O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

GULOMKODIROV KOMILJON ALISHEROVICH

NAVYE-STOKS TENGLAMALARINI UYURMA-TOK FUNKSIYASI TIZIMIDA SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2022

UDK: 519.63 (517.9)

Fizika-matematika fanlari bO‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

GULOMKODIROV KOMILJON ALISHEROVICH

NAVYE-STOKS TENGLAMALARINI UYURMA-TOK FUNKSIYASI TIZIMIDA SONLI MODELLASHTIRISH

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2022

Fizika-matematika fanlari bO‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2021.1.PhD/FM591 raqam bilan rO‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Termiz davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (O‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http:ik-fizmat.nuu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar: **Normurodov Chori Begalievich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar: **Sadullayeva Shahlo Azimbayevna**
fizika-matematika fanlari doktori, dotsen

Xudoyberganov Mirzoali Urazaliyevich
fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

Yetakchi tashkilot: **Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2022 yil “__”_______ soat ____ dagi majlisida bO‘lib O‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet kO‘chasi, 4- uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan rO‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet kO‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2022 yil “__” ________ kuni tarqatildi.
(20__ yil “__” ________ dagi __ raqamli reestr bayonnomasi).

M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z. R. Raxmanov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

B.F.Abduraximov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan koʻplab ilmiy-amaliy tadqiqotlar, aksariyat hollarda, suyuqliklar va gazlar harakatini tavsiflovchi differensial tenglamalarni yechish bilan bog’liq boʻlgan tizimlarni matematik modellashtirish, chiziqli boʻlmagan tenglamalarni sonli yechish, tejamkor va samarali metodlarni qoʻllash masalalariga keltiriladi. Jumladan, Navye-Stoks tenglamalarini yechish usullarini ishlab chiqish suyuqliklar va gazlar oqimi bilan bogʻliq boʻlgan qator sohalarning rivojlanishida muhim omil boʻlib xizmat qiladi. Navye-Stoks tenglamalari bu muttasil muhitlar (suyuqliklar yoki gazlar) harakatini ularning qovushqoqlik hossasini inobatga olgan holda tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasidan iborat. Shunga muvofiq, Navye-Stoks tenglamalarini analitik usulda yechish bugunga qadar amalga oshirilmaganligi tufayli ushbu tenglamalarni sonli yechish algoritmlarini ishlab chiqish va dasturlar majmuini yaratish amaliy matematikaning muhim vazifalaridan biri boʻlib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda chiziqli boʻlmagan evolyutsion uyurma tenglamasi va elliptik tipdagi tok funksiyasi tizimida tavsiflanuvchi Navye-Stoks tenglamalarini matematik modellashtirish va sonli yechish keng tadqiq etilmoqda. Navye-Stoks tenglamalari yechimlarini yuqori aniqlikda va samarali yechish suyuqliklar va gazlar oqimi bilan bog’liq boʻlgan barcha sohalarda jumladan suv xoʻjaligi, neft-gaz sohasi, aerodinamika, meteorologiya va boshqa koʻplab sohalar rivoji uchun muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli Navye-Stoks tenglamalarini sonli yechish va keng doiradagi foydalanuvchilarga moʻljallangan qulay interfaysga ega dasturlar majmuasini yaratish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bOʻlgan suyuqlik va gazlar dinamikasi, gidrodinamika, aerodinamika sohalaridagi masalalarning sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yoʻnalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Xususan, chiziqli boʻlmagan evolyutsion jarayonlarni matematik modellashtirish va yuqori aniqlikka ega samarali taqribiy yechish usullarini ishlab chiqish boʻyicha muhim natijalarga erishildi. «Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» kabi ustuvor yoʻnalishlar boʻyicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish OʻzR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Bu borada suyuqliklar va gazlar harakatini tavsiflovchi Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida samarali yechish usullarini yaratish, chiziqli boʻlmagan jarayonlarni sonli modellashtirish algoritmlarini qurish va dasturiy ta’minotini yaratish muhim ahamiyatga ega.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PQ-4947-son «Oʻzbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bOʻyicha harakatlar strategiyasi tOʻg`risida»gi, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son «Fanlar akademiyasi faoliyati,

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий- тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сон қарори.

ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari tO‘g`risida»gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909-son «Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari tO‘g`risida»gi, 2018 yil 27 apreldagi PQ-3682-son «Innovatsion g`oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari tO‘g`risida»gi, 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari tO‘g`risida»gi va 2020 yil 6 oktyabrdagi PQ-4851-son «Axborot texnologiyalari sohasida ta’lim tizimini yanada takomillashtirish, ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish va ularni IT-industriya bilan integratsiya qilish chora-tadbirlari tO‘g`risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy xujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yO‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya tadqiqoti respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yO‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning O‘rganilganlik darajasi.

Navye-Stoks tenglamalari fanga dastlab fransuz matematigi L.Navye tomonidan 1822 yilda kiritilgan. 1845 yilda Dj.Stoks muttasil muhitlarda impuls va massaning saqlanish qonuni qo‘llash orqali siqilmaydigan qovushqoq suyuqliklarning statsionar harakatini o‘rganish natijasida ushbu tenglamalarning to‘liq shakliga ega bo‘lgan. Navye-Stoks tenglamalarining analitik yechimlarini topish ming yillik muammolari sirasiga kiradi va ushbu muammo ustida dunyo olimlari tomonidan izlanishlar olib borilmoqda. M.Y. Balaganskiy va Y.N. Zaxarovlar tomonidan Navye-Stoks tenglamalarining uyurma-tok funksiyasi tizimida oshkor iteratsiya sxemasini ko‘p komponentali optimallashtirish orqali sonli yechish qaralgan. Qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar uchun Navye-Stoks tenglamalarini fizik o‘zgaruvchilar bo‘yicha tejamli ayirmali sxemalarni qo‘llab yechish usuli V.M.Kovenya tomonidan tavsiya etilgan. Mazkur ayirmali sxema differensial tenglamalarni fizik jarayonlar bo‘yicha ajratishga asoslangan. Tavsiya etilayotgan algoritm tekislikdagi konvektiv ko‘chish va bitta chegarasi qizdirilgan yopiq sohadagi oqim masalalarida sinovdan o‘tkazilgan.

F.N.Yasinskiy, A.V. Yevseyev tadqiqotlarida qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar xarakatini tavsiflovchi Navye-Stoks tenglamalarining uyurma-tok funksiyasi tizimida modellashtirish maqsadida grafik tezlatgichlardan foydalanish metodikasi keltirilgan. A.L.Zuykov tomonidan silindrik kanalda barqarorlashgan notekis siljuvchi oqim strukturasini analitik tadqiq etish masalalari qaralgan. Ushbu tadqiqotda oqim strukturasi uyurmaning azimutal tezligiga nisbatan Laplas tenglamasi bilan va tok funksiyasiga nisbatan esa Puasson tenglamasi bilan tavsiflanishi ko‘rsatilgan. Azimutal uyurma va tok funksiyasi taqsimlanishi Furye-Bessel qatorlari ko‘rinishida ifodalangan. Uch o‘lchamli Navye-Stoks tenglamalarini oddiy fizik miqdorlarga nisbatan turli ochiq va yopiq suv ob’yektlaridagi, ularga xar xil geografik suv ob’yektlarini kiritish mumkin, suyuqliklar xarakatini sonli modellashtirish V.N. Baklagin tomonidan qaralgan.

Y.N.Kachalkina ishida qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar laminar harakatining uyurma-tok funksiyasi tizimidagi tekis harakati kvadratsimon g‘ovakda qaralgan. V.YE.Kamyushin, O.S.Majorova tomonidan ikki o‘lchamli Navye-Stoks tenglamalarining uyurma-tok funksiyasi tizimidagi yechish algoritmi tadqiq etilgan. Algoritm chekli ayirmali sxemalarga asoslangan bo‘lib, unda uyurmalarning ko‘chish tenglamasi uchun iteratsion hadlar quyi vaqt qatlamidan, dissipativ hadlar esa yuqori vaqt qatlamidan olingan. Ushbu algoritmning chiziqli yondashuvi turg‘unligi o‘rganilgan va Reynolds sonining kichik qiymatlarida oqimlarni modellashtirish uchun afzalligi ko‘rsatilgan.

Bundan tashqari Navye-Stoks tenglamalarini tadqiq qilishni xorijlik olimlardan T. Koyama, Wenchao Xu, Dietmar Kroner, Antoine Lejay, Lizhen Chen, Niklas Fehn, K.Mitzal, Jia Zhao, F.Massa, H.Cho., J.Chan., M.Danis, J.Marti, M.Abbaszadeh, D.Irisarri, W.Boscherilar o‘z ishlarida ko‘rib chiqqanlar. Mazkur tadqiqotchilar tomonidan Navye-Stoks tenglamalarini yechishda Bolsmanning to‘rli modeli, Galyorkin metodi va uning takomillashtirilgan ko‘rinishlari, Feyman-Kau formulasini approksimatsiyalash, vaqt bo‘yicha sakrashsimon siljishlarga ega bo‘lgan takomillashtirilgan metod, ko‘ptezlikli vaqt qadamiga asoslangan yarimoshkor yechimni topishga mo‘ljallangan chekli elementlar metodi, an’anaviy sonli ekstropolatsiyalash, o‘tish shartlarini to‘liq oshkormas va aniq hisoblashga mo‘ljallangan sonli metod, chekli elementlar metodining oshkor-oshkormas varianti, chekli ayirmalarning lokal radial metodi, Max sonining ixtiyoriy qiymatlarida chekli hajmli ikkinchi tartibli samarali metod kabi ko‘plab hisoblash sxemalari va metodlari qo‘llanilgan. Ikki o‘lchamli Navye-Stoks tenglamalarini gidrodinamik turg’unlik nuqtai nazaridan sonli modellashtirishga bag’ishlangan ilmiy tadqiqotlar S.A.Orszag, A.Zebib, F.B.Abutaliyev, Ch.B.Normurodov tomonidan olib borilgan. Yuqorida keltirilgan tadqiqot natijalaridan ko‘rinadiki, Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida sonli modellashtirishni optimallashtirishga yo‘naltirilgan ilmiy izlanishlar deyarli mavjud emas. Ushbu yo‘nalishda ilmiy tadqiqotlar olib borish yanada murakkab uch o‘lchamli Navye-Stoks tenglamalarini yechishga mo‘ljallangan samarali metodlar yaratishga imkon beradi hamda dolzarb ilmiy tadqiqot yo‘nalishlaridan hisoblanadi.

Tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog`liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Termiz davlat universitetining ilmiy-tadqiqot ishlar rejasiga muvofiq “Matematik modellashtirish, hisoblash usullari va dasturlash texnologiyalari” dasturi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida samarali yechish metodlari, algoritmlari va dasturiy ta’minotini yaratishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida tavsiflovchi matematik modelni ishlab chiqish;

ikki qatlamli o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasining optimal iteratsiya parametrlari to‘plamida yaqinlashishini isbotlash;

Puasson tenglamasi bilan tavsiflanadigan tok funksiyasini o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasi bilan yechish algoritmini ishlab chiqish va dasturiy ta’minotini yaratish;

bir o‘lchamli uyurma tenglamasi uchun manba funksiyasi hamda kinematik qovushqoqlik koeffitsiyentini aniqlashning teskari masalasini yechish;

ikki o‘lchamli uyurma tenglamasini sonli yechish metodlarini tahlil qilish, samarali va yuqori aniqlikka ega bo‘lgan metod ishlab chiqish va dasturiy ta’minot yaratish.

Tadqiqotning ob’yekti Navye-Stoks tenglamalarining uyurma-tok funksiyasi tizimidagi matematik modelidan iborat.

