll N^{\varepsilon}\Big(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{d^{1/2}HN}{d^{1/4}D} +$$
$$+\frac{H^{3/4}N^{1/2}q^{1/4}}{D^{3/4}d^{1/4}} + \frac{d^{1/2}HNu^{1/2}}{q^{1/2}D} + \left(\frac{Hqu}{Dd}\right)^{1/2}\Big).$$

Теперь остается оценить L_3. Для этого сумму $L_3(h)$ разобьем на подсуммы

$$L_3(h) = \Big(\sum_{\substack{u<m\le N^{1/2}\\ m\equiv f_1}}\ \sum_{\substack{u<n\le N^{1/2}\\ n\equiv f_2}} + \sum_{\substack{N^{1/2}<m\le Nu^{-1}\\ m\equiv f_1}}\ \sum_{\substack{u<n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_2}} +$$
$$+\sum_{\substack{u<m\le Nu^{-1}\\ m\equiv f_1}}\ \sum_{\substack{N^{1/2}<n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_2}}\Big)t_m\Lambda(n)e(hm^2n^2\alpha).$$

Тогда

$$L_3 \le \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{h\le H} L_3^{(i)}(h)\right) = \sum_{i=1}^{3} L_3^{(i)}.$$

Так как

$$\omega(m) = \tau_m = \left|\sum_{d\le u, d\setminus m}\mu(d)\right| \le \tau(m) \ll m^{\varepsilon}.$$

$\psi(n) = \Lambda(n) = \ln n$, поэтому для суммы $L_3^{(2)}$ при $M_1 = N_2 = N^{1/2}$, $M_2 = Nu^{-1}$, $N_1 = u$ из леммы 1.2.4 b) следует, что

$$L_3^{(2)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right).$$

Эта оценка остается справедливой и для суммы $L_3^{(3)}$. А для оценки $L_3^{(1)}$ применим лемму 1.2.4 b) с $M_1 = N_1 = u$, $M_2 = N_2 = N^{1/2}$, тогда имеем

$$L_3^{(1)} \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right).$$

Следовательно,

$$L_3 \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}}\right).$$

Таким образом, из (2.18) находим

$$\sum_{h\le H} S_2(D, h\alpha, N) \ll N^{\varepsilon}\left(\frac{HNd^{1/2}}{Dq^{1/4}} + \frac{HN^{7/8}}{D^{3/4}} + \frac{H^{3/4}q^{1/4}N^{1/2}}{d^{1/4}D^{3/4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{HN^{1/2}u}{D^{1/2}} + \frac{HN}{u^{1/2}D^{3/2}} + \frac{d^{1/2}HNu^{1/2}}{q^{1/2}D} + \left(\frac{Hqu}{Dd}\right)^{1/2}\right). \qquad (2.20)$$

У нас *u* была произвольной постоянной с условием $u \le N^{1/3}$, теперь положим $u = \min\left[N^{1/3}D^{-5/24}; q^{1/2}; (N^2Hdq^{-1}D^{-1})^{1/2}\right]$. Тогда, учитывая, что $q \le N^2HdD^{-1}$, из (2.20) получим утверждение теоремы 1.2.1.

§3. Оценка тригонометрических сумм по степеням простых чисел из арифметической прогрессии

Пусть k, h, f, n, D, H, N – натуральные числа, p – простое число, α и ε –произвольные вещественные числа, a и q – положительные целые с условием $(a,q)=1$ и $|\alpha q - a| < q^{-1}$, $f(x)$ – многочлен степени $k \ge 2$, с действительными коэффициентами со старшим коэффициентом α, $d = (q, D)$, $\nu = 4^{1-k}$ и $R = 2^{k-1}$.

В различных задачах теории чисел важную роль играют нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида $\sum_{p\le N} \ln p e(f(p))$.

(см.[50,51,54,55,57,62,66,67,86,116, 119,120]).

В настоящем параграфе докажем теорему [15,16]:

Теорема 1.3.1. *Если* $D^2 \le N$ *и* $|\alpha q - a| < q^{-1}$, *тогда*

$$\sum_{h\le H} \sum_{\substack{p\le N \\ p\equiv f\,(mod D), (f,D)=1}} \ln p e(hf(p)) \ll \frac{HN}{D}\Delta(H),$$

где

$$\Delta(H)=\left(\frac{HN}{D}\right)^{\varepsilon}\left[\frac{d^{2k-1}}{q}+\frac{D}{N^{1/2}}+\frac{q}{H}\left(\frac{D}{Nd}\right)^{k}\right]^{\nu} \tag{3.1}$$

и постоянное в символе $\ll$ *зависит от* k *и* $\varepsilon>0$.

Из этой теоремы следуют:

Следствие 1. *Имеет место оценка*

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p\equiv f\,(modD),(f,D)=1}} \ln p e(f(p))\ll\frac{N}{D}\Delta(1),$$

Следствие 2. *Если* $D\ll N^{\varepsilon}$, $N^{1/2}<q\le N^{\frac{3k}{4}}$, *то*

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p\equiv f\,(modD),(f,D)=1}} \ln p e(f(p))\ll\frac{1}{D}N^{1-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}.$$

Отметим, что выше сформулированная теорема 3.1 является обобщением теоремы 1 G.Harman'a [115]. В частности при $D=1$ и $H=1$ из теоремы 1.3.1 следует теорема 1 G.Harman'a [115].

Ранее подобные результаты были получены элементарными методами И.М.Виноградовым (при $D=1$) [52] и Хуа-Ло-Кеном [89], но с несколько меньшими значениями показателя ν, чем в (3.1) при малых значениях k.

В доказательстве сформулированных результатов используется тождество Вона.

1. Предварительные леммы. Сначала приведем леммы, необходимые в доказательстве сформулированной теоремы 1.3.1. Пусть Δ_i – разностный оператор, определяемый индуктивно равенством и

$$\Delta_1(f(x);h_1)=f(x+h_1)-f(x)$$

$$\Delta_{i+1}(f(x);h_1,...,h_{i+1})=\Delta_1(\Delta_i(f(x);h_1,...,h_i);h_{i+1}). \tag{3.2}$$

Для удобства записи обозначим

$$\Delta_i(x)=\Delta_i(f(x);h_1,...,h_i)\quad\text{и}\quad F=\left|\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv f}} e(f(n))\right|. \tag{3.3}$$

Следующие две леммы являются обобщением для арифметической прогрессии соответствующих лемм Вейля (см. лемма 2.3 и 2.4, [141]).

Лемма 1.3.1. *Для суммы* F, *определенной равенством (3.3) имеет место неравенство*

$$F^{2^r}\le\left(\frac{2X}{D}\right)^{2^r-r-1}\sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_r\\ (h_1,...,h_r)\in J_r}}\left|\sum_{n\in I_r} e(\Delta_r(n))\right|,$$

где $J_r=\{(h_1,...,h_r)\,||\,h_i\,|<X, h_i\equiv 0(modD), i=\overline{1,r}\},$

$$I_r=\{n\,|\,1\le n\le X-h_1-...-h_r, n\equiv f(modD)\}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в случае $D=1$ эта лемма принадлежит Вейлю (см. лемма 2.3, [141). Для $1<D<X$ доказательство леммы приведем индукцию по r.

При $r=1$ имеем

$$F^2=\sum_{n\le X, n\equiv f}\ \sum_{n_1\le X, n_1\equiv f} e(f(n_1)-f(n)).$$

Положим $n_1=n+h_1$, тогда $1-X\le h_1\le X-n$ и $h_1\equiv 0(modD)$. Поэтому

$$F^2=\sum_{n\le X-1, n\equiv f}\ \sum_{\substack{1-X\le h_1\le X-n\\ h_1\equiv 0}} e(f(n+h_1)-f(n))=$$

$$=\sum_{\substack{1-X\le h_1\le X-1\\ h_1\equiv 0}}\ \sum_{\substack{1\le n\le X-h_1\\ n\equiv f}} e(\Delta_1(n))=\sum_{h_1\in J_1}\sum_{n\in I_1} e(\Delta_1(n)).$$

Это показывает справедливость леммы при $r=1$.

Теперь предположим, что утверждение леммы справедливо при некотором $r=s$, покажем его справедливость и при $r=s+1$.

В силу индуктивного предположения имеем

$$F^{2^{s+1}}\le\left(\frac{2X}{D}\right)^{2^{s+1}-2s-2}\left(\sum_{\substack{h_1\\ (h_1,...,h_s)\in J_s}}\cdots\sum_{h_s}\left|\sum_{n\in I_s} e(\Delta_s(n))\right|\right)^2. \qquad (3.4)$$

Применяя неравенства Коши и учитывая, что

$$\left|\sum_{n\in I_s} e(\Delta_s(n))\right|^2\le\sum_{\substack{|h_{s+1}|<X\\ h_{s+1}\equiv 0}}\left|\sum_{n\in I_{s+1}} e(\Delta_{s+1}(n))\right|,$$

из (3.4) находим

$$F^{2^{s+1}}\le\left(\frac{2X}{D}\right)^{2^{s+1}-s-2}\sum_{\substack{h_1\\ (h_1,...,h_{s+1})\in J_{s+1}}}\cdots\sum_{h_{s+1}}\ \sum_{n\in I_{s+1}} e(\Delta_{s+1}(n)).$$

Отсюда следует, что лемма справедлива при любом натуральном значении r.

Лемма 1.3.2. *Пусть* $R=2^{k-1}$*. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$F^R\ll\left(\frac{X}{D}\right)^{R-k+2}\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}+\sum_{y\le W}\min\left(\frac{X}{D};\frac{1}{\|yD^k\alpha\|}\right)\right),$$

где $W=k!(XD^{-1})^{k-1}$ *и константа в символе* $\ll$ *зависит от* k *и* ε.

Доказательство. Пусть $f(x)=\alpha x^k+\alpha_1 x^{k-1}+...+\alpha_{k-1}x+\alpha_k$, тогда

$\Delta_{k-1}(n)=h_1...h_{k-1}(k!\alpha(n+\frac{1}{2}h_1+...+\frac{1}{2}h_{k-1})+(k-1)!\alpha_1)$. Полагая в лемме 1.3.1 $r=k-1$, получим

$$F^R \ll \left(\frac{X}{D}\right)^{R-k}\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}+\sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_{k-1}\\(h_1,...,h_{k-1})\in J'_{k-1}}}\left|\sum_{n\in I_{k-1}} e(\alpha k! n h_1...h_{k-1})\right|\right),$$

где

$$J_{k-1}=J_{k-1}\diagdown\{(0,...,0)\}\bigcup\{(h_1,...,h_{i-1},0,h_{i+1},...,h_{k-1})\}.$$

Обозначим $k!h_1...h_{k-1}=t$, тогда $t=D^{k-1}k!h_1...h_{k-1}=D^{k-1}y$, где $y=k!h'_1...h'_{k-1}$, отсюда, $y\le k!(XD^{-1})^{k-1}$ и число представлений y в указанном виде $\ll \tau_{k-1}(y)\ll y^{\varepsilon}$. Поэтому

$$F^R \ll \left(\frac{X}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}+\sum_{y\le W}\left|\sum_{n\in I_{k-1}} e(\alpha D^{k-1} y n)\right|\right).$$

Применяя лемму 1.2.1, получим утверждение данной леммы.

Для положительных M, X, Y определим множество

$G=\{(m,n)\,|\,1\le m\le Y, 1\le n\le X, m\equiv f, n\equiv f_1 \text{ и } mn\le M\}$ и сумму

$$S=\sum_{h\le H}\sum_{m}\sum_{\substack{n\\(m,n)\in G}}\omega(m)\psi(n)e(hf(mn)). \qquad (3.5)$$

Далее, положим

$$A=\max_n|\psi(n)|,\quad B=\left(\frac{D}{Y}\left(\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}\omega^2(m)\right)\right)^{1/2},$$

$$E_s=(HY)^{2^s}X^{2^s-1}D^{1-2^{s+1}}, \qquad (3.6)$$

$$\Psi(n;h_1,...,h_s)=\psi(n)\cdot)\prod_{i=1}^{s}\psi(n+h_i)\prod_{1\le i<j\le s}\psi(n+h_i+h_j)...$$

$$...\prod_{i=1}^{s}\psi(n+\sum_{i\ne j}h_j)\psi(n+\sum_{i=1}^{s}h_i),$$

$$S_s=\sum_{h\le H}\sum_{h_1}\cdots\sum_{\substack{h_s\\ h_1,...,h_s)\in J_s^+}}\sum_{n\in I_s}\Psi(n;h_1,...,h_s)\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}e(h\Delta_s(mn)), \qquad (3.7)$$

где $J_s^+=\{(h_1,...,h_s)\,|\,h_i\le X-1, h_i\equiv 0(modD), i=1,2,...,s\}$.

Лемма1.3.3. *Для суммы S, определенной равенством (3.5), справедлива оценка*

$$\left(\frac{S}{AB}\right)^{R^2} \ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R^2+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-kR} H^{-k+1}\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\frac{1}{\|\alpha D^{2k-1}y\|}\right)\right],$$

где $Z \le (k!)^2 Y^{k-1}X^k D^{2-2k}H, R = 2^{k-1}.$

Доказательство. Не нарушая общности можем считать, что $\psi(n) \ge 0$ для всех n и не учитывать пока условие $mn \le N$. Эту лемму можно доказать по той же схеме, которая была использована в доказательстве леммы 1.3.1.

Сначала, используя индукцию по s, покажем, что

$$S^{2^s} \ll (AB)^{2^s} E_s + B^{2^s}\left(\frac{YH}{D}\right)^{2^s-1}\left(\frac{X}{D}\right)^{2^s-s-1} |S_s|. \qquad (3.8)$$

При $s=1$, применяя неравенство Коши, из (3.5) находим

$$S^2 \le \sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}} |\omega(m)|^2 \sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\\ (m,n)\in G}} |\sum_n \psi(n)e(hf(mn))|^2 \le$$

$$\le \frac{HYB^2}{D}\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\\ (m,n_i)\in G, i=1,2}}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\psi(n_1)\psi(n_2)e(h(f(mn_2)-f(mn_1))) \le$$

$$\le \frac{B^2YH}{D}(A^2\frac{HYX}{D^2}+\sum_{h\le H}\sum_{1-X\le h_1\le X-1}\sum_{n\in I_1}\Psi(n;h_1)\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}} e(h(f(m(n+h_1))-$$

$$-f(mn))) \ll (AB)^2 E_1 + B^2HYD^{-1}|S_1|. \qquad (3.9)$$

Теперь, предположим, что оценка (3.8) справедлива для некоторого $s>1$, тогда покажем, она будет справедливой и для $s+1$. В силу нашего индуктивного предположения из (3.8) получим

$$S^{2^{s+1}} \ll (AB)^{2^{s+1}} E_s^2 + B^{2^{s+1}}\left(\frac{HY}{D}\right)^{2^{s+1}-2}\left(\frac{X}{D}\right)^{2^{s+1}-2s-2} |S_s|^2 .$$

Рассмотрим $|S_s|^2$. Используя неравенство Коши в (3.7), находим

$$|S_s|^2 \le \frac{HX^sY}{D^{s+1}}\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}\sum_{\substack{h_1\\ (h_1,\dots,h_s)\in J_s^+}}\cdots\sum_{h_s}\left(\sum_{n\in I_s}\Psi(n;h_1,\dots,h_s)e(h\Delta_s(mn))\right)^2$$

$$\le \frac{HX^sY}{D^{s+1}}\sum_{h\le H}\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}\sum_{\substack{h_1\\ (h_1,\dots,h_{s+1})\in J_{s+1}^+}}\cdots\sum_{h_{s+1}}\left|\sum_{n\in I_{s+1}}\Psi(n;h_1,\dots,h_{s+1})e(h\Delta_{s+1}(mn))\right| \le$$

$$\le \frac{HX^sY}{D^{s+1}}\left(A^{2^{s+1}}\frac{HY}{D}\left(\frac{X}{D}\right)^{s+1}+|S_{s+1}|\right) = A^{2^{s+1}}\left(\frac{HY}{D}\right)^2\left(\frac{X}{D}\right)^{2s+1}+\frac{HYX^s}{D^{s+1}}|S_{s+1}|.$$

Следовательно,

$$S^{2^{s+1}} \ll (AB)^{2^{s+1}}(E_s^2+E_{s+1})+B^{2^{s+1}}\left(\frac{HY}{D}\right)^{2^{s+1}-1}\left(\frac{X}{D}\right)^{2^{s+1}-s-2}|S_{s+1}|\ll$$

$$\ll (AB)^{2^{s+1}}E_{s+1}+B^{2^{s+1}}\left(\frac{HY}{D}\right)^{2^{s+1}-1}\left(\frac{X}{D}\right)^{2^{s+1}-s-2}|S_{s+1}|. \qquad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что оценка (3.8) справедлива при любом натуральном значении s.

Полагая $s=k-1$ в (3.8), находим

$$S^{R^2} \ll (AB)^{R^2}E_{k-1}^R+B^{R^2}\left(\frac{HY}{D}\right)^{R^2-R}\left(\frac{X}{D}\right)^{R^2-kR-2R}|S_{k-1}|^R. \qquad (3.11)$$

Оценим сумму S_{k-1}. Согласно определению оператора Δ_{k-1}, имеем

$$h\Delta_{k-1}(mn)=hh_1\dots h_{k-1}(\frac{1}{2}k!\alpha m^k(2n+h_1+\dots+h_{k-1})+$$

$$+(k-1)!\alpha_1 m^{k-1})=g(n;h,h_1,\dots,h_{k-1})m^k+\alpha_1(k-1)!hh_1\dots h_{k-1}m^{k-1}=p(m).$$

Поэтому в силу леммы 1.3.2

$$|S_{k-1}|^R \le A^{R^2}\left(\frac{X}{D}\right)^k H\sum_{h\le H}\underset{(h_1,\dots,h_{k-1})\in J_{k-1}^+}{\sum_{h_1}\cdots\sum_{h_{k-1}}}\sum_{n\in I_{k-1}}\left|\sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}}e(p(m))\right|^2 \ll$$

$$\ll A^{R^2}\left(\frac{X}{D}\right)^k H\sum_{h\le H}\underset{(h_1,\dots,h_{k-1})\in J_{k-1}^+}{\sum_{h_1}\cdots\sum_{h_{k-1}}}\sum_{n\in I_{k-1}}\left(\frac{Y}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{y\le k!(YD^{-1})^{k-1}}\min\left(\frac{Y}{D}+1;\|yD^k g(n;h,h_1,\dots,h_{k-1})\|^{-1}\right)\right). \qquad (3.12)$$

Далее, положим $\frac{1}{2}k!yhh_1\dots h_{k-1}(2n+h_1+\dots+h_{k-1})=t_1$, тогда $t_1=D^{k-1}t$, где $t=\frac{1}{2}k!hh'_1\dots h'_{k-1}(2n+h_1+\dots h_{k-1})y$ и $t=t_1D^{1-k}\le Z$. Поскольку количество представлений t в указанном виде $\ll\tau_{k+2}(t)\ll(HXYD^{-1})^{\varepsilon}$,то из (3.12) получим

$$|S_{k-1}|^R \ll A^{R^2}H\left(\frac{X}{D}\right)^k\left(\frac{Y}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1}H\left(\frac{X}{D}\right)^k+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{NXY}{D}\right)^{\varepsilon}\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\|\alpha D^{2k-1}t\|^{-1}\right)\right]. \qquad (3.13)$$

Таким образом, из (3.11) и (3.13) следует, что при $R=2^{k-1}$ справедлива оценка

$$\left(\frac{S}{AB}\right)^{R^2} \ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R^2+\varepsilon}\left[\frac{X^{-R}}{D^{-R}}+H\left(\frac{HY}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-k(R-1)-2R}\times\right.$$

$$\times\left[H\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1}\left(\frac{X}{D}\right)^{k}+\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\|\alpha D^{2k-1}t\|^{-1}\right)\right)\Bigg]\ll$$

$$\ll\left(\frac{HYX}{D^2}\right)^{R^2+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-kR}H^{-k+1}\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\|\alpha D^{2k-1}t\|^{-1}\right)\right]$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что последняя оценка остается в силе, если в определении суммы S включить условие $mn\le M$.

Лемма 1.3.4. *Если* $A\ll X^{\varepsilon}$ *и* $B\ll X^{\varepsilon}$ *для любого* $\varepsilon>0$, *то*

$$S\ll\left(\frac{HYX}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R}+\frac{d^{2k-1}}{q}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}+\left(\frac{XY}{D}\right)^{-k}\frac{q}{Hd^{2k-1}}\right]^{\nu},$$

где $d=(q,D)$ *и* $\nu=4^{k-1}$.

Доказательство. В силу леммы 1.2.2 имеем

$$\sum_{t\le Z}\min\left(\frac{Y}{D};\|\alpha D^{2k-1}t\|^{-1}\right)\ll\left(\frac{YZd^{2k-1}}{qD}+Z+\frac{q}{d^{2k-1}}\right)\ln q,$$

где $d=(q,D)\le(D^{2k-1},q)\le d^{2k-1}$.

Можем предполагать, что $q\le H(XYD^{-1})^{k}d^{2k-1}$ (так как в противном случае утверждение леммы тривиальное), тогда из леммы 1.3.3 получим

$$S\ll\left(\frac{HYX}{D^2}\right)^{1+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-k}\left(\frac{X}{D}\right)^{-kR}H^{-k+1}\left(\left(\frac{XY}{D^2}\right)^{k}\frac{HDd^{2k-1}}{q}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D\left(\frac{X}{D}\right)^{k}\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}H+\frac{q}{d^{2k-1}}\right)\right]^{\nu}\ll\left(\frac{HYX}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R}+\right.$$

$$\left.+\frac{d^{2k}}{qH^{k-2}}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}\frac{1}{H^{k-2}}+\left(\frac{XY}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^{2k-1}H^{k-1}}\right]^{\nu},$$

Так как $k\ge 2$, то отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 1.3.5. *Если* $\omega(x)=1$ *или* $\omega(x)=\ln x$ *для всех* x *и выполняется условия леммы 3.3 и 3.4, то*

$$S\ll\left(\frac{HYX}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{k-1}{R}}\left[\frac{d^k}{q}+\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1}+\frac{q}{d^kH}\left(\frac{XY}{D}\right)^{-k}\right]^{1/R}.$$

Доказательство. Используя неравенство Коши и лемму 1.2.2, из (3.5) находим

$$|S|^R \le (A\ln Y)^R \left(\frac{HX}{D}\right)^{R-1} \sum_{h\le H} \sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv f_1}} \left| \sum_{\substack{m\le Y\\ m\equiv f}} e(hf(mn)) \right|^2 \ll$$

$$\ll (A\ln Y)^R \left(\frac{HX}{D}\right)^{R-1} \sum_{h\le H} \sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv f}} \left(\frac{Y}{D}\right)^{R-k+\varepsilon} \left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{k-1} + \sum_{y\le W} \min\left(\frac{Y}{D};\ \| yh(nD)^k \alpha \|^{-1}\right)\right].$$

Обозначим $t = yn^k h$, тогда $t \le k! x^k H (YD^{-1})^{k-1} = T$ и количество представлений t в указанном виде $\ll (HXYD^{-1})^{\varepsilon}$. Поэтому

$$|S|^R \ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon} \left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1} + \left(\frac{Y}{D}\right)^{-k} \left(\frac{HX}{D}\right)^{-1} \sum_{t\le T} \min\left(\frac{Y}{D};\ \| tD^k \alpha \|^{-1}\right) \right] \ll$$

$$\ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon} \left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1} + \left(\frac{Y}{D}\right)^{-k} \left(\frac{HX}{D}\right)^{-1} \left(\frac{TYd^k}{Dq} + T + \frac{q}{d^k} \right) \right] \ll$$

$$\ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon} \left[\left(\frac{Y}{D}\right)^{-1} + D^k \left(\frac{X}{D}\right)^{k-1} \frac{d^k}{q} + \left(\frac{Y}{D}\right)^{-1} \left(\frac{X}{D}\right)^{k-1} D^k + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{X}{D}\right)^{-1} \left(\frac{Y}{D}\right)^{k} \frac{q}{d^k H} \right] \ll \left(\frac{HXY}{D^2}\right)^{R+\varepsilon} \left[\frac{d^k}{q} + \left(\frac{Y}{D}\right)^{-1} + \left(\frac{XY}{D}\right)^{-k} \frac{q}{d^k H} \right] \left(\frac{X}{D}\right)^{k-1}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1.3.1. Обозначим

$$S(h) = \sum_{p\le N,\, p\equiv f} \ln p e(hf(p)).$$

Прежде всего покажем, что сумму $S(h)$ можно представить в виде

$$S(h) = S_1(h) - S_2(h) - S_3(h) + O((ND^{-1})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \qquad (3.14)$$

где

$$S_1(h) = \sum_{\substack{v\le N^{1/3}\\ v=fr}} \mu(v) \sum_{\substack{l\le Nv^{-1}\\ l=f_1\bar{r}}} (\ln l) e(hf(lv)), \qquad (\bar{r}r \equiv 1,\quad l = n\cdot r,\quad vl \equiv f\cdot f_1).$$

$$S_2(h) = \sum_{s\le N^{2/3}} C_s \sum_{\substack{r\le Ns^{-1}\\ rs\equiv ff_1}} e(hf(rs)), \qquad S_3(h) = \sum_{\substack{N^{1/3}<m\le N^{2/3}\\ m\equiv f}} t_m \sum_{\substack{N^{1/3}<n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n) e(hf(mn)).$$

Здесь

$$|C_s| = \left| \sum_{\substack{v\cdot n = s\\ v\le N^{1/3}}} \mu(v)\Lambda(n) \right| \le \tau(s)\ln s \ll N^{\varepsilon} \qquad \text{и} \qquad |t_m| = \left| \sum_{\substack{v\setminus m\\ v\le N^{1/3}}} \mu(v) \right| \le \tau(m) \ll N^{\varepsilon}.$$

Действительно, так как при $u < N^{1/3}$

$$S(h) = \sum_{\substack{u<n\le N\\ n\equiv f_1 (mod D)}} \Lambda(n) e(hf(n)) + O\left(\left(\frac{N}{D}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right), \qquad (3.15)$$

то в случае $D=1$ (3.14) непосредственно следует из задачи 9, гл. III, [59].
В случае $D>1$ для произвольной функции натуральных аргументов $F(m,n)$ имеем

$$\sum_{n\le N, n\equiv f_1} F(1,n) = \sum_{m\le u, m\equiv f} \sum_{\substack{n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_1}} F(m,n) \sum_{v\diagdown m} \mu(v) =$$

$$= \sum_{v\le u} \sum_{\substack{r\le uv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v) F(vr,n) = \sum_{v\le u} \sum_{\substack{r\le uv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v) F(vr,n) -$$

$$- \sum_{v\le u} \sum_{\substack{uv^{-1}<r\le Nv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v) F(vr,n) =$$

$$= \sum_{v\le u} \sum_{\substack{r\le Nv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \mu(v) F(vr,n) - \sum_{\substack{u<m\le N\\ m\equiv f}} \sum_{\substack{v\diagdown m\\ v\le u}} \mu(v) \sum_{\substack{n\le Nm^{-1}\\ n\equiv f_1}} F(m,n).$$

Функцию $F(m,n)$ определим следующим образом

$$F(m,n) = \begin{cases} \Lambda(n) e(hf(mn)), & \text{если } u<n, \\ 0, & \text{если } u\ge n. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{u<n\le N\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n) e(hf(mn)) = \sum_{v\le u} \mu(v) \sum_{\substack{r\le Nv^{-1}\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{u<n\le N(vr)^{-1}\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n) e(hf(vrn)) - S_3(h) =$$

$$= \sum_{v\le u} \sum_{vr\le N} \sum_{\substack{nvr\le N\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n) e(hf(vrn)) - \sum_{v\le u} \mu(v) \sum_{\substack{vr\le N\\ vr\equiv f}} \sum_{\substack{n\le u, nrv\le N\\ n\equiv f_1}} \Lambda(n) e(hf(vrn)) -$$

$$-S_3(h) = \sum_{v\le u} \mu(v) \sum_{\substack{l\le Nv^{-2}\\ vl\equiv ff_1}} (\ln l) e(hf(lv)) - \sum_{\substack{s\le u^2\\ s\equiv \bar{v} f_1}} C_s \sum_{\substack{r\le Ns^{-1}\\ r\equiv \bar{v} f}} e(hf(sr)) - S_3(h), \ (v\bar{v}\equiv 1). \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16), полагая $u=N^{1/3}$, получим (3.14). Таким образом,

$$S = \sum_{h\le H} S(h) = S_1 - S_2 - S_3 - O(H(ND^{-1})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{3.17}$$

где $S_i = \sum_{h\le H} S_i(h)$, $i=1,2,3$. Подобно тому как это было сделано в доказательстве леммы 1.2.4, каждую сумму S_i разобьем на $\ll \ln N$ подсумму вида

$$S_i^{(j)} = \sum_{h\le H} \sum_{\substack{u\le NX^{-1}\\ u\equiv f}} \omega(u) \sum_{\substack{X<v\le 2X\\ v\equiv f_1, uv\le N}} \psi(v) e(hf(uv)), \tag{3.18}$$

где $X<N^{1/2}$ и $\omega(u)=1$ или $\omega(u)=\ln u$, если $X\le N^{1/3}$.
В силу (3.18) имеем

$$S \ll \max_{i,j} S_i^{(j)} \ln N + O\left(\left(\frac{N}{D}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{3.19}$$

Если выполняется условие $XY \le N$ и

$$(XD^{-1})^R \ge \min\left(N^{1/2}D; qd^{-2k+1}, (ND^{-1})^k Hq^{-1}d^{2k-1}\right), \tag{3.20}$$

то сумму $S_i^{(j)}$ можно оценить согласно лемме 1.3.4. В этом случае имеем

$$S_i^{(j)} \ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left[\left(\frac{X}{D}\right)^{-R} + \frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^{2k-1}H}\right]^{\nu} \ll$$

$$\ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{D}{N}\right)^{k}\frac{q}{d^{2k-1}H}\right)^{\nu}. \tag{3.21}$$

Если же не выполняется условие (3.20), то сумму $S_i^{(j)}$ оценим при помощи леммы 1.3.5. Поэтому

$$S_i^{(j)} \ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{k-1}{R}}\left(\frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^kH}\right)^{1/R} \quad \text{и}$$

$$\left(\frac{X}{D}\right)^{\frac{k-1}{R}} < \min\left(\left(\frac{N^{1/2}}{D}\right)^{\nu(k-1)}; \left(\frac{q}{d^{2k-1}}\right)^{\nu(k-1)}; \left(\left(\frac{N}{D}\right)^{k}\frac{Hd^{2k-1}}{q}\right)^{\nu(k-1)}\right).$$

Отсюда,

$$S_i^{(j)} \ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^kH}\right)^{\frac{1}{R}+\nu(k-1)} \ll$$

$$\ll \left(\frac{HN}{D}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{d^{2k-1}}{q} + \frac{D}{N^{1/2}} + \left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^kH}\right)^{\nu}. \tag{3.22}$$

Из (3.19), (3.21) и (3.22) следует утверждение теоремы 1.3.1.

§4. О распределении дробных долей последовательности $\{f(p)\}$ с простыми аргументами из арифметической прогрессии.

Пусть, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – вещественные числа, $\{\theta\}$ – дробная часть θ, $\| x \|$ – расстояние от x до ближайшего целого числа и $\pi_D(N)$ – число простых чисел $p \le N$ и $p \equiv f(mod D)$. В качестве применения теоремы 1.3.1 в этом параграфе докажем следующие теоремы [14,17,30,34].

Теорема 1.4.1. *Если* $0 \le \gamma < \gamma + \delta \le 1$ *и* $\pi_D^*(\gamma,\delta,N)$ *– означает количество простых чисел* $p \le N$ *и* $p \equiv f(modD)$ *таких, что* $\gamma \le \{\alpha p^k\} < \gamma + \delta$*, то*

$$\pi_D^*(\gamma,\delta,N) - \delta\pi_D(N) \ll \frac{N}{D}\left(\Delta(\delta^{-1})\ln q + \left(\frac{qN}{\delta}\right)^{\varepsilon}\left(\frac{d^k}{q} + \frac{D}{N}\right)^{1/R}\right).$$

Здесь все параметры, присутствующие в правой части, имеют тот же смысл как в теореме 1.3.1.

Теорема 1.4.2. *Если* $k \ge 2$ *- натуральное число,* α*- иррациональное число и* β *- произвольное действительное число, тогда для любого* $\varepsilon > 0$*, существует положительное число* $C(\varepsilon,k)$*, зависящее только от* ε *и* k*, для которого неравенства* $\|\alpha p^k - \beta\| \le C(\varepsilon,k)p^{-\frac{\nu}{2}+\varepsilon}, при\, \nu = 4^{1-k}$*, имеет бесконечно много решений в простых числах* $p \equiv f(modD)$ *и* $D \ll N^{\varepsilon}$.

Сформулированные теоремы являются обобщением по k и по D соответствующих результатов A.Chosh'a [116], а также усилением при $2 \le k \le 11$ результатов И.М.Виноградова [50,52]. В частности, при $k = 2$ и $D = 1$ из теорем 4.1 и 4.2., соответственно, следуют теоремы 3 и 4 работы [116].

Заметим, что методика используемая в данной работе позволяет доказать эти теоремы не только относительно αp^k, но и для многочлена $f(p) = \alpha p^k + \alpha_1 p^{k-1} + ... + \alpha_{k-1}p + \alpha_k$. Также отметим, что при $k = 2$ и $D \ll \ln^A X$ результаты этих теорем можно несколько улучшить, используя теорему 1.2.1 вместо теоремы 1.3.1, используемые при доказательствах теорем 1.4.1 и 1.4.2.

Пусть η - действительное число с условием $0 \le \eta \le \frac{1}{2}$ и

$$g_\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} -\eta \le x < \eta, \\ 0, & \text{если} -\frac{1}{2} \le x < -\eta \text{ или } \eta \le < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.1}$$

При доказательстве теоремы 1.4.1 будем использовать следующую лемму:

Лемма 1.4.1. *Если* α *- иррациональное число с условием* $|\alpha q - a| < q^{-1}$, $(a,q) = 1$ *и* β *- произвольное действительное число, то для любого фиксированного* $\varepsilon_0 > 0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{n \le N, n \equiv f} \Lambda(n)\{g_\eta(\alpha n^k - \beta) - 2\eta\} \ll \frac{N}{D}\left[\Delta(\eta^{-1})\ln(2Nq) + (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon_0}\left(\frac{d^k}{q} + \frac{D}{N}\right)^{1/R}\right],$$

где $\Delta(\eta^{-1})$ *определяется при помощи равенства (3.1) и* $R=2^{k-1}$.

Доказательство. Расширим область определения по x функции $g_\eta(x)$ – продолжая периодически по x с периодом равным 1. Разлагая $g_\eta(x)$ в ряд Фурье, имеем

$$g_\eta(x)-2\eta=\sum_{\substack{-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}{}' \frac{\sin 2\pi m\eta}{\pi m}e(mx), \tag{4.2}$$

где $\sum'$ - означает, что при суммировании по m члены соответствующие $\pm m$ объединяются.

Пусть α – иррациональное число, β– произвольное действительное число. Считая, что $x=\alpha n^k-\beta$ в (4.2), находим

$$g_\eta(n^k\alpha-\beta)-2\eta=\sum_{\substack{-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\frac{\sin 2\pi m\eta}{\pi m}e(m(\alpha n^k-\beta)). \tag{4.3}$$

Если $\frac{a}{q}$ – подходящая дробь в разложении α в цепной дроби (с условием $(a,q)=1$ и $|\alpha q-a|<q^{-1}$) и $H=[Nq\eta^{-1}]+1$, то из (4.3) следует, что

$$\sum_{n\le N, n\equiv f}\Lambda(n)(g_\eta(\alpha n^k-\beta)-2\eta)=A_1+A_2, \tag{4.4}$$

где

$$A_1=\sum_{|m|\le H}\frac{\sin 2\pi m\eta}{m\pi}e(-\beta m)\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv f}}\Lambda(n)e(mn^k\alpha),$$

$$A_2=\sum_{n\le N, n\equiv f}\Lambda(n)\sum_{|m|>H}\frac{\sin 2\pi m\eta}{m\pi}e(m(\alpha n^k-\beta)).$$

Сначала рассмотрим сумму A_2. Эту сумму можем написать в виде

$$A_2=\frac{1}{2i}\sum_{n\le N, n\equiv f}\Lambda(n)\sum_{|m|>H}{}'\frac{1}{m\pi}\Big(e(m(\alpha n^k-\beta+\eta))-e(m(\alpha n^k-\beta-\eta))\Big). \tag{4.5}$$

Обозначим $\theta_n^{\pm}=\alpha n^k-\beta\pm\eta$ и $T_n^{\pm}(u)=\sum_{m\le u}e(m\theta_n^{\pm})$. Предположим, что $\theta_n^{\pm}$ не является целым числом (иначе его вклад в (4.5) был бы равен нулю). Из леммы 1.2.1 при $D=1$ следует, что $T_n^{\pm}(u)\le\frac{1}{2}\|\theta_n^{\pm}\|^{-1}$. Поэтому, используя суммирование по Абелю, находим

$$\left|\sum_{|m|>H}{}'\frac{1}{m\pi}e(m\theta_n^{\pm})\right|\ll H^{-1}\|\theta_n^{\pm}\|^{-1}.$$

Но с другой стороны для этой суммы справедлива оценка
$$\left|\sum_{|m|>H}{}' \frac{1}{m\pi} e(m\theta_n^{\pm})\right| \ll 1,$$
равномерная по H и $\theta_n^{\pm}$. Следовательно, из (4.5) получим
$$A_2 \ll (\ln N) \sum_{n\le N, n\equiv f} \min\left(1; H^{-1} \| \alpha n^k - \beta \pm \eta \|^{-1}\right). \tag{4.6}$$
Для дальнейшей оценки суммы в правой части (4.6) рассмотрим функцию $\Phi(H,\omega) = \min(1; H^{-1} \| \omega \|^{-1})$. Ясно, что $\Phi(H,\omega)$ является периодической по ω функцией, с периодом равным 1. Разлагая $\Phi(H,\omega)$ в ряд Фурье, будем иметь
$$\Phi(H,\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \, a_h e(h\omega), \tag{4.7}$$
где $a_h \ll \min((1+\ln H)H^{-1}; |h|^{-1}; Hh^{-2})$.
Выражение (4.7) можно написать в виде
$$\Phi(H,\omega) = \sum_{|h|\le H^2} a_h e(h\omega) + \sum_{|h|>H^2}{}' \, a_h e(h\omega) + O\left(\frac{\ln H}{H}\right).$$
Отсюда в силу (4.6) находим
$$A_2 = B_1 + B_2 + O(N(DH)^{-1} \ln^2 HN), \tag{4.8}$$
где
$$B_1 \ll (\ln NH)^2 \sum_{h\le H^2} \min(H^{-1}; |h|^{-1}) \left|\sum_{n\le N, n\equiv f} e(hn^k\alpha)\right|,$$
$$B_2 \ll (\ln N) \sum_{n\le N, n\equiv f} \left|\sum_{|h|>H^2}{}' \; a_h e(h(\alpha n^k - \beta \pm \eta))\right|.$$
Для B_2 имеем
$$B_2 \ll (\ln N)\cdot H \sum_{n\le N, n\equiv f} \sum_{|h|>H^2} h^{-2} \ll \frac{HN}{D}(\ln N)\int_{H^2}^{\infty} \xi^{-2} d\xi \ll \frac{N}{DH}\ln N.$$
Теперь оценим B_1. Для этого представим его в виде
$$B_1 \ll \left(\frac{V(H^2)}{H^2} - \frac{V(1)}{H} + \int_H^{H^2} z^{-2} V(z)dz\right)\ln^2 NH, \tag{4.9}$$
где
$$V(X) = \sum_{h\le X}\left|\sum_{n\le N, n\equiv f} e(hn^k\alpha)\right|. \tag{4.10}$$
Применяя неравенство Коши и лемму 1.3.2, из (4.10) при $R = 2^{k-1}$ получим

$$|V(X)|^R \le X^{R-1}\sum_{h\le X}\left|\sum_{n\le N, n\equiv f} e(hn^k\alpha)\right|^R \ll X^{R-1}\times$$
$$\times\sum_{h\le X}\left(\frac{X}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{N}{D}\right)^{k-1}+\sum_{y\le W}\min\left(\frac{N}{D};\frac{1}{\|\alpha D^k yh\|}\right)\right),$$
где $W=k!(ND^{-1})^{k-1}$. Обозначим $t=yh$, тогда $t\le k!(ND^{-1})^{k-1}X=Y$ и количество представлений в виде $t=yh$ не больше чем $\ll t^{\varepsilon}$, поэтому
$$|V(X)|^R \ll X^{R-1+\varepsilon}\left(\frac{N}{D}\right)^{R-k+\varepsilon}\left(\left(\frac{N}{D}\right)^{k-1}X+\sum_{t\le Y}\min\left(\frac{N}{D};\|\alpha D^k t\|^{-1}\right)\right).$$
Далее, используя лемму 1.2.1, находим
$$V(X)\ll (NXq)^{\varepsilon}\left(\frac{N}{D}\right)X\left(\frac{d^k}{q}+\left(\frac{N}{D}\right)^{-1}+\left(\frac{N}{D}\right)^{-k}\frac{q}{d^kX}\right)^{1/R}. \qquad (4.11)$$
В силу (4.11) и $H>Nq\eta^{-1}$ имеем
$$\frac{V(H^2)}{H^2}\ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon}\frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{N}{D}+\left(\frac{D}{N}\right)^k\frac{q}{H^2d^k}\right)^{1/R}\ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon}\frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R}$$
и
$$\frac{V(1)}{H}\ll\frac{N}{DH}\ll\frac{N\eta}{DNq}\ll\eta(Dq)^{-1}.$$
Поэтому из (4.9) следует
$$B_1\ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon}\frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R} \qquad (4.12)$$
Следовательно, из (4.7), (4.8) и (4.12) получим
$$A_2\ll (Nq\eta^{-1})^{\varepsilon}\frac{N}{D}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{N}{D}\right)^{1/R} \qquad (4.13)$$
Теперь оценим A_1. Из (4.3) имеем
$$A_1\ll\sum_{m\le H}\min\left(m^{-1},\eta\right)\left|\sum_{n\le N,\, n\equiv f}\Lambda(n)e(mn^k\alpha)\right|.$$
Отсюда, используя интеграл Стилтьеса, находим
$$A_1\ll\frac{G(H)}{H}-\eta G(1)-\int_{\eta^{-1}}^{H}u^{-2}G(u)du,\ \text{ где }\ G(X)=\sum_{m\le X}\left|\sum_{n\le N,\, n\equiv f}\Lambda(n)e(mn^k\alpha)\right|.$$
Теперь из теоремы 1.3.1 при фиксированном $\varepsilon_0>0$, получим
$$A_1\ll ND^{-1}\left(\Delta\left(H\right)+\eta\Delta(1)+\Delta(\eta^{-1})\ln(H\eta)\right).$$
Так как $\Delta(H)$ убывающая функция и $\eta\Delta(1)\le\Delta(\eta^{-1})$, то

$$A_1 \ll ND^{-1}\Delta(\eta^{-1})\ln(2Nq). \qquad (4.14)$$

Из (4.7), (4.13) и (4.14) следует утверждение леммы 1.4.1.

Доказательство теоремы 1.4.1. Так как при $\delta = 1$, утверждение теоремы является тривиальным, будем предполагать, что $\delta < 1$. У нас β и η (с условием $0 \le \eta < \frac{1}{2}$) были произвольные вещественные числа. Теперь положим $\beta = \gamma + \dfrac{\delta}{2}$ и $\eta = \delta/2$. Тогда из леммы 1.4.1 получим

$$\sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n) g_{\delta/2}(\alpha n^k - \gamma - \frac{\delta}{2}) = \delta \sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n) +$$
$$+O\left(\frac{N}{D}\left(\Delta(\frac{2}{\delta})\ln(2Nq) + (Nq\delta^{-1})^{\varepsilon_0}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R}\right)\right). \qquad (4.15)$$

Из определения функции $g_\eta(x)$ (см. (4.1)) следует, что $g_{\delta/2}(\alpha n^k - \gamma - \dfrac{\delta}{2}) = 1$, если существует целое число h, удовлетворяющее условию $-\delta/2 \le \alpha n^k - \gamma - \delta/2 - h < \delta/2$, т.е. $\gamma \le \alpha n^k - h < \delta + \gamma$. По условию теоремы $\delta + \gamma \le 1$, поэтому отсюда $h = [\alpha n^k]$. Следовательно $g_{\delta/2}(\alpha n^k - \gamma - \dfrac{\delta}{2}) = 1$, тогда и только тогда, когда $\gamma \le \{\alpha n^k\} < \delta + \gamma$. В силу этого из (4.15) находим, что

$$\sum_{\substack{p\le N, p\equiv f\\ \gamma\le\{\alpha n^k\}<\gamma+\delta}} \ln p - \delta \sum_{p\le N, p\equiv f} \ln p \ll \frac{N}{D}\left(\Delta\left(\frac{2}{\delta}\right)\ln q + (Nq\delta^{-1})^{\varepsilon_0}\left(\frac{d^k}{q}+\frac{D}{N}\right)^{1/R}\right).$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.4.1.

