ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети
Математика факультети

Әмелий математика ҳәм информатика кафедрасы

«Әмелий математика ҳәм информатика» бағдарының IV курс студенти Ашуров Жамолиддинниң

Питкериў қәнигелик жумысы

Темасы: Матрицаның меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын Данилевский усылы менен есаплаў

Илимий басшы: **доц. Ж.П. Алланазаров**

Кафедра баслығы: **доц. Ш. Ешмуратов**

Нөкис-2011

Мазмуны

КИРИСИЎ

Сызықлы алгебра - сызықлы (векторлық) кеңисликлер ҳәм кеңисликлерге сызықлы операторлар (сызықлы сәўлелендириўлер), сызықлы, қос сызықлы ҳәм квадратлық функциялар (функционаллар ямаса формарал) уйренилетуғын алгебраның бир бөлими болады.

Тарийхый жақтан сызықлы алгебраның ең дәслепки бөлими сызықлы алгебралық теңлемелериниң системаларының (САТСлардың) теориясы болады.

САТСларды шешиўге байланыслы анықлаўшы түсиниги келип шықты. 1750 - жылы швецариялы математик Габриель Крамер (1704 -1752 жыл) тәрепинен белгисизлериниң саны теңлемелериниң санина тең ҳәм анықлаўшысы нольден өзгеше болған САТСларды шешиўдиң қәдеси исленилип шығылды. 1849 - жылы немис математиги Калр Фридрих Гаусс (1777 - 1855 жылы) САТСларды шешиўдиң жаңа усылын усынды. Бул усыл орынланатуғын әмеллердиң саны бойынша ең әпиўайы усыл болып, ҳәр түрли өзгертиўлер менен коэффициентлери жуўық түрде бегилген САТСларды жуўық шешиў ушын да пайдаланылады.

САТСларды ҳәм анықлаўшыларын үйрениўге байланыслы матрица түсиниги пайда болды. 1877 - жылы немис математиги Георг Фробениус (1849 - 1917 жыл) тәрепинен матрицаның ранги түсинигиниң киргизилиўи, САТСлардың бирликли ҳәм анықланған болыўының шәртлерин олардың коэффициентлери арқалы анық түрде аңлатыўға мүмкиншилик ашып берди (Кроненера - Капелли теоремасы). Солай етип, XIX әсирдиң ақырында САТСлардың улыўма теориясин жасаў тамамланды.

Егерде XVIII ҳәм XIX әсирлерде сызықлы алгебраның тийкарғы мазмуны САТСлар ҳәм анықлаўшылар қураған болса, онда XX әсирге векторлық кеңислик ҳәм оның менен байланыслы болған сызықлы түрлендириў, ҳәм векторлық кеңисликте сызықлы , қос сызықлы ҳәм көп сызықлы функциялар тусиниклери орайлық орынды ийеледи.

Сызықлы алгебраның санлы усыллары -бул есаплаў математикасының салыстырмалы киши бөлими болады. Есаплаў математикасы, өз гезегинде, есаплаў характерине (сыпатына) ийе болған математикалық мәселелердиң жуўық шешимлерин қолайлы ҳәм жеңил табыў усылларин ислеп шығыў менен шуғылланатуғын, математика илиминиң бир тараўы болады. Интегралларды, теңлемелердиң кореньлерин (шешимлерин), функциялардың экстремум ноқатларын, дифференциал теңлемелериниң шешимлерин ҳәм көплеген математикалық мәселелердиң шешимлерин жуўық есаплаў усыллары - булардың барлығы есаплаў математикасиның бөлимлери болып есапланады. Сызықлы алгебраның есаплаў усыллары сызықлы алгебраның терминлеринде қәлиплестирилген мәселелер ушын есаплаў усылларын ислеп шығыў менен шуғылланатуғын, есаплаў математикасының бир бөлими болады. Бундай мәселелердиң айырымлары ҳәм оларды шешиў усыллары менен алдағы ўақытларда танысамыз.

Матрицаның меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторын анықлаў мәселеси тек жәрдемши мәселе есабында ғана әҳмийетке ийе болмайды. Көплеген илимий-техникалық мәселелер, әсиресе физиканың, механиканың, астономияның көп санлы мәселелери, $Ax + \lambda x = 0$ көринисиндеги бир текли САТС лардың нольден өзгеше шешимин ҳәм бундай шешиминиң бар болыўын тәмийинлейтуғын λ параметириниң сәйкес мәселелерин табыў мәселесине келтириледи. Барлық турақсыз (өзгермели) тербелис қублысларында меншикли мәнислер мәселеси оғада үлкен роль ойнайды. Өйткени, тербелислердиң жийилиги базы бир матрицаның меншикли мәнислери менен, ал бул тербелислердиң сыртқы көриниси сол матрицасының меншикли векторлары менен анықланады. Матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын таллаў көп санлы илмий-техникалық изерлеўлердиң әҳмийетли темасы болады.

1-§. Тийкарғы түсиниклер, белгилеўлер ҳәм анықламалар

Матрицаларды белгилеў ушын дәслэп латынның улкен $A, B, C, ...$ ҳәриплери пайдаланылады. Векторлар латынның киши $x, y, z, ...$ ҳәриплери менен, ал векторлардың ҳәм матрицалардың элементлери болса бир ямаса еки индексли латынның ҳәриплери менен белгиленеди.

Қаралып атырған векторлар n өлшемли ҳақыйқый R^n арифметикалық кеңислигиниң элементлери деп уйғарылады ҳәм көбинесе бағана - вектор көринисинде жазылады:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, ..., x_n)'$$

Бунда қаўсырманың сыртындағы штрих белгиси берилген вектордың бағана - вектор екенлигин аңлатады. Айрым жағдайларда қатар - векторлар да қаралады: $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Бул жағдайда қаўсырманың сыртына штрих белгиси қойылмайды.

Егерде R^n векторлардың скаляр анықланған кеңислик, яғный евклид кеңислиги есабында қаралса, онда ол E^n белгиленеди. Қәлеген $x, y \in E^n$ векторлары ушын олардың скаляр көбеймеси

$$(x, y) = \sum_{i+1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

формуласы менен анықланады.

Туўры мүйешли $m \times n$ өлшеми машрица деп, m қатар ҳәм n бағанадан туратуғын ҳақыйқый ямаса комплекс санларының кестесине айтылады.

Егерде m=n болса, онда матрица квадрат матрица деп ҳәм n бундай матрицаның тәртиби деп аталады.

Матрицаларды төмендеги көринислерде жазып көрсетиў қабыл етилген:

а). $A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{bmatrix}$; б). $A = (a_{ij}),\quad i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n;$

в). $A = (A_1, A_2,..., A_n)$, бунда $A_j - A$ матрицасының j - бағанасы, $j = 1,2,...,n.$

Көп сандағы ноль элементлерине ийе болған квадрат матрицалардың айрым түрлерин көрсетип өтемиз.

1. Диагональ матрица. Егерде $D = (d_{ij}),\quad i, j = 1,2,...n$ матрицасында $i \neq j$ болғанда $d_{ij} = 0$ болса, онда ол диагональ матрица деп аталады. Диагональ элементлери $d_{11}, d_{22},..., d_{nn}$ болған диагональ матрица көбинесе

$$D = diag(d_{11}, d_{22},..., d_{nn})$$

көринисинде белгиленеди. $d_{ii} = 1\quad (i = 1,2,...,n)$ болған диагональ матрица бирлик матрица деп аталады ҳәм оны көбинесе E ҳәриби менен белгиленеди.

2. Үшмүйешли матрица. Егерде $i \succ j$ болғанда $r_{ij} = 0$ болса, онда R матрицасы оң ямаса жоқарғы Үшмүйешли матрица деп аталады. Тап сол сыяқлы, егерде $i \prec j$ болғанда $l_{ij} = 0$ болса, L матрицасы шеп ямаса төменги үшмүйешли матрица деп аталады.

3. Хессенберг матрицасы. Егерде $i \succ j + 1$ болғанда $h_{ij} = 0$ болса, онда H матрицасы Хессенбергтиң оң ямаса жоқарғы матрицасы деп аталады. Хессенбергтиң шеп ямаса төменги матрицасыда тап усы сыяқлы анықланады: бул жағдайда $i \prec j + 1$ болғанда $h_{ij} = 0$ болады.

4. Уш диагоналлы матрица. Егерде $|i-j| \succ 1$ болғанда $t_{ij} = 0$ болса, онда T матрицасы үш диагоналлы матрица деп аталады.

A матрицасының қатарларын оның бағаналары менен алмаслаўдан келип шыққан матрицаны, A матрицасын транспоcллаўдан алынған матрица деп аталады. $m \times n$ өлшемли A матрицасын трансполлаўдан алынған $n \times m$ өлшемли матрицаны A' белгилеў қабыл етилген: $A' = (a'_{ij}) = (a_{ji}) = A$. Айырым жағдайларда A^T белгилеўи де қолланылады ҳәм биз бул белгилеўлерден қолайлық ушын пайдаланамыз. ("транспоcллаў" атамасы латынның "transpositio" деген созинен алынған болып, бизиң тилде "орын алмастырыў'', "орын өзгертиў" деген мәнислерди аңлатады.

Анықлаўшысы нольден өзгеше ($det\, A \neq 0$) болған A квадрат матрицасы айрықша емес (айнымаған) матрица деп аталады. Ал егерде $det\, A = 0$ болса, онда A матрицасы айрықша (айнымалы) матрица деп аталады.

Айрықша емес матрица ушын кери матрица түсиниги әхмийетли түсиник болады. A матрицасын оң жағынан да, шеп жағынан да көбейткенде бирлик матрица келип шығатуғын A^{-1}матрицасы, A матрицасына кери матрица деп аталады. Солай етип анықламасы бойынша

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

болады. Кери матрицаның элементлерин есаплаў берилген матрицаға кери матрицаны табыў деп аталады.

Берилген A квадрат матрицасына кери матрицаның бар болыўының зәрурли ҳәм жеткиликли шәрти A матрицаның айрықша емес матрица болыўы болады.

Айрықша емес A квадрат матрицасына кери матрицаны табыў әмели менен оны транспоcллаў әмели орын алмастырыў қәсийетине ийе болады:

$$(A')^{-1} = \left(A^{-1}\right)'.$$

Айрым матрицалардың анықламалары оларды трансполлаў әмели менен байланыслы болады.

Егерде $A = A'$ болса, онда A матрицасы симметриялы матрица деп аталады.

Егерде $QQ' = E = Q'Q$ болса, онда Q матрицасы ортогонал матрица деп аталады.

Егерде $A'A = AA'$ болса, онда A матрицасы нормал матрица деп аталады.

Симметриялы ҳәм ортогонал матрицалар нормал матрицалар болады. Ортогонал матрицалардың көбеймеси де ортогонал матрица болады.

Қәсийети, векторлардың E^n кеңислигиндеги скаляр көбеймеси менен байланыслы болған матрицалар, матрицалардың әҳмийетли классын дүзеди. Егерде $\forall x \neq 0, x \in E^n$ ушын $(Ax,x) \succ 0$ теңсизлиги орынланса,оныда A матрицасы оң анықланған матрица деп аталады. Егер $\forall x \in E^n$ ушын $(Ax,x) \geq 0$ теңсизлиги орынланса, онда A терис емес анықланған ямаса ярым оң анықланған матрица деп аталады.

Базыбир жағдайларда терис анықланған матрицалар да қаралады. Бул жағдайда $\forall x \neq 0, x \in E^n$ ушын $(Ax,x) \prec 0$ теңсизлиги орынланады. Ал, егерде $\forall x \in E^n$ ушын $(Ax,x) \leq 0$ теңсизлиги орынланса, онда A оң емес анықланған матрица деп аталады.

Китапта қаралып атырған барлық оң анықланған матрицалар симметриялы марицаларда болады. Симметриялы ҳәм оң анықланған матрица ушын Сильвестир критериясы (өлшеми) дурыс болады: бундай мартицалардың барлық бас минорлары оң болады.

Қәлеген ҳақыйқый $m \times n$ өлшеми A марицасы ушын $A'A$ ҳәм AA' квадрат матрицалары симметриялы ҳәм ярым оң анықланған матрицалар болады.

Ҳәр қандай оң анықланған ҳәм симметриялы A матрицасын өз ара трансполланған еки матрицаның көбеймеси түринде көрсетиўге болады: $A = B'B$. A матрицасының бундай жиклениўин ҳәр қыйлы усыллар менен орынлаўға болады.

Есаплаўларды орынлаўда, сондай ақ, блоклы (бирлестирилген) ямаса клеткалы (торлы) матрицалар деп аталатуғын матрицаларда ушырасады, Олар улыўма түрде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}A_{12}...A_{1s} \\ A_{21}A_{22}...A_{2s} \\ .... \\ A_{k1}A_{k2}...A_{ks} \end{bmatrix}$$

көринисинде жазылады. Бул матрицаның A_{ij} элементлери, өз гезегинде, белгили тәртиптеги матрицалар болады. Олардың әдеттеги өлшемлерин, блоклы $k \times s$ өлшемлеринен ажыратып билиў керек ($k = s$ болғанда блоклы матрицаның тәртиби k ға тең деп уйғарылады).