Tadqiqotning predmeti Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida sonli modellashtirish, algoritmlash hamda dasturiy ta’minotini yaratishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot jarayonida matematik va sonli modellashtirish, ayirmali operatorlar nazariyasi, funksional tahlil, approksimatsiyalash nazariyasi, ikki qatlamli iteratsiya sxemalari hamda hisoblash eksperimentlari o‘tkazish usullari qo‘llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida tavsiflovchi adekvat matematik model ishlab chiqilgan;

optimal iteratsiya parametrlariga ega bo‘lgan o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasining yaqinlashishini ta’minlovchi teoremalar isbotlangan;

tok funsiyasi uchun Puasson tenglamasini optimal iteratsiya parametrlariga ega bo‘lgan o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi yordamida sonli yechish usuli ishlab chiqilgan;

bir o‘lchamli uyurma tenglamasi to‘g’ri masalasi yechimlarini va teskari masalalari manba hadini tiklash, kinematik qovushqoqlik koeffitsiyentini yuqori aniqlikda topish usuli ishlab chiqilgan;

Navye-Stoks tenglamalarining uyurma-tok funksiyasi tizimidagi yechimlarini yuqori aniqlikda samarali topishga mo‘ljallangan va optimal iteratsiya parametrlariga ega bo‘lgan o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi yaratilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Navye-Stoks tenglamalarini tavsiflovchi mavjud matematik modellar tahlil qilingan va ularni samarali hisoblash algoritmlari ishlab chiqilgan;

uyurma va tok funksiyasi tenglamalarini yechish orqali Navye-Stoks tenglamalarining yechimlarini yuqori aniqlikda topish metodi, algoritmi va dasturiy ta’minoti yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Amaliy matematika, hisoblash gidrodinamikasi, ayirmali sxemalar nazariyasi, o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasi, sinov funksiyalari, progonka usullaridan foydalanilganligi, Navye-Stoks tenglamalari sonli yechimlarining boshqa mualliflar tomonidan olingan sonli va eksperimental natijalar bilan taqqoslanganligi, ushbu tenglamalarning uyurma-tok funksiyasi tizimida yechish metodining yuqori aniqligi va tejamliligini baholash bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida sonli modellashtirish yordamida ushbu tenglamalar yechimlari tabiati va o‘zgarish dinamikasini tahlil qilish imkoniyati paydo bo‘lganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqotning amaliy natijalari qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini uyurma-tok funksiyasi tizimida sonli yechishning takomillashtirilgan matematik modellari, hisoblash algoritmlari va dasturiy ta’minoti suyuqliklar mexanikasi va gidrodinamikasi to‘g‘ri va teskari masalalarini yechishda qo‘llash mumkinligi bilan, qisilmaydigan yopishqoq suyuqliklar harakatini tahlil qilish, gidrodinamika sohasidagi jarayonlarni sifat va miqdor jihatdan baholashga imkon berishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida sonli yechishning takomillashtirilgan modellari, algoritmlari va dasturiy ta’minoti asosida:

Navye-Stoks tenglamalarini elliptik tipdagi tok funksiyasi va parabolik tipdagi uyurma tenglamasi ko‘rinishida sonli modellashtirishning to‘g‘ri va teskari masalalarini yechish algoritmlaridan A-13-38 raqamli “Ikki fazali muhit nochiziqli tO‘lqin dinamikasi uchun tO‘g`ri va teskari masalalarning nazariy va sonli tadqiq qilish” ilmiy tadqiqot loyihasida yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bO‘lgan parabolik tenglamalarni sonli yechishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi oliy va O‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 20 noyabrdagi 89-03-4862-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bO‘lgan parabolik tenglamalarni sonli hisoblash sxemalarini ishlab chiqish imkonini bergan;

elliptik tipdagi tok funksiyasi va evolyutsion uyurma tenglamasi ko‘rinishida tavsiflanuvchi Navye-Stoks tenglamalarini sonli modellashtirish uchun o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodida optimal iteratsiya parametrlarini tanlab yechish algoritmidan A-13-38 raqamli “Ikki fazali muhit nochiziqli tO‘lqin dinamikasi uchun tO‘g`ri va teskari masalalarning nazariy va sonli tadqiq qilish” ilmiy tadqiqot loyihasida Navye-Stoks tenglamalarini sonli modellashtirish, kompyuter dasturini yaratish va keng qamrovli hisoblash eksperimenti O‘tkazishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi oliy va O‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 20 noyabrdagi 89-03-4862-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, elliptik tipdagi tok funksiyasi va evolyutsion uyurma tenglamasi ko‘rinishida tavsiflanuvchi Navye-Stoks tenglamalarini sonli modellashtirish uchun o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasida optimal iteratsiya parametrlarini tanlab yechish algoritmini ishlab chiqish, kompyuter dasturini yaratish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining approbatsiyasi. Mazkur dissertatsiya natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 5 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan O‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bO‘yicha jami 21 ta ilmiy ish chop etilgan, ulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan. Shuningdek, EHM uchun yaratilgan dasturning rasmiy rO‘yxatdan O‘tkazilganligi tO‘g`risida 4 ta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar rO‘yxati va ilovadan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 102 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustivor yO‘nalishlariga mosligi kO‘rsatilgan, dissertatsiya mavzusiga oid ilmiy tadqiqotlar tahlili, muammoning O‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bO‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “Navye-Stoks tenglamalari uchun uyurma-tok funksiyasi sistemasi” deb nomlanuvchi birinchi bobida dissertatsiyaning asosiy natijalarini bayon qilishda zarur bO‘ladigan yordamchi ma’lumotlar, Navye-Stoks tenglamalarining fizik mohiyati, tenglamalarning uyurma-tok funksiyasi tizimidagi bir va ikki o‘lchamli ko‘rinishlari, ularga mos boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning qo‘yilishi keltirilgan. Tok funksiyasi uchun o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasining yaqinlashishini ta’minlovchi teoremalar isbotlangan.

Dissertatsiyaning 1.1 paragrafida Navye-Stoks tenglamalarining o‘lchamsiz holda umumiy ko‘rinishi berilgan:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0, \tag{3}$$

hamda ushbu tenglamalar ustida matematik almashtirishlar va ayrim belgilashlar kiritilib, uyurma-tok funksiyasi tizimida ifodalangan.

Dissertatsiyaning 1.2 paragrafida bir o‘lchamli tok funksiyasi va uyurma tenglamasining umumiy ko‘rinishi, masalani yechish uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning qo‘yilishi tahlil qilingan:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\psi\frac{\partial \omega}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+Q(t,x),\quad 0<x<1,\ 0<t<T, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}=-\omega,\quad 0<x<1,\ 0<t\le T \tag{5}$$

bu yerda x - fazoviy koordinata, t - vaqt, ω- uyurma, ψ - tok funksiyasi, $Q(t,x)$- ma’lum funksiya.

Paragraf 1.3 da ikki o‘lchamli Navye-Stoks tenglamalarining uyurma-tok funksiyasi tizimidagi ko‘rinishi va differensial masalaning qo‘yilishi keltirilgan:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)+Q\left(t,x,y\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u,\ \ \frac{\partial\psi}{\partial x}=-v,\ \ \omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8}$$

Paragraf 1.4 da ikki o‘lchamli tok funksiyasi tenglamasi uchun iteratsiya metodlarining yaqinlashishini ta’minlaydigan lemma va teoremalar isbotlangan.

Γ chegara bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchakli $\bar{G}=\{0\le x_\alpha\le l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$ sohada Puasson tenglamasi uchun Dirixle masalasi qaraladi:

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega(x,y),\ (x,y)\in G, \tag{9}$$

$$\psi\big|_{\Gamma}=\mu(x,y). \tag{10}$$

$\bar{G}=G+\Gamma$ sohaga qadamlari h_1 va h_2 ga teng bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchakli to‘r kiritiladi:

$$\overline{\Omega_h}=\Omega_h+\gamma_h=\{(x_i,y_j)=\left(ih_1,jh_2\right)\in\bar{G},\ i=0,1,...,N_1,\ j=0,1,...,N_2,$$
$$h_1=l_1/N_1,\ h_2=l_2/N_2\}.$$

To‘rning chegaraviy nuqtalari - $\gamma_h=\{x_{i_1i_2}\in\Gamma\}$ bo‘lsin. Endi $\bar{G}=\{0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakdagi $\bar{\Omega}_h$ to‘r sohasida differensial masala (9)-(10) uchun Dirixle masalasi qaraladi:

$$\Lambda\psi=\Lambda_1\psi+\Lambda_2\psi=-\omega(x,y),\ x\in\Omega_h, \tag{11}$$

$$\psi\big|_{\gamma_h}=\mu(x,y), \tag{12}$$

bu yerda $\Lambda_\alpha=\psi_{x_\alpha x_\alpha}$ - hususiy hosila $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\left(\alpha=1,2\right)$, ni approksimatsiya qiluvchi ikkinchi tartibli ayirmali operator, ψ - esa ayirmali yechim.

Ayirmali masala (11) ni yechish uchun iteratsiya metodi sifatida o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasi olinadi. U quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{\psi^{j+1/2}-\psi^{j}}{\tau^{(1)}_{j+1}}=\Lambda_1\psi^{j+1/2}+\Lambda_2\psi^{j}+\omega(x,y),\ x\in\Omega_h,\ \psi^{j+1/2}\Big|_{\gamma_h}=\mu(x,y), \tag{13}$$

$$\frac{\psi^{j+1}-\psi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau^{(2)}_{j+1}}=\Lambda_1\psi^{j+\frac{1}{2}}+\Lambda_2\psi^{j+1}+\omega(x,y),\ \psi^{j+1}\Big|_{\gamma_h}=\mu(x,y),\ x\in\Omega_h,\ j=0,1,2,.. \tag{14}$$

$\psi^0=\psi\left(x,0\right)$ ixtiyoriy boshlang‘ich shartlar.

Bu yerda j - iteratsiya nomeri, $\psi^{j+1/2}$ - oraliq iteratsiya (iteratsiya osti), $\tau_{j+1}^{(1)} > 0$ va $\tau_{j+1}^{(2)} > 0$ - iteratsiyalar sonining minimalligi nuqtai nazaridan tanlab olinadigan iteratsiya parametrlari.

Uch nuqtali tenglamalar sistemasi uchun j - iteratsiyadan $(j+1)$ iteratsiyaga o‘tish progonka metodini qatorlar va ustunlar bo‘yicha navbatma navbat qo‘llash orqali amalga oshiriladi:

$$\psi^{j+1/2} - \tau_{j+1}^{(1)}\Lambda_1\psi^{j+1/2} = F^j,\ F^j = \psi^j + \tau_{j+1}^{(1)}\Lambda_2\psi^j + \tau_{j+1}^{(1)}\omega \tag{15}$$

(qatorlar bo‘yicha) va

$$\psi^{j+1} - \tau_{j+1}^{(2)}\Lambda_2\psi^{j+1} = F^{j+1/2},\ F^{j+1/2} = \psi^{j+1/2} + \tau_{j+1}^{(2)}\Lambda_1\psi^{j+1/2} + \tau_{j+1}^{(2)}\omega \tag{16}$$

(ustunlar bo‘yicha).

Shunday qilib, Ω_h to‘rda bitta iteratsiyani hisoblash uchun $\theta(1/(h_1h_2))$ yoki $\theta(N_1 \times N_2)$ arifmetik amal bajarilishi talab qilinadi. Iteratsiya jarayoni (13)-(14) ni o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi deb ataladi (O‘YIM).

Teorema 1. O‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi o‘z-o‘ziga qo‘shma hal qilish operatori $T_n^* = T_n = \prod_{j=1}^{n} S_j$ ga ega, bu yerda $S_j = S_j^{(1)}S_j^{(2)},\ S_j^{(1)} = \left(E + \tau_j^{(1)}A_1\right)^{-1}\left(E - \tau_j^{(2)}A_1\right),\ S_j^{(2)} = \left(E + \tau_j^{(2)}A_2\right)^{-1}\left(E - \tau_j^{(1)}A_2\right),$ $\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}$ – iteratsiya parametrlari.

Operatorli tenglama qaraladi: $Au = f,\ A = A_1 + A_2$ bu yerda $\mathrm{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, $\mathrm{H} - (y, \vartheta)$ - skalyar ko‘paytma va $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ Gilbert fazosidagi norma. A_1 va A_2 o‘rin almashinuvchi operatorlar, yoki $A_1A_2 = A_2A_1$, soha to‘g‘ri to‘rtburchakli deb qaraladi. A_1 va A_2 operatorlar spektri turli xil kesmalarda joylashgan va quyidagi xossalarga ega:

$$\begin{gathered} A_\alpha^* = A_\alpha,\ \delta_\alpha E \le A_\alpha \le \Delta_\alpha E,\ \delta_\alpha > 0,\ \alpha = 1,2, \\ \delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha},\ \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\cos^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha},\ \alpha = 1,2. \end{gathered} \tag{17}$$

Lemma. Shart (17) bajarilgan bo‘lsin. U holda A_1 va A_2 operatorlarni spektr chegaralari mos tushadigan A_1' va A_2' operatorlarga almashtirish mumkin

$$\eta E \le A_\alpha' \le E,\ \alpha = 1,2,\ \eta > 0 \tag{18}$$

bunda

$$\begin{gathered} A_1 = \left(qE - rA_1'\right)^{-1}\left(A_1' - pE\right), \\ A_2 = \left(qE + rA_2'\right)^{-1}\left(A_2' + pE\right) \end{gathered} \tag{19}$$

bu yerda noma’lum p, q, r, η doimiy kattaliklar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$t=\sqrt{\frac{(\Delta_1-\delta_1)(\Delta_2-\delta_2)}{(\Delta_1+\delta_2)(\Delta_2+\delta_1)}},\ \kappa=\frac{(\Delta_1-\delta_1)\Delta_2}{(\Delta_2+\delta_1)\Delta_1}$$

$$\eta=\frac{1-t}{1+t},\ p=\frac{\kappa-t}{\kappa+t},\ r=\frac{\Delta_1-\Delta_2+(\Delta_1+\Delta_2)p}{2\Delta_1\Delta_2},\ q=r+\frac{1-p}{\Delta_1} \tag{20}$$

Hal qilish operatori T_n ning normasi baholanadi va o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi (O‘YIM) ning yechimini topishda berilgan $\varepsilon>0$ aniqlikni ta’minlovchi iteratsiyalar soni $n(\varepsilon)$ aniqlanadi.

Teorema 2. Iteratsiya metodining aniqligi $\varepsilon>0$ berilgan va $A_\alpha\ (\alpha=1,2)$ operatorlarning spektrlar chegaralari $\delta_\alpha,\Delta_\alpha$ ma’lum, xuddi shuningdek lemma shartlari bajarilgan bo‘lsin. U holda o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi (O‘YIM) uchun optimal iteratsiya parametrlari to‘plami quyidagicha aniqlanadi:

$$\tau_j^{(1)}=\frac{q\omega_j+r}{1+\omega_j p},\ \tau_j^{(2)}=\frac{q\omega_j-r}{1-\omega_j p} \tag{21}$$

bunda

$$\omega_j=\frac{(1+2\theta)\left(1+\theta^{\sigma}\right)}{2\theta^{\frac{\sigma}{2}}\left(1+\theta^{1-\sigma}+\theta^{1+\sigma}\right)},\ j=1,2,...,n(\varepsilon)$$

$$\theta=\frac{1}{16}\eta^2\left(1+\frac{1}{2}\eta^2\right),\ \sigma=\frac{2j-1}{2n(\varepsilon)} \tag{22}$$

$$\|Ay_n-f\|\le\|T_n\|\|Ay_0-f\|,$$

hamda ushbu tengsizlik o‘rinli bo‘lishi uchun

$$\|Ay_n-f\|\le\varepsilon\|Ay_0-f\|,\ \|T_n\|\le\varepsilon \tag{23}$$

n iteratsiya bajarilishi yetarlidir, bunda

$$n\ge n(\varepsilon),\ n(\varepsilon)\approx\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{4}{\eta}. \tag{24}$$

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi “**Bir o‘lchamli uyurma-tok funksiyasi tenglamalari uchun to‘g‘ri va teskari masalalar”** deb nomlanib, unda bir o‘lchamli uyurma va tok funksiyasi uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni yechish metodlari, algoritmlari va hisoblash natijalari keltiriladi.

