В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

МУРАТОВА ХОСИЯТ АБДУВАКИЛЕВНА

НИЛЬРАДИКАЛИ БЕРИЛГАН ЕЧИЛУВЧАН, ҲАМДА УЧ ЎЛЧАМЛИ СОДДА ЛИ АЛГЕБРАСИ БИЛАН АССОЦИИРЛАНГАН ЛЕЙБНИЦ СУПЕРАЛГЕБРАЛАРИНИНГ ТАСНИФИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021

УДК: 512.554.38

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

МУРАТОВА ХОСИЯТ АБДУВАКИЛЕВНА

НИЛЬРАДИКАЛИ БЕРИЛГАН ЕЧИЛУВЧАН, ҲАМДА УЧ ЎЛЧАМЛИ СОДДА ЛИ АЛГЕБРАСИ БИЛАН АССОЦИИРЛАНГАН ЛЕЙБНИЦ СУПЕРАЛГЕБРАЛАРИ ТАСНИФИ

01.01.06 – Алгебра

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.3.PhD/FM441 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И. Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар: **Худойбердиев Аброр Хакимович**
физика-математика фанлари доктори, доцент

Расмий оппонентлар: **Арзикулов Фарходжон Нематжонович**
физика-математика фанлари доктори

Курбанбаев Туўелбай Кадирбаевич
физика-математика фанлари номзоди

Етакчи ташкилот: Ўзбекистон Миллий университети

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «___»_________соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174,Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил «___» __________ куни тарқатилди.
(2021 йил «___» ______________даги __-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,ф.-м.ф.н.,
катта илмий ходим

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Бугунги кунга келиб жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолатларда математик физика ва фундаментал алгебранинг асосларини тадқиқ қилиш масалаларига келтирилади. Супералгебраларга бўлган қизиқишнинг кескин ортиши уларнинг физикада бозон ва фермионларни бирлаштириш, ички ва динамик симметриялар гуруҳини бир мажмуага йиғиш ва барча фундаментал кучларни ягона майдон назариясига ўтказиш имконини берганлиги билан асосланади. Ли супергруппалари ва супералгебралари суперсимметриялар назариясида энг кўп қўлланиладиган суперкўпхилликлар бўлиб, Ли суперагебраларининг тузилиш назарияси ва таснифлаш муаммолари ноассоциатив алгебраларнинг муҳим вазифаларидан бўлиб келмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда чекли ўлчамли Ли супералгебралари ва уларнинг умумлашмаси ҳисобланган Лейбниц супералгебраларини тадқиқ қилиш, содда ва ечилувчанлик шартларини қаноатлантирувчи Лейбниц супералгебраларини таснифлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Ли алгебралар назариясининг классик теоремаларининг аксарияти Ли ва Лейбниц супералгебралари учун ўринли бўлмаганлиги сабабли, ечилувчан Лейбниц супералгебраларини таснифлаш масаласи нил-эркли дифференциаллашларни топиш ва улар орқали ечилувчан супералгебраларни аниқлашга келтирилади. Бу борада: жуфт қисми берилган Лейбниц супералгебраларини таснифлаш, нильпотент Лейбниц супералгебраларнинг дифференциаллашларини топиш ва ечилувчан Лейбниц алгебраларни тавсиф қилиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган амалий математика, статистик механика, физика ва рақамли иқтисодиёт фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда супералгебралар математиканинг турли соҳаларида, айниқса геометрия, топология ва физикада ўзининг янги татбиқларини топишда давом этмоқда. Охирги йилларда нильпотент Лейбниц супералгебраларини таснифлаш ва ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тузилиш назариясини аниқлаш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Вазирлар Маҳкамасининг қарори билан «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида ечилувчан Лейбниц алгебралари ва супералгебралари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг Республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот Ўзбекистон Республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Оҳирги йиллар давомида Ли супералгебралари назариясида катта илмий натижаларга эришилди. Жумладан, содда ва яримсодда Ли супералгебралари В.Кац, Д.А.Лейтес, Ф.А.Березин, В.С.Ретах ва бошқаларнинг ишларида батафсил таснифланган бўлса, Нильпотент Ли супералгебралари Ю.Хакимжанов, Р.М. Наварро, Л.М.Камачо, М.Гилдлар томонидан ўрганилган. Хусусан, нильиндекси максимал бўлган Ли супералгебраларининг жуфт қисмининг ўлчами 2 га, тоқ қисмининг ўлчами эса тоқ сонга тенг бўлиб, хар бир ўлчамда бундай Ли супералгебралари ягона эканлиги исботланган. Нильрадикали берилган ечилувчан Ли супералгебралари ва уларга доир муҳим фактлар К. Бауенса, Л.Б. Ливен, М.Родригес-Валлерте, Г.Салгадо, О.А.Санчес-Валенсуэла ва бошқаларнинг илмий мақолаларида келтирилган.

Бичизиқли кўпайтма билан аниқланган ноассоциатив алгебра ҳисобланган Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий элементига ўнгдан кўпайтириш оператори дифференциаллаши бўлади. Бундай алгебралар синфи илк марта А.М.Блохнинг ишида келтирилган бўлсада, Ж.-Л. Лоде ва Т.Пирашвилининг циклик гомологияларга оид ишларидан кейингина бу алгебраларга катта қизиқиш пайдо бўлди. Лейбниц алгебраси атамасидан биринчи бўлиб Ж.-Л. Лоде фойдаланган. Лейбниц алгебраларини тадқиқ қилиш масалаларига М. Казас, Р.Курдиани, Ш.А. Аюпов, А.Джумадилдаев, Б.А. Омиров, Х.Р. Гомез ва бошқа олимларнинг ишлари бағишланган. Хусусан, содда ва яримсодда Лейбниц алгебраларининг таърифлари А.Джумадилдаев томонидан киритилиб, содда ва ярим содда Лейбниц алгебраларига мисоллар келтирилган. Бундан ташқари, Лейбниц алгебралари градуировкага, нильиндексига, характеристик кетма-кетлигига шартлар қўйиш ёрдамида Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, А.Х.Худойбердиев, М.Ладра, М.Казас, Х.Касаз, И.А.Каримжонов, Ж.К.Адашев, К.К.Абдурасулов Х.М.Анкочеа, А.Шабанская, И.С.Рахимов, Д.Барнс, Л.Боско-Дунбар, К.К.Масутова, Е.М.Канэте, М.Инсуа ва бошқалар томонидан ўрганилган.

Ли ва Лейбниц алгебралари ҳамда Ли супералгебраларини ўз ичига олган

Лейбниц супералгебралари Лейбниц алгебрасига Грассман қобиғини таъсир қилиш ёрдамида аниқланган айният орқали характерланади. Бундай супералгебралар учун Лейбниц алгебралари тузилиш назариясидаги маълум фактлар қисман ўринли бўлиб, уларнинг жуфт қисми айнан Лейбниц алгебраси бўлади. Супералгебранинг характеристик кетма-кетлигига, нильиндексига ва ўлчамига қўйилган шартлар ёрдамида нол-филиформ, филиформ ва бошқа қатор нильпотент Лейбниц супералгебралари Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, А.Х.Худойбердиев, Л.Камачо, Х.Гомез, Р.Наварро, С.Албеверио, Х.Гарсиа-Мартинес ва бошқалар томонидан таснифланган. Хусусан, нильпотент Лейбниц супералгебраларининг максимал нильиндекси $n+m+1$ эканлиги исботланиб, бундай супералгебралар тўлиқ таснифланган. Ечилувчан Лейбниц супералгебраларининг таснифлаш масаласида нильрадикалининг нолинчи даражали дифференциаллашларидан фойдаланиш ўринли эканлиги нильрадикали берилган Лейбниц супералгебраларини таснифлаш имконини берди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги математика институтининг ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87 рақамли “Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос” + “Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага татбиқлари” мавзусидаги илмий-тадқиқот лойиҳаси, ҳамда институтининг ЁФА-Фтех-2018-79 рақамли «Лейбниц алгебралари тасвирлари мавзусидаги ёшлар илмий-тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади нильрадикали берилган ечилувчан Лейбниц супералгебралари, ҳамда уч ўлчамли содда Ли алгебраси билан ассоциирланган Лейбниц супералгебраларини таснифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

жуфт қисми уч ўлчамли содда Ли алгебрасига изоморф бўлган Лейбниц супералгебраларини таснифлаш;

нильрадикали берилган ечилувчан Лейбниц супералгебраларини таснифлаш;

нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебраси бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш, ҳамда бундай алгебраларнинг коўлчами максимал бўлганларини когомологик қаттиқлигини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти жуфт қисми содда бўлган Лейбниц супералгебралари, ечилувчан Лейбниц супералгебралари; ечилувчан Ли алгебралари; алгебра ва супералгебраларнинг дифференциаллашлари; когомологик группалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети уч ўлчамли Ли алгебраси билан ассоциирланган Лейбниц супералгебралари, нильрадикалининг нильиндекси $n+m$ дан кичик бўлмаган ечилувчан Лейбниц супералгебралари, нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ алгебрадан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари.

Тадқиқотнинг усуллари. Ишда ассоциатив бўлмаган алгебралар назарияси усуллари, структуравий ва когомологик усуллар, шунингдек, чекли ўлчамли алгебралар усуллари ва инвариантлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

жуфт қисми уч ўлчамли содда Ли алгебрасига изоморф бўлган Лейбниц супералгебралари таснифланган ва тоқ қисмининг ўлчами учдан катта бўлганда бундай супералгебралар Лейбниц алгебраси эканлиги исботланган;

нильрадикали максимал нильиндексли Ли супералгебраси бўлган ечилувчан Лейбниц супералгебралари таснифланиб, унинг тоқ қисми Ли алгебрасига изоморф бўлганда ечилувчан супералгебраси ҳам Ли супералгебраси эканлиги исботланган;

нильрадикалининг характеристик кетма-кетлиги $(n \mid m)$ ва $(n-1, 1 \mid m)$ бўлган, ҳамда нильиндекси $n+m$ га тенг ечилувчан Лейбниц супералгебралари таснифланган;

нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебраларга изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган, ҳамда ко-ўлчами максимал бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группалар фазосининг ўлчамлари аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Диссертацияда қўлланилган усуллар ва олинган натижаларни Ўзбекистон Республикаси олий ўқув юртлари магистрантлари ва докторантлари учун ноассоциатив алгебралар бўйича ўтиладиган махсус курсларда фойдаланиш мумкин. Бундан ташқари, диссертация натижалари ҳар хил типдаги нильрадикалли ечилувчан Лейбниц супералгебраларни таснифлаш, жуфт қисмига соддалик ва ечилувчанлик шартлари қўйилган Лейбниц супералгебраларини ўрганишда бир қатор гипотезаларнинг тўғрилигини текширишга имкон беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги, алгебраларнинг бошқа синфларидаги маълум усулларидан, модуллар ва тасвирлар назарияси, супералгебраларининг структуравий назариясидаги фундаментал натижалардан фойдаланилганлиги билан асосланади. Mathematica 12 дастурлаш тилида яратилган махсус дастурлар ёрдамида кичик ўлчамли супералгебраларнинг дифференциаллашларига доир натижалар текширилган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ечилувчан супералгебраларга оид натижалардан бошқа супералгебралар кўпхилликларини тадқиқ қилишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти олинган натижалардан Лейбниц супералгебраларини таснифлаш ва уларнинг когомологик группаларини ўрганиш масалаларида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Нильрадикали берилган ечилувчан, ҳамда уч ўлчамли содда Ли алгебраси билан ассоциирланган Лейбниц супералгебралари бўйича олинган натижалар асосида:

нильрадикали максимал нильиндексли Ли супералгебраси бўлган ечилувчан Лейбниц супералгебралари таснифидан ЁФА-Фтех-2018-77 рақамли «Яримсодда ва нильпотент алгебраларнинг когомологик группалари» мавсусидаги фундаментал лойиҳада нильрадикали берилган ечилувчан супералгебраларни таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг 2021 йил 29 октябрдаги 2/1255-2983-маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши, нильрадикали берилган ечилувчан Лейбниц супералгебраларини таснифлаш, ҳамда бундай супералгебралар синфи қаттиқ супералгебраларга эга эканлигини исботлаш имконини берган;

нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебраси бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифи ОТ–Ф4–31 рақамли «Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар» мавсусидаги фундаментал лойиҳада ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2021 йил 27 сентябрдаги 04/11-5437-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши нильрадикали максимал узунликдаги Ли бўлмаган квази-филиформ Лейбниц алгебрасига изоморф ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш, ҳамда нильрадикалининг ко-ўлчами ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг қаттиқлигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий, 5 таси республика журналларида, шунингдек 9 та маъруза тезислари илмий конференция материалларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, ўнта бўлимга бўлинган учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 101 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган. Шунингдек, бу қисмда диссертация мавзуси бўйича муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«sl_2 Ли алгебраси билан ассоциирланган Лейбниц супералгебралари»** деб номланувчи биринчи бобида Ли ва Лейбниц супералгебралари назариясига оид асосий натижаларни олишда зарур бўлган муҳим тушунчалар келтирилган. Шунингдек, уч ўлчамли содда Ли алгебраси билан ассоциирланган Лейбниц супералгебралари тавсифланган.