Мейли $k = s$ болсын ҳәм диагональда жайласқан $A_{11}A_{22}...A_{kk}$ матрицалары квадрат матрицалар болсын. Элементлери санлар болған матрицалар сыяқлы, блоклы матрицалардың да арнаўлы түрлери анықланады: блоклы - диагональ, блоклы - үшмүйешли, блоклы - Хессенберг ҳәм блоклы – үш диагоналлы матрицалары.

Бас диагоналдың бойында квадрат матрицалар жайласқан, ал басқа барлық элементлери нольге тең болған блоклы матрицалар квазидиаганаллы матрицалар деп аталады. Бундай матрицаларды $A = diag(A_{11}, A_{22}, ...A_{kk})$ көринисинде белгилеў қабыл етилген (“квази” атамасы латынның “quasi”деген сөзден алынған болып, ол мәниси бойынша “өтирик”, “жалған” деген сөзлерге сәйкес келетуғын қосымша сөз болады. Сонлықтан “квазидиаганаллы матрица” түсиниги бизиңше “жалған диаганаллы матрица “ мәнисин береди.

Көплеген қолланба мәселелеринде сийреклетилген матрицалар, яғный көпшилик элементлери нольге тең болған матрицалар, көбирек ушырасады. Матрицаның нольге тең емес элементлериниң санының, оның барлық элементлериниң санына қатнасы, матрицаның тығызлық коэффициенти деп аталады. Егерде матрицаның тығызлық коэффициенти $1/n$ киши ямаса тең болса, онда ол сиреклетилген матрица деп аталады (бунда n матрицаның тәртиби). Мәселен сийреклетилген матрицалардың топарына ленталы матрицалар жатады. Егерде A матрицаларының A_{ij} элементлери базыбир терис емес m_1, m_2 санлары ушын

$$a_{ij} = 0, m_1 \prec i - j, j - i \prec m_2$$

қатнасларын қанаатландырса, онда ол ленталы матрица деп аталады. Егерде бунда $m_1 = 0$ болса, онда Aматрицасы оң ленталы, ал $m_2 = 0$ болса - шеп ленталы матрица деп аталады. $S = m_1 + m_2 + 1$ саны матрицаның ени деп аталады. Егерде дара жағдайда, $m_1 = m_2 = 1$ болса, онда ленталы матрица үш диагоналлы матрицаға айланады.

Мейли, A- тәртиби nге тең болған квадрат матрица болсын. Егерде базыбир $x \neq 0$ векторы ҳәм λ саны ушын $Ax = \lambda x$ теңлиги орынланса, онда λ ҳәм x A матрицасының сәйкес меншикли мәниси (меншикли саны) ҳәм меншикли векторы деп аталады.

A матрицасының меншикли мәнислери оның

$$det(A - \lambda E) = 0$$

характеристикалық теңлемесиниң кореньлери (шешимлери) болады. Бул теңлемениң шеп жағы λ белгисине қарата n-дәрежели көпағзалы болып, ол A матрицасының харастиристикалық көпағзалысы деп аталады. Буннан, n-

тәртипли ҳәрқандай матрица, еселигин есапқа алғанда, n сандағы меншикли мәнислерге ийе болатуғыны келип шығады.

Матрицаның меншикли мәнислериниң көплиги, оның спектри деп аталады. Ҳақыйқый A матрицасының спектри мынадай қәсийетке ийе: бул спектрге ҳәрбир λ комплекс саны қандай еселик пенен кирген болса, оған түйинлес $\bar{\lambda}$ саны да тап сондай еселик пенен киреди.

Егерде A квадрат матрицасының спектри $Re\lambda \prec 0$ ярым тегислигинде жайласқан болса, онда бул матрица орнықлы матрица деп аталады. Егерде A квадрат матрицасының спектри $|\lambda| \prec 1$ бирлик дөнгелигиниң ишинде жайласқан болса, онда ол жыйналы матрица деп аталады. Матрицаларның бул классының атамасы мынаған байланыслы келип шыққан: A матрицасының спектрин көрсетилген бирлик дөнгелектиң ишинде жайласыўы $x_{k+1} = Ax_k + f \quad (k = 0,1,2,...)$ итерациялық процессиниң қәлеген x_0 басланғыш жуўықласыўынан жыйнақлы болыўының зәрүрли ҳәм жеткиликли шәртлерин береди.

Алдағы ўақытлары, арнаўлы түрде ескертилген барлық жағдайларда, тек ҳақыйқый векторлар ҳәм матрицалар ғана қаралады.

2-§. Сызықлы алгебраның гейпара есаплаў мәселелери

Сызықлы алгебралық мәселериниң ишинде төмендеги еки мәселе үлкен әҳмийетке ийе болады: 1) САТС ларды шешиў; 2) матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын анықлаў. Булардан басқа көбирек ушырасатуғын: берилген матрицаға кери матрицаны табыў, анықлаўшыларды есаплаў, алгебралық көпағзалының коренлерин анықлаў мәселелери өз алдына әҳмийетке ийе болмайды ҳәм сызықлы алгебраның тийкарғы мәселелерин шешиўде жәрдемши мәселелер ролин атқарады.

n белгисизли m теңлемелерден дүзилген САТС лар улыўма түрде

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{2.1}$$

көринисинде жазылады. Бунда a_{ij} $(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$ санлары системаның коэффициентлери деп, $b_i (i = 1,2,...,m)$ санлары - салтаң ағзалары (оң жақлары) деп аталады, ал $x_j (j = 1,2,...,n)$ лар изленип атырған белгисиз санлар.

Матрица түсинигинен пайдаланып (1) системаны төмендеги матрицалық көринисинде жазыўға болады:

$$Ax = b \tag{2.2}$$

Бунда x ҳәм b белгисизлерден ҳәм салтаң ағзалардан дүзилген, сәйкес n ҳәм m тәртипли бағана векторлар: $x = (x_1, x_2,..., x_n)'$, $b = (b_1, b_2,..., b_m)'$; ал A белгисизлердиң алдындағы коэффициентлерден дүзилген $m \times n$ өлшемли туўрымүйешли матрица: $A = (a_{ij}),\quad i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n.$

(1) системаны ықшамлап

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,2,...,m) \tag{2.3}$$

көринисинде де жазып көрсетиўге болады.

Салтаң ағзаларының ең keминде биреўи нольден өзгеше болған система бир текли емес система деп аталады. Егерде барлық $b_i = 0$ $(i = \overline{1,m})$ болса, онда (1) система бир текли система деп аталады (қысқалық ушын алдынғы ўақытлары усындай белгилеўден пайдаланамыз. Ол i индекси 1 ден m ге шекемги барлық пүтин мәнислерди қабыл ететуғынын аңлатады.).

(1) системаға белгисизлердиң орынларына апарып қойғанда оның ҳәр бир теңлемесин бирдейликке айландыратуғын, қәлеген $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ санлары бул системаның шешими (корени) деп аталады.

Егерде (1) системасы ең кеминде бир шешимге ийе болса, онда ол бирликли система деп, ал ол шешимге ийе болмаса бирликсиз (қарама - қарсы) система деп аталады. Бирликли система бир ямаса бир неше шешимге ийе болыўы мүмкин. Егерде бирликли система тек бир шешимге ийе болса, онда ол анықланған система деп, бирден көп шешимге ийе болса, онда ол анықланбаған система деп аталады.

Егерде берилген системаның екеўи де бирликсиз болса ямаса екеўи де бирликли болып, бирдей (тең) шешимлерге ийе болса, онда бундай еки система тең күшли системалар деп аталады.

A квадрат матрицасының i - қатарын ҳәм j - бағанасын сызыўдан келип шыққан $n-1$- тәртипли матрицаны M_{ij} арқалы белгилеймиз. Сонда $det M_{ij} = |M_{ij}|$ анықлаўшысы A матрицасының a_{ij} элементиниң менори деп аталады

Ал

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

аңлатпасы A матрицасының элементиниң агебралық толықтырыўшысы деп аталады.

A матрицасының қәлеген k қатарлары менен қәлеген k бағаналарының кесилиспесинде жайласқан элементлерден дүзилген M матрицасының анықлаўшысы A матрицасының k - тәртипли миноры деп аталады.

A матрицасының ранги деп, оның нольден өзгеше минорларының ең жоқарғы тәртибине айтылады. Егерде A матрицасында тәртиби r ге тең ҳәм нольден өзгеше ең кеминде бир минор бар болса ҳәм бул матрицаның тәртиби $r+1$ тең ҳәм оннан да жоқары тәртипли барлық минорлары нольге тең болса, онда A матрицасы $r(A)=r$ рангине ийе болады.

A матрицасына (1) системасының салтан ағзаларынан дүзилген бағананы тиркеп жазыўдан келип шыққан B матрицасы бул системаның кеңейтилген матрицасы деп аталады.

$$B=(A/b)=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}b_m \end{bmatrix}$$

САТС лардың бирликли бөлиў мәселеси Кронекер-Копелли теоремасы менен шешиледи. Бул теорема, A матрицасының ранги кеңейтилген B матрицасының рангине тең болғанда ғана, тек усы жағдайда ғана, (1) системасы бирликли болады деп тастыйықлайды (Кронекер Леопольд (1823-1891 жж.) немец математиги, ал Капелли Альфред (1855-1910 жж.)- италиялы математик).

Егер де бирликли (1) системасында A матрицасының ранги белгисизлердиң саны n ге тең, яғный $r(A)=r=n$ болса, онда бул система тек бир шешемге ийе болады, ол $r(A)\prec n$ болса, онда (1) система шексиз көп шешимге ийе болады.

Егерде (1) де A айырықша емес квадрат матрица болса, онда бул система бирликли ҳәм тек бир шешимге ийе болады. Бул шешимди

$$x=A^{-1}b$$

матрицалық көринисинде жазыўға болады. Бунда $A^{-1}-A$ матрицасына кери матрица.

Тәртиби улкен болмаған квадрат матрицалар ушын кери матрицаны төмендегише анықлаўға болады. Дәслеп $\det A=|A|\neq 0$ екенлигине исенемиз. Буннан соң A матрицасына аўқамлас ямаса тутастырылған деп аталған

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицасы жасалады. Бунда A_{ij} лер A матрицасының a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ элементлериниң сәйкес алгебралық толықтырыўшылары. Ауқамлас матрицасының элементлерин A матрицасының $det\, A = |A|$ анықлаўшысына бөлип, A^{-1} кери матрицасына ийе боламыз:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \frac{A_{21}}{|A|} \dots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} \frac{A_{22}}{|A|} \dots \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \frac{A_{n2}}{|A|} \dots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Квадрат матрицалардың көбеймесине қарата кери матрица мына қәде бойынша есапланады: егерде $C = AB$ болса, онда $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ болады.

Туўрымүйешли матрицалы (1) системаны шешиў ушын дәслеп A матрицасының ранги r ди анықлайды. Буннан соң, тәртиби r ға тең ҳәм нольден өзгеше минор матрицаның жоқарғы шеп мүйешинде жайласқандай етип, (1) системадағы теңлемелердиң ҳәм $x_1, x_2, ..., x_n$ белгисизлериниң орынларын алмастырып жазады. Бунда төмендеги еки жағдай болыўы мүмкин.

Биринши жағдай $r = n$ ҳәм $r \le m$ болса, онда (1) система төмендеги көринисте жазылады:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mr}x_r = b_m
\end{aligned}
$$

Бул системаның r белгисизи бар дәслепки r теңлемесин шешип, $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_r = \alpha_r$ шешимине ийе боламыз. Өйткени $r = n$ болғанлықтан дәслепки r теңлемеден дүзилген системаның анықлаўшысы нольден өзгеше болады. Егерде $n \prec m$ болса, онда бул шешим дәслепки $r = n$ теңлемелериниң салдары болған, қалған барлық $m - n$ теңлемелерди де қанаатландырады. Сонлықтан бул жағдайда берилген (1) системасы анықланған система болады.

Екинши жағдайда $r \prec n$ ҳәм $r \le m$ болыўы мүмкин. Бул жағдайда (1) системасы дәслепки r белгисизлерине қарата шешип алады.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mr}x_r = b_m - a_{mr+1}x_{r+1} - \dots - a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

Соңғы системадағы $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ белгисизлерине қәлеген сәйкес $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ сан мәнислерин беремиз. Сонда бул системаның оң жағы белгили болады.

Дәслепки r теңлемелерден дүзилген системаны $x_1, x_2, \dots, x_r$ белгисизлерине қарата шешемиз. Бул соңғы системаның анықлаўшысы нольден өзгеше болады. Сонлықтан ол тек бир шешимге ийе болады. $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ белгисизлериниң мәнислериниң ҳәр бир топарына (көплигине) қаралып атырған системаның тек бир шешими сәйкес келеди. Көрсетилген белгисизлердиң мәнислериниң ҳәр қыйлы көплиги шексиз көп болыўы мүмкин. Сонлықтан бул жағдайда (1) системасы анықланбаған система болады.

Коэффициентлери ҳәм оң жақлары дәл берилген САТС ларды шешкенде: берилген системаның бирликли ямаса бирликсиз екнлиги, бирликли системаның анықланғанлығы ямаса анықланбағанлығы, анықланбаған системаның шешимлериниң көплигин қалай жазып көрсетиў кереклиги, анықланған системаның тек бир шешимин қайсы усыл менен табыў кереклиги мәселелери талқыланады.