Paragraf 2.1 da bir o‘lchamli uyurma va tok funksiyasi tenglamalarini sonli modellashtirish qaralgan.

Tenglamalar sistemasi (4), (5) ga quyidagi ko‘rinishdagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlar qo‘yiladi:

$$\psi(0,x)=0,\ \omega(0,x)=0, \tag{25}$$

$$\psi(t,0)=\psi(t,1)=\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,1)=0. \tag{26}$$

Sinov funksiyasi sifatida $Q(t,x)=Q(x)=24+12x^2(1-x^2)(1-2x)$ funksiya qaraladi. Tenglama (4)-(5) ni yechish uchun h va t yo‘nalishlar bo‘yicha [0,1] kesmada mos ravishda teng oraliqli $\Omega_h:\{x_i=ih,\, i=0,1,...,M,\, h=1/M\}$ va $\Omega_\tau:\{t_k=k\tau,\, k=0,1,...,\tau=1/N\}$ to‘rlar kiritiladi, $\Omega=\Omega_h\times\Omega_\tau$ to‘rda (4)-(5), (25)-(26) masala oshkormas sxema bo‘yicha approksimatsiya qilinadi hamda progonka metodini qo‘llab yechiladi.

Paragraf 2.2 da uyurma tenglamasining manba hadini topishning teskari masalasini yechish amalga oshirilgan.

Bunda bir o‘lchamli uyurma-tok funksiyasi uchun differensial tenglama (4) - (5) ko‘rinishda ifodalanadi. Ushbu tenglamalar quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlarda qaraladi:

$$\psi(0,x)=0,\ \omega(0,x)=0, \tag{27}$$

$$\psi(t,0)=\psi(t,1)=0,\ \frac{\partial\psi(t,0)}{\partial x}=0, \tag{28}$$

$$\omega(t,0)=-\frac{\partial^2\psi(t,0)}{\partial x^2},\ \omega(t,1)=-\frac{\partial^2\psi(t,1)}{\partial x^2}. \tag{29}$$

Qaralayotgan masalada tenglama (4) dagi $\omega(x,t)$ va $\psi(x,t)$ ma’lum funksiyalar orqali noma’lum $Q(t,x)$ funksiyani aniqlash talab etiladi. Bunda $Q(t,x)$ funksiya quyidagi ko‘rinishga ega deb hisoblanadi:

$$Q(t,x)=Q_0\,\eta(t)\,\varphi(x), \tag{30}$$

bu yerda $\varphi(x)$ funksiya berilgan, hamda ifoda (30) ga asosan manbaning vaqtga bog‘liq $\eta(t)$ funksiyasi noma’lum hisoblanadi. Bu bog‘liqlik bir qancha ichki $0<x^*<1$ nuqtalarda $\omega(x,t)$ funksiyani qo‘shimcha kuzatish orqali tiklanadi:

$$\omega(x^*,t)=z(t). \tag{31}$$

Ushbu paragrafda masala (4)-(5), (27)-(28) larni tadqiq etish maqsadida sonli eksperiment o‘tkazilgan bo‘lib, tenglamaning o‘ng qismi quyidagi bog‘liqliklar bilan beriladi:

$$\varphi(x)=\sin\pi x,\ \ 0\le x\le 1,$$

$$\eta(t)=t^2+1,\ \ 0\le t\le T=0.4,\ Q_0=100.$$

Qaralayotgan masala to‘r tugunlari M=400, N=21 bo‘lgan ayirmali to‘rda sonli yechiladi.

2.3 paragrafda uyurma tenglamasida kinematik qovushqoqlik koeffitsiyentini topishning teskari masalasi sonli modellashtirilgan.

Dissertatsiyaning **“Ikki o‘lchamli uyurma-tok funksiyasi tenglamalarini sonli modellashtirish”** nomli uchinchi bobida qaralayotgan masalalarning sonli yechimi o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi bilan hisoblanadi, hamda olingan natijalar aniq yechim bilan taqqoslanadi.

3.1 paragrafda tok funksiyasi tenglamasini optimal iteratsiya parametrlarini tanlash orqali sonli yechish amalga oshirilgan.

Tok funksiyasi uchun puasson tenglamasi quyidagicha ko‘rinishga ega

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = -\omega(x_1, x_2),\ 0 < x_\alpha < l_\alpha \ \ \alpha = 1,2 \tag{32}$$

$$\psi\big|_\Gamma = \mu(x_1, x_2)\,. \tag{33}$$

Differensial masalalar (32)-(33) to‘g‘ri to‘rtburchakli $\bar{G} = G + \Gamma = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$ sohada aniqlangan. Bu yerda Γ - $\bar{G}$ sohaning chegarasi hisoblanadi, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j$ - differensial operator.

Differensial masala qaralayotgan $\bar{G}$ sohada ayirmali to‘r kiritiladi:

$$\bar{\Omega}_{h_1 h_2} = \begin{Bmatrix} (x_{1_i}, x_{2_i}),\ x_{1_i} = ih_1,\ i = 0..N_1,\ h_1 = 1/N_1 \\ x_{2_i} = jh_2,\ j = 0..N_2,\ h_2 = 1/N_2 \end{Bmatrix}$$

Ayirmali to‘rda (32)-(33) differensial masalaga mos ravishda quyidagi ayirmali masala qo‘yiladi:

$$\Lambda\psi = \Lambda_1\psi + \Lambda_2\psi = -\omega(x_1, x_2),\ x \in \Omega_h \tag{34}$$

$$\psi\big|_{\gamma_h} = \mu(x_1, x_2) \tag{35}$$

$$\Lambda_\alpha\psi = \psi_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\psi(x_\alpha - h_\alpha) - 2\psi(x_\alpha) + \psi(x_\alpha + h_\alpha)}{h_\alpha^2},\ \alpha = 1,2$$

bu yerda fiksirlangan indeks soddalik uchun keltirilmagan.

$\bar{\Omega}_h = \Omega_h + \gamma_h = \{x_i = (ih_1, jh_2) \in \bar{G},\ i = 0,1,...,N_1,\ j = 0,1,...,N_2$

Ayirmali masala (34)-(35) ni yechishda o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasi qo‘llanilgan:

$$\begin{aligned} &\frac{\psi^{k+\frac{1}{2}} - \psi^k}{\tau^{(1)}_{k+1}} = \Lambda_1\psi^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2\psi^k + f(x),\ \ f(x) = \omega(x),\ \psi^{k+\frac{1}{2}}\Big|_{\gamma_h} = \mu(x),\ x \in \Omega_h \\ &\frac{\psi^{k+1} - \psi^{k+\frac{1}{2}}}{\tau^{(2)}_{k+1}} = \Lambda_1\psi^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2\psi^{k+1} + f(x),\ \ f(x) = \omega(x), \psi^{k+1}\Big|_{\gamma_h} = \mu(x),\ x \in \Omega_h \end{aligned} \tag{36}$$

bunda $k = 0,1,2,...,$ $\psi^0 = \psi(x,0)$ ixtiyoriy berilgan boshlang‘ich yaqinlashish.

Bu yerda k- iteratsiya nomeri, $\psi^{k+1/2}$ - oraliq iteratsiya, $\tau^{(1)}_{k+1} > 0$ va $\tau^{(2)}_{k+1} > 0$ lar iteratsiyalar soni minimal bo‘lishi shartidan tanlab olinadigan iteratsiya parametrlari. Iteratsiya metodi (36) da k-iteratsiyadan $(k+1)$- iteratsiyaga o‘tish qatorlar va ustunlar bo‘yicha progonka metodini qo‘llash orqali amalga oshiriladi:

qatorlar bo‘yicha

$$\psi^{k+1/2} - \tau^{(1)}_{k+1}\Lambda_1\psi^{k+1/2} = F^k, \tag{37}$$

ustunlar bo‘yicha

$$\psi^{k+1} - \tau^{(2)}_{k+1}\Lambda_2\psi^{k+1} = F^{k+1/2}, \tag{38}$$

bu yerda, $F^k = \psi^k + \tau^{(1)}_{k+1}\Lambda_2\psi^k + \tau^{(1)}_{k+1} f$, $F^{k+1/2} = \psi^{k+1/2} + \tau^{(2)}_{k+1}\Lambda_1\psi^{k+1/2} + \tau^{(2)}_{k+1} f$.

$\bar{\Omega}_h$ to‘rda aniqlangan va γ_h chegarada nolga aylanadigan to‘r funksiyalar fazosi $H = \dot{\Omega}$ orqali tasvirlangan. $\dot{\Omega}$ fazoga $h, y \in \dot{\Omega}$ ni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy parametrlar uchun $A_1\psi = -\Lambda_1\psi,\ A_2\psi = -\Lambda_2\psi$ operatorlar kiritiladi.

Bunday ko‘rinishda kiritilgan operatorlar quyidagi hususiyatlarga ega bo‘ladi:

$$A_\alpha^* = A_\alpha,\ \delta_\alpha E \le A_\alpha \le \Delta_\alpha E,\ \delta_\alpha > 0,\ \alpha = 1,2$$
$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha},\ \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\cos^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha},\ \alpha = 1,2 \tag{39}$$

Tenglamalar sistemasi (37)–(38) ni sonli yechishda dastlab doimiylar (20) hisoblanadi va formula (21) bo‘yicha optimal iteratsiya parametrlari $\tau_{k+1}^{(1)}$ va $\tau_{k+1}^{(2)}$lar tanlanadi. So‘ngra $\varepsilon > 0$ aniqlikni ta’minlash uchun yetarli bo‘lgan iteratsialar soni $n = n(\varepsilon)$ formula (24) bo‘yicha aniqlanadi.

Ushbu paragrafda differensial masala (32)-(33) uchun sinov funksiyasi sifatida $\psi(x_1, x_2) = e^{A(x_1+x_2)}$ funksiya qo‘llanilgan. Olingan sonli natijalar aniq yechim bilan jadval va grafik ko‘rinishda taqqoslangan.

Paragraf 3.2 da uyurma va tok funksiyasi tenglamalar sistemasini Pismen-Rekford va o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasini optimal iteratsiya parametrlarini qo‘llab sonli yechish amalga oshirilgan.

Navye-Stoks tenglamalar sistemasi “uyurma-tok” funksiyasi tizimida I-bobda keltirilganidek quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) + Q(t, x, y), \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega, \tag{41}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u,\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\vartheta,\ \omega = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{42}$$

Bu yerda $x,\ y$ – fazoviy koordinatalar, t – vaqt, u va ϑ – тezlik vektorining koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari, ν – kinematik qovushqoqlik koeffitsiyenti, ψ – tok funksiyasi, ω – uyurma funksiyasi, Q – ma’lum funksiya.

Tenglamalar sistemasi (40)-(41) uchun $D:\{(x, y) \in [0,1]\times[0,1]\}$ sohada quyidagi chegaraviy shartlar qo‘yiladi:

$$\psi|_{x=0} = 0,\quad \psi|_{x=1} = 0,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=1} = 0,\quad 0 \le y \le 1, \tag{43}$$

$$\psi|_{y=0} = 0,\quad \psi|_{y=1} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{x=1} = 0,\ 0 \le x \le 1. \tag{44}$$

Boshlang’ich shartlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\psi(0, x, y) = 0,\ \omega(0, x, y) = 0 \tag{45}$$

D sohada teng oraliqli to‘r kiritiladi:

$$\Omega_h = \left\{ x_i = ih, \ \ y_j = jh, \ \ 0 \le i, j \le N, \ \ h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Vaqt – t bo‘yicha to‘rni quyidagicha aniqlanadi:

$$\Omega_\tau = \left\{ t_k = k\tau, \ \ k = 0,1,... \right\}.$$

Differensial tenglamalar (40)-(41) $\Omega = \Omega_h \times \Omega_\tau$ to‘rda approksimatsiyalanadi.

