ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ҚАРШИ МУҲАНДИСЛИК-ИҚТИСОДИЁТ ИНСТИТУТИ

ДАВЛАТОВ ШОКИР ОЛТИБОЕВИЧ

СИММЕТРИК t-ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМАЛАР УЧУН ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ ТУРҒУНЛИГИ

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ - 2022

УДК: 519.633.6

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ҚАРШИ МУҲАНДИСЛИК-ИҚТИСОДИЁТ ИНСТИТУТИ

ДАВЛАТОВ ШОКИР ОЛТИБОЕВИЧ

СИММЕТРИК t-ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМАЛАР УЧУН ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ ТУРҒУНЛИГИ

**01.01.03-Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.1.PhD/FM563 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Қарши муҳандислик-иқтисодиёт институтида бажарилган. Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Алоев Рахматилло Джураевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Нормуродов Чори Бегалиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Худойберганов Мирзоали Ўразалиевич физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSC.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «28» апрел соат 16^00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.:(+99871)227-12-24, факс:(+99871)246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (38 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2022 йил «11» апрел куни тарқатилди.
(2022 йил «18» март даги 2 рақамли реестр баённомаси).

М.М.Арипов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

З.Р.Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Х.М.Шадиметов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д. профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида газ динамикаси, гидродинамика, электродинамика, деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикаси ёки туташ муҳитлар механикасида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда, гиперболик системалар ёки тўлқин тенгламалари учун қўйилган аралаш масалаларга келтирилади. Гиперболик системаларга ёки иккинчи тартибли гиперболик тенгламага қўйилган масалаларни биринчи тартибли симметрик t-гиперболик тенгламалар системасига келтириш орқали ечиш ҳисоблаш математикаси, математик моделлаштириш ва деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикаси каби соҳалар бўйича олиб борилаётган тадқиқотларнинг объекти ҳисобланади. Шу сабабли, симметрик t-гиперболик тенгламалар системасига қўйилган масалалар учун чекли элементлар усули асосида ошкормас айирмали схемалар қуриш ва уларнинг турғунлигини аниқлаш ҳисоблаш математикасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда дунёда нефть-газ заҳираларини аниқлаш, иншоотларнинг зилзилабардошлилигини аниқлаш, сув иншотларини қуриш каби соҳаларга замонавий технологияларни жорий этиш, хусусан, илмий-техник имкониятлар суръатини ошириш, фан ва ишлаб чиқариш интеграциясини кенгайтириш, гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалалар учун адекват ҳисоблаш моделларини қуришда чекли элементлар усули назариясини такомиллаштириш бўйича кўплаб илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Бунда аралаш масалаларни сонли ечиш учун тежамкор методлар яратиш ва уларнинг турғунлигини исботлаш муҳим рол ўйнайди. Шу сабабли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш учун тежамкор схемалар қуриш, уларнинг яқинлашишини исботлаш ҳамда амалий масалаларга қўллаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиғига эга бўлган математик физика, электродинамика ва амалий математика соҳаларидаги мураккаб масалаларни сонли ечиш усулларини қуриш ва уларнинг турғунлигини тадқиқ этиш каби долзарб йуналишларига катта эътибор қаратилмоқда. Бу борада хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва системаларига қўйилган чегаравий масалаларни сонли ечиш усуллари ва алгоритмларини қуришда муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, алгебра, дифференциал тенгламалар, математик физика, математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» каби устувор йўналишлар бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий изланишлар олиб бориш ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади[1]. Ушбу қарор ижросини таъминлашда симметрик t-гиперболик система учун қўйилган аралаш

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий- тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сон қарори.

масалани сонли ечишга мўлжалланган чекли элементлар усулининг турғунлигини таъминлаш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Жаҳон тажрибаси шуни кўрсатадики, газ динамикаси, гидродинамика, электродинамика, деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикаси ёки туташ муҳитлар механикасининг қатор муаммоларини тадқиқ этиш гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалалар ёрдамида тавсифланади. Бундай масалаларни сонли ечиш усуллари билан В.А.Ильин, Т.З.Исмагилов, Ю.А.Волков, В.М.Ковеня, К.Фридрихс, А.М.Гришин, А.В.Гулин, А.А.Самарский, С.К.Годунов, В.М.Гордиенко, Х.О.Крайс, А.Н. Малышев, А.М.Блохин, Н.Г.Марчук, Р.Сакомота каби кўплаб олимлар шуғулланишган. Уларнинг ишларида асосан гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалаларни айирмали схемалар ёки чекли элементлар усуллари ёрдамида сонли ечилган.

Биринчи тартибли симметрик t-гиперболик тенгламалар системасига қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун турли хилдаги айирмали схемалар А.М.Блохин, Р.Д.Алоев, И.Ю.Дружинин, S.S.Abarbanel, A.E.Chertocky, D.A.French, Gui-Qiang Chen, Jian-Guo Liu, J.L.Steger, E.Turkel, R.F.Warming, H.C. Yee ва бошқаларнинг ишларида келтирилган бўлиб, энергетик усулдан фойдаланиб ушбу схемаларнинг турғунлиги исботланган ва амалий масалаларни ечишда қўлланилган.

Гиперболик тенгламалар ёки системаларга қўйилган аралаш масалаларни сонли ечишда чекли элементлар усули ёрдамида олинган айирмали схемаларнинг турғунлиги исботлаш, аппроксимация тартибини аниқлаш, яқинлашиш тезлиги ҳамда сонли ечим аниқлигини баҳолаш R.S.Falk, G.R.Richter, B.A.Szabo, E.L.Wilson, O.C.Zienkievich, K.O.Friedrichs, G.Fix, T.Dupont, B.Swartz, R.Winther, J.Dendy, J.Dondy, L.Whalbin , C.Johnson, V.Thomee, M.Gunzburger, G.Baker, W.Layton, D.F.Christie, T.J.R.Hughes, C.Johnson, S.Nakazawa, U.N.Hvert, W.H.Raymond каби олимларнинг ишларида келтирилган. Бугунги кунда мамлакатимизда математик физика тенгламалари орқали тавсифланадиган жараёнларни математик моделлаштириш ва уларни чекли элементлар усули билан ечиш муаммолари Р.Д.Алоев, А.М.Полатов, А.А.Халджигитов, Ш.Ш.Заиров ва бошқа олимлар томонидан ўрганилмоқда.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация иши Қарши муҳандислик иқтисодиёт институтининг илмий тадқиқот ишлар режасига мувофиқ “Математик моделлаштириш, ҳисоблаш усуллари ва дастурлаш технологиялари” доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида ошкормас айирмали схемани қуриш ва унинг турғунлигини исботлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида ошкормас айирмали схема қуриш;

бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлигини таъминловчи шартларни аниқлаш;

икки ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида ошкормас айирмали схемани қуриш;

икки ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлигини таъминловчи шартларни аниқлаш;

модел масаланинг ошкормас айирмали схемалар ёрдамида топилган сонли ечимини аниқ ечимига яқинлашишини асослаш.

Тадқиқотнинг объекти симметрик t-гиперболик система учун қўйилган аралаш масаладан иборат.

Тадқиқотнинг предмети симметрик t-гиперболик системалар учун чекли элементлар усулидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида чекли элементлар усули, алгоритмлар назарияси, айирмали схемалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар, дифференциал тенгламалар назариясидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида ошкормас айирмали схема қурилган;

бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлик шартлари топилган;

икки ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида ошкормас айирмали схема қурилган;

икки ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлик шартлари топилган;

модел масаланинг ошкормас айирмали схемалар ёрдамида топилган сонли ечимини аниқ ечимга яқинлашиши асосланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

симметрик t-гиперболик системасига қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида айирмали схемалар қурилган;

симметрик t-гиперболик системасига қўйилган аралаш масалаларни тақрибий ечиш учун дастурий таъминот яратилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назарияси методларини қўлланилганлиги, математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги ҳамда ҳисоблаш тажрибалари натижалари орқали таққосланганлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти таклиф қилинган чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схемаларнинг симметрик t-гиперболик системасига қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш учун фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схемалар, яратилган алгоритм ва дастурлар мажмуи симметрик t-гиперболик системасига қўйилган аралаш масалаларнинг сонли ечимини топиш учун самарали ҳисоблаш тажрибаларини ўтказишга имкон бериши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Симметрик t-гиперболик системалар учун чекли элементлар усули ёрдамида ошкормас айирмали схемаларни қуриш бўйича олинган натижалар қуйидаги илмий лойиҳаларда жорий қилинган:

қурилган чекли айирмали схемалар, алгоритмлар ва яратилган дастурлардан А-13-38 рақамли “Икки фазали муҳит тўлқин динамикаси учун тўғри ва тескари масалаларни назарий ва сонли тадқиқ қилиш” мавзусидаги грант лойиҳасида ғовак-эластик муҳитда бир ўлчамли тўғри динамик масалаларни сонли ечишда фойдаланилган (Қарши давлат университетининг 2021 йил 17 сентябрдаги 03/3834-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ғовак-эластик муҳитда бир ўлчамли тўғри динамик масалаларнинг сонли ечимини топиш имконини берган.

қурилган айирмали схемалар ва алгоритмлардан ОТ-Ф4-02 рақамли “Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси” грант лойиҳасида бир ўлчамли тўғри динамик масалаларни сонли-аналитик ечишда фойдаланилган (Бухоро давлат университетининг 2021 йил 21 сентябрдаги 01/2429-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларни қўллаш қовушқоқ-эластик муҳитларда тўлқин тарқалиш тенгламалар системаси учун бир ўлчамли тўғри динамик масалаларни сонли ечиш имконини берган

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та, жумладан 4 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Тадқиқот мавзуси бўйича 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан 2 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган, 2 та ЭҲМ учун дастурий маҳсулотга гувоҳнома олинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 94 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожлантиришнинг устувор йўналишларига мос келиши асосланган. Диссертация мавзуси бўйича мамлакатимиз ва чет элдаги илмий тадқиқотларнинг қисқача таҳлили келтирилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси муҳокама қилинган, тадқиқотнинг мақсади ва вазифалари шакллантирилган, унинг объекти ва предмети кўрсатилган, тадқиқотнинг илмий янгиликлари ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг қўлланилиши, диссертациянинг тузилиши ва нашр қилинган илмий ишлар тўғрисида маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Бир ўлчовли фазода симметрик t-гиперболик типдаги системаларни чекли элементлар усули билан ечиш**» деб номланган биринчи боби симметрик t-гиперболик типдаги системалар учун бир ўлчовли соҳада қўйилган аралаш масалаларни чекли элементлар усули билан сонли ечишга бағишланган.

Аралаш масаланинг қўйилиши:

$\Omega=(\ell_1,\ell_2)$ бўлсин. $G=\{(t,x): t\in(0,T),\ x\in\Omega\}$ соҳада

$$A\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+B\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+Cu(t,x)=F(t,x) \tag{1}$$

симметрик t-гиперболик системани

$$R_1u(t,\ell_1)=g_1(t),\ \ R_2u(t,\ell_2)=g_2(t) \tag{2}$$

чегаравий ва

$$u(0,x)=\psi(x),\ \ x\in\Omega \tag{3}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин.

Бу ерда A,B - $M\times M$ ўлчамли симметрик ҳақиқий ўзгармас матрицалар; бундан ташқари A - мусбат аниқланган матрица; C - $M\times M$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас матрица; R_1,R_2- ўзгармас матрицалар бўлиб, уларнинг устунлар сони M га, сатрлари сони мос равишда $A^{-1}B$ матрицанинг мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг; g_1,g_2-берилган вектор-функциялар бўлиб, уларнинг ўлчамлари мос равишда $A^{-1}B$ матрицанинг мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг; $\psi(x)-$берилган ўлчами M га тенг бўлган вектор-функция; $u(t,x)=(u_1,u_2,...,u_M)^T$ -номаълум вектор-функция; $F(t,x)=(f_1,f_2,...,f_M)^T$ -берилган вектор-функция.