Жоқарыда атап өтилген, матрицаның меншикли мәнислерин ҳәм оларға сәйкес меншикли векторларын табыў мәселеси де ҳәр қыйлы усылда қойылады. Бул мәселеде матрицаның тек бир меншикли мәнисин, бир неше меншикли мәнислерин ҳәм барлық меншикли мәнислерин анықлаў талап етиледи. Көрсетилген меншикли мәнислерге сәйкес меншикли векторларды табыў талап етилиўи ямаса етилмеўи де мүмкин. Буннан тысқары, айырым жағайларда, тек бир матрицаның ғана емес, ал матрицалар жубының меншикли мәнислерин ҳәм оларға сәйкес меншикли векторларын анықлаў керек болады.

Матрицалардың барлық меншикли мәнислерин ҳәм оларға сәйкес барлық меншикли векторларын табыў мәселеси, меншикли мәнислердиң толық мәселеси деп аталады. Матрицаның тек ғана айырым меншикли мәнислерин ҳәм оларға сәйкес меншикли векторларын анықлаў мәселеси, меншикли мәнислердиң жекке (дара) мәселеси деп аталады. Матрицаның меншикли мәнислериниң толық мәселеси көбинесе туўры (дәл) усыллар менен, ал жекке мәселеси-итерациялық (жуўық) усыллар менем шешиледи. Олардың айырымлары менем төменде танысамыз.

Матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм оларға сәйкес меншикли векторларын табыў мәселеси, ҳәр қыйлы илимий-изертлеў жумысларын орынлаўда, мәселен есаплаў процессиниң орнықлылығын ҳәм жыйнақлылығын анықлаўда, физикалық ҳәм механикалық объектлердиң тербелисин ҳәм орнықлылығын изертлеўде, резонанс қубылысларын үйренгенде келип шығады.

Басқа есаплаў мәселери менен салыстырғанда сызықлы алгебраның мәселелери, биринши көз қараста әпиўайы болып көринеди. Биракта бул әпиўайылық алдаўшылық сыпатына ийе. Мәселен, айрықша емес квадрат матрицалы САТС ларды шешиў мәселеси теориялық жақтан Крамер қадеси менен толық шешиледи (Кромер Габриель (1704-1752жж.)-швейцариялы математик). Солай болса да, исжүзинде бул қәдени жоқары тәртипли системаларды шешиўге қолланыў мақсетке муўапық келмейди ямаса улыўма мүмкин болмайды. Өйткени ол оғада көп сандағы арифметикалық әмеллерди орынлаўды талап етеди. Сондай ақ, есаплаўларды орынлағанда мынаны есапқа алыў керек: арифметикалық әмеллер дөнгелеклеў менен орынланады. Бул соңғы нәтийжени жоқары дәллик пенен алыўға унамсыз тәсир жасайды.

Сызықлы алгебраның мәселелерин шешиўдиң қыйыншылықларын түсиниў, тез есаплағыш ЭЕМ лердиң пайда болыўына алып келди. Олар өз гезегинде, сызықлы алгебраның салыстырмалы үлкен көлемдеги мәселелерин шешиўге мүмкиншилик берди. Бул сызықлы алгебраның есаплаў усылларының оғада тез пәт пенен раўажланыўына алып келди. Сонлықтан сызықлы алгебраның санлы усыллары есаплаў математикасының ҳәзирги ўақытта әдеўир толығырақ исленип шығылған бөлими болады.

3-§. САТСларды шешиў усыллары

САТС ларды шешиў усыллары туўры (дәл) ҳәм интерациялық (жуўық) усыллар болып, үлкен еки топарға бөлинеди. Туўры усыллар деп, шекли сандағы арифметикалық әмеллерди орынлаў нәтийжесинде системадағы белгисизлердиң дәл мәнислерин анықлаўға мүмкиншилик беретуғын усылларға айтылады. Бул усыллар салыстырмалы түрде әпиўайы ҳәм оғада ҳәр тәреплемелик (универсаллық) қәсийетине ийе, яғный олар кең класстағы САТС ларды шешиў ушын жарамлы болады.

Соның менен бирге, туўры усыллар бир қанша кемшиликлерге де ийе. әдетте бул усыллар ЭЕМниң тез (оперативлик) ядында системаның матрицасын толық сақлаўды талап етеди ҳәм системаның тәртибиниң үлкен мәнислеринде ЭЕМниң ядында көп орынды ийелейди. Буннан тысқары, туўры усыллар системаның матрицасының дүзилисин есапқа алмайды. Мәселен, сийреклетилген матрицадағы (диагональ, үшмүйешли, үшдиагоналлы матрицадағы) нольге тең элементлерде ЭЕМ ниң ядынан орын ийелейди ҳәм олардың үстинде де арифметикалық әмеллер орынланады. Туўры усыллардың баслы кемшилиги системаны шешиў барысында есаплаў (дөңгелеклеў) қәтеликлериниң жыйналып (топланып) барыўы болады. Өйткени, бул усылларды қолланыўдың қәлеген этабында орынланатуғын есаплаўлар, оның алдында орынланған әмеллердиң нәтийжелеринен пайдаланады. Бул, әсиресе орынланатуғын әмеллердиң улыўма саны кескин артатуғын системалар, сондай ақ, есаплаў қәтеликлерине оғада сезимтал, жаман шәртлескен САТСлар жағдайларында дәллиги төмен, жаман нәтийжелерге алып келеди. Усы жағдайларға байланыслы, туўры усыллар әдетте тәртиби салыстырмалы үлкен болмаған тығыз толтырылған матрицалы ҳәм анықлаўшысы нольге жақын болмаған системаларды шешиў ушын қолланылады.

Туўры усылларға Крамер қәдеси, белгисизлерди избе-из шығарып таслаў усыллары (Гаусс усылы ҳәм оның өзгертилген турлери: баслы элементти сайлап алыў, бирден-бир бөлиў схемалары ҳ.т.б.), квадрат коренлер, сәўлелендириў ҳ.т.б. жатады.

Берилген системаны шешиў ушын орынланыўы керек болған әмеллердиң саны тек системаның тәртибине ғана байланыслы боламастан, ал сондай ақ, есаплаў усылын сайлап алыўға да байланылы болады. Буны мысал менен тусиндиремиз. Мейли n белгисизли сызықлы теңлемелериниң системасы берилген болып, оның анықлаўшысы нольден өзгеше болсын. Бул системаны Крамер қәдесинен пайдаланып шешкенде, барлық анықлаўшыларды олардың анынламасынан пайдаланып, тиккелей ашып шыққанда, системаның шешимин табыў ушын $N \approx n^2 n!$ сандағы көбейтиў ҳәм бөлиў әмеллерин орынлаў талап етиледи (биз бул әмеллерди орынлаў ушын қосыў ҳәм алыў әмеллери менен салыстырғанда көбирек ўақыт жумсалады деп есаплаймыз). $n = 20$ болғанда $n \approx 10^{21}$ сандағы көбейтиў ҳәм бөлиў әмеллерин орынлаў керек болады. Бундай сандағы арифметикалық әмеллерди ҳәзирги ўақытта массалық түрде қолланылып атырған ЭЕМлерден пайдаланып орынлаў мүмкин емес. Олай болса, $n = 20$ тәртиби болған САТСларды Крамер қәдесинен пайдалынып, қолымызда бар ЭЕМлердиң жәрдеминде шешиў мүмкин емес.

Көп сандағы теңлемелерден дүзилген үлкен системаларды шешиў мүмкин болыўы ушын есаплаў усылларын жетилистирип, олардың есаплаў схемаларын аңсатластырыў керек. Бундай мәселе дыққатқа миясар болып, САТСларды шешкенде орынланатуғын арифметикалық әмеллердиң санын азайтыўға мүмкиншилик беретуғын көплеген санлы усыллар исленип шығылды [2,8,9].

Мысал ушын, белгисизлерди избе-из шығарып таслаў усылының бирден-бир бөлиў схемасынан пайдаланып n- тәртипли системаны шешкенде $N_1 = \frac{n}{3}\left(n^2 + 3n - 1\right)$ сандағы көбейтиў ҳәм бөлиў әмеллерин орынлаў талап етиледи. n ниң Үлкен мәнислеринде бул сан $N = n^2 n!$ санынан көплеген есе киши болады: $n = 20$ болғанда $N_1 = 3060$ болады ҳәм қолымызда бар ЭЕМлерден пайдаланып, 20 теңлемеден ибарат системаны бул усыл менен аңсат шешиўге болады.

САТСларды шешиў ушын талап етилетуғын арифметикалық әмеллердиң санын азайыў оғада үлкен әҳимийетке ийе. Өйткени ол ЭЕМлерди пайдаланып шешетуғын системалардың тәртибин арттырыўға мүмкиншилик береди ҳәм есаплаўларды орынлаў жолы менен шешилетуғын қолланба мәселелериниң шеңберин кемейтеди.

Итерациялық усыллар - булар избе-из жуўықласыў усыллары болып, олар системаның шешимин қандайда бир усыл менен дүзилген векторлардың базыбир шексиз избе-излигиниң шеги есабында береди. Бунда шешимге басланғыш (дәслепки) жуўықласыў қандайда бир усыл менен табылады ямаса ерикли түрде сайлап алынады. Буннан соң, итерация деп аталатуғын, базыбир алгоритм жәрдеминде есаплаўлардың бир топары (цикли) орынланады. (“итерация” атамасы латынның “iteratio” деген сөзинен алынған болып, бизиңше “такирарлаў”,”қайталаў” деген мәнислерди аңлатады). Нәтийжеде шешимге жаңа жуўықласыў анықланады. Буннан соң итерацияларды орынлаў системаның шешими талап етилген дәллик пенен табылғанша даўам етеди. Итерациялық усыллардан пайдаланып САТСларды шешиў алгоритмлери туўры усыллар менен салыстырғанда әдеуир қурамалы болады. Есаплаўлардың көлемин алдын ала анықлаў қыйын[2,8,9].

Көрсетилген кемшиликлерине қарамастан итерациялық усыллар туўры усыллар менен салыстырғанда көпшилик жағдайларда артықмашлылықларға да ийе. Олар ЭЕМниң ядында системаның толық матрицасын сақлаўды талап етпейди, ал n дүзиўшиси бар бир неше векторларды ғана сақлаўды талап етеди. Ал айырым жағдайларда матрицаның элементлерин машинаның ядында сақлаўдың кереги болмай да қалады: ал олар керек болғанда ғана есапланылады. Итерациялық усылларды қолланғанда соңғы нәтийжелердиң қәтеликлери жыйналмайды. Себеби хәрбир итерациядағы есаплаўлардың дәллиги тек ғана оның алдындағы итерациялық нәтийжелери менен анықланады ҳәм ис жүзинде бурын орынланған есаплаўларға байланыслы болмайды. Итерациялық усыллардың бул жақсы қәсийетлери, олардың үлкен системаларды ҳәм жаман шәртлескен системаларды шешиўдеги баҳалылығын арттырады. Айырым жағдайларда итерациялардың жыйнақлылығы төмен болыўы мүмкин. Бундай жағдайларда олардың жыйнақлылығын арттырыўдың қолайлы усыллары изленеди .

Итерациялық усыллар туўры усыллар менен табылған шешимлердиң дәллигин арттырыў ушын да қолланылыўы мүмкин. Бундай аралас алгоритмлер, әсиресе жаман шәртлескен САТСларды шешиў ушын көбирек қолланылады. Соңғы жағдайда ретлестириў усыллары көбирек қолланылады
[3,9].

4-§. Матрицалардың меншикли мәнислери ҳәм меншикликли векторлары

Алдындағы параграфларда сызықлы алгебраның тийкарғы есаплаў мәселелериниң бири-сызықлы алгебралық теңлемелердиң системаларын (САТС ларды) шешиў мәселелери менен танысқан едик. Енди бул параграфта сызықлы алгебраның бундай мәселелериниң басқа әҳмийетли топарын-матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм менешикли векторларын анықлаў мәселелерин үйрениўге өтемиз. Дәслеп, зәрүр материялларын баянлаў ушын керекли болған, тийкарғы түсиниклерди ҳәм анықламаларды киргиземиз.

Жоқарыда атап өтилгениндей, $A = (a_{ij}), (i, j = 1,2,...,n)$ квадрат матрицасының меншикли мәниси (меншикли саны) деп, базы бир $x = (x_1, x_2, ..., x_n)' \neq 0$ векторы ушын,

$$Ax = \lambda x \tag{4.1}$$

теңлигин қанаатландыратуғын λ санына айтылады. Ал (1) теңлигин қанаатландыратуғын қәлеген нольден өзгеше вектор, A матрицасының λ меншикли мәнисине сәйкес (дерек), меншикли векторы деп аталады. Матрицасының x меншикли векторын базы бир $\alpha \neq 0$ санына көбейтиўден келип шыққан $\bar{x} = \alpha x$ векторы да, сол матрицасының меншикли векторы болатуғынлығы (1) көринип тур. Усы себепли матрицасының барлық меншикли векторлары сан көбейтиўшисине шекемги дәллик пенен анықланған. Сонлықтан оларды нормалаўға болады. Дара жағдайда, меншикли вектордың ҳәр бир координатасын олардың ең үлкенине ямаса бул вектордың узынлығына бөлиўге болады. Соңғы жағдайда бирлик меншикли мәниси келип шығады.