Доказательство теоремы 1.4.2. В силу следствия 2 теоремы 1.3.1, если $N^{1/2} \le q \le N^{3k/4}$, $D \ll N^{\varepsilon}$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$ – фиксированное число, то для всех $H \ge 1$ имеем $\Delta(H) \ll N^{-\frac{\nu}{2}+\varepsilon_0}$, где $\nu = 4^{1-k}$, $k \ge 2$. Так как по условию теоремы α –иррациональное число, поэтому существует бесконечно много значений q, удовлетворяющих условию $|\alpha q - a| < q^{-1}$. Далее, в лемме 1.4.1 положим $N = q$, тогда из этой леммы следует, что для достаточно больших значений N справедлива оценка

$$\sum_{n\le N, n\equiv f} \Lambda(n)\left\{g_\eta(\alpha n^k - \beta) - 2\eta\right\} \ll N^{1-\frac{\nu}{2}+2\varepsilon_0}. \qquad (4.16)$$

Положим $\eta = C(\varepsilon_0, k) N^{-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0}$, где $C(\varepsilon_0, k)$ – достаточно большое, положительное постоянное, зависящее только от ε_0 и k. Тогда из (4.16) следует, что существует возрастающая последовательность положительных целых $\{N_1, N_2, ...\}$ такая, что

$$\sum_{n\le N_i, n\equiv f}\Lambda(n)g_{\eta_i}(\alpha n^k-\beta)=2\eta_i\sum_{n\le N_i, n\equiv f}\Lambda(n)+O\left(N_i^{1-\frac{\nu}{2}+2\varepsilon_0}\right),$$

где $\eta_i=C(\varepsilon_0,k)N_i^{-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0}, i=1,2,....$

Отсюда, в силу бесконечности простых чисел в арифметической прогрессии следует, что для достаточно больших N_i

$$\sum_{p\le N_i, p\equiv f}(\ln p)g_{\eta_i}(\alpha p^k-\beta)>C(\varepsilon_0,k)N_i^{1-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0}. \tag{4.17}$$

Здесь

$$\sum_{p\le N, p\equiv f}(\ln p)g_{\eta_i}(\alpha p^k-\beta)=\sum_{\substack{p\le N_i, p\equiv f\\ \|\alpha p^k-\beta\|<C(\varepsilon_0,k)N_i^{-\frac{\nu}{2}+3\varepsilon_0}}}\ln p. \tag{4.18}$$

Из (4.17) и (4.18) следует утверждение теоремы.

§5. Об одной оценке Вейля-Виноградова тригонометрической суммы.

Пусть $f(x)=\alpha_k x^k+\alpha_{k-1}x^{k-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ –полином k-ой степени ($k\ge 2$) с вещественными коэффициентами $\alpha_k=\alpha,\ \alpha_{k-1},...,\alpha_1,\alpha_0$ и

$$S(f)=\sum_{n\le P}e(f(n)). \tag{5.1}$$

Тогда, согласно неравенству Вейля (см. лемма 2.4 [141]) при $(a,q)=1$, $|\alpha-aq^{-1}|\le q^{-2}$ имеем:

$$S(f)\ll P^{1+\varepsilon}(q^{-1}+P^{-1}+qP^{-k})^{2^{1-k}}, \tag{5.2}$$

где ε – произвольное положительное число и постоянная в символе $\ll$ - Виноградова зависит от k и $\varepsilon>0$. В этом параграфе докажем теорему [25,26,28,32,40]:

Теорема 1.5.1. *Если* $k\ge 6$, $\alpha=aq^{-1}+z$, $(a,q)=1$, $|z|<q^{-2}$ *и* $\alpha_{k-1}=0$, *то*

$$S(f)\ll P^{1+\varepsilon}(Pz_0^{-1}q^{-1}+P^{-2}+qz_0P^{1-k})^{\frac{4}{3}2^{-k}}, \tag{5.3}$$

где $z_0=\max(1;P^k|z|)$.

Отсюда, в частности, следует, что

$$S(f)\ll P^{1+\varepsilon}(Pq^{-1}+P^{-2}+qP^{1-k})^{\frac{4}{3}2^{-k}} \tag{5.4}$$

Оценка (5.4) лучше чем оценки (5.2) при $P^3\le q\le P^{k-3}$. Таким образом, оценка (5.3) является усилением оценки Вейля (5.2). Отметим, также, что полученный результат является улучшением ранее доказанной оценки $S(f)$ методом Виноградова при $6\le k\le 11$ и можно применять для оценки о распределении дробных долей последовательности

$\{f(n)\}$, а также в некоторых аддитивных задачах теории чисел. Из оценки (5.3) в частности, следует, что при $k \ge 6$ неравенство $\| f(n) \| \le n^{\varepsilon - \frac{8}{3}2^{-k}}$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Эти результаты является обобщением для многочлена результатов B.R.Heath - Brown'а [122,123].

Доказательство теоремы 1.5.1. Пусть пока $f(x) = \alpha x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ – произвольный полином степени $k \ge 6$. Для того, чтобы установить оценку (5.3) сначала, используя симметричную разность $\Delta_h(f(x)) = f(x+h) - f(x-h)$, методом математической индукции покажем, что для $0 \le j \le k$ справедливо неравенство

$$|S(f)|^{2^j} \le 2^{2^j - 1} P^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1|<P/2} \ldots \sum_{|h_j|<P/2} \left| \sum_{n \in I_j} e(\Delta_j(n)) \right|, \qquad (5.6)$$

где $I_1 = I(h_1) \subset [1;P]$, $I_j = I(h_1,\ldots,h_j) \subset I_{j-1} = I(h_1,\ldots,h_{j-1})$ и $\Delta_j(n) = \Delta_{h_1}\ldots\Delta_{h_j}(f(n))$.

При $j=0$ неравенства (5.6) очевидно. Предположим, что неравенство (5.6) справедливо для некоторого j и мы покажем, что оно будет справедливым и для $j+1$. Так как

$$\left| \sum_{n \in I_j} e(\Delta_j(n)) \right| \le \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i (mod\, 2)}} e(\Delta_j(n)) \right|,$$

то, используя неравенство Коши в виде

$$\left| \sum_{i=1}^{N} X_i \right|^m \le N^{m-1} \sum_{i=1}^{N} |X|^m,$$

находим

$$|S(f)|^{2^{j+1}} \le 2^{2^{j+1}-2} P^{2^{j+1}-2j-2} \left(\sum_{|h_1|<P/2} \ldots \sum_{|h_j|<P/2} \sum_{i=0,1} \times \right. \qquad (5.7)$$

$$\left. \times \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i (mod\, 2)}} e(\Delta_j(n)) \right| \right)^2 \le 2^{2^{j+1}-2} P^{2^{j+1}-2j-2} \cdot P^j 2 \sum_{|h_1|<P/2} \ldots \sum_{|h_j|<P/2} \sum_{i=0,1} \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \equiv i (mod\, 2)}} e(\Delta_j(n)) \right|^2 .$$

Здесь

$$\sum_{i=0,1}\left|\sum_{\substack{n\in I_j\\ n\equiv i(mod\,2)}} e(\Delta_j(n))\right|^2=\sum_{i=0,1}\sum_{\substack{m,n\in I_j\\ m\equiv i(mod\,2),n\equiv i(mod\,2)}} e(\Delta_j(m)-\Delta_j(n))=$$

$$=\sum_{\substack{m,n\in I_j\\ m\equiv n(mod\,2)}} e(\Delta_j(m)-\Delta_j(n))=\sum_{|h|<P/2}\sum_{r\in I_{j+1}} e(\Delta_j(r+h)-\Delta_j(r-h))=$$

$$=\sum_{|h|<P/2}\sum_{r\in I_{j+1}} e(\Delta_{j+1}(r)), \tag{5.8}$$

где $I_{j+1}=\{r:r\pm h\in I_j\}$. Из (5.7) и (5.8) следует, что

$$|S(f)|^{2^{j+1}}\le 2^{2^{j+1}-1}P^{2^{j+1}-j-2}\sum_{|h_1|<P/2}\dots\sum_{|h_j|<P/2}\sum_{|h_{j+1}|<P/2}\left|\sum_{r\in I_{j+1}} e(\Delta_{j+1}(r))\right|,$$

т.е. неравенство (5.6) справедливо для $j+1$.

Таким образом, неравенство (5.6) справедливо для любого натурального j.

Теперь в (5.6) положим $j=k-3$ и рассмотрим

$$\Delta_{k-3}(n)=\Delta_{h_1}\dots\Delta_{h_{k-3}}(f(n)).$$

Так как

$$(x+h)^k-(x-h)^k=2h(C_k^1x^{k-1}+C_k^3x^{k-3}h^2+C_k^5x^{k-5}h^4+\dots)=$$

$$=2h\left(kx^{k-1}+\sum_{1\le l\le\frac12(k-1)} C_k^{2l+1}h^{2l}x^{k-2l-1}\right),\qquad \text{то}$$

$$\Delta_h(f(x))=\alpha\cdot 2h\left(kx^{k-1}+\sum_{1\le l\le\frac12(k-1)} C_k^{2l+1}h^{2l}x^{k-2l-1}\right)+$$

$$+\alpha_{k-1}\cdot 2h\left((k-1)x^{k-2}+\sum_{1\le l\le\frac12(k-2)} C_{k-1}^{2l+1}h^{2l}x^{k-2l-2}\right)+$$

$$+\alpha_{k-2}\cdot 2h\left((k-2)x^{k-3}+\sum_{1\le l\le\frac12(k-3)} C_{k-2}^{2l+1}h^{2l}x^{k-2l-3}\right)+\dots+\alpha_2\cdot 4hx+\alpha_1\cdot 2h.$$

Здесь $C_m^i=\dfrac{m!}{i!(m-i)!}$. Отсюда

$$\Delta_{h_1}\dots\Delta_{h_{k-3}}(f(x))=2^{k-3}h_1\dots h_{k-3}\{\alpha(\frac16 k!x^3+ax)+$$

$$+\alpha_{k-1}(\frac12(k-1)!x^2+b)+\alpha_{k-2}(k-2)!x+\alpha_{k-3}\cdot c\}=$$

$$=2^{k-3}h_1\dots h_{k-3}\{\frac16 k!\alpha_k x^3+\frac12(k-1)!\alpha_{k-1}x^2+$$

$$+(\alpha_k a+\alpha_{k-2}(k-2)!)x+(\alpha_{k-1}b+\alpha_{k-3}c)\}, \tag{5.9}$$

где a,b,c – некоторые целые числа. Из (5.6) и (5.9) следует, что

$$|S(f)|^{2^{k-3}}\ll P^{2^{k-3}-k+2}\sum_{|h_1|<P/2}\dots\sum_{|h_{k-3}|<P/2}\Big|\sum_{n\in I_{k-3}}e(2^{k-3}\times$$

$$\times h_1\dots h_{k-3}(\frac{1}{6}k!\alpha n^3+\alpha_{k-1}\frac{1}{2}(k-1)!n^2+(\alpha a+\alpha_{k-2}(k-2)!)n))\Big|. \tag{5.10}$$

Для дальнейших оценках правой части (5.10) положим $\alpha_{k-1}=0$, тогда из (5.10) получим

$$|S(f)|^{2^{k-3}}\ll P^{2^{k-3}-k+2}\sum_{|h_1|<P/2}\dots\sum_{|h_{k-3}|<P/2}\Big|\sum_{n\in I_{k-3}}e(2^{k-3}\times$$

$$\times h_1\dots h_{k-3}(\frac{1}{6}k!\alpha n^3+(\alpha a+\alpha_{k-2}(k-2)!)n))\Big|. \tag{5.11}$$

Для каждого целого m, пусть $L(m)=[mP^{-3};(m+1)P^{-3}]$ и для любого действительного x, пусть $m=m(x)$ целые числа, для которого $x\in L(m)$. Положим $L(x)=L(m(x))$ и $T(x)=\max_{y,z}\left|\sum_{n\in I}e(yn^3+zn)\right|$, где I – некоторый под интервал интервала $[1;P]$, y пробегает в $L(m)$, а z – в интервале $[0;1]$. В новых обозначениях из (5.11) получим

$$|S(f)|^{2^{k-3}}\ll P^{2^{k-3}-k+2}\sum_{|h_1|<P/2}\dots\sum_{|h_{k-3}|<P/2}T(\alpha Kh_1\dots h_{k-3}), \tag{5.12}$$

где $K=\frac{1}{6}2^{k-3}k!$.

Далее, полагая $h=Kh_1h_2\dots h_{k-3}$ и учитывая, что вклад членов в сумму правой части (5.12) для $h=0$ не более, чем $\ll P^{k-4}$ и количество представлений h в указанном виде есть $\ll\tau_{k-2}(h)\ll h^{\varepsilon}\ll P^{\varepsilon}$, находим

$$|S(f)|^{2^{k-3}}\ll P^{2^{k-3}-1}+P^{2^{k-3}-k+2+\varepsilon}\sum_{h=1}^{R}T(\alpha h),$$

где $R=KP^{k-3}$. Отсюда, возведя обе части в шестую степень и затем применяя неравенство Гельдера, получим

$$|S(f)|^{3\cdot 2^{k-2}}\ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6}+P^{3\cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon}\left(\sum_{h=1}^{R}T(\alpha h)\right)^6\ll$$

$$\ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6}+P^{3\cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon}\cdot R^{6-1}\sum_{h=1}^{R}T^6(\alpha h)\ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6}+P^{3\cdot 2^{k-2}-k-3+6\varepsilon}\sum_{h=1}^{R}T^6(\alpha h). \tag{5.13}$$

Для оценки суммы в правой части (5.13) будем использовать следующие две леммы D.R.Heath - Brown’a [122] (см. лемма 5 и 6 [122]).

Лемма 1.5.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m=1}^{P^3} T(mP^{-3})^6 \ll P^{7+\varepsilon}.$$

Лемма 1.5.2. *Если* $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a,q) = 1$ *и* $|z| \le q^{-2}$, *то для любого вещественного* μ *и* $0 < \Delta < \frac{1}{2}$ *справедливы неравенства:*

$$\{h \le H : \| \alpha h - \mu \| \le \Delta\} \le 4(1 + q\Delta)(1 + q^{-1}H) \quad \text{и} \tag{5.14}$$

$$\{h \le H : \| \alpha h - \mu \| \le \Delta\} \le 8(1 + (q|z|)^{-1}\Delta)(1 + q|z|H). \tag{5.15}$$

Теперь, применяя лемму 1.5.1, из (5.13) находим

$$|S(f)|^{3\cdot 2^{k-2}} \ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + P^{3\cdot 2^{k-2}-k+4+7\varepsilon} \max_m F(m), \quad \text{где} \tag{5.16}$$

$$F(m) = \{h \le P : \alpha h \in \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} L(m + P^3 l)\} \le \{h \le R : \| \alpha h - mP^{-3} \| \le P^{-3}\}.$$

Из (5.14) и (5.15) при $H = R = KP^{k-3}$, $\Delta = P^{-3}$, соответственно, получим

$$F(m) \ll qP^{-3} + P^{k-4} + q^{-1}P^{k-3} \quad \text{и} \quad F(m) \ll q|z| \cdot P^{k-3} + P^{k-6} + q^{-1}|z|^{-1} P^{-3}.$$

Объединение этих оценок в одну дает

$$F(m) \ll qz_0 P^{-3} + P^{k-6} + q^{-1} z_0 P^{k-3}, \tag{5.17}$$

где $|z_0| = \max\{1; |z| P^k\}$.

Наконец, из оценок (5.16) и (5.17) находим

$$|S(f)|^{3\cdot 2^{k-2}} \ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + qzP^{3\cdot 2^{k-2}-k+1+7\varepsilon} + P^{3\cdot 2^{k-2}-2+7\varepsilon} + q^{-1}z_0^{-1}P^{3\cdot 2^{k-2}+1+7\varepsilon} \ll$$

$$\ll P^{3\cdot 2^{k-2}+\varepsilon}\left(qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P\right), \text{ т.е.}$$

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}\left(qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P\right)^{\frac{1}{3\cdot 2^{k-2}}},$$

что и требовалось доказать.

В заключение в ради справедливости отметим, что произвольный полином k-ой степени $f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$ с вещественными коэффициентами $\alpha_k, \alpha_{k-1}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ при помощи преобразования $x = y - \alpha_{k-1}(k\alpha_k)^{-1}$ можно привести к виду

$$f(y) = \beta_k y^k + \beta_{k-2}y^{k-2} + \beta_{k-3}y^{k-3} ... + \beta_1 y + \beta_0,$$

но при этом указанное преобразование, ни всегда будет целочисленным.

ГЛАВА II
О РАЗЛОЖЕНИИ ЧИСЕЛ СУММОЙ ОГРАНИЧЕННОГО ЧИСЛА СЛАГАЕМЫХ

§1. Применение нового итерационного метода Вона при оценке количество варинговых чисел в $(1,X)$.

Пусть $G(k)$ - наименьшее s такое, что каждое достаточно большое натуральное число представимо в виде
$$n = x_1^k + x_2^k + ... + x_s^k, \tag{1.1}$$
где $k \geq 2$ и $x_1, x_2, ..., x_s$ натуральные числа.

При X – достаточно большом обозначим через $N_{k,s}(X)$ – количество натуральных чисел $n \leq N$, которые представимы в виде (1.1). Фактически величина $G(k)$ известна только для $k = 2$ и $k = 4$, а именно $G(2) = 4$ и $G(4) = 16$ (см. §1.1, 1.2 [141]).

После известных работ И.М.Виноградова (см. гл. 5,7, [141], и гл. 2 [53]), Дэвенпорта [107,108,109], А.А.Карацубы [60] и других (наиболее полную библиографию см. в [141]), R.C.Vaughan [134,135], применяя новый итерационный метод, улучшил прежние результаты относительно $G(k)$ для всех $k \geq 5$. При $s = 3, k \geq 3$ и $s = 4$, $5 \leq k \leq 20$ он получил улучшение в оценках $N_{k,s}(X)$.

В этой связи важно получить оценки для $N_{k,s}(X)$, когда k и s – фиксированные, причем $s < s_0$, где s_0 граница для $G(k)$, доказанные R.C.Vaughan'ом в [134]. Это надо понимать в следующем смысле: например в [18], в частности доказано, что каждое достаточно большое n представимо в виде девятнадцати пятых степеней. Спрашивается, а каково будет количество $n \leq N$, представимых в виде суммы 4 или 5 пятых степеней.

И вообще, каково будет количество $n \leq N$ представимых в виде s $(s < s_0)$ k - ых степеней. Когда $k \geq 3$, $s = 3$ $(s_0 = 7)$ и $5 \leq k \leq 20$, $s = 4$ на этот вопрос отвечают теоремы 1.3 и 1.4 [134] и результаты [135].

В частности, согласно теоремам 1.3 и 1.4 [134]
$$N_{k,3}(X) > X^{\alpha_{k,3} - \varepsilon} \tag{1.2}$$
где $\alpha_{3,3} = 11/12$ и $\alpha_{k,3} = \frac{3}{k} - \frac{1}{k^2}$ при $k \geq 4$.

В §§1-4 главы II, используя новый итерационный метод R.C.Vaughan'a [134], относительно $N_{k,s}(X)$ доказаны следующие теоремы [1,9,24]:

Теорема 2.1.1. (Основная теорема). *При любом достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *и* $X > X_0(s,k,\varepsilon)$ *справедливо неравенство* $N_{k,s}(X) > X^{\alpha_{k,s}-\varepsilon}$, *где* $\alpha_{k,s}$ *при* $5 \le k \le 10$ *и* $5 \le s \le 8$ *указаны в таблице 1 (см., а при* $k \ge 10$ *и* $4 \le s \le 8$ *согласно формулам:*

$$\alpha_{k,4} = \frac{4}{k} - \frac{5}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}, (k \ge 6) \qquad \alpha_{k,5} = \frac{5}{k} - \frac{11}{2k^2} + \frac{19}{8k^3} - \frac{3}{8k^4}, (k \ge 6)$$

$$\alpha_{k,6} = \frac{6}{k} - \frac{37}{4k^2} + \frac{13}{2k^3} - \frac{69}{32k^4} + \frac{9}{32k^5}, (k \ge 9)$$

$$\alpha_{k,7} = \frac{7}{k} - \frac{67}{4k^2} + \frac{215}{16k^3} - \frac{225}{32k^4} + \frac{243}{128k^5} - \frac{27}{128k^6}, (k \ge 9)$$

$$\alpha_{k,8} = \frac{8}{k} - \frac{22}{k^2} + \frac{26}{k^3} - \frac{1095}{64k^4} + \frac{459}{64k^5} - \frac{837}{512k^6} + \frac{81}{512k^7}, (k \ge 9).$$

Таблица 1

$k \diagdown \alpha_{k,s}$	$\alpha_{k,5}$	$\alpha_{k,6}$	$\alpha_{k,7}$	$\alpha_{k,8}$
5	0,8035404	0,8700952	0,9215428	0,964206
6	0,7013890	0,7725295	0,824504	0,8674203
7	0,6193728	0,6913501	0,7485757	0,7944652
8	0,5521917	0,6252443	0,6832147	0,7327790
9	0,4999521	0,5690801	0,6197738	0,6626185
10	0,4548594	0,5256267	0,5772201	0,6339286

Теорема 2.1.2. *Пусть* $N_{4,s}^{(r)}(X)$ *– число натуральных чисел* $n \le N$ *в классах вычетов* r *по модулю 16, которые являются суммами* s *четвертых степеней. Тогда при* $4 \le s \le 6$ *и* $0 \le r \le s$ *справедлива оценка* $N_{4,s}^{(r)} > X^{\alpha_{4,s}-\varepsilon}$, *где* $\alpha_{4,4} = 0{,}8893198;$ $\alpha_{4,5} = 0{,}9517545;$ $\alpha_{4,6} = 0{,}9800892.$

Эти результаты дополняют соответствующие результаты R.C.Vaughan'а [139,140] и являются улучшением результатов H.Davenport'а [107,108,109]. Для сравнения отметим, что в [109], в частности, получены $\alpha_{5,8} = 6913439/7576115 = 0{,}9125308;$ $\alpha_{6,5} = 5549/8379 = 0{,}6622508;$ $\alpha_{6,6} = 575117/787182 = 0{,}7306023$ вместо $\alpha_{5,8} = 0{,}9642060;$ $\alpha_{6,5} = 0{,}7083890;$ $\alpha_{6,6} = 0{,}7725295$, полученной в теоремы 2.1.1 и в [60] $\alpha_{4,4} = 311/412 = 0{,}803398;$ $\alpha_{4,5} = 5539/6268 = 0{,}8836949$ вместо $\alpha_{4,4} = 0{,}8893198;$ $\alpha_{4,5} = 0{,}9517545$, полученной в теоремы 2.1.2.

В доказательство сформулированных теорем будет использовано сочетание метода Дэвенпорта [58], суть которой является некоторой модификацией метода И.М.Виноградова (см. гл. 5,6 [141]), с новым методом R.C.Vaughan'a [139].

Отметим также что И.Аллаковым и Б.Х. Абраевым в [1] определены значении $\alpha_{k,s}$ *при* $k \geq 10$ *и* $9 \leq s \leq 11$.

§2. Решение вспомогательного уравнения

Обозначим через $A(Y,R)$ - множество натуральных чисел $x \leq Y$, которые не имеют простые делители $p > R$, то есть $A(Y,R) = \{x : x \leq Y \text{ и } p \setminus x \Rightarrow p \leq R\}$.

Лемма 2.2.1. *Если* τ *– фиксированное положительное число и* $R < Y \leq R^{\tau}$, *тогда* $cardA(Y,R) = Y\rho\left(\frac{\ln Y}{\ln R}\right) + O\left(\frac{Y}{\ln Y}\right)$,*где* $\rho(x)$ *– функция Дикмана.*

Эта есть лемма 5.3. R.C.Vaughan'a [139]. Доказательство леммы см. [111]. Определение и основные свойства функции Дикмана см. [110]. Мы отметим только, что $\rho(x) = 0$ при $x < 0$, $\rho(x) = 1$ при $0 \leq x < 1$, и при $x \geq 0$ функция $\rho(x)$ – положительная и убывающая.

Следующая лемма содержит по сути основную идею нового итерационного метода R.C.Vaughan'a [140]. Пусть $S_s(P,R)$ - число решений уравнения

$$x_1^k + x_2^k + ... + x_s^k = y_1^k + y_2^k + ... + y_s^k$$

с условием $x_i \in A(P,R)$, $y_i \in A(P,R)$. Для удобства также обозначим

$$A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}) = (2t-2)\theta + 1 + \lambda_{t-1}(1-\theta),$$

$$B_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}) = (2t-2-k)\theta + 2 - 2^{1-j} + \lambda_{t-1}(1-\theta),$$

$$C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}) = \frac{(2t-2-k+k\cdot 2^{-j})\theta + 2 - (j+1)2^{-j} + \lambda_{t-1}(1-\theta)(1-t2^{-j})}{1-(1-\theta)(t-1)\cdot 2^{-j}},$$

$$B_2(t,k,\theta,\lambda_{t-1}) = (2t-2-k-2^{2-k})\theta + 2 - 2^{2-k} + \lambda_{t-1}(1-\theta),$$

$$C_2(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1}) =$$

$$= \frac{(2t-2-k+(k-1)2^{-j})\theta + 2 - (j+1)2^{-j} - \lambda_{t-1}(1-\theta)(1-t2^{-j})}{1-(1-\theta)(t-1)\cdot 2^{-j}},$$

$$C_3(t,k,\theta,\lambda_{t-1}) = 2t - k + \sigma\cdot(t^{-1} + \theta - \theta t^{-1})^{-1},$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } t \geq 2k-2 \\ 2t^{-1} - (k-1)^{-1}, & \text{если } 2k-2 > t \geq k-1. \end{cases}$$

Далее, относительно λ_t сформулируем три (I), (II), (III) группы условий:

(I). Для некоторого j с условиями $2^j \ge t$ и $1 \le j \le k-1$ существует θ, удовлетворяющее условию $0 < \theta \le \frac{1}{k}$ такое, что

$$\lambda_t \ge A_1(t, \theta, \lambda_{t-1}), \tag{I.1}$$

$$\lambda_t \ge B_1(t, k, \theta, j, \lambda_{t-1}), \tag{I.2}$$

$$\lambda_t \ge C_1(t, k, \theta, j, \lambda_{t-1}). \tag{I.3}$$

(II). Для некоторого j с условием $2^j \ge t$ и

a) $j = k-2$ или b) $j = k-4$ или c) $1 \le j \le k-3$ и $k-j$ - нечетное, существует θ, удовлетворяющее условию $0 < \theta \le \frac{1}{k}$, такое, что

$$\lambda_t \ge A_1(t, \theta, \lambda_{t-1}), \tag{II.1}$$

$$\lambda_t \ge B_1(t, k, \theta, j, \lambda_{t-1}), \tag{II.2}$$

$$\lambda_t \ge C_2(t, k, \theta, j, \lambda_{t-1}). \tag{II.3}$$

(III). Если $t \ge k-1$, то существует θ, удовлетворяющее условию $0 < \theta \le \frac{1}{k}$, такое, что

$$\lambda_t \ge A_1(t, \theta, \lambda_{t-1}), \tag{III.1}$$

$$\lambda_t \ge B_2(t, k, \theta, \lambda_{t-1}), \tag{III.2}$$

$$\lambda_t \ge C_3(t, k, \theta, \lambda_{t-1}). \tag{III.3}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать лемму.

Лемма 2.2.2. *Предположим, что* $k \ge 5$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ *и для каждого* $t = 3, 4, \ldots, s$ *справедлива, по крайней мере, одно из условий (I), (II), (III). Тогда при условии* $\lambda > \lambda_s$, $0 < \eta < \eta_0(\lambda - \lambda_s)$ (<1) *и* $P > P(s, \eta)$ *имеем* $S_s(P, P^\eta) < P^\lambda$.

В случае $k = 4$ также будем использовать утверждение

Лемма 2.2.3. *Пусть* $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 13/4$, $\theta_4 = 2/(6+\sqrt{80})$, $\lambda_4 = 6\theta_4 + 1 + \lambda_3(1-\theta_4) = 4{,}618033\ldots$, $\theta_5 = 2/11$, $\lambda_5 = 8\theta_5 + 1 + \lambda_4(1-\theta_5) = 6{,}232936\ldots$ *и* $1 \le s \le 5$. *Тогда при* $\lambda > \lambda_s$, $0 < \eta < \eta_0(\lambda - \lambda_s)$ *и* $P > P_0(\eta, s)$ *справедливо неравенство* $S_s(P, P^\eta) < P^\lambda$.

Лемма 2.2.2 и 2.2.3 являются теоремами 4.2 и 4.3 R.C.Vaughan'a [140] соответственно. Отметим, что основной идеей нового итерационного метода R.C.Vaughan'a заключается в выборе $\theta (0 < \theta \le \frac{1}{k})$ такое, чтобы λ_s принимало оптимальное (наиболее возможное малое) значение, при этом выполнялось хотя бы одно из условий (I), (II), (III).

Приведем еще одну лемму, которая содержит общую часть доказательства теоремы 2.4.1 и 2.4.2.

Лемма 2.2.4. *При любом достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *и* $X > X_0(s, k, \varepsilon)$ *справедливо неравенство* $N_{k,s}(X) > X^{\alpha_{k,s} - \varepsilon}$, *где* $k \ge 4$ *и* $\alpha_{k,s} = (2s - \lambda_s)k^{-1}$.

Доказательство. Пусть $P = X^{1/k}$, $R = P^{\eta}$, где $\eta > 0$ – достаточно малое вещественное число. Обозначим через $R_s(n)$ число решений уравнения $x_1^k + x_2^k + ... + x_s^k = n$ с условием $x_i \in A(P,R)$.
Тогда
$$S_s(P,R) = \sum_n R_s^2(n).$$
В силу неравенства Коши, имеем
$$\left(\sum_{n\le X} R_s(n)\right)^2 \le \left(\sum_{\substack{n\le X\\ R_s(n)>0}} 1\right)\sum_{n\le X} R_s^2(n).$$
Отсюда
$$N_{k,s}(X) = \sum_{n, R_s(n)>0} 1 \ge \left(\sum_n R_s(n)\right)^2 S_s(P,R)^{-1}. \qquad (2.1)$$
Проведя рассуждения как в §6.1 [141] и беря в нем (подробности см. §5.4 и §6.1 книги [141]) $Z_i = cardA(P,R)$, $i = 1,2,...,s$ находим, что
$$\sum_{n\le X} R_s(n) << (cardA(P,R))^s.$$
Согласно свойству функции Дикмана из леммы 2.2.1 следует, что $cardA(P,R) \gg P$. Следовательно
$$\sum_{n\le X} R_s(n) << P^s. \qquad (2.2)$$
Далее, полагая в лемме 2.2.2 (в случае $k = 4$ в лемме 2.3) $\lambda = \lambda_s + 2\varepsilon$ находим
$$S_s(P,R) < P^{\lambda_s + 2\varepsilon}. \qquad (2.3)$$
Учитывая, что $P = X^{1/k}$ из (2.1) - (2.3) получим утверждение леммы 2.2.4.

§3. Доказательство основной теоремы при $k \ne 4$

Сначала приведем основную идею доказательство теоремы. Согласно леммы 2.2.4, имеем
$$\alpha_{k,s} = (2s - \lambda_s)k^{-1}. \qquad (3.1)$$
Поэтому чтобы доказать теорему 1.1 достаточно найти оптимальное (по возможности малое) значение λ_s из условий (I), (II), (III). Это можно осуществить следующим образом:

1) если выполняется только одно из (I), (II), (III) условий, например (I), тогда сначала решая уравнение $A_1(t,\theta,\lambda_{t-1}) = B_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$

относительно θ, находим $\theta=\theta_1$ и если $A_1(t,\theta,\lambda_{t-1})\ge C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$, то положим $\lambda_s^{(1)}=A_1(t,\theta_1,\lambda_{t-1})$, в противном случае $\lambda_s^{(1)}=C_1(t,k,\theta_1,j,\lambda_{t-1})$. Заметим, решая уравнение, $A_1(t,\theta,\lambda_{t-1})=C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$, находим $\theta=\theta_2$ и если $A_1(t,\theta_2,\lambda_{t-1})\ge B_1(t,k,\theta_2,j,\lambda_{t-1})$, то положим $\lambda_s^{(2)}=A_1(t,\theta_2,\lambda_{t-1})$, в противном случае $\lambda_s^{(2)}=B_1(t,k,\theta_2,j,\lambda_{t-1})$.

2) наконец, решая уравнение, $B_1(t,k,\theta_2,j,\lambda_{t-1})=C_1(t,k,\theta,j,\lambda_{t-1})$, находим $\theta=\theta_3$ и если $A_1(t,\theta_3,\lambda_{t-1})\ge B_1(t,k,\theta_3,j,\lambda_{t-1})$, то положим $\lambda_s^{(3)}=A_1(t,\theta_3,\lambda_{t-1})$, в противном случае $\lambda_s^{(3)}=B_1(t,k,\theta_3,j,\lambda_{t-1})$. Тогда можно полагать, что $\lambda_s=\min(\lambda_s^{(1)},\lambda_s^{(2)},\lambda_s^{(3)})$ и это будет оптимально допустимым минимальным значением λ_s. Конечно, здесь в качестве λ_s можно взять любую из $\lambda_s^{(1)},\lambda_s^{(2)},\lambda_s^{(3)}$, но тогда может оказаться, что найденные значение λ_s не будет оптимальным значением, то есть оценка будет несколько хуже.

3) если же выполняется два или все три (I), (II), (III) группы условий, то необходимо найти для каждой группы условий свои оптимальные λ_s, то есть $\lambda_s^{(I)}$, $\lambda_s^{(II)}$, $\lambda_s^{(III)}$ и в этом случае положим $\lambda_s=\min(\lambda_s^{(I)},\lambda_s^{(II)},\lambda_s^{(III)})$.

Теперь перейдем к непосредственному рассмотрению $\alpha_{5,5}$. При $k=5, s=5$ из (3.1) имеем $\alpha_{5,5}=(10-\lambda_5)/5$. В этом случае выполняется (II) с $j=3$ и $\theta=3/20$ и оно дает нам оптимальное значение λ_5.

Из (II) имеем

$$A_1(5,\theta,\lambda_4)=8\theta+1+\lambda_4(1-\theta),\qquad B_1(5,5,\theta,3,\lambda_4)=3\theta+\frac{7}{4}+\lambda_4(1-\theta),$$

$$C_2(5,5,\theta,3,\lambda_4)=(3+\frac{3}{4}\lambda_4+\frac{25}{4}\theta)(1+\theta)^{-1}\quad \text{и}$$

$$A_1(5,\frac{3}{20},\lambda_4)=B_1(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4)=\frac{11}{5}+\frac{11}{20}\lambda_4,$$

$$C_2(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4)=\frac{81}{23}+\frac{51}{92}\lambda_4.$$

В качестве λ_4 берем $\lambda_4=4{,}4386583$ (здесь и во всех остальных случаях, когда $5\le k\le 10$, значение λ_4 берем из таблицы 1.1, [19]). Тогда

$$C_2(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4)>A_1(5,\frac{3}{20},\lambda_4)$$

и мы можем полагать

$$\lambda_5=C_2(5,5,\frac{3}{20},3,\lambda_4)=5{,}9822985.$$

Следовательно,

$$\alpha_{5,5} = \frac{1}{5}(10 - \lambda_5) = 0{,}8035404,$$

что и требовалось доказать.

Все остальные случаи, когда $5 \le k \le 10$, $5 \le s \le 8$ доказываются аналогичным образом. В таблице 2 указаны значения λ_s, которые найдены из условий (I), (II), (III) и использованы при вычислении $\alpha_{k,s} = (2s - \lambda_s)k^{-1}$

Таблица 2.

k	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
5	5,9822985	7,6495248	9,3922886	11,17897
6	5,7916667	7,3648232	9,0529766	10,795424
7	5,6643903	7,1605498	8,7599706	10,428743
8	5,5824662	6,9980451	8,5342823	10,137768
9	5,5004313	6,8782798	8,4220356	10,036433
10	5,4514062	6,7925507	8,2277996	9,6607144

Теперь докажем, что при $k \ge 6$

$$\alpha_{k,4} = \frac{4}{k} - \frac{5}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}. \qquad (3.2)$$

В силу (3.1)

$$\alpha_{k,4} = (8 - \lambda_4)k^{-1}. \qquad (3.3)$$

Так как в (3.3) k произвольное натуральное число с условием $k \ge 6$, то выполняется только условие (I). Согласно (I) $2^j \ge 4$ и $j = 2,3,\ldots,k-1$. Полагая $j = 2$, проверим (I.1), (I.2), (I.3). Имеем

$$\left.\begin{aligned} \lambda_4 &\ge A_1(4,\theta,\lambda_3), \\ \lambda_4 &\ge B_1(4,k,\theta,2,\lambda_3), \\ \lambda_4 &\ge C_1(4,k,\theta,2,\lambda_3). \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

В силу теоремы 1.4 R.C.Vaughan'a [140] мы можем полагать $\lambda_3 = 3 + \frac{1}{k}$. Поэтому из (3.4) находим

$$\left.\begin{aligned} \lambda_4 &\ge 4 + \frac{1}{4} + (3 - \frac{1}{4})\theta, \\ \lambda_4 &\ge \frac{9}{2} + \frac{1}{k} + (3 - k - \frac{1}{k})\theta, \\ \lambda_4 &\ge ((24 - 3k)\theta + 5)(1 + 3\theta)^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Положим $\theta = 1/2k$ и $\theta = \theta_1$, тогда

$$A_1(4,\theta_1,\lambda_3)=B_1(4,k,\theta_1,2,\lambda_3)=4+\frac{5}{2k}-\frac{1}{2k^2}$$

и $C_1(4,k,\theta_1,2,\lambda_3)<A_1(4,\theta_1,\lambda_3)$ при $k\geq 6$. Следовательно, мы можем полагать

$$\lambda_4=4+\frac{5}{2k}-\frac{1}{2k^2}. \qquad (3.6)$$

Из (3.3) и (3.6) получим (3.2).

Далее, отметим, что аналогичные рассуждения дают

$$\lambda_5=5+\frac{11}{2k}-\frac{19}{8k^2}+\frac{3}{8k^3}, \text{ при } k\geq 6,$$

$$\lambda_6=6+\frac{37}{4k}-\frac{13}{2k^2}+\frac{69}{32k^3}-\frac{9}{32k^4}, \text{ при } k\geq 9,$$

$$\lambda_7=7+\frac{67}{4k}-\frac{215}{16k^2}+\frac{225}{32k^3}-\frac{243}{128k^4}+\frac{27}{128k^5}, \text{ при } k\geq 9,$$

$$\lambda_8=8+\frac{22}{k}-\frac{26}{k^2}+\frac{1095}{64k^3}-\frac{459}{64k^4}+\frac{837}{512k^5}-\frac{81}{512k^6}, \text{ при } k\geq 10.$$

Отсюда и из леммы 2. 2.4 получим утверждение теоремы 2.1.1.

§4. О представлении чисел суммой четвертых степеней чисел.

В этом параграфе докажем теорему 2.1.2. При этом мы будем использовать метод Дэвенпорта, приведенный в §6 книги [141], с $Z=cardA(P,P^{\eta})$, $x_i\in A(P,P^{\eta})$ и $x_i\equiv r(mod16)$, где r фиксированное число с условием $0\leq r\leq s$, $(4\leq s\leq 6)$. Тогда для каждого класса вычетов r по модулю 16 остается в силе лемма 2.2.4 (в доказательстве этой леммы вместо леммы 2.2.2 необходимо использовать лемму 2. 2.3).

Из леммы 2.2.4 при $k=4$, $s=4$ получим $\alpha_{4,4}=\frac{1}{4}(8-\lambda_4)$. В этом случае выполняется условие (II) с $\theta=1/(3+\sqrt{20})$ и $\lambda_4=6\theta+1+\lambda_3(1-\theta)$ (см. лемму 2.3). А в силу теоремы 1.3 R.C.Vaughan'a [139] мы можем полагать $\lambda_3=3+\frac{2}{5+\sqrt{33}}$. Тогда $\lambda_4=4,5627208$ и следовательно $\alpha_{4,4}=0,8593198$.

В случае $s=5$, $\alpha_{4,5}=\frac{1}{4}(10-\lambda_5)$. В этом случае в силу леммы 2.2.3 выполняется (III) с $\theta=2/11$. Поэтому из (III) находим

$$\left.\begin{aligned} \lambda_5 &\geq 8\theta + \lambda_4(1-\theta), \\ \lambda_5 &\geq \frac{1}{4}(7+15\theta) + \lambda_4(1-\theta), \\ \lambda_5 &\geq 6 + (3+12\theta)^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Согласно предыдущему случаю $\lambda_4 = 4{,}5627208$. Поэтому из (4.1) получим $\lambda_5 = 6 + \dfrac{1}{3+2\theta} = 6{,}1929824.$ Таким образом,

$$\alpha_{4,5} = \frac{1}{4}(10-\lambda_5) = 0{,}9517545.$$

Наконец, рассмотрим случай $s=6$, тогда $\alpha_{4,6} = \dfrac{1}{4}(12-\lambda_6).$

Определим оптимальное значение λ_6 при $k=4$. В этом случае выполняется (I) с $j=3, \theta = 3/16$. Поэтому

$$A_1(5,\theta,\lambda_5) = B_1(5,4,\theta,3,\lambda_5) = \frac{23}{8} + \frac{13}{16}\lambda_5 \quad \text{и} \quad C_1(5,4,\theta,3,\lambda_5) = \frac{348}{63} + \frac{26}{63}\lambda_5.$$

Так как $\lambda_5 = 6{,}1929824$, то отсюда получим

$$\lambda_6 = C_1(5,4,\theta,3,\lambda_5) = \frac{1}{63}(348 + 26\lambda_5) = 8{,}0796434.$$

и $\alpha_{4,6} = 0{,}9800892$.

В заключении отметим, что использование нового итерационного метода Вона с комбинацией метода Дэвенпорта при $s=7, k=4$ дает $\alpha_{4,7} = 1$, то есть $N_{4,7}^{(7)}(X) > X^{1-\varepsilon}$.

§5. О представлении четных чисел суммой двух нечетных простых из арифметической прогрессии.

1. Формулировка результатов. Пусть X и P - достаточно большие вещественные числа, а N – натуральное число с условием $\sqrt{N} < X \leq N; p, p_1, p_2$ – простые числа; $D = p^{\nu}$, где $p > 2$, ν – положительное целое; $M_D(X)$ – множество четных натуральных чисел $n \leq X$, которые возможно непредставимо в виде:

$$n = p_1 + p_2, \quad p_i \equiv l_i (mod D), \quad (l_i, D) = 1, \quad i = 1,2; \qquad (5.1)$$

$E_D(X) = card M_D(X)$; $R(n)$ — число представлений n в виде (5.1).

В [63,64] А.Ф.Лавриком была получена асимптотическая формула для $R(n)$ – справедливая для всех четных $n \leq X$, за исключением не более чем $E_D(X) << X / \ln^A X$ (где $A > 0$ – произвольная постоянная) значений n из них. Затем, R.C.Vaughan в [136], H.L.Montgomery и

R.C.Vaughan в работе [128], рассмотрев $E_D(X)$ в случае, $D=1$ соответственно доказали, что $E_1(X)<X\exp(-c\sqrt{\ln X})$ и $E_1(X)<X^{1-\delta}$. $0<\delta<1$. А в [10] нами впервые получена оценка снизу $R(n)$ (при $D=1$) для всех $n\le X$, за исключением не более чем $X^{1-\delta}$ значений из них (см. также [37,103]) .

В этом параграфе, соединяя методики [63,136], докажем[27,29,31,39]

Теорема 2.5.1. *При* $D=p^{\nu}$ *и* $D\ll \ln^A X$ *справедливы оценки*

$$E_D(X)<<\frac{1}{\varphi(D)}X\exp(-c_1\sqrt{\ln X})$$

и для $n\notin M_D(X), n\le X$

$$R(n)>>\frac{n}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1-\frac{\ln^A n}{\exp(c_2\sqrt{\ln n})}\right)\exp\left(-\frac{c_2}{4}\sqrt{\ln n}\right),$$

где постоянные c_1 *и* c_2 *не зависят от* A.

В случае $E_{\tilde\beta}=0$ методикой используемой в данном параграфе можно получить асимптотическую формулу для $R(n)$. В случае $E_{\tilde\beta}=1$ также получается "асимптотическая формула", но уже в этой формуле вместе с обычным главным членом будет участвовать другой член (соответствующей исключительному нулю), порядок которого по сути одинаковый с главным членом, то есть справедлива теорема:

Теорема 2.5.2. *Если* $D=p^{\nu}$ *и* $D<<\ln^A X$, *то для всех* $n\le X$, *исключая не более чем* $c_4X\varphi^{-1}(D)\exp(-c_1\sqrt{\ln X})$ *значений из них, справедлива формула*

$$R(n)=\frac{J(n)\sigma(n)}{\varphi^2(D)\ln^2 n}+E_{\tilde\beta}\frac{J_{\tilde\beta}(n)\tilde\sigma(n)}{\varphi^2(D)\ln^2 n}+O\left(\frac{n(\varphi(D)\ln^2 n)^{-1}}{\exp(c_5\sqrt{\ln n})}\right),$$

где

$$J(n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\ge 2}}1,\quad J_{\tilde\beta}(n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\ge 2}}(n_1\cdot n_2)^{\tilde\beta-1},$$

$$\sigma(n)=2D\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{p\mid D,\,p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid D,\,p>2}}\frac{p-1}{p-2},$$

$$\tilde\sigma(n)=\prod_{\substack{p\mid rd\\ p\nmid n}}\frac{1}{p-1}\prod_{p\nmid nrd,\,p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{\substack{p\mid ndr\\ p>2}}\frac{p}{p-1},$$

здесь $d=(q,D)$, r – *модуль вещественного (исключительного) характера* $\tilde\chi$ *и* $\tilde\beta$ – *исключительный нуль функции* $L(s,\tilde\chi)$.

Заметим, что, используя методику работы [128] нельзя даже получить и такую "асимптотическую" формулу. Отметим, также что в работе [88] приводится оценка $E_D(X) << \varphi^{-1}(D)X^{1-\delta}$ (где $D << \ln^A X$), однако в доказательстве допущена ошибка, которая была указана А.С.Файнлейбом.

Известно, что изучение функции $R(n)$ можно связать с изучением функции $\Pi_D(X,D)$ – означающей число пар простых чисел $p, p+2n$ из интервала $(0;X)$, принадлежащих соответственно арифметическим прогрессиям $Dt+l_1, Dt+l_2$ с условием $1 \le l_1, l_2 \le D$, $(l_1,D)=1$, $(l_2,D)=1$ (см. [63], [47]).