Uyurma tenglamasini Pismen-Rekford sxemasi bilan yechishda k qatlamdan $k+1$ qatlamga o‘tish ikki bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda $\omega_{i,j}^{k+1/2}$ oraliq qiymatlar quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$\frac{\omega_{i,j}^{k+1/2} - \omega_{i,j}^{k}}{0,5\tau} + \frac{\omega_{i+1,j}^{k+1/2} - \omega_{i-1,j}^{k+1/2}}{2h} \frac{\psi_{i,j+1}^{k} - \psi_{i,j-1}^{k}}{2h} -$$

$$-\frac{\omega_{i,j+1}^{k} - \omega_{i,j-1}^{k}}{2h} \frac{\psi_{i+1,j}^{k} - \psi_{i-1,j}^{k}}{2h} = \frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i+1,j}^{k+1/2} - 2\omega_{i,j}^{k+1/2} + \omega_{i-1,j}^{k+1/2} \right) + \tag{46}$$

$$+\frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i,j+1}^{k} - 2\omega_{i,j}^{k} + \omega_{i,j-1}^{k} \right) + Q\left(t_{k+1/2}, x_i, y_i \right), \quad i = \overline{1, N-1},$$

ikkinchi bosqichda esa topilgan $\omega_{i,j}^{k+1/2}$ qiymatlardan foydalanib, quyidagi tenglamalar sistemasidan $\omega_{i,j}^{k+1}$ qiymatlar topiladi:

$$\frac{\omega_{i,j}^{k+1} - \omega_{i,j}^{k+1/2}}{0,5\tau} + \frac{\omega_{i+1,j}^{k+1/2} - \omega_{i-1,j}^{k+1/2}}{2h} \frac{\psi_{i,j+1}^{k} - \psi_{i,j-1}^{k}}{2h} -$$

$$-\frac{\omega_{i,j+1}^{k+1} - \omega_{i,j-1}^{k+1}}{2h} \frac{\psi_{i+1,j}^{k} - \psi_{i-1,j}^{k}}{2h} = \frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i+1,j}^{k+1/2} - 2\omega_{i,j}^{k+1/2} + \omega_{i-1,j}^{k+1/2} \right) + \tag{47}$$

$$+\frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i,j+1}^{k+1} - 2\omega_{i,j}^{k+1} + \omega_{i,j-1}^{k+1} \right) + Q(t_{k+1}, x_i, y_i), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Tenglamalar (46) va (47) progonka metodi bilan yechiladi. Differensial tenglama (41) approksimatsiya qilinib 3.1 paragrafda bayon qilingan OYIS metodi bo‘yicha yechiladi. Bunda topilgan har bir ψ_{ij}^{k} yechimlar tenglama (47) ni progonka metodi bilan yechishda qo‘llanadi.

Ushbu paragrafda OYIS ning samaradorligi boshqa iteratsiya metodlari bilan taqqoslab, jadval va grafik shaklda ko‘rsatilgan.

1-jadval.

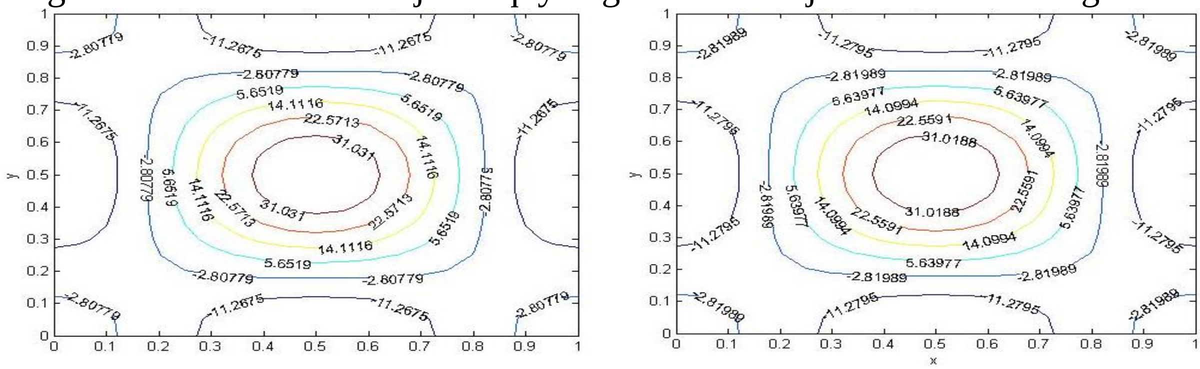
O‘YIM va boshqa iteratsiya metodlarida ε aniqlik uchun talab etiladigan iteratsiyalar soni

Aniqlik ε / Iteratsion metod	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
O‘YIM	5,437918	6,947587	8,457256	9,966925
Yuqori relaksatsiya	87,95487	117,2732	146,5914	175,9097
Zeydel	279,9773	373,3031	466,6288	559,9546
Oddiy iteratsiya metodi	559,9546	746,6061	933,2576	1119,909

Jadvaldan ko‘rinadiki, Navye-Stoks tenglamalarini uyurma-tok funksiyasi tizimida yechishda $\varepsilon = 0,001$ aniqlikni ta’minlash uchun O‘YIM 5 ta iteratsiya, ayni vaqtda yuqori relaksatsiya iteratsion metodi 88 ta iteratsiya, Zeydel iteratsion metodi 280 ta iteratsiya, oddiy iteratsiya metodi esa 560 ta iteratsiyalarni talab etadi. Huddi shu kabi parametr ε ning boshqa qiymatlarida yanada kuchliroq effekt kuzatiladi.

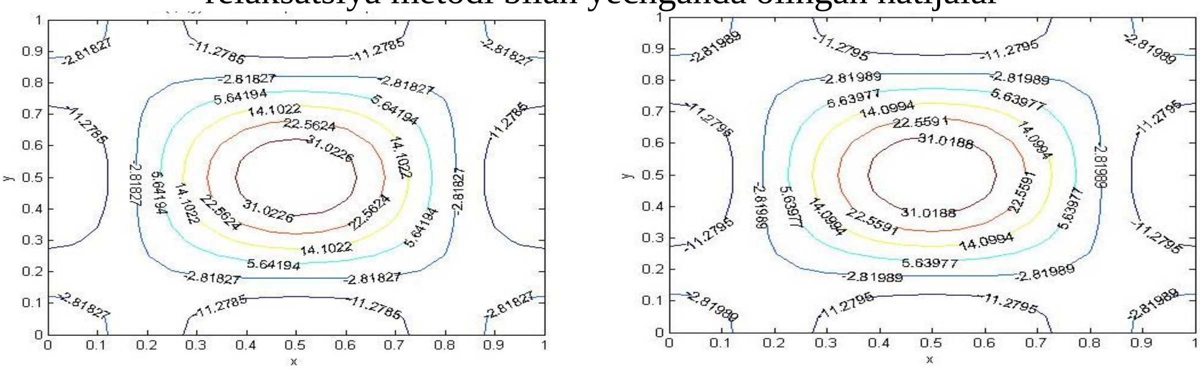
3.3-paragrafda uyurma-tok funksiyasi masalasini yechish algoritmi va kompyuter dasturi tuzilmasi keltirilgan.

3.4 – paragrafda hisoblash ekperimenti natijalari grafik va jadval ko‘rinishda berilgan. Sonli hisoblash natijalari quyidagi rasmlar va jadvallarda keltirilgan:



a) sonli yechim b) aniq yechim

1-rasm. Uyurma tenglamasini Pismen-Rekford va tok funksiyasini yuqori relaksatsiya metodi bilan yechganda olingan natijalar



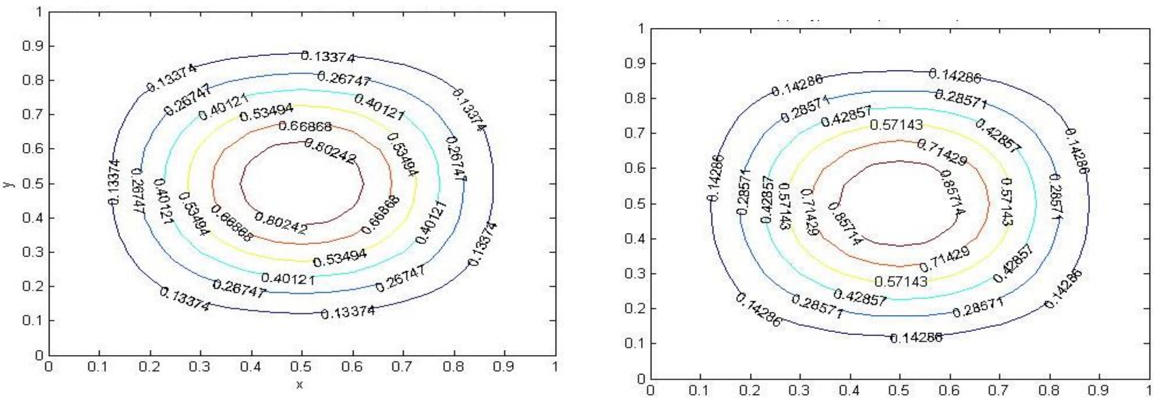
a) sonli yechim b) aniq yechim

2-rasm. Uyurma tenglamasini Pismen-Rekford va tok funksiyasini optimal parametrli iteratsiya sxemasi bilan yechganda olingan natijalar

2-jadval.

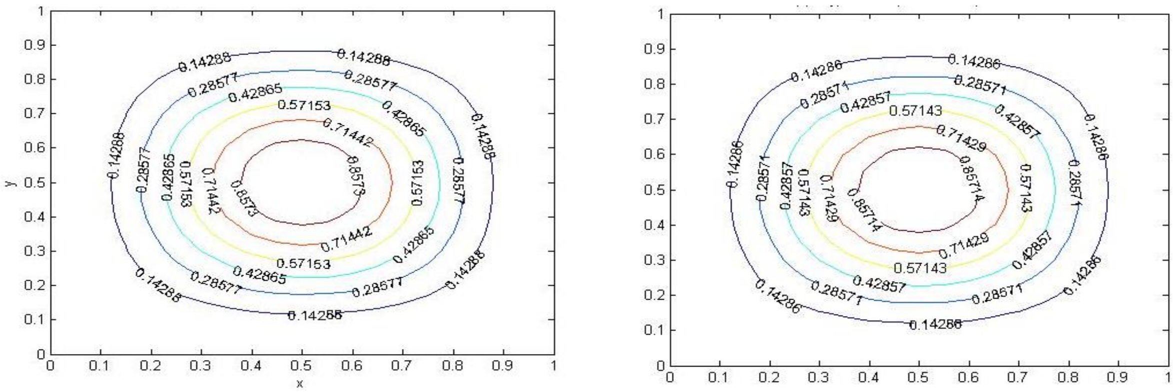
Uyurma tenglamasini Pismen-Rekford va tok funksiyasini yuqori relaksatsiya hamda optimal parametrli o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasi bilan yechganda olingan natijalar

№	Taqribiy yechim PR va YuR	Taqribiy yechim PR va O‘YIS	Aniq yechim	Xatolik optimal parametrli PR va O‘YIS	Xatolik PR va YuR
1	-11,2675	-11,2785	-11,2795	0,001	0,012
2	-2,80779	-2,81827	-2,81989	0,00162	0,0121
3	5,6519	5,64194	5,63977	0,00217	0,01213
4	14,1116	14,1022	14,0994	0,0028	0,0122
5	22,5713	22,5624	22,5591	0,0033	0,0122
6	31,031	31,0226	31,0188	0,0038	0,0122



a) sonli yechim b) aniq yechim

3-rasm. Uyurma tenglamasini Pismen-Rekford va tok funksiyasini yuqori relaksatsiya metodi bilan yechganda olingan natijalar



a) sonli yechim b) aniq yechim

4-rasm. Uyurma tenglamasini Pismen-Rekford, tok funksiyasini optimal parametrli iteratsiya sxemasi bilan yechganda olingan natijalar

3-jadval.

Uyurma tenglamasini Pismen-Rekford va tok funksiyasini yuqori relaksatsiya hamda optimal parametrli o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasi bilan yechganda olingan natijalar

№	Taqribiy yechim PR va YuR	Taqribiy yechim PR va O‘YIS	Aniq yechim	Xatolik optimal parametrli PR va O‘YIS	Xatolik PR va YuR
1	0,13374	0,14288	0,14288	0	0,00914
2	0,26747	0,28577	0,28571	6E-05	0,01824
3	0,40121	0,42865	0,42857	8E-05	0,02736
4	0,53494	0,57153	0,57143	1E-04	0,03649
5	0,66868	0,71442	0,71429	0,00013	0,04561
6	0,80242	0,8573	0,85714	0,00016	0,05472

Rasmlar va jadvallardagi ma’lumotlardan ko‘rinadiki, uyurma va tok funksiyasi masalalarini sonli yechishda o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya sxemasini optimal iteratsiya parametrlari bilan qo‘llash boshqa iteratsiya sxemalariga nisbatan samarali hisoblanadi.

XULOSALAR

Dissertatsiya ishi ikki o‘lchamli Navye-Stoks tenglamalarini chiziqli bo‘lmagan evolyutsion uyurma tenglamasi va elliptik tipdagi tok funksiyasi tizimida sonli modellashtirishga bag`ishlangan.

Dissertatsiya ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. O‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodining optimal iteratsiya parametrlari bilan yaqinlashishini ta’minlovchi teoremalar isbotlangan.

2. Bir o‘lchamli uyurma tenglamasi manba hadini va qovushqoqlik koeffitsiyentini topishning teskari masalasi yechimini yuqori aniqlik bilan topish algoritmi ishlab chiqilgan.

3. Puasson tenglamasini optimal iteratsiya parametrlariga ega bo‘lgan o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsiya metodi bilan yechish uchun sinov funksiyalari metodidan foydalangan holda hisoblash eksperimenti o‘tkazilgan.

4. Uyurma-tok funksiyasi tenglamalari sistemasini sonli yechishda mavjud metodlarga nisbatan juda kam iteratsiya talab qiladigan samarali hisoblash metodi yaratilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГУЛОМКОДИРОВ КОМИЛЖОН АЛИШЕРОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В СИСТЕМЕ ВИХРЯ - ФУНКЦИЯ ТОКА

05.01.07-Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ – 2022

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2021.1.PhD/FM591.

Диссертация выполнена в Термезскском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Нормуродов Чори Бегалиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Садуллаева Шаҳло Азимбаевна** доктор физико-математических наук, доцент
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «__» _______ 2022 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «__» _______ 2022 года.
(протокол рассылки № __ от «__» _______ 20__ года).