(1) система учун айирмали схема курамиз. $[0,T]$ кесмани N_t бўлакка бўламиз.

$$\boldsymbol{t_n=\tau\cdot n,(n=0,...,N_t),\tau=\frac{T}{N_t}.}$$

$[\ell_1,\ell_2]$ кесмани N_x та тенг бўлакка бўлиб ($x_i=\ell_1+hi$, $i=0,...,N_x$, $h=\dfrac{\ell_2-\ell_1}{N_x}$), аралаш масаланинг вақт бўйича ҳар бир t_n қатламдаги, $u_h(t_n,x)$ тақрибий ечимини $u_h^n=u_h(t_n,x)=\sum_{i=0}^{N_x}u_i^n\phi_i(x)$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $\phi_i(x)$ базис функция, x_i тугунда унинг қиймати 1 га тенг, қолган тугунларда эса унинг қиймати 0 га тенг, $u_i^n=u(t_n,x_i)=(u_{1i}^n,u_{2i}^n,...,u_{Mi}^n)^T$ вектор. (1) системада $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ни $\dfrac{u(t+\tau,x)-u(t,x)}{\tau}$ муносабат билан алмаштирамиз, $u(t,x)$ ўрнига $u_h(t_n,x)$ қўямиз ва ҳосил бўлган системанинг ҳар бир тенгламасини $\phi_0(x)$ базис функцияга кўпайтириб $[x_0,x_1]$ кесмада, $\phi_{N_x}(x)$ базис функцияга кўпайтириб $[x_{N_x-1},x_{N_x}]$ кесмада ва $\phi_i(x)$ базис-функцияларга кўпайтириб $[x_{i-1},x_{i+1}],\ i=1,...,N_x-1$ кесмаларда интеграллаймиз. Базис функциялар сифатида

$$\phi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h}, & x\in(x_0,x_1);\\ 0, & x\notin(x_0,x_1);\end{cases}\qquad \phi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h}, & x\in(x_{i-1},x_i);\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h}, & x\in(x_i,x_{i+1});\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_{i+1});\end{cases}\qquad i=1,...,N_x\text{-}1 \tag{4}$$

$$\phi_{N_x}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N_x-1}}{h}, & x\in(x_{N_x\text{-}1},x_{N_x});\\ 0, & x\notin(x_{N_x\text{-}1},x_{N_x})\end{cases}$$

функцияларни оладиган бўлсак, (1) система учун ушбу

$$AhL_0u_0^{n+1}+\tau B\xi_0u_0^{n+1}+\tau ChL_0u_0^{n+1}=\frac{1}{2}\tau hF_0^{n+1}+AhL_0u_0^n \tag{5}$$

$$AhL_{N_x}u_{N_x}^{n+1}+\tau B\xi_{N_x}u_{N_x}^{n+1}+\tau ChL_{N_x}u_{N_x}^{n+1}=\frac{1}{2}\tau hF_{N_x}^{n+1}+AhL_{N_x}u_{N_x}^n \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&AhLu_i^{n+1}+\tau B\xi u_i^{n+1}+\tau ChLu_i^{n+1}=\tau hF_i^{n+1}+AhLu_i^n\\ &i=1,...N_x-1\end{aligned} \tag{7}$$

айирмали схемани оламиз. Бу ерда $u_i^n=u(t_{n,}x_i),\ F_i^n=F(t_{n,}x_i),\ i=0,...,N_x$ вектор-функцияларнинг аппроксимацияси ва қуйидаги операторлар киритилган:

$$L_0=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\psi^{+1},\ \ \xi_0=\frac{\psi^{+1}-1}{2}, L_{N_x}=\frac{1}{6}\psi^{-1}+\frac{1}{3},\ \ \xi_{N_x}=\frac{1-\psi^{-1}}{2},$$

$$\psi^{\pm1}u_i^n=u_{i\pm1}^n,\ L=\frac{1}{6}\psi^{-1}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\psi^{+1},\ \xi=\frac{\psi^{+1}-\psi^{-1}}{2}.$$

(1)-(3) масаланинг чегаравий ва бошланғич шартларини қуйидагича аппроксимация қиламиз:

$$x=\ell_1 \text{ да} \qquad R_1u_0(t_{n+1})=g_1(t_{n+1}), \tag{8}$$

$$x=\ell_2 \text{ да} \qquad R_2u_{N_x}(t_{n+1})=g_2(t_{n+1}), \tag{9}$$

$$u_i(0)=\psi(x_i)\quad i=\overline{0,N_x}\ . \tag{10}$$

Аралаш масаланинг $t_n\,(n=0,1,2,...)$ қатламгача тақрибий ечими топилган деб, t_{n+1} қатламдаги тақрибий ечимини топиш учун $u_i^{n+1},\ (i=0,...,N_x)$ векторларнинг компоненталарига нисбатан (7)-(9) чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Чизиқли тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши мақсадида $x=\ell_1$ да $u(t,x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (5) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. Масалан, $u(t,x)$ вектор-функциянинг

$j-$компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, (5) айирмали тенгламалар системасидан $j-$тенгламани оламиз. $x=\ell_2$ да эса $u(t,x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (6) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. Шундай қилиб, ёпиқ чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу чизиқли тенгламалар системаси бош элементлар усули билан ечилган.

(1)-(3) аралаш масала учун чекли элементлар усули билан олинган айирмали схема шартли турғун эканлигини кўрсатувчи қуйидаги теорема исботланган.

1-теорема. *Агар қуйидаги шартлар*

$$(Bu,u)\Big|_{x=\ell_2}-(Bu,u)\Big|_{x=\ell_1}\ge 0,\qquad \left(\left(C+C^T\right)u,u\right)\ge 0 \tag{11}$$

бажарилса, (1)–(3) аралаш масала ягона u_h *тақрибий ечимга эга бўлади, ихтиёрий* h *да ва барча* $n\le\dfrac{T}{\tau}$ *ларда*

$$\left\|u_h^n\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le e^T\left\|\psi_h\right\|^2_{L_2(\Omega)}+(T+1)(e^T-1)F$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда норма $\|u\|_{L_2(\Omega)}=\sqrt{\int\limits_\Omega u\cdot u dx}$, $F=\max\limits_n\left\|F_h^n\right\|^2_{L_2(\Omega)}$.

Ушбу схемалар асосида (11) шартларни текширадиган, (1)-(3) масалани сонли ечадиган ва ечим графигини чизадиган дастур яратилган.

Бир ўлчовли соҳада ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик системалар учун аралаш масала (1)-(3) масала каби қўйилади. Факат бу масалада энди A,B,C,R_1,R_2 матрицалар $A(t,x),B(t,x),C(t,x),R_1(t),R_2(t)$ ўзгарувчан матрицалар бўлади.

Ўзгарувчан коэффициентли система учун айирмали схемани қуришда базис функциялар сифатида (4) функцияларни оламиз. Юқорида келтирилган процедураларни ўзгарувчан коэффициентлар учун такрорлаб, қуйидаги

$$\begin{aligned}&A_0^{n+1}h\left(\frac{1}{6}u_1^{n+1}+\frac{1}{3}u_0^{n+1}\right)+\frac{1}{2}\tau B_0^{n+1}\left(u_1^{n+1}-u_0^{n+1}\right)+\tau C_0^{n+1}h\left(\frac{1}{6}u_1^{n+1}+\frac{1}{3}u_0^{n+1}\right)=\\&=\frac{1}{2}\tau hF_0^{n+1}+A_0^{n+1}h\left(\frac{1}{6}u_1^{n}+\frac{1}{3}u_0^{n}\right)\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&A_{N_x}^{n+1}h\left(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n+1}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n+1}\right)+\frac{1}{2}\tau B_{N_x}^{n+1}\left(u_{N_x}^{n+1}-u_{N_x-1}^{n+1}\right)+\tau C_{N_x}^{n+1}h\left(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n+1}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n+1}\right)=\\&=\frac{1}{2}\tau hF_{N_x}^{n+1}+A_{N_x}^{n+1}h\left(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n}\right)\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&A_i^{n+1}Lu_i^{n+1}+\tau B_i^{n+1}\xi u_i^{n+1}+\tau C_i^{n+1}Lu_i^{n+1}=\tau hF_i^{n+1}+A_i^{n+1}Lu_i^{n}\\&i=1,\dots N_x-1\end{aligned}\tag{14}$$

ошкормас айирмали схемани оламиз. Бу ерда
$u_i^n = u(t_n, x_i),\ F_i^n = F(t_n, x_i), i = 0,...N_x$ вектор-функцияларнинг
$A_i^n = A(t_n, x_i),\ B_i^n = B(t_n, x_i),\ C_i^n = C(t_n, x_i)$ матрицаларнинг аппроксимацияси ва қуйидаги операторлар киритилган:

$$\psi^{\pm 1} u_i^n = u_{i\pm 1}^n,\ L = \frac{h}{6}\psi^{-1} + \frac{2}{3}h + \frac{h}{6}\psi^{+1},\ \xi = \frac{\psi^{+1} - \psi^{-1}}{2}.$$

Чегаравий ва бошланғич шартларни қуйидагича аппроксимация қиламиз:

$$x = \ell_1 \text{ да} \qquad R_1(t_{n+1}) u_0(t_{n+1}) = g_1(t_{n+1}), \tag{15}$$

$$x = \ell_2 \text{ да} \qquad R_2(t_{n+1}) u_{N_x}(t_{n+1}) = g_2(t_{n+1}), \tag{16}$$

$$u_i(0) = \psi(x_i) \quad i = \overline{0, N_x} \ . \tag{17}$$

Аралаш масаланинг $t_n\,(n = 0,1,2,...)$ қатламгача тақрибий ечими топилган деб, t_{n+1} қатламдаги тақрибий ечимини топиш учун $u_i^{n+1},\ (i = 0,...,N_x)$ векторларнинг компоненталарига нисбатан (14)-(16) чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Чизиқли тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши мақсадида $x = \ell_1$ да $u(t, x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (12) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. $x = \ell_2$ да эса $u(t, x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (13) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. Шундай қилиб, ёпиқ чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу чизиқли тенгламалар системаси бош элементлар усули билан ечилган.

Ўзгарувчан коэффициентли аралаш масала учун чекли элементлар усули билан олинган айирмали схема шартли турғун эканлигини кўрсатувчи қуйидаги теорема исботланган.

2-теорема. *Агар қуйидаги шартлар*

$$(Bu, u)\Big|_{x=\ell_2} - (Bu, u)\Big|_{x=\ell_1} \ge 0,\ \left(\left(C + C^T - \frac{\partial B}{\partial x}\right)u, u\right) \ge 0 \tag{18}$$

бажарилса, ўзгарувчан коэффициентли аралаш масала ягона u_h *тақрибий ечимга эга бўлади, ихтиёрий* h *да ва барча* $n \le \dfrac{T}{\tau}$ *ларда*

$$\left\|u_h^n\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le e^T \left\|\psi_h\right\|^2_{L_2(\Omega)} + (T+1)(e^T - 1)F$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int\limits_\Omega u \cdot u dx}\,, F = \max\limits_n \left\|F_h^n\right\|^2_{L_2(\Omega)}$.