Метод используемый здесь, дает возможность доказать аналогичный результат и для $\Pi_n(X,D)$, а именно:

Теорема 2.5.3. *Если* $D=p^\nu$ *и* $D << \ln^A X$, *то для каждого целого* $0<2n \le X/\ln^A X$, $2n \equiv l_1 - l_2 (mod D)$, *исключая не более чем* $c_4 X\varphi^{-1}(D)\exp(-c_1\sqrt{\ln X})$ *значений из них справедлива оценка*

$$\Pi_n(X,D) >> \frac{n}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1-\frac{\ln^A n}{\exp(c_2\sqrt{\ln n})}\right)\exp(-\frac{c_2}{4}\sqrt{\ln n}),$$

где постоянные c_1 *и* c_2 *не зависят от* $A>0$.

Полученные результаты является усилением результатов работ [63] и обобщением результата работы [136].

Доказательство теоремы 2.5.3 в основном аналогично доказательству теоремы 2.5.1, причем необходимые изменения для вывода теоремы 5.3 можно посмотреть в [136]. В ходе доказательства теоремы 2.5.1 мы сначала установим и справедливость теоремы 2.5.2. Поэтому приступим к доказательству теоремы 2.5.1.

2. Основные леммы. Пусть χ_m – характер Дирихле по модулю m и $\psi(x,\chi)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n)$; δ_χ равен 1 или 0, смотря тому $\chi_m = \overset{\circ}{\chi}_m$ – главный характер или $\chi_m \ne \overset{\circ}{\chi}_m$. Приведем несколько известных лемм, которые необходимы в дальнейших рассуждениях:

Лемма 2.5.1. *Для достаточно больших* X *и* N *с условием* $\sqrt{N} < X \le N$, $3 \le n \le X$ *и для* $m \le \exp(c_5\sqrt{\ln n})$ *справедливы следующие равенства:*

а) если $E_{\tilde\beta}=0$ *или* $E_{\tilde\beta}=1$ *и* m *– модуль характера* χ_m *не делится на* r *– ведущий модуль исключительного характера* $\tilde\chi_r$, *то* $\psi(n,\chi_m)=\delta_\chi n+\rho_n$;

b) если же $E_{\tilde\beta}=1$ *и* $r\,|\,m$*, то* $\psi(n,\chi_m)=\delta_\chi n-\dfrac{n^{\tilde\beta}}{\tilde\beta}+\rho_n,$

причем во всех случаях для ρ_n *справедлива оценка* $\rho_n \ll X\cdot\exp(-c_6\sqrt{\ln X}\,).$

Доказательство см. §19 [58], а также п.4 [136].

Лемма 2.5.2. *Если* $\chi'(t)$ *и* $\chi''(t)$ *– характеры Дирихле соответственно по* $mod Q'$ *и* Q''*, то произведение* $\chi'(t)\chi''(t)$ *- главный характер тогда и только тогда, когда* $\chi'(t)=\bar\chi''(t)$ *для всех* $(t,Q)=1$ *и* χ'*– производный характер, порожденный одним из характеров по* $mod d$ *,где* $d=(Q',Q'')$*,* $Q=Q'Q''d^{-1}$ *и* $\bar\chi''(t)$ *– характер, сопряженный с* $\chi''(t)$.

Лемма 2.5.3. *Для* $(j,k)=1, d\,|\,k$ *и* $(h,d)=1$ *имеют место соотношения*

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\equiv h(mod d)}}^{k} e\left(\frac{jl}{k}\right)=\begin{cases}0, & \text{если } (d,kd^{-1})>1\\ \mu(\dfrac{k}{d})e\left(\dfrac{j\theta h}{d}\right), & \text{если } (d,kd^{-1})=1,\end{cases}$$

где θ *– решение сравнения* $kd^{-1}z\equiv 1(mod d)$.

Доказательство леммы 2.5.2 и 2.5.3 см. у H.Rademacher’a [132] и [64].

3. Основные обозначения и деление единичного интервала. Пусть

$$P_1=\exp(c_6\sqrt{\ln N}/200), \tag{5.2}$$

$$P_2=P_1^{1/4}. \tag{5.3}$$

Если $E_{\tilde\beta}=0$ или же $E_{\tilde\beta}=1$ и $P_2<r$, то положим $P=P_2$, в остальных случаях $P=P_1$. Полагая

$$Q=NP^{-1}, \tag{5.4}$$

сегмент $[Q^{-1},1+Q^{-1}]$ делим на основные и дополнительные интервалы. При $a\le q\le P$ и $(a,q)=1$ через $M(q,a)$ обозначим закрытий интервал $[aq^{-1}-(qQ)^{-1},aq^{-1}+(qQ)^{-1}]$. Ясно, что основные интервалы не пересекаются и содержатся в $[Q^{-1},1+Q^{-1}]$. Через T– обозначим множество тех точек α, $Q^{-1}<\alpha<1+Q^{-1}$, которые не содержатся в никаком $M(q,a)$. В дальнейшем объединение всех $M(q,a)$ назовем большой дугой, а T – малой дугой.

Введем функции

$$S_i(X,\alpha)=\sum_{\chi_D}\bar\chi_D(l_i)\sum_{2<p_i\le X}\chi_D(p_i)\ln p_i e(p_i\alpha),\ \ i=1,2; \tag{5.5}$$

$$g_u^{(i)}(X,\alpha)=\sum_{2<n\le X} n_i^{u-1}e(n_i\alpha),\ \ i=1,2; \tag{5.6}$$

$$V_i(X,\alpha,q,a)=R(q)\frac{\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}e(\frac{a}{q}N_1l_i)g_1^{(i)}(X,\eta),\ \ i=1,2, \tag{5.7}$$

где $\alpha=aq^{-1}+\eta$, $d=(q,D)$, $N_1=gqd^{-1}(modq)$ (N_1 – наименьший положительный вычет числа gqd^{-1} по $modq$), g - по $modd$ определяется из $gqd^{-1}\equiv 1(modd); R(q)=1$, если $(qd^{-1},D)=1$ и $R(q)=0$ в противном случае.

Для удобства обозначим

$$\begin{gathered} S=S(X,\alpha)=S_1(X,\alpha)\cdot S_2(X,\alpha),\\ V=V(X,\alpha,q,a)=V_1(X,\alpha,q,a)V_2(X,\alpha,q,a). \end{gathered} \tag{5.8}$$

Тогда имеем

$$S(X,\alpha)=\varphi^2(D)\sum_{2<n\le 2X}R(X,n)e(\alpha n), \tag{5.9}$$

где

$$R(X,n)=\sum_{\substack{n=p_1+p_2,2<p_1,p_2\le X\\ p_1\equiv l_1,p_2\equiv l_2(modD)}}\ln p_1\ln p_2 \tag{5.10}$$

и

$$V=R(q)\frac{\mu^2(\frac{q}{d})}{\varphi^2(\frac{q}{d})}\sum_{2<n\le 2N}J(N,n)e(\frac{a}{q}(N_1(l_1+l_2-n)))e(\alpha n), \tag{5.11}$$

где

$$J(N,n)=\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ 2\le n_1,n_2\le N}}1. \tag{5.12}$$

Очевидно, что, если $2<n\le N$, то

$$\frac{n}{2}<J(N,n)<<N,\quad (J(N,n)=2(n-2)). \tag{5.13}$$

Если $\frac{1}{2}\le u\le 1$, то суммирование по частям дает (см. лемма 3.5 [5] и [8])

$$g_u^{(i)}(X,\alpha)<<\min(\|\alpha\|^{-u};X^u), \tag{5.14}$$

где $\|\alpha\|$ – расстояние от α до ближайшего целого числа.

4. Малые дуги. В этом пункте докажем следующую лемму:

Лемма 2.5.4. *При достаточно большом N справедливы следующие оценки:*

$$\int_T |S(N,\alpha)|^2\,d\alpha<<N^2D^2\varphi(D)P^{-1}\ln^{12}N, \tag{5.15}$$

$$\int_T |\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}V(N,\alpha)|^2\,d\alpha<<N^3P^{-2}(D\ln\ln P)^4. \tag{5.16}$$

Доказательство. Доказательство оценки (5.16) идентично с доказательством оценки (5.9) работы [136], поэтому ограничимся доказательством оценки (5.15). В силу (5.8) имеем

$$\int_T |S(N,\alpha)|^2\, d\alpha \le \max_{\alpha\in T}|S_1(N,\alpha)|^2 \int_T |S_2(N,\alpha)|^2\, d\alpha. \tag{5.17}$$

Здесь

$$\int_T |S_2(N,\alpha)|^2\, d\alpha \le \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} |S_2(N,\alpha)|^2\, d\alpha = \varphi^2(D) \sum_{\substack{2<p_2\le N\\ p_2\equiv l_2 (modD)}} \ln^2 p_2.$$

В силу теоремы 5.2.1 [81] при $N\ge 2$ и $D\le N^{1/2}$ справедлива оценка

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p\equiv l (modD)}} \ln p << N\varphi^{-1}(D).$$

Поэтому

$$\int_T |S_2(N,\alpha)^2|\, d\alpha << \varphi(D) N\ln N. \tag{5.18}$$

Для оценки $\max\limits_{\alpha\in T}|S_1(N,\alpha)|$ используем следствие 3 теоремы 1.1.2: если $P<q\le NP^{-1}$, $1\le P\le N^{1/3}$, $|\alpha-aq^{-1}|\le 2P(qN)^{-1}$, $(a,q)=1$, то

$$S_i(N,\alpha) << NP^{-1/2}D(\ln N)^{11/2}. \tag{5.19}$$

Согласно теореме Дирихле, существуют такие $q\le Q$ и a с условием $1\le a\le q,(a,q)=1$, для которых $|\alpha-aq^{-1}|<(qQ)^{-1}$. Это означает, что $\alpha\in M(q,a)$, если $q\le P$. Значит для $\alpha\in T$ имеем $q>P$ и следовательно при оценке $\max\limits_{\alpha\in T}|S_1(N,\alpha)|^2$ мы можем использовать (5.19).

Теперь из (5.17) - (5.19) следует (5.15).

Главные дуги. A. Случай $P=P_2$. Из (5.11) следует, что

$$\sum_{q>y}\sum_{a=1}^{q}{}' V(X,\alpha,q,a) = \sum_{2<n\le 2N} J(N,n)\sigma(y,n)e(n\alpha), \tag{5.20}$$

где

$$\sigma(y,n) = \sum_{q>y} R(q)\frac{\mu^2(\frac{q}{d})}{\varphi^2(\frac{q}{d})}\sum_{a=1}^{q}{}' e(\frac{a}{q}(N_1(l_1+l_2)-n)). \tag{5.21}$$

Лемма 2.5.5. *Если* $\alpha\in M(q,a)$, *то*

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} \left|\sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}}\sum_{h=1,h\ne a}^{k} V(N,\alpha,k,h)\right|^2 d\alpha << \frac{P^9}{Q}(D\ln\ln P)^4.$$

Доказательство. Предположим, что $a\le q\le P$, $(a,q)=1$, $h\le k\le P$, $(h,k)=1$, $k\ne q$, $h\ne a$ и $\alpha\in M(q,a)$. Тогда $|\alpha-aq^{-1}|\le(qQ)^{-1}$. Следовательно

$$\| \alpha - hk^{-1} \| = | \alpha - k^{-1}h + aq^{-1} - aq^{-1} \| \ge \| aq^{-1} - hk^{-1} \| -$$
$$- | \alpha - aq^{-1} | \ge (qk)^{-1} - (qQ)^{-1} > (qk)^{-1}.$$

Поэтому, учитывая $n\varphi^{-1}(n) << \ln\ln n$ (при $n \ge 3$) и $d_1 = (k, D) \le D$, из (5.7), (5.8) и (5.14) получаем

$$\left| \sum_{\substack{k \le P \\ k \ne q}} \sum_{\substack{h=1 \\ h \ne a}}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \right|^2 << \left| \sum_{\substack{k \le P \\ k \ne q}} \frac{\mu^2(kd_1^{-1})}{\varphi^2(kd_1^{-1})} \frac{\varphi(k)}{\| \alpha - hk^{-1} \|^2} \right|^2 <<$$
$$<< (qD\ln\ln P)^4 \left(\sum_{k \le P} \varphi(k) \right)^2 << (qDP\ln\ln P)^4.$$

Таким образом,

$$\sum_{q \le P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int\limits_{M(q,a)} \left| \sum_{\substack{k \le P \\ k \ne q}} \sum_{\substack{h=1 \\ h \ne a}}^{k} V(N,\alpha,k,h) \right|^2 d\alpha \ll$$

$$<< \sum_{q \le P} \sum_{a=1}^{q}{}' (PDq\ln\ln P)^4 \cdot \frac{1}{qQ} << P^9 Q^{-1} (D\ln\ln P)^4.$$

Лемма 2.5.6. *Для суммы* $\sigma(P,n)$, *определяемой равенством (5.21), справедлива оценка* $\sigma(P,n) << D^2 P^{-1} \tau(n) (\ln\ln N)^3$, *где* $\tau(n)$ - *число натуральных делителей* n.

Доказательство этой леммы имеется в §7 [63].

Из леммы 5.6 и из (5.20), (5.13) следует следующее утверждение:

Лемма 2.5.7. *При достаточно большом* N, *имеет места оценка*

$$\int\limits_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \left| \sum_{q > P} \sum_{a=1}^{q}{}' V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha << N^3 P^{-2} (D\ln N)^4.$$

Лемма 2.5.8. *Если* $a \le q \le P$, $(a,q)=1$ *и* $\alpha \in M(q,a)$, *то*

$$S_i(N,\alpha) - V_i(N,\alpha,q,a) << N^2 q^{-1} Q^{-1} \exp(-c_6 \sqrt{\ln N}).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\left| \sum_{p_i \le N} \chi_D(p_i) \ln p_i e(\alpha p_i) - \sum_{\substack{p_i \le N \\ p_i \nmid q}} \chi_D(p_i) \ln p_i e(\alpha p_i) \right| \le \ln q. \qquad (5.22)$$

Используя свойство ортогональности характеров, вычитаемую сумму в левой части (5.22) можно написать в виде

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_q}\left(\sum_{j=1}^{q}\bar\chi_q(j)e(\frac{aj}{q})\right)\sum_{p_i\le N}(\ln p_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta). \qquad (5.23)$$

Обозначим

$$A_i = A_i(\chi_D,\chi_q,q,a)=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D,\chi_q}\sum_{j=1}^{q}\bar\chi_D(l_i)\bar\chi_q(j)e(\frac{aj}{q}) \qquad (5.24)$$

и

$$G_i = G_i(\chi_D\chi_q,N)=\sum_{p_i\le N}(\ln p_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta),\ i=1,2. \qquad (5.25)$$

Тогда, используя (5.22) - (5.25), из (5.5) находим

$$S_i(N,\alpha)=A_iG_i+O(\varphi(D)\ln q),\ i=1,2. \qquad (5.26)$$

Сначала рассмотрим G_i. Положим $\chi_D(p_i)\cdot\chi_q(p_i)=\chi_m(p_i)$, где $m=qDd^{-1}$, тогда из (5.24) получим

$$G_i=\sum_{p_i\le N}\chi_m(p_i)\ln p_i\ e(p_i\eta)=\sum_{n_i\le N}\chi_m(n_i)\Lambda(n_i)e(n_i\eta)-$$

$$-\sum_{\substack{p^\nu\le N\\ \nu\ge 2}}\chi_m(p_i^\nu)\ln p_i\ e(p_i^\nu\eta)=\sum_{n_i\le N}(\psi(\chi_m,n_i)-\psi(\chi_m,n_i-1))e(n_i\eta)+O(N^{1/2}).$$

Отсюда, используя лемму 2.5.1 а), находим

$$G_i(\chi_m,N)-\delta_\chi\sum_{2<n_i\le N}e(n_i\eta)\ll\left|\sum_{2<n_i\le N}(\rho_{n_i}-\rho_{n_i-1})e(n_i\eta)\right|+\sqrt{N}\ll$$

$$\left|\sum_{2<n_i\le N}(\rho_{n_i}-\rho_{n_i-1})\right|+|\sum_{2<n_i\le N}(e(n_i\eta)-e((n_i+1)\eta))\sum_{2<n_i\le N}(\rho_t-\rho_{t-1})|+\sqrt{N}$$

$$\ll|\rho_N|+\sum_{2<n_i\le N}|e(n_i\eta)--e((n_i+1)\eta)||\rho_{n_i}|+\sqrt{N}.$$

Далее, принимая во внимание $|e(n_i\eta)-e((n_i+1)\eta)|<<|\eta|\le(qQ^{-1})$, будем иметь

$$G_i(\chi_m,N)-\delta_\chi\sum_{2<n_i\le N}e(n_i\eta)<<|\rho|+\frac{N}{qQ}\max_{n_i}|\rho_{n_i}|+\sqrt{N}<<$$

$$\frac{N}{qQ}|\rho_N|<<\frac{1}{qQ}N^2\exp(-c_6\sqrt{\ln N}). \qquad (5.27)$$

Таким образом, из (5.26) и (5.27) находим

$$S_i(N,\alpha)=\delta_\chi A_i\sum_{2<n_i\le N}e(n_i\eta)+O\left(\frac{1}{qQ}N^2|A_i|\exp(-c_6\sqrt{\ln N})\right). \qquad (5.28)$$

Теперь рассмотрим A_i. В силу леммы 2.5.2 $\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)=\chi_m(p_i)=\overset{\circ}{\chi}_m$ – главный характер (т.е. $\delta_\chi=1$) тогда и только тогда, когда $\chi_D(p_i)=\bar\chi_q(p_i)$ и $\chi_q(p_i)=\chi_d(p_i)$ для всех $(p_i,m)=1$. Поэтому, применяя лемму 2.3.2 при $Q'=D,\ Q''=q,\ Q=m$, из (5.24) получим

$$A_i=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_D,\chi_q}\sum_{j=1}^{q}\bar\chi_D(l_j)\bar\chi_q(j)e(\frac{aj}{q})=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_d}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{q}\chi_d(l_j)\bar\chi_d(j)e(\frac{aj}{q})=\frac{\varphi(d)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{j=1\\ l_j\equiv j(modD)}}^{q}{}' e(\frac{a_j}{q}).$$

Отсюда, используя лемму 2.3.3, находим

$$A_i=R(q)\frac{\mu(qd^{-1})}{\varphi(qd^{-1})}e(\frac{aN_1l_i}{q}). \qquad (5.29)$$

Из (5.7), (5.28) и (5.29) следует утверждение леммы 2.5.8.

Лемма 2.5.9. *Справедлива оценка*

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{M(q,a)}\left|S(N,\alpha)-V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha<<\frac{N^3P^3D^2}{\exp(2c_6\sqrt{\ln N})}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 2.5.8, если учесть оценку

$$V_i(N,\alpha,q,a)<<\frac{1}{\varphi(qd^{-1})}\left|g_1^{(i)}(N,\eta)\right|<<\frac{N}{\varphi(qd^{-1})}.$$

вытекающую из (5.7) и (5.14). В самом деле, из леммы 2.5.8 следует

$$S(N,\alpha)-V(N,\alpha,q,a)<<(|V_1(N,\alpha,q,a)|+|V_2(N,\alpha,q,a)|)\times$$

$$\times NPq^{-1}\exp(-c_6\sqrt{\ln N})+(NPq^{-1}\exp(-c_6\sqrt{\ln N}))^2\ll$$

$$<<N^2Pq^{-1}\varphi^{-1}(qd^{-1})\exp(-c_6\sqrt{\ln N})+N^2P^2q^{-1}\exp(-2c_6\sqrt{\ln N}).$$

Отсюда

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{M(q,a)}\left|S(N,\alpha)-V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha<<$$

$$<<N^4P^2\exp(-2c_6\sqrt{\ln N})\cdot\sum_{q\le P}\frac{\varphi(q)}{q^3Q\varphi^2(qd^{-1})}+$$

$$+N^4P^4\exp(-4c_6\sqrt{\ln N})\sum_{q\le P}\frac{\varphi(q)}{q^5Q}<<\frac{N^3P^3D^2}{\exp(2c_6\sqrt{\ln N})}.$$

Лемма 2.5.10. *Имеем*

$$\int_{-Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\left|S(N,\alpha)-\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{q}{}'V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha<<\frac{N^3D^2}{P}\ln^{12}N.$$

Доказательство. В силу леммы 2.5.8, оцениваемый интеграл можно представить в виде

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\left|S(N,\alpha)-\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha+O\left(\frac{N^3D^2\ln^4 N}{P^2}\right). \qquad (5.30)$$

Пусть $M = [Q^{-1}, 1+Q^{-1}] \setminus T$. Тогда интеграл по $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ в (5.30) можно написать как сумму интегралов по M и по T, которых обозначим через K_1 и K_2, соответственно.

K_2 оценим при помощью леммы 2.5.4 и тогда получим

$$K_2 << \int_T |S(N,\alpha)|^2 \, d\alpha + \int_T \left| \sum_{k\le P} \sum_{h=1}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \right|^2 d\alpha << N^3 D^3 P^{-1} \ln^{12} N. \qquad (5.31)$$

Для оценки интеграла K_1 используем леммы 2.3.5 и 2.3.9. Эта дает

$$K_1 << \int_M | S(N,\alpha) - \sum_{\substack{k\le P \\ \alpha\in M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h)|^2 \, d\alpha + \int_M \left| \sum_{\substack{k\le P \\ \alpha\notin M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k}{}' V(N,\alpha,k,h) \right|^2 d\alpha <<$$

$$N^3 P^3 D^2 \exp(-2c_6 \sqrt{\ln N}). \qquad (5.32)$$

Теперь из (5.30), (5.31) и (5.32) следует утверждение леммы 5.10.

Б. Случай $P = P_1$. В этом случае $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и существует исключительный вещественный (нуль $\tilde{\beta}$) характер $\tilde{\chi}_r$, где

$$r \le P_1^{1/4} = P_2. \qquad (5.33)$$

Пусть $\tau(\chi_k)$ – сумма Гаусса, то есть

$$\tau(\chi_k) = \sum_{n=1}^{k} \chi_k(n) e(\frac{n}{k}). \qquad (5.34)$$

Из теоремы Пейджа и Зигеля о нулях L – функции Дирихле (см. [58]) следует, что $1 - c_7 \ln^{-1/2} N < \beta < 1 - c(\varepsilon) r^{-\varepsilon}$, то есть $r \gg (\ln N)^{1/2\varepsilon}$. Положим $\varepsilon = \varepsilon_1 = (2A+6)^{-1}$, тогда

$$r > (\ln N)^{A+2}. \qquad (5.35)$$

Известно, что ведущие модули вещественного примитивного характера могут равняется только и только 4, 8 и $p > 3$ – простое число. Так как $m = qDd^{-1}, d = (q,D), D = p^{\nu}, p > 2, D << \ln^A X$, $(qd^{-1}, D) = 1, qd^{-1}$ — бес квадратный, то отсюда следует, что $r \,|\, m$ равносильно утверждению $r \,|\, qd^{-1}$, то есть $r \,|\, q$.

Лемма 2.5.11. *a) если* $r \nmid m$, *то*

$$\sum_{q\le P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} \left| S(N,\alpha) - V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha << \frac{N^3 P^3 D^2}{\exp(2c_6 \sqrt{\ln N})};$$

b) если $r \,|\, m$, *то*

$$\sum_{q\le P} \sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} \left| S(N,\alpha) - \prod_{i=1}^{2} (V_i - \tilde{V}_i) \right|^2 d\alpha << \frac{N^3 P^3 \ln P}{\exp(2c_6 \sqrt{\ln N})},$$

где

$$\tilde{V}_i = A_i(\chi_q, \chi_D, q, a) g_\beta^{(i)}(N, \eta). \qquad (5.36)$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 2.5.9. Заметим только, что в доказательстве утверждения a) надо использовать лемму 2.5.1 a), а в доказательстве утверждения b) надо использовать лемму 2.5.1 b).

Лемма 2.5.12. *Если* χ_k *– характер по модулю* k*, индуцированный примитивным характером* $\chi^*(\mathrm{mod}\, r)$*, то* $r \mid k$ *и*

$$\tau(\chi_k) = \mu\left(\frac{k}{r}\right)\chi_r^*\left(\frac{k}{r}\right)\tau(\chi_r^*), \ |\tau(\chi_r^*)|^2 = r.$$

Это *есть* лемма 2.5.2 H.L.Montgomery, R.C.Vaughan'a [128].

Лемма 2.5.13. *Если существует исключительный характер по модулю* $m = qDd^{-1}$*, то*

$$A_i(\chi_D, \chi_q, q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \tilde{\chi}_m(al_i) \sideset{}{'}\sum_{h=1}^{q} \tilde{\chi}_m(h) e\left(\frac{h}{q}\right).$$

Эта лемма следует из равенства (5.24).

Далее для $a \le q \le P$, $(a,q)=1$, $r \mid m$, $\alpha \in M(q,a)$ положим $W(N,\alpha) = \tilde{V}_1\tilde{V}_2 - V_1\tilde{V}_2 + \tilde{V}_1 V_2$, в других случаях $W(N,\alpha)=0$.

Лемма 2.5.14. *Справедлива оценка*

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \left| S - \sum_{q=1}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} V(N,\alpha,q,a) - W(N,\alpha) \right|^2 d\alpha << \frac{N^3 D^3}{P} \ln^{12} N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.5.7 оцениваемый интеграл можно представить в виде

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \left| S - \sum_{q=1}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} V(N,\alpha,q,a) - W(N,\alpha) \right|^2 d\alpha + O\left(N^3 P^{-2} (D \ln N)^4\right). \qquad (5.37)$$

Далее интеграл по $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ в (5.37) представим в виде суммы интегралов по M и T. Тогда, учитывая что $W(N,\alpha)=0$ для $\alpha \in T$ и используя леммы 2.5.4, 2.5.5 и 2.5.11, получим утверждение леммы.

6. Исследование функции $W(N,\alpha)$**.** Положим

$$D(N,h) = \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} W(N,\alpha) e(-h\alpha). \qquad (5.38)$$

Лемма 2.5.15. *Имеет место оценка*

$$\sum_{2<n\le 2N} \left| \varphi^2(D) R(N,n) - J(N,n)\sigma(n) - D(N,n) \right|^2 << \frac{N^3 D^3}{P} \ln^{12} N,$$

где $R(N,n)$, $J(N,n)$ *и* $\sigma(n) = \sigma(0,n)$ *определены в виде сумм (5.10), (5.12) и (5.21).*

Доказательство. Пусть

$$F(N,h)=\begin{cases}\varphi^2(D)R(N,h)-J(N,h)-D(N,h), & 0<h\le 2N;\\ D(N,h), & \text{в других случаях}.\end{cases}$$

Тогда в силу (5.38), (5.20) и (5.9) функция $F(N,h)$ является коэффициентом Фурье функции

$$S-\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{q}V(N,\alpha,q,a)-W(N,\alpha).$$

Далее, применяя неравенство Бесселя и леммы 2.5.14, получим утверждение леммы.

Пусть $r\,|\,m$ и

$$I_1^{(i)}(n,q,D,a)=\int\limits_{M(q,a)}V_i\tilde{V}_i e(-n\alpha)d\alpha,\ i=1,2; \qquad (5.39)$$

$$I_2(n,q,D,a)=\int\limits_{M(q,a)}\tilde{V}\cdot e(-n\alpha)d\alpha,\ \tilde{V}=\tilde{V}_1\cdot\tilde{V}_2; \qquad (5.40)$$

$$B_1^{(i)}(n,q,D,a)=\mu\left(\frac{q}{d}\right)\varphi^{-1}\left(\frac{q}{d}\right)e\left(\frac{a}{q}(N_1l_i-n)\right)A_i,\ \ i=1,2; \qquad (5.41)$$

$$B_2(n,q,D,a)=A_1\cdot A_2\cdot e\left(-\frac{a}{q}n\right), \qquad (5.42)$$

тогда

$$I_1^{(i)}=B_1^{(i)}\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}g_1^{(i)}(N,\eta)g_\beta^{(i)}(N,\eta)e(-n\eta)d\eta,\ i=1,2 \qquad (5.43)$$

$$I_2=B_2\int\limits_{-1/qQ}^{1/qQ}g_\beta^{(1)}(N,\eta)g_\beta^{(2)}(N,\eta)e(-n\eta)d\eta. \qquad (5.44)$$

Теперь, если $q\le P$, $r\,|\,qd^{-1}$ и $k=qr^{-1}$, то из (5.41) и леммы 2.5.13 следует, что

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\,B_1^{(i)}(n,q,D,a)<<\frac{r^{1/2}}{\varphi^2(q)}\varphi(d)\varphi(r)\,\tilde{\chi}_r(k)^2\,|C_k(N_1l_i-n)|\,\mu^2(k). \qquad (5.45)$$

Аналогично, из (5.42) и леммы 2.5.13 получим

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\,B_2(n,q,D,a)=\frac{1}{\varphi^2(q)}\tilde{\chi}_r(l_1l_2)\mu^2(k)\tilde{\chi}_r^2(k)\tau(\tilde{\chi}_r)^2C_q(-n), \qquad (5.46)$$

где

$$C_q(m)=\sum_{a=1}^{q}{}'\,e\left(\frac{am}{q}\right)=\frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)}\varphi(q),\ q_1=\frac{q}{(q,|m|)}. \qquad (5.47)$$

Лемма 2.5.16. *Пусть* $L_i=|N_1l_i-n|$, *тогда*

$$\sum_{k\le Pr^{-1}} \mu^2(k)\varphi^{-2}(k)\,|\,C_k(N_1 l_i - n)\,| << L_i\varphi^{-1}(L_i).$$

Эта по сути лемма 9.4 [136].

Лемма 2.5.17. *Если* $r\,|\,m$, *то*

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' I_1^{(i)}(n,q,D,a) << Nr^{1/2}\varphi(d)L_i(\varphi(r)\varphi(L_i))^{-1}.$$

Доказательство. Используя неравенство Щварца и (5.6) в (5.43), а затем, применяя леммы 2.5.16, получим утверждение леммы.

Пусть

$$J_{\tilde\beta}(N,n) = \int_{-1/2}^{1/2} g_{\tilde\beta}^{(1)} g_{\tilde\beta}^{(2)} e(-n\eta)d\eta = \sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ 2\le n_1,n_2\le N}} (n_1n_2)^{\tilde\beta-1}, \tag{5.48}$$

тогда

$$\int_{-1/qQ}^{1/qQ} g_{\tilde\beta}^{(1)} g_{\tilde\beta}^{(2)} e(-n\eta)d\eta = J_{\tilde\beta}(N,n) + O(\frac{qN}{P}). \tag{5.49}$$

Далее, положим

$$G(N,n) = \sum_{q\le P,\, r|qd^{-1}} \sum_{a=1}^{q}{}' B_2(n,q,D,a). \tag{5.50}$$

Лемма 2.5.18. *Если* $n\le 2N$, *то*

$$\sum_{q\le P,\, r|m} \sum_{a=1}^{q} I_2(n,q,D,a) = J_{\tilde\beta}(N,n)G(N,n) + O(NrP^{-1}\tau(n)(\ln\ln N)^2\ln^{1/2}N).$$

Доказательство. Согласно (5.44) и (5.49) из (5.46), (5.47) и (5.50), получим

$$\sum_{q\le P,\, r|qd^{-1}} \sum_{a=1}^{q}{}' I_2(n,q,D,a) - J_{\tilde\beta}(N.n)G(N,n) << \frac{N}{P}\frac{r^2}{\varphi(r)}\sum\nolimits_1, \tag{5.51}$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k\le Pr^{-1},(k,r)=1} \mu^2(k)\mu^2\left(\frac{k}{(k,n)}\right)\frac{k}{\varphi(k)}\varphi^{-1}(\frac{k}{(k,n)}) << (\ln\ln N)^3\tau(n)\ln^{1/2}N. \tag{5.52}$$

Так как $r\varphi^{-1}(r) << \ln\ln N$, то из (5.51) и (5.52) следует утверждение леммы.

Лемма 2.5.19. *Если* $n\le 2N$, *то*

$$D(N,n) - J_{\tilde\beta}(N,n)G(N,n) << NP^{-1}r\tau(n)(\ln\ln N)^4\ln^{1/2}N + Nr^{-1/2}\varphi(d)(\ln\ln N)^2.$$

Доказательство. В силу (5.38) - (5.40) имеем

$$D(N,n) = \sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'(I_2 - I_1^{(1)} - I_1^{(2)}).$$

Далее, применяя леммы 2.5.17 и 2.5.18 и учитывая $n\varphi^{-1}(n) << \ln\ln n$, $n \geq 3$, будем иметь

$$D(N.n) - J_{\tilde{\beta}}(N,n)G(N,n) << NP^{-1}\tau(n)r(\ln\ln N)^4 \ln^{1/2} N + Nr^{1/2}\varphi(d)\varphi^{-1}(r)\ln\ln N.$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.5.19, если учесть, что $\varphi(r) << r(\ln\ln r)^{-1}$, где $P \geq r > \ln^{A+2} N$.

7. Доказательство теоремы 2.5.1. *А*. Случай $P = P_2$. Из (5.9) и (5.20) (при $y = 0$), используя тождество Парсеваля [74] и лемму 2.5.10, находим

$$\sum_{n\leq 2N} \left(\varphi^2(D)R(N,n) - J(N,n)\sigma(n)\right)^2 \ll (ND)^2 P^{-1}\varphi(D)\ln^{12} N. \tag{5.53}$$

Здесь для четного n

$$\sigma(n) = \sigma(0,n) = D\sum_{s=1}^{\infty}\mu(s)\varphi^{-2}(s) \sum_{t\diagdown n,(t,D)=1} \mu^2(t)\varphi^{-1}(t) =$$

$$= \lambda D \prod_{p>2} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{p\diagdown D,p>2} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \prod_{p\diagdown n,p\not\diagdown D,p>2} \frac{p-1}{p-2}, \tag{5.54}$$

где λ равен 1 если D четное; при D нечетном $\lambda = 2$.
Отсюда

$$\sigma(n) >> D. \tag{5.55}$$

Из (5.53) следует, что для всех $n \leq 2N$, исключая не более чем

$$c_8 NP^{-1/3}\varphi(D)\ln^4 N \tag{5.56}$$

значений из них, справедлива формула

$$R(N,n) = \frac{J(N,n)\sigma(n)}{\varphi^2(D)} + O\left(\frac{N(\ln^4 N)\ln\ln D}{\varphi(D)\exp(c_6\sqrt{\ln N}/600)}\right). \tag{5.57}$$

Согласно (5.55) и (5.13) при $N/2 < n \leq N$ имеем

$$J(N,n)\sigma(n) \gg DN. \tag{5.58}$$

Поэтому из (5.57) находим

$$R(N,n) >> ND\varphi^{-2}(D)\left(1 - P^{-1/3}\ln^4 N\right) >> \frac{N}{\varphi(D)}. \tag{5.59}$$

Из (5.56) и (5.59) сразу следует утверждение теоремы 2.5.1 с $X = N$.
Из (5.59) следует, что

$$R(n) >> n(\varphi(D)\ln^2 n)^{-1}\left(1 - (\ln n)^2 \exp(-c_9\sqrt{\ln n})\right). \tag{5.60}$$

Б. Случай $P = P_1$. В силу (5.50) и (5.46) имеем

$$|G(N,n)| \leq \tilde{\sigma}(n) + O(P^{-1}rd\tau(n)(\ln\ln N)^4), \tag{5.61}$$

где

$$\tilde{\sigma}(n)=\prod_{\substack{p\diagdown rd\\ p\not\diagdown n}}\frac{1}{p-1}\prod_{p\not\diagdown nrd}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{p\diagdown nrd}\frac{p}{p-1}\le\sigma(n).$$

Учитывая $J_{\tilde{\beta}}(N,n)<<N^{\tilde{\beta}}$ (см. (5.48)) из леммы 2.5.19 и неравенство (5.61), для четного $n\le 2N$ получим

$$|D(N,n)|\le J_{\tilde{\beta}}(N,n)\sigma(n)+O(\frac{N}{P}dr\tau(n)(\ln\ln N)^4\ln^{1/2}N)+$$
$$+O(Nr^{-1/2}\varphi(D)(\ln\ln N)^2). \qquad (5.62)$$

Лемма 2.5.20. *Существует положительное постоянное* c_{10} *такое, что* $J(N,n)-J_{\tilde{\beta}}(N,n)>c_{10}r^{-\varepsilon_1}J(N,n)$, *где* $\varepsilon_1=(2A+6)^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы Зигеля имеем $1/2\le\tilde{\beta}<1-c(\varepsilon_1)r^{-\varepsilon_1}$. Поэтому при $n_1n_2>1$ будем иметь

$$(1-(n_1n_2)^{\tilde{\beta}-1})<1-\exp(-c(\varepsilon_1)r^{-\varepsilon_1}\ln(n_1n_2))>c_{10}r^{-\varepsilon_1}.$$

Теперь, используя подледную оценку из (5.58), (5.12), получим утверждение леммы.

Из (5.62) и леммы 2.5.20 следует, что если $n\le 2N$ и $n\equiv 0(mod 2)$, то

$$\left|J(N,n)\sigma(n)+D(N,n)\right|>c_{10}r^{-\varepsilon_1}J(N,n)\sigma(n)+$$
$$+O\left(\frac{N}{P}r\cdot d\cdot\tau(n)(\ln\ln N)^4\ln^{1/2}N\right)+O\left(\frac{N}{r^{1/2}}\varphi(D)(\ln\ln N)^2\right). \qquad (5.63)$$

Далее, согласно леммы 2.5.15

$$\varphi^2(D)R(N,n)-J(N,n)\sigma(n)-D(N,n)\ll NP^{-1/3}D\varphi(D) \qquad (5.64)$$

для всех $n\le 2N$, за исключением не более, чем

$$c_{11}\varphi(D)^{-1}NP^{-1/3}\ln^{12}N \qquad (5.65)$$

значений из них.

Лемма 2.5.21. *Для всех четных чисел* n, $N/2<n\le N$, *за исключением не более, чем* $c_{12}N\varphi^{-1}(D)P^{-1/3}\ln N$ *значений из них, справедлива оценка* $|J(N,n)\sigma(n)+D(N,n)|<<NP^{-\varepsilon_1/4}D$.

Доказательство. Известно, что

$$\sum_{n\le N}\tau(n)<<N\ln N.$$

Отсюда $\tau(n)\ll P^{1/3}\varphi(D)$ для всех n, $n\le N$, за исключением не более чем $c_{12}NP^{-1/3}\varphi^{-1}(D)\ln N$ значений n. Следовательно, согласно (5.63), имеем

$$|J(N,n)\sigma(n)+D(n,n)|>c_{10}J(N,n)\sigma(n)+O(Nr^{-1}P^{-5/12}\varphi(D)\times$$
$$\times d\cdot(\ln\ln N)^4\ln^{1/2}N)+O(Nr^{-1/2}(\ln\ln N)^2\varphi(d))>>r^{-\varepsilon_1}ND\times$$
$$\times\left(1-c_9(\ln\ln N)^2(\ln N)^{-(A+2)(\frac{1}{2}-\varepsilon_1)}\right)>>r^{-\varepsilon_1}ND.$$

Так как $r\le P$, то отсюда следует утверждение леммы.

Поскольку $R(N,n)$ не отрицательное, то

$$R(N,n) \geq \frac{1}{\varphi^2(D)}\{|\,J(N,n)\sigma(n) + D(N,n)\,| - |\,\varphi^2(D)R(N,n) - $$
$$-J(N,n)\sigma(n) - D(N,n)\,|\}.$$

Следовательно, учитывая $P = P_1$ из (5.63) и леммы 2.5.21, получим

$$R(N,n) > NDP^{-\frac{\varepsilon_1}{4}}\left(c_{14} - c_{15}\varphi(D)P^{-\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon_1}{4}}\right) > \frac{ND}{P^{1/20}}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$R(n) > \frac{n\exp(-c_{16}\sqrt{\ln n})}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1 - \frac{\ln^A n}{\exp(3c_{16}\sqrt{\ln n})}\right). \qquad (5.66)$$

Из (5.60) и (5.66), учитывая (5.56) и (5.65) получим утверждение теоремы 2.5.1.

Заметим, что недавно И.Аллаков и А.Сафаров [45] доказали теорему:

Теорема 2.5.2. При достаточно большом X и достаточно малом $\delta > 0$, при $D < X^{\delta_1}$, $(10\delta_1 < \delta)$ справедливы оценки $E(D,X) << X^{1-\delta}\varphi^{-1}(D)$ и для $n \notin M(D,X), n \leq X$

$$R(n,D) >> \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1\right).$$

Надо отметит, что Теорема 2.5.2 отличается от Теоремы 2.5.1 в следующим: в Теореме 2.5.1 разность арифметической прогрессии равна $D = p^v$ (то есть равна степени простого числа) и $D << \ln^A X$, исключительное множество удовлетворяет оценку $E(D,X) \leq c_3 \dfrac{X}{\varphi(D)}\exp(-c_4\sqrt{\ln X})$, а в Теореме 2.5.2 D произвольное и $1 < D < X^{\delta_1}$ (δ_1 достаточно малое), исключительное множество удовлетворяет оценку $E(D,X) << X^{1-\delta}\varphi^{-1}(D)$ (где δ достаточное малое и $10\delta_1 < \delta$).

ГЛАВА III
ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{im}p_m;\ i = 1,2,\ldots,s, \qquad (0.1)$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_s$ - натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ – целые коэффициенты, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – простые числа. Когда $m \geq 2s+1$ Wu Fang [142], изучая разрешимости этой системы при некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (0.1). А при $s < m \leq 2s$ до сих пор не только не получена асимптотическая формула, но даже не установлено существований решений для произвольного набора натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_s$.
Недавно в работе [126], рассматривая частный случай системы (0.1) при $s = 2,\ m = 3$, оценивалось количество пар $(b_1, b_2),\ 1 \leq b_1,\ b_2 \leq X$, для которых система (0.1) не разрешима в простых числах, при этом для достаточно больших X для мощности исключительного множества получена степенная оценка $X^{2-\varepsilon}$, где ε – абсолютное, эффективно вычисляемое, положительное малое постоянное.
Полагая $s = n,\ m = n+1$, из (0.1) получим систему уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{i,n+1}p_{n+1}, i = 1,2,\ldots,n, \qquad (0.2)$$

состоящую из n уравнений с $n+1$ простым переменным. Для удобства обозначим

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{bmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_n} \end{bmatrix},\quad \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = det(A_{i_1 i_2 \ldots i_n}),$$

где $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n \leq n+1$; $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} b}$ - определитель матрицы $A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} b}$, полученной из матрицы $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ заменой i_n - го столбца столбцом свободных членов b_i системы (0.2). Наряду с этими также будем использовать обозначения $\Delta_i = \Delta_{12\ldots i-1, i+1, \ldots n+1}$ и Δ_{ik}^b – определитель n - порядка, полученный из Δ_i заменой элементов k - го столбца столбцом свободных членов b_i системы (0.2).
Для того, чтобы избежать тривиальности и вырожденности, налагаем на коэффициенты a_{ij} условия:

$$\Delta_1\Delta_2...\Delta_{n+1}\neq 0,\ \ (\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_{n+1})=1. \qquad (0.3)$$

Как обычно разрешимость системы (0.1) зависит от следующих двух условий (см. [126] и гл.5 [92]):

(кр). Для любого простого p систему уравнений

$$a_{i1}l_1+a_{i2}l_2+...+a_{i,n+1}l_{n+1}\equiv b_i(mod p),\ \ i=1,2,...,n \qquad (0.4)$$

удовлетворяют некоторые целые числа $l_1,l_2,...,l_{n+1}$ с условием $1\le l_1,l_2,...,l_{n+1}\le p-1$.

(пр). Для некоторых положительных вещественных чисел $y_1,y_2,...,y_{n+1}$ справедливы равенства

$$a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+...+a_{i,n+1}y_{n+1}=b_i,\ \ i=1,2,...,n. \qquad (0.5)$$

В дальнейшем рассмотрим только те $(b_1,b_2,...,b_n)$, которые удовлетворяют этим двум, так называемым, условиям конгруент - разрешимости и положительной разрешимости. Для любого достаточно большого X через $U(X)$ обозначим множество векторов $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$, которые удовлетворяют условиям (кр), (пр) и $1\le b_1,b_2,...,b_n\le X$. Пусть $B=\max\{3|a_{ij}|\},\ \ 1\le i\le n,\ \ 1\le j\le n+1.$

В этой главе, развивая идеи работ [126], [127], покажем, что $U(X)$ содержит достаточно много элементов и $E(X)$ – количество тех $\vec{b}\in U(X)$, которые непредставимы в виде (0.2) составляет незначительную часть $cardU(X)$. А именно докажем следующие теоремы [21,22,23,35,36]:

Теорема 3.1.1. *Если для некоторых положительных вещественных чисел $y_1,y_2,...,y_{n+1}$ выполняется неравенства*

$$a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+...+a_{i,n+1}y_{n+1}>0,\ \ i=1,2,...,n, \qquad (0.6)$$

то справедлива оценка

$$cardU(X)>>X^n\left(B^{2(n-1)^2(2n-1)+n}\ln\ln B\right)^{-1}.$$

Теорема 3.1.2. *Существуют эффективно вычисляемые постоянные A (достаточно большое) и δ (достаточно малое) такие, что при $X\ge B^A$ имеет место оценка $E(X)<X^{n-\delta}$.*

Отметим, что содержания этих теорем является обобщением результатов работы [126] для всех $n\ge 2$. Значение постоянных A и δ, а также символ $\ll$ зависят от n. Из оценка, приведенной в теореме 2 при $n=2$ можно получить знаменитую оценку H.L. Montgomery и R.C. Vaughan'a [128]:

$$E_1(X)=card\{n\,|\,n\neq p_1+p_2,n\le X,n-\text{четное число}\}<X^{1-\varepsilon}.$$

Отметим, также, что наряду с нашим результатом параллельно была опубликована статья Бабаназарова Б., Туляганововой М.И., Файнлейба А.С. [48], в которой получены результаты такого же типа что и в теоремах 3. 1.1 и 3.1.2, но в [48] применяется другая методика, основанная на целочисленных решетках [87]. Недавно в И.Аллаков и А.Ш.Сафаров [42] доказали теорему:

Теорема 3.1.3. Если X – достаточно большое, а $\delta(0<\delta<1)$ – достаточно малое действительные числа, то справедливо оценка

$$J\left(\vec{b}\right) > \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}3(n!)^2 B^{(2n-1)}\left|\vec{b}\right|\right)^{1-\frac{\delta}{10(n-1)}}}{\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}3(n!)^2 B^{(2n-1)}\left|\vec{b}\right|\right)\right)^{n+1}},$$

для всех векторов $\vec{b}\in U(X)$ за исключением не более чем $E(X)<X^{n-\frac{\delta}{17n^3}}$ векторов из них. Здесь $B=\max\left\{3\left|a_{ij}\right|\right\}$, $1\le i\le n, 1\le j\le n+1$ и $J\left(\vec{b}\right)$ – количество решений системы (0.2) в простых числах.