Өткен параграфты САТС лардың шешиўдиң итерациялық процесслериниң жыйнақлылығын үйренгенде, матрицасының меншикли мәнислери ҳаққындағы мағлыўматлар қәншели баҳалы болтуғынына исендик. Мәселен,

$$x = Bx + d$$

көринисиндеги САТС ларды шешиўге қолланылған әпиўайы итерация усылының жыйнақлы болыўы ҳәм жыйнақлылық тезлиги, матрицасының модули бойынша ең үлкен меншикли мәнисиниң шамасынан тиккелей ғәрезли болады.

Матрицасының меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторын анықлаў мәселеси тек жәрдемши мәселе есабында ғана әҳмийетке ийе болмайды. Көплеген илимий-техникалық мәселелер, әсиресе физиканың, механиканың, астономияның көп санлы мәселелери, $Ax + \lambda x = 0$ көринисиндеги бир текли САТС лардың нольден өзгеше шешимин ҳәм бундай шешиминиң бар болыўын тәмийинлейтуғын λ параметириниң сәйкес мәселелерин табыў мәселесине келтириледи. Барлық турақсыз (өзгермели) тербелис қублысларында меншикли мәнислер мәселеси оғада үлкен роль ойнайды. Өйткени, тербелислердиң жийилиги базы бир матрицаның меншикли мәнислери менен, ал бул тербелислердиң сыртқы көриниси сол матрицасының меншикли векторлары менен анықланады. Матрицалардың меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын таллаў көп санлы илмий-техникалық изерлеўлердиң әҳмийетли темасы болады.

Көрсетпелилик ушын (1) бир текли системасын

$$(A - \lambda E)x = 0 \tag{4.2}$$

көринисинде жазамыз. Бул бир текли системасы, анықлаўшысы нольге тең болғанда ғана, нольден өзгеше шешимге ийе болады. Сонлықтан бул талаптың орынланыўынан, A матрицасының характиристикалық теңлемеси деп аталатуғын,

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

теңлемесине келемиз. Бундағы $|A-\lambda E|$ анықлаўшысы λ параметрининиң үлкен коэффициенти $(-1)^n$ не тең болған n дәрежели алгебралық көпағзалысы болады. Бул анықлаўшыны элементлери бойынша жиклеп, ашып шықсақ, онда ол

$$|A-\lambda E| = (-1)^n\left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n\right) \tag{4.4}$$

көринисине ийе болады ҳәм ол A матрицасының характеристикалық көп ағзалысы деп аталады. Гейде (4) характеристикалық көпағзалысының орына, бул көпағзалыдан $(-1)^n$ көбейтиўшиси менен парқ қылатуғын

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n \tag{4.5}$$

көпағзалысынан пайдаланады. Бул көпағзалыны A матрицасының меншикли көпағзалы деп атайды. Матрицаның меншикли мәнислери, оның меншикли көпағзалысының кореньлери болады. Буннан n тәртипли ҳәр қандай квадрат матрица, еселигин есапқа алғанда, n сандағы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, меншикли мәнислерине ийе болатуғыны келип шығады. A матрицасының барлық $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ меншикли мәнислериниң көплиги, бул матрицаның спекторы деп аталады.

A матрицасының меншикли векторлары, λ параметриниң орнына матрицасының λ_i мәнислери қойылған, (1) ямаса (2) бир текли системасының нольден өзгеше шешимлери болады. Егерде, берилген меншикли мәниси ушын (1) системасы бир неше сызықлы байланыссыз шешимлерге ийе болса, онда матриасының бул меншикли мәнисине бир неше меншикли векторлар сәйкес келеди. Сондай ақ, ҳақыйқый матрица берилген жағдайында, оның комплекс меншикли мәнисине, координаталары комплекс санлар болған, меншикли векторлар сәйкес келеди. Координаталары, ҳақыйқый матрицаның меншикли векторларының координаталары менен комплекс-түйинлес болған вектор да, бул матрицаның комплекс-түйинлес меншикли мәнисине сәйкес келетуғын, меншикли векторы болады. Бунында дурыслығына (1) теңлемесиндеги барлық санларды комплекс-түйинлес санлар менен алмастырып, аңсат исениўге болады.

A матрицасы меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын есаплаў мәселесин төмендеги үш этапқа (басқыншқа) ажыратыўға болады:

1) матрицасының $P_n(\lambda)$ меншикли көпағзалысын жасаў;

2) $P_n(\lambda)=0$ теңлемесин шешиў ҳәм матрицаның $\lambda_i(i=1,2,...,n)$ меншикли мәнислерин анықлаў;

3) Бир текли

$$(A-\lambda E)x=0,(i=1,2,....,n) \tag{4.6}$$

системаларының нольден өзгеше шешимлерин табыў, яғный матрицасының меншикли векторын анықлаў.

Айрым жағдайларда, матрицасының меншикли мәнислерин ҳәм оларға сәйкес меншикли векторын, оның меншикли көпағзалысын жасамай ақ, анықлаў мүмкин болады. Буны, матрицасының меншикли мәнислериниң ҳәм меншикли векторларын анықлаў анаў ямаса мынаў қәсийетлеринен пайдаланып, ҳәр қыйлы қосымша үйғарыўлардың жәрдеминде иске асырыўға болады. Бул мәселе төменде тийисли орынларында толығырақ баянланады.

Матрицаның меншикли мәнислериниң ҳәм векторларының мәнислерин шешиўдиң жоқарыда көрсетилген этапларының ҳәр бир әдеўир қурамалы есаплаў мәселелери болады. Ҳақыйқатында да, мәселен $P_n(\lambda)$ меншикли көпағзалысын жасаў (3) ниң шеп жағындағы анықлаўшыны ашып шығыў

менен байланыслы. Бул жеткиликли қыйын мәселе. Тийкарғы қыйыншылық λ параметириниң анықлаўшының ҳәр бир қатарында ҳәм бағанасында бар болыўынан келип шығады. Улыўма жағдайда, алгебра курсынан мәлим болғанындай, $P_n(\lambda)$ меншиикли көпағзалысының p_i коэффициентилери, $(-1)^{i-1}$ белгиси менен алынған, A матрицасының $i-$тәртипли барлық бас минорларының (яғный бас диоганалына симметриялы жайласқан минорларының) қосындысына тең болады. Бундай минорлардың саны ҳәр бир i ушын n элементтен i элемент бойынша жасалған териўлердиң санына тең. Демек, n-тәртипли квадрат матрицасының $P_n(\lambda)$ меншикли көпағзалысын жасаў ҳәр қыйлы тәртиптеги
$C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n - 1$ сандағы ҳәр қыйлы тәртипли анықлаўшыларды есаплаў менен байланыслы. Тәртиби жеткиликли үлкен болған матрицалар ушын, соңғы мәселени шешиў, оғада үлкен көлемдеги есаплаў жумысларын орынлаўды талап етеди.

Көпағзалының коэффициенлери менен кореньлериниң арасында байланыс орнататуғын Виеттиң белгили теоремасынан пайдаланып, мына теңликлерди жазыўға болады:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = p_1,$$
$$\lambda_1 * \lambda_2 * ... * \lambda_n = (-1)^{n-1} p_n$$

Бирақта жоқарыда айтылған бойынша (5)-деги p_1 коэффициенти A матрицасының биринши тәртипли барлық диоганаль минорларының қосындысына тең болады:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

Буннан пайдаланып,

$$p_n = (-1)^{n-1}|A|$$

теңлигинде жазыўға болады. Сонлықтан

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = p_1 = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}, \quad (4.7)$$

$$\lambda_1 * \lambda_2 * ... * \lambda_n = (-1)^{n-1} p_n = |A| \quad (4.8)$$

болады. Бундағы $p_1 = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ шамасы A матрицасының изи деп аталады ҳәм SpA ямаса TrA деп белгиленеди. (Бул белгилеўлер немистиң "Spur" ҳәм инглиздиң "Trace" бизиңше "из" деген сөзлеринен қысқартылып алынған. Биз китапта олардың биринишисинен пайдаланамыз).

Солай етип, матрицаның барлық меншикли мәнислериниң қосындысы оның изине тең, ал олардың көбеймеси бул матрицаның анықлаўшысына тең болады деген жуўмаққа келемиз. Дара жағдайда, буннан, A матрицасы тек $\det A = |A| = 0$ болғанда ғана, ең кеминде бир нольге тең меншикли мәниске ийе болатуғыны келип шығады.

Меншикли мәнислердиң ҳәм векторлардың мәселелерин шешиўдиң екинши ҳәм үшинши этапларын тиккелей иске асырыў, жоқары тәртипли алгебралық теңлемени шешиў ҳәм сызықлы алгебралық теңлемелериниң бир текли системаларының нольден өзгеше шешимлерин табыў сияқлы есаплаў сыпатындағы әдеўир қурамалы мәселелерди шешиўге алып келеди.

5-§. Матрицаның меншикли мәнислериниң ҳәм меншикли векторларының мәселелерин шешиў усыллары

Ҳәзирги ўақытта матрицаның меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын табыўды аңсатластырыўға мүмкиншилик беретуғын, көплеген арнаўлы есаплаў усыллары исленип шығылған. Бул усылларды, САТС ларды шешиў мәселеси жағдайындағы сияқлы, туўры (дәл) ҳәм итерациялық (жуўық) усыллар деп, үлкен еки топарға ажыратыўға болады. Туўры усылларға жасалатуғын (яғный оның коэффициенлери есапланылатуғын), соңынан оның кореньлери анықланып, матрицаның меншикли мәнислери табылатуғын ҳәм олар бойынша сәйкес меншикли векторлары анықланатуғын усыллар жатады. Басқаша айтқанда, туўры усыллар деп, матрицасының меншикли мәнислерин ҳәм векторларын анықлаўдың жоқарыда көрсетилген үш этабы избе-из иске асырылатуғын усылларға айтылады. Бул усылларды қолланғанда, айрым жағдайларда, есаплаўлардың аралық нәтийжелерин пайдаланып, матрицаның меншикли мәнислерин анықлаў ҳәм соңынан, бир текли теңлемелердиң системаларын шешпестен, оларға сәйкес меншикли векторларын табыў мүмкин болады. Бул топардағы усыллардың туўры усыллар деп аталыўының тийкарғы себеби: матрицасының элементлери дәл санлар болып, есаплаўлар дәл орынланса, онда бундай усыллар менен меншикли көпағзалының коэффициенлери дәл анықланады ҳәм меншикли векторлардың координаталары сәйкес меншикли мәнислери менен анықланады.

Итерациялық усылларда, матрицаның меншикли мәнислери, оның меншикли көпағзалысын жасамастан, тиккелей анықланады. Соның менен бирге, матрицаның меншикли мәнислери ҳәм оларға сәйкес меншикли векторлары, бир ўақытта есапланады. Бундай усыллардың есаплаў алгоритмлери итерациялық сыпатқа ийе болады. Оларда матрицаны векторға көбейтиў көп рет пайдаланады. Бундай усыллар, шеги матрицаның меншикли векторы болған векторлардың избе-излигин ҳәм шеги матрицаның сәйкес меншикли мәниси болған санлар избе-излигин жасаўға алып келеди. Итерациялық процесстиң барысы, матрицасының хақыйқый ямаса комплекс меншикли мәнислерге ийе болыўынан әдеўир ғәрезли болады. Бул процесстиң жыйнақлы болыўы ҳәм оның жыйнақлылық тезлиги, ҳәр қыйлы қоңсы меншикли мәнислериниң модуллериниң қатнасының шамасы менен анықланады.

Көплеген илимий ҳәм техникалық мәселелерди шешкенде матрицаның барлық меншикли мәнислерин табыў талап етиледи. Бундай мәселе меншикли мәнислердиң толық мәселеси деп аталады. Сондай ақ, айырым мәселелерде матрицаның меншикли мәнислери ҳәм меншикли векторлары ҳаққында толық мағлыўматларды билиў талап етиледи. Мәселен, тербелис қубылысларының турақлылығын ямаса турақсызлығын үйренгенде, матрицаның барлық меншикли мәнислери жататуғын шегараларды көрсетиў ямаса берилген санға жақын болған меншикли мәнисин табыў жеткиликли болады. Усындай түрдеги барлық мәселелер меншикли мәнислердиң жеке (дара) мәселелери деп аталады. Артықша мийнет жумсамаў мақсетинде, бундай мәселелердиң ҳәр бирин шешиўдиң өзине тән усыллары исленип шығылады.

Әдетте, итерациялық усыллар матрицаның тек ғана бир неше (мәселен, модули бойынша ең киши ямаса ең үлкен) меншикли мәнислерин ҳәм оларға сәйкес меншикли векторын жеткиликли дәллик пенен анықлаўға мүмкиншилик береди. Сонлықтан бундай усыллар көбинесе меншикли мәнислердиң жеке мәселелерин шешиў ушын бийимлескен. Ал туўры усыллар, меншикли мәнислердиң толық мәселесин шешиў ушын, яғный матрицаның барлық меншикли мәнислерин ҳәм оларға тийисли меншикли векторын табыўға мүмкиншилик береди.