М. Арипов
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Б.Ф.Абдурахимов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней д.ф.-м.н., профессор,

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования проводимых во всем мире в основном сводятся к математическому моделированию систем связанных с решением дифференциальных уравнений описываемых движение жидкостей и газов, численным решением нелинейных уравнений, применением экономичных и эффективных методов. В том числе, разработана методов решения уравнений Навье-Стокса служит важным фактором при развитии ряда направлений связанные с течением жидкостей и газов. Уравнения Навье-Стокса являются системой нелинейных дифференциальных уравнений, которые описывают движения сплошных сред (жидкостей или газов) с учётом их свойств вязкости. Посколько аналитические решения уравнений Навье-Стокса до настоящего времени не найдены, то по этой причине, разработка численных алгоритмов решения этих уравнений и создание комплекса программ являются одной из важных задач стоящих перед прикладной математики.

В настоящее время в мире ведутся широкие исследования по математическому моделированию уравнений Навье-Стокса в системе нелинейных эволюционных уравнений для вихря и эллиптических уравнений для функци тока. Высокоточное и эффективное решение уравнений Навье-Стокса важно для развития всех областей, связанных с течением жидкостей и газов, включая водное хозяйство, нефтегазовую промышленность, аэродинамику, метеорологию и многие другие области. По этой причине численное решение уравнений Навье-Стокса и создание программных комплексов имеющих удобный интерфейс ориентированных для широкого круга пользователей являются целенаправленным научным исследованием.

В нашей стране уделяется большое внимание к научным и практическим применениям актуальных направлений фундаментальных наук, разработка численно-аналитических методов решения задач в областях динамика жидкостей и газов, гидродинамика, аэродинамика. В частности, достигнуты значительные успехи в математическом моделирование нелинейных эволюционных процессов и разработке высокоточных и эффективных приближенных методов. Одной из основных задач института Математики имени В.И.Романовского АН РУз является проведение научных исследований по приоритетным направлениям «Функционального анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, математической физики, математическому моделированию, вычислительной математики и дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики»[1]. В связи с этим важным является создание эффективных методов решения уравнений Навье-Стокса, описывающих движение жидкостей и газов в системе вихря-функции тока, построение алгоритмов численного моделирования нелинейных процессов, создание программного обеспечения.

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №-УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №-ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №-ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №-ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и № ПП-4851 от 6 октября 2020 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы образования в области информационных технологий, развитию и интеграции научных исследований с IT-индустрией», в докладе Президента Республики Узбекистан Ш.М.Мирзиёева 24 мая 2019 года на встрече с представителями науки и образования в Национальном университете Узбекистана, в речи на форуме молодёжи Узбекистана от 25 декабря 2020 года, Послании Президента Республики Узбекистан к Олий мажлис от 28 декабря 2020 года, а также в других нормативно-правовых документах данной сферы.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Уравнения Навье-Стокса впервые было введено в науку в 1822 г. французским математиком Л. Навье. В 1845 г. Дж. Стокс получил полную форму этих уравнений, изучая стационарное движение несжимаемых вязких жидкостей в сплошных средах с использованием закона сохранения импульса и массы.

Построение аналитических решений уравнения Навье-Стокса — проблема тысячелетия, над которой работают ученые всего мира.

М.Й. Балаганский и Ю.Н. Захаров рассмотрели численное решение уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока путем многокомпонентной оптимизации итерационной схемы.

Для несжимаемых вязких жидкостей метод решения уравнений Навье-Стокса с использованием экономичных разностных схем по физическим переменным был предложен В. М. Ковеньей. Данная разностная схема основана на разделении дифференциальных уравнений по физическим процессам. Предложенный алгоритм апробирован для конвективных перемещений в плоскости и течения в замкнутой области с подогревом одной границы.

В исследованиях Ф.Н.Ясинский и А.В. Евсеева предложен метод использования графических ускорителей для моделирования системы уравнений Навье-Стокса, описывающей движение несжимаемых вязких жидкостей.

А.Л.Зуйков рассмотрел вопросы аналитического исследования структуры неравномерного скользящего течения, стабилизировавшегося в цилиндрическом канале. В данном исследовании структура течения описывается уравнением Лапласа для азимутальной скорости кривой и уравнением Пуассона для функции тока. Распределение азимутального кручения и функции тока выражается в виде ряда Фурье-Бесселя.

Трехмерные уравнения Навье-Стокса могут быть применены к различным открытым и замкнутым водоемам относительно обычных физических величин, в том числе к различным географическим водоемам, численное моделирование движение жидкости рассмотрел В.Н.Баклагина.

В работе Ю.Н.Качалкиной рассматривается плавное ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости в системе вихря-функция тока в квадратной полости.

В.Е.Камюшин, О.С.Майорова изучили алгоритм решения двумерных уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока. Алгоритм основан на конечно-разностных схемах, в которых итерационные члены уравнения смещения выводятся из нижнего временного слоя, а диссипативные члены — из верхнего временного слоя. Исследована устойчивость линейного подхода этого алгоритма и показано преимущество моделирования течений при малых значениях числа Рейнольдса.

Кроме того, исследованием уравнений Навье-Стокса занимались зарубежные ученые Т. Кояма, Венчао Ху, Дитмар Кронер, Антуан Лежай, Лижен Чен, Никлас Фен, К. Митцаль, Цзя Чжао, Ф. Масса, Х. Чо., Дж.Чан., М.Данис, Дж.Марти, М.Аббасзаде, Д.Ирисарри, В.Бошери. Эти исследователи использовали решеточную модель Больцмана при решении уравнений Навье-Стокса, метод Галёркина и его усовершенствованные виды, аппроксимацию формулы Феймана-Кау, усовершенствованный метод со сдвигами по времени, метод конечных элементов ориентированный для нахождения, полунеявного решения основанного на многоскоростном временном шаге, обычную численную экстраполяцию, численный метод рассчитанный для вычисления условий перехода чисто неявном и точном виде: явно-неявный вариант метода конечных элементов, локальной радиальный метода конечных разностей, эффективный метод второго порядка с конечным объёмом при произвольных значениях числа Маха, были использованы многие другие вычислительные схемы и методы в качестве эффективного метода.

Результаты вышеприведенных исследований показывают, что практически отсутствуют научные исследования, направленные на оптимизацию численного моделирования уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока. Исследования в этой области позволяют разработать эффективные методы решения более сложных трехмерных уравнений Навье-Стокса и являются одним из актуальных направлений исследования.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.

Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ Термезского государственного университета в рамках программы «Математическое моделирование, численные методы и технология программирования».

Целью исследования является разработка эффективных методов, алгоритмов и программного обеспечения для уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока.

Задачи исследования:

разработка математической модели описывающие уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока;

доказательство сходимости двухслойной итерационной схемы переменных направлений на множестве оптимальных итерационных параметров;

разработка алгоритма решения и программного обеспечения функции тока, описываемое уравнением Пуассона, с помощью итерационной схемы переменных направлений;

решение обратной задачи для определения функции источника и коэффициента кинематической вязкости для одномерного уравнения вихря;

анализ методов численного решения двумерного уравнения вихря, а также разработка эффективного и высокоточного метода и создание программного обеспечения.

Объектом исследования является математическая модель уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока.

Предмет исследования

Численное моделирование, разработка алгоритма и программного обеспечения уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока.

Методы исследования. В исследованиях использовались методы математического и численного моделирования, теория разностных операторов, функционального анализа, теория аппроксимации, двухслойных итерационных схем, а также методы вычислительного эксперимента.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

разработана адекватная математическая модель для описания уравнений Навье - Стокса в системе вихря-функция тока;

доказаны теоремы, обеспечивающие сходимость итерационного метода переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами;

разработан метод решения уравнения Пуассона для функции тока с помощью итерационного метода переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами;

разработаны высокоточные методы для нахождения решений прямой задачи и задачи восстановления функции источника и коэффициента кинематической вязкости для обратной задачи одномерного уравнения вихря;

разработан итерационный метод переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами для высокоточного и эффективного решения уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

Проанализированы существующие математические модели, описывающие уравнения Навье-Стокса и разработаны эффективные алгоритмы их вычисления;

разработан метод, алгоритм и программное обеспечение для нахождения решений уравнений Навье-Стокса с высокой точностью в системе вихря-функция тока и эффективностью.

Достоверность результатов исследования. Обоснован с применением методов прикладной математике, вычислительной гидродинамике, теория разностных схем, итерационной схемы переменных направлений, метод пробных функций, использованием метода прогонки, сравнение решений уравнений Навье-Стокса с численными и экспериментальными результатами, полученными другими авторами, оценкой методов решения этих уравнений в системе вихря-функция тока с точки зрения высокой точности и эффективности.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что с помощью численного моделирования уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока появлением возможности анализировать природу и динамику изменения решения этих уравнений.

Практическая значимость исследования заключается усовершенствованием математической модели для численного решения движения несжимаемых вязких жидкостей в системе вихря-функция тока, с возможностью применения вычислительных алгоритмов и программного обеспечения для решения прямых и обратных задач механики жидкостей и гидродинамики, анализом движения несжимаемых вязких жидкостей, качественное и количественное оценки процессов в области гидродинамики.

Внедрение результатов исследования.

На основе усовершенствованных моделей, алгоритмов и программного обеспечения для численного решения уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока:

алгоритмы решения прямых и обратных задач уравнений Навье-Стокса в виде функции тока эллиптического типа и вихря параболического типа были использованы в научно-исследовательском гранте А-13-38 «Теоретические и численные исследования прямых и обратных задач динамики нелинейных волн для двухфазной среды» для решения параболических уравнений с малом параметром при старшей производной (справка № 89-03-4862 от 20 ноября 2020 года Министерства высшего и среднего образования Республики Узбекистан).В результате чего разработаны схемы численного расчёта параболических уравнений с малым параметром при старшей производной.

Численное моделирование уравнений Навье-Стокса в виде функций тока эллиптического типа и вихря параболического типа с применением алгоритма решения по итерационной схемы переменных направлений с выбором оптимальных итерационных параметров были использованы в научно-исследовательском гранте А-13-38 «Теоретические и численные исследования прямых и обратных задач динамики нелинейных волн для двухфазной среды» при численном моделировании уравнений Навье-Стокса, создание компьютерной программы и при проведение широкомасштабного вычислительного эксперимента (справка № 89-03-4862 от 20 ноября 2020 года Министерства высшего и среднего образования Республики Узбекистан). В результате для численного моделирования уравнений Навье-Стокса в виде функции тока эллиптического типа и эволюционного уравнения вихря создан возможность разработка алгоритма и компьютерной программы решения с применением итерационной схемы переменных направлений с выбором оптимальных итерационных параметров.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 5 международных и 4 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 21 научных работ, из них 6 научных статей, в том числе 2 в зарубежных и 4 в республиканских журналах, рекомендованных высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций. Получены 4 свидетельств о регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 102 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Система вихря-функция тока для уравнений Навье-Стокса**», приведены необходимые предварительные сведения для изложения основных результатов диссертации, физическая природа уравнений Навье-Стокса, одномерные и двумерные виды уравнений в системе вихря-функция тока, приведено постановка начальных и граничных условий. Доказаны теоремы которые обеспечивают сходимость итерационной схемы переменных направлений для функции тока.

В параграфе 1.1 приведено безразмерный общий вид уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0\,, \tag{3}$$

после проведения несложных математических выкладок и вводя некоторые обозначения система уравнений (1)-(3) сводится к систему уравнений для вихря-функция тока.

В параграфе 1.2 приведены одномерные уравнения для функции тока и вихря, постановка начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\psi\frac{\partial \omega}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+Q(t,x),\ \ 0<x<1,\ 0<t<T, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}=-\omega,\ \ 0<x<1,\ 0<t\le T \tag{5}$$

здесь x – пространственная координата, t - время, ω- вихрь, ψ - функция тока, $Q(t,x)$ - известная функция.

В параграфе 1.3 приведен постановка дифференциальной задачи для двумерного уравнения Навье-Стокса в системе вихря- функция тока:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)+Q\left(t,x,y\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\omega, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=u,\ \ \frac{\partial \psi}{\partial x}=-v,\ \ \omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8}$$

В параграфе 1.4 доказаны теоремы и лемма которые обеспечивают сходимость итерационной схемы переменных направлений для функции тока.

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $\bar{G}=\{0\le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$ с границей Γ:

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\omega(x,y),\ (x,y)\in G, \tag{9}$$

$$\psi\big|_{\Gamma}=\mu(x,y) \tag{10}$$

Введем в области $\bar{G}=G+\Gamma$ прямоугольную сетку с шагами h_1 и h_2:

$$\overline{\Omega_h}=\Omega_h+\gamma_h=\{(x_i,y_j)=\left(ih_1,jh_2\right)\in\bar{G},\ i=0,1,...,N_1,\ j=0,1,...,N_2,$$
$$h_1=l_1/N_1,\ h_2=l_2/N_2\}.$$

Пусть $\gamma_h=\left\{x_{i_1 i_2}\in\Gamma\right\}$- граничные узлы сетки. Ставятся разностная задача Дирихле в сеточной области $\bar{\Omega}_h$ в прямоугольнике $\bar{G}=\{0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}$ для дифференциальной задачи (9)-(10):

$$\Lambda\psi=\Lambda_1\psi+\Lambda_2\psi=-\omega(x,y),\ \ x\in\Omega_h, \tag{11}$$

$$\psi\big|_{\gamma_h} = \mu(x,y), \tag{12}$$

где $\Lambda_\alpha = \psi_{x_\alpha x_\alpha}$ - разностные операторы второго порядка аппроксимирующие частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(\alpha = 1,2)$, а ψ - разностное решение.