Полученный результат дополняет соответствующие результаты работ Ву Фанга [142], И. Аллакова [20,21,98], М.К.Лиу, К.М. Цанга [126], Б.Бабаназаров, М.И.Тулаганова, А.С. Файнлейба [48] и является обобщением результата работы И.Аллакова, Б.Абраева [38] для всех n.

§1 этой главы посвящен доказательство теоремы 3.1.1, а остальные параграфы посвящены доказательству теоремы 3.1.2.

§1. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах.

Пусть a_{ij} $(i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n+1})$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1.1. Для любого целого $q\ge 1$ через

$$\sum\nolimits_{(q)} \tag{1.1}$$

обозначим суммирование по всем $l_1,l_2,\dots,l_{n+1}$, удовлетворяющим условиям $1\le l_j\le q$, $(l_j,q)=1$, $\sum\limits_{1\le j\le n+1} a_{ij}l_j \equiv b_i(mod q)$, $i=\overline{1,n}$.

Положим

$$N(q)=\sum\nolimits_{(q)}1. \tag{1.2}$$

Следующая лемма дает нам критерий для проверки выполнения условий (0.4)

Лемма 3.1.1. *Для любого простого* $p>n+1$ $N(p)=0$ *тогда и только тогда, когда существует такое* i, $1\le i\le n+1$, *что* $\Delta_{j_1 j_2 \dots j_n}\equiv 0(modp)$ *всякий раз, когда* $j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1,2,\dots,n+1,b\}\setminus\{i\}$.

Доказательство. В случае $n=2$ это есть утверждение 3.1 работы [126]. Рассмотрим случай $n>2$. В силу (0.3), не уменьшая общности, можем предполагать, что $\Delta_{n+1}\not\equiv 0(modp)$, где $p>n+1$ фиксированное простое число.

Для удобства сначала рассмотрим случай $n=3$. Покажем, что $N(p)=0$ тогда и только тогда, когда существуют такие i, $1\le i\le 4$, что $\Delta_{j_1 j_2 j_3}\equiv 0(modp)$ всякий раз, когда $j_1, j_2, j_3 \in \{1,2,3,4,b\}\setminus\{i\}$. Иначе говоря $N(p)=0$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

$$i=1;\ j_1, j_2, j_3 \in \{2,3,4,b\},\ \ \Delta_{234}\equiv\Delta_{23b}\equiv\Delta_{24b}\equiv\Delta_{34b}\equiv 0(modp)$$
$$i=2;\ j_1, j_2, j_3 \in \{1,3,4,b\},\ \ \Delta_{134}\equiv\Delta_{13b}\equiv\Delta_{14b}\equiv\Delta_{34b}\equiv 0(modp)$$
$$i=3;\ j_1, j_2, j_3 \in \{1,2,4,b\},\ \ \Delta_{124}\equiv\Delta_{12b}\equiv\Delta_{14b}\equiv\Delta_{24b}\equiv 0(modp)$$
$$i=4;\ j_1, j_2, j_3 \in \{1,2,3,b\},\ \ \Delta_{123}\equiv\Delta_{12b}\equiv\Delta_{13b}\equiv\Delta_{23b}\equiv 0(modp).$$

В силу условий (0.3) мы можем предполагать, что $\Delta_{123}\not\equiv 0(modp)$, где $p\ge 5$ фиксированное простое число. Система сравнений

$$\sum_{1\le j\le 4} a_{ij} l_j \equiv b_i (modp),\ \ i=1,2,3,$$

эквивалентна система

$$\Delta_{123} l_1 \equiv \Delta_{b23}-\Delta_{423} l_4 \equiv \Delta_{23b}-\Delta_{234} l_4 (modp)$$
$$\Delta_{123} l_2 \equiv \Delta_{1b3}-\Delta_{143} l_4 \equiv -\Delta_{13b}+\Delta_{134} l_4 (modp)$$
$$\Delta_{123} l_3 \equiv \Delta_{12b}-\Delta_{124} l_4 \equiv \Delta_{12b}-\Delta_{124} l_4 (modp).$$

Так как $\Delta_{123}\equiv -\Delta_{231}(modp)$, то

$$\Delta_{213} l_1 = \Delta_{234} l_4 - \Delta_{23b}(modp),$$
$$\Delta_{123} l_2 = \Delta_{134} l_4 - \Delta_{13b}(modp),$$
$$\Delta_{213} l_3 = \Delta_{124} l_4 - \Delta_{12b}(modp).$$

Следовательно, $N(p)=0$, если полином

$$P(z)=(\Delta_{234} z-\Delta_{23b})(\Delta_{134} z-\Delta_{13b})(\Delta_{123} z-\Delta_{12b})z$$

является нулевым полиномом над областью целостности $Z_p[z]$. Поскольку $p\ge 5$ и $degP(z)=4$, то все коэффициенты этого полинома должны делится на p, а для этого необходимо выполнение одного из следующих сравнений: $\Delta_{234} \equiv \Delta_{23b} \equiv 0(modp)$ или $\Delta_{134} \equiv \Delta_{13b} \equiv 0(modp)$ или $\Delta_{124} \equiv \Delta_{12b} \equiv 0(modp)$.

Пусть $\Delta_{234} \equiv \Delta_{23b} \equiv 0(modp)$. Остальные случаи рассматривается аналогично. Так как по нашему предположению $\Delta_{123} \not\equiv 0(modp)$, то $p \nmid (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$, $i = 1,2,3$. Поэтому из $\Delta_{234} \equiv 0(modp)$ и $\Delta_{23b} \equiv 0(modp)$ следует $\Delta_{24b} \equiv \Delta_{34b} \equiv 0(modp)$.

В самом деле, имеем

$$\Delta_{234} = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} \equiv 0(modp), \qquad \Delta_{23b} = b_1A_{14} + b_2A_{24} + b_3A_{34} \equiv 0(modp),$$

$$\Delta_{24b} = b_1(a_{22}a_{34} - a_{24}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{34} - a_{14}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22}),$$

A_{i4} - алгебраическое дополнение элемента a_{i4}. Мы можем считать, что хотя бы одно из A_{14}, A_{24}, A_{34} отлично от нуля (иначе было бы $\Delta_{123} = 0$). Пусть $A_{14} \neq 0$, тогда

$$a_{14} \equiv (-a_{24}A_{24} - a_{34}A_{34})A_{14}^{-1}(modp), \qquad b_1 \equiv (-b_2A_{24} - b_3A_{34})A_{14}^{-1}(modp)$$

и

$$\Delta_{24b} \equiv -b_2a_{34}(a_{22}A_{24} + a_{12}A_{14} + a_{32}A_{34}) + b_3a_{24}(a_{32}A_{34} + a_{12}A_{14} + a_{22}A_{24}) \equiv 0(modp).$$

Аналогично

$$\Delta_{34b} \equiv b_1(a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33}) - b_2(a_{13}a_{34} - a_{14}a_{33}) +$$

$$+b_3(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) \equiv -b_2a_{34}(a_{23}A_{24} + a_{13}A_{14} + a_{33}A_{34}) +$$
$$+b_3a_{24}(a_{13}A_{14} + a_{33}A_{34} + a_{23}A_{24}) \equiv 0(modp).$$

Так как $\Delta_{123} \not\equiv 0(modp)$ а следовательно $p \nmid (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$, тогда из $\Delta_{ij_1j_2} \equiv \Delta_{ik_1k_2} \equiv 0(modp)$ следует, что

$$\Delta_{j_1k_1k_2} \equiv \Delta_{j_1j_2k_1} \equiv \Delta_{j_2k_1k_2} \equiv \Delta_{j_1j_2k_2} \equiv 0(modp). \qquad (1.3)$$

Таким образом, в случае $n = 3$ лемма доказана.

Пусть теперь $n > 3$. В этом случае система сравнений

$$\sum_{1 \le j \le n+1} a_{ij}l_j \equiv b_i(modp), \; i = 1,2,...,n$$

эквивалентна системе

$$\Delta_{n+1}l_1 \equiv \Delta_{n+1,1}^b - \Delta_{n+1,1}^{n+1}l_{n+1}(modp)$$
$$\Delta_{n+1}l_2 \equiv \Delta_{n+1,2}^b - \Delta_{n+1,2}^{n+1}l_{n+1}(modp)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_{n+1}l_n \equiv \Delta_{n+1,n}^b - \Delta_{n+1,n}^{n+1}l_{n+1}(modp)$$

Следовательно, $N(p) = 0$, если полином

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n}\left(\Delta_{n+1,j}^b - \Delta_{n+1,j}^{n+1}z\right)z$$

является нулевым полиномом над областью целостности $Z_p[z]$, то есть $P(l) \equiv 0 (mod p)$ для всех l, так как $deg.P(z) = n+1 < p$, то это может случиться тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{n+1,j}^{b} \equiv \Delta_{n+1,j}^{n+1} \equiv 0 (mod p)$$

хотя бы для одного $j = 1,2,...,n$. В силу $\Delta_{n+1} \not\equiv 0 (mod p)$ это означает, что

$$\Delta_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}, n+1} \equiv \Delta_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} b} \equiv 0 (mod p) \quad \text{и} \quad \Delta_{j_1 j_2 \dots j_{n-2}, n+1, b} \equiv 0 (mod p),$$

для всех $j_1, j_2, ..., j_{n-1} \in \{1,2,...,n\}$. Поскольку $\Delta_{n+1} \not\equiv 0 (mod p)$, то $p \nmid (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni})$ при $i = 1,2,...,n$ и тогда из

$$\Delta_{i j_1 j_2 \dots j_{n-1}} \equiv \Delta_{i k_1 k_2 \dots k_{n-1}} \equiv 0 (mod p)$$

следует, что

$$\Delta_{i k_1 k_2 \dots k_{n-1}} \equiv \dots \equiv \Delta_{j_{n-1} k_1 k_2 \dots k_{n-1}} \equiv 0 (mod p). \tag{1.4}$$

В (1.4) входят все определители n го порядка, которые можно образовать, используя столбцы с номерами $j_1, j_2, ..., j_{n-1}$, $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$. Таким образом, лемма 3.1.1 доказана.

Лемма 3.1.2. *Пусть* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *фиксированное значение* $\vec{b}$ *в кубе* $[1,m]^n$*, для которого* $N(p) > 0$ *при всех* p*. Тогда существуют не менее чем* N_1*,*

$$N_1 >> X^n (m^n B^{2(n-1)^2 (2n-1)})^{-1}, \tag{1.5}$$

значений $(z_1, z_2, ..., z_n)$*, удовлетворяющих условиям:*

$$1 \le z_i \le X, \quad z_i \equiv b_i (mod m), \quad \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} y_j = z_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.6}$$

где $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ *– некоторые положительные действительные числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = z_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.7}$$

Решая эту систему относительно $y_2, y_3, ..., y_{n+1}$, находим

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{12}^{1} y_1 + \Delta_{12}^{z}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{1,n+1}^{1} y_1 + \Delta_{1,n+1}^{z}) \end{cases} \tag{1.8}$$

Если необходимо, пере обозначая индексы j коэффициентов a_{ij}, можем предполагать, что

$$-\Delta_{12}^{1}>0,-\Delta_{13}^{1}>0,\ldots,-\Delta_{1,n+1}^{1}>0.$$

Если $\Delta_1>0$, то система (1.8) разрешима в положительных вещественных числах y_j, а это означает, что условие (пр) выполняется для любого вещественного $b_1,b_2,\ldots,b_n$. Поэтому в этом случае (1.5) очевидно выполняется.

Теперь рассмотрим случай $\Delta_1<0$. В этом случае система (1.8) будет иметь положительные решение $y_1,y_2,\ldots,y_{n+1}$, если

$$\Delta_{12}^{z}<0,\ \Delta_{13}^{z}<0,\ \ldots,\ \Delta_{1,n+1}^{z}<0.$$

Обозначая $x_i=\dfrac{z_i}{z_1},\ \ i=2,3,\ldots,n$ последние условия можно записать в виде системы линейных неравенств относительно $x_2,x_3,\ldots,x_n>0$:

$$\begin{cases} z_1A_{11}+z_2A_{21}+\ldots+z_nA_{n1}<0\\ z_1A_{12}+z_2A_{22}+\ldots+z_nA_{n2}<0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_1A_{1n}+z_2A_{2n}+\ldots+z_nA_{nn}<0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A_{21}x_2+\ldots+A_{n1}x_n<-A_{11}\\ A_{22}x_2+\ldots+A_{n2}x_n<-A_{12}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{2n}x_2+\ldots+A_{nn}x_n<-A_{1n}.\end{cases}$$

Условия (0.6) теоремы 3.1.1 гарантируют, что множество решений однородных неравенств непустое и следовательно, можем считать, что

$U_1<x_2,\ldots,x_n<U_2$, где $0\le U_1<a(n,B)$ и

$$\frac{1}{a^2(n,B)}<U_2-U_1<a(n,B),\ \ a(n,B)=[(n-1)!]^n B^{(n-1)^2}. \qquad (1.9)$$

Пусть $z_1\equiv b_1(mod m)$ – фиксированное число, тогда A_i – количество z_i, удовлетворяющих условиям

$$1\le z_i\le X,\ \ z_i\equiv b_i(mod m),\ \ U_1<z_iz_1^{-1}<U_2,\ \ i=\overline{1,n} \qquad (1.10)$$

можно написать в виде

$$A_i=\min\{z_i(U_2-U_1)m^{-1},\ (X-z_1U_1)m^{-1}\}+O(1). \qquad (1.11)$$

В самом деле, из (1.10) находим $U_1z_1<z_i<U_2z_1$, $z_i=b_i+mt$, $m^{-1}(U_1z_1-b_i)<t<(U_2z_1-b_i)m^{-1}$. Отсюда количество t и, следовательно, количество z_i, удовлетворяющих условиям (1.10) равно

$$\left[\frac{U_2 z_1}{m}-\frac{U_1 z_1}{m}\right]-\varepsilon_2=\left[\frac{1}{m}(U_2-U_1)z_1\right]-\varepsilon_2. \qquad (1.12)$$

С другой стороны $z_i \le X$, $z_i \equiv b_i(mod m)$, поэтому $t \le m^{-1}(X-b_i)$ и количество z_i, удовлетворяющих условиям (1.10) равно

$$\left[\frac{X-b_i}{m}-\frac{U_1 z_1 - b_i}{m}\right]-\varepsilon_3=\left[\frac{1}{m}(X-U_1 z_1)\right]-\varepsilon_3, \qquad (1.13)$$

где ε_2 и ε_3 равно 1 или 0 в зависимости от того, является ли $m^{-1}(U_2-U_1)z_1$ и $m^{-1}(X-U_1 z_1)$ – целым или нет. Из (1.12) и (1.13) следует (1.11).

В силу (1.9) при $z_1 \le X(2U_1)^{-1}$ $(z_1 \le X/2a(n,B)^2)$ из (1.11) находим

$$A_i >> \min\{z_1 B^{-2(n-1)^2}\cdot m^{-1};\ X(2m)^{-1}\}-O(1)>>$$
$$>> z_1(B^{2(n-1)^2}m)^{-1}-O(1), \quad \text{если } X>2z_1 B^{-2(n-1)^2}.$$

Собирая такие оценки для всех $i=2,3,...,n$, получим

$$A=A_2A_3...A_n >> \left[z_1(B^{2(n-1)^2}m)^{-1}-O(1)\right]^{n-1}.$$

Теперь суммируя по всем z_1 удовлетворяющим условиям $z_1 \equiv b_1(mod m)$ и $1 \le z_1 \le X/2a(n,B)^2$ убедимся, что $N_1 >> \sum_{z_1}\{z_1(B^{2(n-1)^2}m)^{-1}-O(1)\}^{n-1}$.

Разлагая выражение стоящее под суммой формуле бинома Ньютона, а затем суммируя по z_1 каждый член отдельно, находим

$$N_1 >> (mB^{2(n-1)^2})^{-n+1}\sum_{\substack{z_1\le X/2a(n,B)^2\\ z_1\equiv b_1(mod m)}} z_1^{n-1} >> \frac{m^{n-1}}{(mB^{2(n-1)^2})^{n-1}}\times$$

$$\times\sum_{t\le\frac{X-b_1}{2a(n,B)^2m}} t^{n-1} >> \frac{1}{B^{2(n-1)^2}}\left(\frac{X-b_1}{2a(n,B)^2m}\right)^n >> \frac{X^n}{m^nB^{2(n-1)^3+2n(n-1)^2}} >> \frac{X^n}{B^{2(n-1)^2(2n-1)}m^n}.$$

Таким образом, лемма 3.1.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.1.1. По определению $U(X)$ количество векторов $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)\in U(X)$ определяется двумя условиями (кр) и (пр). Сначала рассмотрим условие (кр). В силу (1.2) достаточно определить количество $\vec{b}$, для которых выполняется $N(p)>0$ для всех p. Пусть $p_1,p_2,...,p_s$ - все простые числа, не превосходящие $n+1$. Тогда $N(p_i)>0$ $(i=1,2,...,s)$, если $b_1,b_2,...,b_n$ лежат в некотором подходяще выбранном классе вычетов по модулю $m_1=p_1p_2...p_s$, например, когда $b_i\equiv a_{i1}+...+a_{i,n+1}(mod m_1)$, $i=1,2,...,n$ $((l_1,l_2,...,l_{n+1})\equiv(1,1,...,1))$.

Для $p>n+1$, применяем лемму 3.1.1. Сперва, если $p \nmid \Delta_1\Delta_2...\Delta_{n+1}$, то независимо от значений $b_1,b_2,...,b_n$ лемма 1.1 означает, что $N(p)>0$. Во - вторых, ввиду (0.3) мы можем полагать, что $q_1^{(1)},q_2^{(1)},...,q_{u_1}^{(1)}$ это те простые большие $n+1$, которые делят точно один из Δ_j, $j=1,2,...,n+1$; $q_1^{(2)},q_2^{(2)},...,q_{u_2}^{(2)}$ – те делители, которые делят точно два из них, и т.д., $q_1^{(n)},q_2^{(n)},...,q_{u_n}^{(n)}$ - те делители, которые делят точно n из них.

Рассмотрим $q=q_1^{(1)}$ и пусть $q \setminus \Delta_{n+1}$, $q \nmid \Delta_1\Delta_2...\Delta_n$. В силу (1.4), если $q \setminus \Delta_{n+1,n}^b$, то $q \setminus \Delta_{1,n+1}^b$, $q \setminus \Delta_{2,n+1}^b,...,$ $q \setminus \Delta_{n,n+1}^b$. Поэтому $N(p)=0$ тогда и только тогда, когда $q \setminus \Delta_{n+1,n}^b$. Сравнению $\Delta_{n+1,n}^b \equiv 0(modq)$ удовлетворяют точно q^{n-1} значений $\vec{b}=(b_1,b_2...,b_n)$. В самом деле, фиксируем $b_3,b_4,...,b_n$, тогда существуют q пар (b_1,b_2), которые удовлетворяют указанному сравнению. Учитывая, что $1\le b_3,b_4,...,b_n \le q$ мы получим $q^{n-2}q=q^{n-1}$ значений $\vec{b}$. Поэтому для каждого оставшегося $q^n-q^{n-1}=\varphi(q^n)$ значений $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ имеем $q \nmid \Delta_{n+1,n}^b$ и, следовательно, $N(p)>0$.

Пусть теперь $q=q_1^{(2)}$ и $q \setminus (\Delta_{n+1},\Delta_n)$, $q \nmid \Delta_1\Delta_2...\Delta_{n-1}$. Следовательно $q \setminus \Delta_{n+1,n}^b$. Так как $q \nmid \Delta_1\Delta_2...\Delta_{n-1}$, то мы можем полагать, что $q \nmid (a_{1j},a_{2j},...,a_{nj})$ $(j=n,n+1)$. При $j=n$ имеем $\{1,2,...,n,n+1,b\}\setminus\{n\}=\{1,2,...,n-1,n+1,b\}$. Если

$$\Delta_{12...n-1,n+1} \equiv \Delta_{12...n-1,b} \equiv \Delta_{23...n-1,n+1,b} \equiv \Delta_{13...n-1,n+1,b} \equiv ... \equiv \Delta_{123...n-2,n+1,b} \equiv 0(modq),$$

то $N(q)=0$. Согласно условию $\Delta_n=\Delta_{12...n-1,n+1}\equiv 0$ и $\Delta_{n,n+1}^b=\Delta_{12...n-1,b}\equiv 0(modq)$. Поэтому $(N(q)=0)\Leftrightarrow(\Delta_{23...n-1,n+1,b}\equiv\Delta_{13...n-1,n+1,b}\equiv...$ $\Delta_{123...n-2,n+1,b}\equiv 0(modq))$.

Каждое из этих сравнений имеет q^{n-1} решений относительно $b_1,b_2,...,b_n$ по модулю q. Следовательно, количество решений этой системы $\le q^{n-1}$. Аналогично при $j=n+1$ получим систему состоящую из $n-1$ сравнений

$$\Delta_{23...n-1,n,b}\equiv 0,\ \ \Delta_{134...n-1,n,b}\equiv 0,\ \ ...,\ \ \Delta_{12...n-2,n,b}\equiv 0(modq).$$

Количество решений этой системы $\le q^{n-1}$. Следовательно, $N(q)>0$ для не менее чем q^n-2q^{n-1} значений $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ по модулю q.

Аналогично находим, что $N(q)>0$ для

$$\begin{array}{lll} q=q_1^{(3)} & q^n-3q^{n-1}, & (j=n-1,n,n+1), \\ q=q_1^{(4)} & q^n-4q^{n-1}, & (j=n-2,n-1,n,n+1), \\ \dots & \dots & \dots \\ q=q_1^{(n)} & q^n-nq^{n-1}, & (j=2,3,...,n,n+1) \end{array}$$

соответственно значений $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ по модулю q.

Пусть $m=m_1q_1^{(1)}...q_{u_1}^{(1)}q_1^{(2)}...q_{u_2}^{(2)}...q_1^{(n)}...q_{u_n}^{(n)}$. Из рассмотренного выше заключаем, что существуют по крайней мере

$$\prod_{j_1=1}^{u_1}(q_{j_1}^{(1)})^{n-1}\varphi(q_{j_1}^{(1)})\prod_{j_2=1}^{u_2}\left((q_{j_2}^{(2)})^n-2(q_{j_2}^{(2)})^{n-1}\right)...\prod_{j_n=1}^{u_n}\left((q_{j_n}^{(n)})^n-n(q_{j_n}^{(n)})^{n-1}\right) \qquad (1.14)$$

значений $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ по модулю m, для которых $N(p)>0$ для всех простых p.

Теперь рассмотрим условие (пр). Пусть $(b_1,b_2,...,b_n)$ фиксированное значение $\vec{b}$ в кубе $[1,m]^n$, для которого $N(p)>0$ при всех p. Тогда в силу (1.14) и (1.5) из определения $U(X)$ получим

$$cardU(X)>>N_1\left(\frac{m}{m_1}\right)^n\prod_{j_1=1}^{u_1}\varphi(q_{j_1}^{(1)})(q_{j_1}^{(1)})^{-1}\times\prod_{j_2=1}^{u_2}\left(1-2/q_{j_2}^{(2)}\right)...\prod_{j_n=1}^{u_n}\left(1-n/q_{j_n}^{(n)}\right).$$

Учитывая, что $1-nq_j^{-1}\ge n^{-1}(1-q_j^{-1})$ для любого $n\ge 1$, имеем

$$cardU(X)>>N_1\left(\frac{m}{m_1}\right)^n\prod_{j_1=1}^{u_1}\varphi(q_{j_1}^{(1)})(q_{j_1}^{(1)})^{-1}\prod_{j_2=1}^{u_2}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q_{j_2}^{(2)}}\right)...$$

$$...\prod_{j_n=1}^{u_n}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{q_{j_n}^{(n)}}\right)>>N_1\left(\frac{m}{m_1}\right)^n\left(\ln\ln\frac{m}{m_1}\right)^{-1}.$$

Так как $m_1=p_1p_2...p_s\le(n+1)^s\le(n+1)^{(n+1)/\ln(n+1)}$, $m\le m_1|\Delta_1\Delta_2...\Delta_{n+1}|\ll B^{n(n+1)}$, то

$$cardU(X)>>X^n\left(B^{2(n-1)^2(2n-1)+n}\ln\ln B\right)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

§2. Об исключительном множестве. Деление единичного интервала.

Пусть n фиксированное натуральное число и

$$N=3(n!)^2B^{(2n-1)}X, \text{при } X\ge B^{\exp(\delta^{-2})},$$
$$Q=N^{\delta}, L=NQ^{-1/90}, T=Q^{1/\sqrt{\delta}}. \qquad (2.1)$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$B\le Q^{\delta}. \qquad (2.2)$$

Пусть χ - характер Дирихле по модулю $q\le T$. Известно, что (см. §2, гл. IX, [59]), существует такое постоянное c_1, что L – функции Дирихле $L(s,\chi)$, $(s=\sigma+it)$ в области $\sigma>1-c_1\ln^{-1}T$, $|t|\le T$ могут иметь единственный (исключительный) нуль $\tilde\delta=1-\tilde\beta$ для одного вещественного примитивного характера $\tilde\chi$ по модулю $\tilde r\le T$. Если существует такой исключительный нуль $\tilde\beta$, то он удовлетворяет неравенствам [8,58,141]

$$\frac{c_2}{\tilde r^{1/2}\ln^2\tilde r}\le 1-\tilde\beta\le\frac{c_1}{\ln T}. \qquad (2.3)$$

Далее, обозначим:

$$\omega=\begin{cases}1, & \text{если } E_{\tilde\beta}=0\\ (1-\tilde\beta)\ln T, & \text{если } E_{\tilde\beta}=1,\end{cases}$$

$$e_q(y)=e\left(\frac{y}{q}\right),\qquad S(y)=\sum_{L<n\le N}\Lambda(n)e(ny),\ S_\chi(y)=\sum_{L<n\le N}\Lambda(n)\chi(n)e(ny),$$

$$I(y)=\int_L^N e(xy)dx,\ \tilde I(y)=\int_L^N x^{\tilde\beta-1}e(xy)dx,\qquad I_\chi(y)=\int_L^N e(xy){\sum_{|\gamma|\le T}}' x^{\rho-1}dx,$$

где ${\sum\limits_{|\gamma|\le T}}'$ означает суммирование по всем нулям $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$, лежащим внутри области $1/2\le\beta\le 1-c_1\ln^{-1}T$.

Положим

$$\tau=N^{-1}T^{1/2n}. \qquad (2.5)$$

Для любых целых $h_1,h_2,...,h_n,q$ с условиями

$$1\le h_1,...,h_n\le q\le Q \ \text{ и } \ (h_1,h_2,...,h_n,q)=1 \qquad (2.6)$$

определим куб

$$m(h_1,...,h_n,q)=\{(x_1,...,x_n)\in R^n:|x_i-\frac{h_i}{q}|\le\frac{\tau}{q},\ i=\overline{1,n}\} \qquad (2.7)$$

и

$$M_1=\cup m(h_1,...,h_n,q),\ \ M_2=[\tau,1+\tau]^n\setminus M_1, \qquad (2.8)$$

где объединение берется по всем $h_1,...,h_n,q$, удовлетворяющим условиям (2.6).

Нетрудно убедиться, что n - мерные кубы $m(h_1,...,h_n,q)$ - попарно не пересекаются и лежат внутри области $[\tau,1+\tau]^n$ (в случае $n=2$ см. [126]).

Для произвольного $\vec b=(b_1,...,b_n)\in U(X)$ и $(x_1,...,x_n)\in R^n$ положим

$$\vec{x}_b = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n,\ \vec{x}_j = a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n,\ (j = \overline{1, n+1}) \quad (2.9)$$

и

$$I(\vec{b}) = \sum \Lambda(m_1)\ldots\Lambda(m_{n+1}), \quad (2.10)$$

где суммирование ведется по всем m_j, удовлетворяющим условиям $L < m_1,\ldots,m_{n+1} \le N$ и $\sum\limits_{1\le j\le n+1} a_{ij}m_j = b_i,\ (i = \overline{1,n})$. Тогда ввиду (2.4) и (2.8) имеем

$$I(\vec{b}) = \int_{\tau}^{1+\tau}\ldots\int_{\tau}^{1+\tau} e(-\vec{x}_b)\prod_{j=1}^{n+1} S(\vec{x}_j)dx_1\ldots dx_n = (\int\underset{M'_1}{\ldots}\int +$$

$$+\int\underset{M'_2}{\ldots}\int) e(-\vec{x}_b)\prod_{j=1}^{n+1} S(\vec{x}_j)dx_1\ldots dx_n = I_1(\vec{b}) + I_2(\vec{b}). \quad (2.11)$$

§3. Малые дуги

Рассмотрим интеграл $I_2(\vec{b})$. При оценке $I_2(\vec{b})$ будем использовать в основном те же идеи, которые использованы в [126] при $n = 2$, но более тонкие в техническом аспекте.

Лемма 3.3.1. *Если* $(x_1,\ldots,x_n) \in M'_2$, *то*

$$\min\{|S(\vec{x}_1)|,\ldots,|S(\vec{x}_n)|\} << NB^{1/2}Q^{-1/4(n-1)}\ln^4 N.$$

Доказательство. Пусть $P = n!B^nQ^{1/2}\tau^{-1}$. Согласно теореме Дирихле об аппроксимации существуют целые l_j, q_j с условиями $1 \le q_j \le P$, $(l_j, q_j) = 1$ и $|\vec{x}_j - l_jq_j^{-1}| < (q_jP)^{-1}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда в силу теоремы 3.1. [141] имеем

$$S(\vec{x}_j) \ll (Nq_j^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}q_j^{1/2})\ln^4 N,\ j = \overline{1,n}. \quad (3.1)$$

Далее, покажем, что

$$\min\{q_1,\ldots,q_n\} \ge Q^{1/2(n+1)}(nB)^{-1}. \quad (3.2)$$

Так как $\Delta_{n+1} \ne 0$, то решение $r_1, r_2, \ldots, r_n$ системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}r_i = l_jq_j^{-1},\quad j = \overline{1,n} \quad (3.3)$$

можно представить в виде $r_j = k_jq^{-1}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – некоторые целые числа с условием $(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 1$ и q – положительный множитель $q_1q_2\ldots q_n\Delta_{n+1}$. Таким образом

$$1 \le q \le q_1q_2\ldots q_n\Delta_{n+1} \le q_1q_2\ldots q_n \cdot n!B^n. \quad (3.4)$$

Положим $t_j = \vec{x}_j - l_jq_j^{-1}$. Тогда $|t_j| < (q_jP)^{-1}$ и в силу (3.3)

$$t_j = a_{1j}(x_1 - \frac{k_1}{q}) + a_{2j}(x_2 - \frac{k_2}{q}) + \ldots + a_{nj}(x_n - \frac{k_n}{q}), \quad j = \overline{1,n}.$$

Отсюда

$$x_j - \frac{k_j}{q} = \frac{1}{\Delta_{n+1}} \sum^{n!} (-1)^{\alpha} a_{1i}, \ldots t_j \ldots a_{ni_n}, \; j = \overline{1,n}$$

и следовательно

$$| x_j - \frac{k_j}{q} | < (n-1)! B^{n-1} P^{-1} \left(\frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n} \right).$$

Теперь предположим наоборот, вместо (3.2) пусть выполняется

$$\max\{q_1, \ldots, q_n\} < Q^{1/2(n-1)} (nB)^{-1}.$$

Тогда согласно (3.4) имеем

$$(n-1)! B^{n-1} P^{-1} \left(\frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n} \right) < Q^{1/2} n! B^n (qP)^{-1} = \tau q^{-1}.$$

Следовательно, $| x_1 - k_1 q^{-1} |, \ldots, | x_n - k_n q^{-1} | < \tau q^{-1}$, и снова используя (3.4), находим

$$q \le n! B^n \left(Q^{\frac{1}{2(n-1)}} (nB)^{-1} \right)^n < Q.$$

Это неравенство вместе с соотношениями $\tau \le x_1, \ldots, x_n \le 1 + \tau$ означает, что $1 \le k_1, \ldots, k_n \le q$. Таким образом, $(x_1, \ldots, x_n) \in M'_1$, а это противоречит условию леммы 3.3.1. Тем самым неравенство (3.2) доказано. Тогда из (3.1) и (3.2) получим утверждение леммы 3.3.1. Действительно, в силу (3.1) и (3.2) имеем

$$\min\{S(\vec{x}_1), \ldots, S(\vec{x}_n)\} << (Q^{-\frac{1}{4(n-1)}} N (nB)^{1/2} +$$

$$+ N^{4/5} + N^{1/2} P^{1/2}) \ln^4 N << N B^{1/2} Q^{-\frac{1}{4(n-1)}} \ln^4 N.$$

Теперь мы можем оценить $I_2(\vec{b})$. Используя тождество Парсеваля, находим

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{b_n=-\infty}^{\infty} | I_2(\vec{b}) |^2 = \int \underset{M'_2}{\ldots} \int | S(\vec{x}_1) |^2 \ldots | S(\vec{x}_{n+1}) |^2 \, dx_1 \ldots dx_n <<$$

$$<< \min\{| S(\vec{x}_1) |, \ldots, | S(\vec{x}_n) |\}^2 \int \underset{M_2}{\ldots} \int (| S(\vec{x}_2) |^2 \ldots | S(\vec{x}_n) |^2 +$$

$$+ \ldots + | S(\vec{x}_1) |^2 | S(\vec{x}_2) |^2 \ldots | S(\vec{x}_{n-1}) |^2) | S(\vec{x}_{n+1}) |^2 \, dx_1 \ldots dx_n. \quad (3.5)$$

Так как $\Delta_{n+1} \ne 0$ и следовательно

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 | S(\vec{x}_1) |^2 \ldots | S(\vec{x}_{n+1}) |^2 \, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$=\sum_{\substack{m_1=m_2,\dots,m_{2n-1}=m_{2n}\\ L<m_i\le N}}\Lambda(m_1)\dots\Lambda(m_{2n})=\left(\sum_{L<n\le N}\Lambda^2(m)\right)^n << N^n\ln^n N,$$

то используя лемму 3.3.1, из (3.5) получим

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{b_n=-\infty}^{\infty}|I_2(\vec{b})|^2 << N^{n+2}BQ^{-\frac{1}{2(n-1)}}\ln^{n+8}N. \qquad (3.6)$$

Из оценки (3.6) следует, что количество $\vec{b}$, для которых выполняется условие $|I_2(\vec{b})|\ge NQ^{-\frac{1}{6(n-1)}}$, не больше чем $E^{(1)}(X)<X^{n-\frac{\delta}{7(n-1)}}$.

Таким образом

$$|I_2(\vec{b})|< NQ^{-\frac{1}{6(n-1)}}. \qquad (3.7)$$

для всех $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$ за исключением $E^{(1)}(X)$ значений из них.

§4. Большие дуги. упрощение интеграла $I_1(\vec{b})$

Для произвольного характера $\chi(mod q)$ обозначим

$$C_\chi(m)=\sum_{1\le l\le q}\chi(l)e_q(ml),\quad C_q(m)=C_{\chi_0}(m).$$

Очевидно, что $|C_\chi(m)|\le\varphi(q)$. Если $(x_1,\dots,x_n)\in m(h_1,\dots h_n,q)$, то полагая $x_j=h_jq^{-1}+\eta_j$, в силу (2.7) получим

$$|\eta_j|<\tau q^{-1},\ \ j=\overline{1,n}. \qquad (4.1)$$

По аналогии (2.9) обозначим

$$\begin{aligned}\vec{h}_j&=a_{1j}h_1+\dots+a_{nj}h_n, & \vec{h}_b&=b_1h_1+\dots+b_nh_n,\\ \vec{\eta}_j&=a_{1j}\eta_1+\dots+a_{nj}\eta_n, & \vec{\eta}_b&=b_1\eta_1+\dots+b_n\eta_n,\end{aligned} \qquad (4.2)$$

тогда $\vec{x}_j=\vec{h}_jq^{-1}+\vec{\eta}_j$ $(j=\overline{1,n+1})$. Используя свойство ортогональности характеров, сумму $S(\vec{x}_j)$, определенную в (2.4),можем представить в виде [121]

$$S(\vec{x}_j)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(mod q)}C_{\bar{\chi}}(\vec{h}_j)S_\chi(\vec{\eta}_j)+O(\ln^2 N). \qquad (4.3)$$

Далее при $1\le j\le n+1$ обозначим

$$\begin{aligned}G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})&=\sum_{\chi(mod q)}C_{\bar{\chi}}(\vec{h}_j)I_\chi(\vec{\eta}_j)\\ H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})&=C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)-E_{\tilde{\beta}}C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\eta_j)-G_j(\vec{h},q,\vec{\eta}),\end{aligned} \qquad (4.4)$$

где $E_{\tilde{\beta}}$ равно 1 или 0 в соответствии с тем, что $\tilde{r}\setminus q$ или $\tilde{r}\not\setminus q$.

Для упрощения интеграла $I_1(\vec{b})$ используем следующие леммы:

Лемма 3.4.1. *Для любого действительного числа* y *и произвольного характера* χ *по модулю* $q \le T$ *имеем*

$$S_\chi(y) = \delta_\chi I(y) - E_{\tilde\beta}\tilde I(y) - I_\chi(y) + O\left((1+|y|T)\frac{N}{T}\ln^2 N\right).$$

Доказательство леммы см. [127].

Лемма 4.2. *Существует постоянная* c_3 *такая, что для любого действительного* $y \ge \sqrt{N}$ *имеет место оценка*

$$\sum_{q\le T}\ \sum_{\chi(modq)}^{*}\ \sum_{|\gamma|\le T} y^{\beta-1} << \omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2}), \qquad (4.5)$$

где $\sum_\chi^*$ *означает суммирование по всем примитивным характерам* $\chi(modq)$.

Доказательство. По существу это утверждение является леммой 2.1 работы [127]. Заметим, что только в лемме 2.1 [127] вместо ω^{n+1} и $\delta^{1/2}$, участвующих в правой части (4.5), участвуют ω^3 и δ. Но ω^3 и δ можно заменить на ω^{n+1} и $\delta^{1/2}$, если в завершающей части доказательства леммы 2.1 [127] учесть, что

$$T = Q^{1/\sqrt{\delta}} = N^{\sqrt{\delta}},\ \ \eta(T) = \frac{c_2}{\ln T}\ln\left(\frac{ec_1}{(1-\tilde\beta)\ln T}\right),\ \ \omega \le c_1 \quad \text{и}$$

$$\exp(-\frac{1}{4}\eta(T)\ln N) = \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{c_2}{\sqrt{\delta}}(1+\ln\frac{c_1}{\omega})\right) \ll \omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2}).$$

При необходимости в правой части (4.5) можно получить δ вместо $\sqrt{\delta}$, полагая $T = Q^{c_2}$, где c_2 – достаточно малая постоянная.

Лемма 3.4.3. *(a). Для любого вещественного* y *имеем*

$$I(y) << \min\{N, |y|^{-1}\},\ \ \tilde I(y) << \min\{N^{\tilde\beta}, |y|^{\tilde\beta}\},\ \ I_\chi(y) << N$$

и

$$I_\chi(y) << \begin{cases} N(L|y|)^{-1/2}, & \text{для} \quad N^{-1} < |y| \le T(\pi L)^{-1}, \\ |y|^{-1}, & \text{для} \quad T(\pi L)^{-1} < |y|. \end{cases}$$

(b). Для любого $\alpha \in \left[\frac{1}{2n}, 1\right]$ *справедливы оценки*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I(y)|^{1+\alpha}\, dy << N^\alpha,\ \ \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde I(y)|^{1+\alpha}\, dy << N^{\tilde\beta(1+\alpha)-1},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I_\chi(y)|^{1+\alpha}\, dy << N^{1+\alpha}L^{-1}T^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}\ln N.$$

Эти утверждения является леммой 6.3 [126] за исключением того, что случай (b) там рассмотрен для $\alpha\in[1/4,1]$. Для $\alpha\in[1/2n,1]$ сохраняется то же самое доказательство. Так как

$$|\vec{\eta}_j|\,N=|(a_{1j}\eta_1+...+a_{nj}\eta_n)N|<nB\tau q^{-1}N=nBT^{1/2n}q^{-1},$$

то, используя лемму 3.4.1, из (4.3) получим

$$S(\vec{x}_j)=\frac{1}{\varphi(q)}\left\{H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})+O\left(\varphi(q)T^{-1+\frac{1}{2n}}BN\ln^2 N\right)\right\}.$$

Отсюда для любого $(x_1,...,x_n)\in m(h_1,...,h_n,q)$ имеем

$$\prod_{j=1}^{n+1}S(\vec{x}_j)=\frac{1}{\varphi(q)^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})+O\left(\frac{\varphi(q)^{n+1}N^{n+1}B\ln^2 N}{T^{1-1/2n}}\right).(4.6)$$

Поскольку $|H_i|\le N\varphi(q)^2$, $i=\overline{1,n}$, то в О - члене доминирующим является выражение вида

$$R_1=\varphi(q)^{-n-1}H_1...H_n\cdot O(\varphi(q)BT^{-1+\frac{1}{2n}}N\ln^2 N)<<\varphi(q)^n N^{n+1}BT^{-1+1/2n}\ln^2 N.$$

Пусть $\sum\nolimits'_h$ – означает суммирование по всем $h_1,...,h_n$ с условиями (2.6). Тогда согласно (2.11), (2.8), (4.6) $I_1(\vec{b})$ можем представить в виде

$$I_1(\vec{b})=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)^{n+1}}\sum_h{}' e_q(-\vec{h}_b)\int_{[-\frac{\tau}{q},\frac{\tau}{q}]^n}\!\!\!\dots\int e_q(-\vec{\eta}_b)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n+1}H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})d\eta_1,...,d\eta_n+O\left(\frac{NQ^{n+1}B}{T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}}\ln^2 N\right).\qquad(4.7)$$

Далее расширим пределы интегралов в (4.7) от $[-\tau q^{-1},\tau q^{-1}]^n$ до всего пространства R^n. Заметим, что согласно (4.4) при раскрытии произведения

$$\prod_{j=1}^{n+1}H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})=\left(F_1^{(1)}-F_2^{(1)}-F_3^{(1)}\right)\left(F_1^{(2)}-F_2^{(2)}-F_3^{(2)}\right)\times$$

$$\times...\times\left(F_1^{(n+1)}-F_2^{(n+1)}-F_3^{(n+1)}\right).\qquad(4.8)$$

появляется 3^{n+1} членов вида $F=F_1F_2...F_{n+1}$, где $F_i(i=\overline{1,n+1})$ равен одному из множителей $F_k^{(i)}$, $(k=1,2,3;\ i=\overline{1,n+1})$ правой части равенства (4.8).

Обозначим $\Gamma_1=[-1/2,1/2]^n\setminus[-\tau q^{-1},\tau q^{-1}]^n$ и $\Gamma_2=R^n\setminus[-1/2,1/2]^n$, и оценим интегралы по Γ_1 и Γ_2.

Согласно тождеству Парсеваля [61] имеем

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{b_n=-\infty}^{\infty}\left|\int_{\Gamma_1}\!\dots\int F\cdot e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1...d\eta_n\right|^2=\int_{\Gamma_1}\!\dots\int|F|^2\,\eta_1...d\eta_n.\ (4.9)$$

Для любого $(\eta_1,...,\eta_n)\in\Gamma_1$ в силу (4.2) находим

$$\eta_1 = \frac{1}{\Delta_{n+1}} \cdot \Delta^{\vec{\eta}}_{n+1,1},\ \eta_2 = \Delta^{\vec{\eta}}_{n+1,2}/\Delta_{n+1},\ \dots,\ \eta_n = \Delta^{\vec{\eta}}_{n+1,n}/\Delta_{n+1}.$$

Отсюда

$$|\eta_i| \le n! B^{n-1} \max(|\vec{\eta}_1|,\dots,|\vec{\eta}_n|) \qquad (4.10)$$

для всех $i = 1,2,\dots,n$. Учитывая, что для $(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n) \in \Gamma_1$ имеет место неравенство $\tau q^{-1} < |\eta_i|$, $i = \overline{1,n}$, из (4.10) получим

$$\max\{|\vec{\eta}_1|,\dots,|\vec{\eta}_n|\} > \tau (B^{n-1} n! q)^{-1} > N^{-1}.$$

В лемме 3.4.3 (a) среди оценок грубее всех является

$$I_\chi(y) << N(L|y|)^{-1/2}.$$

Следовательно

$$\min\{|F_1|^2,\dots,|F_n|^2\} << (NQ)^3 B^{n-1} L^{-1} T^{-1/2n} \qquad (4.11)$$

и

$$\int\underset{\Gamma_1}{\dots}\int |F|^2\, d\eta_1 \dots d\eta_n << \frac{(NQ)^3 B^{n-1}}{LT^{1/2n}} \int\underset{R^n}{\dots}\int \left(\left|\frac{F}{F_1}\right|^2 + \dots + \left|\frac{F}{F_n}\right|^2 \right) d\eta_1 \dots d\eta_n. \qquad (4.12)$$

В силу леммы 3.4.3 (b) при $\alpha = 1$ имеем

$$\int\underset{R^n}{\dots}\int \left|\frac{F}{F_i}\right|^2 d\eta_1 \dots d\eta_n = \frac{1}{|\Delta_{n+1}|} \left(\int_R |F_1|^2\, d\vec{\eta}_1 \right) \dots \left(\int_R |F_{i-1}|^2\, d\vec{\eta}_{i-1} \right) \times$$

$$\times \left(\int_R |F_{i+1}|^2\, d\vec{\eta}_{i+1} \right) \dots \left(\int_R |F_{n+1}|^2\, d\vec{\eta}_n \right) << \left(N^2 Q^2 L^{-1} \ln N \right)^n.$$

Поэтому из (4.12) при достаточно малом δ находим

$$\int\underset{\Gamma_1}{\dots}\int |F|^2\, d\eta_1 \dots d\eta_n << X^n N^2 Q^{-9}.$$

Используя эту оценку, из (4.9) получим

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{b_n=-\infty}^{\infty} \left| \int\underset{\Gamma_1}{\dots}\int F \cdot e(-\vec{\eta}_b)\, d\eta_1 \dots d\eta_n \right|^2 << X^n N^2 Q^{-9}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\underset{\Gamma_1}{\dots}\int F \cdot e(-\vec{\eta}_b)\, d\eta_1 \dots d\eta_n << NQ^{-4} \qquad (4.13)$$

за исключением $E^{(2)}(X) < X^n Q^{-1}$ значений $\vec{b} = (b_1,\dots,b_n)$.