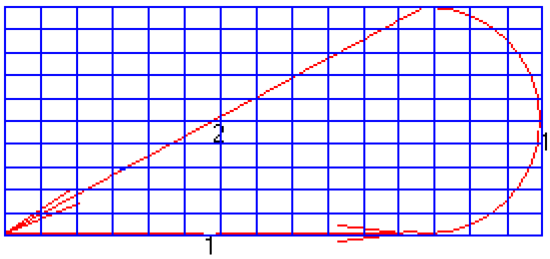
Ушбу схема асосида (18) шартларни текширадиган, ўзгарувчан коэффициентли масалани сонли ечадиган ва ечим графигини чизадиган дастур яратилган.

Яратилган дастурларни тўғри ишлаши модел масалаларда ҳисоблаш тажрибалари асосида текширилган.

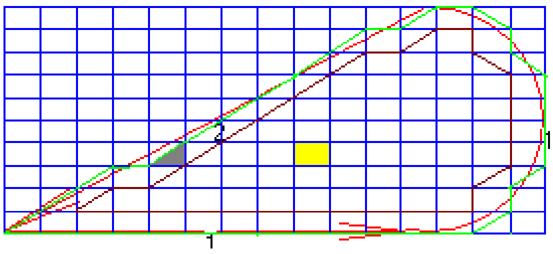
Диссертациянинг «**Икки ўлчовли фазода ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик типдаги системаларни чекли элементлар усули билан ечиш**» деб номланган иккинчи боби икки ўлчовли соҳада ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик типдаги системалар учун қўйилган аралаш масалани чекли элементлар усули билан сонли ечишга бағишланган. Икки ўлчовли фазода чекли соҳанинг аппроксимацияси кўрсатилган.

Соҳа чегарасини беришда, уни қисмлари сифатида кесмалар ва айлана ёйларидан фойдаланиш мумкин. Чегара бирор S қисмининг бошланиш жойи деб, уни шундай четки нуқтаси ҳисобланадики, ундан бошлаб S бўйича ҳаракатланганда соҳа чапда қолади. Кесмалар иккита четки нуқталари билан аниқланади, айлана ёйлари учун эса қўшимча айлана маркази ҳам берилади.

Ω-соҳа, томонлари Oxy ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчакка олинади. Тўғри тўртбурчак томонларининг Ox ва Oy ўқдаги проекциялари мос равишда $[a;b],[c;d]$ кесмалар бўлсин. $[a;b],[c;d]$ кесмаларни мос равишда тик кесиб ўтувчи $x = x_i = a + h_x i \quad (i = 0,...,N_x, h_x = \dfrac{b-a}{N_x})$, $y = y_j = c + h_y j \quad (j = 0,...,N_y, h_y = \dfrac{d-c}{N_y})$ тўғри чизиқлар ўтказамиз. Натижада Ω-соҳа текис тўр билан қопланади(1-расм).



1-расм.



2-расм.

$x = x_i = a + h_x i \quad (i = 0,...,N_x, h_x = \dfrac{b-a}{N_x})$ тўғри чизиқ билан, $y = y_j = c + h_y j \quad (j = 0,...,N_y, h_y = \dfrac{d-c}{N_y})$ тўғри чизиқ кесишган нуқтасини $M_{ij} = M(x_i; y_j)$ белгилаймиз. $M_{ij} = M(x_i; y_j)$ нуқтани тўр тугуни деб атаймиз.

1-таъриф. Ω соҳа чегарасидан $h \le \dfrac{h_x}{2}$ ёки $h \le \dfrac{h_y}{2}$ масофада жойлашган ёки соҳа чегарасида ётувчи тугун чегаравий тугун дейилади.

2-расмда чегаравий тугунлар яшил рангли эгри чизиқлар билан туташтирилган.

2-таъриф. Ω соҳа ичида ётадиган чегаравий тугунларга қўшни бўлган тугун чегара олди тугуни дейилади.

2-расмда чегара олди тугунлар жигар рангли эгри чизиқлар билан туташтирилган.

3-таъриф. Ω соҳа ичида ётадиган чегаравий тугунларга қўшни бўлмаган тугун ички тугун дейилади.

4-таъриф. Ω соҳа ичида ётмайдиган ва чегаравий тугун бўлмаган тугун ташқи тугун дейилади.

Тўр Ω_h-соҳани бир нечта элементларга бўлади. Ҳар бир элемент учлари тугунларда бўлган тўртбурчак (2-расмда сариқ рангда) ёки учбурчак (2-расмда кулранг рангда) бўлиши мумкин. Бир учи M_{ij} тугунда бўлган элементларни шу тугуннинг элементлари деб атаймиз ва M_{ij} тугун элементларининг бирлашмасини Ω_{ij} белгилаймиз. У ҳолда $\Omega_h = \bigcup_{M_{ij}\in\Omega} \Omega_{ij}$ тенглик ўринли бўлади.

Икки ўлчовли соҳада ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик типдаги системалар учун аралаш масаланинг қўйилиши:

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ чекли соҳа бўлсин. $G=\left\{\left(t,x,y\right): t\in\left(0,T\right),\ (\mathrm{x,y})\in\Omega\right\}$ соҳада

$$A\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t}+B\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial x}+C\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y}+Du(t,x,y)=F(t,x,y) \qquad (19)$$

симметрик t-гиперболик системани , $\partial\Omega$ да ($\partial\Omega$- Ω соҳанинг чегараси)

$$\begin{aligned} &R_1u\left(t,x,y\right)\Big|_{\partial\Omega_{x+}}=g_1\left(t,x,y\right),\ R_2u\left(t,x,y\right)\Big|_{\partial\Omega_{x-}}=g_2\left(t,x,y\right),\\ &R_3u\left(t,x,y\right)\Big|_{\partial\Omega_{y+}}=g_3\left(t,x,y\right),\ R_4u\left(t,x,y\right)\Big|_{\partial\Omega_{y-}}=g_4\left(t,x,y\right), \end{aligned} \qquad (20)$$

чегаравий шартларни ва

$$u\left(0,x,y\right)=u_0\left(x,y\right),\ (x;y)\in\Omega \qquad (21)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин.

Бу ерда $A=(a_{ks}),B=(b_{ks}),C=(c_{ks})$ - $N\times N$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас симметрик матрицалар, бундан ташқари A - мусбат аниқланган матрица, $D=(d_{ks})$ - $N\times N$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас ихтиёрий матрица; R_1,R_2,R_3,R_4- тўғрибурчакли ўзгармас матрицалар бўлиб, уларнинг устунлари сони Nга, R_1,R_2- матрицаларнинг сатрлари сони $A^{-1}B$ матрицанинг мос равишда мусбат ва манфий хос қийматлари сонига, R_3,R_4- матрицаларнинг сатрлари сони эса $A^{-1}C$ матрицанинг мос равишда мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг; g_1,g_2,g_3,g_4-берилган вектор-функциялар бўлиб, уларнинг ўлчамлари мос равишда R_1,R_2,R_3,R_4 матрицаларнинг сатрлар сонига тенг; $\partial\Omega_{x+},\partial\Omega_{x-}$- $A^{-1}B$ матрицанинг мос равишда мусбат ва манфий хос қийматларига мос келувчи шартлар қўйиладиган чегара қисмлари; $\partial\Omega_{y+},\partial\Omega_{y-}$- эса $A^{-1}C$ матрицанинг мос равишда мусбат ва манфий хос қийматларига мос келувчи шартлар қўйиладиган чегара қисмлари; $u_0(x,y)$ – ўлчами N га тенг бўлган берилган вектор-функция; $u(t,x,y)=(u_1,u_2,..,u_N)^T$ - номаълум вектор-функция, $F(t,x,y)=(f_1,f_2,...,f_N)^T$ - берилган вектор-функция.

(19) система учун айирмали схема қурамиз. $[0,T]$ кесмани N_t бўлакка бўламиз.

$$t_n=\tau\cdot n,(n=0,\dots,N_t),\tau=\frac{T}{N_t}.$$

Аралаш масаланинг вақт бўйича ҳар бир t_n қатламдаги $u_h(t_n,x,y)$ тақрибий ечимини $u_h^n=u_h(t_n,x,y)=\sum\limits_{(x_i;y_j)\in\overline{\Omega}_h}u_{ij}^nQ_{ij}(x,y)$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $Q_{ij}(x,y)$ базис функциялар, $(x_i;y_j)\in\overline{\Omega}_h$ тугунларда уларнинг қийматлари 1 га тенг, қолган тугунларда эса 0 га тенг,

$$u_{ij}^n=u(t_n,x_i,y_j)=\left(u_{1ij}(t_n),u_{2ij}(t_n),...,u_{Nij}(t_n)\right)^T=\left(u_{1ij}^n,u_{2ij}^n,...,u_{Nij}^n\right)^T.$$

(19) системада $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ни $\dfrac{u(t+\tau,x,y)-u(t,x,y)}{\tau}$ муносабат билан алмаштирамиз, $u(t,x,y)$ ўрнига $u_h(t_n,x,y)$ қўямиз, ҳосил бўлган системанинг ҳар бир тенгламасини $Q_{ij}(x,y)$ базис функцияга кўпайтириб, Ω_{ij} соҳада интеграллаймиз. Бу ерда Ω_{ij} - M_{ij} тугун элементларининг бирлашмаси. (19) система учун қуйидаги ошкормас айирмали схемани оламиз:

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_{ij}(A+\tau D)+\beta_{ij}\tau B+\gamma_{ij}\tau C\right)u_{ij}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j}(A+\tau D)+\beta_{i+1j}\tau B+\gamma_{i+1j}\tau C\right)u_{i+1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j+1}(A+\tau D)+\beta_{i+1j+1}\tau B+\gamma_{i+1j+1}\tau C\right)u_{i+1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij+1}(A+\tau D)+\beta_{ij+1}\tau B+\gamma_{ij+1}\tau C\right)u_{ij+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j+1}(A+\tau D)+\beta_{i-1j+1}\tau B+\gamma_{i-1j+1}\tau C\right)u_{i-1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j}(A+\tau D)+\beta_{i-1j}\tau B+\gamma_{i-1j}\tau C\right)u_{i-1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j-1}(A+\tau D)+\beta_{i-1j-1}\tau B+\gamma_{i-1j-1}\tau C\right)u_{i-1j-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij-1}(A+\tau D)+\beta_{ij-1}\tau B+\gamma_{ij-1}\tau C\right)u_{ij-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j-1}(A+\tau D)+\beta_{i+1j-1}\tau B+\gamma_{i+1j-1}\tau C\right)u_{i+1j-1}^{n+1}=\\
&\tau q_{ij}F_{ij}^{n+1}+\tau A(\alpha_{ij}u_{ij}^{n}+\alpha_{i+1j}u_{i+1j}^{n}+\alpha_{i+1j+1}u_{i+1j+1}^{n}+\\
&\alpha_{ij+1}u_{ij+1}^{n}+\alpha_{i-1j+1}u_{i-1j+1}^{n}+\alpha_{i-1j}u_{i-1j}^{n}+\alpha_{i-1j-1}u_{i-1j-1}^{n}+\\
&\alpha_{ij-1}u_{ij-1}^{n}+\alpha_{i+1j-1}u_{i+1j-1}^{n})\quad (x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h\ .
\end{aligned}\tag{22}$$

Бу ерда

$$\alpha_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}Q_{ij}^2(x,y)dxdy,\quad \beta_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial x}Q_{ij}(x,y)dxdy,$$

$$\gamma_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial y}Q_{ij}(x,y)dxdy,\qquad q_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}Q_{ij}(x,y)dxdy.$$

бошланғич ва чегаравий шартларни қуйидагича аппроксимация қиламиз: $\partial\Omega_h$ чегарада:

$$\begin{aligned}
&R_1u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx+}}=g_1\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),\ M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx+};\\
&R_2u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx-}}=g_2\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx-};\\
&R_3u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy+}}=g_3\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy+};\\
&R_4u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy-}}=g_4\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy-};
\end{aligned}\tag{23}$$