Для решения разностной задачи (11) в качестве итерационной схемы можно рассмотреть схему переменных направлений. Она имеет вид:

$$\frac{\psi^{j+\frac{1}{2}} - \psi^j}{\tau_{j+1}^{(1)}} = \Lambda_1 \psi^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \psi^j + \omega(x,y),\ x \in \Omega_h, \tag{13}$$

$$\psi^{j+\frac{1}{2}}\Big|_{\gamma_h} = \mu(x,y),$$

$$\frac{\psi^{j+1} - \psi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau_{j+1}^{(2)}} = \Lambda_1 \psi^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \psi^{j+1} + \omega(x,y),\ x \in \Omega_h, \tag{14}$$

$$\psi^{j+1}\Big|_{\gamma_h} = \mu(x,y),\ j = 0,1,2,...,$$

при произвольных начальных данных $\psi^0 = \psi(x,0)$.

Здесь j - номер итерации, $\psi^{j+\frac{1}{2}}$ - промежуточная итерация (подитерация), $\tau_{j+1}^{(1)} > 0$ и $\tau_{j+1}^{(2)} > 0$ - итерационные параметры, подлежащие выбору из условия минимума итераций.

Переход от j- й итерации к $(j+1)$ - й итерации достигается последовательным применением метода прогонки вдоль строк и вдоль столбцов для трехточечных уравнений

$$\psi^{j+\frac{1}{2}} - \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_1 \psi^{j+\frac{1}{2}} = F^j,\ F^j = \psi^j + \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_2 \psi^j + \tau_{j+1}^{(1)} \omega \tag{15}$$

(вдоль строк) и

$$\psi^{j+1} - \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_2 \psi^{j+1} = F^{j+\frac{1}{2}},\ F^{j+\frac{1}{2}} = \psi^{j+\frac{1}{2}} + \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_1 \psi^{j+\frac{1}{2}} + \tau_{j+1}^{(2)} \omega \tag{16}$$

(вдоль столбцов).

Таким образом, для вычисления одной итерации требуется $\theta\left(1/(h_1 h_2)\right)$ или $\theta(N_1 \times N_2)$ действий на один узел сетки Ω_h.

Итерационный процесс (13)-(14) будем называть итерационным методом переменных направлений (ИМПН).

Теорема 1. Итерационный метод переменных направлений имеет самосопряженный разрешающий оператор $T_n^* = T_n = \prod_{j=1}^{n} S_j$, где

$S_j = S_j^{(1)} S_j^{(2)},\ S_j^{(1)} = \left(E + \tau_j^{(1)} A_1\right)^{-1} \left(E - \tau_j^{(2)} A_1\right),\ S_j^{(2)} = \left(E + \tau_j^{(2)} A_2\right)^{-1} \left(E - \tau_j^{(1)} A_2\right),$ а $\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}$ - набор итерационных параметров.

Рассматривается операторное уравнение

$$Au = f,\ A = A_1 + A_2$$

где $A: H \to H$, H - Гильбертское пространство со скалярным произведением (y, ϑ) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Операторы A_1 и A_2 перестановочны, $A_1 A_2 = A_2 A_1$, так как рассматривается прямоугольная область. Спектры операторов A_1 и A_2, расположены на разных отрезках и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &A_\alpha^* = A_\alpha,\ \delta_\alpha E \le A_\alpha \le \Delta_\alpha E,\ \delta_\alpha > 0,\ \alpha = 1,2, \\ &\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha},\ \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha},\ \alpha = 1,2. \end{aligned} \tag{17}$$

Лемма. Пусть выполнены условия (17). Тогда операторы A_1 и A_2 можно заменить на операторы A_1' и A_2', у которых границы спектров совпадают

$$\eta E \le A_\alpha' \le E,\ \alpha = 1,2,\ \eta > 0 \tag{18}$$

причем

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(qE - rA_1'\right)^{-1} \left(A_1' - pE\right), \\ A_2 &= \left(qE + rA_2'\right)^{-1} \left(A_2' + pE\right) \end{aligned} \tag{19}$$

где неизвестные постоянные p, q, r, η выражаются формулами:

$$\begin{aligned} &t = \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_1 + \delta_2)(\Delta_2 + \delta_1)}},\ \kappa = \frac{(\Delta_1 - \delta_1)\Delta_2}{(\Delta_2 + \delta_1)\Delta_1} \\ &\eta = \frac{1-t}{1+t},\ p = \frac{\kappa - t}{\kappa + t},\ r = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 + (\Delta_1 + \Delta_2) p}{2\Delta_1 \Delta_2},\ q = r + \frac{1-p}{\Delta_1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Оценивается норма разрешающего оператора T_n и определяется число итераций $n(\varepsilon)$ обеспечивающая заданную точность $\varepsilon > 0$ итерационного метода переменных направлений (ИМПН).

Теорема 2. Пусть задана точность $\varepsilon > 0$ итерационного метода и известны границы спектров $\delta_\alpha, \Delta_\alpha$ операторов A_α $(\alpha = 1,2)$, а также выполнены условия леммы 1. Тогда для итерационного метода переменных направлений (ИМПН) оптимальные итерационные параметры определяются следующим образом:

$$\tau_j^{(1)} = \frac{q\omega_j + r}{1 + \omega_j p},\ \tau_j^{(2)} = \frac{q\omega_j - r}{1 - \omega_j p} \tag{21}$$

где

$$\omega_j = \frac{(1 + 2\theta)(1 + \theta^\sigma)}{2\theta^{\frac{\sigma}{2}} \left(1 + \theta^{1-\sigma} + \theta^{1+\sigma}\right)},\ j = 1, 2, \ldots, n(\varepsilon)$$

$$\theta = \frac{1}{16}\eta^2\left(1+\frac{1}{2}\eta^2\right),\ \sigma = \frac{2j-1}{2n(\varepsilon)} \tag{22}$$

$$\|Ay_n - f\| \le \|T_n\|\|Ay_0 - f\|,$$

и для выполнения неравенства

$$\|Ay_n - f\| \le \varepsilon\|Ay_0 - f\|,\ \|T_n\| \le \varepsilon \tag{23}$$

достаточно выполнение n итерации, где

$$n \ge n(\varepsilon),\ n(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2}\ln\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{4}{\eta}. \tag{24}$$

Вторая глава диссертации называется **«Прямые и обратные задачи для одномерного уравнения вихря-функция тока»**, в нем представлены методы, алгоритмы и результаты расчетов для решения прямых и обратных задач для одномерных уравнений вихря-функция тока.

В параграфе 2.1 приведено численное моделирование одномерных уравнений вихря-функция тока.

Система уравнений (4), (5) рассматривается при следующих начальных и граничных условиях:

$$\psi(0,x) = 0,\ \omega(0,x) = 0, \tag{25}$$

$$\psi(t,0) = \psi(t,1) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(t,1) = 0. \tag{26}$$

В качестве пробной функции для функции источника выбирается следующая функция $Q(t,x) = Q(x) = 24 + 12x^2\left(1-x^2\right)(1-2x)$. Для решения уравнения (4) -(5) на отрезке [0,1] вводится равномерная сетка $\Omega_h : \{x_i = ih,\ i = 0,1...,M,\ h = 1/M\}$ и $\Omega_\tau : \{t_k = k\tau,\ k = 0,1,...,\tau = 1/N\}$ по направлениям x и t, соответственно. На сетке $\Omega = \Omega_h \times \Omega_\tau$ задача (4)-(5), (25)-(26) аппроксимируется по неявной схеме и решается методом прогонки.

В параграфе 2.2 приведено решение обратной задачи идентификации источника для одномерного уравнение вихря.

Дифференциальное уравнение для одномерного вихря-функция тока имеют вид (4) - (5). Для этих уравнений ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$\psi(0,x) = 0,\ \omega(0,x) = 0, \tag{27}$$

$$\psi(t,0) = \psi(t,1) = 0,\ \frac{\partial\psi(t,0)}{\partial x} = 0, \tag{28}$$

$$\omega(t,0) = -\frac{\partial^2\psi(t,0)}{\partial x^2},\ \omega(t,1) = -\frac{\partial^2\psi(t,1)}{\partial x^2}. \tag{29}$$

Для данной задачи, требуется идентификации неизвестной функции $Q(t,x)$ с использованием известных функций $\omega(x,t)$ и $\psi(x,t)$ в уравнении (4). В этом случае считается, что функция $Q(t,x)$ представляется в виде:

$$Q(t,x) = Q_0\,\eta(t)\,\varphi(x), \tag{30}$$

где $\varphi(x)$ заданная функция, а неизвестной функцией является зависимость источника от времени – функции $\eta(t)$ в представлении (30). Эта зависимость восстанавливается по дополнительному наблюдению вихря $\omega(x,t)$ в некоторой внутренней точке $0 < x^* < 1$:

$$\omega(x^*,t) = z(t). \tag{31}$$

В этом параграфе приведены результаты численных экспериментов для задаче (4)-(5), (27)-(28), а правая часть этих уравнений рассматривается при следующих зависимостях:

$$\varphi(x) = \sin\pi x,\ \ 0 \le x \le 1,$$

$$\eta(t) = t^2 + 1,\ \ 0 \le t \le T = 0.4,\ Q_0 = 100.$$

Поставленная задача решается в разностной сетке состоящих из узлов M=400, N = 21.

В параграфе 2.3 численно моделировано обратная задача определения коэффициента кинематической вязкости для уравнения вихря.

В третьей главе диссертации названной **«Численное моделирование двумерных уравнений вихря-функция тока»,** приведены численное решение двумерной задачи рассчитанные итерационным методом переменных направлений, и полученные результаты сравниваются с выбранной пробной функцией (с точным решением).

В параграфе 3.1 осуществлено численное решение уравнения для функции тока путем выбора оптимальных итерационных параметров.

Уравнение Пуассона для функции тока имеет вид:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = -\omega(x_1,x_2),\ 0 < x_\alpha < l_\alpha\ \ \alpha = 1,2, \tag{32}$$

$$\psi|_\Gamma = \mu(x_1,x_2). \tag{33}$$

Дифференциальная задача (32)-(33) определены в прямоугольной области $\bar{G} = G + \Gamma = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$. Здесь Γ - граница области $\bar{G}$,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j$ - дифференциальный оператор.

В области $\bar{G}$, вводится разностная сетка:

$$\bar{\Omega}_{h_1 h_2} = \begin{Bmatrix} (x_{1_i}, x_{2_i}),\ x_{1_i} = ih_1,\ i = 0..N_1,\ h_1 = 1/N_1 \\ x_{2_i} = jh_2,\ j = 0..N_2,\ h_2 = 1/N_2 \end{Bmatrix}.$$

В разностной сетке ставится разностная задача соответствующая дифференциальной задаче (32)-(33):

$$\Lambda\psi = \Lambda_1\psi + \Lambda_2\psi = -\omega(x_1,x_2),\ \ x \in \Omega_h, \tag{34}$$

$$\psi|_{\gamma_h} = \mu(x_1,x_2), \tag{35}$$

$$\Lambda_\alpha \psi = \psi_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\psi(x_\alpha - h_\alpha) - 2\psi(x_\alpha) + \psi(x_\alpha + h_\alpha)}{h_\alpha^2}, \ \alpha = 1,2,$$

здесь фиксированный индекс для простоты изложения не указывается.
$\bar{\Omega}_h = \Omega_h + \gamma_h = \{x_i = (ih_1, jh_2) \in \bar{G},\ i = 0,1,...,N_1,\ j = 0,1,...,N_2$
Для решения разностной задачи (34)-(35) используется итерационная схема переменных направлений:

$$\frac{\psi^{k+\frac{1}{2}} - \psi^k}{\tau_{k+1}^{(1)}} = \Lambda_1 \psi^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \psi^k + f(x),\ f(x) = \omega(x),\ \psi^{k+\frac{1}{2}}\Big|_{\gamma_h} = \mu(x),\ x \in \Omega_h,$$
$$\frac{\psi^{k+1} - \psi^{k+\frac{1}{2}}}{\tau_{k+1}^{(2)}} = \Lambda_1 \psi^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \psi^{k+1} + f(x),\ f(x) = \omega(x),\ \psi^{k+1}\Big|_{\gamma_h} = \mu(x),\ x \in \Omega_h, \tag{36}$$

здесь $\psi^0 = \psi(x,0)$ - произвольно заданное начальное приближение,
k- номер итерации, $\psi^{k+1/2}$ - промежуточная итерация, $\tau_{k+1}^{(1)} > 0$ и $\tau_{k+1}^{(2)} > 0$ итерационные параметры, подлежащие выбору из условия минимума итераций. Переход от k- й итерации к $(k+1)$ - й итерации достигается последовательным применением метода прогонки вдоль строк и вдоль столбцов:
вдоль строк

$$\psi^{k+\frac{1}{2}} - \tau_{k+1}^{(1)} \Lambda_1 \psi^{k+\frac{1}{2}} = F^k, \tag{37}$$

вдоль столбцов

$$\psi^{k+1} - \tau_{k+1}^{(2)} \Lambda_2 \psi^{k+1} = F^{k+1/2}, \tag{38}$$

здесь, $F^k = \psi^k + \tau_{k+1}^{(1)} \Lambda_2 \psi^k + \tau_{k+1}^{(1)} f$, $F^{k+1/2} = \psi^{k+1/2} + \tau_{k+1}^{(2)} \Lambda_1 \psi^{k+1/2} + \tau_{k+1}^{(2)} f$.
Можно перейти к операторно-разностным схемам, вводя, как обычно, пространство $H = \dot{\Omega}$ сеточных функций, заданных на $\bar{\Omega}_h$ и равных нулю на границе сетки γ_h, операторы $A_1\psi = -\Lambda_1\psi,\ A_2\psi = -\Lambda_2\psi$ для любых $h, y \in \dot{\Omega}$. Введенные таким образом операторы A_1 и A_2 обладают следующими свойствами:

$$A_\alpha^* = A_\alpha,\ \delta_\alpha E \le A_\alpha \le \Delta_\alpha E,\ \delta_\alpha > 0,\ \alpha = 1,2$$
$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha},\ \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha},\ \alpha = 1,2 \tag{39}$$

Для численного решения системы уравнений (37)–(38) сначала вычисляются постоянные (20), а по формуле (21) выбираются оптимальные итерационные параметры $\tau_{k+1}^{(1)}$ и $\tau_{k+1}^{(2)}$. Далее определяется количество итераций $n = n(\varepsilon)$, достаточное для обеспечения точности $\varepsilon > 0$, по формуле (24).