1-таъриф. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

L алгебра Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда [-,-] – L да аниқланган кўпайтириш амали.

Таъкидлаш жоизки, Лейбниц алгебрасида $[x, x]=0$ шарт бажарилганда у Ли алгебраси бўлиб қолади, натижада Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг умумлашмаси эканлиги келиб чиқади.

Маълумки, фақат $\{0\}$ ва G идеалларга эга бўлиб, $G^2\neq\{0\}$ шартни қаноатлантирувчи Ли алгебраси *содда* дейилади.

2-таъриф. Максимал ечилувчан идеали $\{0\}$ га тенг бўлган Ли алгебраси яримсодда дейилади.

Энди Лейбниц алгебраси учун бимодуль тушунчасини келтирамиз.

3-таъриф. M вектор фазо L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги учта шартларни қаноатлантирувчи $[-, -] : L\times M \to M$ ва $[-, -] : M\times L \to M$ бичизиқли акслантиришлар аниқланган бўлса, у ҳолда M фазога L-бимодуль ёки тасвир дейилади:

$$[m, [x, y]=[[m, x], y] - [[m, y], x],$$
$$[x, [m, y]=[[x, m], y] - [[x, y], m],$$
$$[x, [y, m]=[[x, y], m] - [[x, m], y].$$

бу ерда $m\in M$ ва $x, y\in L$.

Агар L-бимодуль нолдан фарқли L-қисмбимодульга эга бўлмаса, у ҳолда у *содда* ёки *келтирилмас* дейилади. Шунингдек, L-бимодуль L-қисмбимодулларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодаланмаса *ёйилмайдиган* деб аталади.

Д.Барнс томонидан ихтиёрий чекли ўлчамли Лейбниц алгебраси учун содда L-бимодуль симметрик ёки антисимметрик бўлиши таъкидланган.

Антисимметрик L-бимодуль деб $[L,M]=\{0\}$ шартни қаноатлантирувчи L-бимодульга айтилади, барча $x\in L$ ва $m\in M$ элементлар учун $[x,m] = -[m,x]$ шарт ўринли бўлган L-бимодуль эса *симметрик* L-бимодуль деб аталади.

Хусусан, L уч ўлчамли содда Ли алгебрасига изоморф бўлса, у ҳолда M да $\{x_0, x_1,\ldots, x_n\}$ базис мавжуд бўлиб, ушбу базисда алгебранинг кўпайтмаси қуйидаги кўринишлардан бирига келади:

$$N_1:\left\{\begin{array}{ll}[x_i,h]=(n-2i)x_i, & [h,x_i]=-(n-2i)x_i,\\ [x_i,f]=x_{i+1}, & [f,x_i]=-x_{i+1},\\ [x_i,e]=-i(n-i+1)x_{i-1}, & [e,x_i]=i(n-i+1)x_{i-1},\end{array}\right. \qquad N_2:\left\{\begin{array}{l}[x_i,h]=(n-2i)x_i,\\ [x_i,f]=x_{i+1},\\ [x_i,e]=-i(n-i+1)x_{i-1}.\end{array}\right.$$

Алгебралар назариясидан маълумки, Грассман қобиғи ёрдамида ихтиёрий алгебралар кўрҳиллиги учун Z_2-градуирланган алгебраларни, яъни супералгебраларни ҳосил қилиш мумкин. Супералгебралар кўпҳиллигининг аҳамиятли жиҳати шундаки, уларнинг жуфт қисми айнан шу кўпҳилликдаги алгебра бўлади. Хусусан, Ли ва Лейбниц супералгебраларининг жуфт қисми мос равишда Ли ва Лейбниц алгебраларидан иборат.

4-таъриф. Z_2-градуирланган $L=L_0\oplus L_1$ вектор фазода [-,-] кўпайтма аниқланиб, ихтиёрий $x\in L, y\in L_\alpha, z\in L_\beta$ элементлар учун

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-(-1)^{\alpha\beta}[[x,z],y] - \text{Лейбниц суперайнияти}$$

ўринли бўлса, у ҳолда $L=L_0\oplus L_1$ Лейбниц супералгебраси деб аталади.

Берилган L супералгебранинг L_0 ва L_1 қисм фазолари мос равишда унинг жуфт ва тоқ қисмлари деб номланади. Супералгебранинг таърифидан L_0 фазонинг Лейбниц алгебраси, L_1 фазонинг эса L_0-бимодуль бўлиши келиб чиқади.

Таъкидлаш жоизки, агарда L Лейбниц супералгебрасининг ихтиёрий $x\in L_\alpha$ ва $y\in L_\beta$ элементлари учун $[x,y]=-(-1)^{\alpha\beta}[y,x]$ айният бажарилса, у ҳолда Лейбниц суперайнияти Якоби суперайниятига айланади. Демак, Лейбниц алгебраси Ли алгебрасининг умумлашмаси бўлгани каби, Лейбниц супералгебраси ҳам Ли супералгебрасининг умумлашмаси ҳисобланади.

Т.Курбанбаев ва Р.Турдибаевларнинг ишларида $V(n_i)=\{v_0^i,\ldots,v_{n_i}^i\}$, $1\le i\le k$ и $n_1\ge n_2\ge\ldots\ge n_k$ содда sl_2-бимодулларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ёйилувчи M – sl_2-*би*модуль бўлиб, ёйилмайдиган Лейбниц sl_2-бимодуль бўлиши учун $n_i-n_{i+1}=2$, $1\le i\le k-1$ бўлиши зарур ва етарли эканлиги кўрсатилган, ҳамда бундай sl_2-бимодуллар изоморфизм аниқлигида иккита эканлиги исботланган:

$1\le p\le \frac{k}{2}$ бўлганда

$$M_3:\begin{cases}
[v_i^{2p-1},h]=(n-4p+4-2i)v_i^{2p-1}, & [h,v_i^{2p-1}]=0,\\
[v_i^{2p-1},f]=v_{i+1}^{2p-1}, & [f,v_i^{2p-1}]=0,\\
[v_i^{2p-1},e]=-i(n-4p+5-i)v_{i-1}^{2p-1}, & [e,v_i^{2p-1}]=0,\\
[v_i^{2p},h]=(n-4p+2-2i)v_i^{2p}, & [h,v_i^{2p}]=2(n-2p-i+3)v_{i+1}^{2p-1}-\\
& \qquad -(n-2p-2i+2)v_{i+1}^{2p}-2iv_{i-1}^{2p+1},\\
[v_i^{2p},f]=v_{i+1}^{2p}, & [f,v_i^{2p}]=v_{i+2}^{2p-1}-v_{i+1}^{2p}+v_i^{2p+1},\\
[v_i^{2p},e]=-i(n-4p+1-i)v_{i-1}^{2p}, & [e,v_i^{2p}]=(n-2p-i+3)((n-2p-i+4)\\
& \qquad v_i^{2p-1}+iv_{i-1}^{2p})+i(i-1)v_{i-2}^{2p+1},\\
[v_i^{2p+1},h]=(n-4p+1-i)v_i^{2p+1}, & [h,v_i^{2p+1}]=0,\\
[v_i^{2p+1},f]=v_{i+1}^{2p+1}, & [f,v_i^{2p+1}]=0,\\
[v_i^{2p+1},e]=-i(n-4p-1-i)v_{i-1}^{2p+1}, & [e,v_i^{2p+1}]=0
\end{cases}$$

ва барча $1\leq p\leq \frac{k-1}{2}$, $n=n_1$ учун

$$M_4:\begin{cases}
[v_i^1,h]=(n-2i)v_i^1, & [h,v_i^1]=-(n-2i)v_i^1-2iv_{i-1}^2,\\
[v_i^1,f]=v_{i+1}^1, & [f,v_i^1]=-v_{i+1}^1+v_i^2,\\
[v_i^1,e]=-i(n-i+1)v_{i-1}^1, & [e,v_i^1]=i(n-i+1)v_{i-1}^1+i(i-1)v_{i-2}^2,\\
[v_i^{2p},h]=(n-4p+2-2i)v_i^{2p}, & [h,v_i^{2p}]=0,\\
[v_i^{2p},f]=v_{i+1}^{2p}, & [f,v_i^{2p}]=0,\\
[v_i^{2p},e]=-i(n-4p+1-i)v_{i-1}^{2p}, & [e,v_i^{2p}]=0,\\
[v_i^{2p+1},h]=(n-4p-2i)v_i^{2p+1}, & [h,v_i^{2p+1}]=(n-4p-i+1)v_{i+1}^{2p}-\\
 & \qquad -(n-4p-2i)v_{i+1}^{2p+1}-2iv_{i-1}^{2p+2},\\
[v_i^{2p+1},f]=v_{i+1}^{2p+1}, & [f,v_i^{2p+1}]=v_{i+2}^{2p}-v_{i+1}^{2p+1}+v_i^{2p+2},\\
[v_i^{2p+1},e]=-i(n-4p-1-i)v_{i-1}^{2p+1}, & [e,v_i^{2p+1}]=(n-4p-i+1)((n-4p-i+2)\\
 & \qquad v_i^{2p}+iv_{i-1}^{2p+1})+i(i-1)v_{i-2}^{2p+2}.
\end{cases}$$

Қуйидаги тасдиқда жуфт қисми уч ўлчамли содда Ли алгебрасидан иборат, тоқ қисмининг ўлчами эса 2 га тенг бўлган Лейбниц супералгебраларини таснифини келтирамиз.

1-тасдиқ. Айтайлик, $L=sl_2\oplus L_1$ – Лейбниц супералгебраси бўлиб, L_1 – содда симметрик sl_2-бимодуль, ҳамда $\dim L_1=2$ бўлсин. У ҳолда L қуйидаги Лейбниц супералгебраларидан бирига изоморф бўлади:

$$S_1:\begin{cases}
[e,h]=-[h,e]=2e, & [h,f]=-[f,h]=2f, & [e,f]=-[f,e]=h,\\
[x_0,h]=-[h,x_0]=x_0, & [x_0,f]=-[f,x_0]=x_1,\\
[x_1,h]=-[h,x_1]=-x_1, & [x_1,e]=-[e,x_1]=-x_0,
\end{cases}$$

$$S_2:\begin{cases}
[e,h]=-[h,e]=2e, & [h,f]=-[f,h]=2f, & [e,f]=-[f,e]=h,\\
[x_0,h]=-[h,x_0]=x_0, & [x_0,f]=-[f,x_0]=x_1, & [x_1,e]=-[e,x_1]=-x_0,\\
[x_1,h]=-[h,x_1]=-x_1, & [x_0,x_0]=2e, & [x_1,x_1]=2f,\\
[x_0,x_1]=[x_1,x_0]=h.
\end{cases}$$

2-тасдиқ. Айтайлик, $L=sl_2\oplus L_1$ – Лейбниц супералгебраси бўлиб, L_1 – содда симметрик sl_2-бимодуль, ҳамда $\dim L_1\geq 3$ бўлсин. У ҳолда L Лейбниц алгебраси бўлади.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида Лейбниц супералгебрасининг тоқ қисми ёйилмайдиган sl_2-бимодуль бўлган ҳолат ўрганилган.

3-тасдиқ. Айтайлик, $L=sl_2\oplus L_1$ – Лейбниц супералгебраси бўлиб, L_1 – sl_2-бимодуль M_3 ва M_4 бимодуллардан бирига изоморф бўлсин. У ҳолда L Лейбниц алгебраси бўлади.

Диссертациянинг **«Нильрадикаллари берилган ечилувчан Лейбниц супералгебралари»** деб номланган иккинчи бобида нильрадикали максимал нильиндексли Ли супералгебраси ва нильиндекси ўлчамига тенг бўлган Лейбниц супералгебрасидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц супералгебраларининг таснифи олинган.

