ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ ПО СВЯЗИ, ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

СТУДЕНТА ___________ГРУППЫ

ДАВЛЕТОВА АЛПАМЫСА

Сдал: **А.Давлетов**

Принял: **к.ф.-м.н. А.Арзиев**

Нукус 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

План:

1. Числовая последовательность
2. Ограниченные и неограниченные последовательности.
3. Монотонные последовательности.
4. Число е.

Ключевые слова: Числовая последовательность, Определение, Общий элемент, Операции, Ограниченной, Определение, Пределом, Сходится, Свойство, Теорема, Доказательство, Монотонными.

1. Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\} \qquad (1)$$

Общий элемент последовательности является функцией от n. $x_n = f(n)$
Таким образом последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.
Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример: $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$
$\{x_n\} = \{\sin \pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число m:

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}, \text{ т.е. } mx_1, mx_2, \ldots \qquad (2)$$

2) Сложение (вычитание) последовательностей:

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}. \qquad (3)$$

3) Произведение последовательностей:

$$\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n\cdot y_n\}. \qquad (4)$$

4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$. (5)

2. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M>0$, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M \qquad (6)$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \leq M. \qquad (7)$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \geq M \qquad (8)$$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Определение. Число **a** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$**,** если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие:

$$\boxed{|a - x_n| < \varepsilon.}$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$**сходится** к a при $n\to\infty$.

Свойство: Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Пример. Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при n > N верно $\left|0-\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Это верно при $n>\frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, ..., 2+\frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n-2|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$, т.е. $\lim\{x_n\} = 2$.

Теорема. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n \to a; \; x_n \to b; \quad a \neq b.$$

Тогда по определению существует такое число ε >0, что

$$|a-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a-b|=|(a-x_n)+(x_n-b)|\le|a-x_n|+|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

А т.к. ε- **любое** число, то $|a-b|=0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

Теорема. Если $x_n \to a$, то $|x_n|\to|a|$.

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n-a|<\varepsilon$.

В то же время:

$||x_n|-|a||\le|x_n-a|$, т.е. $||x_n|-|a||<\varepsilon$, т.е. $|x_n|\to|a|$. Теорема доказана.

Теорема. *Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, \textit{при четном } n \\ 2-\dfrac{1}{n}, \textit{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2.$

3. Монотонные последовательности.

Определение.

1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.
2) Если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.
3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.
4) Если $x_{n+1} \le x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Пример. $\{x_n\}$ = 1/n – убывающая и ограниченная
$\{x_n\}$ = n – возрастающая и неограниченная.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\}=\dfrac{n+1}{2n+2+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $\{x_n\}-\{x_{n+1}\}=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)}=$

$=\dfrac{-1}{(2n+1)(2n+3)}<0$, т.к. $n\in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность

$$\{x_n\} = \frac{n}{5^n}.$$

Найдем $x_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{5 \cdot 5^n} - \frac{n}{5^n} = \frac{n+1-5n}{5 \cdot 5^n} = $ $= \frac{1-4n}{5 \cdot 5^n}$, т.к. $n \in N$, то $1 - 4n < 0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \qquad (9)$$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n \le M$, где M – некоторое число.
Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет четкую верхнюю грань, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что $x_N > a - \varepsilon$, где a – некоторая верхняя грань множества.
Т.к. $\{x_n\}$- неубывающая последовательность, то при
$N > n$ $a - \varepsilon < x_N \le x_n$, $x_n > a - \varepsilon$.
Отсюда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично.

Теорема доказана

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.
По формуле бинома Ньютона:
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$ или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$.

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\textit{геометр. прогрессия}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad (10)$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ следует, что e ≤ 3. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем

$$e\geq 2+\frac{1}{2}=2{,}5$$

Таким образом, число e заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e.

Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, расширив требования к x до любого действительного числа:

Предположим: $$n \le x \le n+1$$

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{n+1}$$

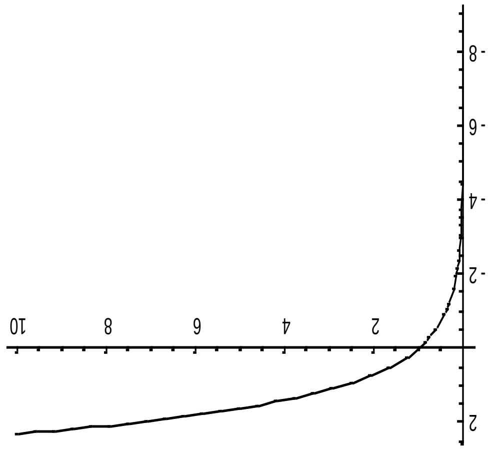
$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} \ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{e}{1} = e;\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Число е является основанием натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \quad т.е. \quad e^y = x.$$



Выше представлен график функции y = lnx.

Связь натурального и десятичного логарифмов.