Теперь оценим интеграл по Γ_2 и покажем, что для всех $\vec{b} = (b_1,\dots,b_n)$ справедлива оценка

$$\int\underset{\Gamma_2}{\dots}\int F \cdot e(-\vec{\eta}_b)\, d\eta_1 \dots d\eta_n << NQ^{-4}. \qquad (4.14)$$

Для любого $(\eta_1,\dots,\eta_n) \in \Gamma_2 = R^n \setminus [-1/2,1/2]^n$ имеем $\max\{|\eta_1|,\dots,|\eta_n|\} > 1/2$. С другой стороны, как и в предыдущем случае остаются в силе неравенства(4.10). Так что

$$\max\{|\vec{\eta}_1|,...,|\vec{\eta}_n|\} > B^{1-n}\frac{1}{n!}\max\{|\eta_1|,...,|\eta_n|\} >> B^{-n+1}.$$

Учитывая, что $|\vec{\eta}_j| >> B^{1-n} >> T(\pi L)^{-1}$, мы можем использовать лемму 3.4.3 (a), тогда

$$\min\{|F_1|,...,|F_n|\} << \varphi(q)|\vec{\eta}_j|^{-1} << \varphi(q)B^{n-1}. \qquad (4.15)$$

Очевидно, что если $F_i \le \min(|F_1|,...,|F_n|)$, то

$$|F_i| \le |F_1F_2...F_{n+1}|^{1/n},\ i=\overline{1,n+1}.$$

Поэтому

$$|F_1F_2...F_{n+1}| << |F_1...F_n|^{\frac{n+1}{n}} + ... + |F_2...F_{n+1}|^{\frac{n+1}{n}}$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_2}\!\!...\!\!\int |F_1F_2...F_{n+1}|\,d\eta_1...d\eta_n << \int\limits_{\Gamma_2}\!\!...\!\!\int (|F_1...F_n|^{\frac{n+1}{n}} + ... +$$

$$+|F_2...F_{n+1}|^{\frac{n+1}{n}})d\eta_1...d\eta_n. \qquad (4.16)$$

Здесь

$$\int\limits_{\Gamma_2}\!\!...\!\!\int |F_{i_1}...F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}}\,d\eta_1...d\eta_n << \int\limits_{\Gamma_2}\!\!...\!\!\int \min\left(|F_{i_1}|,...,|F_{i_n}|\right)^{1/2n}\times$$

$$\times\left(|F_{i_1}|^{1+\frac{1}{2n}}|F_{i_2}...F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}} + ... + |F_{i_n}|^{1+\frac{1}{2n}}|F_{i_1}...F_{i_{n-1}}|^{\frac{n+1}{n}}\right)d\eta_1...d\eta_n.$$

Отсюда в силу (4.15) и леммы 3.4.3 (b) при $\alpha = 1/2n$ имеем

$$\int\limits_{\Gamma_2}\!\!...\!\!\int |F_{i_1}...F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}}\,d\eta_1...d\eta_n << (\varphi(q)B^{n-1})^{1/2n}\int\limits_{R^n}\!\!...\!\!\int |F_{i_1}|^{1+\frac{1}{2n}}|F_{i_2}...F_{i_n}|^{\frac{n+1}{n}}\,d\eta_1...d\eta_n$$

$$<< (\varphi(q)B^{n-1})^{1/2n}|\Delta_{i_1...i_n}|^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_{i_1}|^{1+\frac{1}{2n}}\,d\vec{\eta}_1\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_{i_2}|^{1+\frac{1}{n}}\,d\vec{\eta}_2\right)...\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_{i_n}|^{1+\frac{1}{n}}\,d\vec{\eta}_n\right) <<$$

$$<< (\varphi(q)B^{n-1})^{1/2n}\left(N^{1+\frac{1}{2n}}L^{-1}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}}\ln N\right)\times$$

$$\times\left(N^{\frac{n+1}{n}}L^{-1}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}\ln N\right)^{n-1}\varphi(q)^{\frac{2n+1}{2n}}(\varphi(q)^{\frac{n+1}{n}})^{n-1} << NQ^{-4}.$$

Используя эту оценку, из (4.16) получим (4.14). Теперь, используя (4.13) и (4.14), равенство (4.7) можем написать в виде

$$I_1(\vec{b}) = \sum_{q\le Q}\varphi(q)^{-n-1}\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)\int\limits_{R^n}\!\!...\!\!\int e(-\vec{\eta}_b)$$

$$\prod_{j=1}^{n+1}H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})d\eta_1...d\eta_n + O(NQ^{-1}), \qquad (4.17)$$

за исключением $E^{(2)}(X) < X^nQ^{-1}$ значений $\vec{b} = (b_1,...b_n)$.

§5. Особый ряд задачи.

Для любого целого $q\geq 1$ обозначим

$$A(q)=\frac{1}{\varphi(q)^{n+1}}\sum_{\vec{h}}e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{n+1}C_q(\vec{h}_j) \qquad (5.1)$$

и

$$s(p)=1+A(p), \qquad (5.2)$$

где p – произвольное простое число.

Функция $N(q)$ – определяется так же как в (1.2), §1. Так как мы рассмотрим только те $\vec{b}$, которые содержатся в множестве $U(X)$, то $N(p)>0$ для всех p.

Рассмотрим некоторые арифметические свойства функций $A(q), s(p)$ и $N(q)$.

Лемма 3.5.1. *a). $A(q)$ и $N(q)$ – мультипликативные функции;*

b). Для любого целого $k\geq 2$ имеем $A(p^k)=0$;

c). Для любого натурального k $N(p^k)=p^{k-1}N(p)$;

d). $s(p)=p^n\varphi(p)^{-n-1}N(p)$ и следовательно $s(p)>0$ для всех p;

e). $q^n\varphi(q)^{-n-1}N(q)=\prod_{p\backslash q}s(p)$.

Доказательство. a). При $n=2$ данная лемма доказана в [126]. Пусть $n\geq 2$ и $(m_1,m_2)=1$. Тогда существуют $u,v\in Z$ такие, что $m_1u+m_2v=1$, отсюда $h_i=k_im_2+l_im_1$, где $k_i=vh_i$, $l_i=uh_i$, $i=\overline{1,n}$. Замечая, что

$\vec{h}_b=\vec{k}_bm_2+\vec{l}_bm_1$, $\vec{h}_j=(a_{1j}k_1+...+a_{nj}k_n)m_2+(a_{1j}l_1+...+a_{nj}l_n)m_1=\vec{k}_jm_2+\vec{l}_jm_1$ и $C_{m_1m_2}(\vec{h}_j)=C_{m_1}(\vec{k}_j)C_{m_2}(\vec{l}_j)$ из (5.1) находим

$$A(m_1m_2)=\frac{1}{\varphi(m_1)^{n+1}\varphi(m_2)^{n+1}}\sum_{\vec{h}}{}' e_{m_1m_2}(-m_2\vec{k}_b-m_1\vec{l}_b)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n+1}C_{m_1}(\vec{k}_j)C_{m_2}(\vec{l}_j)=(\frac{1}{\varphi(m_1)^{n+1}}\sum_{\vec{k}}{}' e_{m_1}(-\vec{k}_b)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n+1}C_{m_1}(\vec{k}_j))\left(\frac{1}{\varphi(m_2)^{n+1}}\sum_{\vec{l}}{}' e_{m_2}(-\vec{l}_b)\times\prod_{j=1}^{n+1}C_{m_2}(\vec{l}_j)\right)=A(m_1)\cdot A(m_2).$$

Мультипликативность $N(q)$ следует из мультипликативности $A(q)$, если учесть, что

$$N(q)=\frac{1}{q^n}\sum_{1\leq h_1,...,h_n\leq q}{}' e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{n+1}C_q(\vec{h}_j).$$

b). Известно, что (см. теорема 272, [132])

$$C_q(m)=\mu\left(\frac{q}{(q,m)}\right)\varphi(q)\varphi\left(\frac{q}{(q,m)}\right)^{-1}, \qquad (5.3)$$

где $\mu(m)$ – функция Мебиуса (см.также [129]). Пусть $k\geq 2$. Если

$$\prod_{j=1}^{n+1} C_{p^k}(\vec{h}_j)\neq 0,$$

то рассматривая множитель μ в (5.3), убедимся, что p должен делить все $\vec{h}_j=a_{1j}h_1+\ldots+a_{1n}h_n$, $j=\overline{1,n+1}$. Так как согласно определению $A(p^k)$ в (5.1) $(h_1,\ldots,h_n,p)=1$, то p должно делить все $\Delta_{n+1},\Delta_n,\ldots,\Delta_1$. Однако это противоречит условию (0.3). Следовательно, $A(p^k)=0$ для всех $k\geq 2$.

c). Ввиду (0.3) мы можем предполагать, что $p\nmid\Delta_{n+1}$. Система сравнений

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}l_j\equiv b_i(mod p^k),\ i=\overline{1,n}$$

эквивалентна системе

$$\Delta_{n+1}l_i+\Delta_{n+1,i}^{n+1}l_{n+1}\equiv\Delta_{n+1,i}^{b}(mod p^k),\ i=\overline{1,n}.$$

Это означает, что $N(p^k)$ равно количеству l_{n+1}, удовлетворяющих условиям:

$$1\leq l_{n+1}\leq p^k,\ p\nmid l_{n+1}\ \text{ и }\ \Delta_{n+1,i}^{n+1}l_{n+1}\not\equiv\Delta_{n+1,i}^{b}(mod p),\ i=\overline{1,n} \qquad (5.4)$$

Положим $l_{n+1}=tp+s$, где $1\leq s\leq p-1$ и $0\leq t\leq p^{k-1}$, тогда сравнения (5.4) можно записать в виде

$$s\cdot\Delta_{n+1,i}^{n+1}\not\equiv\Delta_{n+1,i}^{b}(mod p),\ i=\overline{1,n}.$$

Следовательно $N(p^k)=p^{k-1}N(p)$.

d) согласно (5.2) имеем

$$s(p)=\frac{1}{\varphi(p)^{n+1}}\sum_{l_1,\ldots,l_{n+1}\leq p}\chi_0(l_1)\ldots\chi_0(l_{n+1})\sum_{h_1,\ldots,h_n\leq p}e_p((a_{11}h_1+$$

$$+\ldots+a_{n1}h_n)l_1+\ldots+(a_{1,n+1}h_1+\ldots+a_{n,n+1}h_n)l_{n+1}-$$

$$-b_1h_1-\ldots-b_nh_n)=\frac{1}{\varphi(p)^{n+1}}\left(\sideset{}{'}\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{n+1}\leq p\\ \sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}l_j=b_j,\, i=\overline{1,n}}}\right)\cdot p^n=\frac{p^n}{\varphi(p)^{n+1}}N(p).$$

Наконец утверждение e) сразу следует из a), c) и d).

Далее, нам нужны более точные оценки для некоторых произведений и сумм, включающих в себя $s(p)$ и $A(q)$. В частности, мы установим сходимость $\prod_p s(p)$ и $\sum_q |A(q)|$. Чтобы достичь этого, исключаем из рассмотрения те $\vec{b}=(b_1,...,b_n)$ из $[1,X]^n$, для которых

$$\Delta^b_{n+1,n}\Delta^b_{n+1,n-1}...\Delta^b_{12}=0. \qquad (5.5)$$

Ясно, что их количество не больше чем $E^{(3)}(X)\ll X^{n-1}$.

Простые числа разбиваем на два множества:

$$P_B=\{p:p\setminus\underbrace{\Delta_1\Delta_2...\Delta_{n+1}\Delta^b_{n+1,n}\Delta^b_{n+1,n-1}...\Delta^b_{12}}_{всего\ \frac{1}{2}(n+1)(n+2)}\}, \qquad P_G=\{p:p\notin P_B\}.$$

Легко видеть, что $2\in P_B$ и $N(3)>0$ означает $3\in P_B$.

Лемма 3.5.2. *Для любого* $\vec{b}=(b_1,...,b_n)\in U(X)$ *с условием (5.5) имеем:*

a) $-\frac{c_4}{p^2}\le A(p)\le\frac{c_5}{p}$ *для всех* p, *и если* $p\in P_G$, *то* $-c_6p^{-2}\le A(p)\le c_7p^{-3}$;

b) $\prod_p(1+|A(p)|)<<\prod_p(1+A(p))<<(\ln\ln N)^{c_5}$;

c) $\prod_p s(p)$ *сходится абсолютно и*

$$\prod_p s(p)>c_8>0;$$

d) для любого $y\ge 1$

$$\sum_{q\ge y}|A(q)|<<\frac{1}{y}N^{c_9/\ln\ln N}\ln^{c_4}(y+2).$$

Доказательство. а) согласно (5.2) и леммы 3.5.1 d) имеем

$$A(p)=p^n\varphi(p)^{-n-1}N(p)-1. \qquad (5.6)$$

Исходя из условий (0.3), мы можем предполагать, что $p\nmid\Delta_{n+1}$. Так как $N(p)$ –количество наборов $(l_1,l_2,...,l_{n+1})$, удовлетворяющих условиям $1\le l_1,...,l_{n+1}\le p-1$ и $\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}l_j\equiv b_i(modp),\quad i=\overline{1,n}$, то решая эти сравнения относительно $l_1,l_2,...,l_n$ находим

$$l_j=\frac{1}{\Delta_{n+1}}\left(\Delta^b_{n+1,j}-\Delta^{n+1}_{n+1,j}l_{n+1}\right)(modp),\ j=\overline{1,n}. \qquad (5.7)$$

Так что теперь $N(p)$ – количество l_{n+1} с условиями

1) $1\le l_{n+1}\le p-1$,

2) $\Delta^b_{n+1,1}\not\equiv\Delta^{n+1}_{n+1,1}l_{n+1}(modp)$,

3) $\Delta^b_{n+1,2}\not\equiv\Delta^{n+1}_{n+1,2}l_{n+1}(modp)$,

....

n+1) $\Delta_{n+1,n}^{b} \not\equiv \Delta_{n+1,n}^{n+1} l_{n+1} (mod p)$.

Согласно принципу включения и исключения для $N(p)$ имеем

$$N(p) = p - 1 - M(\alpha_1) - M(\alpha_2) - \ldots - M(\alpha_n) + \sum_{1 \le i < j \le n} M(\alpha_i, \alpha_j) -$$

$$- \ldots + (-1)^n M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad (5.8)$$

где $M(\alpha_i)$ – означает количество l_{n+1}, удовлетворяющих соответствующим условиям:

(α_1): $1 \le l_{n+1} \le p - 1$, $\quad \Delta_{n+1,1}^{b} \equiv \Delta_{n+1,1}^{n+1} l_{n+1} (mod p)$,

....

(α_n): $1 \le l_{n+1} \le p - 1$, $\quad \Delta_{n+1,n}^{b} \equiv \Delta_{n+1,n}^{n+1} l_{n+1} (mod p)$.

Очевидно, что

$$N(p) \le p - 1. \qquad (5.9)$$

Из (5.9) и (5.6) находим

$$A(p) \le (p^n - (p-1)^n)(p-1)^{-n} < c_5 p^{-1},$$

где $p \ge 2$ и $c_5 = 2^{n+1} - 2$.

Далее, согласно условиям 2),..., n+1) $N(p) > 0$ означает, что $p \nmid (\Delta_{n+1,1}^{b}; \Delta_{n+1,1}^{n+1}) \ldots (\Delta_{n+1,n}^{b}; \Delta_{n+1,n}^{n+1})$. Следовательно, если $p \mid \Delta_{n+1,1}^{n+1}$, то $p \nmid \Delta_{n+1,1}^{b}$ и в этом случае не могут выполнятся условия (α_1). Если $p \nmid \Delta_{n+1,1}^{n+1}$, то условиям (α_1) не удовлетворяет никакое l_{n+1}, или они возможно выполнены при одном значении l_{n+1} в соответствии с тем, что $p \mid \Delta_{n+1,1}^{b}$ или $p \nmid \Delta_{n+1,1}^{b}$. Отсюда в любом случае имеем $M(\alpha_i) \le 1$, $i = \overline{1,n}$ и $N(p) \ge p - 1 - n$. Таким образом, из (5.6) получим $A(p) \ge -c_4 p^{-2}$, где $c_4 = (n-1)2^{n+2} + 4$.

Следовательно, для всех $p \ge 2$ имеем

$$-c_4 p^{-2} \le A(p) \le c_5 p^{-1}.$$

Теперь рассмотрим $p \in P_G$. В силу определения P_G имеем $M(\alpha_i) = 1$, $i = \overline{1,n}$ и $M(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, ... , $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Поэтому $N(p) = p - n - 1 > 0$ и $-c_6 p^{-2} \le A(p)$ при $p \ge 5$. С другой стороны

$$A(p) < \left(\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)p^{n-2} + \frac{1}{5!}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) \times \right.$$

$$\left. \times p^{n-4} + \ldots \right) p^{-n-1} < c_7 p^{-3}.$$

Рассмотрим случаи b) и c). Сначала докажем, что

$$\prod_p (1+|A(p)|) << \prod_p (1+A(p)).$$

В случае $A(p)>0$ это очевидно. Пусть $A(p)<0$, тогда в силу утверждения а)

$$\prod_p \left(1+|A(p)|\right) \le \prod_p (1+A(p)) \prod_p \left(1+\frac{2c_4}{p^2(1+A(p))}\right).$$

Здесь $p^2(1+A(p)) \ge (1-c_4p^{-2})p^2$ и

$$\prod_p \left(1+\frac{2c_4}{p^2(1+A(p))}\right) = \prod_p \left(1+\frac{2c_4}{(1-c_4p^{-2})p^2}\right) << 1.$$

Следовательно,

$$\prod_p (1+|A(p)|) << \prod_p (1+A(p)).$$

Далее, пусть $<P_G>$ и $<P_B>$ множества положительных целых свободных от квадратов, простые делители которых принадлежат P_G и P_B соответственно. Тогда для любого $t>0$ имеем

$$\sum_{q\le t} |A(q)| \le \sum_{q_1\in<P_B>} |A(q_1)| \sum_{q_2\in<P_G>} |A(q_2)| \le \prod_{p\in P_B} (1+A(p)) \times$$
$$\times \prod_{p\in P_G,\, p\le t} (1+A(p)) \le \prod_{p\in P_B} (1+c_5p^{-1}) \prod_{p\le t} (1+c_6p^{-2}) \ll$$
$$<< \prod_{p\in P_B} (1+c_5p^{-1}) << \prod_{p\in P_B} (1-p^{-1})^{-c_5}.$$

Таким образом, ряд $\sum_{q=1}^{\infty} |A(q)| = \prod_p s(p)$ сходится, и

$$\prod_{p\in P_B} (1-p^{-1})^{-c_5} = (\varphi(K)K^{-1})^{-c_5} << (\ln\ln N)^{c_5},$$ где

$$K = \prod_{p\in P_B} p \le (n!B)^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} << N \qquad (5.10)$$

Следовательно, мы доказали утверждения b) и первой части c). Вторая часть c), т.е. $\prod_p s(p) > c_8 > 0$ следует из первой части c) и леммы 3.5.1 d). Утверждение d) доказывается аналогично утверждению (4) леммы 3.4.4[126].

Пусть $\chi_j(mod r_j)$ – примитивные характеры $j=\overline{1,n+1}$ и $r=[r_1,...,r_{n+1}]$ – н.о.к. $r_1,...,r_{n+1}$. В дальнейшем нам необходимо иметь оценку некоторых выражений суммы вида:

$$Z(q) = Z(q;\chi_1,...,\chi_{n+1}) = \sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b) \prod_{j=1}^{n+1} C_{\chi_j\chi_0}(\vec{h}_j), \qquad (5.11)$$

где q - кратное r и χ_0 – главный характер по модулю q.

Лемма 3.5.3. *Имеют место следующие утверждения:*

a) $Z(r)=r^n\sum_{(r)}\prod_{j=1}^{n+1}\chi_j(l_j)$;

b) *пусть* $r\setminus q$ *и* $q=q'q''$, $(q',q'')=1$ *и каждый простой делитель числа* q' *делит* r, *тогда*

$$Z(q)=Z(q')\varphi(q'')^{n+1}A(q'') \quad \text{и} \quad Z(q')=0, \quad \text{если} \quad q'>r;$$

c) $\sum_{q\le Q, r\setminus q}\varphi(q)^{-n-1}Z(q)<<\prod_p s(p).$

Доказательство. а) при $q=r$ из (5.11) получим

$$Z(r)=\sum_{1\le l_1,\ldots,l_{n+1}\le r}\prod_{j=1}^{n+1}\chi_j(l_j)\sum_{1\le h_1,\ldots,h_n\le r}{}' e_r\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}(a_{ij}l_j-b_i)h_i\right). \quad (5.12)$$

Если

$$\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}l_j=b_i,\ i=\overline{1,n}, \quad (5.13)$$

то можно не учитывать условие $(h_1,\ldots,h_n),r)=1$, и тогда из (5.12) сразу получим утверждение а) леммы. Условие (5.13) выполняется в силу определения суммы $\sum_{(r)}$. Теперь покажем, что в этом случае можно не учитывать условие $(h_1,\ldots,h_n,r)=1$. Пусть $\chi(modq)$ индуцирован примитивным характером $\chi^*(modr^*)$ и $q_1=q/(q,m)$, тогда (см. стр. 450, [51])

$$C_\chi(m)=\begin{cases}\bar{\chi}^*\left(\dfrac{m}{(m,q)}\right)\dfrac{\varphi(q)}{\varphi(q_1)}\mu\left(\dfrac{q_1}{r^*}\right)\chi^*\left(\dfrac{q_1}{r^*}\right)C_{\chi^*}(1), & \text{если} \quad r^*\setminus q;\\ 0, & \text{если} \quad r^*\setminus q_1.\end{cases} \quad (5.14)$$

Предположим, что $(h_1,\ldots,h_n,r)>1$ и $p\setminus(h_1,\ldots,h_n,r)$. Так как $r=[r_1,\ldots,r_{n+1}]$, то мы можем полагать $p\not\setminus\frac{r}{r_1}$. Поэтому $r_1\not\setminus r(r,a_{11}h_1+\ldots+a_{n1}h_n)^{-1}$ и следовательно, в силу (5.14) $C_{\chi_1\chi_0}(\vec{h}_1)=0$. Таким образом, если $(h_1,\ldots,h_n,r)>1$, то $\prod_{j=1}^{n+1}C_{\chi_j\chi_0}(\vec{h}_j)=0.$

Части b) и c) доказываются рассуждениями, аналогичными рассуждениям, которые использованы в леммах 4.5 и 4.8 [127].

§6. Особый интеграл задачи.

Относительно сингулярного интеграла задачи справедлива следующая

Лемма 3.6.1. *Если* $\rho_j(j=\overline{1,n+1})$ *произвольные комплексные числа с условием* $0<Re\rho_j\le 1$, *то*

$$\int\underset{R^n}{\dots}\int\left(\prod_{j=1}^{n+1}\int_L^N x_j^{\rho_j-1}e(\vec{\eta}_j x_j)dx\right)e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1...d\eta_n=N\frac{1}{|\Delta_1|}\int_D\prod_{j=1}^{n+1}(Nx_j)^{\rho_j-1}dx_1,$$

(6.1)

где $x_2,...,x_{n+1}$ *и область интегрирования* D *определяются следующими равенствами*

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{12}^1x_1+\Delta_{12}^bN^{-1}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{n+1}=\dfrac{1}{\Delta_1}(-\Delta_{1,n+1}^1x_1+\Delta_{1,n+1}^bN^{-1})\end{cases}\tag{6.2}$$

и

$$D=\{x_1:LN^{-1}\le x_1,x_2,...,x_{n+1}\le 1\}.\tag{6.3}$$

Кроме того, если $(b_1,...,b_n)\in U(X)$, *то*

$$\int_D dx_1>>Q^{-\lambda_2},\ \ \lambda_2=(16n(n+1))^{-1}\tag{6.4}$$

за исключением $E^{(4)}(X)<<X^nQ^{-\lambda_3},\ \lambda_3=(16n(n+2))^{-1}$ *значений* $\vec{b}=(b_1,...,b_n)$ *из* $U(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$\int\underset{R^n}{\dots}\int\left(\prod_{j=1}^{n+1}\int_L^N x_j^{\rho_j-1}e(\vec{\eta}_j x_j)dx_j\right)e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1...d\eta_n=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\int_{-y}^{y}...\int_{-y}^{y}e(-\vec{\eta}_b)\left(\prod_{j=1}^{n+1}\int_L^N x_j^{\rho_j-1}e(\vec{\eta}_j x_j)dx_j\right)d\eta_1...d\eta_n=$$

$$=\lim_{y\to\infty}N\int_{L/N}^{1}...\int_{L/N}^{1}\left(\prod_{j=1}^{n+1}(Nx_j)^{\rho_j-1}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin(2\pi(\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j-b_iN^{-1})y)}{\pi(\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j-b_iN^{-1})}\times$$

$$\times dx_1...dx_{n+1}=\lim_{y\to\infty}NJ(y).\tag{6.5}$$

Обозначим

$$t_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j - b_i N^{-1}, \quad i = \overline{1,n};$$

$$D(x_1) = \{\vec{t} = (t_1, ..., t_n) \mid t_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j - b_i N^{-1}, \; i = \overline{1,n}; \; N^{-1} L \le x_2, ..., x_{n+1} \le 1\}. \qquad (6.6)$$

Тогда

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{\Delta_1}(\Delta_{12}^t + \Delta_{12}^b N^{-1} - \Delta_{12}^1 x_1), \\ x_3 = \dfrac{1}{\Delta_1}(\Delta_{13}^t + \Delta_{13}^b N^{-1} - \Delta_{13}^1 x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{\Delta_1}(\Delta_{1,n+1}^t + \Delta_{1,n+1}^b N^{-1} - \Delta_{1,n+1}^1 x_1). \end{cases} \qquad (6.7)$$

Используя эти обозначения, из (6.5) получим

$$\lim_{y\to\infty} NJ(y) = \lim_{y\to\infty} N \int_{LN^{-1}}^{1} (Nx_1)^{\rho_1 - 1} \Big(\int_{D(x_1)} \frac{1}{|\Delta_1|} \prod_{j=2}^{n+1} (Nx_j)^{\rho_j - 1} \cdot \frac{\sin(2\pi t_{j-1} y)}{\pi t_{j-1}} dt_{j-1} \Big) dx_1. \qquad (6.8)$$

Далее, применяем теорему Жордана об интеграле Дирихле, согласно которой, если $g(t)$ непрерывная, дифференцируемая функция на отрезке $\mu \le t \le \lambda$, то

$$\lim_{y\to\infty} \int_{\mu}^{\lambda} g(t) \frac{\sin(2\pi t y)}{\pi t} dt = \begin{cases} g(0), & \text{при } \mu < 0 < \lambda, \\ \dfrac{1}{2} g(0), & \text{при } \mu = 0 \text{ или } \lambda = 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях .} \end{cases}$$

Так как $D(x_1)$ содержит $\vec{t} = (0,...,0)$, то из этой теоремы и (6.8) получим (6.1), то есть

$$\lim_{y\to\infty} NJ(y) = \frac{N}{|\Delta_1|} \int_D \prod_{j=1}^{n+1} (Nx_j)^{\rho_j - 1} dx_1,$$

также из (6.6) и (6.7) при $\vec{t} = (0,...,0)$ получим соответственно (6.3) и (6.2).

Теперь докажем (6.4). В зависимости от знака определителя Δ_1 доказательство оценки (6.4) делим на два случая:

1^0. Пусть $\Delta_1 > 0$. Согласно (6.2) и (6.3) интеграл равен сумме длин под интегралов в интервале $[N^{-1}L;1]$:

$$\left[\frac{L\Delta_1-\Delta_{12}^b}{-\Delta_{12}^1 N};\frac{\Delta_1-\Delta_{12}^b N^{-1}}{-\Delta_{12}^1}\right]$$
$$\left[\frac{L\Delta_1-\Delta_{13}^b}{-\Delta_{13}^1 N};\frac{\Delta_1-\Delta_{13}^b N^{-1}}{-\Delta_{13}^1}\right] \qquad (6.9)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[\frac{L\Delta_1-\Delta_{1,n+1}^b}{-\Delta_{1,n+1}^1 N};\frac{\Delta_1-\Delta_{1,n+1}^b N^{-1}}{-\Delta_{1,n+1}^1}\right].$$

Здесь мы считаем, что $-\Delta_{12}^1,-\Delta_{13}^1,...,-\Delta_{1,n+1}^1>0$. Это всегда возможно, в противном случае мы можем пере обозначить индексы коэффициентов a_{ik}. Для $(b_1,...,b_n)\in U(X)$ имеем $|\Delta_{ij}^b|\le n!(B/3)^{n-1}X$ и согласно (2.1) и (2.2) для левого конца первого интервала в (6.9) получим оценку

$$\frac{L\Delta_1-\Delta_{12}^b}{-N\Delta_{12}^1}\le\left(LN^{-1}n!\left(\frac{B}{3}\right)^n+n!\left(\frac{B}{3}\right)^{n-1}XN^{-1}\right)\frac{1}{|\Delta_{12}^1|}<\frac{1}{3^{n-1}n!B^n}.$$

В то же время для правого конца этого интервала имеем

$$\frac{\Delta_1-\Delta_{12}^b N^{-1}}{-\Delta_{12}^1}\ge(1-n!\left(\frac{B}{3}\right)^{n-1}XN^{-1})\frac{1}{(-\Delta_{12}^1)}\ge$$
$$\ge\left(1-\frac{1}{3^n n!B^n}\right)\frac{3^n}{n!B^n},\text{ так как }-\Delta_{12}^1\le n!\left(\frac{B}{3}\right)^n.$$

Таким образом, первый интервал в (6.9) содержит подинтервал длиной $\gg B^{-n}$. Совершенно аналогично можно показать, что это утверждение справедливо и для остальных интервалов в (6.9). Так что

$$\int_D dx_1>>B^{-n}>>Q^{-n\delta}>>Q^{-\lambda_2},\lambda_2>n\delta$$

без каких либо исключений $\vec{b}\in U(X)$.

Положим $\lambda_2=(16n(n+1))^{-1}$, тогда $\delta<(16n^2(n+1))^{-1}$.

2^0. Пусть теперь $\Delta_1<0$. По аналогии с первым случаем интеграл $\int_D dx_1$ равен сумме длин следующих под интервалов в $[LN^{-1};1]$:

$$\left[\frac{-\Delta_{12}^{b}N^{-1}+\Delta_1}{-\Delta_{12}^{1}};\frac{-\Delta_{12}^{b}+L\Delta_1}{-N\Delta_{12}^{1}}\right],$$
$$\left[\frac{-\Delta_{13}^{b}N^{-1}+\Delta_1}{-\Delta_{13}^{1}};\frac{-\Delta_{13}^{b}+L\Delta_1}{-N\Delta_{13}^{1}}\right], \qquad (6.10)$$
....
$$\left[\frac{-\Delta_{1,n+1}^{b}N^{-1}+\Delta_1}{-\Delta_{1,n+1}^{1}};\frac{-\Delta_{1,n+1}^{b}+L\Delta_1}{-N\Delta_{1,n+1}^{1}}\right].$$
Так как $(b_1,...,b_n)\in U(X)$, тогда согласно определению $U(X)$ и условию (пр) следующая система линейных уравнений
$$y_j=\frac{1}{\Delta_1}(\Delta_{1j}^{b}-\Delta_{1j}^{1}y_1),\quad j=\overline{2,n+1}$$
имеет решение в положительных вещественных числах $y_1,...,y_{n+1}$. Отсюда $\Delta_{1j}^{b}<0$ для всех $j=\overline{2,n+1}$. Для каждого фиксированного $k\geq 1$ существует не более, чем X^{n-1} значений $(b_1,...,b_n)$ в $[1,X]^n$ таких, что $k=-\Delta_{1j}^{b}$. Следовательно, если
$$k=-\Delta_{1j}^{b}\leq -\Delta_{1j}^{1}NQ^{-\lambda_2},$$
то существует не более $-\Delta_{1j}^{1}NQ^{-\lambda_2}X^{n-1}$ значений $(b_1,...,b_n)\in U(X)$ таких, что
$$\frac{\Delta_{1j}^{b}}{\Delta_{1j}^{1}}\leq NQ^{-\lambda_2},\quad j=\overline{2,n+1}.$$
Таким образом,
$$\Delta_{1j}^{b}(\Delta_{1j}^{1}N)^{-1}>Q^{-\lambda_2},\quad j=\overline{2,n+1} \qquad (6.11)$$
для всех $(b_1,...,b_n)\in U(X)$, за исключением не более, чем $E^{(4)}(X)<X^{n}Q^{-\lambda_3}$ значений $(b_1,...,b_n)\in U(X)$. Здесь $\lambda_3=(16n(n+2))^{-1}$, $(\lambda_3<\lambda_2)$. Так как $\Delta_1<0$ и согласно (2.1)
$$|\Delta_{1j}^{b}N^{-1}|\leq (3^n n!B^n)^{-1},$$
то имеем $-\Delta_{1j}^{b}N^{-1}+\Delta_1\leq (3^n n!B^n)^{-1}-1<0$ для всех $j=\overline{2,n+1}$, то есть левые концы всех интервалов в (6.10) отрицательные, в то время как их правые концы в силу (6.11) и (2.1) удовлетворяют оценку
$$(-\Delta_{1j}^{b}+\Delta_1 L)(-\Delta_{1j}^{1}N)^{-1}\geq Q^{-\lambda_2}-n!\left(\frac{B}{3}\right)^{n}Q^{-1/90}>\frac{1}{2}Q^{-\lambda_2}$$
(при $\lambda_2<1/90$) для всех $j=\overline{2,n+1}$. Следовательно

$$\int_D dx_1 \geq \frac{1}{2}Q^{-\lambda_2} - LN^{-1} = \frac{1}{2}Q^{-\lambda_2} - Q^{-1/90} > \frac{1}{3}Q^{-\lambda_2}.$$

Этим завершается доказательство леммы 6.1.

§7. Оценка интеграла по большой дуге.

Как уже отмечено в §4 в силу (4.4) при раскрытии произведения $\prod_{j=1}^{n+1} H_j(\vec{h},q,\vec{\eta})$ возникают 3^{n+1} членов, которые принадлежат одной из трех категорий:

1) член $T_1 = \prod_{j=1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)$;

2) члены, которые имеют по крайней мере один множитель $G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})$, их сумму обозначим через T_2;

3) оставшиеся члены, сумму которых обозначим через T_3.

Обозначим

$$M_i = \sum_{q\leq Q} \frac{1}{\varphi(q)^{n+1}} \sum_{\vec{h}} e_q(-\vec{h}_b) \int_{R^n}\ldots\int T_i \cdot e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1\ldots d\eta_n, \qquad (7.1)$$

где $i = 1,2,3$. Легко заметить, что M_i является вещественным. Используя обозначение (7.1), формулу (4.17) можно написать в виде

$$I_1(\vec{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(NQ^{-1}) \qquad (7.2)$$

для всех $\vec{b} = (b_1,\ldots,b_n) \in U(X)$, за исключением $E^{(2)}(X) < X^n Q^{-1}$ значений из них. Пусть

$$M_0 = \frac{N}{|\Delta_1|}\prod_p s(p)\int_D dx_1, \qquad (7.3)$$

тогда в силу леммы 3.5.2 c) и оценки (6.4) имеем

$$M_0 >> NB^{-n}Q^{-\lambda_2} \qquad (7.4)$$

за исключением не более чем $E^{(4)}(X) < X^n Q^{-\lambda_3}$ значений $(b_1,\ldots,b_n) \in U(X)$.

Лемма 3.7.1. *Для всех $\vec{b} \in U(X)$ справедлива равенство*

$$M_1 = M_0 + O(NQ^{-4/5}).$$

Доказательство. Полагая в (6.1) $\rho_j = 1$ и используя лемму 3.5.2 d), из (7.1) находим

$$M_1 = \sum_{q\leq Q} A(q)\cdot\frac{N}{|\Delta_1|}\int_D dx_1 = \frac{N}{|\Delta_1|}\left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q)\right)\int_D dx_1 + O\left(NQ^{-1}N^{c_9/\ln\ln N}\ln^{c_4} Q\right). \qquad (7.5)$$

В силу леммы 3.5.1 a), b) и (4.2) $\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p} (1 + A(p$ и ясно, что $N^{c_9/\ln\ln N} \ln^{c_4} Q < Q^{1/5}$. Эти соотношения доказывают лемму.

Далее, оценим M_3. Пусть $m_1, m_2, \ldots,$ - различные целые числа из множества $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ и

$$G(m_1, m_2, \ldots) = \sum_{(\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_{m_1}) \tilde{\chi}(l_{m_2}) \ldots, \tag{7.6}$$

$$P(m_1, m_2, \ldots) = \int_D (Nx_{m_1})^{\tilde{\beta}-1} (Nx_{m_2})^{\tilde{\beta}-1} \ldots dx_1. \tag{7.7}$$

Например,

$$G(2,3) = \sum_{(\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_2) \tilde{\chi}(l_3), \qquad P(2,3) = \int_D (Nx_2)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_3)^{\tilde{\beta}-1} dx_1.$$

Очевидно, что

$$|P(m_1, m_2, \ldots)| \le 1. \tag{7.8}$$

Лемма 3.7.2. *Имеют место следующие оценки:*

a) $|G(m_1, m_2, \ldots)| \le N(\tilde{r}) \le \varphi(\tilde{r})$*;*

b) $G(m_1, m_2, \ldots) << B^{\frac{1}{2}n(n+1)} \tilde{r}^{\frac{1}{2}\lambda_n}$, $\lambda_4 = (n+1)/n$ *за исключением не более, чем* $E^{(5)}(X) < X^n \tilde{r}^{1-\lambda_4}$ *значений* $(b_1, \ldots, b_n) \in [1, X]^n$.

Доказательство. Утверждение a) сразу следует из определения $N(\tilde{r})$ и его мультипликативности, если учесть лемму 3.6.1 c).

b). Для удобства рассмотрим конкретный набор из $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, например $1, 2, \ldots, n$, то есть $G(1, 2, \ldots, n)$. Согласно (7.6) $G(1, 2, \ldots, n)$ можно представить в виде

$$G(1, 2, \ldots, n) = \frac{1}{r^n} \sum_{1 \le h_1, \ldots, h_n \le \tilde{r}} e_{\tilde{r}}(-\vec{h}_b) C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_1) \ldots C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_{n+1}).$$

Используя тождество Парсеваля, находим

$$\sum_{1 \le b_1, \ldots, b_n \le \tilde{r}} |G(1, 2, \ldots, n)|^2 = \tilde{r}^{-n} \sum_{1 \le h_1, \ldots, h_n \le \tilde{r}} |C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_1) \ldots C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_{n+1})|^2 .$$

Так как $\tilde{\chi}$ является примитивным характером, то $C_{\tilde{\chi}}(m) = \tilde{\chi}(m) C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $|C_{\tilde{\chi}}(1)| = \tilde{r}^{1/2}$. Поэтому

$$\sum_{1 \le b_1, \ldots, b_n \le \tilde{r}} |G(1, 2, \ldots, n)|^2 \le \sum_{\substack{1 \le h_1, \ldots, h_n \le \tilde{r} \\ (h_1, \ldots, h_n, \tilde{r}) = 1}} |C_{\tilde{r}}(\vec{h}_{n+1})|^2 . \tag{7.9}$$

Известно, что модуль квадратичного характера $\tilde{\chi}$ имеет вид $\tilde{r} = \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k$, где $\nu_1 = 2^t$, $t \in \{0, 2, 3\}$ и $\nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_k$ – нечетные простые числа. Пусть $U_1 = \{\nu_j \mid \nu_j \nmid \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n+1}, j \ge 2\}$ и $U_2 = \{\nu_j \mid \nu_j \notin U_1\}$, а также обозначим

$$u_i = \prod_{\nu_j \in U_j} \nu_j, \quad i = 1, 2.$$

Так, что $\tilde{r} = u_1 \cdot u_2$ и

$$u_2 = \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j = \nu_1 \prod_{\nu_j \in U_2 \setminus \{\nu_1\}} \nu_j \le 8 |\Delta_1 \Delta_2 ... \Delta_{n+1}| \ll B^{n(n+1)}. \quad (7.10)$$

Подобным способом, который был использован при доказательстве леммы 3.5.1 а) нетрудно показать, что

$$\sum_{\substack{1 \le h_1, ..., h_n \le \tilde{r} \\ (h_1, ..., h_n, \tilde{r}) = 1}} |C_{\tilde{\chi}}(\vec{h}_{n+1})|^2 = \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{\substack{1 \le h_1, ..., h_n \le \nu_j \\ (h_1, ..., h_n, \nu_j) = 1}} |C_{\nu_j}(\vec{h}_{n+1})|^2 \right). \quad (7.11)$$

Фиксируем $\nu_j \in U_1$ и рассмотрим соответствующую сумму в правой части равенства (7.11)

$$C_{\nu_j}(\vec{h}_{n+1}) = \sum_{l_1 \le \nu_j}{}' e\left(\frac{l_1 \vec{h}_{n+1}}{\nu_j} \right) = \begin{cases} \varphi(\nu_j), & \text{если } \nu_j \setminus \vec{h}_{n+1}, \\ -1, & \text{если } \nu_j \nmid \vec{h}_{n+1} \end{cases}$$

и существуют $(\nu_j - 1)^{n-1}$ значений $(h_1, ..., h_n)$, для которых $\nu_j \setminus \vec{h}_{n+1}$. Поэтому из (7.11) находим

$$\sum_{\substack{1 \le h_1, ..., h_n \le \nu_j \\ (h_1, ..., h_n, \nu_j) = 1}} |C_{\nu_j}(\vec{h}_{n+1})|^2 \le \varphi(\nu_j)^{n+1} \quad (7.12)$$

для всех $\nu_j \in U_1$. Если $\nu_j \in U_2$, то очевидно, что сумма в левой части неравенства (7.12) не превосходит ν_j^{n+2}. Из (7.9) - (7.12) получим

$$\sum_{1 \le b_1, ..., b_n \le \tilde{r}} |G(1, 2, ..., n)|^2 << \tilde{r}^{n+1} B^{n(n+1)}.$$

Последняя оценка показывает, что количество наборов $(b_1, b_2, ..., b_n) \in [1, \tilde{r}]^n$, для которых

$$|G(m_1, m_2, ...)| >> l B^{\frac{1}{2} n(n+1)} \tilde{r}^{\lambda_4 / 2}$$

не превосходит $\tilde{r}^{n+1-\lambda_4}$. Ясно, что $G(1, 2, ..., n)$ зависит от классов вычетов по модулю $\tilde{r}$. Таким образом для не более, чем $(X \tilde{r}^{-1})^n \tilde{r}^{n+1-\lambda_4} = X^n \tilde{r}^{1-\lambda_4}$ исключительных значений $(b_1, ..., b_n) \in [1, \tilde{r}]^n$, имеем

$$G(m_1, m_2, ...) << B^{\frac{1}{2} n(n+1)} \tilde{r}^{\frac{1}{2} \lambda_4}. \quad (7.13)$$

Для остальных наборов чисел $m_1, m_2, ...$ из $\{1, 2, ..., n+1\}$ функция $G(m_1, m_2, ...)$ оценивается аналогично и (7.13) остается в силе. Поэтому из (7.13) мы получим утверждение леммы.