Маълумки, нильпотентлик ва ечилувчанлик тушунчалари Лейбниц супералгебраси учун ҳам Лейбниц алгебраларидаги каби аниқланади. Бунинг учун мос равишда *қуйи марказий* ва *ҳосилавий* қаторларни келтирамиз:

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1], \qquad L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}], \qquad k\geq 1.$$

5-таъриф. Агар бирор $k\in N$ ($s\in N$) сони учун $L^k=0$ (мос равишда, $L^{[s]}=0$) шарт бажарилса, у ҳолда L Лейбниц алгебраси нильпотент (мос равишда, ечилувчан) дейилади.

Бу шартни қаноатлантирувчи энг кичик k сони L алгебранинг *нильпотентлик индекси* ёки *нильиндекси* деб аталади. Таъкидлаш жоизки, иккита нильпотент идеалларнинг йиғиндиси ҳам нильпотент бўлиб, натижада Лейбниц алгебраси ягона максимал нильпотент идеалга эга бўлади ҳамда у *нильрадикал* деб номланади.

Берилган L Лейбниц супералгебрасининг *нильрадикали* деб унинг $[L,L]$ идеалини ўз ичига олувчи максимал нильпотент идеалига айтилади.

Ли ва Лейбниц супералгебраларининг максимал нильиндекси мос равишда $n+m$ ва $n+m+1$ га тенг эканлигини таъкидлаймиз (бу ерда $n=dim\ L_0$, $m=dim\ L_1$). Ж.Гомез, Ю.Хакимжанов, Р.Наварроларнинг ишларида нильиндекси $n+m$ га тенг бўлган ($n+m$) - ўлчамли Ли супералгебралари таснифланган. Шунингдек, $n=2$, m – тоқ эканлиги ва супералгебрада $\{e_1, e_2, y_1, y_2,\dots, y_m\}$ базис мавжуд бўлиб, унинг ушбу базисдаги кўпайтмаси қуйидагича бўлиши исботланган:

$$N_{2,m}:\begin{cases}[y_i,e_1]=y_{i+1}, & 1\leq i\leq m-1,\\ [y_{m+1-i},y_i]=(-1)^{i+1}e_2, & 1\leq i\leq \dfrac{m+1}{2}.\end{cases}$$

Кейинчалик ечилувчан супералгебралар ва алгебраларнинг кўпайтмаларини келтиришда қулайлик учун нильрадикалнинг кўпайтмаларини тушириб қолдирамиз.

4-тасдиқ. Айтайлик, $L=L_0\oplus L_1$ – нильрадикали $N_{2,m}$ бўлган ($m+3$)- ўлчамли ечилувчан Лейбниц супералгебраси бўлсин. У ҳолда L супералгебра қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган супералгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$M_1:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [x,x]=e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(i-\dfrac{m+1}{2})y_i, & 1\leq i\leq m,\end{cases}$$

$$M_2(\alpha):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=-[x,e_2]=\alpha e_2, \quad \alpha\in\mathbb{C},\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(i-\dfrac{m+1}{2})y_i, & 1\leq i\leq m,\end{cases}$$

$$M_3:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_2, & [e_2,x]=-[x,e_2]=e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(i-\dfrac{m+1}{2})y_i, & 1\leq i\leq m,\end{cases}$$

$$M_4(b_2,b_4,\ldots,b_{m-1}):\begin{cases}[e_2,x]=-[x,e_2]=2e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=y_i+\sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{m-i+1}{2}\right]} b_{2k}y_{i+2k-1}, \quad 1\le i\le m.\end{cases}$$

5-тасдиқ. Айтайлик, $L=L_0\oplus L_1$ – нильрадикали $N_{2,m}$ бўлган $(m+4)$ ўлчамли ечилувчан Лейбниц супералгебраси бўлсин. У ҳолда L супералгебра қуйидаги Ли супералгебрасига изоморф бўлади:

$$M_5:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=-[x,e_2]=(m-1)e_2,\\ [e_1,z]=-[z,e_2]=2e_2, & [e_2,z]=-[z,e_2]=2e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(1-i)y_i, & 1\le i\le m.\end{cases}$$

Айтайлик, $L=L_0\oplus L_1$ нильпотент Лейбниц супералгебраси бўлсин. Ихтиёрий $x\in L_0$ учун ad_x ўнгдан кўпайтириш операторини қарасак, бу оператор $L_i, i\in\{0,1\}$ фазонинг нильпотент эндоморфизми бўлади. Ушбу ad_x операторнинг Жордан матрицаси катаклари ўлчамларини камаювчи тартибда ёзиш натижасида ҳосил бўлган кетма-кетликни $C_i(x)\ (i\in\{0,1\})$ каби белгилаб, $C_i(L_0)$ тўпламда лексикографик тартиб киритамиз.

6-таъриф. Ушбу $C(L)=\left(\max\limits_{x\in L_0\setminus L_0^2} C_0(x)\,|\,\max\limits_{x\in L_0\setminus L_0^2} C_1(x)\right)$ кетма-кетлик L Лейбниц супералгебрасининг характеристик кетма-кетлиги дейилади.

Нильиндекси $n+m$ бўлган $(n+m)$ ўлчамли нильпотент Лейбниц супералгебраларининг характеристик кетма-кетлиги $(n\mid m)$ ёки $(n-1, 1\mid m)$ ёки $(n\mid m-1, 1)$ га тенг бўлиши кўрсатилган. Характеристик кетма-кетлиги $(n\mid m)$ бўлган нильпотент Лейбниц супералгебраларида унинг ҳарактеристик кетма-кетлиги $(1, 1\mid 2)$ ёки $(2\mid m)$ бўлиши исботланган, бу ерда m – тоқ сон.

Б.Омиров, А.Худойбердиев ва бошқаларнинг ишларидан нильиндекси $n+m$ га тенг ва характеристик кетма-кетлиги $(n-1, 1|\ m)$ бўлган Лейбниц супералгебралари тўлиқ таснифланган. Хусусан, $m=n-1$ ёки $m=n$ эканлиги кўрсатилиб, L супералгебрада супералгебранинг кўпайтмалари қуйидаги кўринишда эканлиги исботланган:

агар $m=n-1$ бўлса,

$$L(\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_n,\theta):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & & 1\le j\le n-2,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, & 2\le i\le n-1,\\ [y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\ [e_1,e_2]=\alpha_4e_4+\alpha_5e_5+\ldots+\alpha_{n-1}e_{n-1}+\theta e_n, & & \\ [e_j,e_2]=\alpha_4e_{j+2}+\alpha_5e_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+2-j}e_n, & & 2\le j\le n-2,\\ [y_1,e_2]=\alpha_4y_3+\alpha_5y_4+\ldots+\alpha_{n-1}y_{n-2}+\theta y_{n-1}, & & \\ [y_j,e_2]=\alpha_4y_{j+2}+\alpha_5y_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+1-j}y_{n-1}, & & 2\le j\le n-3,\end{cases}$$

$$G(\beta_4,\beta_5,\ldots,\beta_n,\gamma):\left\{\begin{array}{lll}
[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\
[y_j,e_1]=y_{j+1}, & & 1\le j\le n-2,\\
[e_1,y_1]=\dfrac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\dfrac{1}{2}y_i, & 3\le i\le n-1,\\
[y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\
\multicolumn{3}{l}{[e_1,e_2]=\beta_4e_4+\beta_5e_5+\ldots+\beta_ne_n,}\\
\multicolumn{3}{l}{[e_2,e_2]=\gamma e_n,}\\
\multicolumn{3}{l}{[e_j,e_2]=\beta_4e_{j+2}+\beta_5e_{j+3}+\ldots+\beta_{n+2-j}e_n, \quad 3\le j\le n-2,}\\
\multicolumn{3}{l}{[y_j,e_2]=\beta_4y_{j+2}+\beta_5y_{j+3}+\ldots+\beta_{n+1-j}y_{n-1}, \quad 1\le j\le n-3,}
\end{array}\right.$$

$m=n$ бўлса,

$$M(\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_n,\theta,\tau):\left\{\begin{array}{lll}
[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\
[y_j,e_1]=y_{j+1}, & & 1\le j\le n-1,\\
[e_1,y_1]=\dfrac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\dfrac{1}{2}y_i, & 2\le i\le n,\\
[y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\
\multicolumn{3}{l}{[e_1,e_2]=\alpha_4e_4+\alpha_5e_5+\ldots+\alpha_{n-1}e_{n-1}+\theta e_n,}\\
\multicolumn{3}{l}{[e_j,e_2]=\alpha_4e_{j+2}+\alpha_5e_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+2-j}e_n, \qquad 2\le j\le n-2,}\\
\multicolumn{3}{l}{[y_1,e_2]=\alpha_4y_3+\alpha_5y_4+\ldots+\alpha_{n-1}y_{n-2}+\theta y_{n-1}+\tau y_n,}\\
\multicolumn{3}{l}{[y_2,e_2]=\alpha_4y_4+\alpha_5y_4+\ldots+\alpha_{n-1}y_{n-1}+\theta y_n,}\\
\multicolumn{3}{l}{[y_j,e_2]=\alpha_4y_{j+2}+\alpha_5y_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+2-j}y_n, \qquad 3\le j\le n-2,}
\end{array}\right.$$

$$H(\beta_4,\beta_5,\ldots,\beta_n,\gamma,\delta):\left\{\begin{array}{lll}
[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\
[y_j,e_1]=y_{j+1}, & & 1\le j\le n-2,\\
[e_1,y_1]=\dfrac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\dfrac{1}{2}y_i, & 3\le i\le n-1,\\
[y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\
\multicolumn{3}{l}{[e_1,e_2]=\beta_4e_4+\beta_5e_5+\ldots+\beta_ne_n,}\\
\multicolumn{3}{l}{[e_2,e_2]=\gamma e_n,}\\
\multicolumn{3}{l}{[e_j,e_2]=\beta_4e_{j+2}+\beta_5e_{j+3}+\ldots+\beta_{n+2-j}e_n, \quad 3\le j\le n-2,}\\
\multicolumn{3}{l}{[y_j,e_2]=\beta_4y_{j+2}+\beta_5y_{j+3}+\ldots+\beta_{n+1-j}y_n, \quad 1\le j\le n-3.}
\end{array}\right.$$

Қуйидаги теоремаларда нильрадикаллари ёйилмайдиган, ҳамда $L(\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_n,\theta)$, $M(\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_n,\theta,\tau)$, $H(\beta_4,\beta_5,\ldots,\beta_n,\delta,\gamma)$ ва $G(\beta_4,\beta_5,\ldots,\beta_n,\gamma)$ синфлардан олинган ечилувчан Лейбниц супералгебраларининг таснифини келтирамиз.

1-теорема. R – нильрадикали $L(\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_n,\theta)$ синфдан олинган ечилувчан супералгебрага изоморф бўлган Лейбниц супералгебраси бўлин. У ҳолда $\alpha_4 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_n = \theta = 0$ бўлиб, R қуйидаги супералгебрага изоморф бўлади:

$$SL: \begin{cases} [e_1, x] = 2e_1, \quad [e_2, x] = 2e_2, \\ [x, e_1] = -2e_1, \quad [e_i, x] = 2(i-1)e_i, \quad 3 \le i \le n, \\ [x, y_1] = -y_1. \quad [y_i, x] = (2i-1)y_i, \quad 1 \le i \le n-1. \end{cases}$$

2-теорема. $L = L_0 \oplus L_1$ – нильрадикали $H(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \delta, \gamma)$ синфдан олинган супералгебрага изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц супералгебраси бўлсин. У ҳолда

$$(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_{\mathrm{n}}, \gamma) = \begin{cases} (0, 0, \ldots, 0, \beta_{\frac{\mathrm{n}+3}{2}}, 0, \ldots, 0, \gamma), \quad \mathrm{n} - \text{ток}, \quad \gamma \ne 0, \\ (0, 0, \ldots, 0, \beta_{\mathrm{t}}, 0, \ldots, 0), \quad 4 \le \mathrm{t} \le \mathrm{n}, \end{cases}$$

бўлиб, L қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган супералгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$\begin{matrix} SH_1(\gamma): \\ (n - \text{ток.}) \end{matrix} \begin{cases} H(0, \ldots, \underset{\frac{\mathrm{n}+3}{2}\text{-ўрин}}{1}, \ldots, 0, \gamma), \ \gamma \ne 0, \\ [e_1, x] = -[x, e_1] = 2e_1, \\ [e_2, x] = (n-1)e_2, \\ [e_i, x] = 2(i-1)e_i, \quad 3 \le i \le n, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, \quad 1 \le i \le n, \\ [x, e_2] = -(n-1)e_2 - 2e_{\frac{n+1}{2}}, \\ [x, y_1] = -y_1, \end{cases} \qquad SH_2(t): \begin{cases} H(0, \ldots, \underset{\mathrm{t}\text{-ўрин}}{1}, \ldots, 0), \ 4 \le t \le n, \\ [e_1, x] = -[x, e_1] = 2e_1, \\ [e_2, x] = -[x, e_2] = 2(t-2)e_2, \\ [e_i, x] = 2(i-1)e_i, \ 3 \le i \le n, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, 1 \le i \le n, \\ [x, y_1] = -y_1, \end{cases}$$

$$SH_3: \begin{cases} H(0, \ldots, 0, 1, 0), \\ [e_1, x] = -[x, e_1] = 2e_1, \\ [e_2, x] = -[x, e_2] = 2(n-2)e_2, \\ [e_i, x] = 2(i-1)e_i, \quad 3 \le i \le n, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, \ 1 \le i \le n, \\ [x, y_1] = -y_1, \end{cases} \qquad SH_4: \begin{cases} H(0, \ldots, 0, 0, 1), \\ [e_1, x] = -[x, e_1] = 2e_1, \\ [e_2, x] = -[x, e_2] = 2(n-2)e_2, \\ [e_i, x] = 2(i-1)e_i, \quad 3 \le i \le n, \\ [y_i, x] = (2i-1)y_i, \ 1 \le i \le n, \\ [x, y_1] = -y_1. \end{cases}$$

Нильрадикали $M(\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n, \theta, \tau)$ ва $G(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \gamma)$ синфлардан олинган ечилувчан Лейбниц супералгебралари ҳам 2.3 параграфда таснифланган. Нильрадикалининг жуфт қисми икки ўлчамли алгебра бўлган ечилувчан Лейбниц супералгебраларининг таснифи 2.2 параграфда келтирилган.

«Максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебраларининг ечилувчан Лейбниц кенгайтмалари» деб номланган диссертациянинг учинчи боби нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебрасидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлашга ва улар орасидаги максимал коўлчамли алгебраларнинг иккинчи тартибли когомологияларини ҳисоблашга бағишланган. Бундай ечилувчан алгебралар ичида қаттиқлари аниқланган.

7-таъриф. Айтайлик, L – ўлчами n га тенг бўлган Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар $L^{n-2}\neq 0$ ва $L^{n-1}=0$ бўлса, у ҳолда L *квази-филиформ* Лейбниц алгебраси дейилади.

Айтайлик, L чекли сондаги нолдан фарқли фазолардан ташкил топган $\mathbb{Z}$-градуирланган Лейбниц алгебраси бўлсин, яъни $L=\oplus_{i\in Z}V_i$, бу ерда ихтиёрий i, $j\in\mathbb{Z}$ учун $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$ бўлади.

Агар $L=V_k\oplus V_{k+1}\oplus\ldots\oplus V_{k+m}$ да барча i $(1\leq i\leq m)$ учун $V_{k+i}\neq\{0\}$бўлса, L нильпотент Лейбниц алгебраси *боғлиқли градуировкага эга* дейилади. Боғлиқли грдуировка учун $len(\oplus L)=m+1$ сони градуировканинг узунлиги дейилади.

$l(L)=max\{len(\oplus L)\ \mid\ L=V_k\oplus V_{k+1}\oplus\ldots\oplus V_{k+m}$ боғлиқли градуировка$\}$ сонига L Лейбниц *алгебрасининг узунлиги* деб аталади.

8-таъриф. Агар $l(\oplus L)=\dim L$ бўлса, L максимал узунликдаги алгебра дейилади.

Максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебралари Ж.Гомез, А.Жименез-Мерчан ва бошқалар томонидан таснифланган:

$$g^1_{(n,1)}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_{n-i}]=(-1)^i e_n, & 2\leq i\leq\dfrac{n-1}{2},\ n\geq 5\end{cases}\qquad n-\text{тоқ};$$

$$g^2_{(n,1)}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_n]=e_{i+2}, & 2\leq i\leq n-3,\ n\geq 5;\end{cases}$$

$$g^3_{(n,1)}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_n]=e_{i+2}, & 2\leq i\leq n-3,\\ [e_2,e_i]=e_{i+3}, & 3\leq i\leq n-4,\ n\geq 7;\end{cases}$$

$$g^1_7:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq 5,\\ [e_2,e_i]=e_{i+2}, & 3\leq i\leq 4,\\ [e_i,e_{7-i}]=(-1)^i e_7, & 2\leq i\leq 3;\end{cases}\qquad g^2_9:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq 7,\\ [e_2,e_5]=3e_7, & [e_2,e_6]=5e_8,\\ [e_2,e_i]=e_{i+2}, & 3\leq i\leq 4,\\ [e_3,e_i]=-2e_{i+3}, & 4\leq i\leq 5,\\ [e_i,e_{9-i}]=(-1)^i e_9, & 2\leq i\leq 4;\end{cases}$$

$$g^3_{11}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq 9,\quad [e_2,e_i]=e_{i+2},\quad 3\leq i\leq 4,\\ [e_2,e_i]=-e_{i+2}, & 6\leq i\leq 7,\quad [e_3,e_7]=-e_{10},\\ [e_3,e_i]=e_{i+3}, & 4\leq i\leq 5,\quad [e_4,e_i]=e_{i+4},\quad 5\leq i\leq 6,\\ [e_i,e_{11-i}]=(-1)^i e_{11}, & 2\leq i\leq 5,\end{cases}$$

бу ерда $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ алгебра базиси.

Нильрадикали N ва тўлдирувчи фазосининг ўлчами s га тенг бўлган барча ечилувчан Лейбниц алгебралари оиласини $R(N,s)$ билан белгилаймиз.

Қуйидаги теоремаларда нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебраси бўлган ва ко-ўлчами бирга тенг ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тўлиқ таснифини келтирамиз.

3-теорема. $R(g^1_{(n,1)},1)$ оиланинг ихтиёрий алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$A_1(a_2,b_5,\ldots,b_{n-1}):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=a_2e_2,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=e_i+\sum\limits_{t=i+2}^{n-1}b_{t-i+2}e_t, \quad 2\le i\le n-2,\\ [e_{n-1},x]=-[x,e_{n-1}]=e_{n-1}+a_2e_n,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, \text{ бу ерда } b_{2k}=0,\, 2\le k\le \dfrac{n-3}{2},\end{cases}$$

$$A_2:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_{n-1},\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+2-n)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(4-n)e_n,\end{cases}$$

$$A_3:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \qquad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+1-n)e_i,\ 2\le i\le n-2,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(2-n)e_n, \quad [x,x]=e_{n-1},\end{cases}$$

$$A_4:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \qquad [x,x]=e_n,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-\dfrac{n}{2})e_i, \quad 2\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$A_5:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_n, \qquad [e_n,x]=-[x,e_n]=e_n,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+\dfrac{1-n}{2})e_i, \quad 2\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$A_6:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_2, \quad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-1)e_i,\ 2\le i\le n-2,\\ [e_{n-1},x]=-[x,e_{n-1}]=(n-2)e_{n-1}+e_n, \quad [e_n,x]=-[x,e_n]=(n-2)e_n,\end{cases}$$

$$A_7(b):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1,\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2+b)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(n-4+2b)e_n.\end{cases}$$

$A_1(a_2,b_4,\ldots,b_{n-1})$ алгебрадаги $\{a_2,b_4,\ldots,b_{n-1}\}$ параметрларнинг биринчи нолдан фарқлисини бирга олиб келиш мумкин.

4-теорема. $R(g^2_{(n,1)},1)$ оиланинг ихтиёрий алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$B_1(b_4,\ldots,b_{n-1}):[e_i,x]=-[x,e_i]=e_i+\sum_{t=i+2}^{n-1}b_{t-i+2}e_t,\ 2\le i\le n-1,$$

$$B_2:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \qquad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+3-n)e_i,\ 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=e_{n-1}+2e_n,\end{cases}$$

$$B_3:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \quad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+1-n)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, \quad [x,x]=e_{n-1}.\end{cases}$$

$$B_4(b):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \quad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2+b)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, \ b\in\mathbb{C}.\end{cases}$$

$B_1(b_4,\dots,b_{n-1})$ алгебрадаги $\{b_4,\dots,b_{n-1}\}$ параметрларнинг биринчи нолдан фарқлисини бирга олиб келиш мумкин.

5-теорема. Нильрадикали $g^3_{(n,1)}, g^1_7, g^2_9, g^3_{11}$ алгебралардан бирига изоморф ва ко-ўлчами бирга тенг ихтиёрий ечилувчан алгебра мос равишда қуйидаги алгебраларга изоморф бўлади:

$$C_1:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+1)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n,\end{cases}$$

$$C_2:[e_i,x]=-[x,e_i]=ie_i, \ 1\le i\le 7,$$

$$C_3:[e_i,x]=-[x,e_i]=ie_i, \ 1\le i\le 9,$$

$$C_4:[e_i,x]=-[x,e_i]=ie_i, \ 1\le i\le 11.$$

Таъкидлаш жоизки, барча максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебралари орасида фақатгина $g^1_{(n,1)}$ ва $g^2_{(n,1)}$ алгебраларнинг ко-ўлчами иккига тенг.

6-теорема. $R(g^1_{(n,1)},2)$ ва $R(g^2_{(n,1)},2$ оилаларнинг ихтиёрий алгебралари мос равишда қуйидаги алгебраларга изоморф бўлади:

$$MA:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(n-4)e_n, & [e_i,y]=-[y,e_i]=e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,y]=-[y,e_n]=2e_n, & \end{cases}$$

$$MB:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, & [e_i,y]=-[y,e_i]=e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,y]=-[y,e_n]=2e_n. & \end{cases}$$

Энди L Лейбниц алгебрасининг M модули учун $CL^0(L,M)=M$, $CL^n(L,M)=\mathrm{Hom}(L^{\otimes n},M)$, $n>0$ фазоларни қараймиз.

$d^n:CL^n(L,M)\to CL^{n+1}(L,M)$ акслантириш қуйидагича аниқланган

$$(d^n\varphi)(x_1,\dots,x_{n+1}):=[x_1,\varphi(x_2,\dots,x_{n+1})]+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i[\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_{n+1}),x_i]$$

$$+\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^{j+1}\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1},\dots,x_j,\dots,x_{n+1})$$

F-гомоморфизм бўлсин, бу ерда $\varphi\in CL^n(L,M)$ ва $x_i\in L$. d^n акслантириш учун d^{n+1} d^n = 0 хосса ўринли эканлиги $d=\sum_{i\ge 0}d^i$ оператор учун $d\circ d=0$ ўринли эканлигини келтириб чиқаради. Ушбу

$$HL^n(L, M):=ZL^n(L, M)\,/\,BL^n(L, M)$$

фактор фазо L алгебранинг n-тартибли когомологик группаси дейилади. Бу ерда $ZL^n(L, M):= Ker\ d^{n+1}$ ва $BL^n(L, M):= Im\ d^n$ мос равишда n-коцикллар ва n-кочегаралар деб аталади.

Қуйидаги теоремада 6-теоремада келтирилган MA ва MB ечилувчан Лейбниц алгебраларнинг иккинчи тартибли когомологик группалари тривиаллиги кўрсатилади.

7-теорема. $HL^2(MA, MA)= HL^2(MB, MB)=\{0\}$.

Демак, MA ва MB алгебралар Лейбниц алгебралари кўпхиллигида қаттиқ алгебралар бўлади.

5-теоремада келтирилган C_1, C_2, C_3 ва C_4 алгебраларнинг иккинчи тартибли когомологик группаларини ҳисоблаймиз.

8-теорема. Айтайлик, R алгебра C_1, C_2, C_3 ва C_4 алгебралардан бирига изоморф Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда $\dim HL^2(R, R)=1$.