$t=0$ да:

$$u\left(0,x_i,y_j\right)=u_0\left(x_i,y_j\right),\quad M(x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h\ .\tag{24}$$

Базис функция сифатида $Q_{ij}(x,y)=\varphi_i(x)\psi_j(y)$ функцияни оламиз. Бу ерда

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_x}, & x\in\left(x_{i-1},x_i\right);\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_x}, & x\in\left(x_i,x_{i+1}\right);\\ 0, & x\notin\left(x_{i-1},x_{i+1}\right);\end{cases}\qquad i=1,\dots,N_x-1 \tag{25}$$

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h_x}, & x\in\left(x_0,x_1\right);\\ 0, & x\notin\left(x_0,x_1\right);\end{cases}\qquad \varphi_{N_x}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N_x-1}}{h_x}, & x\in\left(x_{N_x-1},x_{N_x}\right);\\ 0, & x\notin\left(x_{N_x-1},x_{N_x}\right);\end{cases}$$

$$\psi_j(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j-1}}{h_y}, & y\in\left(y_{j-1},y_j\right);\\ \dfrac{y_{j+1}-y}{h_y}, & y\in\left(y_j,y_{j+1}\right);\\ 0, & y\notin\left(y_{j-1},y_{j+1}\right);\end{cases}\qquad j=1,\dots,N_y-1 \tag{26}$$

$$\psi_0(y)=\begin{cases}\dfrac{y_1-y}{h_y}, & y\in\left(y_0,y_1\right);\\ 0, & y\notin\left(y_0,y_1\right);\end{cases}\qquad \psi_{N_y}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{N_y-1}}{h_y}, & y\in\left(y_{N_y-1},y_{N_y}\right);\\ 0, & y\notin\left(y_{N_y-1},y_{N_y}\right);\end{cases}$$

Аралаш масаланинг $t_n\,(n=0,1,2,...)$ қатламгача тақрибий ечими топилган деб, t_{n+1} қатламдаги тақрибий ечимини топиш учун барча $M(x_i,y_j)\in\Omega_h$ тугунлардаги (22) айирмали тенгламалар системасини ҳамда барча $M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_h$ тугунлардаги (23) чегаравий шартларни бирлаштириб, u_{ij}^{n+1} векторларнинг компоненталарига нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши учун $M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_h$ тугунларда $u(t,x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (22) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. Шундай қилиб, ёпиқ чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу чизиқли тенгламалар системаси бош элементлар усули билан ечилган.

(19)-(21) аралаш масала учун чекли элементлар усули билан олинган айирмали схема шартли турғун эканлигини кўрсатувчи қуйидаги теорема исботланган.

3-теорема. *Агар қуйидаги шартлар*

$$\int\limits_{\partial\Omega} Su\cdot uds \ge 0, \quad \left(\left(D+D^T\right)u,u\right)\ge 0 \qquad (27)$$

бажарилса, (22)–(24) айирмали масала ягона u_h *ечимга эга бўлади, ихтиёрий* h_x, h_y *ларда ва барча* $n \le \dfrac{T}{\tau}$ *ларда*

$$\left\|u_h^n\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le e^T \left\|u_{0h}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + (T+1)(e^T-1)F$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда

$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int\limits_{\Omega} u\cdot udxdy}\,, F = \max\limits_n \left\|F_h^n\right\|^2_{L_2(\Omega)}, S = n_x B + n_y C,\ n=(n_x,n_y)$ - Ω *соҳа чегарасига бирлик ташқи нормал.*

Ушбу схемалар асосида (27) шартларни текширадиган, (19)-(21) масалани сонли ечадиган ва ечим графигини чизадиган дастур яратилган. Яратилган дастурни тўғри ишлаши модел масалаларда ҳисоблаш тажрибалари асосида текширилган.

Диссертациянинг «**Икки ўлчовли фазода ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик типдаги системаларни чекли элементлар усули билан ечиш**» деб номланган учинчи боби икки ўлчовли соҳада ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик типдаги системалар учун қўйилган аралаш масалани чекли элементлар усули билан сонли ечишга бағишланган. Икки ўлчовли соҳада ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик системалар учун аралаш масала (19)-(21) масала каби қўйилади. Фақат бу масалада $A, B, C, D, R_1, R_2, R_3, R_4$ матрицалар

$$A(t,x,y), B(t,x,y), C(t,x,y), D(t,x,y), R_1(t,x,y), R_2(t,x,y), R_3(t,x,y), R_4(t,x,y)$$

ўзгарувчан матрицалар бўлади.

Ўзгарувчан коэффициентли система учун айирмали схемани қуришда базис функциялар сифатида $Q_{ij}(x,y)=\varphi_i(x)\psi_j(y)$ функцияларни оламиз. Бу ерда $\varphi_i(x), \psi_j(y)$ функциялар, мос равишда, (25) ва (26) формулалар билан аниқланган. 2-бобда баён этилган усул билан, ўзгарувчан коэффициентли система учун қуйидаги

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_{ij}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{ij}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{ij}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{ij}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i+1j}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i+1j}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i+1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j+1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i+1j+1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i+1j+1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i+1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij+1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{ij+1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{ij+1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{ij+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j+1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i-1j+1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i-1j+1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i-1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i-1j}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i-1j}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i-1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j-1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i-1j-1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i-1j-1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i-1j-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij-1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{ij-1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{ij-1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{ij-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j-1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i+1j-1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i+1j-1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i+1j-1}^{n+1}=\\
&\tau q_{ij}F_{ij}^{n+1}+\tau A_{ij}^{n+1}(\alpha_{ij}u_{ij}^{n}+\alpha_{i+1j}u_{i+1j}^{n}+\alpha_{i+1j+1}u_{i+1j+1}^{n}+\\
&\alpha_{ij+1}u_{ij+1}^{n}+\alpha_{i-1j+1}u_{i-1j+1}^{n}+\alpha_{i-1j}u_{i-1j}^{n}+\alpha_{i-1j-1}u_{i-1j-1}^{n}+ \qquad (28)\\
&\alpha_{ij-1}u_{ij-1}^{n}+\alpha_{i+1j-1}u_{i+1j-1}^{n})\quad (x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h\ .
\end{aligned}$$

ошкормас айирмали схемани оламиз. Бу ерда

$$\alpha_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}Q_{ij}^2(x,y)dxdy,\quad \beta_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial x}Q_{ij}(x,y)dxdy,$$

$$\gamma_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial y}Q_{ij}(x,y)dxdy,\qquad q_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}Q_{ij}(x,y)dxdy,$$

$$F_{ij}^{n+1}=F(t_{n+1},x_i,y_j),$$

$$\begin{aligned}
&A_{ij}^{n+1}=(a_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(a_{ks}^{ijn+1}),\ B_{ij}^{n+1}=(b_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(b_{ks}^{ijn+1}),\\
&C_{ij}^{n+1}=(c_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(c_{ks}^{ijn+1}),\ D_{ij}^{n+1}=(d_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(d_{ks}^{ijn+1}),\\
&k=1,...,N;s=1,...,N.
\end{aligned}$$

бошланғич ва чегаравий шартларни қуйидагича аппроксимация қиламиз:

$$\begin{aligned}
&R_1\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx+}}=g_1\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),\ M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx+};\\
&R_2\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx-}}=g_2\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx-};\\
&R_3\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy+}}=g_3\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy+}; \qquad (29)\\
&R_4\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy-}}=g_4\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy-};
\end{aligned}$$

$$u\left(0,x_i,y_j\right)=u_0\left(x_i,y_j\right),\quad M(x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h. \qquad (30)$$

2-бобда баён этилган усул билан t_{n+1} қатламдаги ўзгарувчан коэффициентли аралаш масаланинг тақрибий ечимини топиш учун ёпиқ чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил қилинган. Бу чизиқли тенгламалар системаси бош элементлар усули билан ечилган.

Ўзгарувчан коэффициентли аралаш масала учун чекли элементлар усули билан олинган айирмали схема шартли турғун эканлигини кўрсатувчи қуйидаги теорема исботланган.

4-теорема. *Агар қуйидаги шартлар*

$$\int_{\partial\Omega} Su\cdot uds \ge 0, \quad \left(\left(D + D^T - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)u, u\right) \ge 0 \qquad (31)$$

бажарилса , (28)–(30) айирмали масала ягона u_h *ечимга эга бўлади , ихтиёрий* h_x, h_y *ларда ва барча* $n \le \dfrac{T}{\tau}$ *ларда*

$$\left\|u_h^n\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \le e^T \left\|u_{0h}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + (T+1)(e^T - 1)F$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда

$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u\cdot udxdy}$, $F = \max_n \left\|F_h^n\right\|_{L_2(\Omega)}^2$, $S = n_x B + n_y C$, $n = (n_x, n_y)$ - Ω *соҳа чегарасига бирлик ташқи нормал.*

Ушбу схема асосида (31) шартларни текширадиган, ўзгарувчан коэффициентли масалани сонли ечадиган ва ечим графигини чизадиган дастур яратилган. Яратилган дастурни тўғри ишлаши модел масалаларда ҳисоблаш тажрибалари асосида текширилган.

ХУЛОСА

«Симметрик t-гиперболик системалар учун чекли элементлар усули турғунлиги» мавзусидаги диссертация бўйича олиб борилган тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

– бир ўлчовли ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик система учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлигини таъминловчи етарли шартлар топилган;

– ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик системалар учун қўйилган аралаш масалаларни бир ўлчовли соҳада чекли элементлар усули билан ечадиган дастурий таъминот яратилган;

– бир ўлчовли ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик система учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлигини таъминловчи етарли шартлар топилган;

– ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик системалар учун қўйилган аралаш масалаларни бир ўлчовли соҳада чекли элементлар усули билан ечадиган дастурий таъминот яратилган;

– икки ўлчовли ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик система учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлигини таъминловчи етарли шартлар топилган;

– ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик системалар учун қўйилган аралаш масалаларни икки ўлчовли соҳада, чекли элементлар усули билан ечадиган дастурий таъминот яратилган;

– икки ўлчовли ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик система учун чекли элементлар усули ёрдамида қурилган ошкормас айирмали схеманинг турғунлигини таъминловчи етарли шартлар топилган;

– ўзгарувчан коэффициентли симметрик t-гиперболик системалар учун қўйилган аралаш масалаларни икки ўлчовли соҳада чекли элементлар усули билан ечадиган дастурий таъминот яратилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

КАРШИНСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ДАВЛАТОВ ШОКИР ОЛТИБОЙЕВИЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ t-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**01.01.03-Вычислительная математика и дискретная математика
(физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2021.1.PhD/FM563.

Диссертация выполнена в Каршинском инженерно-экономическом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Нормуродов Чори Бегалиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Университет мировой экономики и дипломатии**

Защита диссертации состоится «28» апреля 2022 года в 16[00] часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №39). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «11» апреля 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от 18.03.2022 года).

М.М.Арипов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Х.М.Шадиметов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора, д.ф.-м.н. профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD)

Актуальность и востребованность диссертации. Ведущиеся в мире многие научно-прикладные исследования по газовой динамике, гидродинамике, электродинамике, механике диформируемых твердых тел, механике сплошных сред, в большинстве случаев, приводятся к смешанным задачам для волновых уравнений или гиперболических систем. Решения задач для гиперболических уравнений второго порядка или гиперболических систем, приведя их к задачам для систем симметрических t-гиперболических уравнений первого порядка, являются объектом исследования в таких областях, как вычислительная математика, математическое моделирование и механика диформируемых твердых тел. Поэтому, построение неявных разностных схем, на основе метода конечных элементов, смешанных задач для симметрических t-гиперболических систем и определение их устойчивости является актуальной задачей вычислительной математики.