Лемма 3.7.3. *Для M_3, определяемым равенством (7.1), справедливо представление*

$$M_3 = \frac{N\tilde{r}^n}{|\Delta_1|\varphi(\tilde{r})^{n+1}}\left(\sum_{\substack{q\le Q\tilde{r}^{-1}\\(\tilde{r},q)=1}} A(q)\right)\{-\sum_{j=1}^{n+1} G(j)P(j)+$$
$$+\sum_{1\le i<j\le n+1} G(i,j)P(i,j)-\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n+1} G(i_1,i_2,i_3)P(i_1,i_2,i_3)+$$
$$+\ldots+(-1)^{n+1}G(1,2,\ldots,n+1)P(1,2,\ldots,n+1)\}. \qquad (7.14)$$

Доказательство. Каждый из членов в T_3 принадлежит одному из следующих типов

$$(-1)^m\prod_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j), \quad \text{где} \quad m=1,2,\ldots,n+1.$$

Обозначая вклад такого члена в M_3 через $M_{3,m}$, оценим его. Имеем

$$M_{3,m} = (-1)^m\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)^{n+1}}\sum_{\vec{h}_b}{}' e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j)\times$$
$$\times\int_{R^n}\!\!\ldots\!\int e(-\vec{\eta}_b)\prod_{j=1}^{m}\tilde{I}(\vec{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1} I(\vec{\eta})d\eta_1\ldots d\eta_n = (-1)^m W_m\cdot U_m,$$

где

$$W_m = \sum_{q\le Q,\tilde{r}\backslash q}\varphi(q)^{-n-1}\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1} C_q(\vec{h}_j)$$

и U_m – кратный интеграл по R^n. Из (2.4), (7.7) и (6.1) (считая $\rho_j=\tilde{\beta}$ или $\rho_j=1$) находим

$$U_m = \frac{N}{|\Delta_1|}P(1,2,\ldots,m). \qquad (7.16)$$

Далее, полагая в (5.12) $\chi_1=\chi_2=\ldots=\chi_m=\tilde{\chi}(mod\tilde{r})$ и $\chi_{m+1}=\ldots=\chi_{n+1}=\chi_0(mod 1)$, получим

$$W_m = \sum_{q\le Q,\tilde{r}\backslash q}\varphi(q)^{-n-1}Z(q). \qquad (7.17)$$

В силу леммы 3.5.3 a), b) функция $Z(q)$ можем написать в виде

$$Z(q) = Z(\tilde{r})A(q'')\varphi(q'')^{n+1} = \tilde{r}^n\sum_{(\tilde{r})}\prod_{j=1}^{n+1}\tilde{\chi}(l_j)A(q'')\varphi(q'')^{n+1}, \quad (7.18)$$

где $q=\tilde{r}q''$, $(\tilde{r},q'')=1$. Из равенств (7.6), (7.17) и (7.18) имеем

$$W_m = Z(\tilde{r})\varphi(\tilde{r})^{-n-1}\sum_{q''\le Q\tilde{r}^{-1},(q'',\tilde{r})=1} A(q'') = \tilde{r}^n\varphi(\tilde{r})^{-n-1}G(1,2,\ldots,m)\sum_{q''\le Q\tilde{r}^{-1},(q'',\tilde{r})=1} A(q'').$$

Таким образом, подставляя это выражение и (7.16) в (7.15) будем иметь

$$M_{3,m}=\frac{N\tilde r^n}{|\Delta_1|\varphi(\tilde r)^{n+1}}\left(\sum_{q''\le Q\tilde r^{-1},(q'',\tilde r)=1}A(q'')\right)\left((-1)^m G(1,2,...,m)P(1,2,...,m)\right).$$

Собирая выражение при $m=1,2,...,n+1$, получим утверждение леммы. Когда $Q\tilde r^{-1}$ – "большое" сумма $\sum\limits_{\substack{q\le Q\tilde r^{-1}\\(q,\tilde r)=1}}A(q)$ в (7.14) является достаточно длинной и в силу леммы 3.5.2 d) мы можем представить ее в виде

$$\sum_{\substack{q\le Q\tilde r^{-1}\\(q,\tilde r)=1}}A(q)=\prod_{p\nmid\tilde r}s(p)+O(\tilde rQ^{-9/10}). \qquad (7.19)$$

Обозначая через $A(G,P)$ выражение , стоящее в фигурных скобках в (7.14) и используя (7.19), находим

$$M_3=\frac{N\tilde r^n}{|\Delta_1|\varphi(\tilde r)^{n+1}}\left(\prod_{p\nmid\tilde r}s(p)+O(\tilde rQ^{-9/10})\right)A(G,P).$$

В силу (7.8) и леммы 3.7.2 а) имеем

$$M_3=\frac{N\tilde r^n}{|\Delta_1|\varphi(\tilde r)^{n+1}}\prod_{p\nmid\tilde r}s(p)A(G,P)+O\left(N\tilde r\frac{(\ln\ln Q)^n}{Q^{9/10}}\right). \quad (7.20)$$

С другой стороны, согласно лемме 3.5.1 e) имеет место равенство

$$\prod_{p\nmid\tilde r}s(p)=\tilde r^n\varphi(\tilde r)^{-n-1}\sum_{(\tilde r)}1. \qquad (7.21)$$

Поэтому из леммы 3.7.1 и (7.3) получим

$$M_1=\frac{N}{|\Delta_1|}\prod_{p\nmid\tilde r}s(p)\frac{\tilde r^n}{\varphi(\tilde r)^{n+1}}\sum_{(\tilde r)}\int_D dx_1+O(NQ^{-4/5}). \qquad (7.22)$$

Из (7.20) и (7.22) следует

$$M_1+M_3=\frac{N\tilde r^n}{|\Delta_1|\varphi(\tilde r)^{n+1}}\prod_{p\nmid\tilde r}s(p)\sum_{(\tilde r)}\int_D\prod_{j=1}^{n+1}\left(1-\tilde\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde\beta-1}\right)dx_1+O(N\tilde rQ^{-4/5}).\,(7.23)$$

В силу (6.3) $Nx_j\ge L$ так , что

$$\prod_{j=1}^{n+1}(1-\tilde\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde\beta-1})\ge\prod_{j=1}^{n+1}\left(1-(Nx_j)^{\tilde\beta-1}\right)\ge$$

$$\ge(1-L^{\tilde\beta-1})^{n+1}\ge\{1-\exp(-\frac{1}{2}(1-\tilde\beta)\ln N)\}^{n+1}\ge\{(1-\tilde\beta)\ln T\}^{n+1}=\omega^{n+1}.$$

Таким образом, из (7.24), (7.21) и (7.23) приходим к заключению

$$M_1+M_3\ge\omega^{n+1}M_0-O(N\tilde rQ^{-4/5}). \qquad (7.25)$$

В случае, когда $Q\tilde r^{-1}$ является "малым" для суммы $\sum\limits_{q\le Q\tilde r^{-1},(q,\tilde r)=1}A(q)$ мы не сможем получить оценку типа (7.19). В этом случае ограничимся для оценки этой суммы леммой 3.5.2 b) и тогда для M_3 из (7.14) получим следующую оценку

$$M_3 << N\tilde{r}^n\varphi(\tilde{r})^{-n-1}A(G,P).$$

В силу леммы 3.7.2 b) и (7.8) имеем оценку

$$A(G,P) << B^{\frac{1}{2}n(n+1)}\tilde{r}^{\frac{1}{2}\lambda_4},$$

справедливую за исключением $E^{(5)}(X) \le X^n\tilde{r}^{1-\lambda_4}$ наборов $(b_1,...,b_n) \in [1,X]^n$. Поэтому

$$M_3 << \frac{N}{\tilde{r}^{1-\lambda_4/2}}B^{\frac{1}{2}n(n+1)}(\ln\ln N)^{n+1} << \frac{NB^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{\tilde{r}^{1-\lambda_4/2}}(\ln\ln N)^{c_{10}}. \quad (7.26)$$

Теперь оценим M_2.

Лемма 3.7.4. *Для всех* $(b_1,...,b_n) \in [1,X]^n$ *имеет место оценка*

$$M_2 << M_0\omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2}).$$

Доказательство. Члены, содержащиеся в T_2 имеют вид

$$(-1)^m\prod_{j=1}^{l}G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})\prod_{j=l+1}^{m}E_{\tilde{\beta}}C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1}C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)$$

или

$$(-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{l}G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})\prod_{j=l+1}^{m}C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)\prod_{j=m+1}^{n+1}E_{\tilde{\beta}}C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j),$$

где $1 \le l \le m \le n+1$. Эти выражения оцениваются одинаково, поэтому ограничимся рассмотрением первого из них. Его вклад в M_2 обозначим через $M_2(m,l)$, тогда из (7.1) находим

$$M_2(m,l) = (-1)^m\sum_{q\le Q,\tilde{r}\backslash q}\varphi(q)^{-n-1}\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_{l+1})...C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\vec{h}_m)\times$$

$$\times C_q(\vec{h}_{m+1})...C_q(\vec{h}_{n+1})\sum_{\chi_1}...\sum_{\chi_l}C_{\bar{\chi}_1}(\vec{h}_1)...C_{\bar{\chi}_l}(\vec{h}_l)\times$$

$$\times\int_{R^n}...\int I_{\chi_1}(\vec{\eta}_1)...I_{\chi_l}(\vec{\eta}_l)\tilde{I}_{\chi_l}(\vec{\eta}_{l+1})...\tilde{I}_{\chi_l}(\vec{\eta}_m)I_{\chi_l}(\vec{\eta}_{m+1})...I_{\chi_l}(\vec{\eta}_{n+1})\,e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1...d\eta_n.$$

Интеграл по R^n обозначим через J, тогда в силу (2.4) и (6.1) имеем

$$J = \frac{N}{|\Delta_1|}\sum_{|\gamma_1|\le T}{}'...\sum_{|\gamma_l|\le T}{}'\int_D\prod_{j=1}^{l}(Nx_j)^{\rho_j-1}\prod_{j=l+1}^{m}(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}dx_1.$$

Следовательно,

$$M_2(m,e) = (-1)^n\frac{N}{|\Delta_1|}\int_D\prod_{j=l+1}^{m}(Nx_j)^{\beta-1}\left(\prod_{j=1}^{\ell}\sum_{r_j\le Q}\sum_{\chi_j(\mathrm{mod}\, r_j)}{}^*\right.$$

$$\left.\times\sum_{|\gamma_j|\le T}(Nx_j)^{\rho_j-1}\right)\sum_{q\le Q,[\tilde{r},r_1,...,r_l]\backslash q}\varphi(q)^{-n-1}Z(q;\bar{\chi}_1,...,\bar{\chi}_l,\tilde{\chi}_{l+1},...,\tilde{\chi}_m,\mathring{\chi}_{m+1},...,\mathring{\chi}_{n+1})dx_1,$$

где $\tilde{\chi}_{l+1} = .. = \tilde{\chi}_m = \tilde{\chi}$ и $\mathring{\chi}_{m+1} = .. = \mathring{\chi}_{n+1} = \chi_0$.

Так как $Nx_j \ge L > N^{1/2}$, то мы можем применять лемму 3.4.2 для оценки тройной суммы, стоящей в скобках, а лемму 3.5.3 с) для оценки последней суммы по q и тогда получим

$$M_2(l,m) << M_0(\omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2})^l << M_0(\omega^{n+1}\exp(-c_3\delta^{-1/2})).$$

Собирая вклад всех таких членов, получим утверждение леммы.

§8. Оценка исключительного множества задачи.

Покажем, что

$$I(\vec{b}) \ge I_1(\vec{b}) - |I_2(\vec{b})| > NQ^{-\frac{1}{10(n-1)}} \qquad (8.1)$$

за исключением не более чем

$$E(X) < X^{n-\delta/17n^3} \qquad (8.2)$$

значений $\vec{b} = (b_1,...,b_n) \in U(X)$. Отсюда, в силу обозначения (2.10), получим утверждение теоремы 1.

Рассмотрим следующие три случая:

1^0. Пусть $E_{\tilde{\beta}} = 0$. Тогда M_3 отсутствует и $\omega = 1$, поэтому из (7.2), леммы 3.7.1 и 3.7.4, при δ достаточно малом, находим

$$I_1(\vec{b}) > M_0(1 - c_{11}\exp(-c_3\delta^{-1/2})) - O(NQ^{-4/5}) > 0{,}01M_0 - O(NQ^{-4/5}),$$

за исключением не более, чем $E^{(2)}(X) < X^n Q^{-1}$ значений $\vec{b} \in U(X)$. Используя (7.4) получим

$$I_1(\vec{b}) > 0{,}01c_{12}\frac{N}{B^n Q^{\lambda_2}} - O\left(\frac{N}{Q^{4/5}}\right) > \frac{N}{Q^{\lambda_2+(n+1)\delta}},\ \lambda_2 = \frac{1}{16n(n+1)} \qquad (8.3)$$

за исключением не более, чем $E^{(2)}(X) + E^{(3)}(X) + E^{(4)}(X) << X^n Q^{-1} + X^{n-1} + X^n Q^{-\lambda_3}$ значений $\vec{b} \in U(X)$. Здесь $\lambda_3 = (16n(n+2))^{-1}$.

Следовательно, из (3.5) и (8.3) имеем

$$I(\vec{b}) > NQ^{-\lambda_2-(n+1)\delta} - NQ^{-\frac{1}{6(n-1)}} > NQ^{-\frac{1}{14n(n+1)}} \qquad (8.4)$$

за исключением не более, чем

$$E(X) = \sum_{1\le i\le 4} E^{(i)}(X) < X^{n-\delta/16n^3} \qquad (8.5)$$

значений $\vec{b} \in U(X)$.

2^0. Пусть $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $\tilde{r} \le Q^{\lambda_5}$, $\lambda_5 = (7(n^2-1))^{-1}$. Тогда, используя (7.24) и леммы 3.7.4 из (7.2), получим

$$I_1(\vec{b}) \ge \omega^{n+1}M_0(1 - c_{13}\exp(-c_3\delta^{-1/2})) - O(NQ^{-4/5+\lambda_3}). \qquad (8.6)$$

В силу (2.3) $\omega=(1-\tilde{\beta})\ln T >> Q^{-\lambda_5/2}(\ln Q)^{-1}$, поэтому, учитывая (7.4) из (8.6), при достаточно малом δ получим

$$I_1(\vec{b}) >> NQ^{-(\frac{1}{14(n-1)}+\frac{1}{16n(n+1)}+(n+1)\delta)}$$

и

$$I(\vec{b}) > NQ^{-(\frac{1}{14(n-1)}+\frac{1}{16n(n+1)}+(n+1)\delta)} - NQ^{-\frac{1}{6(n-1)}} > NQ^{-\frac{1}{10(n-1)}}, \qquad (8.7)$$

за исключением не более, чем

$$E(X) < X^{n-\delta/16n^3} \qquad (8.8)$$

значений $\vec{b}\in U(X)$.

3^0. Наконец, предположим, что $E_{\tilde{\beta}}=1$ и $\tilde{r}>Q^{\lambda_5}$, $\lambda_5=1/7(n^2-1)$. Применяя леммы 3.7.1, 3.7.4 и оценку (7.26) в правой части (7.2), а также учитывая, что $\omega\le c_1$ (см (2.3)) при достаточно малом δ находим

$$I_1(\vec{b}) >> NQ^{-\lambda_2-n\delta} > NQ^{-\lambda_2-(n+1)\delta}, \qquad (8.9)$$

где $\lambda_2=(16n(n+1))^{-1}$. Заметим, что оценка (8.9) справедлива для всех $\vec{b}\in U(X)$ за исключением не более, чем $\sum\limits_{i=2}^{5}E^{(i)}(X)$значений из них. Таким образом, из (8.9) и (3.5) в этом случае получим

$$I(\vec{b}) > NQ^{-\lambda_2-(n+1)\delta} - NQ^{-(6(n-1))^{-1}} > NQ^{-\frac{1}{14n(n+1)}}. \qquad (8.10)$$

Причем (8.10) выполняется для всех $\vec{b}=(b_1,...,b_n)\in U(X)$ за исключением

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}E^{(i)}(X) < X^{n-\delta/17n^3} \qquad (8.11)$$

из них. Из (8.4), (8.7) и (8.10) следует (8.1), а из (8.5), (8.8) и (8.11) получим (8.2). Таким образом, теорема доказана.

ГЛАВА IV
НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

§1. О представлении чисел суммой простого и фиксированного степени простого числа

1. Формулировка результатов. Пусть X - достаточно большое вещественное число, $k \geq 2$ - натуральное число, M - множество натуральных чисел $n \leq X$ непредставимых в виде
$$n = p_1 + p_2^k \qquad (1.1)$$
и удовлетворяющие условию
$$(n-1; \prod_{\substack{p \\ \varphi(p)\searrow k}} p) = 1, \qquad (1.2)$$
где p_1, p_2, p - простые числа, $\varphi(p)$ - функция Эйлера.

Недавно В.А.Плаксин [79,80], рассмотрев $E_k(X) = cardM$, доказал, что $E_k(X) \ll X^{\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$ всегда и $\gamma < 1-(137k^3 \ln k)^{-1}$ при достаточно большом. Затем, также итальянские математики А.Перелли и А.Заккагнини [130], предполагая верной обобщенную гипотезу Римана получили сравнительно точные результаты:
$$E_k(\mathrm{X}) \leq \mathrm{c}_3(\mathrm{k}, \varepsilon)\,\mathrm{X}^{1-\frac{2}{kK}+\varepsilon},$$
где $K = 2^{k-1}$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное малое действительное число (см. также [77,78,83]).
В настоящем параграфе улучшается результат В.А.Плаксина [80]. А именно доказана:

Теорема 4.1.1. *Для достаточно больших* X *справедлива оценка*
$$E_k(X) << X^{\gamma},$$
где
$$\gamma < \begin{cases} 1-(17774{,}983k^2(\ln k + 6{,}5452))^{-1} & \text{при} \quad 2 \leq k \leq 205; \\ 1-(68k^3(2\ln k + \ln\ln k + 2{,}8))^{-1} & \text{при} \quad k > 205; \\ 1-(137k^3 \ln k)^{-1} & \text{при} \quad \ln k > 628. \end{cases}$$
В частности из этой теоремы следует, что оценка $\gamma < 1-(137k^3 \ln k)^{-1}$, полученная В.А.Плаксиным [80] для достаточно больших k, остается справедливой при $\ln k > 628$. Используемый здесь метод дает возможность получить оценку снизу для $\bar{R}_k(n)$-числа представлений $n \notin M, n \leq X$ в виде (1.1)

$$\overline{R}_k(n) > c(k,\varepsilon)\frac{n^{(1-E_{\tilde\beta})/k}}{\ln^2 n}A(n), \qquad (1.3)$$

отличающейся от главного члена рассматриваемой проблемы на постоянный множитель, если не существует исключительный нуль $\tilde\beta$ ($E_{\tilde\beta}=0$) и на множитель $n^{-\varepsilon}$, если существует исключительный нуль $\tilde\beta$ ($E_{\tilde\beta}=1$) L - функции Дирихле. В (1.3) $A(n)$ ($c_5 < A(n) < c_6$) - сингулярный ряд задачи.

В частности из этой теоремы следует, что оценка $\gamma < 1-(137k^3\ln k)^{-1}$, полученный В.А.Плаксиным [79,80] для достаточно больших k остается справедливой при $\ln k > 628$.

Доказательство теоремы показывает, что значение γ существенно зависит не только от значений постоянных, участвующих в оценках границы области свободных от нулей L - функции Дирихле, которые используются в главных дугах, но и от оценки тригонометрических сумм по степеням простых чисел используемые в малых дугах. В связи с этим отметим, что если вместо $E_k(X)$ рассмотреть $E'_k(X)$ – количество натуральных чисел $n \le X$, непредставимых в виде $n = p + m^k$, то для $E_k(X)$ А.И.Виноградовым [49] была получена степенная оценка $E'_k(X) \le X^{\gamma}$. Вычисление с использованием метода настоящей работы с комбинацией теоремы 1.5 R.C.Vaughan'a [138] в малых дугах показывает, что в оценке $E'_k(X) \ll X^{\gamma}$ при k достаточно большом можно полагать $\gamma < 1-(ck^2\ln k)^{-1}$, где c - некоторая абсолютная постоянная. Таким образом, в этом случае значение γ существенно лучше чем оценке $E_k(X) << X^{\gamma}$.

Доказательство теоремы основывается на идеи работ [126,127,128] и на результаты работы [8,18,33].

Заметим, что условие (1.2) здесь возникает естественным образом [84].

Действительно, пусть p простое число с условием, что $\varphi(p)\backslash \mathrm{k}$, тогда $(p-1)\backslash \mathrm{k}$ и если $k=(p-1)\mathrm{k}_1$, то из разрешимости уравнения (1.1) следует разрешимость сравнения $n \equiv u+v^k \equiv u+1(\mathrm{mod p})$, $p \nmid uv$. Поскольку $v^k = v^{(\mathrm{p}-1)\mathrm{k}_1} \equiv 1^{\mathrm{k}_1} \equiv 1(\mathrm{mod p})$, $n-1 \equiv u+v^k-1 \equiv u(\mathrm{mod p})$. Отсюда получим (1.2).

2. Обозначение и деление единичного интервала. Пусть ε - произвольное малое положительное число, $X > X_{k,\varepsilon}$, $X_{k,\varepsilon}$ - достаточно большое положительное число, будем считать что $\varepsilon < 2/7k4^k$, $X = P^k$, $Q = X^{17\varepsilon}$, $\tau = XQ^{-1}$, $\Delta = \tau^{-1}$, $Z = Q^{0,3}$, $L = \ln X$, $l = \ln\ln X$; $c_1, c_2, \dots$ - эффективно вычислимые положительные постоянные, в худшем случае зависящие от ε, X, k. Постоянные в знаках << и O могут зависеть от $\varepsilon, k, X_{k,\varepsilon}$.

Далее, пусть

$$R(n) = k \sum_{\substack{p_1 + p_2^k = n \\ X/3 < p_1, p_2^k \le X}} \ln p_1 \cdot \ln p_2 \quad \text{и} \quad S_k(\alpha) = \sum_{X/3 < p^k \le X} \ln p e(\alpha p^k).$$

Тогда

$$R(n) = \int_{-\Delta}^{1-\Delta} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

Теперь на интервале интегрирования выделим множество M_1 больших и множество M_2 малых дуг обычным способом (см. напр. [59] гл. IX, §2.) для подобных задач. В рассматриваемом случае большая дуга - это $M_1(a,q) = (aq^{-1} - \Delta, aq^{-1} + \Delta)$, где $1 \le q \le Q$, $0 \le a < q$, $(a,q) = 1$. Поэтому

$$M_1 = \bigcup_{a,q} M_1(a,q)$$

и M_2 - множество тех α, для которых $-\Delta < \alpha < 1 - \Delta$ и $\alpha \notin M_1$. Таким образом, мы будем иметь

$$R(n) = R_1(n) + R_2(n), \tag{1.4}$$

где

$$R_1(n) = \int_{M_1} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha, \qquad R_2(n) = \int_{M_2} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \tag{1.5}$$

Ясно, что если $R(n) > 0$, то для n существует представление в виде (1.1) с условием (1.2).

3. Малые дуги. Покажем, что

$$\sum_{n \le X} R_2(n)^2 < XP^{2-5\varepsilon}. \tag{1.6}$$

Согласно тождеству Парсеваля имеем

$$\sum_{n \le X} R_2^2(n) = \int_{M_2} |S_1(\alpha) S_k(\alpha)|^2 \, d\alpha \le m_1^2 \cdot m_2. \tag{1.7}$$

Здесь
$$m_2=\int_0^1|S_1(\alpha)|^2\,d\alpha=\sum_{X/3<p\le X}\ln^2 p<0{,}7XL. \qquad (1.8)$$
Для $m_1=\max_{M_2}|S_k(\alpha)|$, используя теорему 7.1 [55] при $\rho_0=(2\ln k+\ln\ln k+2{,}8)^{-1}/17k^2$, $4\varepsilon\le\rho_0$, находим
$$m_1\le c_1P^{1-3\varepsilon}. \qquad (1.9)$$
Из (1.7), (1.8) и (1.9) получим
$$\sum_{n\le X}R_2^2(n)<0{,}7XLc_1^2P^{2-6\varepsilon}<XP^{2-5\varepsilon}.$$
Из (1.6) следует, что при $k\ge 2$ количество $n\le X$, для которого $|R_2(n)|>P^{1-2\varepsilon}$ не больше чем $E_k^{(1)}(X)<X^{1-\varepsilon/k}$. Таким образом
$$R_2(n)\le P^{1-2\varepsilon} \qquad (1.10)$$
для всех $n\le X$, за исключением не более чем $E_k^{(1)}(X)<X^{1-\varepsilon/k}$ значений n из них.

4. Большие дуги. Ясно, что в силу (1.5)
$$R_1(n)=\sum_{q\le Q}\sum_{a=1}^{q}\int_{-\Delta}^{\Delta}S_1\left(\frac{a}{q}+\eta\right)S_k\left(\frac{a}{q}+\eta\right)e\left(-\left(\frac{a}{q}+\eta\right)n\right)d\eta. \qquad (1.11)$$
Сначала несколько преобразуем $R_1(n)$. Для этого введем обозначения:
$$U_k(X,\eta)=k\sum_{X/3<p^k\le X}\chi(p)\ln p\,e(p^k\eta), \qquad (1.12)$$
$$T_k(\eta)=k\sum_{X/3<n^k\le X}e(n^k\eta) \quad \text{и} \quad \tilde{T}_k(\eta)=-k\sum_{X/3<n^k\le X}n^{\tilde{\beta}-1}e(n^k\eta).$$
Сумму $W_k(\chi,\eta)$ определим следующим образом
$$W_k(\chi_0,\eta)=U_k(\chi_0,\eta)-T_k(\eta),\ \ W_k(\tilde{\chi}\chi_0,\eta)=U_k(\tilde{\chi}\chi_0,\eta)-\tilde{T}_k(\eta) \quad \text{и}$$
$$W_k(\chi,\eta)=U_k(\chi,\eta) \ \ \text{если} \ \ \chi\ne\chi_0,\ \chi\ne\tilde{\chi}\chi_0.$$
Здесь χ – характер Дирихле по модулю q, χ_0 – главный характер по модулю q, $\tilde{\chi}$ – исключительный примитивный характер по модулю $\tilde{r}$, $\tilde{r}\,|\,q$. Далее пусть
$$F_k(\chi)=F_k(q,\chi,a)={\sum_{v=1}^{q}}'\chi(v)e\left(\frac{av^k}{q}\right).$$
Используя эти обозначения, находим
$$S_1(\alpha)=\frac{1}{\varphi(q)}\left\{F_1(\chi_0)T_1(\eta)+F_1(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{T}_1(\eta)+\sum_{\chi(mod q)}F_1(\chi)W_1(\chi,\eta)\right\}. \qquad (1.14)$$
Отметим, что здесь первые два члена являются главными членами, а третий - остаток. Если $E_{\tilde{\beta}}=0$ или $\tilde{r}\nmid q$, то в правой части (1.14)

следует опускать второй член. Так как для любого x, $|(\eta x^k)'|\le k|\eta|P^{k-1}\le kX^{17\varepsilon-\frac{1}{k}}<\frac{1}{2}$ при $X>X_{k,\varepsilon}$, $0<x\le P$, $\varepsilon<1/34k$. Как и в [87] (см. §3 работы [87]) при $P_1=\sqrt[k]{X/3}$ имеем

$$T_k(\eta)=\Gamma_k(\eta)+O(1),\ \ \tilde{T}_k(\eta)=\tilde{\Gamma}_k(\eta)+O(1).$$

Поэтому для $S_k(\alpha)$ подобно (1.14) в главных дугах имеет место представление

$$S_k(\alpha)=\frac{1}{\varphi(q)}\{F_k(\chi_0)\Gamma_k(\eta)+F_k(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{\Gamma}_k(\eta)+\sum_{\chi(mod q)}F_k(\bar{\chi})W_k(\chi,\eta)\}+O(1). \quad (1.15)$$

Здесь мы использовали оценку (см. (6), [79])

$$|F_k(p,\chi,a)|\le k\sqrt{p},\ \ p\not| a. \quad (1.16)$$

В (1.15) также первые два члена – главные члены, третий член остаток. Поскольку

$$O\left(\sum_{q\le Q}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{-\Delta}^{\Delta}\left|S_1\left(\frac{a}{q}+\eta\right)\right|d\eta\right)<<\Delta XQ^2<<X^{51\varepsilon},$$

то из (1.11) получим

$$R_1(n)=R_3(n)+R_4(n)+O(X^{51\varepsilon}), \quad (1.17)$$

где главный член (произведение главных членов в (1.14) и (1.15))

$$R_3(n)=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{-\Delta}^{\Delta}\{F_1(\chi_0)F_k(\chi_0)T_1(\eta)\Gamma_k(\eta)+$$
$$+F_1(\chi_0)F_k(\tilde{\chi}\chi_0)T_1(\eta)\tilde{\Gamma}_k(\eta)+F_1(\tilde{\chi}\chi_0)F_k(\chi_0)\tilde{T}_1(\eta)\Gamma_k(\eta)+$$
$$+F_1(\tilde{\chi}\chi_0)F_k(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{T}_1(\eta)\tilde{\Gamma}_k(\eta)\}e\left(-(\frac{a}{q}+\eta)n\right)d\eta=\sum_{i=1}^{n}R_3^{(i)}(n).$$

и остаток

$$R_4(n)=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{-\Delta}^{\Delta}\{F(\chi_0)T_1(\eta)\sum_{\chi(mod q)}F_k(\bar{\chi})W_k(\chi,\eta)+$$
$$+F_1(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{T}_1(\eta)\sum_{\chi(mod q)}F_k(\bar{\chi})W_k(\chi,\eta)+F_k(\chi_0)\Gamma_k(\eta)\sum_{\chi(mod q)}F_1(\bar{\chi})W_1(\chi,\eta)+$$
$$+F_k(\tilde{\chi}\chi_0)\tilde{\Gamma}_k(\eta)\sum_{\chi(mod q)}F_1(\bar{\chi})W_1(\chi,\eta)+\sum_{\chi_1(mod q)}F_1(\bar{\chi}_1)W_1(\chi_1,\eta)\times$$
$$\times\sum_{\chi_2(mod q)}F_k(\bar{\chi}_2)W_k(\chi_2,\eta)\}e\left(-(\frac{a}{q}+\eta)n\right)d\eta=\sum_{i=1}^{5}R_4^{(i)}(n).$$

Теперь приведем несколько лемм:

Лемма 4.1.1. *При* $0<\eta\le\frac{1}{2}$ *имеют место*

$$T_1(\eta),\tilde{T}_1(\eta)<<\min(X;\eta^{-1}),\qquad \Gamma_k(\eta),\tilde{\Gamma}_k(\eta)<<\min(P;\eta^{-1/k}).$$

Доказательство см. в [79].

Лемма 4.1.2. *Если* c_1 *и* c_2 *- подходящие положительные постоянные, то существует не более одного действительного примитивного характера* $\tilde{\chi}$ *по модулю* $\tilde{r} \le Z$*. для которого* $L(s,\tilde{\chi})$ *имеет вещественный нуль* $\tilde{\beta}$*, удовлетворяющий неравенству*

$$c_2(\tilde{r}^{1/2}\ln^2\tilde{r})^{-1} < 1-\tilde{\beta} < c_1(\ln Z)^{-1}, \text{ где } c_1 = 0{,}0019128;\ c_2 = 0{,}4961.$$

Эта есть теорема Пейджа об исключительном нуле $L(s,\chi)$ (см. гл. 14, [58]). По поводу численного значения постоянных см. работы [43,44].

Лемма 4.1.3. *Пусть* $\delta = \theta T^{-1}$, $0<\theta<1$ *и* $s(t) = \sum_{\mu} c(\mu)e(\mu t)$ – *абсолютно сходящийся тригонометрический ряд. Здесь* μ *- пробегает любую последовательность вещественных чисел и коэффициенты* $c(\mu)$ *- комплексные. Тогда*

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2\,dt \le c_3(\theta)\int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{-1}\sum_{x}^{x+\delta} c(\mu)|^2\,dx, \text{ где } \quad c_3(\theta) = \left\{\min(\frac{2}{\pi};\frac{(1-\theta)}{\pi\theta})\right\}^{-2}.$$

Лемма 4.1.4. *Пусть* $\kappa = (1+15\varepsilon_1)/115$, $0<\varepsilon_1<0{,}01$ *и* $\exp(\ln^{1/2}X) \le P \le X^{\kappa}$, $xP^{-1} \le h \le x$, *тогда для достаточно больших* X *и* P *справедливо неравенство*

$$\sum_{q\le P}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{x\le\frac{3}{2}X}\max_{h\le X/2}\left(h+\frac{X}{P}\right)^{-1}\left|\sum_{x}^{x+h}{}^{\#}\chi(p)\ln p\right| <$$

$$< \begin{cases} c_4\exp(-c_5\ln X/\ln P), & \text{если} \quad E_{\tilde{\beta}} = 0, \\ c_6\exp(-c_7\ln X/\ln P)(1-\tilde{\beta})\ln P, & \text{если} \quad E_{\tilde{\beta}} = 1, \end{cases} \qquad (1.18)$$

где $c_4 \le 2{,}002$; $c_5 \ge 95{,}64\cdot 10^{-5}$, $c_6 \le \exp(6{,}991466)$; $c_7 \ge 72{,}637\cdot 10^{-4}$ и $\Sigma^{\#}$ означает сумму, равную $\sum_{x}^{x+h}\ln p - \sum_{x<h<x+h} 1$ при $q=1$ и, в случае $E_{\tilde{\beta}}=1$, она равна $\sum_{x}^{x+h}\tilde{\chi}(p)\ln p + \sum_{\substack{x<n\le x+h\\ n>0}} n^{\tilde{\beta}-1}$.

Доказательство леммы 4.1.3 и 4.1.4 имеется в [3,4,6].

Далее, обозначим

$$G(q,\chi_1,\chi_2,n) = \sum_{a=1}^{q} F_1(\chi_1)F_k(\chi_2)e\left(-\frac{an}{q}\right), \qquad G(q,n) = G(q,\chi_0,\chi_0,n) \qquad (1.19)$$

и

$$\rho(q,\chi_1,\chi_2,n) = \sum_{\substack{u,v=1\\ u+v^k\equiv n(mod q)}}^{q} \chi_1(u)\chi_2(v), \quad \rho(q,n) = \rho(q,\chi_0,\chi_0,n),$$

$$\pi_r(n)=\sum_{d\diagdown r}\frac{G(d,n)}{\varphi(d)^2},\quad A_r(n,U)=\sum_{\substack{q\le U\\(q,r)=1}}\frac{G(q,n)}{\varphi^2(q)},\qquad A(n)=A_1(n,Q). \qquad (1.20)$$

Лемма 4.1.5. *Если* χ_1,χ_2 *- характеры по модулю* r*, индуцированные примитивными характерами по модулям* r_1,r_2 *соответственно,* $r=[r_1,r_2]$ *и* $\rho(r,n)>0$*, тогда*

$$\frac{G(r,\chi_1,\chi_2,n)}{\varphi^2(r)\pi_r(n)}=\frac{\rho(r,\chi_1,\chi_2,n)}{\rho(r,n)}\ll\frac{(n,r)}{r^{0,33}}.$$

Доказательство см. лемму 6 [79].

Лемма 4.1.6. *Если* U,r *- произвольные числа с условием* $Q^{0,7}\le U\le Qr^{-1}$*. Тогда для всех* $n\le X$*, за исключением* $\ll XQ^{-0,4}$ *значений* n *справедливо равенство* $A_r(n,U)\pi_r(n)=A(n)+O(Q^{-0,1})$.

Эта есть лемма 7 В.А.Плаксина [80].

Лемма 4.1.7. *Для всех* $n\le X$*, за исключением* $\ll X^{0,88}$ *значений* n *справедливо равенство* $A(n)=\sigma(n)+O(L^{-c_{10}})$*, где* c_{10} *– некоторое положительное постоянное и*

$$\sigma(n)=\prod_{p\le Y}\frac{p\cdot\rho(p,n)}{\varphi^2(p)},\ \ Y=X^{1/l\nu_1},\ \ \nu_1=10^{-5},\ \ l=\ln\ln X.$$

Заметим, что проделывая более аккуратные выкладки в лемме 4, оценку $\ll X^{0,99}$ из [79] можно заменить на $\ll X^{0,88}$.

4.1. Главный член. Согласно (1.17) главный член $R_3(n)$ является суммой четырех слагаемых, которые изучаются одинаково. Поэтому мы ограничимся с подробным рассмотрением одного из этих слагаемых. Например, $R_3^{(2)}(n)$ (в [79] подробно рассмотрен $R_3^{(3)}(n)$).

$$R_3^{(2)}(n)=\sum_{q\le Q,\tilde r\diagdown q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{a=1}^{q}F_1(\chi_0)F_k(\tilde\chi\chi_0)\int_{-\Delta}^{\Delta}T_1(\eta)\tilde\Gamma_k(\eta)e(-n\eta)d\eta=$$

$$=\frac{1}{\varphi^2(\tilde r)}G(\tilde r,\chi_0,\tilde\chi^*,n)A_{\tilde r}(n,Q\tilde r^{-1})\cdot I_3.$$

Здесь использовали мультипликативность $G(q,\chi_0,\tilde\chi^*\chi_0,n)$ и обозначение (1.20).

Рассмотрим I_3. Так как в силу леммы 1.1

$$\left|\int_{\Delta}^{1/2}T_1(\eta)\tilde\Gamma_k(\eta)e(-n\eta)d\eta\right|<<\tau^{1/k},\text{ то}$$

$$I_3 = \int_{-1/2}^{1/2} T_1(\eta)\tilde{\Gamma}_k(\eta)e(-n\eta)d\eta + O(\tau^{1/k}) = -\sum_{\substack{m+n_1=n \\ X/3<m,n_1\le X}} \frac{m^{(\tilde{\beta}-1)/k}}{m^{1-1/k}} + O(\tau^{1/k}) = J_3 + O(\tau^{1/k}).$$

Здесь $J_3 \ll P$. Таким образом, согласно леммам 4.1.5 и 4.1.6 находим, что

$$R_3^{(2)}(n) = \frac{G(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi}^*,n)}{\varphi^2(\tilde{r})\pi_{\tilde{r}}(n)}\Big(A(n)+O(Q^{-0,1})\Big)\Big\{J_3+O(\tau^{1/k})\Big\} =$$

$$= \frac{\rho(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi}^*,n)}{\rho(\tilde{r},n)}\Big(A(n)J_3 + O(A(n)\tau^{1/k} + J_3Q^{-0,1} + \tau^{1/k}Q^{-0,1})\Big).$$

Отсюда в силу леммы 4.1.7 и

$$L^{-k} << \sigma(n) << L^k, \quad \pi_r(n)A_r(n,Qr^{-1}) << L^k, r\le Q, \tag{1.21}$$

(см. следствие леммы 5 работы [80]), получим

$$R_3^{(2)}(n) = \frac{\rho(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi}^*,n)}{\rho(\tilde{r},n)}\Big(A(n)J_3 + O(P^{1-3,4\varepsilon})\Big).$$

Обращаясь аналогичным образом с остальными слагаемыми из (1.17), находим

$$R_3(n) = A(n)\left\{J_1 + \frac{\rho(\tilde{r},\tilde{\chi}^*,\chi_0,n)}{\rho(\tilde{r},n)}J_2 + \frac{\rho(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi}^*,n)}{\rho(\tilde{r},n)}J_3 + + \frac{\rho(\tilde{r},\tilde{\chi}^*,\tilde{\chi}^*,n)}{\rho(\tilde{r},n)}J_4\right\} +$$

$$O(P^{1-3,4\varepsilon}) + O\left(P^{1-3,4\varepsilon}\frac{(n,\tilde{r})}{\tilde{r}^{0,33}}\right) = = A(n)J + O(P^{1-3,4\varepsilon}) + O\left(P^{1-3,4\varepsilon}\frac{(n,\tilde{r})}{\tilde{r}^{0,33}}\right) \ (1.22)$$

для всех $n \le X$, за исключением $E_k^{(2)}(X) << X^{1-34\varepsilon/7}$ значений n из них. Здесь

$$J_1 = \sum_{n_1+m=n}\frac{1}{m^{1-1/k}}, \quad J_2 = -\sum_{n_1+m=n}\frac{n_1^{\tilde{\beta}-1}}{m^{1-1/k}}, \quad J_3 = -\sum_{n_1+m=n}\frac{m^{(\tilde{\beta}-1)/k}}{m^{1-1/k}}, \quad J_4 = \sum_{n_1+m=n}\frac{n_1^{\tilde{\beta}-1}m^{(\tilde{\beta}-1)/k}}{m^{1-1/k}}$$

и $X/3 < n_1, m \le X$, $X/2 < n \le X$. Нетрудно показать, что

$$J_i << P, \quad i = 1,2,3,4. \tag{1.23}$$

Например:

$$J_1 = \sum_{\substack{n=n_1+m \\ X/3<n_1,m\le X}} m^{-1+1/k} = \sum_{\substack{m=n-n_1 \\ X/3<m\le 2X/3}} m^{-1+1/k} \le P.$$

Рассмотрим J. В доказательстве теоремы мы полагаем, что $X/2 < n \le X$ и $k \ge 2$ поэтому справедливо неравенство $P/8 < J_1 \le P$. Следовательно, если $E_{\tilde{\beta}} = 1$, то, используя лемму 4.1.5 и (1.23) из (1.22), находим $J = J_1 + O\big(P\tilde{r}^{-0,33}(n,\tilde{r})\big)$. Таким образом, если $(n,\tilde{r}) \le \tilde{r}^{1/4}$, то

$$J = J_1 + O\left(\frac{P}{\tilde{r}^{0,08}}\right) \ge P\left(\frac{1}{8} + O(\tilde{r}^{-2/25})\right).$$

В силу леммы 4.1.2 $\tilde{r} \gg L^2 l^{-2}$. Поэтому при достаточно большом X отсюда получим $J \ge 0{,}12P$.

Пусть теперь $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $(n,\tilde{r}) > \tilde{r}^{1/4} \gg L^{1/4}$. Тогда, используя рассуждения приведенные в §6 [79], будем иметь:

при k - нечетном

$$J = J_1 + \frac{\rho(\tilde{r},\tilde{\chi}^*,\tilde{\chi}^*,n)}{\rho(\tilde{r},n)} J_4 \ge J_1 - J_4 = \sum_{\substack{n_1+m=n \\ X/3<n_1,m\le X}} \frac{1}{m^{1-1/k}} \times$$

$$\times \left\{1 - n^{\tilde{\beta}-1} \cdot m^{(\tilde{\beta}-1)/k}\right\} > J_1\{1 - Z^{\tilde{\beta}-1}\},$$

а при k - четном

$$J = J_1 + \frac{\rho(\tilde{r},\chi_0,\tilde{\chi}^*,n)}{\rho(\tilde{r},n)} J_3 \ge J_1 - J_3 > J_1\{1 - Z^{\tilde{\beta}-1}\}.$$

Поэтому, применяя теорему о среднем и лемму 4.1.2, убедимся, что

$$J_1 > J\frac{Z - Z^{\tilde{\beta}}}{Z} = J_1\frac{(1-\tilde{\beta})Z^{\theta}\ln Z}{Z} \ge \frac{1}{8}P(1-\tilde{\beta})Z^{\tilde{\beta}-1}\ln Z =$$

$$= \frac{1}{8}P((1-\tilde{\beta})\ln Z)e^{(\tilde{\beta}-1)\ln Z} \ge c_{11}P(1-\tilde{\beta})\ln Z,$$

где $c_{11} = 0{,}124$. Обозначим

$$c_{12} = \min\left(\frac{1}{8};\ 0{,}12;\ 0{,}124\right) = 0{,}12. \qquad (1.24)$$

Таким образом, из (1.22) находим

$$R_3(n) > \begin{cases} c_{12}A(n)P(1-\tilde{\beta})\ln Z + O(P^{1-3,5\varepsilon}), & \text{если } E_{\tilde{\beta}} = 1 \text{ и } (n,\tilde{r}) > \tilde{r}^{1/4}; \\ c_{12}A(n)P + O(P^{1-3,5\varepsilon}), & \text{в противном случае}. \end{cases} \qquad (1.25)$$

Согласно лемме 4.1.7 $A(n) > 0$ для всех $\frac{X}{2} < n \le X$, за исключением $<< X^{0,88}$ значений n. Следовательно, (1.25) справедливо для всех $n \le X$, за исключением $E_k^{(2)}(X) << X^{1-34\varepsilon/7}$ значений n из них.

4.2. Остаток. Теперь рассмотрим $R_4(n)$. Согласно (1.17) $R_4(n)$ является суммой пяти слагаемых. Нетрудно заметить, что $R_4^{(1)}(n)$ и $R_4^{(2)}(n)$, а также $R_4^{(3)}(n)$ и $R_4^{(4)}(n)$ дает одинаковый вклад в $R_4(n)$. Поэтому ограничимся рассмотрением $R_4^{(1)}(n)$, $R_4^{(3)}(n)$ и $R_4^{(5)}(n)$. Сначала рассмотрим $R_4^{(5)}(n)$, которое является более общим среди рассматриваемых $R_4^{(i)}(n)$. Имеем

$$R_4^{(5)}(n)=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi_1,\chi_2(modq)}\sum_{a=1}^{q}{}'F_1(\overline{\chi}_1)F_k(\overline{\chi}_2)e\left(-\frac{an}{q}\right)\times$$
$$\times\int_{-\Delta}^{\Delta}W_1(\chi_1,\eta)W_k(\chi_2,\eta)e(-n\eta)d\eta=\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi_1,\chi_2(modq)}G(q,\overline{\chi}_1,\overline{\chi}_2,n)I_5(\chi_1,\chi_2). \quad (1.26)$$

Пусть χ_s - характер по модулю q, индуцированный примитивным характером ξ_s по модулю r_s, $s=1,2$; $r=[r_1,r_2]$, $g=q\cdot r^{-1}$. Тогда $I_5(\chi_1,\chi_2)=I_5(\xi_1,\xi_2)$.

Обозначим
$$W_k(\chi)=\left(\int_{-\Delta}^{\Delta}|W_k(\chi,\eta)|^2\,d\eta\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \mathrm{W_k}=\sum_{r\le Q}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,r)}{}^{*}W_k(\chi). \qquad (1.27)$$

Используя пункты 3 и 4, $R_4^{(5)}(n)$ можем представить в виде
$$R_4^{(5)}(n)=\sum_{r\le Q}\sum_{[r_1,r_2]=r}\sum_{\xi_1}{}^{*}\sum_{\xi_2}{}^{*}G(r,\overline{\xi}_1\chi_0,n)\times$$
$$\times\varphi^{-2}(r)I_5(\xi_1,\xi_2)A_r(n,Qr^{-1}). \qquad (1.28)$$

Правую часть этого представления разобьем на две суммы: в первую сумму включаем все r с условием $r\le Z$, а вторую сумму все остальные r, т.е. $Z<r\le Q$. Таким образом
$$R_4^{(5)}(n)=R_5(n)+R_6(n).$$

Оценим $R_6(n)$
$$R_6(n)=\sum_{Z<r\le Q}\sum_{[r_1,r_2]=r}\sum_{\xi_1}{}^{*}\sum_{\xi_2}{}^{*}\frac{|G(r,\overline{\xi}_1\chi_0,\overline{\xi}_1\chi_0,n)|}{\varphi^2(r)\pi_r(n)}\times$$
$$\times W_1(\xi_1)W_k(\xi_2)\pi_r(n)\,|\,A_r(n,Q/r)\,|.$$

Отсюда в силу оценки (1.21), используя лемму 1.5, получим
$$|R_6(n)|\le lL^k\sum_{Z<r\le Q}\frac{(n,r)}{r^{0,33}}\sum_{[r_1,r_2]=r}\sum_{\xi_1}{}^{*}W_1(\xi_1)\sum_{\xi_2}{}^{*}W_2(\xi_2).$$

Обозначая правую часть этого соотношения через $Z(n)$, изучим среднее значение оценки $Z(n)$. Используя лемму 1.3 и оценки $\sum_{n\le X}(n,r)<X\tau(r)$ имеем
$$\sum_{n\le X}Z(n)<<XW_1W_kZ^{-0,3}<<\frac{X}{Z^{0,3}}\cdot X^{1/2}\cdot\frac{P}{X^{1/2}}<<XPZ^{-0,3}.$$

Отметим, что здесь мы использовали лемму 3.1.4 для оценки W_1 и W_k. Возможность применения этой леммы для оценки W_k будет показано в конце этого пункта.