ХУЛОСА

Мазкур диссертация нильрадикали берилган ечилувчан, ҳамда уч ўлчамли содда Ли алгебраси билан ассоциирланган Лейбниц супералгебраларининг таснифлашга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Жуфт қисми уч ўлчамли содда Ли алгебрасига изоморф бўлган Лейбниц супералгебралари таснифланган. Тоқ қисмининг ўлчами иккидан катта бўлганда бундай супералгебралар Лейбниц алгебралари бўлиши исботланган;
2. Нильрадикали максимал нильиндексли Ли супералгебрасига изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц супералгебралари таснифланган;
3. Характаристик кетма-кетлиги $(n \mid m)$ ва $(n-1, 1 \mid m)$ бўлган, ҳамда нильиндекси $n+m$ га тенг нильпотент Лейбниц супералгебраларининг ечилувчан кенгайтмаси келтирилган;
4. Нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебрасига изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифи олинган;
5. Нильрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебрасига изоморф бўлган максимал ечилувчан Лейбниц алгебралари иккинчи тартибли когомологик группалари ҳисобланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МУРАТОВА ХОСИЯТ АБДУВАКИЛЕВНА

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЕШИМЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА С ЗАДАННЫМИ НИЛЬРАДИКАЛАМИ, А ТАКЖЕ СУПЕРАЛГЕБР АССОЦИИРОВАННЫХ С ТРЕХМЕРНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРОЙ ЛИ

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.3.PhD/FM441.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Худойбердиев Аброр Хакимович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Арзикулов Фарходжон Нематжонович** доктор физико-математических наук **Курбанбаев Туўелбай Кадирбаевич** кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	Национальный университет Узбекистана

Защита диссертации состоится «____»__________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № ________). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «__» ___________ 2021 года.
(протокол рассылки № __ от «__» __________ 2021 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по
присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, к.ф.-м.н.,
старший научный сотрудник

Б.А.Омиров
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. На сегодняшний день большая часть научных и практических исследований, проводимых во всем мире, в основном сосредоточена на изучении основ математической физики и фундаментальной алгебры. Резкий рост интереса к супералгебрам объясняется их способностью объединять бозоны и фермионы в физике, группировать группы внутренних и динамических симметрий в один комплекс и передавать все фундаментальные силы в единую теорию поля. Супергруппы Ли и супералгебры Ли являются наиболее широко используемыми супермногообразиями в теории суперсимметрий, а структурная теория и проблемы классификации супералгебр Ли являются важными задачами неассоциативных алгебр.

В настоящее время изучение супералгебр Лейбница, которые являются обобщением супералгебр Ли, а также классификация супералгебр Лейбница, удовлетворяющих условиям простоты и разрешимости, имеют большую значимость в теории неассоциативных алгебр. Поскольку большинство классических теорем теории алгебр Ли несправеделивы для супералгебр Ли и Лейбница, то возникает ряд трудностей при изучении разрешимых супералгебр Лейбница, то решение проблемы классификации разрешимых супералгебр Лейбница сводится к нахождению ниль-независимых дифференцирований и описанию их действия на дополняющее к нильрадикалу подпространство. Классификация супералгебр Лейбница с заданной четной частью, нахождение дифференцирований нильпотентных супералгебр Лейбница и описание разрешимых супералгебр посредством ниль-независимых дифференцирований являются важными с точки зрения структурной теории супералгебр Лейбница.

В нашей стране особое внимание уделяется прикладной математике, статистической механике, физике и цифровой экономике, которые являются основополагающими в фундаментальных науках. В частности, за последние годы супералгебры Лейбница продолжают находить новые приложения в различных областях математики, особенно в геометрии, топологии и физике. В последние годы были достигнуты значительные результаты в классификации нильпотентных супералгебр Лейбница и в определении структурной теории разрешимых алгебр Лейбница. Научные исследования на международном уровне по таким важным направлениям математической науки, как алгебра и функциональный анализ, рассматриваются в качестве основной задачи фундаментальных исследований[2]. Для обеспечения реализации указанного постановления важно развивать теорию разрешимых алгебр и супералгебр Лейбница для приложения ее научных результатов в смежных областях науки.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан 292 "О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан" от 18 мая 2017 года.

№УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологии в Республике Узбекистан "Математика, механика и информатика".

Степень изученности проблемы. На протяжении последних пятидесяти лет в теории суперагебр Ли были достигнуты большие научные результаты. Надо отметить, что простые и полупростые супералгебры Ли подробно классифицированы в работах Ф.А.Березина, В.Каца, Д.А.Лейтеса, , В.С.Ретаха и др., а нильпотентные супералгебры Ли классифицированы и изучены М.Гилдом, Л.М.Камачо, Р.М.Наварро, Ю.Хакимджановым и другими учеными. Доказано существование единственной супералгебры Ли в каждой размерности с максимальным нильиндексом только с двумерной четной частью, размерность нечетной части которой равна нечетному числу. Разрешимые супералгебры Ли с заданным нильрадикалом и важные факты о них приведены в научных статьях К.Бауэнса, Л.Б.Ливена, Г.Сальгадо, О.А.Санчес-Валенсуэла, М.Родригес-Валлерте и других.

Алгебра Лейбница, являющаяся неассоциативной алгеброй и определяемой билинейным умножением, т.е. тождеством Лейбница, которая эквивалентна условию, что вякий оператор правого умножения на элемент является дифференцированием. Хотя такой класс алгебр впервые был упомянут в работах А.М.Блоха, большой интерес к этим алгебрам возник только после работ Ж.-Л. Лоде и Т. Пирашвили по циклическим гомологиям. Впервые термин алгебры Лейбница был введен Ж.-Л. Лоде. Проблемам изучения алгебр Лейбница посвящены работы таких ученых, как Ш.А. Аюпов, А.Джумадильдаев, М. Казас, Х.Р. Гомез, Р.Курдиани, Б.А. Омиров и другие. В частности, определения простых и полупростых алгебр Лейбница были введены А. Джумадильдаевым, и приведены примеры простых и полупростых алгебр Лейбница. Кроме того, Ш.А.Аюповым, Б.А.Омировым, А.Х.Худойбердиевым, М.Ладра, М. Казасом, Х.Касазом, И.А.Каримжоновыс, Ж.К.Адашевым, К.К.Абдурасуловым, Х.М.Анкочеа, А.Шабанской, И.С.Рахимовым, Д.Барнсом, Л.Боско-Дунбар, К.К.Масутовой, Е.М.Канэте, М.Инсуа и другими алгебры Лейбница были изучены посредством наложения условий на градуировку, нильиндекс, характеристическую последовательность.

Супералгебры Лейбница, которые включают алгебры Ли и Лейбница, а также супералгебры Ли, характеризуются тождеством, определяемым применением оболочки Грассмана к алгебре Лейбница. Для таких супералгебр частично уместны известные факты из структурной теории алгебр Лейбница, а их четная часть является алгеброй Лейбница. С помощью наложения условий на характеристическую последовательность, нильиндекс и размерность супералгебры Ш.А. Аюповым, С. Альбеверио, Х. Гомез, Х. Гарсия-Мартинес, Л. Камачо, Р. Наварро, Б.А. Омировым, А.Х. Худойбердиевым и другими были классифицированы нуль-филиформные, филфиформные и ряд других нильпотентных супералгебр Лейбница. В частности, доказано, что максимальный нильиндекс нильпотентной супералгебры Лейбница равен $n+m+1$ и такие супералгебры были полностью классифицированы. Использование дифференцирования нулевой степени нильрадикала в задаче классификации разрешимых супералгебр Лейбница позволило классифицировать разрешимые супералгебры Лейбница с заданным нильрадикалом.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, в котором выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах» + «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике» Института Математики (ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87, 2017-2019 гг.); «Представления алгебр Лейбница» Института Математики (ЕФА-Фтех-2018-79, 2018-2019 гг.).

Целью исследования является классификация разрешимых супералгебр Лейбница с заданными нильрадикалами, а также супералгебр Лейбница, ассоциированных с трехмерной простой алгеброй Ли.

Задачи исследования:

классификация супералгебр Лейбница, четная часть которых изоморфна трехмерной простой алгебре Ли;

классификация разрешимых супералгебр Лейбница с заданными нильрадикалами;

классификация разрешимых алгебр Лейбница с квази-филиформным лиевым нильрадикалом максимальной длины, а также вычисление размерностей пространтсв вторых групп когомологий при максимальной коразмерности.

Объектом исследования являются супералгебры Лейбница с простой четной частью, разрешимые супералгебры Лейбница, разрешимые алгебры Ли, дифференцирование алгебр и супералгебр и когомологические группы.

Предмет исследования супералгебры Лейбница, ассоциированные с трехмерной алгеброй Ли; разрешимые супералгебры Лейбница с нильрадикалом, имеющим нильиндекс не менее $n+m$; разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины.

Методы исследования. В исследовании использованы методы теории неассоциативных алгебр, структурные и когомологические методы, а также методы конечномерных алгебр и методы теории инвариантов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

классифицированы супералгебры Лейбница с четной частью изоморфной простой трехмерной алгебры Ли и доказано, что если размерность нечетной части больше двух, то данная супералгебра является алгеброй Лейбница;

классифицированы разрешимые супералгебры Лейбница с лиевым нильрадикалом максимального нильиндекса, а также доказано, что если четная часть такой разрешимой супералгебры изоморфна алгебре Ли, то разрешимая супералгебра является супералгеброй Ли;

описаны с точностью до изоморфизма разрешимые супералгебры Лейбница, у которых нильрадикалом являются супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$ и характеристическими последовательностями $(n \mid m)$ и $(n\text{-}1, 1 \mid m)$;

классифицированы разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным лиевым нильрадикалом максимальной длины, а также найдены размерности вторых групп когомологий таких разрешимых алгебр Лейбница при максимальной коразмерности.

Практические результаты исследования. Использованные в диссертации методы и полученные результаты могут быть применены в спецкурсах по неассоциативной алгебре для магистрантов и докторантов высших учебных заведений Республики Узбекистан. Кроме того, результаты диссертации позволяют классифицировать разрешимые супералгебры Лейбница с различными типами нильрадикалов, оценивать справедливость некоторых гипотез при изучении супералгебр Лейбница с условиями простоты и разрешимости четной части.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, использованием известных методов исследования других классов супералгебр, применением фундаментальных результатов теории представлений и модулей, структурной теории алгебр Ли. Результаты дифференцирований супералгебр малых были проверены с помощью специально созданных программ на языке математического программирования Mathematica 12.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что результаты по разрешимым супералгебрам могут быть использованы при изучении многообразий других супералгебр.

Практическая значимость исследования объясняется тем, что полученные результаты могут быть использованы при классификации супералгебр Лейбница с другими типами нильрадикалов и при ычислении групп когомологий разрешимых суперлагебр.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты о классификации разрешимых супералгебр Лейбница, у которой нильрадикал есть супералгебра Ли максимального нильиндекса были использованы в проекте ЁФА-Фтех-2018-77 по теме «Группы когомологий полупростых и нильпотентных алгебр» при классификации разрешимых супералгебр с заданным нильрадикалом (справка Академии Наук Республики Узбекистан от 29 октября 2021 года, № 2/1255-2983). Применение научных результатов позволило классифицировать разрешимые супералгебры с заданным нильрадикалом, а также доказать существование жестких супералгебр в классе таких супералгебр;

результаты о классификации разрешимых алгебр Лейбница с квази-филиформным лиевым нильрадикалом максимальной длины были использованы в проекте ОТ – Ф4 – 31 по теме «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады в симплексе» для описания разрешимых алгебр Лейбница (справка Национального университета Узбекистана от 27 сентября 2021 года, № 04/11-5437). Результаты диссертации были использованы при классификации разрешимых алгебр Лейбница, у которых нильрадикал есть квази-филиформная не лиева алгебра Лейбница.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 3 международных и 6 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 2 опубликованы в зарубежном журнале, 5 – в республиканских научных изданиях и 9 тезисов докладов в материалах научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на десять параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 101 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоритическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Супералгебры Лейбница, ассоциированные с алгеброй Ли sl_2**», приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты из теорий алгебр и супералгебр Ли и Лейбница. Описаны супералгебры Лейбница, ассоциированные с трехмерной простой алгеброй Ли.

Определение 1. Векторное пространство L над полем $\mathbb{F}$ снабженный билинейной скобкой [-,-] называется алгеброй Лейбница, если для любых $x,y,z\in L$ выполняется так называемое тождество Лейбница

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Отметим, что при условии $[x, x]=0$ алгебра Лейбница становится алгеброй Ли, следовательно алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли.

Напомним, что алгебра Ли G называется *простой*, если $G^2 \neq \{0\}$ и она имеет только следующие идеалы: $\{0\}$, G.

Определение 2. Алгебра Ли G называется полупростой, если ее максимальный разрешимый идеал равен $\{0\}$.

Теперь приведем понятие бимодуля для алгебр Лейбница.

Определение 3. Векторное пространство M называется L-бимодульем или представлением алгебры Лейбница L, если определены билинейные отображения $[-, -]$: $L\times M \to M$ и $[-, -]$: $M\times L \to M$, удовлетворяющие следующим трем аксиомам:

$$[m, [x, y]=[[m, x], y] - [[m, y], x],$$
$$[x, [m, y]=[[x, m], y] - [[x, y], m],$$
$$[x, [y, m]=[[x, y], m] - [[x, m], y],$$

где $m\in M$ и $x, y\in L$.

Напомним, что L-бимодуль называется *простым* или *неприводимым*, если он не допускает нетривиальных L-подбимодулей. L-бимодуль называется *неразложимым*, если он не является прямой суммой L-подбимодулей.