В настоящее время в мире, для внедрения современных технологий в таких областях, как определение источников нефти и газа, определение сейсмоустойчивости сооружений, строительство водных сооружений, в частности, повышение научно-технического потенциала, расширение интеграции науки и производства, а также построение адекватных расчетных моделей смешанных задач для гиперболических систем, проводятся много научных исследований по усовершенствованию теории метода конечных элементов. В этих исследованиях важную роль играет создание экономичных методов численного решения смешанных задач и доказательство их устойчивости. Поэтому, построение экономичных схем для численного решения смешанных задач для гиперболических систем, доказательство их сходимости и применение к практическим задачам являются одним из направлений целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как построение численных методов решения сложных задач в области математической физики, электродинамики и прикладной математики, имеющих научное и практическое применение, и исследование их устойчивости. Существенные результаты получены при построении алгоритмов численного решения и при создании на основе этих алгоритмов комплексов прикладных программ для численного решения дифференциальных уравнений и систем с частными производными. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по таким приоритетным направлениям, как функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика, является одним из основных задач Математического института имени В.И.Романовского[1] АН РУз.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

Исследования по устойчивости метода конечных элементов для численного решения смешанных задач для симметрических t-гиперболических систем имеют важное значение для обеспечения выполнения данного постановления.

Данная диссертация, в определенной степени, служит выполнению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №-УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлении №-ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №-ПП-2909 от 20 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», в докладе Президента Республики Узбекистан Ш.Мирзиёева 24 мая 2019 года на встрече с представителями науки и образования в Национальном университете Узбекистана, а также в других нормативно-правовых актах данной сферы.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Мировой опыт показывает, что исследования ряда проблем газовой динамики, гидродинамики, электродинамики, механики деформируемого твердого тела и механики сплошных сред описываются смешанными задачами для гиперболических систем. Численными методами для решения таких задач занимались Р.Курант, К.Фридрихс, Г.Леви, А.А.Самарский, С.К.Годунов, В.М.Гордиенко, Х.О.Крайс, О.А.Ладиженская, Ж.Адамар, Ж.Лерэ, А.М.Блохин, Н.Г.Марчук и другие. В их работах, в основном, смешанные задачи для гиперболических систем решаются численно с помощью метода разностных схем или методом конечных элементов.

В работах Р.Д.Алоева, А.М.Блохина, И.Ю.Дружинина, S. S.Abarbanel, A.E.Chertocky, R.S.Falk, G. R.Richter, D.A.French, T.E. Peterson, Gui-Qiang Chen, Jian-Guo Liu приведены различные разностные схемы для численного решения смешанной задачи для симметрической t-гиперболической системы. С использованием энергетического метода доказана устойчивость этих схем и схемы проанализированы в примерах.

Исследования по численному решению смешанных задач для гиперболических уравнений и систем методом конечных элементов, устойчивости разностных схем, полученных с помощью метода конечных элементов, скорости сходимости и оценке точности приближенного решения проводили B.A.Szabo, E.L.Wilson, O.C.Zienkievich, K.O.Friedrichs, G.Fix, T.Dupont, B.Swartz, R.Winther, J.Dendy, L.Whalbin , C.Johnson, V.Thomee, M.Gunzburger, G.Baker, W.Layton, D.F.Christie, T.J.R.Hughes, C.Johnson, S.Nakazawa, U.N.Hvert, W.H.Raymond, J.L.Steger, E.Turkel, R.F.Warming, H.C.Yee и другии ученые. Сегодня в нашей стране проблемами математического моделирования процессов, описываемых уравнениями математической физики, и их решением методом конечных элементов занимаются Р. Д. Алоев, А. М. Полатов, А. А. Халджигитов, Ш. Ш. Заиров и другие ученые.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответсвие научно-исследовательскому плану Каршинского инженерно-экономического института в рамках "Математическое моделирование, вычислительные методы и програмные технологии".

Целью исследования является построение методом конечных элементов неявных разностных схем для численного решения смешанной задачи для симметричной t-гиперболической системы и доказательство их устойчивости.

Задачи исследования:

построение неявных разностных схем методом конечных элементов для численного решения одномерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

определение условий, обеспечивающих устойчивость построенных с использованием метода конечных элементов неявных разностных схем, предназначенных для численного решения одномерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

построение неявных разностных схем с использованием метода конечных элементов для численного решения двумерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

определение условий, обеспечивающих устойчивость построенных с использованием метода конечных элементов неявных разностных схем, предназначенных для численного решения двумерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

обоснование сходимости численного решения модельной задачи, найденного с помощью неявных разностных схем, к точному решению.

Объектом исследования является смешанная задача для симметрических t-гиперболических систем.

Предметом исследования является метод конечных элементов для симметрических t-гиперболических систем.

Методы исследований. В процессе научных исследований применены метод конечных элементов, теория алгоритмов, теория разностных схем, вычислительная математика, функциональный анализ, дискретные аргументные функции, теория дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

методом конечных элементов построены неявные разностные схемы для численного решения одномерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

доказана устойчивость при выполнении определенных условий неявных разностных схем, построенных с использованием метода конечных элементов, для численного решения одномерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

с использованием метода конечных элементов построена неявная разностная схема для численного решения двумерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

доказана устойчивость при выполнении определенных условий неявной разностной схемы, построенной с использованием метода конечных элементов, для численного решения двумерной смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

обоснована сходимость численного решения модельной задачи, найденного с помощью неявных разностных схем, к точному решению.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

методом конечных элементов построены неявные разностные схемы для численного решения смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем;

разработано программное обеспечение для численного решения смешанных задач для симметричной t-гиперболической системы.

Достоверность результатов исследования. Применение методов вычислительной математики, функционального анализа, теории дискретных аргументных функций, строгость математических рассуждений и сравнений по результатам вычислительных экспериментов.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что неявные разностные схемы, построенные с помощью метода конечных элементов, могут быть использованы для численного решения смешанных задач для симметричной t-гиперболической системы.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что неявные разностные схемы, построенные с использованием метода конечных элементов, алгоритмы и программы позволяют проводить эффективные вычислительные эксперименты по нахождению численных решений смешанных задач для симметричной t-гиперболической системы.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по построению неявных разностных схемы методом конечных элементов для симметрических t-гиперболических систем реализованы в следующих научных проектах:

Построенные конечно-разностные схемы, алгоритмы и разработанные программы использованы в грантовом проекте А-13-38 «Теоретическое и численное исследование прямых и обратных задач для волновой динамики двухфазной среды» при численном решении одномерных прямых динамических задач в упруго-пористой среде (справка № 03/3834 Каршинского государственного университета от 17 сентября 2021 года).

Применение научных результатов позволило найти и исследовать численные решения одномерных точных динамических задач в упруго-пористой среде.

Разностные схемы и алгоритмы, разработанные в диссертации, использованы при теоретическом исследовании одномерных прямых динамических задач в грантовом проекте ОТ-Ф4-02 «Термодинамика моделей математической физики с бесконечным множеством состояний» (справка № 01/2429 Бухарского государственного университета от 21 сентября 2021 года). Применение научных результатов позволило провести теоретическое исследование одномерных точных динамических задач и исследование численных решений системы уравнений распространения волн в вязкоупругих средах.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования обсуждены на 7 научно-практических конференциях, в том числе на 4 международных и 3 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 4 - в научных изданиях, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан для публикации результатов докторских диссертаций, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах и 2 в республиканских научных изданиях. Получены 2 свидетельства о регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 94 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий страны. Приведен обзор отечественных и зарубежных научных исследований по изучаемой проблеме и обсуждена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, обозначены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыты теоретическая и практическая значимости полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации «**Решение одномерных симметрических t-гиперболических систем методом конечных элементов**» посвящена разработке нового подхода к численному решению смешанных задач для одномерных симметрических t-гиперболических систем методом конечных элементов.

Постановка смешанной задачи для одномерных симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами:

Пусть $\Omega=(\ell_1,\ell_2)$. В области $G=\{(t,x):t\in(0,T),\ x\in\Omega\}$ найти вектор-функцию u, удовлетворяющую системе

$$A\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+B\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+Cu(t,x)=F(t,x) \qquad (1)$$

с граничными

$$R_1u(t,\ell_1)=g_1(t),\ R_2u(t,\ell_2)=g_2(t) \qquad (2)$$

и начальным

$$u(0,x)=\psi(x),\quad x\in\Omega \qquad (3)$$

условиями. Здесь $A,B-$ действительные постоянные симметричные матрицы размерности $M\times M$, причем A - положительно определенная; $C-$ произвольная действительная постоянная матрица размера $M\times M$; R_1,R_2-постоянные матрицы, количество столбцов которых равно M, количество строк матрицы R_1 равно количеству положительных, а количество строк матрицы R_2 равно количеству отрицательных собственных значений матрицы $A^{-1}B$; $g_1(t),g_2(t)-$заданные вектор-функции, согласованные с размерностями матриц R_1,R_2 соответственно; $\psi(x)-$заданная вектор-функция; $u(t,x)=(u_1,u_2,...,u_M)^T$ – неизвестная,

а $F(t,x)=(f_1,f_2,...,f_M)^T$ – заданная вектор-функция.

Построим неявную разностную схему для смешанной задачи (1)-(3). Отрезок $[0,T]$ разобъем на N_t частей:

$$\boldsymbol{t_n=\tau\cdot n,(n=0,\dots,N_t),\tau=\frac{T}{N_t}.}$$

Отрезок $[\ell_1,\ell_2]$ разобьем на N_x частей ($x_i=\ell_1+hi$, $i=0,...,N_x$, $h=\frac{\ell_2-\ell_1}{N_x}$).

Будем искать приближенное решение смешанный задачи (1)-(3) на каждом слое t_n по времени в виде $u_h(t_n,x)=\sum_{i=0}^{N_x}u_i(t_n)\phi_i(x)$. Здесь $\phi_i(x),\ i=0,...,N_x,-$ базисные функции, в узле x_i значение $\phi_i(x)$ равно 1, а в остальных узлах - 0, $u_i(t_n)=u(t_n,x_i)=(u_{1i}(t_n),u_{2i}(t_n),...,u_{Mi}(t_n))^T$. В качестве базиса возьмем

функции

$$\phi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h}, & x\in(x_0,x_1);\\ 0, & x\notin(x_0,x_1);\end{cases}\qquad \phi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h}, & x\in(x_{i-1},x_i);\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h}, & x\in(x_i,x_{i+1});\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_{i+1});\end{cases}\quad i=1,...,N_x-1 \qquad (4)$$

$$\phi_{N_x}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N_x-1}}{h}, & x\in\left(x_{N_x\text{-}1},x_{N_x}\right);\\ 0, & x\notin\left(x_{N_x\text{-}1},x_{N_x}\right)\end{cases}$$

В системе (1) производную по времени $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимируем отношением $\dfrac{u(t+\tau,x)-u(t,x)}{\tau}$, вместо $u(t,x)$ подставим $u_h(t_n,x)$, каждое уравнение полученной системы умножим на $\phi_0(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[x_0,x_1]$, умножим на $\phi_{N_x}(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[x_{N_x-1},x_{N_x}]$, умножим на $\phi_i(x),\ i=1,...,N_x-1$ и проинтегрируем по отрезку $[x_{i-1},x_{i+1}],\ i=1,...,N_x-1$. В итоге получим неявную разностную схему:

$$AhL_0u_0^{n+1}+\tau B\xi_0u_0^{n+1}+\tau ChL_0u_0^{n+1}=\frac{1}{2}\tau hF_0^{n+1}+AhL_0u_0^n \tag{5}$$

$$AhL_{N_x}u_{N_x}^{n+1}+\tau B\xi_{N_x}u_{N_x}^{n+1}+\tau ChL_{N_x}u_{N_x}^{n+1}=\frac{1}{2}\tau hF_{N_x}^{n+1}+AhL_{N_x}u_{N_x}^n \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&AhLu_i^{n+1}+\tau B\xi u_i^{n+1}+\tau ChLu_i^{n+1}=\tau hF_i^{n+1}+AhLu_i^n\\ &i=1,...N_x-1,\end{aligned} \tag{7}$$