Меншикли мәнислердиң толық мәселеси айырым жағдайларда арнаўлы түрде исленип шығылған итерациялық усыллар менен де шешилиўи мүмкин. Әдетте, бундай усыллардың есаплаў алгоритмлери, меншикли мәнислердиң жеке мәселесин шешиўдиң итерациялық ҳәм туўры усылларының алгоритмлери менен салыстырғанда, әдеўир қурамалы болады. Оларды ис жүзинде қолланыў тек тез есаплағыш есаплаў машиналарының пайда болыўы менен ғана мүмкин болады.

Меншикли мәнислердиң толық мәселесин шешиўдиң туўры усыллардың алдында итерациялық усыллар мынадай артықмашлыққа ийе: матрицаның меншикли көпағзалысын жасамастан ақ, оның барлық меншикли мәнислерин анықлаўға мүмкиншилик береди. Бул оғада әҳмийетке ийе. Себеби матрицаның меншикли көпағзалысының коэффициентлерин есаплаўда пайда болған қәтеликлер, оның кореньлерин, яғный берилген матрицаның меншикли мәнислерин анықлаўдың дәллигине жаман тәсир жасайды. Буннан тысқары, итерациялық усыллардың туўры усыллардан үлкен артықмашылығы: оларды қолланғанда орынланатуғын әмеллер көбинесе оғада әпиўайы ҳәм бир қыйлы болып келеди. Бул қәсийети, әсиресе есаплаўларды ЭЕМ де орынлағанда оғада баҳалы болады.

Меншикли мәнислердиң толық ҳәм жеке мәселелери, шешиў усыллары ҳәм қолланыў тараўлары бойынша бир-биринен үлкен парқ қылады. Өйткени, меншикли мәнислердиң толық мәселесин, ҳәтте тәртиби жоқары болмаған матрицалар берилген жағдайында да шешиў оғада үлкен көлемдеги есаплаў жумысларын орынлаў менен байланыслы болады. Сонлықтан, меншикли мәнислердиң толық мәселесин шешиўдиң қыйыншылықларынан қутылып, меншикли мәнислердиң жеке мәселесин итерациялық усыллар менен шешиў мумкиншилиги есаплаў практикасы ушын оғада баҳалы болады.

Меншикли мәнислердиң мәселелерин шешиўдиң есаплаў усылларын туўры усыллардың бир топарын үйрениўден баслаймыз. Алдағы ўақытлары тек ҳақыйқый элементли матрицаларды ғана қараймыз.

6- §. А.М.Данилевский усылы

Матрицаның меншикли мәнислериниң мәселесин шешиўдиң әдеўир әпиўайы ҳәм үнемли усылы 1937-жылы А.М.Данилевский тәрепинен усынылды. Бул усыл сызықлы алгебрадан мәлим болған матрицаларды уқсаслық түрлендириў идеясына тийкарланған.

Егерде еки A ҳәм B матрицаларының биреўи екиншисинен базы-бир айырықша емес S матрицасының жәрдеминде турлендириў жолы менен келип шыққан болса, яғный

$$B = S^{-1}AS \tag{6.1}$$

теңлиги орынланса, онда бундай еки матрица уқсас матрицалар деп аталады ҳәм бул $B \quad A$ көринисинде белгиленеди.

А.М.Данилевский усылының есаплаў схемасын жасағанда уқсас матрицалардың тийкарғы қәсийетинен пайдаланады: уқсас матрицалар тек характиристикалық көпағзалыларға ийе болады. Ҳақыйқатында да, (1) теңлигинен пайдаланып,

$$\left|S^{-1}AS - \lambda S\right| = \left|S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES\right| = \left|S^{-1}\right| * \left|A - \lambda E\right| * \left|S\right| = \left|A - \lambda E\right|$$

теңлигине келемиз. Сонлықтан, берилген матрицаны уқсаслық түлендириўди қолайлы етип сайлап алып, келип шыққан матрицаның көриниси бойынша оның меншикли көпағзалысын тиккелей жазыўға болатуғын көриниске келтириўге умтылыў, тәбиий нәрсе. А.М.Данилевский берилген матирцасын (1) уқсаслық турлендириўинен пайдаланып, Фробениустың нормаль (каноникалық) көриниси деп аталатуғын

$$\Phi = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

көринисине келтириўди усынды. Өйткени, (2) матрицаның характеристикалық көпағзалысын тиккелей жазыўға болады. Ҳақыйқатында да, $|\Phi-\lambda E|$ анықлаўшысын оның биринши бағанасының элементлери бойынша избе-из жиклеп, мына нәтийжеге келемиз:

$$|\Phi-\lambda E|=\begin{bmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{bmatrix}=(p_1-\lambda)(-\lambda)^{n-1}-$$

$$\begin{bmatrix} p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ .. & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{bmatrix}=(p_1-\lambda)(-\lambda)^{n-1}-p_2(-\lambda)^{n-2}+$$

$$\begin{bmatrix} p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}=(p_1-\lambda)(-\lambda)^{n-1}-p_2(-\lambda)^{n-2}+p_3(-\lambda)^{n-3}+$$

$$...+(-1)^{n+1}p_n=(-1)^n\left(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-...-p_n\right)=(-1)^n P_n(\lambda)$$

Солай етип, Фробениустың матрицасының биринши қатарының $p_1, p_2,..., p_n$ элементлери, оның меншикли көпағзалысының сәйкес коэффициентлери болады. Демек, Φ матрицасы менен $\Phi=S^{-1}AS$ уқсаслық турлендириўи менен байланыслы болған, берилген A матрицасының да меншикли көпағзалысының коэффициентлери болады. Сонлықтан λ белгисизине қарата n-дәрежели $P_n(\lambda)=0$ теңлемесин шешип, A берилген матрицасының меншикли мәнислерин анықлайды. Буннан тысқары, керекли уқсаслық турлендириўин орынлаў ушын пайдаланылған, айрықша емес S

матрицасын, A матрицасының меншикли векторларын табыў ушын да қолланыўға болады.

Усы жағдайларға байланыслы, бул жердеги тийкарғы мәселе бизге керекли болған S матрицасын анықлаўға келтириледи. А.М.Данилевский бундай матрицасын жасаўдың усылын көрсетти. Берилген A матрицасынан (2) Ф матрицасына өтиў $n-1$ сандағы уқсаслық турлендириўлерин избе-из орынлаў менен иске асырылады. Бунда A матрицасының ең соңғы қатарынан баслап, оның хәрбир қатары, Ф матрицасының сәйкес қатарына турлендириледи. Төменде A матрицасын Ф матрицасына бундай турлендириўге толығырақ тоқтап өтемиз.

6.1 Матрицаның меншикли көпағзалысын жасаў

Берлиген A матрицасының элементлерине байланыслы Данилевский усылында мүмкин болған мына еки жағдай ушрасады: әдетте (айырықша емес) хәм айырықша жағдайлар. Дәслеп әдеттеги жағдайды қараймыз.

Мейли, A матрицасының a_{nn-1} элементи нольден өзгеше болсын. Сонда A матрицасының $(n-1)$ бағанасын усы $a_{nn-1} \neq 0$ элементине бөлип хәм келип шыққан жаңа бағнаны избе-из $a_{ni}(i = 1,2,...,n-2,n)$ элементлерине көбейтип, матрицаның $i-$бағанасынан алсақ, онда A матрицасын соңғы қатары Фробениус көринисине келеди. A матрицасын бундай турлендириў оны оң жағынан

$$M_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn-1}} & \dots & -\dfrac{a_{nn-2}}{a_{nn-1}} & -\dfrac{1}{a_{nn-1}} & -\dfrac{a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

матрицасына көбейтиў менен тең күшли болатуғынын тиккелей тексерип көриўге болады. Бундай көбейтиўдиң нәтийжесинде A матрицасының соңғы қатары керекли көриниске келеди. Бирақта $B=AM_{n-1}$ түрлендириўи, улыўма жағдайда, A матрицасы ушын уқсаслық турлендириўи болмайды. Бул кемшиликти $B=AM_{n-1}$ матрицасын шеп жағынан M_{n-1}^{-1} матрицасына көбейтиў арқалы дүзетиўге болады. Ҳақыйқатында да, бундай M_{n-1}^{-1} матрицасы бар болады, өйткени уйғарыўымыз бойынша $|M_{n-1}|=1/a_{nn-1}\neq 0$. (3) ден M_{n-1}^{-1} матрицасының төмендеги көринисте болатуғыны тиккелей келип шығады:

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & \dots & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.4)$$

Бундай $M_{n-1}^{-1}B$ түрлендириўи $B=AM_{n-1}=(b_{ij})(i,j=1,2,\dots,n)$ матрицасының соңғы қатарын өзгертпейди.

Солай етип, Данилевский усылының биринши адымын орынлағаннан соң төмендеги көринистеги матрицаға ийе боламыз:

$$M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}=A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ .. & .. & \dots & .. & .. \\ a_{n-11}^{(1)} & a_{n-12}^{(1)} & \dots & a_{n-1n-1}^{(1)} & a_{n-1n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Бундағы M_{n-1}^{-1} ҳәм M_{n-1} матрицаларын A матрицасы бойынша тиккелей жазыўға болады.

Мейли, енди $A^{(1)}$ матрицасының $a_{n-1n-1}^{(1)}$ элементи нольден өзгеше болсын. Сонда Данилевский усылының екинши адымы, оның тап биринши адымы сыяқлы болып орынланады. Бунда $A^{(1)}$ матрицасының төменнен есапланғанда екинши қатары, Фробениус көринисине келтириледи (төмендеги биринши қатары өзгеризсиз сақланады). Сәйкес түрлендириўлердиң нәтийжеси төмендегише жазылады:

$$M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2} = M_{n-2}^{-1}A^{(1)}M_{n-2} = A^{(2)} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \dots & a_{1n-2}^{(2)} & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-21}^{(2)} & \dots & a_{n-2n-2}^{(2)} & a_{n-2n-1}^{(2)} & a_{n-2n}^{(2)} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Бунда

$$M_{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{n-11}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-12}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & \dots & -\dfrac{a_{n-1n-2}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\dfrac{1}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1n-1}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1n}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ .. & .. & \dots & .. & .. & .. \\ a_{n-11}^{(1)} & a_{n-12}^{(1)} & \dots & a_{n-1n-1}^{(1)} & a_{n-1n}^{(1)} & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \end{bmatrix}.$$

Буннан көринип турғанындай $A^{(1)}$ матрицасы бойынша M_{n-2}^{-1} ҳәм M_{n-2} матрицаларын жасаў нызамлылығы, биринши адымындағы $A = A^{(0)}$ матрицасы бойынша M_{n-2}^{-1} ҳәм M_{n-2} матрицаларын жасаў қәделерине сәйкес келеди. Бул нызамлылық буннан соңғы адымларда да сақланады.

Солай етип, егерде $a_{nn-1} \neq 0,\quad a_{n-1n-2}^{(1)} \neq 0,\quad a_{n-2n-3}^{(2)} \neq 0, ..., a_{21}^{(n-2)} \neq 0$ болса, онда Данилевский усылының $n-1$ адымынан соң мына матрицаға ийе боламыз:

$$M_1^{-1}M_2^{-1}...M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2}...M_1 = A^{(n-1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & ... & a_{1n-1}^{(n-1)} & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & ... & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} = \Phi = S^{-1}AS$$

Басқаша айтқанда, дәслепки берилген A матрицасы, айрықша емес $S = M_{n-1}M_{n-2}...M_1$ матрицасынан пайдаланып уқсаслық түрлендириў нәтийжесинде, Фробениустың нормаль көринисине келтирилди. Соңғы матрицаның көриниси бойынша оның

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - ... - p_n$$

меншикли көпағзалысын тиккелей жазыўға болады.

6.2. Данилевский усылының айрықша жағдайлары

Егерде уқсаслық түрлендириўлерди орынлаўының барысында матирцаның ажратылған элементлерине нольден өзгеше болса, онда Данилевский усылы ҳеш қандай қыйншылықсыз иске асырылады. Бул жерде, Данилвский усылында көрсетилген талап орынланбайтуғын, оның айрықша жағдайларында тоқтап өтемиз.

Мейли, берилген A матрицасын Фробениустың Φ матрицасына түрлендириўдиң бир неше адымынан соң

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1s} & ... & d_{1k-1} & d_{1k} & ... & d_{1n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2s} & ... & d_{2k-1} & d_{2k} & ... & d_{2n-1} & d_{2n} \\ .. & .. & ... & .. & ... & .. & .. & ... & .. & .. \\ d_{i1} & d_{i2} & ... & d_{is} & ... & d_{ik-1} & d_{ik} & ... & d_{in-1} & d_{in} \\ .. & .. & ... & .. & ... & .. & .. & ... & .. & .. \\ d_{k1} & d_{k2} & ... & d_{ks} & ... & d_{kk-1} & d_{kk} & ... & d_{kn-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & ... & .. & ... & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицасы келип шықсын ҳәм онда $d_{kk-1}=0$ болсын. Бул жағдайда Данилевский усылы менен түрлендириўлерди даўам етиў мүмкин болмайды. Буннан да еки жағдай болыўы мүмкин.