Д.Барнс утверждал, что конечномерный простой L-бимодуль либо симметричен, либо антисимметричен для любой конечномерной алгебры Лейбница L.

L-бимодуль со свойством $[L,M]=\{0\}$ называется *антисимметричным*, а в случае $[x,m]=-[m,x]$ для всех $x\in L$ и $m\in M$ он называется *симметричным*.

В частности, в случае, когда L изоморфна трехмерной простой алгебре Ли sl_2 имеем, что существует базис $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ в M такой, что выполняется одна из таблиц умножения:

$$N_1: \begin{cases} [x_i,h]=(n-2i)x_i, & [h,x_i]=-(n-2i)x_i, \\ [x_i,f]=x_{i+1}, & [f,x_i]=-x_{i+1}, \\ [x_i,e]=-i(n-i+1)x_{i-1}, & [e,x_i]=i(n-i+1)x_{i-1}, \end{cases} \qquad N_2: \begin{cases} [x_i,h]=(n-2i)x_i, \\ [x_i,f]=x_{i+1}, \\ [x_i,e]=-i(n-i+1)x_{i-1}. \end{cases}$$

Из теории алгебр известно, что для произвольного многообразия алгебр, посредством оболочки Грассмана, можно определить Z_2-градуированные алгебры, которые называются супералгебрами этого многообразия. Характерной чертой многообразий супералгебр является то, что четная часть есть не что иное, как многообразие этих алгебр. В частности, четная часть супералгебр Ли и супералгебр Лейбница является алгеброй Ли и алгеброй Лейбница, соответственно.

Приведем определения и факты касающиеся супералгебрам Ли и Лейбница.

Определение 4. Z_2-градуированное векторное пространство $L=L_0\oplus L_1$ называется супералгеброй Лейбница, если она снабжена произведением [-,-] которое удовлетворяет следующему условию:

$[x, [y, z]]=[[x, y], z] - (-1)^{\alpha\beta}[[x, z], y]$ – супертождество Лейбница

для любых $x\in L$, $y\in L_\alpha$, $z\in L_\beta$.

Векторные пространства L_0 и L_1 называются четной и нечетной частями супералгебры L, соответственно. Очевидно, что L_0 есть алгебра Лейбница и L_1 является L_0-бимодулем.

Отметим, что если в супералгебре Лейбница L выполняется тождество $[x,y]=-(-1)^{\alpha\beta}[y,x]$ для любых $x\in L_\alpha$ и $y\in L_\beta$, тогда супертождество Лейбница преобразуется в супертождество Якоби. Следовательно, как и в алгебре Лейбница супералгебры Лейбница являются обобщением супералгебр Ли.

Из работ Т.Курбанбаева и Р.Турдибаева известно, что если M является sl_2-бимодулем разлагающийся на простые sl_2-бимодули $V(n_i)=\{v_0^i,\dots,v_{n_i}^i\}$, $1\le i\le k$ и $n_1\ge n_2\ge\dots\ge n_k$. Тогда M является неразложимым лейбницевым sl_2-бимодулем только тогда, когда $n_i-n_{i+1}=2$ для всех $1\le i\le k-1$. Более того, с точностью до sl_2-бимодульного изоморфизма существует ровно два неразложимых sl_2-бимодуля:

$$M_3:\begin{cases}
[v_i^{2p-1},h]=(n-4p+4-2i)v_i^{2p-1}, & [h,v_i^{2p-1}]=0,\\
[v_i^{2p-1},f]=v_{i+1}^{2p-1}, & [f,v_i^{2p-1}]=0,\\
[v_i^{2p-1},e]=-i(n-4p+5-i)v_{i-1}^{2p-1}, & [e,v_i^{2p-1}]=0,\\
[v_i^{2p},h]=(n-4p+2-2i)v_i^{2p}, & [h,v_i^{2p}]=2(n-2p-i+3)v_{i+1}^{2p-1}-\\
 & \qquad -(n-2p-2i+2)v_{i+1}^{2p}-2iv_{i-1}^{2p+1},\\
[v_i^{2p},f]=v_{i+1}^{2p}, & [f,v_i^{2p}]=v_{i+2}^{2p-1}-v_{i+1}^{2p}+v_i^{2p+1},\\
[v_i^{2p},e]=-i(n-4p+1-i)v_{i-1}^{2p}, & [e,v_i^{2p}]=(n-2p-i+3)((n-2p-i+4)\\
 & \qquad v_i^{2p-1}+iv_{i-1}^{2p})+i(i-1)v_{i-2}^{2p+1},\\
[v_i^{2p+1},h]=(n-4p+1-i)v_i^{2p+1}, & [h,v_i^{2p+1}]=0,\\
[v_i^{2p+1},f]=v_{i+1}^{2p+1}, & [f,v_i^{2p+1}]=0,\\
[v_i^{2p+1},e]=-i(n-4p-1-i)v_{i-1}^{2p+1}, & [e,v_i^{2p+1}]=0,
\end{cases}$$

где $1\le p\le\dfrac{k}{2}$, а для $1\le p\le\dfrac{k-1}{2}$ и $n=n_1$:

$$M_4:\begin{cases}[v_i^1,h]=(n-2i)v_i^1, & [h,v_i^1]=-(n-2i)v_i^1-2iv_{i-1}^2,\\ [v_i^1,f]=v_{i+1}^1, & [f,v_i^1]=-v_{i+1}^1+v_i^2,\\ [v_i^1,e]=-i(n-i+1)v_{i-1}^1, & [e,v_i^1]=i(n-i+1)v_{i-1}^1+i(i-1)v_{i-2}^2,\\ [v_i^{2p},h]=(n-4p+2-2i)v_i^{2p}, & [h,v_i^{2p}]=0,\\ [v_i^{2p},f]=v_{i+1}^{2p}, & [f,v_i^{2p}]=0,\\ [v_i^{2p},e]=-i(n-4p+1-i)v_{i-1}^{2p}, & [e,v_i^{2p}]=0,\\ [v_i^{2p+1},h]=(n-4p-2i)v_i^{2p+1}, & [h,v_i^{2p+1}]=(n-4p-i+1)v_{i+1}^{2p}-\\ & \quad -(n-4p-2i)v_{i+1}^{2p+1}-2iv_{i-1}^{2p+2},\\ [v_i^{2p+1},f]=v_{i+1}^{2p+1}, & [f,v_i^{2p+1}]=v_{i+2}^{2p}-v_{i+1}^{2p+1}+v_i^{2p+2},\\ [v_i^{2p+1},e]=-i(n-4p-1-i)v_{i-1}^{2p+1}, & [e,v_i^{2p+1}]=(n-4p-i+1)((n-4p-i+2)\\ & \quad v_i^{2p}+iv_{i-1}^{2p+1})+i(i-1)v_{i-2}^{2p+2}.\end{cases}$$

В следующем предложении опишем супералгебры Лейбница с трехмерной простой четной частью и размерность нечетной части равна двум.

Предложение 1. Пусть $L=sl_2\oplus L_1$ – супералгебра Лейбница, такая что L_1 – простой симметричный sl_2-бимодуль и $\dim L_1=2$. Тогда L изоморфна одной из следующих двух супералгебр Лейбница:

$$S_1:\begin{cases}[e,h]=-[h,e]=2e, & [h,f]=-[f,h]=2f, & [e,f]=-[f,e]=h,\\ [x_0,h]=-[h,x_0]=x_0, & [x_0,f]=-[f,x_0]=x_1, & \\ [x_1,h]=-[h,x_1]=-x_1, & [x_1,e]=-[e,x_1]=-x_0, & \end{cases}$$

$$S_2:\begin{cases}[e,h]=-[h,e]=2e, & [h,f]=-[f,h]=2f, & [e,f]=-[f,e]=h,\\ [x_0,h]=-[h,x_0]=x_0, & [x_0,f]=-[f,x_0]=x_1, & [x_1,e]=-[e,x_1]=-x_0,\\ [x_1,h]=-[h,x_1]=-x_1, & [x_0,x_0]=2e, & [x_1,x_1]=2f,\\ [x_0,x_1]=[x_1,x_0]=h. & & \end{cases}$$

Предложение 2. Пусть $L=sl_2\oplus L_1$ – супералгебра Лейбница, такая что L_1 – простой симметричный sl_2-бимодуль и $\dim L_1 \geq 3$. Тогда супералгебра L является алгеброй Лейбница.

Во втором параграфе первой главы рассмотрен случай, когда в супералгебре Лейбница $L=sl_2\oplus L_1$ нечетная часть L_1 является неразложимым sl_2-бимодулем.

Предложение 3. Пусть $L=sl_2\oplus L_1$ – супералгебра Лейбница, такая что sl_2-бимодуль L_1 изоморфен либо M_3 либо M_4. Тогда супералгебра L является алгеброй Лейбница.

Во второй главе диссертации, названной «**Разрешимые супералгебры Лейбница с заданными нильрадикалами**», описываются разрешимые супералгебры Лейбница со следующими нильрадикалами: супералгебры Ли максимального нильиндекса и супералгебры Лейбница с нильиндексом равной размерности нильрадикала.

Отметим, что понятия нильпотентности и разрешимости супералгебр Лейбница, определяются аналогично как и для алгебр Лейбница. Для этого определим следующие *нижний центральный* и *производный* ряды:

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1], \qquad L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}], \qquad k\geq 1.$$

соответственно.

Определение 5. Алгебра Лейбница L называется нильпотентной (соответственно разрешимой), если существует $k\in N$ ($s\in N$) такое, что $L^k=0$ (соответственно $L^{[s]}=0$).

Минимальное число k с таким свойством называется *индексом нильпотентности* алгебры L. Надо отметить, что сумма двух нильпотентных идеалов также является нильпотентным идеалом, и поэтому алгебра Лейбница имеет единственный максимальный нильпотентный идеал, который называется *нильрадикалом* алгебры.

Нильрадикалом заданной суперbegin алгебры L называется максимальный нильпотентный идеал содержащий в себе ее идеал $[L, L]$.

Важным фактом является то, что максимальный нильиндекс супералгебр Ли и Лейбница равен $n+m$ и $n+m+1$, соответственно (где $n=\dim L_0$, $m=\dim L_1$).

В работе Ж.Гомеза, Ю.Хакимжанова и Р.Наварро классифицированы $(n+m)$-мерные супералгебры Ли с нильиндексом $n+m$. Доказано, что такие супералгебры существуют только при $n=2$, m – нечетное число и умножения супералгебры имеют следующий вид:

$$N_{2,m}:\begin{cases}[y_i,e_1]=y_{i+1}, & 1\leq i\leq m-1,\\ [y_{m+1-i},y_i]=(-1)^{i+1}e_2, & 1\leq i\leq \dfrac{m+1}{2}.\end{cases}$$

В дальнейшем в таблицах умножений разрешимых алгебр мы будем опускать произведения базисных элементов нильрадикала**.**

Предложение 4. Пусть $L=L_0\oplus L_1$ – $(m+3)$-мерная разрешимая супералгебра Лейбница, у которой нильрадикал изоморфен $N_{2,m}$. Тогда супералгебра L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных супералгебр:

$$M_1:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [x,x]=e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(i-\dfrac{m+1}{2})y_i, & 1\leq i\leq m,\end{cases}$$

$$M_2(\alpha):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=-[x,e_2]=\alpha e_2,\quad \alpha\in\mathbb{C},\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(i-\dfrac{m+1}{2})y_i, & 1\leq i\leq m,\end{cases}$$

$$M_3:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_2, & [e_2,x]=-[x,e_2]=e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(i-\dfrac{m+1}{2})y_i, & 1\leq i\leq m,\end{cases}$$

$$M_4(b_2,b_4,\ldots,b_{m-1}):\begin{cases}[e_2,x]=-[x,e_2]=2e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=y_i+\sum\limits_{k=1}^{\frac{m-i+1}{2}}b_{2k}y_{i+2k-1}, \quad 1\leq i\leq m.\end{cases}$$

Предложение 5. Пусть $L=L_0\oplus L_1$ – $(m+4)$-мерная разрешимая супералгебра

Лейбница, нильрадикал которой изоморфен $N_{2,m}$. Тогда L изоморфна следующей супералгебре Ли:

$$M_5:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=-[x,e_2]=(m-1)e_2,\\ [e_1,z]=-[z,e_2]=2e_2, & [e_2,z]=-[z,e_2]=2e_2,\\ [y_i,x]=-[x,y_i]=(1-i)y_i, & 1\le i\le m.\end{cases}$$

Пусть $L=L_0\oplus L_1$ нильпотентная супералгебра Лейбница. Рассмотрим оператор правого умножения ad_x для $x\in L_0$, и данный оператор является нильпотентным эндоморфизмом пространства L_i, $i\in\{0,1\}$. Обозначим через $C_i(x)$ ($i\in\{0,1\}$) убывающую последовательность размеров блоков жордановой матрицы оператора ad_x, и порядок на множестве $C_i(L_0)$ определяется лексикографическим образом.