где $u_i^n=u(t_n,x_i),\ F_i^n=F(t_n,x_i),\ i=0,...,N_x$ - аппроксимации векторных функций и введены разностные операторы:

$$L_0=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\psi^{+1},\ \xi_0=\frac{\psi^{+1}-1}{2}, L_{N_x}=\frac{1}{6}\psi^{-1}+\frac{1}{3},\ \xi_{N_x}=\frac{1-\psi^{-1}}{2}$$

$$\psi^{\pm1}u_i^n=u_{i\pm1}^n,\ L=\frac{1}{6}\psi^{-1}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\psi^{+1}, \xi=\frac{\psi^{+1}-\psi^{-1}}{2}.$$

Аппроксуммируем граничные и начальное условия:

при $x=\ell_1$: $\quad R_1u_0(t_{n+1})=g_1(t_{n+1})$, (8)

при $x=\ell_2$: $\quad R_2u_{N_x}(t_{n+1})=g_2(t_{n+1})$, (9)

и при $t=0$: $\quad u_i(0)=\psi(x_i)\quad i=\overline{0,N_x}$. (10)

Считая, что найдено приближенное решение смешанный задачи до слоя $t_n\,(n=0,1,2,...)$, включительно, для нахождения приближенного решения на слое t_{n+1} составим систему линейных уравнений (7)-(9) относительно компонентов векторов u_i^{n+1} $(i=0,1,...,N_x)$. Для того чтобы полученная система разностных уравнений была замкнута, для компонентов вектор-функции $u(t,x)$, для которых не поставлены граничные условия при $x=\ell_1$, из системы разностных уравнений (5) возмем соответсвующее уравнение.

Например, если $j-$компоненту вектор-функции $u(t,x)$ не поставлено граничное условие при $x=\ell_1$, тогда для этой компоненты возмем $j-$ уравнение из системы (5). Аналогично, для компонентов вектор-функции $u(t,x)$, для которых не поставлены граничные условия при $x=\ell_2$, возмем из системы разностных уравнений (6) соответсвующее уравнение.

Таким образом, создаем замкнутую систему линейных уравнений, которую решим методом главных элементов.

В диссертации доказана следующая теорема, показывающая условную устойчивость разностной схемы, полученной методом конечных элементов для смешанной задачи (1)-(3).

1-теорема. *При выполнении условий*

$$(Bu,u)\Big|_{x=\ell_2}-(Bu,u)\Big|_{x=\ell_1}\ge 0,\quad \left(\left(C+C^T\right)u,u\right)\ge 0 \tag{11}$$

разностная задача (7)-(10) имеет единственное решение u_h *, причём*

при любом h *и при всех* $n\le\dfrac{T}{\tau}$ *выполняется неравенство*

$$\left\|u_h^n\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le e^T\left\|\psi\right\|^2_{L_2(\Omega)}+(T+1)(e^T-1)F.\ \textit{Здесь}\ \left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}=\sqrt{\int_\Omega u\cdot u dx},\ F=\max_n\left\|F^n\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

На основе этих схем создана программа, решающая численно задачу (1)-(3) и рисующая график решения. При этом в случае не выполнения условий устойчивости (11) программа информирует об этом.

Постановка смешанной задачи для одномерных симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами ставится аналогично (1) – (3), где теперь матрицы A,B,C,R_1,R_2 - являются переменными $A(t,x),B(t,x),C(t,x),R_1(t),R_2(t)$. В качестве базиса возьмем функции (4). Проделав проведённые выше процедуры по построению разностной схемы, получим следующую неявную разностную схему для смешанной задачи с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}&A_0^{n+1}h(\frac{1}{6}u_1^{n+1}+\frac{1}{3}u_0^{n+1})+\frac{1}{2}\tau B_0^{n+1}(u_1^{n+1}-u_0^{n+1})+\tau C_0^{n+1}h(\frac{1}{6}u_1^{n+1}+\frac{1}{3}u_0^{n+1})=\\&=\frac{1}{2}\tau hF_0^{n+1}+A_0^{n+1}h(\frac{1}{6}u_1^{n}+\frac{1}{3}u_0^{n})\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&A_{N_x}^{n+1}h(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n+1}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n+1})+\frac{1}{2}\tau B_{N_x}^{n+1}(u_{N_x}^{n+1}-u_{N_x-1}^{n+1})+\tau C_{N_x}^{n+1}h(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n+1}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n+1})=\\&=\frac{1}{2}\tau hF_{N_x}^{n+1}+A_{N_x}^{n+1}h(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n})\end{aligned} \tag{13}$$

$$A_i^{n+1}Lu_i^{n+1}+\tau B_i^{n+1}\xi u_i^{n+1}+\tau C_i^{n+1}Lu_i^{n+1}=\tau hF_i^{n+1}+A_i^{n+1}Lu_i^{n},\ i=1,...N_x-1, \tag{14}$$

где $u_i^n = u(x_i, t_n),\ F_i^n = F(x_i, t_n)\ i = 0,...N_x$ - аппроксимации векторных функций, $A_i^n = A(x_i, t_n),\ B_i^n = B(x_i, t_n),\ C_i^n = C(x_i, t_n)$ - аппроксимации матриц и введены разностные операторы:

$$\psi^{\pm1}u_i^n = u_{i\pm1}^n,\ L = \frac{1}{6}\psi^{-1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\psi^{+1},\ \xi = \frac{\psi^{+1} - \psi^{-1}}{2}.$$

Аппроксуммируем граничные и начальное условия:

$$\text{при } x = \ell_1 : \qquad R_1(t_{n+1})u_0(t_{n+1}) = g_1(t_{n+1}) \ , \tag{15}$$

$$\text{при } x = \ell_2 : \qquad R_2(t_{n+1})u_{N_x}(t_{n+1}) = g_2(t_{n+1}) \ , \tag{16}$$

$$\text{и при } t = 0 : \quad u_i(0) = \Psi(x_i) \quad i = \overline{0, N_x} \ . \tag{17}$$

Считая, что найдено приближенное решение смешанный задачи до слоя $t_n\,(n = 0,1,2,...)$ включительно, для нахождения приближенного решения на слое t_{n+1} составим систему линейных уравнений (14)-(16) относительно компонентов векторов $u_i^{n+1},\ (i = 0,..., N_x)$. Для того чтобы полученная система разностных уравнений была замкнутой, для компонентов вектор-функции $u(t,x)$, для которых не поставлены граничные условия при $x = \ell_1$, из системы разностных уравнений (12) возьмем соответсвующее уравнение. Аналогично, для компонентов вектор-функции $u(t,x)$, для которых не поставлены граничные условии при $x = \ell_2$, возмем из системы разностных уравнений (13) соответсвующее уравнение.

Таким образом, создаем замкнутую систему линейных уравнений, которую решим методом главных элементов. В диссертации доказана следующая теорема, показывающая условную устойчивость разностной схемы, полученной методом конечных элементов для смешанной задачи с переменными коэффициентами.

2-теорема. *При выполнении условий*

$$(Bu,u)\big|_{x=\ell_2} - (Bu,u)\big|_{x=\ell_1} \ge 0 \quad , \quad \left(\left(C + C^T - \frac{\partial B}{\partial x}\right)u, u\right) \ge 0 \tag{18}$$

смешанная задача с переменными коэффициентами имеет единственное приближенное решение u_h *, причём при любом* h *и при всех* $n \le \dfrac{T}{\tau}$ *выполняется неравенство*

$$\left\|u_h^n\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \le e^T \left\|\psi\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + (T+1)(e^T - 1)F \ .\ \textit{Здесь}\ \ \left\|u\right\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega u \cdot u dx}, F = \max_n \left\|F^n\right\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

На основе этой схемы создана программа, решающая численно задачу с переменными коэффициентами и рисующая график решения. При этом в случае не выполнения условий устойчивости (18) программа информирует об этом.

Созданные программы проверены на основе вычислительных экспериментов в модельных задачах.

Во второй главе диссертации «**Решение двумерных симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами методом конечных элементов**» предложен новый подход к численному решению смешанных задач для двумерных симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами методом конечных элементов. Двумерная ограниченная область аппроксимирована следующим образом. При описании границы области в качестве составляющих ее частей могут использоваться отрезки прямых и дуги окружностей. Началом некоторой части границы S считается та ее концевая точка, при движении из которой по S область остается слева. Отрезки прямых определяются двумя точками – концами, а для дуг окружностей дополнительно задается точка центра окружности.

Область Ω заключим в наименьший прямоугольник со сторонами, паралельными осям Ox и Oy: $\Omega \subset [a;b]\times[c;d]$. Проведем прямые

$$x = x_i = a + h_x i \quad (i = 0,\dots,N_x, h_x = \frac{b-a}{N_x}), \quad y = y_j = c + h_y j \quad (j = 0,\dots,N_y, h_y = \frac{d-c}{N_y})$$

пересекающие отрезки, соответсвенно, $[a;b],[c;d]$. В результате область Ω покроется равномерной сеткой (рис.1).

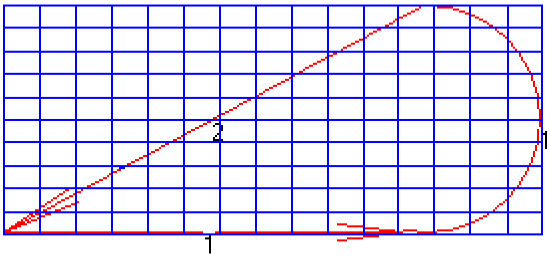


Рис.1.

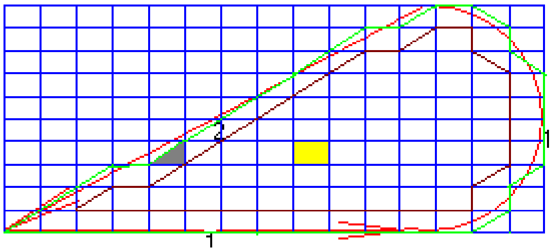


Рис.2.

Точку пересечения прямых $x = x_i = a + h_x i$ и $y = y_j = c + h_y j$, называемую узлом сетки, обозначим через $M_{ij} = M(x_i; y_j)$.

1-определение. Узел, находящийся на расстояние $h \le \frac{h_x}{2}$ или $h \le \frac{h_y}{2}$ от $\partial\Omega$, или лежающий на $\partial\Omega$ называется граничным узлом.

На рисунке 2 граничные узлы соединены линией зеленого цвета.

2-определение. Узел, лежащий внутри области Ω и являющийся соседным узлом граничного узла, называется околограничным узлом.

На рисунке 2 околограничные узлы соединены линией коричневого цвета.

3-определение. Узел, лежащий внутри области Ω и не являющийся соседным узлом граничного узла, называется внутренным узлом.

4-определение. Узел, не лежащий внутри области Ω и не являющийся граничным узлом, называется внешным узлом.

Сетка разбивает область Ω_h на части (элементы). Каждый элемент является прямоугольником (на рис.2. желтого цвета) или треугольником (на рис.2. серого цвета). Элемент обозначим через K. Элементы, одной из вершин которых является узел M_{ij}, называются элементами этого узла. Объединение этих узлов обозначим через Ω_{ij}. Тогда справедливо равенство $\Omega_h = \bigcup\limits_{M_{ij}\in\Omega} \Omega_{ij}$.