Для проведения вычислительного эксперимента функция $\psi(x_1, x_2) = e^{A(x_1+x_2)}$ выбирается в качестве пробной функции для дифференциальной задачи (32)-(33). Результаты численных расчётов по сравнению разностных и точных решений (пробная функция) иллюстрируются в табличном и графическом виде.

В параграфе 3.2 проведено численное решение уравнения вихря и функции тока с использованием схемы Писмена-Рекфорда и итерационная схема переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами.

Система уравнений Навье-Стокса в системе вихря – функция тока имеют следующий вид, как показано в главе I:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) + Q(t,x,y), \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega, \tag{41}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u,\ \ \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\vartheta,\ \ \omega = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{42}$$

Здесь $x,\ y$ – пространственные координаты, t – время, u и ϑ – проекция вектора скорости на оси координат, ν – коэффициент кинематической вязкости, ψ, ω – функция тока и вихря соответсвенно, Q – известная функция.

Для системы (40)-(41) в области $D:\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]\}$ ставятся следующие краевые условия:

$$\psi\big|_{x=0} = 0,\quad \psi\big|_{x=1} = 0,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=1} = 0,\quad 0 \le y \le 1, \tag{43}$$

$$\psi\big|_{y=0} = 0,\ \ \psi\big|_{y=1} = 0,\ \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{x=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{x=1} = 0,\ \ 0 \le x \le 1. \tag{44}$$

начальные условия имеют вид:

$$\psi(0,x,y) = 0,\ \ \omega(0,x,y) = 0 \tag{45}$$

В области $\bar{D}$ вводятся равномерная разностная сетка по переменным x и y:

$$\Omega_h = \left\{x_i = ih,\ \ y_j = jh,\ \ 0 \le i, j \le N,\ \ h = \frac{1}{N}\right\}$$

и по времени t:

$$\Omega_\tau = \{t_k = k\tau,\ \ k = 0,1,...\}.$$

Система дифференциальных уравнений (40)-(41) аппроксимируется на разностной сетки $\Omega = \Omega_h \times \Omega_\tau$.

Переход от слоя k к слою $(k+1)$ осуществляется в два этапа для численного решения уравнения вихря по схеме Писмена-Рекфорда. На первом этапе определяют промежуточные значения $\omega_{i,j}^{k+1/2}$ из следующий системы уравнений:

$$\frac{\omega_{i,j}^{k+1/2}-\omega_{i,j}^{k}}{0,5\tau}+\frac{\omega_{i+1,j}^{k+1/2}-\omega_{i-1,j}^{k+1/2}}{2h}\frac{\psi_{i,j+1}^{k}-\psi_{i,j-1}^{k}}{2h}-$$

$$-\frac{\omega_{i,j+1}^{k}-\omega_{i,j-1}^{k}}{2h}\frac{\psi_{i+1,j}^{k}-\psi_{i-1,j}^{k}}{2h}=\frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i+1,j}^{k+1/2}-2\omega_{i,j}^{k+1/2}+\omega_{i-1,j}^{k+1/2}\right)+ \tag{46}$$

$$+\frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i,j+1}^{k}-2\omega_{i,j}^{k}+\omega_{i,j-1}^{k}\right)+Q\left(t_{k+1/2},x_i,y_i\right),\quad i=\overline{1,N-1},$$

а на втором этапе, пользуясь найденными значениями $\omega_{i,j}^{k+1/2}$, определяются значения $\omega_{i,j}^{k+1}$ из системы уравнений:

$$\frac{\omega_{i,j}^{k+1}-\omega_{i,j}^{k+1/2}}{0,5\tau}+\frac{\omega_{i+1,j}^{k+1/2}-\omega_{i-1,j}^{k+1/2}}{2h}\frac{\psi_{i,j+1}^{k}-\psi_{i,j-1}^{k}}{2h}-$$

$$-\frac{\omega_{i,j+1}^{k+1}-\omega_{i,j-1}^{k+1}}{2h}\frac{\psi_{i+1,j}^{k}-\psi_{i-1,j}^{k}}{2h}=\frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i+1,j}^{k+1/2}-2\omega_{i,j}^{k+1/2}+\omega_{i-1,j}^{k+1/2}\right)+ \tag{47}$$

$$+\frac{\nu}{h^2}\left(\omega_{i,j+1}^{k+1}-2\omega_{i,j}^{k+1}+\omega_{i,j-1}^{k+1}\right)+Q(t_{k+1},x_i,y_i),\quad i=\overline{1,N-1}.$$

Уравнения (46) и (47) решаются методом прогонки. Дифференциальное уравнение (41) аппроксимируется и решается методом ИМПН, описанным в параграфе 3.1. Каждое из найденных ψ_{ij}^{k} решений используется для решения уравнения (47) методом прогонки.

В этом разделе эффективность ИМПН иллюстрирована путем сравнения итерационных методов с другими методами и представлены в табличном и графическом виде.

Таблица 1.

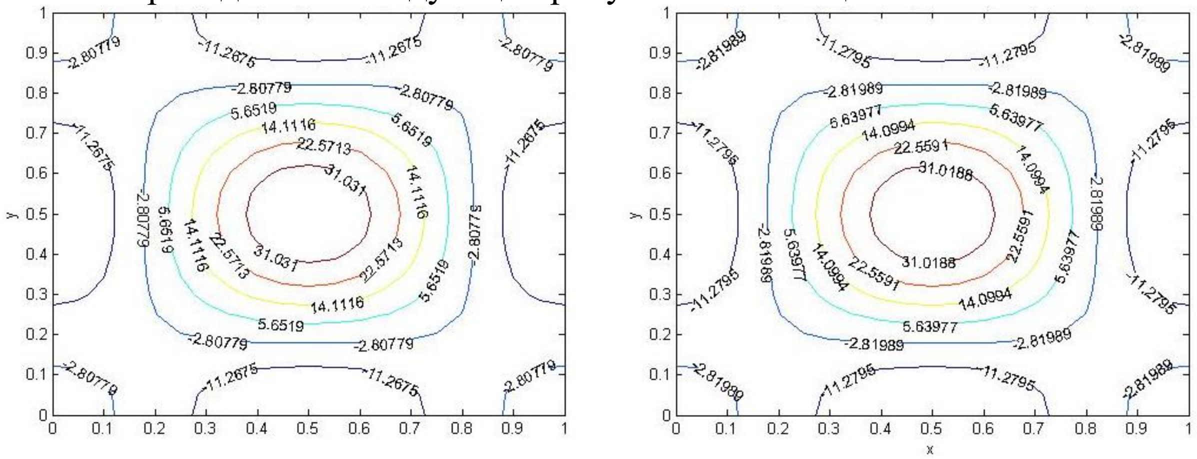
Требуемое число итераций для обеспечения точности ε в ИМПН и в других итерационных методах.

Точность ε / Итерационный методы	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
ИМПН	5,437918	6,947587	8,457256	9,966925
Итерационный метод верхней релаксации	87,95487	117,2732	146,5914	175,9097
Итерационный метод Зейделя	279,9773	373,3031	466,6288	559,9546
Метод простой итерации	559,9546	746,6061	933,2576	1119,909

Из таблицы видно, что при решение уравнений Навье-Стокса в системе вихря-функция тока для обеспечения точности $\varepsilon=0,001$ ИМПН требует 5 итераций, в то же время итерационный метод верхней релаксации требует 88 итераций, итерационный метод Зейделя 280 итераций, а метод простой итерации требует 560 итераций. Аналогичный, но более сильный эффект наблюдается при других значениях параметра ε.

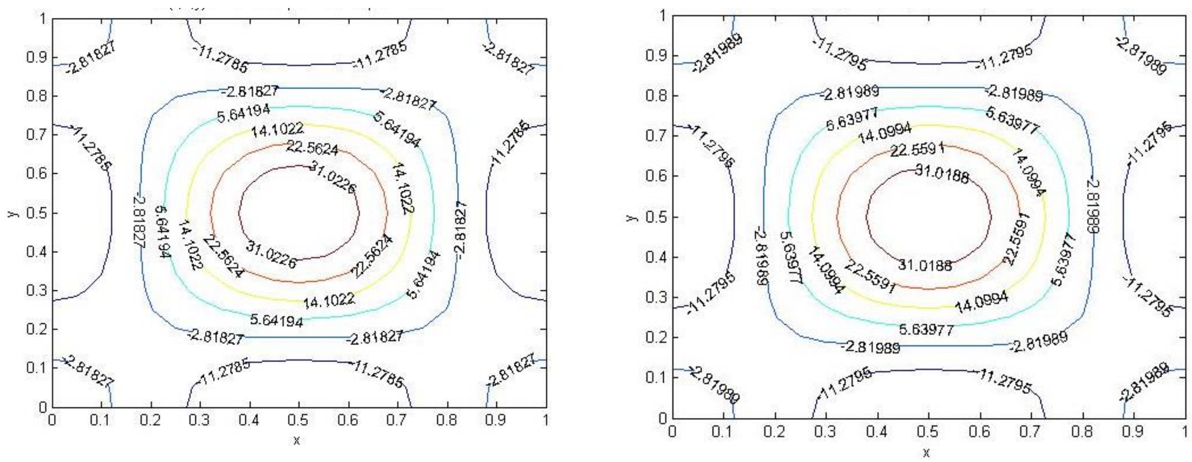
В параграфе 3.3 показан алгоритм решения задачи вихря-функция тока и структура компьютерной программы.

В параграфе 3.4 результаты вычислительного эксперимента представлены в графическом и табличном виде. Результаты численных расчётов приведены на следующих рисунках и таблицах.



а) численное решение b) точное решение

Рис. 1. Результаты, полученные при решении уравнения вихря по схеме Писмена-Рекфорда и функции тока методом верхный релаксации



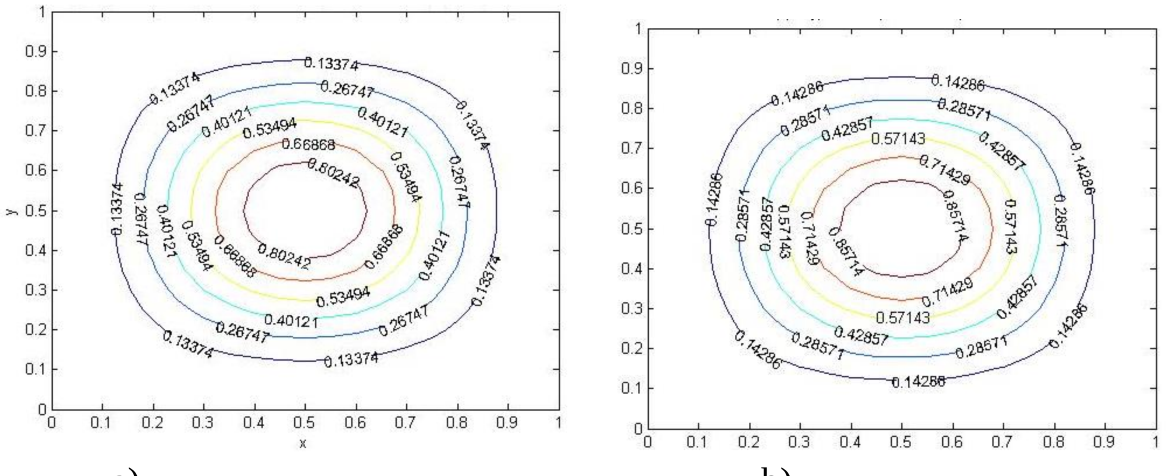
а) численное решение b) точное решение

Рис. 2. Результаты, полученные при решении уравнения вихря по схеме Писмена-Рекфорда и функции тока методом переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами

Таблица 2.