Определение 6. Последовательность $C(L)=(\max\limits_{x\in L_0\setminus L_0^2} C_0(x)\,|\,\max\limits_{x\in L_0\setminus L_0^2} C_1(x))$ называется характеристической последовательностью супералгебры Лейбница L.

Отметим, что супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$ существуют при характеристических последовательностях $(n\mid m)$, $(n-1,1\mid m)$ и $(n\mid m-1,1)$.

Нильпотентные супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$ с характеристической последовательностью $(n\mid m)$ существуют при $n=2$.

В работах Б.Омирова, А.Худойбердиева и других известны супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$ и с характеристической последовательностью $(n-1,1|\ m)$. А именно, показано, что $m=n-1$ или $m=n$, умножения супералгебры L имеют следующий вид:

если $m=n-1$,

$$L(\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_n,\theta):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, \quad [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-2,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, \quad [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, & 2\le i\le n-1,\\ [y_1,y_1]=e_1, \quad [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\ [e_1,e_2]=\alpha_4e_4+\alpha_5e_5+\ldots+\alpha_{n-1}e_{n-1}+\theta e_n, & \\ [e_j,e_2]=\alpha_4e_{j+2}+\alpha_5e_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+2-j}e_n, & 2\le j\le n-2,\\ [y_1,e_2]=\alpha_4y_3+\alpha_5y_4+\ldots+\alpha_{n-1}y_{n-2}+\theta y_{n-1}, & \\ [y_j,e_2]=\alpha_4y_{j+2}+\alpha_5y_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+1-j}y_{n-1}, & 2\le j\le n-3,\end{cases}$$

$$G(\beta_4,\beta_5,\dots,\beta_n,\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-2,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, \quad 3\le i\le n-1,\\ [y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, \quad 2\le j\le n-1,\\ [e_1,e_2]=\beta_4e_4+\beta_5e_5+\ldots+\beta_ne_n, & \\ [e_2,e_2]=\gamma e_n, & \\ [e_j,e_2]=\beta_4e_{j+2}+\beta_5e_{j+3}+\ldots+\beta_{n+2-j}e_n, & 3\le j\le n-2,\\ [y_j,e_2]=\beta_4y_{j+2}+\beta_5y_{j+3}+\ldots+\beta_{n+1-j}y_{n-1}, & 1\le j\le n-3,\end{cases}$$

если $m=n$, то

$$M(\alpha_4,\alpha_5,\dots,\alpha_n,\theta,\tau):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-1,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, \quad 2\le i\le n,\\ [y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, \quad 2\le j\le n-1,\\ [e_1,e_2]=\alpha_4e_4+\alpha_5e_5+\ldots+\alpha_{n-1}e_{n-1}+\theta e_n, & \\ [e_j,e_2]=\alpha_4e_{j+2}+\alpha_5e_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+2-j}e_n, & 2\le j\le n-2,\\ [y_1,e_2]=\alpha_4y_3+\alpha_5y_4+\ldots+\alpha_{n-1}y_{n-2}+\theta y_{n-1}+\tau y_n, & \\ [y_2,e_2]=\alpha_4y_4+\alpha_5y_4+\ldots+\alpha_{n-1}y_{n-1}+\theta y_n, & \\ [y_j,e_2]=\alpha_4y_{j+2}+\alpha_5y_{j+3}+\ldots+\alpha_{n+2-j}y_n, & 3\le j\le n-2,\end{cases}$$

$$H(\beta_4,\beta_5,\dots,\beta_n,\gamma,\delta):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-2,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, \quad 3\le i\le n-1,\\ [y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, \quad 2\le j\le n-1,\\ [e_1,e_2]=\beta_4e_4+\beta_5e_5+\ldots+\beta_ne_n, & \\ [e_2,e_2]=\gamma e_n, & \\ [e_j,e_2]=\beta_4e_{j+2}+\beta_5e_{j+3}+\ldots+\beta_{n+2-j}e_n, & 3\le j\le n-2,\\ [y_j,e_2]=\beta_4y_{j+2}+\beta_5y_{j+3}+\ldots+\beta_{n+1-j}y_n, & 1\le j\le n-3.\end{cases}$$

Далее классифицируем разрешимые супералгебры Лейбница с неразложимыми нильрадикалами, взятых из классов $L(\alpha_4,\alpha_5,\dots,\alpha_n,\theta)$, $M(\alpha_4,\alpha_5,\dots,\alpha_n,\theta,\tau)$, $H(\beta_4,\beta_5,\dots,\beta_n,\delta,\gamma)$ и $G(\beta_4,\beta_5,\dots,\beta_n,\gamma)$.

Теорема 1. Пусть R – разрешимая супералгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен супералгебре из класса $L(\alpha_4,\alpha_5,\dots,\alpha_n,\theta)$. Тогда

$\alpha_4=\alpha_5=\ldots=\alpha_n=\theta=0$ и она изоморфна супералгебре

$$SL:\begin{cases}[e_1,x]=2e_1, & [e_2,x]=2e_2,\\ [x,e_1]=-2e_1, & [e_i,x]=2(i-1)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ [x,y_1]=-y_1. & [y_i,x]=(2i-1)y_i, \quad 1\le i\le n-1.\end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $L=L_0\oplus L_1$ – разрешимая супералгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен супералгебре из класса $H(\beta_4,\beta_5,\ldots,\beta_n,\delta,\gamma)$. Тогда

$$(\beta_4,\beta_5,\ldots,\beta_{\mathrm{n}},\gamma)=\begin{cases}(0,0,\ldots,0,\beta_{\frac{\mathrm{n}+3}{2}},0,\ldots,0,\gamma), & \mathrm{n}-\text{ток}, \quad \gamma\ne0,\\ (0,0,\ldots,0,\beta_{\mathrm{t}},0,\ldots,0), & 4\le \mathrm{t}\le \mathrm{n},\end{cases}$$

и L изоморфна следующим попарно неизоморфным супералгебрам:

$$\begin{matrix}SH_1(\gamma):\\ (n-\text{нечет.})\end{matrix}\begin{cases}H(0,\ldots,\underset{\frac{n+3}{2}-\text{место}}{1},\ldots,0,\gamma),\ \gamma\ne0,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=2e_1,\\ [e_2,x]=(n-1)e_2,\\ [e_i,x]=2(i-1)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, \quad 1\le i\le n,\\ [x,e_2]=-(n-1)e_2-2e_{\frac{n+1}{2}},\\ [x,y_1]=-y_1,\end{cases}$$

$$SH_2(t):\begin{cases}H(0,\ldots,\underset{t-\text{место}}{1},\ldots,0),\ 4\le t\le n,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=2e_1,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=2(t-2)e_2,\\ [e_i,x]=2(i-1)e_i, \ 3\le i\le n,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, 1\le i\le n,\\ [x,y_1]=-y_1,\end{cases}$$

$$SH_3:\begin{cases}H(0,\ldots,0,1,0),\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=2e_1,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=2(n-2)e_2,\\ [e_i,x]=2(i-1)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, \ 1\le i\le n,\\ [x,y_1]=-y_1,\end{cases} \qquad SH_4:\begin{cases}H(0,\ldots,0,0,1),\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=2e_1,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=2(n-2)e_2,\\ [e_i,x]=2(i-1)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, \ 1\le i\le n,\\ [x,y_1]=-y_1.\end{cases}$$

Отметим, что разрешимые супералгебры Лейбница с нильрадикалами $M(\alpha_4,\alpha_5,\ldots,\alpha_n,\theta,\tau)$ и $G(\beta_4,\beta_5,\ldots,\beta_n,\gamma)$ также полностью классифицированы в параграфе 2.3. В параграфе 2.2 описаны разрешимые супералгебры Лейбница, у которых четная часть нильрадикала двумерная алгебра.

В третьей главе диссертации, названной **«Лейбницевы разрешимые расширения квази-филиформных алгебр Ли максимальной длины»** посвящена классификацию разрешимых алгебр Лейбница с Лиевым квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины и вычислению групп когомологий второго порядка при максимальной коразмерности. Найдены жесткие алгебры в многообразии алгебр Лейбница среди таких разрешимых алгебр.

Определение 7. Алгебра Лейбница L называется квази-филиформной, если

$L^{n-2}\neq 0$ и $L^{n-1}=0$, где $n=\dim L$.

Пусть L – Z-градуированная алгебра Лейбница с конечным числом ненулевых градуированнных подпространств, т.е. $L=\oplus_{i\in Z}V_i$, где $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$ для любых $i, j\in Z$.

Будем говорить, что нильпотентная алгебра Лейбница L *допускает связное градуирование*, если $L=V_k\oplus V_{k+1}\oplus\ldots\oplus V_{k+m}$ где $V_{k+i}\neq\{0\}$ для всех i $(1\leq i\leq m)$.

Для связной градуировки число $len(\oplus L)=m+1$ называется длиной градуировки.

Число $l(L)=max\{len(\oplus L)\mid L=V_k\oplus V_{k+1}\oplus\ldots\oplus V_{k+m}$ связная градуировка$\}$ называется *длиной алгебры* Лейбница L.

Определение 8. Алгебра называется максимальной длины, если $l(\oplus L)=\dim L$.

Ж.Гомезом, А.Жименез-Мерчан и другими получена классификация квази-филиформных алгебр Ли максимальной длины:

$$g^1_{(n,1)}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_{n-i}]=(-1)^i e_n, & 2\leq i\leq \dfrac{n-1}{2},\ n\geq 5\ \text{ и }\ n\ \text{нечетный};\end{cases}$$

$$g^2_{(n,1)}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_n]=e_{i+2}, & 2\leq i\leq n-3,\ n\geq 5;\end{cases}$$

$$g^3_{(n,1)}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-2,\\ [e_i,e_n]=e_{i+2}, & 2\leq i\leq n-3,\\ [e_2,e_i]=e_{i+3}, & 3\leq i\leq n-4,\ n\geq 7;\end{cases}$$

$$g^1_7:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq 5,\\ [e_2,e_i]=e_{i+2}, & 3\leq i\leq 4,\\ [e_i,e_{7-i}]=(-1)^i e_7, & 2\leq i\leq 3;\end{cases}\qquad g^2_9:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq 7,\\ [e_2,e_5]=3e_7, & [e_2,e_6]=5e_8,\\ [e_2,e_i]=e_{i+2}, & 3\leq i\leq 4,\\ [e_3,e_i]=-2e_{i+3}, & 4\leq i\leq 5,\\ [e_i,e_{9-i}]=(-1)^i e_9, & 2\leq i\leq 4;\end{cases}$$

$$g^3_{11}:\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq 9, & [e_2,e_i]=e_{i+2}, & 3\leq i\leq 4,\\ [e_2,e_i]=-e_{i+2}, & 6\leq i\leq 7, & [e_3,e_7]=-e_{10}, & \\ [e_3,e_i]=e_{i+3}, & 4\leq i\leq 5, & [e_4,e_i]=e_{i+4}, & 5\leq i\leq 6,\\ [e_i,e_{11-i}]=(-1)^i e_{11}, & 2\leq i\leq 5, & & \end{cases}$$

где $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ базис алгебры.

Для разрешимых алгебр Лейбница R с нильрадикалом N и коразмерности s используем обозначение $R(N, s)$.

В следующей теореме получена классификация разрешимых алгебр Лейбница, у которых нильрадикал есть квази-филиформная алгебра Ли максимальной длины при условии, что дополняющее пространство одномерно.

Теорема 3. Произвольная алгебра семейства $R(g^1_{(n,1)},1)$ изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$A_1(a_2,b_5,\ldots,b_{n-1}):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=a_2e_2,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=e_i+\sum\limits_{t=i+2}^{n-1}b_{t-i+2}e_t, \quad 2\le i\le n-2,\\ [e_{n-1},x]=-[x,e_{n-1}]=e_{n-1}+a_2e_n,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, \text{ где } b_{2k}=0, 2\le k\le\dfrac{n-3}{2},\end{cases}$$

$$A_2:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_{n-1},\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+2-n)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(4-n)e_n,\end{cases}$$

$$A_3:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \qquad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+1-n)e_i, \ 2\le i\le n-2,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(2-n)e_n, \quad [x,x]=e_{n-1},\end{cases}$$

$$A_4:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \qquad [x,x]=e_n,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-\dfrac{n}{2})e_i, \quad 2\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$A_5:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_n, \qquad [e_n,x]=-[x,e_n]=e_n,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+\dfrac{1-n}{2})e_i, \quad 2\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$A_6:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+e_2, \qquad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-1)e_i, \ 2\le i\le n-2,\\ [e_{n-1},x]=-[x,e_{n-1}]=(n-2)e_{n-1}+e_n, \quad [e_n,x]=-[x,e_n]=(n-2)e_n,\end{cases}$$

$$A_7(b):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2+b)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(n-4+2b)e_n.\end{cases}$$

Отметим, что первый ненулевой параметр $\{a_2,b_4,\ldots,b_{n-1}\}$ в алгебре $A_1(a_2,b_4,\ldots,b_{n-1})$ можно привести к 1.