Постановка смешанной задачи для двумерных симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В области $G = \left\{(t,x,y): t\in(0,T),\ (x,y)\in\Omega\right\}$ найти вектор-функцию u, удовлетворяющую системе

$$A\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + C\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} + Du(x,y,t) = F(x,y,t) \quad (19)$$

с граничными

$$\begin{aligned} &R_1 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{x+}} = g_1(t,x,y),\ R_2 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{x-}} = g_2(t,x,y),\\ &R_3 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{y+}} = g_3(t,x,y),\ R_4 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{y-}} = g_4(t,x,y), \end{aligned} \quad (20)$$

и начальным

$$u(0,x,y) = u_0(x,y),\ \ (x;y)\in\Omega\ ; \quad (21)$$

условиями. Здесь $A,B,C-$ действительные постоянные симметричные матрицы размерности $N\times N$, причем A - положительно определенная; $D-$ произвольная действительная постоянная матрица размера $N\times N$; R_1,R_2,R_3,R_4- постоянные матрицы, количество столбцов которых равно N, а количества строк матриц R_1,R_2 равны количеству положительных и отрицателных собственных значений матрицы $A^{-1}B$ соответственно, а количества строк матриц R_3,R_4 равны количеству положительных и отрицателных собственных значений матрицы $A^{-1}C$ соответственно; g_1,g_2,g_3,g_4-заданные вектор-функции, согласованные с размерностью матриц R_1,R_2,R_3,R_4 соответственно; $\partial\Omega_{x+},\partial\Omega_{x-}$- части границы $\partial\Omega$, где ставятся условия, соответствующие положительным и отрицательным собственным значениям матрицы $A^{-1}B$ соответственно, а $\partial\Omega_{y+},\partial\Omega_{y-}$- части границы $\partial\Omega$, где ставятся условия, соответствующие положительным и отрицательным собственным значениям матрицы $A^{-1}C$ соответственно;

$u_0(x,y)$ – заданная вектор-функция; $u(t,x,y) = \left(u_1, u_2, ..., u_M\right)^T$ – неизвестная, а $F(t,x,y) = \left(f_1, f_2, ..., f_M\right)^T$ – заданная вектор-функция.

Построим неявную разностную схему для системы (19).
Отрезок $[0,T]$ разобъем на N_t частей:

$$t_n = \tau \cdot n, (n = 0, \dots, N_t), \tau = \frac{T}{N_t}.$$

Будем искать приближенное решение смешанный задачи (19)-(21) на каждом слое t_n по времени в виде $u_h^n = u_h\left(t_n, x, y\right) = \sum_{(x_i;y_j)\in\overline{\Omega}_h} u_{ij}^n Q_{ij}(x,y)$. Здесь $Q_{ij}(x,y)$ базисные функции, в узле $M(x_i, y_j)$ значение $Q_{ij}(x,y)$ равно 1, а в остальных узлах - 0,

$$u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n) = \left(u_{1ij}(t_n), u_{2ij}(t_n), ..., u_{Nij}(t_n)\right)^T = \left(u_{1ij}^n, u_{2ij}^n, ..., u_{Nij}^n\right)^T.$$

Аппроксимируем систему (19) в узле M_{ij} т.е. в системе (19) производную по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимируем отношением $\frac{u\left(t+\tau,x,y\right)-u\left(t,x,y\right)}{\tau}$, вместо $u\left(t,x,y\right)$ подставим $u_h\left(t_n,x,y\right)$, каждое уравнение полученной системы умножим на $Q_{ij}(x,y)$ и проинтегрируем по Ω_{ij} .Здесь Ω_{ij} - объединение всех элементов узла M_{ij}. В итоге получим неявную разностную схему:

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_{ij}(A+\tau D)+\beta_{ij}\tau B+\gamma_{ij}\tau C\right)u_{ij}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j}(A+\tau D)+\beta_{i+1j}\tau B+\gamma_{i+1j}\tau C\right)u_{i+1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j+1}(A+\tau D)+\beta_{i+1j+1}\tau B+\gamma_{i+1j+1}\tau C\right)u_{i+1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij+1}(A+\tau D)+\beta_{ij+1}\tau B+\gamma_{ij+1}\tau C\right)u_{ij+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j+1}(A+\tau D)+\beta_{i-1j+1}\tau B+\gamma_{i-1j+1}\tau C\right)u_{i-1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j}(A+\tau D)+\beta_{i-1j}\tau B+\gamma_{i-1j}\tau C\right)u_{i-1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j-1}(A+\tau D)+\beta_{i-1j-1}\tau B+\gamma_{i-1j-1}\tau C\right)u_{i-1j-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij-1}(A+\tau D)+\beta_{ij-1}\tau B+\gamma_{ij-1}\tau C\right)u_{ij-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j-1}(A+\tau D)+\beta_{i+1j-1}\tau B+\gamma_{i+1j-1}\tau C\right)u_{i+1j-1}^{n+1}=\\
&\tau q_{ij}F_{ij}^{n+1}+\tau A(\alpha_{ij}u_{ij}^n+\alpha_{i+1j}u_{i+1j}^n+\alpha_{i+1j+1}u_{i+1j+1}^n+\\
&\alpha_{ij+1}u_{ij+1}^n+\alpha_{i-1j+1}u_{i-1j+1}^n+\alpha_{i-1j}u_{i-1j}^n+\alpha_{i-1j-1}u_{i-1j-1}^n+\\
&\alpha_{ij-1}u_{ij-1}^n+\alpha_{i+1j-1}u_{i+1j-1}^n)\quad (x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h\ .
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь

$$\alpha_{ij} = \int\limits_{\Omega_{ij}} Q_{ij}^2(x,y)dxdy, \quad \beta_{ij} = \int\limits_{\Omega_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial x} Q_{ij}(x,y)dxdy,$$

$$\gamma_{ij} = \int\limits_{\Omega_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial y} Q_{ij}(x,y)dxdy, \quad q_{ij} = \int\limits_{\Omega_{ij}} Q_{ij}(x,y)dxdy.$$

Граничных и начальных условий аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} &R_1 u\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx+}} = g_1\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right), M(x_i, y_j) \in \partial\Omega_{hx+}; \\ &R_2 u\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx-}} = g_2\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right), M(x_i, y_j) \in \partial\Omega_{hx-}; \\ &R_3 u\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy+}} = g_3\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right), M(x_i, y_j) \in \partial\Omega_{hy+}; \\ &R_4 u\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy-}} = g_4\left(t_{n+1}, x_i, y_j\right), M(x_i, y_j) \in \partial\Omega_{hy-}; \end{aligned} \tag{23}$$

при $t = 0$:

$$u\left(0, x_i, y_j\right) = u_0\left(x_i, y_j\right), \quad M(x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_h. \tag{24}$$

В качестве базисной функции возьмем функции $Q_{ij}(x,y) = \varphi_i(x)\psi_j(y)$,

где

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_x}, & x \in \left(x_{i-1}, x_i\right); \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_x}, & x \in \left(x_i, x_{i+1}\right); \\ 0, & x \notin \left(x_{i-1}, x_{i+1}\right); \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N_x - 1 \tag{25}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_x}, & x \in \left(x_0, x_1\right); \\ 0, & x \notin \left(x_0, x_1\right); \end{cases} \qquad \varphi_{N_x}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N_x - 1}}{h_x}, & x \in \left(x_{N_x-1}, x_{N_x}\right); \\ 0, & x \notin \left(x_{N_x-1}, x_{N_x}\right); \end{cases}$$

$$
\psi_j(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j-1}}{h_y}, & y\in\left(y_{j-1},y_j\right);\\ \dfrac{y_{j+1}-y}{h_y}, & y\in\left(y_j,y_{j+1}\right);\\ 0, & y\notin\left(y_{j-1},y_{j+1}\right);\end{cases}\qquad j=1,\dots,N_y-1 \tag{26}
$$

$$
\psi_0(y)=\begin{cases}\dfrac{y_1-y}{h_y}, & y\in\left(y_0,y_1\right);\\ 0, & y\notin\left(y_0,y_1\right);\end{cases}\qquad \psi_{N_y}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{N_y-1}}{h_y}, & y\in\left(y_{N_y-1},y_{N_y}\right);\\ 0, & y\notin\left(y_{N_y-1},y_{N_y}\right);\end{cases}
$$

Считая, что найдено приближенное решение смешанный задачи до $t_n\,(n=0,1,2,...)$ слоя включительно, для нахождения приближенного решения смешанной задачи на слое t_{n+1} объединим систему разностных уравнений (22) каждого узла $M_{ij}=M(x_i;y_j)\in\partial\Omega_h$ и граничные условия (23) каждого граничного узла $M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_h$. В итоге получим систему линейных уравнений относительно компонентов векторов u_{ij}^{n+1}. Для того чтобы эта система линейных уравнений была замкнута, на граничнах узлах $M_{ij}=M(x_i;y_j)\in\partial\Omega_h$, для компонентов решения $u(x,y,t)$, для которых не поставлены граничные условия, возмем соответсвующие разностные уравнения из системы (22). В итоге получим замкнутую систему линейных уравнений. Решив эту систему методом главных элементов, получим численное решение задачи (19)-(21).

В диссертации доказана следующая теорема, показывающая условную устойчивость разностной схемы, полученной методом конечных элементов для смешанной задачи (19)-(21).

3-теорема. *При выполнении условий*

$$
\int\limits_{\partial\Omega} Su\cdot u\,ds\ge 0,\qquad \left(\left(D+D^T\right)u,u\right)\ge 0 \tag{27}
$$

разностная задача (22)-(24) имеет единственное решение u_h *, причём при любых* h_x,h_y *и при всех* $n\le\dfrac{T}{\tau}$ *выполняется неравенство*

$$
\left\|u_h^n\right\|_{L_2(\Omega)}^2\le e^T\left\|u_0\right\|_{L_2(\Omega)}^2+(T+1)(e^T-1)F\,.
$$

Здесь $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega u \cdot u dxdy}$, $F = \max_n \|F^n\|^2_{L_2(\Omega)}$, $S = n_x B + n_y C$, $n = (n_x, n_y) -$ *внешняя нормаль к* $\partial\Omega$.

На основе этих схем создана программа, решающая численно задачу (19)-(21) и рисующая график решения. При этом в случае не выполнения условий устойчивости (27) программа информирует об этом. Созданная программа проверена на основе вычислительных экспериментов в модельных задачах.

Третая глава диссертации «**Решение двумерных симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами методом конечных элементов**» посвящена численному решению смешанных задач для двумерных симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами методом конечных элементов.