1. Мейли, Dматрицасының $d_{kk-1}=0$ элементлериниң шеп жағында жайласқан қандай да бир элемент нольден өзгеше, мәселен, $s \prec k-1$ болғанда $d_{ks}\neq 0$ болсын. Бул жағдайда $d_{ks}\neq 0$ элементин $d_{kk-1}=0$ элементиниң орнына апарамыз. Буның ушын D матрицасының $(k-1)$ ҳәм s-бағаналарының, сондай ақ, оның $(k-1)$ ҳәм s-қатарларының да орынларын алмастырамыз. Сонда келип шыққан жаңа D' матрицасы D матрицасына уқсас болады. Сонлықтан D' матрицасына Данилевскийдиң усылын қолланып, есаплаўларды даўам етиўге болады.

2. Мейли, енди D матрицасында $d_{ks}=0(s=1,2,...,k-1)$, яғный ажратылған элемент ҳәм оның шеп жағында жайласқан матрицасының барлық

элементлери нольге тең болсын. Бул жағдайда D матрицасы төмендеги көриниске ийе болады:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k-1} & d_{1k} & \dots & d_{1n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k-1} & d_{2k} & \dots & d_{2n-1} & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k-11} & d_{k-12} & \dots & d_{k-1k-1} & d_{k-1k} & \dots & d_{k-1n-1} & d_{k-1n} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & d_{kk} & \dots & d_{kn-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \\ \hline 0 & D_3 \end{array}\right],$$

яғный D матрицасы, бир матрицасы ноль матрица болғандай етип, төрт клеткаға (блокқа) ажыратылады. Сонлықтан $|D-\lambda E|$ анықлаўшысы еки анықлаўшыға жикленеди:

$$|D-\lambda E| = |D_1-\lambda E| * |D_3-\lambda E|$$

Бунда D_3 матрицасы Фробениустың нормаль көринисине келтирилген болып, $|D_3-\lambda E|$ анықлаўшысы тиккелей есапланады. Усы себепли, Данилевский усылын тек D_1 матрицасына ғана қолланыў керек болады.

Данилевский усылын иске асырыў ушын керек болатуғын арифметикалық элементлердиң санын тиккелей есаплаў жолы менен, бул усыл матрицаның меншикли көпағзалысын жасаўдың белгили усылларының арасында ең үнемли усылларының бири болатуғынына исениўге болады. Бирақ ол, дерлик барлық дәл усыллар сыяқлы, аралық есаплаўлар нәтийжелериниң қәтеликлерине оғада сезимтал болады. Усы себепли, Данилевский усылының $(n-k+1)$ адымында $A^{(n-k)}$ матрицасының $a_{kk-1}^{(n-k)}$ элементлериниң орнына, уқсаслық түрлендириўди орынлаў жолы менен, бул элементтен жоқарыда ямаса шеп жағында жайласқан, модули бойынша ең үлкен элементти апарып қойып, бул усылдағы есаплаўлардың исенимлилигин әдеўир артырыўға болады. Есаплаўлардың нәтийжелерин қадағалап барыў ушын $p_1 = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = S_p A$ теңлигинен пайдаланыў, яғный p_1коэффициентиниң табылған мәнисин A матрицасының изи менен салыстырыў керек [6,9].

6.3. Матрицаның меншикли векторларын есаплаў

Егерде A матрицасының $\lambda_i (i = 1,2,...,n)$ меншикли мәнислери белгили болса, онда меншикли векторлары сызықлы теңлемелердиң $Ax = \lambda_i x (i = 1,2,...,n)$ бир текли системаларын шешиў жолы менен табылыўы мүмкин. Бирақ та, егерде A матрицасын Фробениустиң $\Phi = S^{-1}AS$ нормаль матрицасына түрлендиретуғын, айрықша емес S матрицасы жасалған болса, онда A матрицасының меншикли векторларын анықлаў әдеўир жеңиллеседи. Бундай мүмкиншилик төмендеги тастыйықлаўға тийкарланған.

Усы параграфтың басында, егер де A ҳәм B матрицалары уқсас, яғный (1)- теңлиги орынланса, онда бул матрицалардың меншикли көпағзалылары, демек, меншикли мәнислери сәйкес келетуғынлығы атап өтилди. Ал A ҳәм B матрицаларының меншикли векторына келсек, онда олардың арасындағы байланыс мына тастыйықлаў менен анықланады: егер де $y = (y_1, y_2,..., y_n)'$ векторы B матрицасының λ меншикли мәнисине сәйкес меншикли векторы болса, онда $x = (x_1, x_2,..., x_n)' = Sy$ векторы A матрицасының тап сол λ меншикли мәнисине сәйкес меншикли векторы болады.

Ҳақыйқатында да, мейли $By = \lambda y$ болсын. Сонда $S^{-1}ASy = \lambda y$ болады. Соңғы теңликтиң еки тәрепин шеп жағынан S матрицасына көбейтип, $A(Sy) = \lambda Sy$ теңлигине ийе боламыз. Бул жоқарыдағы тастыйықлаўдың дурыслығын дәлиллейди. Соңғы теңлик, егерде S матрицасы $\lambda_i (i = 1,2,...,n)$

меншикли мәнислери ҳәм y векторы белгили болса, онда A матрицасының сәйкес меншикли векторларын табыўға мүмкиншилик береди.

Солай етип, A матрицасының меншикли векторлары, оның Фробениустың нормаль көринисиниң сәйкес меншикли векторлары бойынша аңсат анықланады екен. Ал Фробениус матрицасының меншикли векторларын анықлаў мәселеси аңсат шешиледи. Ҳақыйқатында да, егерде $\lambda - \Phi$ матрицасының белгили меншикли мәниси болса, онда

$$\Phi y = \lambda y$$

ямаса

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{bmatrix}$$

болады. Бул векторлық теңликти координаталары бойынша ашып жазып, теңлемелердиң мына системасына келемиз:

$$\begin{array}{rcl} p_1 y_1 + \quad p_2 y_2 + \quad \ldots + \quad p_n y_n & = & \lambda y_1, \\ y_1 & = & \lambda y_2, \\ y_2 & = & \lambda y_3, \\ .. & .. & \ldots \\ y_{n-1} & = & \lambda y_n, \end{array} \tag{6.5}$$

Матирцаның меншикли векторы турақлы көбейтиўшиге шекемги дәллик пенен анықланатуғынын есапқа алып, (5) теңликлеринде $y_n = 1$ деп уйғарамыз. Сонда (5) теңликлеринен y векторының қалған координаталары избе-из төмендегише анықланады:

$$y_{n-1} = \lambda, \qquad y_{n-2} = \lambda^2, \ldots, \quad y_1 = \lambda^{n-1}$$

Ал (5) ниң биринши теңлемесине келсек, онда уйғарыўымыз бойынша $\lambda \qquad A$ матрицасының меншикли көпағзалысының корени болғанлықтан, ол

$$P_n(\lambda) \equiv \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_n = 0$$

көринисине ийе болады. Соңғы теңликтен есаплаўлардың нәтийжелерин қадағалаў ушын пайдаланыўға болады.

Солай етип,

$$y = \left(\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, ..., \lambda, 1\right) \tag{6.6}$$

векторы Фробениус матрицасының λ меншикли мәнисине сәйкес келетуғын меншикли векторы болады.

Буннан мынадай жуўмаққа келемиз: S матрицасын биле отырып, дәслепки берилген A матрицасының меншикли векторларын табыўы мәселеси шешиў қыйын болмайды. Егерде A матрицасының меншикли мәнислери Данилевский усылы менен табылған болса, онда оның әдеттеги жағдайында ҳәм бул жағдайда келтирилетуғын айрықша жағдайында, S матрицасын тиккелей жазыўға болады. Мәселен, бул усылдың әдеттеги жағдайында

$$S = M_{n-1} M_{n-2} ... M_1$$

болады. Бундағы $M_i \left(i = 1,2,...,n-1\right)$ матрицалары бирлик матрицадан тек бир қатары менен парқ қылады. Сонлықтан

$$x = Sy = M_{n-1} M_{n-2} ... M_1 y \tag{6.7}$$

векторын, алдын ала $S = M_{n-1} M_{n-2} ... M_1$ көбеймесин таўып алмай, y векторын избе-из $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ матрицаларына көбейтип жасаў, есаплаў мәқсетлери ушын қолайлырақ болады. Бунда M_i матрицасына көбейтиўден вектордың тек i – координатасы ғана өзгереди.

Данилевский усылының, берилген матрицаның ең соңғы қатарынан баслап Фробениус көринисине келтириўди ақырына шекем орынлаў мүмкин болмаған айырықша жағдайында, A матрицасының меншикли векторын анықлаў ушын көрсетилген усылдан пайдаланыў мүмкин болмайды.

Мысалы. Төмендеги матрицаның меншикли мәнислерин ҳәм менишикли векторларын Данилевский усылы менен табың:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (6.8)$$

Шешилиўи. 1) Дәслеп берилген матрицаны Фробениустың нормаль көринисине келтиремиз. Буның ушын Данилевский усылының есаплаў алгоритминен пайдаланып, төмендеги есаплаўларды орынлаймыз:

$$A^{(1)} = M_3^{-1} A M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & [-1] & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & -5 \\ 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Бул $A^{(1)}$ матрицасы берилген A матрицасына ҳәм оның соңғы қатары Фробениус көринисине келтирилген. Усының менен Данилевский усылының биринши адымы тамамланады. $A^{(1)}$ матрицасында $a_{32}^{(1)} = -1$ болғанлықтан, Данилевсикй усылының екинши адымын орынлаймыз (әдеттеги жағдай):

$$A^{(2)} = M_2^{-1} A^{(1)} M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & [-1] & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & -4 & -20 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 2 \\ -6 & 0 & 19 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Усының менен уқсаслық түрлендириўди орынлаў тамамланады. Бул $A^{(2)}$ $A^{(1)}$ матрицасы еки келтирилген қатарға ийе болады. Енди $A^{(2)}$ матрицасында $a_{21}^{(2)} = -6$ екенлиги есапқа алып ҳәм оның дәслепки берилген матрица есабында қабыл етип, уқсас матрицаға түрлендиремиз:

$$A^{(3)} = M_1^{-1} A^{(2)} M_1 =$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 19 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 2 \\ [-6] & 0 & 19 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & 19/6 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 19 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2 & -2{,}5 & -2{,}5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 24 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Солай етип, бундай уқсаслық түрлендириўлерди избе-из орынлаўдың нәтийжесинде, дәслепки берилген A матрицасы Фробениустың оған уқсас $\Phi = A^{(3)} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} A M_3 M_2 M_1 = S^{-1} A S$ матрицасына келтирилди. Сонлықтан бул матирцаның көриниси бойынша (демек, A матрицасының да) меншикли көпағзалысын тиккелей жазыўға болады:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 7\lambda^2 - 24\lambda - 15 = (\lambda + 1)(\lambda^3 + 2\lambda^2 - 9\lambda - 15) \qquad (6.9)$$

2) Енди A матрицасының меншикли мәнислерин есаплаймыз. (9) дан $\lambda_1 = -1$ болатуғыны көринип тур. Басқа меншикли мәнислерин табыў ушын

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 9 - 15 = 0 \qquad (6.10)$$

алгебралық теңлемесин шешиў керек. Бул теңлемени, квадратлық жыйнақлылыққа ийе, Ньютон (урынбалар) усылы менен шешимиз. Дәслеп әдеттеги усыл менен оның кореньлери ажыратамыз:

$$-3{,}5 \prec \lambda_2 \prec -3; \qquad -2 \prec \lambda_3 \prec -1{,}5; \qquad 2{,}5 \prec \lambda_4 \prec 3.$$

Гезектеги λ_2 меншикли мәнисин табамыз. Буның ушын Ньютон усылының улыўма теориясы бойынша λ_2 меншикли мәнисине басланғыш

$f(-3{,}5) \prec 0$

жуўықласыўды анықлаў керек. Бул жағдайда $f(-3{,}5) \prec 0$ ҳәм $f''(-3{,}5) \prec 0$ болғанлықтан, λ_2 меншикли мәнисине басланғыш жуўықласыў есабында $\lambda_2^{(0)} = -3{,}5$ санын қабыл етемиз. Буннан соң, $f(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 9 - 15$ ҳәм $f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 4\lambda \ - 9$ функцияларының $\lambda = \lambda_2^{(0)} = -3{,}5$ болғандағы мәнисин Горнер схемасы бойынша есаплаймыз:

-3,5	1	2	-9	-15
	1	-1,5	-3,75	-1,875

-3,5	3	4	-9
	3	-6,5	13,75

Сонда λ_2 биринши жуўықласыў төмендегише анықланады:

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_2^{(0)} - \frac{f\left(\lambda_2^{(0)}\right)}{f'\left(\lambda_2^{(0)}\right)} = -3{,}5 - \frac{f(-3{,}5)}{f'(-3{,}5)} = -3{,}5 - \frac{-1{,}875}{13{,}75} =$$
$$-3{,}5 + 0{,}1363636 = -3{,}36364 \approx -3{,}364$$

λ_2ге екинши жуўықласыўды тап усындай жол менен табамыз. Оның ушын дәслеп Горнер схемасы бойынша

$$f(-3{,}364) \approx -0{,}16; \qquad f'(-3{,}364) \approx 11{,}49$$

мәнислерин есаплаймыз. Сонда $\lambda_2^{(2)}$ жуўықласыўы төмендегише анықланады:

$$\lambda_2^{(2)} = \lambda_2^{(1)} - \frac{f\left(\lambda_2^{(1)}\right)}{f'\left(\lambda_2^{(1)}\right)} = -3{,}364 - \frac{f(-3{,}364)}{f'(-3{,}364)} = -3{,}364 - \frac{-0{,}16}{11{,}49} =$$
$$-3{,}364 + 0{,}0139251 = -3{,}3500749 \approx -3{,}3500.$$

Усы жуўықласыўда иркилип, $f\left(\lambda_2^{(2)}\right) = f(-3{,}3500)$ ҳәм $f\left(\lambda_2^{(2)} + 0{,}0001\right) = f(-3{,}3499)$ мәнислериниң белгилерин тексеремиз:

$$f(-3{,}3500) \prec 0, \qquad f(-3{,}3499) \succ 0$$

болады. Сонлықтан λ_2 ның дәл мәниси $(-3{,}3500, -3{,}3499)$ аралығында жатады, яғный бул санлардың ҳәр бири λ_2 меншикли мәнисиниң бес дурыс цифр менен табылған жуўық мәниси болады. Усы себепли, қолайлылық ушын $\lambda_2 \approx -3{,}33500$ деп аламыз.