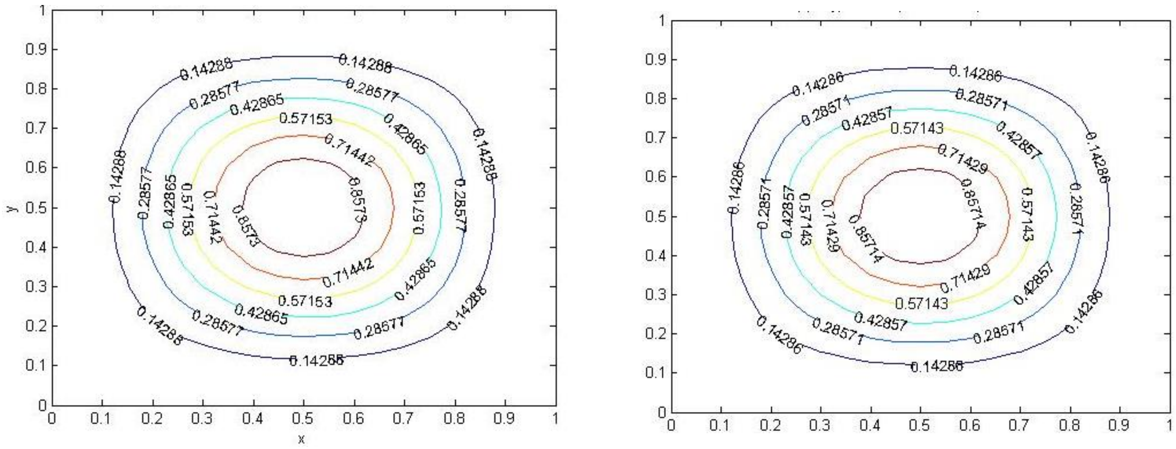
Результаты, полученные при решении уравнения вихря по схеме Писмена-Рекфорда и функции тока методом верхный релаксации и переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами

№	Приближенное решение по ПР и ВР	Приближенное решение ПР и ИСПН	Точное решение	Погрешность ПР и ИСПН	Погрешность ПР и ВР
1	-11,2675	-11,2785	-11,2795	0,001	0,012
2	-2,80779	-2,81827	-2,81989	0,00162	0,0121
3	5,6519	5,64194	5,63977	0,00217	0,01213
4	14,1116	14,1022	14,0994	0,0028	0,0122
5	22,5713	22,5624	22,5591	0,0033	0,0122
6	31,031	31,0226	31,0188	0,0038	0,0122



a) численное решение b) точное решение

Рис. 3. Результаты, полученные при решении уравнения вихря по схеме Писмена-Рекфорда и функции тока методом верхный релаксации



a) численное решение b) точное решение

Рис. 4. Результаты, полученные при решении уравнения вихря по схеме Писмена-Рекфорда и функции тока методом переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами

Таблица 3.

Результаты, полученные при решении уравнения вихря по схеме Писмена-Рекфорда и функции тока методом верхный релаксации и переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами

№	Приближенное решение по ПР и ВР	Приближенное решение ПР и ИСПН	Точное решение	Погрешность ПР и ИСПН	Погрешность ПР и ВР
1	0,13374	0,14288	0,14288	0	0,00914
2	0,26747	0,28577	0,28571	6E-05	0,01824
3	0,40121	0,42865	0,42857	8E-05	0,02736
4	0,53494	0,57153	0,57143	1E-04	0,03649
5	0,66868	0,71442	0,71429	0,00013	0,04561
6	0,80242	0,8573	0,85714	0,00016	0,05472

Из приведенных таблиц видно, что использование итерационной схемы переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами более эффективно, чем другие итерационные схемы, при решении уравнений Навье-Стокса в системы вихря-функция тока.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена численному моделированию уравнений Навье-Стокса в системе: нелинейного эволюционного уравнения для вихря и эллиптического уравгнения для функции тока.

В диссертации получены следующие научные результаты:

1. Доказаны теоремы обеспечивающие сходимость итерационного метода переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами.

2. Разработаны алгоритмы решения прямых и обратных задач для нахождения коэффициента кинематической вязкости и функции источника одномерного уравнения вихря с высокой точностью.

3. Проведен вычислительный эксперимент с использованием методом пробных функций для решения уравнения Пуассона для функции тока методом переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами.

4. Для численного решения системы уравнений вихря-функция тока разработан эффективный вычислительный метод требующую значительно меньшую число итераций по сравнению с другими существующими методами.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TERMEZ STATE UNIVERSITY

GULOMKODIROV KOMILJON ALISHEROVICH

NUMERICAL MODELING OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN THE "VORTEX-CURRENT" SYSTEM

05.01.07-Mathematical simulation. Numerical methods and software

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.1.PhD/FM591.

The dissertation has been prepared at the Termez State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the “Ziyonet” Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Normurodov Chori Begaliyevich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Sadullayeva Shahlo Azimbayevna** doctor of physical and mathematical sciences, associate professor
	Xudoyberganov Mirzoali Urazaliyevich doctor of physical and mathematical sciences, associate professor
Leading organization:	**Samarkand state university**

The defense will take place “__” 2022 at ________ ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on “__” _______ 2022 year
(Mailing report No.__ on “__” _________ 20__ year)

M. Aripov
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
d.f.-m.s., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, d.f.-m.s.

B.F.Abdurakhimov
Chairman of scientific seminar under
scientific council on award of scientific
degrees, d.f.-m.s., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to develop effective methods, algorithms and software for the Navier-Stokes equations in the vortex-current function system.

The object of the research work is the mathematical model of the Navier-Stokes equations in the vortex-current function system.

Scientific novelty of research work is as follows:

- has been developed an adequate mathematical model for the describe the Navier-Stokes equations in the vortex-current function system;

- theorems were proved that ensure the convergence of the iterative scheme of alternating directions with optimal iterative parameters;

- an algorithm for solving the Poisson equation for the stream function was developed using the iterative method of alternating directions with optimal iterative parameters;

- high-precision algorithms have been developed for finding solutions to the direct problem and the problem of restoring the source function and kinematic viscosity coefficient for the inverse problem of the one-dimensional vortex equation;

- an iterative alternating direction method with optimal iterative parameters for highly accurate and efficient solution of the Navier-Stokes equations in the vortex-current function system has been developed.

Implementation of research results:

Based on improved models, algorithms and software for the numerical solution of the Navier-Stokes equations in the vortex-current function system:

Algorithms for solving direct and inverse problems of the Navier-Stokes equations in the form of a function of an elliptical-type current and a parabolic-type vortex were used in the research grant A-13-38 "Theoretical and numerical studies of direct and inverse problems of the dynamics of nonlinear waves for a two-phase medium" to solve parabolic equations with a small parameter at the highest derivative (Reference No. 89-03-4862 dated November 20, 2020 of the Ministry of Higher and Secondary Education of the Republic of Uzbekistan). As a result, schemes for the numerical calculation of parabolic equations with a small parameter at the highest derivative have been developed.

Numerical modeling of the Navier-Stokes equations in the form of functions of an elliptic type current and a parabolic vortex using the algorithm for solving the iterative scheme of alternating directions with the choice of optimal iterative parameters were used in the research grant A-13-38 "Theoretical and numerical studies of direct and inverse problems of the dynamics of nonlinear waves for a two-phase medium" in the numerical simulation of the Navier-Stokes equations, the creation of a computer program and the conduct of a large-scale computational experiment (reference No. 89-03-4862 dated November 20, 2020 of the Ministry of Higher and Secondary Education of the Republic of Uzbekistan). As a result, for the numerical simulation of the Navier-Stokes equations in the form of an elliptic current function and the evolutionary vortex equation, it was possible to develop an algorithm and a computer program for solving using an iterative scheme of alternating directions with a choice of optimal iterative parameters.

The structure and volume of the thesis: The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and applications. The volume of the dissertation is 102 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bO‘lim (1 часть; part 1)

1. Нармурадов Ч.Б., Холияров Э.Ч., Ғуломқодиров К.А. Численное моделирование обратной задачи ралаксационной фильтрации однородной жидкости в пористой среды. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2017. – №2(8). – С 12-19. (01.00.00 №9)
2. Нармурадов Ч.Б., Ғуломқодиров К.А. Математическое моделирование уравнений Навье-Стокса в системе вихря и функции тока. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2017. – №3(9). – С 29-32. (01.00.00 №9)
3. Нармурадов Ч.Б., Ғуломкадиров К.А., Юлдашев Ш.М. Численное моделирование уравнение для функции тока с помощью итерационной схемы переменных направлений. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2018. – №3(9). – С 92-101. (01.00.00 №9)
4. Normurodov Ch.B., Kholiyarov E.Ch., Gulomkodirov K.A., Djurayeva N. Numerical Simulation of the Inverse Problem for the Vortex-Current Equation // AIP Conference Proceddings, vol. 2637, 040018 (2022); https://doi.org/10.1063/5.0118605. (№ 3 Scopus, IF=0.189)
5. Нармурадов Ч.Б., Гуломкодиров К.А., Холмурзаева Н.А. О сходимости итерационной схемы переменных направлений с оптимальными итерационными параметрами. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2021. – №6/1(37). – С 44-55. (01.00.00 №9)
6. Gulomkodirov K.A. About the optimal numerical solution of the Navier-Stokes equations in the "vortex-current" system. // Scientific Bullettin of NamSU. – Namangan, 2022. - №6/3(6). – P 3-13. (ОАК Раёсатининг 30.07.2020 йилдаги 283/7.1-сон қарори)

II bO‘lim (2 часть; part 2)

7. Нормуродов Ч.Б., Ғуломқодиров К.А. Қисилмайдиган ёпишқоқ суюқлик ҳаракатини уюрма-ток функцияси тизимида математик моделлаштириш // “Ёш олимлар” Республика илмий-амалий конференцияси маърузалари тўплами. Термиз. 29-30 январь 2016 й. 2-қисм. б. 98-100.
8. Нормуродов Ч.Б., Ғуломқодиров К.А. Ток функцияси учун Пуассон тенгламасини оптимал ечиш методи ҳақида // “Ахборот-коммуникация технологиялари ва сонли моделлаштиришнинг амалий масалалари” Республика илмий-техник конференцияси материаллари тўплами. Самарқанд. 8-9 сентябрь 2017 й. б. 18-21.
9. Нормуродов Ч.Б., Ғуломқодиров К.А., Холмурзаева Н.А. Ток функцияси учун Пуассон тенгламасини оптимал ечиш дастурини C++ Builder муҳитида яратиш // “Илим ҳәм тәлим-тәрбияның әҳмийетли мәселелери” Республика илмий-амалий конференцияси маърузалари тўплами. Нукус. 2019 й. 4-бўлим. б. 170-172.

10. Нармурадов Ч.Б., Гуломкодиров К.А., Зиякулова Ш.А. Численное моделирование одномерного уравнения вихря // Международная научная конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий” сборник материалов. Ташкент. 14-15 ноября 2019 г. с. 93-94.

11. Гуломкодиров К.А. Уюрма тенгламасини MatLab дастури ёрдамида компьютерли моделлаштириш. // Профессор-уқитувчиларнинг 2019 йилги илмий-тадқиқот ишлари якунига бағишланган анъанавий қирқ бешинчи илмий-амалий конференцияси материаллари. Термиз 26-май 2020 й. б. 263-266.

12. Гуломкодиров К.А., Холмурзаева Н.А. Численное решение обратной задачи восстановления источника уравнения вихря // Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами. Термиз. 21-23 октябрь 2020 й. б. 343-346.

13. Normurodov Ch., Kholiyarov E., Gulomkodirov K. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations in the "Vortex-Current" System // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. – India, 2020. – V. 7. – Issue 11. – P. 15-15608-15619. (05.00.00 №8)

14. Normurodov Ch., Kholiyarov E., Gulomkodirov K. Numerical Solution of the Inverse Source Reconstruction Problem for the Vortex Equation // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. – India, 2020. – V. 7. – Issue 11. – P. 15897-15904. (05.00.00 №8)

15. Гуломкодиров К.А. Бир ўлчамли уюрма тенгламасини сонли моделлаштириш // International scientific journal «Global Science and Innovations 2020: Central Asia» Nur-Sultan, Kazakhstan, № 6(11). Декабрь 2020 с. 87-92.

16. Гуломкодиров К.А., Холмурзаева Н.А. Численное решение обратной задачи восстановления источника для уравнения вихря // Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари. Халқаро миқёсидаги илмий-амалий анжуман материаллари– Бухоро. 15-апрель 2021 йил. б. 262-265.

17. Normurodov Ch.B., Gulomkodirov K.A., Kholmurzayeva N.A. Determination of the coefficient of kinematic viscosity of the system of Navier-Stokes equations in the "vortex-current" system // Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021. abstracts of the VII international scientific conference. Fergana.15-17 november 2021 P. 172.

18. Normurodov Ch.B., Gulomkodirov K.A. Sinov funksiyasi uchun Puasson tenglamasini hisoblash dasturi // O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 07210, 2019.

19. Normurodov Ch.B., Gulomkodirov K.A., Esanov Sh.E., Tuxtayeva N.R. Navye-Stoks tenglamasini o‘zgaruvchan yo‘nalishli iteratsion sxema metodi bilan yechish dasturiy ta’minoti // O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 09612, 2020.

20. Xoliyarov E.Ch., Gulomkodirov K.A., Abdullayev M. Navye-Stoks tenglamasini Duglas Rekford va Pismen Rekford iteratsion sxemalari bilan yechish

dasturiy ta’minoti // O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 09613, 2020.

21. Gulomkodirov K.A., Xoliyarov E.Ch., Amirqulov Ch.J., Abdullayev B.P. Uyurma tenglamasining manbasini tiklash teskari masalasini raqamli yechish uchun dastur// O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 09778, 2020.

Avtoreferatning o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi nusxalari
«TerDU nashr-matbaa markazi» tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi.
(4.11.2022 y.)

Bosishga ruxsat etildi: 5.11.2022 yil
Ofset bosma qog‘ozi. Qog‘oz bichimi $60x84^{1}/_{16}$,
«Times New Roman» garniturasi. Ofset bosma usuli.
Hajmi 3 bosma taboq.
Adadi 100 nusxa. Buyurtma: № 32.

Termiz davlat universiteti nashr-matbaa bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Termiz shahri, Barkamol avlod ko‘chasi, 43-uy.