Постановка смешанной задачи для одномерных симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами ставится аналогично задаче (19) – (21), где теперь матрицы $A, B, C, D, R_1, R_2, R_3, R_4$ - являются переменными

$$A(t,x,y), B(t,x,y), C(t,x,y), D(t,x,y), R_1(t,x,y), R_2(t,x,y), R_3(t,x,y), R_4(t,x,y).$$

В качестве базисной функции возьмем функции $Q_{ij}(x,y) = \varphi_i(x)\psi_j(y)$,

где $\varphi_i(x), \psi_j(y)$ определены, соответственно, формулами (25) и (26). Выполняя действия, изложенные в главе 2, получим неявную разностную схему для системы с переменными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&\left(\alpha_{ij}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{ij}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{ij}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{ij}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i+1j}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i+1j}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i+1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j+1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i+1j+1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i+1j+1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i+1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij+1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{ij+1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{ij+1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{ij+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j+1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i-1j+1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i-1j+1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i-1j+1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i-1j}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i-1j}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i-1j}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i-1j-1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i-1j-1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i-1j-1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i-1j-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{ij-1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{ij-1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{ij-1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{ij-1}^{n+1}+\\
&\left(\alpha_{i+1j-1}(A_{ij}^{n+1}+\tau D_{ij}^{n+1})+\beta_{i+1j-1}\tau B_{ij}^{n+1}+\gamma_{i+1j-1}\tau C_{ij}^{n+1}\right)u_{i+1j-1}^{n+1}=\\
&\tau q_{ij}F_{ij}^{n+1}+\tau A_{ij}^{n+1}(\alpha_{ij}u_{ij}^{n}+\alpha_{i+1j}u_{i+1j}^{n}+\alpha_{i+1j+1}u_{i+1j+1}^{n}+\\
&\alpha_{ij+1}u_{ij+1}^{n}+\alpha_{i-1j+1}u_{i-1j+1}^{n}+\alpha_{i-1j}u_{i-1j}^{n}+\alpha_{i-1j-1}u_{i-1j-1}^{n}+\\
&\alpha_{ij-1}u_{ij-1}^{n}+\alpha_{i+1j-1}u_{i+1j-1}^{n})\quad (x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h\ .
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Здесь

$$
\alpha_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}Q_{ij}^2(x,y)dxdy,\quad \beta_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial x}Q_{ij}(x,y)dxdy,
$$

$$
\gamma_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial y}Q_{ij}(x,y)dxdy,\qquad q_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}Q_{ij}(x,y)dxdy,
$$

$$
F_{ij}^{n+1}=F(t_{n+1},x_i,y_j),
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{ij}^{n+1}=(a_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(a_{ks}^{ijn+1}),\ B_{ij}^{n+1}=(b_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(b_{ks}^{ijn+1}),\\
&C_{ij}^{n+1}=(c_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(c_{ks}^{ijn+1}),\ D_{ij}^{n+1}=(d_{ks}(x_i,y_j,t_{n+1}))=(d_{ks}^{ijn+1}),\\
&k=1,\dots,N;s=1,\dots,N.
\end{aligned}
$$

Граничные и начальные условия аппроксимируем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&R_1\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx+}}=g_1\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),\ M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx+};\\
&R_2\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx-}}=g_2\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx-};\\
&R_3\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy+}}=g_3\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy+};\\
&R_4\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy-}}=g_4\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy-};
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
u\left(0,x_i,y_j\right)=u_0\left(x_i,y_j\right),\quad M(x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h\,.
\tag{30}
$$

Аналогично, выполняя действия, изложенные в главе 2, получим замкнутую систему линейных уравнений относительно компонентов векторов u_{ij}^{n+1}. Решив эту систему методом главных элементов, получим численное решение смешанной задачи с переменными коэффициентами.

В диссертации доказана следующая теорема, показывающая условную устойчивость разностной схемы, полученный методом конечных элементов для смешанной задачи с переменными коэффициентами.

4-Теорема. *При выполнении условий*

$$\int_{\partial\Omega} Su \cdot uds \geq 0, \quad \left(\left(D + D^T - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) u, u \right) \geq 0 \qquad (31)$$

разностная задача (28)-(30) имеет единственное решение u_h *, причём при любых* h_x, h_y *и при всех* $n \leq \frac{T}{\tau}$ *выполняется неравенство*

$$\left\| u_h^n \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^T \left\| u_0 \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + (T+1)(e^T - 1)F .$$

Здесь $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u \cdot udxdy}$, $F = \max_n \left\| F^n \right\|_{L_2(\Omega)}^2$, $S = n_x B + n_y C$, $n = (n_x, n_y)$ – *внешняя нормаль к* $\partial\Omega$.

На основе этой схемы создана программа, решающая численно смешанную задачу с переменными коэффициентами и рисующая график решения. При этом, в случае невыполнения условий устойчивости (31) программа информирует об этом. Созданная программа проверена на основе вычислительных экспериментов в модельных задачах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований по диссертации «Устойчивость метода конечных элементов для симметрических t-гиперболических систем» сделаны следующие выводы:

– найдены достаточные условия обеспечивающие устойчивость неявной разностной схемы, полученной методом конечных элементов для одномерных симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами;

– создана программа, численно решающая смешанные задачи для симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами в одномерной области методом конечных элементов;

– найдены достаточные условия обеспечивающие устойчивость неявной разностной схемы, полученной методом конечных элементов для одномерных симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами;

– создана программа, численно решающей смешанных задач для симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами в одномерной области методом конечных элементов;

– найдены достаточные условия обеспечивающие устойчивость неявной разностной схемы, полученной методом конечных элементов для двумерных симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами;

– создана программа, численно решающая смешанные задачи для симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами в двухмерной области методом конечных элементов;

– найдены достаточные условия обеспечивающие устойчивость неявной разностной схемы, полученной методом конечных элементов для двумерных симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами;

– создана программа, численно решающей смешанных задач для симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами в двумерной области методом конечных элементов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN KARSHI ENGINEERING AND ECONOMIC INSTITUTE

DAVLATOV SHOKIR OLTIBOYEVICH

STABILITY OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR SYMMETRIC t-HYPERBOLIC SYSTEMS

01.01.03-Calculus mathematics and discrete mathematics (Physical and mathematical sciences)

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.1.PhD/FM563.

Dissertation has been prepared at Karshi Engineering and Economic Institute.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Aloev Rakhmatillo Djuraevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Normurodov Chori Begaliyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khudoyberganov Mirzoali Urazaliyevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**University of world economy and diplomacy**

Defense will take place «28» april 2022 at 16⁰⁰ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №39) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «11» april 2022 year
(Mailing report No 2 on 18.03. 2022 year).

M.M.Aripov
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

H.M.Shadimetov
Deputy chairman of scientific seminar under scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

Abstract of the PhD thesis

The aim of the research work is to construct an implicit difference scheme by the finite element method for the numerical solution of a mixed problem for a symmetric t-hyperbolic system, and to prove its stability.

The object of the research work is the mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems.

Scientific novelty of research work is as follows:

implicit difference schemes are constructed for the mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems in the one-dimensional case by the finite element method;

the stability is proved under certain conditions of implicit difference schemes constructed for the numerical solution of an one-dimensional mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems by the finite element method;

implicit difference schemes are constructed for the mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems in the two-dimensional case by the finite element method;

the stability is proved under certain conditions of implicit difference schemes constructed for the numerical solution of a two-dimensional mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems by the finite element method;

the convergence of the numerical solution of the model problem found with the help of implicit difference schemes to the exact solution is substantiated.

Implementation of the research results. The results obtained on the construction of implicit difference schemes by the finite element method for symmetric t-hyperbolic systems have been implemented in the following scientific projects:

the constructed finite-difference schemes, algorithms and developed programs were used in the grant project A-13-38 " Theoretical and numerical research of direct and inverse problems of wave dynamics of a two-phase medium " in the numerical solution of one-dimensional direct dynamic problems in an elastic-porous medium(reference No. 89-04-3113 dated December 25, 2019 of the Ministry of Higher and Secondary Education of the Republic of Uzbekistan).The application of scientific results made it possible to find and study numerical solutions of one-dimensional exact dynamic problems in an elastic-porous medium;

difference schemes and algorithms developed in the dissertation were used in the theoretical study of one-dimensional direct dynamic problems in the grant project OT-F4-02 "Thermodynamics of mathematical physics models with an infinite set of states"(reference № of 01/2429 Bukhara state universities from September 21, 2021). The application of scientific results made it possible to carry out a theoretical study of one-dimensional exact dynamic problems and the study of numerical solutions of the system of equations for wave propagation in viscoelastic media.

The structure and volume of the thesis: The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion, a list of used literature and applications. The volume of the thesis is 94 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Aloev R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z.K., Nik Long N.M.A. Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients // Computers and Mathematics with Applications, USA, 68, 2014, 1194-1204. (№3. Scopus, IF=3.37)
2. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О. Устойчивость схемы конечных элементов для одномерной симметрической гиперболической системы с переменными коэффициентами на равномерной сетке // Ўзбекистон математика журнали, №3, 2014, 28-35.(№6. 01.00.00).
3. Aloev R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z.K., Nik Long. N.M.A.Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients // Malaysian journal of mathematical sciences, 10(S), 2016, 49-60.(№3.Scopus, IF=0.571)
4. Давлатов Ш.О. Устойчивость неявной схемы конечных элементов для симметрических t-гиперболических систем // Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2(32), 2021, 26-37.(№9. 05.00.00)

II бўлим (2 часть; part 2)

5. Aloev R.D., Davlatov Sh.O. Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolicsystems with constant coefficients//Амалий математика ва информацион технологияларнинг долзарб муаммолари-Ал-Хоразмий,Конференция мақолалари, Тошкент, 19-22 декабр 2012, 149-150 бетлар.
6. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О. Устойчивость неявной схемы конечных элементов для симметрической гиперболической системы// Амалий математика ва информацион технологияларнинг долзарб муаммолари- Ал-Хоразмий. Конференция маколалари. Самарканд 15-17 сентябр 2014. 72-76 бетлар.
7. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О. Устойчивость схемы конечных элементов для одномерной симметрической гиперболической системы на равномерной сетке// Амалий математика ва ахборот хавфсизлиги. Илмий техник конференция материаллари. 2014 й. 28-30 апрел. 75-81 бетлар.
8. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О. Построение и исследование схем конечных элементов для гиперболических систем с переменными коэффициентами// Амалий математика ва информацион технологияларнинг долзарб муаммолари-Ал-Хоразмий, Бухоро 2016, 37-38 бетлар.
9. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О. Единственность решения схемы конечных элементов для симметрических систем с переменными коэффициентами // Современные методы математической физики и их приложения, Тошкент 2015,-С.25-33

10. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О.Устойчивость разностной схемы, полученной методом конечных элементов при численном решении симметрических t-гиперболических систем// Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference, Computational models and technologies, August 24-25, 2021, P. 37-38.

11. Давлатов Ш.О.Ўзгармас коэффициентли бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системаларни чекли элементлар усули билан нотекис тўрда ечиш //Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари, Тошкент 2021, 258-262 бетлар.

12. Давлатов Ш.О. “Чизиқли биринчи тартибли гиперболик системаларни бир ўлчовли соҳада ечиш” дастури// DGU, 2019, 1645, 10.12.2019.

13. Давлатов Ш.О. “Чизиқли биринчи тартибли гиперболик системаларни икки ўлчовли соҳада ечиш” дастури// DGU, 2019, 1646, 10.12.2019.

14. Давлатов Ш.О. Икки ўлчамли чегараланган бир боғламли соҳада ўзгармас коэффициентли чизиқли симметрик t-гиперболик системалар учун қўйилган аралаш масалани чекли элементлар усули билан ечиш // ҚарДУ хабарлари, №4, 2015. 6-15 бетлар.

15. Давлатов Ш.О.,Эшматов Б. Симметрик t-гиперболик системаларни чекли элементлар усули билан ечишда олинган ошкормас схема турғунлиги //ҚарДУ хабарлари, №4, 2013. 4-14 бетлар.

16. Давлатов Ш.О., Гуломов О. Ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик системаларни икки ўлчамли соҳада текис тўрда чекли элементлар усули билан ечиш алгоритми // ҚарДУ хабарлари, №3, 2012. 6-15 бетлар.

Автореферат Навоий давлат кончилик институти «Ўзбекистон кончилик хабарномаси» журнали таҳририятида 2022 йил 8 апрелда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди __.________.2022. Ҳажми 2,75 босма табоқ.
Бичими 60х84 1/16. Адади 50 нусха. Буюртма № 00118.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.