Из полученной оценки следует, что для всех $n \le X$, за исключением $E_k^{(3)}(X) << X^{1-1,53\varepsilon+1,7\varepsilon/k}$ значений n, имеет место неравенство

$$Z(n) \le P^{1-1,7\varepsilon}, \ \ R_6(n) \ll P^{1-1,7\varepsilon}.$$

К каждому слагаемому суммы $R_5(n)$, в силу условий $r \le Z$ и $Q^{0,7} \le Qr^{-1}$, применимы леммы 4.1.5 и 4.1.6. Поэтому, если из множества $n \le X$, исключить $E_k^{(4)}(X) << X^{1-1,7\varepsilon}$ чисел, то для оставшихся n будет иметь место оценка $|R_5(n)| \le A(n)W_1W_k + O(PQ^{-0,1})$. Таким образом,

$$R_4^{(5)}(n) = A(n)W_1W_k + O(P^{1-1,7\varepsilon})$$

для всех $X/2 < n \le X$, за исключением $E_k^{(3)}(X) + E_k^{(4)}(X) << E_k^{(3)}(X)$ значений n.

Теперь рассмотрим $R_4^{(1)}(n)$. Имеем

$$R_4^{(1)}(n) = \sum_{q\le Q}\sum_{\chi(mod q)} \varphi^{-2}(q)G(q,\chi_0,\overline{\chi},n)I_1(\chi)$$

(сравните с (1.26)). Поэтому в этом случае, вместо (1.28) получим

$$R_4^{(1)}(n) = \sum_{r\le Q}\sum_{\xi(\operatorname{mod} r)}{}^{*} \varphi^2(q)G(q,\chi_0,\overline{\xi},n)I_1(\xi)A_r\left(n,\frac{Q}{r}\right).$$

Далее, оценивая также, как и в случае $R_4^{(5)}(n)$ и учитывая

$$|I_1(\chi)| \le W_k(\xi)\left(\int_{-1/2}^{1/2}|T_1(\eta)|^2\,d\eta\right)^{1/2} \le 3W_k(\chi)X^{1/2},$$

находим

$$|R_4^{(1)}(n)| < 3A(n)W_kX^{1/2} + O(P^{1-1,7\varepsilon}).$$

Так как

$$|I_3(\chi)| \le W_1(\chi)\left(\int_{-1/2}^{1/2}|\tilde{\Gamma}_k(\eta)|^2\,d\eta\right)^{1/2} < 3PX^{-1/2}W_1(X)$$

то, поступая с $R_4^{(3)}(n)$ совершенно аналогично, получим

$$|R_4^{(3)}(n)| < 3A(n)PX^{-1/2}W_1 + O\left(P^{1-1,7\varepsilon}\right).$$

Таким образом, собирая полученные оценки для $R_4^{(i)}(n)$ из (1.17), находим

$$R_4(n) < A(n)\left(6W_kX^{1/2} + 6W_1PX^{-1/2} + W_1W_k\right) + O(P^{1-1,7\varepsilon}). \qquad (1.29)$$

Суммы W_1, W_k в правой части (1.29) оценим при помощи лемм 4.1.3 и 4.1.4. Для W_k в силу (1.27) и (1.12), (1.13) имеем

$$W_k = \sum_{r\le Q}\sum_{\chi(\operatorname{mod} r)}{}^{*}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta}\left|k\sum_{X/3<p^k\le X}{}^{\#}\chi(p)\ln p e(p^k\eta)\right|^2 d\eta\right)^{1/2}.$$

Применим лемму 4.1.3 при $\delta=\frac{1}{2\Delta}$ и $\theta=\frac{1}{2}$, тогда получим

$$W_k \le \pi \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, r)}{}^{*} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| 2\Delta k \sum_{\substack{x<p^k\le x+\frac{1}{2\Delta} \\ X/3<p^k\le X}}{}^{\#} \chi(p)\ln p \right|^2 dx \right)^{1/2}. \qquad (1.30)$$

Отсюда

$$W_1 \le \pi \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, r)}{}^{\#} \left(\int_{X/3}^{X+\frac{1}{2\Delta}} \left| \Delta \sum_{\substack{x<p^k\le x+\frac{1}{2\Delta} \\ X/3<p^k\le X}}{}^{\#} \chi(p)\ln p \right|^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le 2{,}5671\pi X^{1/2} \sum_{r\le Q}\sum_{\chi}{}^{*} \left(\max_{x\le\frac{3}{2}X}\max_{h\le\frac{X}{2}} \left(h+\frac{X}{Q}\right)^{-1} \cdot \left| \sum_{x}^{x+h}{}^{\#} \chi(p)\ln p \right| \right).$$

Применение леммы 4.1.4 дает ($17\varepsilon<\kappa$)

$$W_1 < X^{1/2} \begin{cases} c_{13}\exp(-c_5/17\varepsilon), & \text{если} \quad E_{\tilde\beta}=0, \\ \tilde c_{13}\exp(-c_5/17\varepsilon)(1-\tilde\beta)\ln Z, & \text{если} \quad E_{\tilde\beta}=1, \end{cases} \qquad (1.31)$$

где $c_{13}=5{,}1392$; $\tilde c_{13}=2791{,}157.$

При $k>1$, учитывая, что при $1<\theta<2$

$$(x+\frac{1}{2\Delta})^{1/k} = x^{1/k}(1+\frac{\theta}{2k\Delta x}) \le x^{1/k}(1+\frac{1}{k\Delta k}) = x^{1/k}+\frac{x^{1/k}}{k\Delta x}$$

и обозначая $y=x^{1/k}$ и $h_1=\dfrac{x^{1/k}}{k\Delta x}$, из (1.30) находим

$$W_k \le k\pi \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, r)}{}^{*} \left(\int_{X/3}^{X+\frac{1}{2\Delta}} \left| \Delta \sum_{x<p^k<x+\frac{1}{2\Delta}}{}^{\#} \chi(p)\ln p \right|^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le 2{,}5671kX^{1/2} \sum_{r\le Q} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, r)}{}^{*} \max_{y\le\frac{3}{2}P}\max_{h_1\le\frac{1}{2}P} \left| \frac{P}{Xh_1} \sum_{y}^{y+h} \chi(p)\ln p \right|,$$

(здесь $\varepsilon\le 1/17k$). Теперь применим лемму 4.1.4 при $P=Q$ и $X=P$, тогда

$$W_k < \frac{P}{X^{1/2}} \begin{cases} c_{13}\exp(-c_5/17\varepsilon k), & \text{если} \quad E_{\tilde\beta}=0, \\ \tilde c_{13}\exp(-c_7/17\varepsilon k)(1-\tilde\beta)\ln Z, & \text{если} \quad E_{\tilde\beta}=1, \end{cases} \qquad (1.32)$$

где $c_{13}=c_{13}k,\ \tilde c_{13}=\tilde c_{13}k$ и $17\varepsilon k<\kappa$.

В силу (1.31) и (1.32) из (1.29) получим, если $E_{\tilde\beta}=0$

$$R_4(n) < c_{14}A(n)P\exp(-c_5/17\varepsilon k) + O(P^{1-1,7\varepsilon}), \qquad (1.33)$$

где $c_{14} = 135,75318$ при $k = 2$, $c_{14} = 178,87091$ при $k = 3$ и $c_{14} = 48,91k + 25,0196$ при $k \geq 4$.

Если $E_{\tilde{\beta}} = 1$, то

$$R_4(n) < \tilde{c}_{14}A(n)P\exp(-c_7/17\varepsilon k)(1-\tilde{\beta})\ln Z + O(P^{1-1,7\varepsilon}), \qquad (1.34)$$

где

$$\tilde{c}_{14} = e^{9,726}(ke^{0,191}+1) = e^{9,726}(1,2105k+1),\ k \geq 2.$$

5. Доказательство теоремы. У нас $17\varepsilon < \kappa k^{-1} = 1,01/115k$ или $\varepsilon < 1,01/1955k$. Если $E_{\tilde{\beta}} = 0$, то для почти всех $n \leq X$ (за исключением $\ll E_k^{(1)}(X)$ значений) согласно (1.17), (1.25) и (1.33), имеем

$$R_1(n) > A(n)P\{(c_{12} - c_{14}\exp(-c_5/17\varepsilon k)) + O(P^{-3,5\varepsilon}L^k +$$

$$+L^kP^{-1,7\varepsilon} + P^{51k\varepsilon-1}L^k)\} \geq 0,01A(n)P \gg PL^{-k} > P^{1-\varepsilon}, \qquad (1.35)$$

где

$$\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \frac{c_5}{17k\ln\dfrac{10c_{14}}{9c_{12}}}, \qquad (1.36)$$

$$17\varepsilon_2 = (1045,5876k(\ln k + 6,5452))^{-1}, k \geq 2.$$

Если $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $(n,\tilde{r}) \leq \tilde{r}^{0,3}$, то в силу (1.17), (1.25), (1.34) для почти всех $n \leq X$, $X/2 < n \leq X$ (за исключением $\ll E_k^{(1)}(X)$ значений n) снова имеем (1.35) с

$$\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \frac{c_7}{17k\ln\dfrac{10c_{15}}{9c_{12}}}, \qquad (1.37)$$

где $c_{15} = c_1 \cdot \tilde{c}_{14}$, $17\varepsilon_3 = (137,67088k(\ln k + 6,75183))^{-1}$, $k \geq 2$.

Пусть теперь $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $(n,\tilde{r}) > \tilde{r}^{0,3}$, тогда исключаем те n, для которых $\tilde{r} > P^{2\varepsilon}$. Количество исключаемых n, $X/2 < n \leq X$, в этом случае есть

$$E_k^{(4)}(X) \ll \sum_{n \leq X}(n,\tilde{r})\tilde{r}^{-0,3} < X\frac{\tau(n)\tau(\tilde{r})}{\tilde{r}^{0,3}} \ll XP^{-0,5\varepsilon}.$$

Для оставшихся n, модуль $\tilde{r}$ будет малым, то есть $\tilde{r} \leq P^{2\varepsilon} < Z$. Следовательно,

$$R_1(n) > 0,1c_{12}PA(n)(1-\tilde{\beta})\ln Z + O(P^{1-1,7\varepsilon}),$$

для всех n, $X/2 < n \leq X$, за исключением $E_k(X) \ll X^{\gamma}$ значений n, $n \leq X$, где

$$\varepsilon \le \varepsilon_4 = \frac{c_7}{17k \ln \frac{10\tilde{c}_{14}}{9c_{12}}} \qquad (1.38)$$

и $17\varepsilon_4 = (137{,}67088k(\ln k + 13{,}181599))^{-1}, \ k \ge 2$.

В силу леммы 4.1.2 $(1-\tilde{\beta})\ln Z > c_2(4\varepsilon P^{\varepsilon} \ln^2 P)^{-1}$. Поэтому

$$R_1(n) > c_{16}P^{1-\varepsilon}A(n)L^{-2} + O(P^{1-1{,}7\varepsilon}) > c_{17}P^{1-\varepsilon}L^{-k-2} + O(P^{1-1{,}7\varepsilon}) > c_{18}P^{1-1{,}5\varepsilon} > P^{1-1{,}6\varepsilon} \qquad (1.39)$$

для всех $n \le X$, за исключением $E_k(X) \ll X^{1-\varepsilon/k}$ значений n из них. Положим $\varepsilon = \min(\frac{\kappa}{17k}, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, тогда в силу (1.36), (1.37) и (1.38) получим $\varepsilon = \varepsilon_2$. Теперь из (1.35), (1.39) и (1.10) получим утверждение сформулированной теоремы.

Отметим, что $\frac{\rho_0}{4} < \varepsilon_2$ при $k > 205$, а также $(137k^3 \ln k)^{-1} < \frac{\rho_0}{4} < \varepsilon_2$ при $\ln k > 628$, то есть если $2 \le k \le 205$, то $\gamma = 1 - \frac{\varepsilon_2}{k}$, если же $k > 205$, то $\gamma = 1 - \frac{\rho_0}{4}$ и в частности если $k > e^{628}$, то можно полагать $\gamma = 1 - \frac{1}{137k^3 \ln k}$.

В заключении также отметим, что

$$\bar{R}(n) > \frac{1}{\ln^2 n} R(n) \ge \frac{1}{\ln^2 n}(R_1(n) - |R_2(n)|).$$

Поэтому из (1.10), (1.35) и (1.39) следует (1.3).

§ 2. О представлений чисел суммой простого и фиксированного степени простого числа из арифметической прогрессии.

Пусть X —достаточно большое действительное число, M – множество натуральных чисел $n \le X$, которое непредставимые в виде суммы простого числа и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии с разностью D и пусть $E_k(D,X)$ – количество $n, n \le X$, которые возможно непредставимо в виде $n = p_1 + p_2^k$, где $p_1 \equiv l(\mathrm{mod}\, D), p_2 \equiv l(\mathrm{mod}\, D)$ и n удовлетворяет условие (1.2).

Теорема 4.2.1. Если $1 \le D \le \ln^A X$, то $E_k(D,X) << X^{\gamma}/\varphi(D)$, где

$$\gamma < \begin{cases} 99999{,}8212 \cdot 10^{-5}\ \text{, при } k = 2; \\ 99999{,}9263 \cdot 10^{-5}\ \text{, при } k = 3; \\ 1 - \left(261{,}3963 k^2 4^k \left(lnk + 6{,}9313\right)\right)^{-1}\ \text{, при } 4 \le k \le e^{503}; \\ 1 - \left(265 k^2 4^k lnk\right)^{-1}\ \text{, при } lnk > 503. \end{cases}$$

Отметим что, теорема 4.1.1 является усилением (уточнением) теоремы Плаксина В.А., а теорема 2.1 является обобщением на арифметическую прогрессию с разностью $D << \ln^A X$, где $A > 0$ – некоторое действительное

Доказательство теоремы см.[99,100].

§3. О паре линейных уравнений с тремя простыми переменными.

Пусть a_{ij} $(i = 1,2; j = 1,2,3)$, b_1, b_2 - числа и p_1, p_2, p_3 – простые числа. Рассмотрим вопрос о разрешимости системы

$$b_i = a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + a_{i3} p_3,\ i = 1,2 \qquad (3.1)$$

при условии:

a) для любого простого p существует такие целые числа l_1, l_2, l_3 с условиями $1 \le l_1, l_2, l_3 \le p - 1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений:

$$a_{i1} l_1 + a_{i2} l_2 + a_{i3} l_3 \equiv b_i (modp),\ i = 1,2;$$

b) существуют такие действительные положительные числа y_1, y_2, y_3, для которых выполняется равенства

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3 = b_i,\ i = 1,2.$$

Обозначим $B = 3\max |a_{ij}|,\ i = 1,2;\ j = 1,2,3$. Пусть $U(X)$ - множество пар $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $1 \le b_1, b_2 \le X$, которые удовлетворяют условиям а) и b). $E(X)$ - количество $\vec{b} = (b_1, b_2) \in U(X)$, которые нельзя представить в виде (3.1).

В [126] доказано, что

1) если для некоторых положительных вещественных чисел y_1, y_2, y_3 выполняются условия

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} y_j > 0,\ i = 1,2, \qquad (3.2)$$

то для достаточно больших X имеем

$$cardU(X) >> X^2 (B^2 \ln\ln B)^{-2};$$

2) $E(X) < X^{2-\varepsilon}$, при $X > B^A$, где A (достаточно большое) и $\varepsilon > 0$

(достаточно малое) абсолютные эффективно вычисляемые постоянные.

В этом параграфе улучшены сформулированные выше результаты работы [126], а именно доказана [6,22]:

Теорема 4.3.1 *Если* X *- достаточно большое вещественное число и для некоторых положительных вещественных чисел* y_1, y_2, y_3 *выполняются условия (3.2), то*

$$card U(X) > X^2 B^{-4}(42{,}4246(\ln\ln B + 1{,}8)^2)^{-1} \qquad (3.3)$$

и

$$E(X) < X^{\gamma},\ \gamma < 1{,}9999833. \qquad (3.4)$$

Далее, пусть a_1, a_2 взаимно простые целые числа, которые одновременно не являются отрицательными и $E_1(X)$ - количество натуральных чисел $n \le X$ с условием $(n, a_1 a_2) = 1$, $n \equiv a_1 + a_2 (mod 2)$, $n \ne a_1 p_1 + a_2 p_2$. Тогда, используя оценку (3.4) можно доказать:

Следствие. Для достаточно больших X

$$E_1(X) < X^{\gamma},\ \gamma < 0{,}9999834. \qquad (3.5)$$

Отметим, что оценка типа (3.5) в частном случае при $a_1 = a_2 = 1$ (для исключительного множества в бинарной проблеме Гольдбаха) были получены в работах [8,106], соответственно с правой частью $O(X^{0,99})$ и $X^{0,982}$, но в данной работе постановка задачи более общая.

Условия a) и b) соответствует условиям разрешимости сравнений (конгруент разрешимости и положительной разрешимости) в проблеме Тарри (см. гл. 5 [46]).

Оценка (3.3) показывает, что количество пар $\vec{b} = (b_1, b_2),\ 1 \le b_1,\ b_2 \le X$, не удовлетворяющих хотя бы одному из условий a) и b), сравнительно мало. Подходящий выбор значений параметров при доказательстве оценки (3.4) позволяет нам значительно улучшить численное значение γ по сравнению с его значением вычисленным непосредственно по работе [126]. В частности здесь удалось заменить множитель $\exp(-c_3 \delta^{-1/2})$ на $\exp(-c_3 \delta^{-1})$ (см. ниже лемму 4.3.2).

При доказательстве теоремы используется схема доказательства результатов работы [126] и численные результаты автора [3,4,5] относительно границ области свободных от нулей L - функций Дирихле.

1. Доказательство оценки (3.3). В силу определения $U(X)$

количество пар $(b_1,b_2)\in U(X)$ определяется условиями a) и b). Пусть

$$d_{ij}=det\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix},\quad 1\le i,j\le 3. \qquad (3.6)$$

Чтобы избежать тривиальности и вырожденности будем предполагать, что

$$d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\ne 0 \text{ и } (d_{12},d_{13},d_{23})=1. \qquad (3.7)$$

Далее, положим $m=6p_1p_2...p_uq_1q_2...q_v$, где $p_i,q_j\ge 5$ простые числа с условием, что p_j делит только один из d_{12},d_{13},d_{23}, q_j делит только два из d_{12},d_{13},d_{23}. Тогда $m\le 6|d_{12}d_{13}d_{23}|\le 16\frac{B^3}{243}$, поскольку $d_{ij}\le\frac{2B^3}{9}$. Согласно (3) и (5) работы [126] для N_1 - количества пар $b_1,b_2(modm)$ удовлетворяющих условию a) имеем

$$N_1\ge\prod_{j=1}^{u}p_j\varphi(p_j)\prod_{j=1}^{v}\varphi^2(q_j). \qquad (3.8)$$

Теперь покажем, что для фиксированной пары (b_1,b_2), удовлетворяющей условию a) в квадрате $[1,m]^2$ при $B\le X^{\varepsilon}$, $0<\varepsilon<-0{,}01$ существуют N_2,

$$N_2>10{,}124X^2(B^2m)^{-2}, \qquad (3.9)$$

пар z_1,z_2, удовлетворяющих условиям

$$1\le z_i\le X,\ z_i\equiv b_i(modm),\ \sum_{j=1}^{3}a_{ij}y_j=z_i,\ i=1,2 \qquad (3.10)$$

для некоторых положительных вещественных чисел y_1,y_2,y_3. В самом деле, N_2 определяется количеством пар z_1,z_2 удовлетворяющих условиям

$$1\le z_i\le X,\ z_i\equiv b_i(modm),\ i=1,2 \text{ и } u_1<z_1^{-1}z_2<u_2, \qquad (3.11)$$

где $0\le u_1\le B$, $B\ge u_2-u_1\ge B^{-2}$ (см. стр. 114, 115 работы [126]). Последние условия относительно u_1,u_2 можно заменить условиями

$$0\le u_1\le\frac{B}{3} \text{ и } \frac{B}{3}\ge u_2-u_1\ge 9B^{-2}. \qquad (3.12)$$

Фиксируя $z_1\equiv b_1(modm)$, подсчитаем N_2 - количество z_2 с условием (3.11). Из последних двух условий (3.11) имеем $u_1z_1<b_2+mt<u_2z_1$. Поэтому количество t и, следовательно, количество z_2 с этими условиями не менее, чем $m^{-1}(u_2-u_1)z_1-1$. С другой стороны количество z_2, удовлетворяющих условиям $u_1z_1\le z_2\le X$, $z_2\equiv b_2(modm)$

также $\geq m^{-1}(X-u_1z_1)-1$. Поэтому

$$N_2^{'} \geq \frac{1}{m}\min\{z_1(u_2-u_1);\ X-z_1u_1\}-1.$$

Здесь $z_1(u_2-u_1)\leq X-z_1u_1$, если $z_1\leq Xu_2^{-1}$. Так как в силу (3.12)

$$u_2\leq u_1+\frac{B}{3}\leq\frac{2}{3}B,$$

то, полагая $z_1\leq\frac{3X}{2B}$ $(\leq X/2)$, находим

$$N_2^{'}\geq\frac{1}{m}z_1(u_2-u_1)-1\geq\frac{9z_1}{mB^2}-1.$$

Следовательно, учитывая, что $b_1\leq m\leq\frac{16B^6}{243}$ и $B\leq X^{\varepsilon}$, отсюда получим

$$N_2\geq\frac{9}{mB^2}\sum_{\substack{1\leq z_1\leq\frac{3X}{2B}\\ z_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\,m)}} z_1-\frac{3X}{2mB}>10{,}124X^2(mB^2)^{-2}.$$

Таким образом, из (3.8) и (3.9) находим

$$cardU(X)>10{,}124\frac{X^2}{B^4m^2}p_1p_2\ldots p_u\varphi(p_1\ldots p_uq_1\ldots q_v)\varphi(q_1\ldots q_v). \qquad (3.13)$$

Пусть $n\geq3$ – натуральное число и $\gamma_0=0{,}577215...$ - постоянная Эйлера, тогда

$$\frac{n}{\varphi(n)}<e^{\gamma_0}\ln\ln n+\frac{2{,}507}{\ln\ln n} \qquad (3.14)$$

(см. [134]). Используя (3.14) и $\ln\ln m<\ln 6+\ln\ln B$, из (3.13) получим

$$cardU(X)>X^2(42{,}42453B^4(\ln\ln B+\ln 6)^2)^{-1}.$$

Отсюда сразу следует справедливость оценки (2.3).

2. Доказательство оценки (3.4). Положим

$$\left.\begin{aligned} X\geq B^{\exp(10\delta^{-2})},\qquad N=18B^3X,\\ Q=N^{\delta},L=NQ^{-c_1},\qquad T=Q^{c_2},\end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

где $c_1=\frac{1}{6}+0{,}1\delta$, $c_2=\frac{100}{3}+4\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$. Из (2.15) следует, что

$$B<Q^{0{,}1\delta}. \qquad (3.16)$$

В дальнейшем будем использовать следующие леммы о нулях L - функции Дирихле.

Лемма 4.3.1. *Если χ – характер Дирихле по модулю $q\leq Q$ и $L(s,\chi)$ соответствующая L - функция Дирихле, то:*

а) функции $L(s,\chi)$, $s=\sigma+it$ в области

$$\sigma\geq1-0{,}0109986((1+c_2^{-1})\ln T)^{-1},\ |t|\leq T \qquad (3.17)$$

могут иметь единственный вещественный нуль $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$ *для одного вещественного примитивного характера* $\tilde{\chi}$ *по модулю* $\tilde{r}\le Q$*;*

б) если $L(s,\chi)$ *имеет такой (исключительный) нуль, то область (3.17) можно заменить на область*

$$\sigma > 1-\frac{1}{81\ln Q}\ln\left(\frac{1}{200\tilde{\sigma}\ln Q}\right),\ |t|\le Q^{\varepsilon},\ \tilde{\delta}\ln Q\le\frac{1}{200e}; \qquad (3.18)$$

в) этот исключительный нуль удовлетворяет неравенствам

$$0{,}4961\tilde{r}^{-1/2}\ln^{-2}\tilde{r} < 1-\tilde{\beta} < 0{,}3\ln^{-1}\tilde{r}. \qquad (3.19)$$

Эта по сути известная теорема о нулях L - функции. По поводу численных значений постоянных см. [5,8]. Отметим только, что при доказательстве утверждения а) необходимо использовать условие $q\le Q$, $|t|\le T$ вместо $q_1\le P,\ |t|\le P^{19/4}$, использованных нами в [5].

Пусть $\omega=(1-\tilde{\beta})\ln T$ и $\sum\limits_{\chi(\operatorname{mod} q)}{}^{*}$ $\sum\limits_{|\gamma|<T}{}'$ – соответственно означают суммирования по всем примитивным характерам и по всем нулям $\rho=\beta+i\gamma$ в прямоугольнике $\frac{1}{2}\le\beta\le 1-0{,}0109986((1+c_2^{-1})\ln T)^{-1},\ |\gamma|\le T$.

Используя эти обозначения, сформулируем еще одну лемму.

Лемма 4.3.2. *Для любого действительного* y *и малого* $\delta>0$ *при* $N>y\ge L$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{q\le Q}\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}{}^{*}\sum_{|\gamma|\le T}{}' y^{\beta-1} < \begin{cases} c_3\exp(-c_4\delta^{-1}), & \text{если } E_{\beta}=0;\\ c_5\omega^3\exp(-c_6\delta^{-1}), & \text{если } \mathrm{E}_{\beta}=1,\end{cases} \qquad (3.20)$$

где $c_3=1{,}333734;\ c_4=2{,}4026066;\ c_5=5793{,}5692;\ c_6=1/108$.

Доказательство. Обозначим левую часть неравенства (3.20) через S. Тогда в силу леммы 3.1 S можем представить в виде (см. [115])

$$S=\int_{1/2}^{1-\eta} y^{\alpha-1}(\ln y)\sum_{q\le Q}\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}{}^{*}N_{\chi}(\alpha,T)\,d\alpha+y^{-1}\sum_{q\le Q}\sum_{\chi}{}^{*}N_{\chi}\left(\frac{1}{2},T\right), \qquad (3.21)$$

где $N_{\chi}(\alpha,T)$ - число нулей $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в области $\alpha\le\beta\le 1$, $|\gamma|\le T$; $1-\eta$ - означает правую часть неравенства (3.17) или (3.18) смотря $E_{\tilde{\beta}}=0$ или $E_{\tilde{\beta}}=1$.

Далее, будем использовать плотностную оценку M.Jutila [125] в варианте J.R.Chen'а [106]. Согласно лемме 4 [106], если $\varepsilon>0$ – произвольное действительное число и $T\ge y^{2\varepsilon}$, то

$$\sum_{q\le Q}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\, q)} N_\chi(\alpha,T) < \begin{cases} (T^3 y^{-2\varepsilon})^{2(1-\alpha)}, & \text{если } \alpha \ge 1-\varepsilon; \\ (T^3 y^{-2\varepsilon})^{4(1-\alpha)}, & \text{если } 0<\alpha<1-\varepsilon. \end{cases} \qquad (3.22)$$

У нас $T=Q^{c_2}$ и $N \ge y \le L = N^{1-c_1\delta}$. Из условие $T \ge y^{2\varepsilon}$ следует $N^{c_2\delta} \ge y^{2\varepsilon}$. Отсюда $N^{c_2\delta} \ge N^{2\varepsilon} \ge y^{2\varepsilon} \ge N^{2\varepsilon(1-c_1\delta)}$. Так, что если $\varepsilon \le c_2\delta/2$, то условие $T \ge y^{2\varepsilon}$ выполняется и можем использовать (3.22). Положим $T^{12}y^{-8\varepsilon} \le y^{1/4}$. Тогда

$$\delta \le \frac{1+32\varepsilon}{48c_2 + c_1(1+32\varepsilon)} = \delta(\varepsilon),$$

то есть последнее условие выполняется, если $\delta < \delta(\varepsilon)$. Используя (2.22) из (2.21), находим

$$S = \int_{1/2}^{1-\eta} y^{\frac{3}{4}(\alpha-1)} \ln y d\alpha + y^{\frac{1}{8}-1} < \frac{4}{3} y^{-\frac{3}{4}\eta}.$$

Следовательно, если $E_{\tilde\beta}=0$, то

$$S < \frac{4}{3}\exp(-\frac{3}{4}\eta \ln y) = \frac{4}{3}\exp\left(-\frac{3}{4}\frac{109{,}986 \ln y}{10^4(1+c_2^{-1})\ln T}\right) \le$$

$$\le \frac{4}{3}\exp\left(-\frac{3}{4}\frac{109{,}986 \ln L}{10^4(1+c_2^{-1})c_2\delta \ln N}\right) = \frac{4}{3}\exp\left(-\frac{3}{4}\frac{109{,}986(1-c_1\delta)}{10^4(1+c_2^{-1})c_2\delta}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\exp\left(\frac{3}{4}\frac{109{,}986 c_1}{10^4(c_2+1)}\right)\exp\left(-\frac{3}{4}\frac{109{,}986}{10^4(c_2+1)\delta}\right) = c_3\exp(-c_4\delta^{-1}), \qquad (3.23)$$

где

$$c_3 = \frac{4}{3}\exp\left(\frac{3}{4}\frac{109{,}986 c_1}{10^4(c_2+1)}\right); \quad c_4 = \frac{3\cdot 109{,}986}{4\cdot 10^4(c_2+1)}.$$

Пусть теперь $E_{\tilde\beta}=1$, тогда

$$S < \frac{4}{3}\exp\left(-\frac{3c_2 \ln y}{4\cdot 81 \ln T}\ln\left(\frac{c_2}{200\tilde\delta \ln T}\right)\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{200\tilde\delta \ln T}{c_2}\right)^{\frac{c_2 \ln y}{108 \ln T}}$$

$$= \frac{4}{3}\omega^3\left(\frac{200}{c_2}\right)^{\frac{c_2 \ln y}{108 \ln T}} \cdot \left(\tilde\delta \ln T\right)^{\frac{c_2 \ln y}{108 \ln T}-3}.$$

Если $\delta < (324+c_2)^{-1}$, то

$$3 - \frac{c_2 \ln y}{108 \ln T} < 3 - \frac{c_2(1-c_1\delta)}{108 c_2 \delta} = 3 - \frac{1}{108\delta} + \frac{c_1}{108} < 0.$$

Поэтому

$$\left(\tilde{\delta}\ln T\right)^{\frac{c_2\ln y}{108\ln T}-3}=\left(\frac{1}{\tilde{\delta}\ln T}\right)^{3-\frac{c_2\ln y}{108\ln T}}\leq\left(\frac{200e}{c_2}\right)^{3-\frac{c_2\ln y}{108\ln T}}$$

и следовательно

$$S<\frac{4}{3}\left(\frac{200e}{c_2}\right)^3\exp(\frac{c_1}{108})\exp(-\frac{1}{108\delta})\omega^3=c_5\exp(-c_6\delta^{-1})\cdot\omega^3, \qquad (3.24)$$

где

$$c_5=\frac{4}{3}\left(\frac{200e}{c_2}\right)^3\exp(\frac{c_1}{108});\;\; c_6=\frac{1}{108}.$$

Из (3.23) и (3.24) следует утверждение леммы 4.3.2.

Отметим, что если $E_{\tilde{\beta}}=1$ и $\tilde{r}\leq Q^{\lambda}$, $(0<\lambda<1)$, то

$$\eta=\frac{1}{81\lambda\ln Q}\ln\left(\frac{1}{200\lambda\tilde{\delta}\ln Q}\right),\; |t|\leq Q^{\varepsilon}, \qquad \tilde{\delta}\ln Q\leq(200\lambda e)^{-1}$$

и поэтому

$$S<\frac{4}{3}\exp\left(-\frac{c_2}{108\lambda}\frac{\ln y}{\ln T}\ln\left(\frac{c_2}{200\lambda\tilde{\delta}\ln T}\right)\right)<$$

$$<\frac{4}{3}\left(\frac{200\lambda e}{c_2}\right)^3\exp\left(\frac{c_1}{108\lambda}\right)\exp\left(-\frac{1}{108\lambda\delta}\right)\omega^3<c_7\exp(-c_8\delta^{-1})\omega^3. \qquad (3.24')$$

где

$$c_7=\frac{4}{3}\left(\frac{200\lambda e}{c_2}\right)^3\exp\left(\frac{c_1}{108\lambda}\right),\;\; c_8=\frac{1}{108\lambda}.$$

В частности, при $\lambda=\frac{1}{8}$ отсюда получим $c_7=11{,}438538$, $c_8=2/27$.

3.1. Обозначения и оценка в дополнительных интервалах. Пусть $\tau=N^{-1}T^{1/4}$,

$$S(\alpha)=\sum_{L<p<N}\ln p e(p\alpha) \text{ и } I(\vec{b})=\sum_{p_1,p_2,p_3}\ln p_1\ln p_2\ln p_3.$$

Суммирование в правой части последнего равенства ведется по всем простым числам с условиями

$$L<p_1,p_2p_3\leq N,\;\; \sum_{1\leq j\leq 3}a_{ij}p_j=b_i, i=1,2.$$

Представляя $I(\vec{b})$ в виде двойного интеграла в пределах $[\tau,1+\tau]^2$ и деля квадрат $[\tau,1+\tau]^2$ на основные M_1 и дополнительные M_2 квадратики (подробности см. §2 гл. III), получим

$$I(\vec{b}) = I_1(\vec{b}) + I_2(\vec{b}), \qquad (3.25)$$

где

$$I_i(\vec{b}) = \int\int_{M_i} e(-\vec{x}_b)\prod_{j=1}^{3} S(\vec{x}_j)dx_1dx_2,\ i = 1,2;$$

$$\vec{x}_b = b_1x_1 + b_2x_2, \vec{x}_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2,\ 1 \le j \le 3.$$

Для $I_2(\vec{b})$ в силу леммы 5.2 и оценки (5.3) работы [126] имеем

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\sum_{b_2=-\infty}^{\infty} |I_2(\vec{b})|^2 << N^4BQ^{-1/2}\ln^{10} N.$$

Отсюда следует, что, исключая не более чем $E^{(1)}(X) << N^2BQ^{-1/2+2\lambda_1}\ln^{10} N$ пар $(b_1,b_2)\in U(X)$, выполняется неравенство

$$| I_2(\vec{b})| < NQ^{-\lambda_1}. \qquad (3.26)$$

Положим $\lambda_1 = \dfrac{1}{6}$, если $E_{\tilde{\beta}} = 0$ и $\lambda_1 = \dfrac{11}{48} - 0,3\delta$, если $E_{\tilde{\beta}} = 1$.

3.2. Большие дуги. Теперь рассмотрим $I_1(\vec{b})$. Обозначим

$$\vec{h}_j = a_{1j}h_1 + a_{2j}h_2,\ \vec{h}_b = b_1h_1 + b_2h_2,\ \vec{\eta}_j = a_{1j}\eta_1 + a_{2j}\eta_2,$$

$$\vec{\eta}_b = b_1\eta_1 + b_2\eta_2,\ \vec{x}_j = \vec{h}_jq^{-1} + \vec{\eta}_j,\ j = 1,2,3.$$

Мы также будем использовать обозначения §4 главы III и (3.2.4).
При умножении в произведение

$$\prod_{j=1}^{3}\left(C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j) - \delta_q C_{\bar{\chi}\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j) - G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})\right) \qquad (3.26*)$$

появляются 27 членов. Эти члены делим на три группы: в первую группу включаем только член $\prod_{j=1}^{3} C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)$; во вторую группу включаем члены, имеющие по крайней мере один множитель $G_j(\vec{h},q,\vec{\eta})$, количество которых равно 19; оставшиеся 7 членов включаем в третью группу. Сумму членов, входящих в i-ую группу обозначим через $K_i (i = 1,2,3)$.

Если теперь при доказательстве оценки (6.7) [126] исключить из рассмотрения не более чем $E^{(2)}(X) < X^2Q^{-\frac{1}{2}+1,2\delta}$ пар $(b_1,b_2)\in U(X)$, то для остальных пар вместо (8.2) [77] будем иметь

$$I_1(\vec{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(NQ^{-1/3}), \qquad (3.27)$$

где

$$M_i = \sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi^3(q)}\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)\int\int_{R^2} K_i e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1d\eta_2.$$

Рассмотрим M_i, Пусть

$$A(q)=\frac{1}{\varphi^3(q)}\sum_{\bar h}{}' e_q(-\vec h_b)\prod_{j=1}^{3} C_q(\vec h_j),\ s(p)=1+A(p)$$

и

$$M_0=N\,|d_{23}|^{-1}\prod_p s(p)\int_D dx_1,$$

где $$D=\{x_1: LN^{-1}\le x_1,x_2,x_3\le 1\}. \tag{3.28}$$

Рассуждения, использованные при доказательстве леммы 7.4 [126] при нашем выборе параметров (см. (3.15)) дает, что, если $c_9<c_1-0{,}2\delta$, то

$$\int_D dx_1>0{,}99Q^{-c_9} \tag{3.29}$$

за исключением не более чем $E^{(3)}(X)<X^2Q^{-c_9+0{,}6\delta}$ пар $(b_1,b_2)\in U(X)$.

Положим $c_9=\frac{1}{6}-0{,}2\delta$ если $E_{\tilde\beta}=0$ и $c_9=\frac{1}{28}-0{,}7\delta$, если $E_{\tilde\beta}=1$.

В силу леммы 4.7.2 c) работы [126] $\prod_p s(p)>c_{10}>0,$ поэтому, используя (3.29) из (3.28), находим

$$M_0>c_{11}NQ^{-c_9}B^{-2} \tag{3.30}$$

за исключением не более чем $E^{(3)}(X)$ пар $(b_1,b_2)\in U(X)$.

Далее, будем использовать следующие леммы.

Лемма 4.3.3. *Для всех пар* $(b_1,b_2)\in U(X)$ *имеем*

$$M_1+M_3\ge(c_{12}\omega)^3M_0-O(N\tilde rQ^{-4/5}),$$

где

$$c_{12}=(1-c_1\delta)c_2^{-1}\delta^{-1}\exp(-0{,}0109986(1-c_1\delta)(c_2+1)^{-1}\delta^{-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (8.16) [126] имеем

$$M_1+M_3=\frac{N\tilde r^2}{|d_{23}|\varphi^3(\tilde r)}\prod_{p\nmid\tilde r}s(p)\sum_{(\tilde r)}\int_D\prod_{j=1}^{3}\left(1-\tilde\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde\beta-1}\right)dx_j+$$
$$+O(N\tilde rQ^{-4/5}). \tag{3.31}$$

Здесь $Nx_j\ge L$ и

$$\prod_{j=1}^{3}\left(1-\tilde\chi(l_j)(Nx_j)^{\tilde\beta-1}\right)\ge(1-L^{\tilde\beta-1})^3.$$

Поэтому учитывая

$$1-L^{\tilde{\beta}-1}=\frac{L-L^{\tilde{\beta}}}{L}\geq\frac{1}{L}(1-\tilde{\beta})L^{\tilde{\beta}}\ln L\geq((1-\tilde{\beta})\ln N)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{0{,}0109986(1-c_1\delta)}{(1+c_2^{-1})c_2\delta}\right)\geq(1-\tilde{\beta})\frac{1-c_1\delta}{c_2\delta}\ln T\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{0{,}0109986(1-c_1\delta)}{(1+c_2^{-1})\delta}\right)=c_{12}\omega,$$

где

$$c_{12}=\frac{1-c_1\delta}{c_2\delta}\exp\left(-\frac{0{,}0109986(1-c_1\delta)}{(1+c_2^{-1})\delta}\right),$$

из (3.31) получим утверждение леммы.

Пусть $m_1,m_2,...$ - различные целые из множества $\{1,2,3\}$ и

$$G(m_1,m_2,...)=\sum_{(r)}\tilde{\chi}(l_{m_1})\tilde{\chi}(l_{m_2})...,$$

где $\sum\limits_{(r)}$ - означает суммирование по всем тройкам l_1,l_2,l_3 с условиями $1\leq l_j\leq\tilde{r}$, $(l_j,\tilde{r})=1$, $j=1,2,3$ и $\sum\limits_{1\leq j\leq 3}a_{ij}l_j\equiv b_i(mod\tilde{r})$, $i=1,2$. Например, $G(2)=\sum\limits_{(\tilde{r})}\tilde{\chi}(l_2)$.

Лемма 4.3.4. *Для* $G(m_1,m_2,...)$ *имеет место оценка*

$$G(m_1,m_2,...)<<B^3\tilde{r}^{\gamma}$$

за исключением не более чем $E^{(4)}(X)<X^2\tilde{r}^{1-2\gamma}$ *пар* $(b_1,b_2)\in[1,X]^2$.

Доказательство. При $\gamma=\frac{3}{4}$ это есть утверждение в) леммы 8.2 [126]. Положим $\gamma>\dfrac{1}{2}$. Для удобства рассмотрим $G(1,2)$ и будем исходить из оценки

$$\sum_{1\leq b_1,b_2\leq\tilde{r}}|G(1,2)|^2<<\tilde{r}^3B^6,\qquad(3.32)$$

установленный в [126] (см. доказательство леммы 8.2. в) [126]). Из (3.32) следует, что количество пар (b_1,b_2) в $[1,\tilde{r}]^2$, для которых $|G(1,2)>B^3\tilde{r}^{\gamma}$ не превосходит $\ll\tilde{r}^{3-2\gamma}$. Ясно, что $G(1,2)$ завысить от классов вычетов по $(mod\tilde{r})$, которые принадлежат b_1,b_2.

Таким образом, за исключением не более чем $E^{(4)}(X)<<(X\tilde{r}^{-1})^2\tilde{r}^{3-2\gamma}<<X^2\tilde{r}^{1-2\gamma}$ пар $(b_1,b_2)\in U(X)$ имеет место неравенство $|G(1,2)|<B^3\tilde{r}^{\gamma}$. Остальные наборы $m_1,m_2,...\in\{1,2,3\}$

рассматривается аналогично.

Лемма 4.3.5. *При* $\frac{1}{2}<\gamma<1$ *имеет место оценка*

$$M_3 << N\tilde{r}^{-1+\gamma}B^3(\ln\ln N)^9$$

для всех пар $(b_1,b_2)\in[1,X]^2$ *за исключением не более чем* $E^{(4)}(X)\le X^2\tilde{r}^{1-2\gamma}$ *пар* (b_1,b_2) *из них.*

Доказательство. При $\gamma=\frac{3}{4}$ эта есть лемма 8.5 [126]. При $\frac{1}{2}<\gamma<1$ она получается из леммы 8.3 [126] использованием леммы 3.4 настоящей работы и оценки (8.7) [126].

Теперь оценим M_2. Пусть $\chi_j(mod r_j)$ примитивные характеры, $r=[r_1,r_2,r_3]$ и $Z(q)=\sum_{\vec{h}}{}' e_q(-\vec{h}_b)\prod_{j=1}^{3}C_{\chi_j\chi_0}(\vec{h}_j)$.

Лемма 3.6. *Справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{q\le Q,r\setminus q} Z(q)\varphi^{-3}(q)\right|<2{,}3617415\prod_p s(p). \qquad (3.33)$$

Доказательство. Проведя рассуждения как при доказательстве леммы 4.6 [127], находим

$$\left|\sum_{q\le Q,r\setminus q} Z(q)\varphi^{-3}(q)\right|\le\left(\prod_{p\setminus r}s(p)\right)\sum_{\substack{q\le Qr^{-1}\\(q,r)=1}}|A(q)|\le\prod_{p\setminus r}s(p)\prod_{p\not\setminus r}(1+|A(p)|).$$

Если $A(p)>0$, то отсюда сразу следует утверждение леммы. В этом случае вместо константы 2,3617415, участвующий в правой части (2.33) можно брать 1.

Если же $A(p)<0$, то

$$\prod_{p\not\setminus r}(1+|A(p)|)=\prod_{p\not\setminus r}(1+|A(p)|-2A(p))=\prod_{p\not\setminus r}(1+|A(p)|)\prod_{p\not\setminus r}\left(1-\frac{2A(p)}{1+|A(p)|}\right).$$

Поэтому для того, чтобы доказать (3.33) достаточно показать, что

$$\Pi_1=\prod_{p\not\setminus r}\left(1-\frac{2A(p)}{1+A(p)}\right)<2{,}3617415. \qquad (3.34)$$

В силу (7.5) [126] имеем $A(p)=p^2\varphi^{-3}(p)N(p)-1$, где $N(p)=\sum_{(p)}1$.

Согласно лемме 4.7.1, d) [126] $s(p)>0$ для всех p. Следовательно $s(p)=p^2\varphi^{-3}(p)N(p)>0$. Очевидно, что $N(2)=1$ и $A(2)=3>0$; $N(3)=1$ или 2, если $N(3)=1$, то $A(3)=\frac{9}{8}-1>0$, если же $N(3)=2$, то $A(3)=\frac{2\cdot 9}{8}-1>0$.