Пусть x = 10^y, тогда lnx = $\ln 10^y$, следовательно lnx = yln10

y = $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M \ln x;\qquad \ln x = \frac{1}{M}\lg x$, где M = 1/ln10 ≈ 0,43429…- модуль перехода.

2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1

Написать первые 4 члена последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Решение.

Подставляя в формулу общего члена n=1,2,3,4, последовательно находим

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1 \quad x_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} \quad x_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Пример 2.

Написать первые 4 члена последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_n = n!$$

Решение.

Общий член последовательности $x_n = n!$ представляет собой произвведение всех натуральных чисел от 1 до n. Поэтому

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1\cdot 2 = 2,\ x_3 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6\ ,\ x_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

Пример 3.

Написать первые 4 члена последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_1 = 1,\ x_n = x_{n-1} + 2$$

Решение.

Данная последовательность задана рекуррентно: каждый последующий член последовательности вычисляется через предыдущий. Имеем:

$$x_1 = 1,\ x_2 = x_1 + 2 = 1 + 2 = 3,\ x_3 = x_2 + 2 = 3 + 2 = 5\ ,\ x_4 = x_3 + 2 = 5 + 2 = 7$$

Пример 4.

Исследовать последовательность на монотонность и сьрогую монотонность : $x_n = 2n + 1$

Решение. В данном случае для всех натуральных n

$$x_{m+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3 > 2n + 1 = x_n$$

Поэтому последовательность x_n возрастающая.

Пример 5.

Исследовать последовательность на монотонность и сьрогую

монотонность : $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Решение.

Найдём три первые элемента:

$$x_1 = -1,\ x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_1 = \frac{1}{3}$$

Отсюда видно, что с одной стороны $x_1<x_2$, а с другой – $x_2<x_3$. Значит, данная последовательность не является монотонной.

Пример 6.

Исследовать последовательность на монотонность и сьрогую

монотонность : $x_n = \frac{1}{n^2}$

Решение.

Так как

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = x_n$$

То данная последовательность убывает.

Пример 7.

Исследовать последовательность на монотонность и сьрогую монотонность : $x_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Решение.

В данном случае для всех натуральных n

$$x_{n+1} = \lfloor \sqrt{(n+1)} \geq \rfloor \sqrt{n} = x_n$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ не убывает. Отсутствие строгого возрастания следует из того , что $x_1 = x_2 = 1$

Пример 8.

Доказать по определению, что следующий последовательность бесконечно малый: $\alpha_n = \frac{1}{n}$

Решение.

Пусть ε - произвольное положительное число. Тогда требование $|\alpha_n| < \varepsilon$ влечёт за собой неравенства

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \ n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Так как номер N должен быть натуральным числом, положим

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

При $n \geq N$ будем иметь

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Это и означает , что последовательность α_n бесконечно малая.

Пример 9.

По определению предела доказать , что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n-1} = 1$

Решение.

Зададимся произвольным положительным числом ε и обозначим $x_n = \dfrac{n}{n-1}$. Тогда $\left|x_n - 1\right| = \left|\dfrac{n}{n-1} - 1\right| = \left|\dfrac{n-(n-1)}{n-1}\right| = \dfrac{1}{n-1}$

и

$$\left|x_n - 1\right| < \varepsilon,\ \frac{1}{n-1} < \varepsilon,\ n-1 > \frac{1}{\varepsilon},\ n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

3. ТЕСТЫ

1. Найти 4 член последовательности: $x_n = \frac{n}{n+2}$

A) $x_4 = \frac{1}{3}$ *B) $x_4 = \frac{4}{6}$ C) $x_4 = \frac{3}{5}$ D) $x_4 = \frac{2}{4}$

2 Найти предел последовательности: $x_n = \frac{n}{n+1}$

*A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$

3. Переменная x_n имеет предел -1. Найти предел переменной $y_n = \frac{4-3x_n - x_n^2}{1-x_n}$

A) 4 B) 1 *C) 3 D) 5

4. Найти предел переменной $x_n = \frac{2n^2 - n + 1}{n^2+2}$

*A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

5. Найти предел переменной $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}$

A) 1 B) 4 C) 0 *D) ∞

6. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+1}$

A) 0 *B) 3 C) ∞ D) -1

7. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

A) 1 B) 2 C) ∞ *D)0

8. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

*A) 0 B) 1 C) cosn D) ∞

9. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$

A) e *B) e^2 C) 1 D) 0

10 . Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n \cdot 2}{n}$

A) e B) 1 *C) 0 D) ∞

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Гусак А.А. Высшая математика. Том 1. Минск. Изд-во БГУ. 1983 год.**
2. **Баврин И.И. Высшая математика. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 616 с.**
3. **Гусак А.А., Бричикова Е. А., Гусак Г. М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. Мн.: Тетрасистемс, 2002.**
4. **Кастрица О.А. Высшая математика для экономистов. М.: Новое знание, 2009**
5. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.**
6. **М.: Наука, 1976.**