Келеси λ_3 ҳәм λ_4 меншикли мәнислерин табыўды жеңиллестириў мәқсетинде $\lambda_2 \approx -3{,}33500$ мәнисинен пайдаланып, $f(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 9 - 15$ көпағзалысын көбейтиўшилерге жиклеп жазамыз:

$$f(\lambda) \approx (\lambda + 3{,}35)(\lambda^2 - 1{,}35\lambda - 4{,}4775)$$

Сонда

$$\lambda^2 - 1{,}35\lambda - 4{,}4775 = 0$$

квадрат теңлемесин шешип, $\lambda_3 \approx -1{,}5461, \quad \lambda_4 \approx 2{,}8961$ мәнислерине ийе боламыз.

Солай етип, берилген A матрицасы мына меншикли мәнислерге ийе болады: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 \approx -3{,}33500$, $\lambda_3 \approx -1{,}5461, \quad \lambda_4 \approx 2{,}8961$.

A матрицасының табылған меншикли мәнислериниң дәллигин

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = S_p A$$

теңлигинен пайдаланып тексеремиз. Бизиң жағдайымызда

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -1 - 3{,}3500 - 1{,}5461 + 2{,}8961 = -3,$$
$$S_p A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = -4 + 0 + 2 - 1 = -3,$$

яғный $p_1 = S_p A = -3$ болады. Бул берилген A матрицасының меншикли мәнислериниң жеткиликли дәллик пенен табылғанын тастыйқлайды.

3). Берилген A матрицасының табылған меншикли мәнислерине сәйкес меншикли векторларын табыў мәселесин қараймыз. Буның ушын (6), (7) формулалары пайдаланылады. Бул жағдайда $S = M_3 M_1 M_1$ болғанлықтан (7) формуласы

$$x = Sy = M_3 M_1 M_1 y \qquad (6.11)$$

көринисинде жазылады.

а). $\lambda_1 = -1$ меншикли мәнисине сәйкес келетуғын меншикли векторын табамыз. Сонда (6) формуласы бойынша (11) деги y векторы

$$y = \left(\lambda_1^3, \lambda_1^2, \lambda_1, 1\right) = (-1,1,-1,1)'$$

көринсине ийе болады ҳәм M_1, M_2, M_3 матрицалары жоқарыда, уқсаслық түрлендириўди орынлағанда, жасалады. Сонлықтан, (11) формуласы бойынша $y = (-1,1,-1,1)'$ векторын избе-из M_1, M_2, M_3 матрицаларына көбейтип, мына нәтийжелерге ийе боламыз:

$$M_1 y = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & 19/6 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x^{(1)} = M_3 M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 2 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

б) $\lambda_2 \approx -3{,}33500$ меншикли мәнисине сәйкес меншикли векторын есаплаймыз. Бул жағдайда

$$y = \left(\lambda_2^3, \lambda_2^2, \lambda_2, 1\right) = (-37{,}595375; 11{,}2225; -3{,}35; 1)'$$

болғанлықтан, (11) формуласына пайдаланып, избе-из төмендеги нәтийжелерге келемиз:

$$M_1 y = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & 19/6 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -37{,}595375 \\ 11{,}2225 \\ -3{,}35 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}8424372 \\ 11{,}2225 \\ -3{,}35 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}8424372 \\ 11{,}2225 \\ -3{,}35 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}8424372 \\ 1{,}1775 \\ -3{,}35 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)} = M_3 M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}8424372 \\ 1{,}1775 \\ -3{,}35 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}8424372 \\ 1{,}1775 \\ 0{,}6850628 \\ 1 \end{bmatrix},$$

в) Есаплаўларды тап усылайынша орынлап, A матрицасының $\lambda_3 \approx -1{,}5461$, $\lambda_4 \approx 2{,}8961$ меншикли мәнислерине сәйкес келетуғын меншикли векторларын да табамыз. Олар сәйкес төмендеги көтиниске ийе болады:

$$x^{(3)} = (-2{,}7800106; 2{,}7939748; 0{,}5600642; 1)',$$
$$x^{(4)} = (6{,}622528; -20{,}971795; -18{,}245367; 1)'.$$

A матрицасының табылған меншикли векторларын, олардың модули бойынша ең үлкен дүзиўшилерине (координаталарына) бөлип, нормаласақ, онда олар төмендеги көринисте жазылады:

$\tilde{x}^{(1)} = (0{,}75; -1; -0{,}25; -0{,}5)'$, $\tilde{x}^{(2)} = (1; -0{,}4142571; -0{,}2410124; -0{,}3518107)'$,
$\tilde{x}^{(3)} = (-0{,}995002; 1; 0{,}2004542; 0{,}357913;)'$, $\tilde{x}^{(4)} = (-0{,}3157826; 1; 0{,}8699954; -0{,}047683)'$.

7- §. Санлы мысал

Данилевский усылының, берилген матрицаның ең соңғы қатарынан баслап Фробениус көринисине келтириўди ақырына шекем орынлаў мүмкин болмаған айырықша жағдайында, A матрицасының меншикли векторын анықлаў ушын көрсетилген усылдан пайдаланыў мүмкин болмайды.

Мысалы. Төмендеги матрицаның меншикли мәнислерин ҳәм менишикли векторларын Данилевский усылы менен табың:

$$A = \begin{bmatrix} 2.2 & 1 & 0.5 & 2 \\ 1 & 1.3 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 1.6 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \end{bmatrix}$$

Шешилиўи. 1) Дәслеп берилген матрицаны Фробениустың нормаль көринисине келтиремиз. Буның ушын Данилевский усылының есаплаў алгоритминен пайдаланып, төмендеги есаплаўларды орынлаймыз:

$$A^{(1)} = M_3^{-1} A M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.2 & 1 & 0.5 & 2 \\ 1 & 1.3 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 1.6 \\ 2 & 1 & [1.6] & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.25 & -0.625 & 0.625 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.575 & 0.6875 & 0.3125 & 1.375 \\ -1.5 & 0.05 & 1.25 & -1.5 \\ -0.125 & 1.6875 & 0.3125 & 0.975 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.575 & 0.6875 & 0.3125 & 1.375 \\ -1.5 & 0.05 & 1.25 & -1.5 \\ 1.45 & 4.125 & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Бул $A^{(1)}$ матрицасы берилген A матрицасына ҳәм оның соңғы қатары Фробениус көринисине келтирилген. Усының менен Данилевский усылының биринши адымы тамамланады. $A^{(1)}$ матрицасында $a_{32}^{(1)} = 1.6$ болғанлықтан, Данилевсикй усылының екинши адымын орынлаймыз (әдеттеги жағдай):

$$A^{(2)} = M_2^{-1} A^{(1)} M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.45 & 4.125 & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.575 & 0.6875 & 0.3125 & 1.375 \\ -1.5 & 0.05 & 1.25 & -1.5 \\ 1.45 & [4.125] & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.35152 & 0.242424 & -1.06061 & -0.68121 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.45 & 4.125 & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.33333 & 0.166666 & -0.41667 & 0.906666 \\ -1.51758 & 0.012121 & 1.19697 & -1.534060 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.33333 & 0.16666 & -0.41667 & 0.90666 \\ -1.51758 & 0.012121 & 1.19697 & -1.534060 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Усының менен уқсаслық түрлендириўди орынлаў тамамланады. Бул $A^{(2)}$ $A^{(1)}$ матрицасы еки келтирилген қатарға ийе болады. Енди $A^{(2)}$ матрицасында $a_{21}^{(2)} = 4.125$ екенлиги есапқа алып ҳәм оның дәслепки берилген матрица есабында қабыл етип, уқсас матрицаға түрлендиремиз:

$$A^{(3)} = M_1^{-1} A^{(2)} M_1 =$$

$$\begin{bmatrix} -4.32667 & 4.66666 & 7.14333 & -5.01333 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.33333 & 0.16666 & -0.41667 & 0.90666 \\ [-1.51758] & 0.012121 & 1.19697 & -1.53406 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.23112 & 1.07858 & 1.6510 & -1.15871 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.32667 & 4.66666 & 7.14333 & -5.01333 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.30817 & 1.60477 & 1.78466 & -0.63827 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0.2 & -12.735 & 2.7614 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Солай етип, бундай уқсаслық түрлендириўлерди избе-из орынлаўдың нәтийжесинде, дәслепки берилген A матрицасы Фробениустың оған уқсас $\Phi = A^{(3)} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} A M_3 M_2 M_1 = S^{-1} A S$ матрицасына келтирилди. Сонлықтан бул матирцаның көриниси бойынша (демек, A матрицасының да) меншикли көпағзалысын тиккелей жазыўға болады:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 - 0.2\lambda^2 + 12.735\lambda - 2.7616 \qquad (6.9)$$

2) Енди A матрицасының меншикли мәнислерин есаплаймыз. (9) дан $\lambda_1 = 5.652$. Солай етип, берилген A матрицасы мына меншикли мәнислерге ийе болады: $\lambda_1 = 5.652$, $\lambda_2 \approx 1.5470$, $\lambda_3 \approx -1{,}420$, $\lambda_4 \approx 0.2200$.

A матрицасының табылған меншикли мәнислериниң дәллигин

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = S_p A$$

теңлигинен пайдаланып тексеремиз. Бизиң жағдайымызда

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 5.652 + 1.5470 - 1.420 + 0.2200 = 5.9996,$$
$$S_p A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 2.2 + 1.3 + 0.5 + 2 = 6,$$

яғный $p_1 = S_p A = 6$ болады. Бул берилген A матрицасының меншикли мәнислериниң жеткиликли дәллик пенен табылғанын тастыйқлайды.

3). Берилген A матрицасының табылған меншикли мәнислерине сәйкес меншикли векторларын табыў мәселесин қараймыз. Буның ушын (6), (7) формулалары пайдаланылады. Бул жағдайда $S = M_3 M_1 M_1$ болғанлықтан (7) формуласы

$$x = Sy = M_3 M_1 M_1 y \qquad (6.11)$$

көринисинде жазылады.

а). $\lambda_1 = 5.652$ меншикли мәнисине сәйкес келетуғын меншикли векторын табамыз. Сонда (6) формуласы бойынша (11) деги y векторы

$$y = \left(\lambda_1^3, \lambda_1^2, \lambda_1, 1\right) = (180.5537, 31.9451, 5.652, 1)'$$

көринсине ийе болады ҳәм M_1, M_2, M_3 матрицалары жоқарыда, уқсаслық түрлендириўди орынлағанда, жасалады. Сонлықтан, (11) формуласы бойынша $y = (180.5537, 31.9451, 5.652, 1)'$ векторын избе-из M_1, M_2, M_3 матрицаларына көбейтип, мына нәтийжелерге ийе боламыз:

$$M_1y=\begin{bmatrix}-0.23112 & 1.07858 & 1.6510 & -1.15871\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}180.5537\\ 31.9451\\ 5.652\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8977\\ 31.9451\\ 5.652\\ 1\end{bmatrix},$$

$$M_2M_1y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -0.35152 & 0.242424 & -1.06061 & -0.68121\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8977\\ 31.9451\\ 5.652\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8977\\ 0.7529\\ 5.652\\ 1\end{bmatrix},$$

$$x^{(1)}=M_3M_2M_1y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1.25 & -0.625 & 0.625 & -1.25\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8977\\ 0.7529\\ 5.652\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8977\\ 0.7529\\ 0.6897\\ 1\end{bmatrix},$$

б) $\lambda_2\approx 1.5470$ меншикли мәнисине сәйкес меншикли векторын есаплаймыз. Бул жағдайда

$$y=\left(\lambda_2^3,\lambda_2^2,\lambda_2,1\right)'=\left(3.7023;2.3932;1.5470;1\right)'$$