Поэтому можем полагать, что $p\ge 5$. Из (7.7) и (7.8) [126] следует

$p-3 \le N(p) \le p-1$. Следовательно

$$-A(p)(1+A(p))^{-1} = s^{-1}(p)-1 = \frac{(p-1)^3}{p^2N(p)} - 1 \le \frac{3p-1}{p^2(p-3)}.$$

Таким образом,

$$\Pi_1 \le \prod_{p \nmid r, p \ge 5} \left(1 - \frac{2A(p)}{1+A(p)}\right) \le \prod_{p \nmid r, p\ge 5} \left(1+\frac{2(2p-1)}{p^2(p-3)}\right) = \Pi_2. \tag{3.35}$$

Для Π_2 имеем

$$\Pi_2 \le 2{,}3133894 \prod_{p\ge 103}\left(1+\frac{2(3p-1)}{p^2(p-3)}\right) < 2{,}3133894 \prod_{p \ge 103}\left(1+\frac{6{,}16}{p^2}\right) =$$

$$= 2{,}3133894 \exp\left(\sum_{p\ge 103} \ln\left(1+\frac{6{,}16}{p^2}\right)\right).$$

Поскольку $\ln(1+x) < x$, при $x \ge -1$, $x \ne 0$, то

$$\exp\left(\sum_{p\ge 103}\ln\left(1+\frac{6{,}16}{p^2}\right)\right) < \exp\left(\sum_{p \ge 103}\frac{6{,}16}{p^2}\right) <$$

$$< \exp\left(6{,}16\left(\sum_{n\ge 51}\frac{1}{(2n+1)^2} - 0{,}0006966\right)\right) =$$

$$= \exp\left(6{,}16\left((\sum_{n=0}^{\infty} - \sum_{n=0}^{50})\frac{1}{(2n+1)^2} - 0{,}0006966\right)\right).$$

Далее, используя

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s) \quad (s = 2,3,\ldots)$$

при $s=2$ и

$$\sum_{n=0}^{50}\frac{1}{(2n+1)^2} > 1{,}229647,$$

получим

$$\Pi_2 < 2{,}3133894 \cdot \exp(6{,}16(\frac{3}{4}\zeta(2) - 1{,}229647 - 0{,}0006966)) < 2{,}3617415.$$

Следовательно, из (3.34) и (3.35) следует (3.33).

Теперь, используя результаты леммы 3.2 и 3.6, оценим M_2.

Лемма 4.3.7. *Для всех пар* $(b_1,b_2)\in U(X)$ *справедливы неравенства*

$$M_2 < \begin{cases} c_{13}M_0\exp(-c_4\delta^{-1}), & \text{если} \quad E_{\tilde\beta} = 0; \\ c_{14}M_0\omega^3\exp(-c_8\delta^{-1}), & \text{если} \quad E_{\tilde\beta} = 1 \ \text{ и } \ \tilde r \le Q^{1/8}; \\ c_{15}M_0\omega^3\exp(-c_6\delta^{-1}), & \text{если} \quad E_{\tilde\beta}=1 \ \text{ и } \ \tilde r > Q^{1/8}, \end{cases}$$

где $\qquad c_{13} = 2{,}3617415c_3(3+3\exp(-c_4\delta^{-1}) + (c_3\exp(-c_4\delta^{-1}))^2),$

$$c_{14}=c_{14}(c_7,c_8)=2{,}3617415c_7\{3(1+L^{2(\tilde{\beta}-1)}+2L^{\tilde{\beta}-1}+(1+L^{\tilde{\beta}-1})\times$$
$$\times c_7\omega^3\exp(-c_8\delta^{-1}))+(c_7\omega^3\exp(-c_8\delta^{-1}))^2\},$$

$c_{15}=c_{14}(c_5,c_6)$, *то для того, чтобы получить выражение для* c_{15} *достаточно в выражении* c_{14} *заменить* c_7 *и* c_8 *на* c_5 *и* c_6 *соответственно. Значения* c_i *(*$i=3,4,...,8$*) определены в лемме 3.2.*

Доказательство. Сначала предположим, что $E_{\tilde{\beta}}=0$. Тогда в силу (3.27) K_2 состоит из семи членов: в трех из них $F_1^{(j)}=C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta})$ участвует в качестве множителя дважды, еще в других трех членах $F_3^{(j)}=G_j(\vec{h},q,\vec{h})$ участвует в качестве множителя дважды (эти три члена в обоих случаях оценивается одинаково), а в одном члене $G_j(\vec{h},q,\vec{h})$ участвует трижды. Поэтому M_2 можем представить в виде

$$M_2=3M_2^{(1)}+3M_2^{(2)}+M_2^{(3)}. \tag{3.36}$$

Для $M_2^{(1)}$ имеем

$$M_2=\left|\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)^3}\sum_{\vec{h}}e_q(-\vec{h}_b)\int\limits_{R^2}\int\prod_{j=1}^{2}C_q(\vec{h}_j)I(\vec{\eta}_j)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{\chi(mod q)}C_\chi(\vec{h}_3)I_\chi(\vec{\eta}_3)e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1 d\eta_2\right|=\left|\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)^3}\times\right.$$
$$\times\sum_{\vec{h}}e_q(-\vec{h}_b)C_{\chi_0}(\vec{h}_1)C_{\chi_0}(\vec{h}_2)\sum_{\chi(mod q)}C_\chi(\vec{h}_3)\times$$
$$\left.\times\int\limits_{R^2}\int I(\vec{\eta}_1)I(\vec{\eta}_2)I_\chi(\vec{\eta}_3)e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1 d\eta_2\right|.$$

Используя леммы 7.4 [126], находим

$$\int\limits_{R^2}\int I(\vec{\eta}_1)I(\vec{\eta}_2)I_\chi(\vec{\eta}_3)e(-\vec{\eta}_b)d\eta_1 d\eta_2=\frac{N}{|d_{23}|}\sum_{|\gamma|\le T}{}'\int\limits_D(Nx_3)^{\rho_3-1}dx_1.$$

Поэтому

$$M_2^{(1)}=\left|N\frac{1}{|d_{23}|}\int\limits_D\sum_{r\le Q}\sum_{\chi_r}{}^*\sum_{|\gamma|\le T}{}'(Nx_3)^{\rho_3-1}\sum_{q\le Q,r\backslash q}\frac{1}{\varphi(q)^3}\times\right.$$
$$\times\sum_{h}{}'e_q(-\vec{h}_b)C_{\chi_0}(\vec{h}_1)C_{\chi_0}(\vec{h}_2)C_{\bar{\chi}}(\vec{h}_3)\,|\,dx_1=$$

$$\left|\frac{N}{|d_{23}|}\int\limits_D\sum_{r\le Q}\sum_{\chi_r}{}^*\sum_{|\gamma|\le T}{}'(Nx_3)^{\rho_3-1}\sum_{q\le Q,r\backslash q}\frac{Z(q,\chi_0,\chi_0,\chi)}{\varphi^3(q)}dx_1\right|.$$

Применяя леммы 4.3.2 и 4.3.6, отсюда получим

$$M_2^{(1)} < 2{,}3617415 c_3 M_0 \exp(-c_4\delta^{-1}).$$

Для $M_2^{(2)}$ и $M_2^{(3)}$ рассуждения, приведенные выше относительно $M_2^{(1)}$, приводят к оценке

$$M_2^{(2)} < 2{,}3617415 M_0 [c_3 \exp(-c_4\delta^{-1})]^2, \qquad M_2^{(3)} < 2{,}3617415 M_0 [c_3 \exp(-c_4\delta^{-1})]^2.$$

Таким образом, в этом случае из (3.36), находим

$$M_2 < c_{13} M_0 \exp(-c_4\delta^{-1}). \tag{3.37}$$

Пусть теперь $E_{\tilde\beta} = 1$. В этом случае в M_2 кроме рассмотренных 7 членов прибавляются еще 12 членов, за счет появления в (3.26*) слагаемого $F_2^{(j)} = -C_{\tilde\chi\chi_0}(\vec{h}_j)\tilde{I}(\vec{\eta}_j)$. Эти новые 12 члены следующего типа: три $F_2^{(j)}F_2^{(i)}F_3^{(j)}$ и еще три $F_2^{(j)}F_3^{(j)}F_3^{(i)}$ и шесть $F_1^{(j)}F_2^{(j)}F_3^{(j)}$. Таким образом,

$$M_2 = 3M_2^{(1)} + 3M_2^{(2)} + M_2^{(3)} + 3M_2^{(4)} + 3M_2^{(5)} + 6M_2^{(6)}. \tag{3.38}$$

Рассуждая аналогично, приведенному выше при оценке $M_2^{(1)}$, получим

$$M_2^{(1)} < 2{,}3617415 c_5 M_0 \omega^3 \exp(-c_6\delta^{-1}), \qquad M_2^{(2)} < 2{,}3617415 M_0 [c_5\omega^3 \exp(-c_6\delta^{-1})]^2,$$

$$M_2^{(3)} < 2{,}3617415 M_0 [c_5\omega^3 \exp(-c_6\delta^{-1})]^3,\ M_2^{(4)} < 2{,}3617415 c_5 M_0 L^{2(\tilde\beta-1)} \omega^3 \exp(-c_6\delta^{-1}),$$

$$M_2^{(5)} < 2{,}3617415 M_0 L^{\tilde\beta-1} [c_5\omega^3 \exp(-c_6\delta^{-1})]^2,\ M_2^{(6)} < 2{,}3617415 c_5 M_0 L^{\tilde\beta-1} \omega^3 \exp(-c_6\delta^{-1}).$$

Поэтому из (3.38) находим

$$M_2 < c_{15}\omega^3 M_0 \exp(-c_6\delta^{-1}). \tag{3.39}$$

Если $E_{\tilde\beta} = 1$ и $\tilde r \le Q^{\lambda}$, то, используя (3.24') вместо утверждения леммы 4.3.2, из (3.38) будем иметь

$$M_2 < c_{14} M_0 \exp(-c_8\delta^{-1}). \tag{3.40}$$

Из (3.37), (3.39) и (3.40) следует утверждение леммы.

3.3. Завершение доказательства оценки (3.4). 1) Пусть сначала $E_{\tilde\beta} = 0$. Тогда $M_3 = 0$ и в силу (3.27)

$$I_1(\vec b) = M_1 + M_2 + O(NQ^{-1/3})$$

за исключением $E^{(2)}(X)$ пар $\vec b = (b_1, b_2) \in U(X)$. Отсюда, используя лемму 8.1 [126] $M_1 = M_0 + O(NQ^{-4/5})$, получим $I_1(\vec b) = M_0 + M_2 + O(NQ^{-1/3})$.

Так как $M_2 < c_{13} M_0 \exp(-c_4\delta^{-1})$ (см. лемму 4.3.7), то

$$I(\vec b) = I_1(\vec b) + I_2(\vec b) \ge I_1(\vec b) - |I_2(\vec b)| \ge M_0(1 - c_{13} \times$$
$$\times \exp(-c_4\delta^{-1})) - O(NQ^{-1/3}) - |I_2(\vec b)|.$$

δ выбираем так, чтобы $\delta < \delta_1 = c_4(\ln\frac{c_{13}}{0,99})^{-1}$. Тогда, учитывая (3.26) и (3.30), получим

$$I(\vec{b}) > 0,01c_{11}NQ^{-c_9}B^{-2} - O(NQ^{-1/3}) - NQ^{-\lambda_1} \geq$$
$$\geq NQ^{-c_9}B^{-2}(0,01c_{11} - c_{16}Q^{-1/3+c_9+0,2\delta} - Q^{-\lambda_1+c_9+0,2\delta}).$$

Если $c_9 + 0,2\delta < \frac{1}{3}$ и $c_9 + 0,2\delta < \lambda_1$, то

$$I(\vec{b}) > NQ^{-c_9}B^{-2} \cdot 0,009c_{11} > N^{1-c_9\delta-0,3\delta^2}$$

за исключением не более, чем $\bar{E}_1(X) = E^{(1)}(X) + E^{(2)}(X) + E^{(3)}(X)$ пар $(b_1,b_2) \in U(X)$. Положим $\lambda_1 = \frac{1}{6},\ c_9 = \frac{1}{6} - 0,2\delta,\ \ c_2 = \frac{100}{3},\ \ c_1 = \frac{1}{6} + 0,1\delta,$ $\delta < \delta_1 = c_4(\ln c_{13} - \ln 0,99)^{-1}$, тогда $I(\vec{b}) > N^{1-0,5\delta}$ за исключением $\bar{E}_1(X) < X^2Q^{-\frac{1}{6}+1,2\delta}$ пар $(b_1,b_2) \in U(X)$.

2) Пусть теперь $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $Q^{\lambda} \geq \tilde{r}$, $0 < \lambda < 1$. Положим

$$\lambda_1 = \frac{11}{48} - 0,3\delta,\ \ c_9 = \frac{1}{24} - 0,7\delta,\ \ \lambda = \frac{1}{8},\ \ c_1 = \frac{1}{6} + 0,1\delta,$$
$$c_2 = \frac{100}{3},\ \ \delta < \delta_2 = (108\lambda(\ln c_{14} - \ln(0,99c_{12})))^{-1}.$$

Тогда, учитывая, что $\omega > 0,4961\lambda^{-2}Q^{-\lambda/2}\ln^{-1}Q$ (см. лемму 4.3.1) из (3.25), (3.26), (3.27), (3.30) и леммы 4.4.3 и 4.3.7, получим

$$I(\vec{b}) >> NQ^{-c_9-\frac{3\lambda}{2}-0,3\delta} - NQ^{-\lambda_1} > N^{1-\frac{11}{48}\delta+0,3\delta^2} > N^{1-0,5\delta}, \qquad (3.42)$$

за исключением $E_2(X) < X^2Q^{-1/24+1,4\delta}$ пар $(b_1,b_2) \in U(X)$.

3). Наконец, пусть $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $\tilde{r} > Q^{\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. В этом случае положим

$$\lambda_1 = \frac{1}{28},\ \ \lambda = \frac{1}{8},\ \ \gamma = \frac{3}{4},\ \ c_9 = \frac{1}{28} - 0,7\delta, \qquad \delta < \delta_3 = c_6(\ln c_{15} - \ln(6e)^3 \cdot 0,99)^{-1}.$$

Тогда, используя (3.25), (3.26), (3.27), (3.30) и леммы 4.3.4 и 4.3.7, находим

$$I(\vec{b}) >> NQ^{-c_9}B^{-2}(1 - c_{15}\omega^3\exp(-c_6\delta^{-1})) -$$
$$-O(NQ^{-\lambda+\lambda\gamma+0,4\delta}) - O(NQ^{-1/3}) - NQ^{-\lambda_1} > NQ^{-\frac{1}{24}+0,3\delta} = N^{1-\frac{\delta}{24}+0,3\delta^2}, \qquad (3.43)$$

за исключением не более, чем $E_3(X) << X^2Q^{-\frac{1}{24}+1,4\delta}$ пар $(b_1,b_2) \in U(X)$.

Выберем $0 < \varepsilon < 10^{-8}$ и $\delta = min(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta(\varepsilon)) = 1,0054445 \cdot 10^{-4}$. Тогда все условия относительно δ удовлетворяются и из (3.41), (3.42), (3.43) для достаточно больших N получим $I(\vec{b}) > N^{0,9}$,за исключением $E(X) < X^{1,9999833}$пар $(b_1,b_2) \in U(X)$.

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы

B работы [126], только при этом вместо теоремы 2 [126] необходимо использовать оценки (3.4) настоящего параграфа.

Отметим, что И.Аллаков и Абраев [41,97] исследовали разрешимости системы

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4,\ i = 1,2$$

при условии:

a) для любого простого p существует такие целые числа l_1, l_2, l_3, l_4 с условиями $1 \le l_1, l_2, l_3, l_4 \le p-1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений: $a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + a_{i3}l_3 + a_{i4}l_4 \equiv b_i (modp),\ i = 1,2;$

b) существуют такие действительные положительные числа y_1, y_2, y_3, y_4, для которых выполняется равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 = b_i,\ i = 1,2,$

где b_1, b_2-натуральные числа, a_{ij} – целые коэффициенты, $p_j -$ простые числа Они доказали [97] доказали, что для достаточно больших X справедлива оценка

$cardW(X) > 1{,}69954 \cdot X^2 B^{-20}(e^{\gamma_0+10} lnlnB + 2{,}507 \cdot$ $\mathrm{e}^{10}(lnlnB)^{-1})^{-1}$,

Здесь $W(X)$ $-$означает количество векторов $\bar{b} = (b_1, b_2), 1 < b_1, b_2 \le X$, который удовлетворяют условиям a) и b), $B = max\{3|a_{ij}|\}$ и $\gamma_0 = 0{,}5772\ldots -$ постоянная Эйлера.

§4. **О количестве целых положительных решений уравнения** $x_1x_2\ldots x_k = n$.

Пусть $\tau_k(n)$ обозначает число решений уравнения $n = x_1x_2\ldots x_k$ в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $M_k(n,\varepsilon) = \max\limits_{n\ge1}(\tau_k(n)n^{-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное вещественное число.

И.М.Виноградовым [56] (см. задача 11 с, гл.2) показано, что

$$M_2(n,\varepsilon) \le \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2^{\frac{1}{\varepsilon}}}. \qquad (4.1)$$

В [89] эта оценка обобщен для $\tau_k(n)$, доказан, что для любых $k \ge 2$, $n \ge 1$ и $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$M_2(n,\varepsilon) < \frac{1}{3}\{(\max\{\frac{1}{\varepsilon}, 3k\})^{k-1}\}^{k^{\frac{1}{\varepsilon}}}. \qquad (4.2)$$

Оценки (4.1) и (4.2) хороши своей равномерностью по $n \ge 1$. Но правая часть в них при малых значениях ε является очень большим.

С другой стороны в [143] была доказана, что за исключением случаев

$n = 2,4,6$ и 12 справедлива оценка

$$M_2(n,\varepsilon) < 1,\ \varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0{,}68453.... \qquad (4.3)$$

Здесь ε является грубым. Во многих численных расчетах необходимы такие оценки, чтобы и ε была сравнительно мало и правая часть были не слишком большим. Именно таким требованием относительно $M_2(n,\varepsilon)$ отвечает результат

$$M_2(n,\varepsilon) \le \prod_{p_i < 2^{\frac{1}{\varepsilon}}} \max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon \ln p_i}\right] p_i^{-\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon \ln p_i} - 1\right]};\quad \left[\frac{1}{\varepsilon \ln p_i} + 1\right] p_i^{-\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon \ln p_i}\right]}\right\}, \qquad (4.4)$$

полученный М.И.Исраиловым и И.А.Аллаковым [2,9]. Здесь произведение в правой части распространяется на все простые $p_i < 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ и $[x]$ - целая часть x. Отметим, что оценка (3.4) в общем случае является не улучшаемым.

В этом параграфе последний результат (4.4) обобщается для $M_k(n,\varepsilon)$. Для удобства обозначим

$$a_k(p_i,\varepsilon) = \max\left\{\left[\frac{k-1}{\varepsilon \ln p_i}\right] p_i^{-\varepsilon\left[\frac{k-1}{\varepsilon \ln p_i} - k + 1\right]};\ \left[\frac{k-1}{\varepsilon \ln p_i} + 1\right] p_i^{-\varepsilon\left[\frac{k-1}{\varepsilon \ln p_i} - k + 2\right]}\right\} \qquad (4.5)$$

и

$$a_k(\varepsilon) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{p_i < (k!)^{1/3}} a_k(p_i,\varepsilon). \qquad (4.6)$$

Справедлива следующая

Теорема 4.4.1. *Для натуральных чисел* $k \ge 2,\ n \ge 1$ *и вещественного числа* $\varepsilon > 0$ *имеет место неравенство*

$$M_k(n,\varepsilon) \le a_k(\varepsilon). \qquad (4.7)$$

Доказательство. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ - каноническое разложение натурального n. Тогда известно (см. например [56] задача 11а), что

$$\tau_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \tau_k(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)...(\alpha_i + k - 1)}{(k-1)!}. \qquad (4.8)$$

Так как при $k \ge 2,\ \ p_i \ge (k!)^{1/\varepsilon}$ и любом $\alpha_i \ge 1$

$$(\alpha_i + 1)^{1/\varepsilon}(\alpha_i + 2)^{1/\varepsilon}...(\alpha_i + k - 1)^{1/\varepsilon} p_i^{-\alpha_i} \le 1,$$

то из (4.8) получим

$$M_k(n,\varepsilon) \le \frac{1}{(k-1)!} \prod_{p_i < (k!)^{1/\varepsilon}} \max_{\alpha_i} (\alpha_i + k - 1)^{k-1} p_i^{-\varepsilon\alpha_i}. \qquad (4.9)$$

Фиксируя $k \ge 2,\ \varepsilon > 0$ и исследуя функцию

$$f_{p_i,k}(\alpha_i) = (\alpha_k + k - 1)^{k-1} p_i^{-\varepsilon\alpha_i}$$

на экстремум относительно $\alpha_i \geq 1$ убедимся, что эта функция при целочисленных значениях α_i достигает наибольшего значения, когда

$$\alpha_i = \left[\frac{k-1}{\varepsilon \ln p_i} - k + 1\right] \text{ или } \alpha_i = \left[\frac{k-1}{\varepsilon \ln p_i} - k + 2\right]$$

и согласно (4.5)

$$\max_{\alpha_i} f_{p_i,k}(\alpha_i) = a(p_i, \varepsilon). \qquad (4.10)$$

Теперь комбинируя (4.6), (4.9) и (4.10), получим (4.7).

В заключении отметим, что доказанная теорема является улучшением результата (4.2) и из доказанного в частном случае непосредственно следует оценка (4.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абраев Б., Аллаков И. О варинговых числах // Uzbek Math. Journal, 2012, №4, pp.11-18.
2. Аллаков И., Исраилов М.И. Некоторые оценки для функции делителей// Изв. АН РУз. - Ташкент, 1980. - №5. -С.39-42.
3. Аллаков И.А. Определение численного значения констант в плотностном неравенстве Галлахера // -Т.: 1980, 30 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНИТИ 05.06.80. № 2248-80.
4. Аллаков И. А. Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1980. – вып.62. -С.42-56.
5. Аллаков И. А. Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха. - Т.: 1981, 76 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНИТИ 30.10.81. № 5166-81.
6. Аллаков И. Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1981. -№ 11. -С.3-5.
7. Аллаков И., Исраилов М.И. Оценка тригонометрических сумм по простым числам в арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. - Ташкент, 1982. - №4. -С.5-6.
8. Аллаков И. Исключительное множество суммы двух простых. //Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Ленинград. ЛГУ,1983, 148с.
9. Аллаков И. Об одной оценке функции делителей // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1984. – вып.74. -С.92-95.
10. Аллаков И. Некоторые оценки снизу для числа представлений гольдбаховых чисел // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1985. – вып. 77. -С.37-42.

11. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии // Рассеяние ионов на поверхности кристаллов: Тез. докл. всесоюзной конф. -Ташкент-Термез, -1988.-Ч.2. -С.18.

12. Аллаков И., Исраилов М.И. Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии и их приложения // Конструктивные методы и алгоритмы в теории чисел: Тез. докл. на всесоюзной науч. конф. 10-16 сентября 1989. – Минск, 1989. - С.15.

13. Аллаков И., Исраилов М.И. Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии // Изв. АН РУз. –Ташкент, 1990. - №5. -С.3-10.

14. Аллаков И. О распределении дробных долей последовательности $\{\alpha p^2\}$ с простыми числами из арифметической прогрессии // Изв. АН РУз. -Ташкент, 1990. - №6. -С.7-11.

15. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм по степеням простых чисел в арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1990. - № 9. - С.3-4.

16. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм по степеням простых чисел в арифметической прогрессии // М.: 1990, 30с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала деп. в ВИНИТИ 30.05.90. № 3292-В90.

17. Аллаков И. О распределении дробных долей последовательности $\{\alpha p^2\}$ с простыми числами из арифметической прогрессии // Тез. докл. респ. науч. конф. по теории чисел. 26-28 сентября 1990. –Ташкент, 1990. - С.9.

18. Аллаков И. Об одной бинарной аддитивной задаче с простыми числами из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. - 1991. - №7. - с.9.

19. Аллаков И., Исраилов М.И. О количестве натуральных чисел, представимых в виде суммы ограниченного числа k-ых степеней // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1991. - №12. - С.5-6.

20. Аллаков И., Исраилов М.И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - №10-11. -С.12-15.

21. Аллаков И. О разрешимости системы линейных диофантовых уравнений с простыми переменными // М.: 1992, 51с. -

С решением редколлегии Узб. матем. журнала. Деп. в ВИНИТИ 30.11.92. № 3386-В92.
22. Аллаков И. О разрешимости пары линейных уравнений с тремя простыми переменными //Узб.матем. журнал. –Ташкент, 1993. -№ 1. -С.26-34.
23. Аллаков И., Исраилов М.И. Об одновременном представлении натуральных чисел суммой простых чисел //Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. II международ. конф. 20-25сентября, 1993. –Тула,1993. - С.28.
24. Аллаков И., Исраилов М.И. О сумме *k*-ых степеней натуральных чисел // Труды МИ РАН. -М.:, 1994. - № 207. -С.172-180.
25. Аллаков И. Об одной оценке тригонометрических сумм // International Conference on Some Topics of Mathematics. ICSTM-96. October 13-17. Samarkand, Uzbekistan. Abstracts. - 1996. - C.9.
26. Аллаков И. Об оценке суммы Вейля // Современные проблемы теории чисел и её приложения: Тез. докл. на III международной конф. 9-14 сентября 1996. –Тула, 1996. -С.15.
27. Аллаков И. О сумме двух нечетных простых чисел из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. –Ташкент, 1997. - № 8. -С.6-8.
28. Аллаков И. Об одной оценке тригонометрической суммы //Узб. матем. журнал. –Ташкент, 1998. - №5. -С.8-14.
29. Аллаков И. О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. “Математика”. – Казань, 2000. - № 8(459). -С.3-15.
30. Аллаков И. Об одном подходе к оценке тригонометрических сумм по простым числам из арифметической прогрессии // Уфимский Научный Центр РАН. Институт Математики. Труды международной науч. конф.- Уфа, 2000. - С. 8-11.
31. Аллаков И. Алгоритмы в некоторых аддитивных задачах теории чисел // Современные проблемы алгоритмизации и программирования: Доклады и тезисы на респ. научной конф. 5-7 сентября 2001.-Ташкент, 2001. - С.393.
32. Аллаков И. Об одной оценке Г. Вейля -И.М.Виноградова // Сибирский матем. журнал. –Новосибирск, 2002. - №1. -С. 9-14.
33. Аллаков И. О числах, представимых в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа // Алгебра и её

приложения: Тезисы докладов международной конф.. 5-9 августа 2002. -Красноярск, 2002. - С.3-4.

34. Аллаков И. О распределении дробных долей последовательности $\{\alpha p^k\}$ с простыми аргументами из арифметической прогрессии //Чебышевский сборник. –Тула, 2003. -Т.4. -№2(6). - С.30-37.

35. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Вестник ТерГУ. -Ташкент, 2005.- № 2. -С.146-157.

36. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах // Известия ВУЗов. "Математика".–Казань, 2006.-№ 1.-С.3-10.

37. Аллаков И. О проблеме Эйлера-Гольдбаха // Вестник ТерГУ. -Ташкент, 2006.- № 1. -С.86-91.

38. Аллаков И., Абраев Б. Об исключительном нуле L-функции Дирихле // Вестник ТерГУ. –Ташкент, 2008.- № 1. -С.115-120.

39. Аллаков И. О гольдбаховых числах //Чебышевский сборник. –Тула, 2008. т.9 вып.1 С.13-17.

40. Аллаков И. Решение некоторых аддитивных задач теории чисел аналитическими методами. Ташкент. Изд. «Таълим», 2012, 200с.(на узб. яз.)

41. Аллаков И. Абраев Б.Х.. Об условиях разрешимости пары линейных уравнений с четырьмя неизвестными в простых числах. Материалы международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории" 23-28 сентябрь 2020 года. Тула Россия с.6-8.

42. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об одновременном представлении чисел суммой простых чисел // Чебышевский сборник, 2012. Т.42. № 2. –С.12-17.

43. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об исключительном множестве суммы простого и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии // Бюллетень Института математики, 2019, №-5. С. 9-21.

44. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена. // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4.–С. 32–45.

45. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об исключительном множестве суммы двух простых чисел // Тезисы докладов республиканской

научной конференции “Новые результаты математики и их приложения”. Самарканд 14-15 мая 2018 года. С.130-131.

46. Архипов Г.И. и др. Теория кратных тригонометрических сумм. - М.: Наука, 1987. – 368 с.

47. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об одной тернарной задаче с простыми числами // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. : Тез. докл. V международной конф. 19-20мая 2003. -Тула, 2003. -С.18-19.

48. Бабаназаров Б., Тулаганова М.И., Файнлейб А.С. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз.- Ташкент, 1992. - № 6-7. - С.7-9.

49. Виноградов А.И. О бинарной проблеме Харди-Литтлвуда // Acta arithm. – Варшава, 1985. - V.46.- P.33-56.

50. Виноградов И.М. Новые оценки тригонометрических сумм содержащие простые числа // Изв. АН СССР. Сер. матем. -М.:, 1938. -№ 2. -С.1-13.

51. Виноградов И.М. Распределение по данному модулю простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии // Изв. АН СССР. Сер. матем. -М.:, 1940.- №4.- С. 27-36.

52. Виноградов И.М. Об оценке тригонометрических сумм по простым числам // Изв. АН СССР. Сер. матем. -М.:, 1948.- №12. -С. 225- 248.

53. Виноградов И.М. Избранные труды. -М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 435 с.

54. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. - М.: Наука, 1976. – 120 с.

55. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. - М.: Наука, 1980. – 144 с.

56. Виноградов И.М. Основы теории чисел. -М.: Наука, 1981. – 176 с.

57. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета функция Римана. -М.: Физматлит, 1994. – 268 с.

58. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. -М.: Наука, 1971. -199 с. // инглиз тилидаги нашри: Davenport Harold. Multiplicative Number Theory.// Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997,178p.

59. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. -М.: Наука, 1983. – 240с.

60. Карацуба А.А. О функции *G(n)* в проблеме Варинга // Изв. АН СССР, Серия матем. -М.: 1985.- №5(49). - С. 935 -947.

61. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа – М.: Наука. 1976.-180с.

62. Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. -М.: Наука, 1989. – 240 с.

63. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова // Вестник ЛГУ. – Ленинград, 1961. - №13. - С. 11-27.

64. Лаврик А.Ф. К теории распределения простых чисел на основе метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова // Труды МИРАН. -М.:, 1961.- № 64 . - С. 90-125.

65. Лаврик А.Ф. Приближенное функциональное уравнение для L -функции Дирихле // Труды Моск. матем. общества. -М.:, 1968. -№ 18.-С.91-104.

66. Лаврик А.Ф. Аналитический метод оценок тригонометрических сумм по простым числам арифметической прогрессии // ДАН СССР. - Москва, 1979. - № 5(248). - С. 1059-1063.

67. Лаврик А.Ф. Тригонометрические суммы по простым числам из арифметической прогрессии //Докл.АН РУз. –Ташкент, 1979. № 7.- С.12-13.

68. Лаврик А.Ф. Нули дзета-функции Римана // Докл. АН РУз. - Ташкент, 2003. - № 4. - С. 3-4.

69. Лаврик А.Ф. Нетривиальные нули дзета-функции Римана // Докл. АН РУз. - Ташкент, 2004. - № 3. - С. 3-4.

70. Лаврик А.Ф. Нули дзета-функции Римана // Докл. АН РУз. - Ташкент, 2005. - № 2. - С. 3-4.

71. Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории простых чисел // Доклады АН СССР. -М.:, 1945, т.49, с.3-7.

72. Линник Ю.В. Новое доказательство Теоремы Гольдбаха-Виноградова //Мат. сборник. -М.:, 1946, т.19(61), с.3-8.

73. Митькин Д.А. О проблеме Варинга с различными многочленами // Мат. заметки. -М.:, 1989, т.45, (61), с.3-8.

74. Монтгомери Г. Л. Мультипликативная теория чисел. -М.:Мир,1974. 160 с.

75. Омаров А.О., Салиба Х.М., Чубариков В.Н. О мощности исключительного множества в одной бинарной аддитивной задаче// Чебышевский сборник. – Тула, 2002. - Т.2. -№2(4). - С.123-135.

76. Пачев У. М. , “Обзор исследований по дискретному эргодическому методу в теории чисел”, Чебышевский сб., **11**:1 (2010), 217–233.

77. Пачев У.М. Об асимптотике числа приведенных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Сибирский матем. журн. 2007. Т.48. № 2. С.376-388.

78. Пачев У.М. Избранные главы теории чисел: Спецкурс. Нальчик: Полиграфсервис и Т, 2001. - 112 с.

79. Плаксин В.А. Исключительное множество суммы простого и фиксированной степени простого числа. - Петрозаводск: 1984, 33 с. - С решением Ученого Совета Петрозаводского Госуниверситета. Деп. в ВИНИТИ 23.10 84. № 7010- 84.

80. Плаксин В.А. Об одном вопросе Хуа-Ло-Кена // Мат. Заметки. -М.:, 1990.- № 3(47). - с. 78-90.

81. Прахар К. Распределение простых чисел. -М.: Мир, 1967. – 511 с.

82. Рахмонов З. Х. Короткие нелинейные тригонометрические суммы с простыми числами// Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения.: Тез. докл.V международной конф. 19-20 мая 2003. -Тула, 2003. - С.189- 190.

83. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сб., -2019, Т.20, вып.4, 281–305.

84. Рахмонов З. Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Труды МИАН, -2017, Т.299, С.234–260.

85. Рахмонов З. Х. Распределение чисел Харди–Литтлвуда в арифметических прогрессиях //Изв. АН СССР. Сер. матем.,-1989 Т.53, №1, С.211–224.

86. Сегал В.И. Тригонометрические суммы и некоторые их приложения в теории чисел // Успехи Мат. Наук, 1956, т.1, №3-4, С.147-193.

87. Тулаганова М. И., Файнлейб А.С. Распределение простых векторов в целочисленных решетках. – Ташкент.: Фан, -1989. –112 с.

88. Хамзаев Э. О количестве негольдбаховых чисел в арифметической прогрессии. - Т.: 1989, 29с. - Деп. в ВИНИТИ 19.09.89. № 6096- В89.

89. Холмский В.А. Об одной оценке для функции делителей // Изв. АН РУз., сер. физ.-мат. наук. - Ташкент, 1978. - №3. -С. 76-77.

90. Хооли К. Применения метода решета в теории чисел. –М.: Наука.1987, 136с.

91. Хуа-Ло-Ген. Аддитивная теория простых чисел. //Тр. Матем.инс.им. В.А.Стеклова 1947,том 22, с.3-179

92. Хуа-Ло-Ген. Метод тригонометрических сумм и её приложения в теории чисел. -М.: Мир, 1964. – 240 с.

93. Шнирельман Л.Г. Об аддитивных свойствах чисел // Изв. Донецкого политех инс-та. –Ростов–Дон, 1930, т.14, №2-3, с.3-28.

94. Чубариков В. Н, Добровольский Н. М., Об одном диофантовом уравнении с лакунарными слагаемыми//Чебышевский сб., -2014, Т.15, вып.4, С.124–138.

95. Чубариков В.Н. Многомерные проблемы теории простых чисел. //Чебышевский сборник, том12. Вып.4(2011). С.176-256.

96. Чудаков Н.Г. О проблеме Гольдбаха // Доклады АН СССР. -М.:, 1937. т.17. - с. 331-334.

97. Abrayev B.KH., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers // Uzb.mat.jurnal.-2020.-№3.-C.16-24.

98. Allakov I.A., Israilov M.I. About Simultaneous Representation of Two Natural Numbers by Sum of Three Primes // Computer Algebra in Scientific Computing, CASC-2000: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. -2000. - P.13-20.

99. Allakov I., Safarov A.Sh. On representation of numbers by sum of prime number’s prime fixed degree // Uzbek Mathematical Journal. 2019, №1,p.14-26.

100. Allakov I., Safarov A.Sh. Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number // Russian Mathematics. – 2020. 64, p. 8-21.

101. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N. Karatsuba A.A. Trigonometric sums in Number Theory and Analysis. Berlin. New York. Walterde Gruyter. 2004. 554p

102. Balog A., Perelli A. Exponential sums over primes in an arithmetic progression // Proc. Amer. Math. Soc. - 1985.- №4(93). - P. 578- 582.

103. Brudern J. Some additive problems of Goldbach`s type // Functiones et Appoximatio . - 2000.- №28 - P. 45-73.

104. Brun V. Le cridle d'Eratosphene et le theoreme de Goldbach // Videnskaps-selskapet Skr. Mat. naturw. 1920, v.1, №3.

105. Chen J. R. Estimates for trigonometric sums // Acta Math. Sinica.- 1964.- № 14. - P. 765-768.

106. Chen Jing ren and Pan Chendong. The exceptional set of Goldbach-number (I) // Sci. Sinica. - 1980. - № 4(23). - P. 416- 430.

107. Davenport H., Erdos P. On sums of positive integral k th powers // Ann. of Math. - 1939. -V.40.- P. 533-536.

108. Davenport H. On Waring`s problem for fourth powers // Ann. of Math. - 1939. - V.40.- P. 731-747.

109. Davenport H. On sums of positive integral k th powers// Amer. J. Math. - 1942. - V.64.- P.189-198.

110. De Bruijn N.G. On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$ // Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. - 1951. - V.54. -P.50-60.

111. De Bruijn N.G. The asymptotic behaviour of a function occuring in the theory of primes //J.Indian Math. Soc.(n.s.). -1951. - V.15. -P.25-32.

112. DeshouillersJ.-M., Effinger G., TE Riele H., Zinoviev D. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis.// Electronic research announcements of the American Matematical Society.1997,v.3, p.99-104.

113. Esterman T. On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes // Pros. London Math. Soc. - 1938. - V.44, №2, - P.307-314.

114. Gallagher P.X. Bombier's mean value theorem // Mathematika (Gr. Brit.). - 1968. - V.15. - P.1-6.

115. Gallagher P.X. A large sieve density estimate near $\sigma = 1$ // Inven. Math. - 1970. - №11. - p.329-339.

116. Ghosh A. The distribution of αp^2 modulo 1 // Proc. London Math. Soc. - 1981. -№3 (42). - P.252-269.

117. Harald A Helfgott, David J Platt. Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$. //Experimental Mathematics, -2013, V.22 (4), p.406-409.

118. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some problem's of " Partitio Numerorum". I. A new solution of Waring's problem. // Gottingen Nachrichten. 1920. p.33-54.

119. Harman G. Trigonometric sums over primes I // Mathematika (Gr. Brit.). - 1981. - V.28. - P.249-254.

120. Harman G. Trigonometric sums over primes II // Glasgow Math. J. - 1983. - №1(24). -P.23- 37.

121. Hasse H. Vorlesungen uber Zahlen theorie. Grundlehren Math. Wiss. Band 59. - Springer - Verlag, Berlin and New York. - 1964. - 527 p.

122. Heath-Brown D.R. Weyl' s inequality, Hua' s inequality and Waring' s problem // J. London Math. Soc. - 1988. -№2 (38). - P.216-230.

123. Heath-Brown D.R. Weyl' s inequality and Hua' s inequality // Lect. Notes Math. - 1989. -№1380. - P.87-92.

124. Hilbert D. Beweis fur die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n ter Potenzen (Waringsche problem) // Nachrichten von der Koniglichen Gesellchaft der Wissenschaften zu Gottingen, mathematische-physikalische Klasse aus den jahren 1909, 17-36; Math. Annalen, 1909, v.67, P.281-300.

125. Jutila M. On Linnik' s constants. // Mathematica Scandinavica. - 1977. - v.41. -p.45-62.

126. Liu M.C., Tsang K.M. On pairs of linear equations in three prime variables and application to Goldbach' s problem // J. reine angew. Math. - 1989. - № 399. - P. 109- 136.

127. Liu M.C., Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations // Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval Uniyersity. Cand. Math. Soc. Berlin- New York . - 1989. - P.595-624.

128. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach' s problem // Acta arithm. – 1975.- V.27. -P.353-370.

129. Montgomery H.L. and Vaughan R.C. Multiplicative number theory. I. Classical theory. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006. 552p.

130. Perelli A., Zaccagnini A. On the sum of a prime and a k-th power. //Izv.Ran.Ser.Mat. 1995.v.59.P.185-200.

131. Ram Murty M. Problems in Analytic Number Theory. Second Edition. Springer. 2008. 506p.

132. Rademacher H. Uber eine Erweiterung des Goldbachen Problems // Math. Zeit. - 1925. - V. 25. - P. 627-657.

133. Ramare O. and Rumely R. Primes in arithmetic progressions. Math. 2016. P.325-326,

134. Rosser J.B., Schoenfeld L. Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. - 1962. -№6. - p.64-94.

135. Van–der–Corput J.G. Sur l' hypothese de Goldbach // Proc. Akad. Wet. Amsterdam . 1930, v.41, P. 76-80.

136. Vaughan R.C. On Goldbach's problem // Acta arithm. - 1972. -№1(22). - P.21-48.

137. Vaughan R.C. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. - 1975. -№2 (10). -P.153-162.

138. Vaughan R.C. Sommers trigonometriques sur les nombers premiers // C. R. Acad. Sci. Paris. ser.A. - 1977. - V.285. - P.981-983.

139. Vaughan R.C. A new iterative method in Waring's problem // Acta Math. - 1989. -№ 1-2 (162). - P.1-71.

140. Vaughan R.C. A new iterative method in Waring's problem II // J. London Math. Soc. - 1989. -№2 (39). - P.219-230.

141. Vaughan R.C. The Hardi-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232p. //Русча нашри: Метод Харди-Литтлвуда. –М.: Мир, 1985.–184 с.

142. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables // Acta Math. Sinica. - 1957. -№ 7. - P.102-121.

143. Yamabe Motoo. On a certain upper bound for the divisor function *d(n)* // Repts fac. Sci. and Technol. Meijgo Univ. - 1978. - №18. - p.123-128.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Мундарижа

TABLE OF CONTENTS

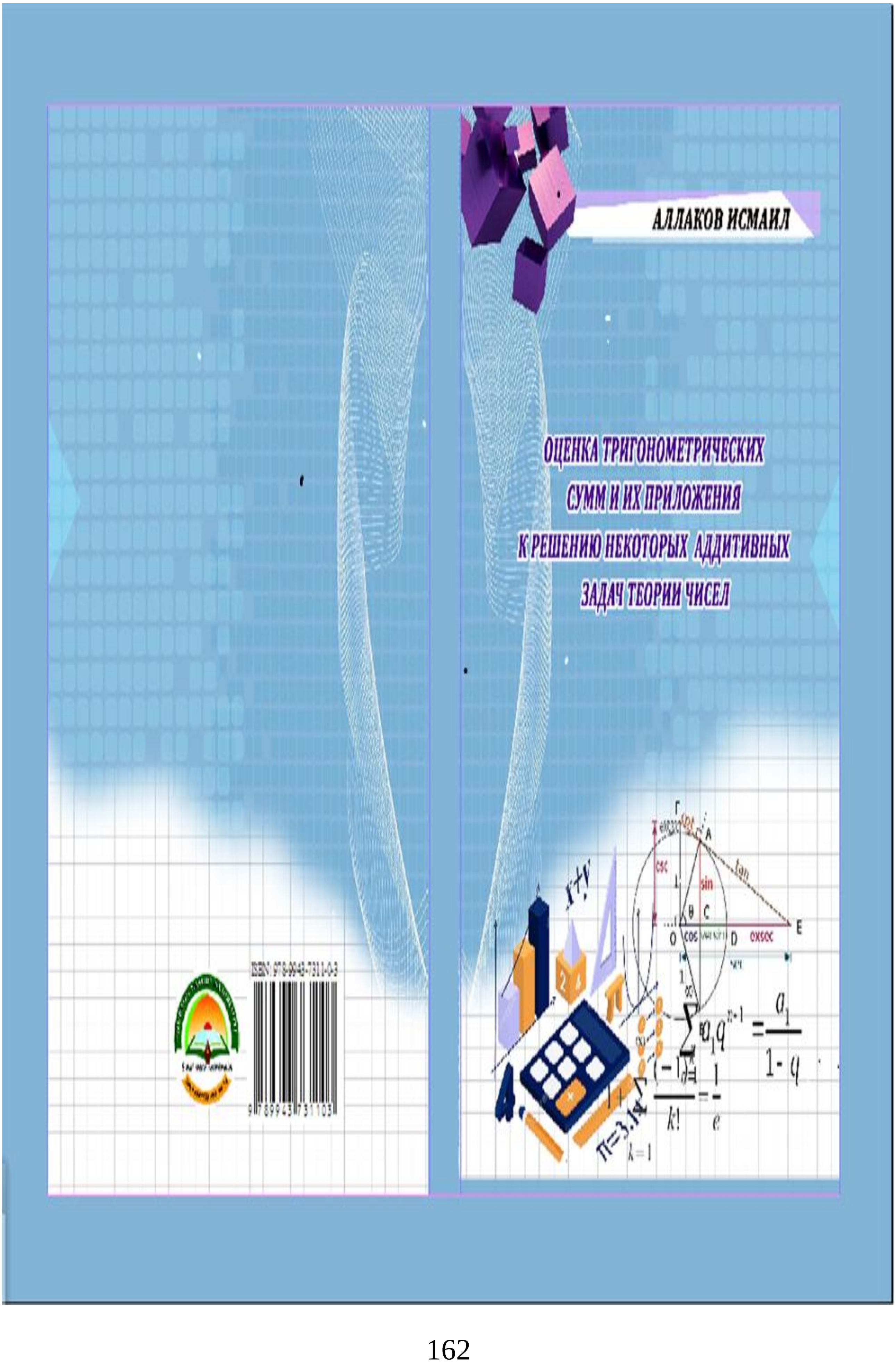
И. Аллаков

Оценка тригонометрических сумм и их приложения
к решению некоторых аддитивных задач теории чисел
(монография)

Редактор: О. САВЕНКО
Ответственный редактор: О. САВЕНКО
Технический редактор: Дж. ШАЙМАТОВ
Корректор: Г. РАХМАТОВА
Верска: З. ТУРСУНОВА

Издательская лицензия AI № 031 от 20.07.2018.
Подписано в печать 27.10.2021 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 10.
Изд. л. 9,3. Тираж 350 экз. Заказ №298

АДРЕС ИЗДАТЕЛЬСТВО И ТИПОГРАФИИ:
Издательство “Surxon-nashr”
Термез, ул. “Айритам”, д. 25/15
Тел: (+99855) 451-24-74


АЛЛАКОВ ИСМАИЛ
ОЦЕНКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ
СУММ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ
ISBN: 978-9943-7311-0-3
9789943731103