Теорема 4. Произвольная алгебра семейства $R(g^2_{(n,1)},1)$ изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$B_1(b_4,\ldots,b_{n-1}):[e_i,x]=-[x,e_i]=e_i+\sum_{t=i+2}^{n-1}b_{t-i+2}e_t, \ 2\le i\le n-1,$$

$$B_2:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \qquad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+3-n)e_i, 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=e_{n-1}+2e_n,\end{cases}$$

$$B_3:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \quad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+1-n)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, \ [x,x]=e_{n-1}.\end{cases}$$

$$B_4(b):\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, \quad [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2+b)e_i, \ 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, \ b\in\mathbb{C}.\end{cases}$$

Отметим, что первый ненулевой параметр $\{b_4,\ldots,b_{n-1}\}$ в алгебре $B_1(b_4,\ldots,b_{n-1})$ можно привести к 1.

Теорема 5. Произвольная разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикалом которой является один из следующих: $g^3_{(n,1)}, g^1_7, g^2_9, g^3_{11}$ и с одномерной коразмерностью изоморфна следующим алгебрам, соответственно:

$$C_1:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1,\\ [e_i,x]=-[x,e_i]=(i+1)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n,\end{cases}$$

$$C_2:[e_i,x]=-[x,e_i]=ie_i,\ 1\le i\le 7,$$

$$C_3:[e_i,x]=-[x,e_i]=ie_i,\ 1\le i\le 9,$$

$$C_4:[e_i,x]=-[x,e_i]=ie_i,\ 1\le i\le 11.$$

Надо отметить, что среди квази-филиформных алгебра Ли максимальной длины, только алгебры $g^1_{(n,1)}$ и $g^2_{(n,1)}$ имеют двумерную коразмерность.

Теорема 6. Произвольная алгебра Лейбница семейства $R(g^1_{(n,1)},2)$ и $R(g^2_{(n,1)},2)$ изоморфна следующей алгебре Ли, соответственно:

$$MA:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=(n-4)e_n, & [e_i,y]=-[y,e_i]=e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,y]=-[y,e_n]=2e_n,\end{cases}$$

$$MB:\begin{cases}[e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [e_i,x]=-[x,e_i]=(i-2)e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,x]=-[x,e_n]=2e_n, & [e_i,y]=-[y,e_i]=e_i, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_n,y]=-[y,e_n]=2e_n.\end{cases}$$

Для алгебры Лейбница L и модуля M над L рассмотрим пространства $CL^0(L,M)=M,\quad CL^n(L,M)=Hom(L^{\otimes n},M),\ n>0.$

Пусть $d^n:CL^n(L,M)\to CL^{n+1}(L,M)$ является F-гомоморфизмом, определяемый как

$$(d^n\varphi)(x_1,\ldots,x_{n+1}):=[x_1,\varphi(x_2,\ldots,x_{n+1})]+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i[\varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_{n+1}),x_i]$$
$$+\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^{j+1}\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1},\ldots,x_j,\ldots,x_{n+1}),$$

где $\varphi\in CL^n(L,M)$ и $x_i\in L$. Свойство $d^{n+1}d^n=0$ приводит к тому, что оператор $d=\sum_{i\ge 0}d^i$ удовлетворяет свойству $d\circ d=0$. Таким образом, n-ая группа когомологии определен следующим образом

$$HL^n(L,M):=ZL^n(L,M)/BL^n(L,M),$$

где элементы $ZL^n(L,M):=Kerd^{n+1}$ и $BL^n(L,M):=Imd^n$ называются *n-коциклами* и *n-кограницами*, соответственно.

Следующая теорема утверждает тривиальность второй группы комологий разрешимых алгебр MA и MB из Теоремы 6.

Теорема 7. $HL^2(MA, MA) = HL^2(MB, MB) = \{0\}$.

Следовательно, алгебры MA и MB жесткие алгебры во многообразии алгебр Лейбница.

В следующей теореме вычислены размерности второй группы комологий алгебр C_1, C_2, C_3 и C_4 из Теоремы 5.

Теорема 8. Пусть R – разрешимая алгебра Ли, изоморфная одной из алгебр C_1, C_2, C_3 и C_4. Тогда $\dim HL^2(R, R) = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена классификации разрешимых супералгебр Лейбница с заданными нильрадикалами, а также супералгебр Лейбница ассоциированные с трехмерной простой алгеброй Ли.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Классифицированы супералгебры Лейбница, четная часть которых трехмерная простая алгебра Ли. Доказано, что при размерности нечетной части больше двух данная супералгебра Лейбница становиться алгеброй Лейбница.
2. Классифицированы разрешимые супералгебры Лейбница, у которых нильрадикал есть супералгебра Ли максимального нильиндекса.
3. Описано разрешимое расширение нильпотентных супералгебр Лейбница с характеристическми последовательностями $(n \mid m)$ и $(n-1, 1 \mid m)$ и с нильиндексом $n+m$.
4. Получено описание разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикалом которых является квази-филиформная алгебра Ли максимальной длины.
5. Среди разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикалом которых является квази-филиформная алгебра Ли максимальной длины выявлены жесткие алгебры во многообразии алгебр Лейбница.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MURATOVA KHOSIYAT ABDUVAKILEVNA

CLASSIFICATION OF SOLVABLE LEIBNIZ SUPERALGEBRAS WITH GIVEN NILRADICALS AND SUPERALGEBRAS ASSOCIATED WITH A THREE-DIMENSIONAL SIMPLE LIE ALGEBRA

01.01.06 – Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.3.PhD/FM441.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Khudoyberdiev Abror Khakimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor
Official opponents:	**Arzikulov Farkhodjon Nematjonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Kurbanbaev Tuuelbay Kadirbaevich Doctor of Philosophy (PhD) physical and mathematical sciences
Leading organization:	National University of Uzbekistan

Defense will take place “___”_________ 2021 at_____at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered №________). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «___» _________ 2021 year
(Mailing report № __ on «___» ________ 2021 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

A.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.,
Senior researcher

B.A. Omirov
Chairman of the scientific seminar
at the Scientific Council for the
award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to study solvable Leibniz superalgebras with given nilradicals, as well as Leibniz superalgebras associated with a three-dimensional simple Lie algebra.

The objects of research are Leibniz superalgebras with a simple even part, solvable Leibniz superalgebras, solvable Lie algebras, derivation of algebras and superalgebras, and cohomology groups.

The scientific novelty of the research is as follows:

Leibniz superalgebras with the even part being the three-dimensional simple Lie algebra are classified;

Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is the Lie superalgebra of maximal nilindex are classified;

The description of solvable Leibniz superalgebras for which the nilradical is filiform Leibniz superalgebra is obtained;

Classification of solvable Leibniz algebras whose nilradical is isomorphic to quasi-filiform Lie algebras of maximum length is obtained and the second cohomology groups of these solvable Leibniz algebras with maximum codimension of the nilradical are founded.

Implementation of research results. The results obtained in the dissertation were used in the following research projects:

the results on the classification of solvable Leibniz algebras with a quasi-filiform Lie nilradical of maximum length were used in the OT-Ф4-31 project to describe solvable Leibniz algebras (Reference from the National University of Uzbekistan dated September 27, 2021, № 04/11-5437). Application of the scientific results made it possible to classify solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform non-Lie Leibniz algebra.

the results on the classification of solvable Leibniz superalgebras, whose nilradical is a Lie superalgebra of maximal nilindex, were used in the EFA- Ftech-2018-77 research project «Cohomogy groups of semisimple and nilpotent algebras», in the classification of solvable Leibniz superalgebras with given nilradical (Reference from the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, October 29, 2021, № 2/1255-2983). Application of the scientific results made it possible to classify solvable superalgebras with given nilradical, as well as to prove the existence of rigid superalgebras in the class of such superalgebras.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, divided into ten sections, a conclusion and a list of references. The volume of the thesis is 101 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Muratova Kh. A., Ladra M., Omirov B. A., Sattarov A. M. Solvable Leibniz algebras with quasi-filiform Lie algebras of maximum length nilradicals// Communications in Algebra, 2020, 48 (8), p. 3525-3542. (№3. Scopus IF=0,655).
2. Muratova Kh.A., Khudoyberdiyev A.Kh. On Leibniz superalgebras which even part is sl_2 // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – Vol. 20. – Iss. 9. – Article N.2150161. (№3. Scopus IF=0.669).
3. Муратова Х.А. Разрешимые суперaлгебры Лейбница с четырехмерными нильрадикалами нильиндекса 4// Бюллетень института Математики. – 2021. –№ 3. – С. 75-83. (01.00.00; №17).
4. Muratova Kh.A. Solvable Leibniz superalgebras with nilradicals of the nilindex $n+m$// Uzbek Math. J. – 2021. – Vol. 65. – Iss. 2. – P. 117-127. (01.00.00; №6).
5. Khudoyberdiyev A.Kh., Ladra M., Muratova Kh.A. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a Lie superalgebra of maximal nilindex// Bulletin of National University of Uzbekistan: Math. and Nat. sci. – 2019. – Vol. 2(1). – P. 52-68. (01.00.00; №8).
6. Gaybullaev R.K., Khalkulova Kh.A. (Muratova Kh.A.), Adashev J.Q. The rigity of some solvable Lie algebra// Uzbek Math. J. – 2018. – Vol. 2. – P. 40-43. (01.00.00; №6).
7. Сатторов А.М., Халкулова Х.А. (Муратова Х.А.), Описание разрешимых алгебр Лейбница с пятимерным квази-филиформным лиевым нильрадикалом максимальной длины// Узбекский математический журнал. – 2017. – № 4. – С. 150-159. (01.00.00; №6).

II бўлим (II часть; part II)

8. Саттаров А.М. Халкулова Х.А. (Муратова Х.А.) Описание разрешимых алгебр Лейбница с пятимерным квази-филиформным лиевым нильрадикалом максимальной длины// Республиканская конференция «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» – Ташкент, 15-17 декабря 2017. – С. 220-221.
9. Халкулова Х.А., Худойбердиев А.Х. Градуировки квази-филиформных алгебр Ли максимальной длины// Республиканская конференция «Новые теоремы юных математиков–2018» – Наманган, 18-19 октября 2018. – С. 103-104.
10. Khalkulova Kh. A., Khudoyberdiyev A. Kh. On Leibniz superalgebras which even part is semi-simple Lie algebras// International conference «Science–

Technology–Education–Mathematics–Medicine» – Tashkent, May 16-17, 2019. – P. 81-82.
11. Muratova Kh.A. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical has a maximal nilindex// Republican conference «Actual problems and analysis applications» – Qarshi, 4-5 October, 2019. – P. 228-229.
12. Муратова Х.А. Разрешимые суперaлгебры Лейбница с нильрадикалом $N_{2,m}$// VIII школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» – Москва, 27 января-1 февраль 2020. –С. 47-49.
13. Худойбердиев А.Х., Муратова Х.А. Дифференцирования суперaлгебр Лейбница с максимальным нильиндексом// Республиканская конференция «Современные проблемы математики» – Нукус, 20 мая 2020. – С. 96-97.
14. Муратова Х.А., Сапарбаева С. Разрешимые суперaлгебры Лейбница с нильрадикалом $F_{2,2}^{1}$// Республиканская конференция «Современные проблемы математики: проблемы и решения» – Термез, 21-23 октября 2020, – С. 24-26.
15. Худойбердиев А.Х. Муратова Х.А. Разрешимые нелиевы суперaлгебры Лейбница, у которых нильрадикал есть суперaлгебра Ли максимального нильиндекса// IX школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» – Самара, 21-26 августа 2021. –С. 59-61.
16. Муратова Х.А., Бекниязов А.Е. О разрешимом расширении одной филиформной суперaлгебры Лейбница// Республиканская конференция «Сарымсаковские чтения» – Ташкент, 16-18 сентября 2021. –С. 107-109.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2021 йил
27 октябрда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди 27.10.2021. Ҳажми 2,75 босма табоқ.
Бичими 60×84 1/16. Адади 50 нусха.