болғанлықтан, (11) формуласына пайдаланып, избе-из төмендеги нәтийжелерге келемиз:

$$M_1y=\begin{bmatrix}-0.23112 & 1.07858 & 1.6510 & -1.15871\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3.7023\\ 2.3932\\ 1.5470\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.1210\\ 2.3932\\ 1.5470\\ 1\end{bmatrix},$$

$$M_2M_1y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -0.35152 & 0.242424 & -1.06061 & -0.68121\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3.1210\\ 2.3932\\ 1.5470\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.1210\\ -2.8389\\ 1.5470\\ 1\end{bmatrix},$$

$$x^{(2)}=M_3M_2M_1y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1.25 & -0.625 & 0.625 & -1.25\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3.1210\\ -2.8389\\ 1.5470\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.1210\\ -2.8389\\ -2.4101\\ 1\end{bmatrix},$$

â) $\lambda_2 \approx -1.420$ меншикли мәнисине сәйкес меншикли векторын есаплаймыз. Бул жағдайда

$$y = \left(\lambda_2^3, \lambda_2^2, \lambda_2, 1\right)' = \left(-2.8633; 2.0164; -1.420; 1\right)'$$

болғанлықтан, (11) формуласына пайдаланып, избе-из төмендеги нәтийжелерге келемиз:

$$M_1 y = \begin{bmatrix} -0.23112 & 1.07858 & 1.6510 & -1.15871 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.8633 \\ 2.0164 \\ -1.420 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6665 \\ 2.0164 \\ -1.420 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.35152 & 0.242424 & -1.06061 & -0.68121 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6665 \\ 2.0164 \\ -1.420 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6665 \\ 1.5480 \\ -1.420 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)} = M_3 M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.25 & -0.625 & 0.625 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6665 \\ 1.5480 \\ -1.420 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6665 \\ 1.5480 \\ -2.2719 \\ 1 \end{bmatrix},$$

г) $\lambda_2 \approx 0.2200$ меншикли мәнисине сәйкес меншикли векторын есаплаймыз. Бул жағдайда

$$y = \left(\lambda_2^3, \lambda_2^2, \lambda_2, 1\right)' = \left(0.0106; 0.0484; 0.2200; 1\right)'$$

болғанлықтан, (11) формуласына пайдаланып, избе-из төмендеги нәтийжелерге келемиз:

$$M_1 y = \begin{bmatrix} -0.23112 & 1.07858 & 1.6510 & -1.15871 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0106 \\ 0.0484 \\ 0.2200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7457 \\ 0.0484 \\ 0.2200 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.35152 & 0.242424 & -1.06061 & -0.68121 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7457 \\ 0.0484 \\ 0.2200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7457 \\ -0.6407 \\ 0.2200 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)} = M_3 M_2 M_1 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.25 & -0.625 & 0.625 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7457 \\ -0.6407 \\ 0.2200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7457 \\ -0.6407 \\ 0.2162 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Есаплаўларды тап усылайынша орынлап, A матрицасының $\lambda_1 = 5.652$, $\lambda_2 \approx 1.5470$, $\lambda_3 \approx -1{,}420$, $\lambda_4 \approx 0.2200$. меншикли мәнислерине сәйкес келетуғын меншикли векторларын да табамыз. Олар сәйкес төмендеги көриниске ийе болады:

$$x^{(1)} = (0.8977;\ 0.7529;\ 0.6897;\ 1)',$$
$$x^{(2)} = (3.1210;\ -2.8389;\ -2.4101;\ 1)'$$
$$x^{(3)} = (-0.6665;\ 1.5480;\ -2.2719;\ 1)',$$
$$x^{(4)} = (-0.7457;\ -0.6407;\ 0.2162;\ 1)'.$$

A матрицасының табылған меншикли векторларын, олардың модули бойынша ең үлкен дүзиўшилерине (координаталарына) бөлип, нормаласақ, онда олар төмендеги көринисте жазылады:

$$\tilde{x}^{(1)} = (1;\ 0.8387;\ 0.7683;\ 1.1140)', \qquad \tilde{x}^{(2)} = (1;\ -0{,}9096;\ -0{,}7722;\ 0{,}3204)',$$
$$\tilde{x}^{(3)} = (0.2934;\ -0.6814;\ 1;\ -0{,}4410;)',\ \tilde{x}^{(4)} = (1;\ -0.8592;\ -0.2899;\ -1{,}3410;)',$$

```
Pragram_Danilevskiy;
Uses crt;
const n=4;
  type
  matr=array[1..n,1..n] of real;
  vec=array[1..n] of real;
  procedure mmk(c,b:matr; var d:matr);
  var
  s:real;
  i,j,k:integer;
  begin
  for k:=1 to n do
  for i:=1 to n do
  begin
  s:=0;
  for j:=1 to n do
  s:=s+c[k,j]*b[j,i];
  d[k,i]:=s;
  end;
  end;
  Procedure mvk(a:matr; z:vec; var c:vec);
  var
  k,i,j:integer;
  s:real;
  Begin
  for i:=1 to n do begin
  s:=0;
  for j:=1 to n do
  s:=s+a[i,j]*z[j];
  c[i]:=s; end;
  end;
  var
  l1,l2,l3,l4:real;
  m1,m2,m3,m4:matr;
  i,j:integer;
```

```
f,f1,f2,f3,f4:text;
a,a1,aa1,a2,aa2,a3,aa3:matr;
y1,y2,y3,y4:vec;
u1,u2,u3,u4:vec;
v1,v2,v3,v4:vec;
z1,z2,z3,z4:vec;
g1,g2,g3,g4:vec;
begin
assign(f1,'j1.pas'); reset(f1);
assign(f2,'j2.pas'); reset(f2);
assign(f3,'j3.pas'); reset(f3);
assign(f4,'j4.pas'); reset(f4);
assign(f,'jj.pas'); reset(f);
assign(output,'jn.pas'); rewrite(output);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
read(f1,m1[i,j]);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
read(f2,m2[i,j]);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
read(f3,m3[i,j]);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
read(f,a[i,j]);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
read(f4,m4[i,j]);
mmk(a,m1,aa1);
for i:=1 to n do
begin
for j:=1 to n do
write(aa1[i,j]:0:0,' '); writeln;
end; writeln;
```

```
mmk(m1,aa1,a1);
for i:=1 to n do
begin
for j:=1 to n do
write(a1[i,j]:0:0,' '); writeln;
end; writeln;
mmk(a1,m2,aa2);
for i:=1 to n do
begin
for j:=1 to n do
write(aa2[i,j]:0:0,' '); writeln;
end; writeln;
mmk(m2,aa2,a2);
for i:=1 to n do
begin
for j:=1 to n do
write(a2[i,j]:0:0,' '); writeln;
end; writeln;
mmk(a2,m4,aa3);
for i:=1 to n do
begin
for j:=1 to n do
write(aa3[i,j]:0:2,' '); writeln;
end; writeln;
mmk(m3,aa3,a3);
for i:=1 to n do
begin
for j:=1 to n do
write(a3[i,j]:0:2,' '); writeln;
end;
nyuton
l1:=-1; l2:=-3.35; l3:=-1.5461; l4:=2.8961;
y1[1]:=l1*l1*l1; y1[2]:=l1*l1;y1[3]:=l1;y1[4]:=1;
y2[1]:=l2*l2*l2; y2[2]:=l2*l2;y2[3]:=l2;y2[4]:=1;
y3[1]:=l3*l3*l3; y3[2]:=l3*l3;y3[3]:=l3;y3[4]:=1;
```

```
y4[1]:=l4*l4*l4; y4[2]:=l4*l4;y4[3]:=l4;y4[4]:=1;
writeln('kkkkkkkkkk y1---->');
for i:=1 to n do
write(y1[i]:0:2,' ');
writeln;     writeln;
mvk(m4,y1,u1);
for i:=1 to n do
write(u1[i]:0:2,' '); writeln;
mvk(m2,u1,u2);
for i:=1 to n do
write(u2[i]:0:2,' '); writeln;
mvk(m1,u2,u3);
for i:=1 to n do
write(u3[i]:0:2,' '); writeln;
writeln('kkkkkkkkkk y2---->');
for i:=1 to n do
write(y2[i]:0:2,' ');
writeln;     writeln;
mvk(m4,y2,v1);
for i:=1 to n do
write(v1[i]:0:2,' '); writeln;
mvk(m2,v1,v2);
for i:=1 to n do
write(v2[i]:0:2,' '); writeln;
mvk(m1,v2,v3);
for i:=1 to n do
write(v3[i]:0:2,' '); writeln;
writeln('kkkkkkkkkk y3---->');
for i:=1 to n do
write(y3[i]:0:2,' ');
writeln;     writeln;
mvk(m4,y3,z1);
for i:=1 to n do
write(z1[i]:0:2,' '); writeln;
mvk(m2,z1,z2);
```

```
 for i:=1 to n do
 write(z2[i]:0:2,' '); writeln;
 mvk(m1,z2,z3);
 for i:=1 to n do
 write(z3[i]:0:2,' ');  writeln;
 writeln('kkkkkkkkkk y4---->');
 for i:=1 to n do
 write(y4[i]:0:2,' ');
 writeln;      writeln;
 mvk(m4,y4,g1);
 for i:=1 to n do
 write(g1[i]:0:2,' '); writeln;
 mvk(m2,g1,g2);
 for i:=1 to n do
 write(g2[i]:0:2,' '); writeln;
 mvk(m1,g2,g3);
 for i:=1 to n do
 write(g3[i]:0:2,' '); writeln;
 end.
 1.57   0.68 0.31   1.37
-1.5    0.05  1.25  -1.5
-0.12  1.68  0.31   0.97
 0.00  0.00   1.00  0.00

 1.57   0.68 0.31   1.37
-1.5    0.05  1.25  -1.5
 1.45  4.12  4.37   2.81
0.00   0.00   1.00  0.00


  1.33   0.16 -0.41   0.90
-1.51   0.01   1.19 -1.53
 0.00   1.00   0.00  0.00
 0.00   0.00   1.00  0.00
```

1.33 0.16 -0.41 0.90
-1.51 0.01 1.19 -1.53
0.00 1.00 0.00 0.00
0.00 0.00 1.00 0.00

-0.23 1.07 1.65 -1,15
1.00 0.00 0.00 0.00
0.00 1.00 0.00 0.00
0.00 0.00 1.00 0.00

6.00 0.02 -12.73 2.76
1.00 0.00 0.00 0.00
0.00 1.00 0.00 0.00
0.00 0.00 1.00 0.00

kkkkkkkkkk y1---->
180.55 31.94 5.652 1.00

0.89 31.94 5.65 1.00
0.89 0.75 5.65 1.00
0.89 0.75 0.68 1.00

kkkkkkkkkk y2---->
3.70 2.39 1.54 1.00

3.12 2.39 1.54 1.00
3.12 -2.83 1.54 1.00
3.12 -2.83 -2.41 1.00

kkkkkkkkkk y3---->
-2.86 2.01 -1.42 1.00

-0.66 2.01 -1.42 1.00
-0.66 1.54 -1.42 1.00
-0.66 1.54 -2.27 1.00

kkkkkkkkkk y4---->
0.01 0.04 0.22 1.00

-0.74 0.04 0.22 1.00
-0.74 -0.64 0.22 1.00
-0.74 -0.64 0.21 1.00

Жуўмақлаў

Питкериў қәнигелик жумысы матрицаның меншикли мәнислерин ҳәм меншикли векторларын Данилевский усылы менен есаплаәға арналған.

Питкериў қәнигелик жумысы кирисиў бөлими, тийғарғы 6 параграф, жуәмақлаә бөлими менен пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ибарат.

Питкериў қәнигелик жумысының биринши параграфы "Тийкарғы түсиниклер, белгилеәлер ҳәм анықламалар" деп аталып, онда сызықлы алгебраның тийкарғы түсиниклери, белгилеәлери ҳәм анықламалары берилди.

Питкериў қәнигелик жумысының екинши-үшинши параграфлары сызықлы алгебраның гейпара есаплаў мәселелерине, САТСларды шешиў усылларына бағышланды.

Келеси параграфларда матрицаның меншикли мәнислери ҳәм меншикли векторлары ҳаққында түсиниклер, матрицаның меншикли мәнислери ҳәм меншикли векторларының мәселелерин шешиў усыллары сөз етилди.

Соңғы параграф «Данилевский усылы» деп аталып, бул усылдың тийкарғы мәниси, матрицаның меншикли көпағзалысын жасаў жоллары, Данилевский усылының айырықша жағдайлары, матрицаның меншикли векторларын есаплаў жоллары атап өтилген ҳәм соңында әмелий мәселе шешилип көрсетилди.

ӘДЕБИЯТЛАР

1. Бабенко К.И. основы чиленного анализа. –М: Наука,1986.
2. Бахвалов Н.С. Жидков Н.П. Кабельков Г.М. Численные методы.-М.:Наука, 1987
3. Березин И.С. Жидков Н.П. Методы вычеислений т.1. - М.:Наука, 1966
4. Воедин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. М.:Наука, 1977
5. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам..-М.: Высшая школа, 1990
6. Под ред. Монастырного. П. И. Сборник задач по методам вычислений: – Мн.: Изд – во БГУ, 1983
7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислетельной математики. _ М.:Наука, 1966
8. Исроилов М., Ҳисоблаш методлари. – Тошкент: Ўзбекистон, 2003.
9. Отаров А.О. Алланазаров Ж.А. Есаплаў усыллары. Нөкис,: Билим, II-бөлим 2006
10. http:||www.ziyonet.uz|
11. http:||www.ilm.uz
12. http: ||www.dxdy.ru