O`ZBEKİSTAN RESPUBLİKASI BAYLANIS, İNFORMATSİYALASTIRIW HA`M TELEKOMMUNİKATSİYA TEXNOLOGİYALARI MA`MLEKETLİK KOMİTETİ

TASHKENT İNFORMATSİYALIQ TEXNOLOGİYALARI UNİVERSİTETİ NO`KİS FİLİALI

«İnformatsiyalıq texnologiyalar» kafedrası

Komp`yuter injinirin` fakul`teti

«İnformatika ha`m informatsiyalıq texnologiyalar»
bag`darının` 4-kurs studenti
Abdreymov Temirbektin`

PİTKERİW QA`NİGELİK JUMISI

Teması: Operatsiyalardı izertlewdin` ko`p kriteriyli ma`selesin Pareto usılında sheshiw.

İlimiy basshısı,	
«O`zbekstan pochtası» AAJ	
Qaraqalpag`ıstan filialı	**Kuandıkov.K.A**
direktor orınbasarı:	
İlimiy ma`sla`ha`tshi:	**prof.Uteuliev N.U.**
Kafedra baslıg`ı:	**t.i.k. Arzımbetov T.Z**

NO`KİS - 2014 j.

MAZMUNI

Kirisiw

Sızıqlı programmalastırıw ekonomikada en` ko`p rawajlang`an instrumental qurallardın` biri bolıp esaplanadı. Qa`legen karxananın` tabıslı islewi belgili da`rejede orınlanıp atırılg`an operatsiyalardın` (a`mellerdin`) kompleksli ha`m sistemalı sho`lkemlestirilgen rejelestiriwdin` sapası menen belgilenedi. Sızıqlı programmalastırıw basqarıw apparatının` analizlew mumkinshiliklerinin` effektivligin anag`urlım joqarılatıwg`a mumkinshilik beredi. Sızıqlı programmalastırıwdın` payda bolıwı ha`m a`melde qollanılıwı duniya juzlik ja`miyetshilik ta`repinen basqarıw sheshimlerin modellestiriw tarawında u`lken ullı jetiskenliklerin biri sıpatında bahalanadı. Bul dun`ya juzi boyınsha a`hmiyetli jetiskenlik ushın amerikalı ilimpaz T. Kumpansqa ha`m ha`zirgi rossiyalı matematik-ekonamist L.V. Kont`trovichke 1975 jılı ekonomika boyınsha Nobel` premiyası berildi.

Sonın` menen birge, sızıqlı programmalastırıw ja`rdeminde ekonomikanı izertlew mumkinshilikleri burın belgisiz bolg`an ha`m so`zsiz sapa jag`ınan jan`a mumkinshilikler bolıwı menen bir qatarda, ol bir neshe kemshiliklerge iye bolg`an. Sol kemshiliklerdin` en` a`hmiyetlilerinin` biri, ekonomikalıq protsesslerdin` sistemalı analizine jiyi ha`m ulken ta`sir etetug`ın kemshilik to`mendegiden ibarat:

Olda bolsa basqarıwdın` sapasın bahalaw bir maqset funktsiyasının` sanlı ma`nisi boyınsha alıp barıladı.

A`meliyatta bolsa bul bahalawdı jiyi bir waqıttın` o`zinde bir neshe ko`rsetkishler boyınsha islewge tuwrı keledi. Bir qansha mısallar menen tusindirip o`temiz.

Karxananın` islew protsessinde maqsetler qoyıladı: mumkin  bolg`an paydanı maksimallastırıw ha`m o`nimdi shıg`arıwdın` natural ha`m bahalı ma`nisinde shıg`arıwg`a erisiw, sonın` menen bir qatarda bazar ha`m zakazchik ta`repinen ko`rsetilgen assartimentin uslap pa`seytiw, o`ndiristin` belgili da`rejede sapalılıg`ına ha`m rentabelligine erisiw h.t.b

Bul ko`rsetkishlerdin` geyparaları olardı iske asırıwda bir-birine qarama-qarsı bolıwı mumkin. Ma`selen o`nimdi maksimal shıg`arıwg`a umtılıw sol waqıttın` o`zinde o`zine tuser bahanın` ko`teriliwine alıp keledi, sebebi ha`r bir taza o`nimdi islep shıg`ıw ushın qosımsha shıg`ın boladı. O`ndiristin` o`zine tu`ser bahasın minumumlastırıw tek sonday jag`dayda maqsetke muwapıq boladı, qashan o`ndiristin` kerekli bolg`an ko`lemi anıq belgili bolsa bunday qarama-qarsılıqlar basqada dara ko`rsetkishlerdin` mısalında ushrasıwı mumkin. Juwmaqlastırıp aytqanda eki al`ternativdan birewin ko`z aldımızg`a keltiremiz: yamasa qandayda bir o`ndiris rejesi boyınsha ha`mme esapqa alıng`an dara kriterial ko`rsetkishler o`nim shıg`arıwdın` dinamikasının` (o`siwinin`) protsessinde bir-birine uqsas bolıp keledi, bunın` menen o`zlerinin` maksimal yamasa minimal ma`nislerinde bir waqıttın` keminde jetiwge eriside, yamasa bunday reje bolıwı mumkin emes.

Birinshi alternativg`a sa`ykes keletug`ın bir kriteriyalı jag`day bolıp, onda modelde paydalanatug`ın kriteriy mazmunı boyınsha tiykarı bolıp esaplanadı, al qalg`anları esapqa alınbaydı.

Ekinshi alternativa to`mendegiden ibarat: a`meliy ko`z-qarastan aqılg`a sa`ykes bolg`an kompromiss (kelisim) saylanıp, ol o`ndiristin` qolaylı variantında jeke maqset ko`rsetkishlerinin` mumkitn potentsial bolg`an en` jaqsı ma`nislerine erisilmeydi, biraq bul variantı ushın ha`r bir ko`rsetkish belgili bir o`lshemde optimal ma`niske jaqın boladı.

Ko`pshilik sotsial-ekonomikalıq ha`m texnikalıq ob`ektlerdi modellestiriw maqsetinde olardı formallastırıwda optimallastırıw usılların qollanıw maqsetke muwapıq. Bul jag`dayda usınday usıllardın` u`lken klassı sızıqlı programmalastırıw ma`selelerine alıp kelinedi. Bunday ma`seleler ko`pshilik jag`dayda mu`mkin bolg`an sheshimler ko`pliginde shegaralıq sha`rtler tiykarında maqset funktsiyaların minimumlastırıw ma`selesine alıp keledi. Ko`pshilik jag`daylarda ob`ektler ushın maqset funktsiya bir kriteriya menen berilmeydi, al ko`p kriteriya menen vektorlı maqset funktsiya arqalı tolıg`ıraq an`latıladı. Basqasha aytqanda sızıqlı programmalastırıwdın` klassikalıq ma`selesi ko`p kriteriyalı sızıqlı programmalastırıw ma`selesine alıp kelinedi.

Bunday tu`rdegi ma`selelerdi sheshiwdin` sheshimler qabıl etiw teoriyasında konstruktiv apparat islep shıg`ılg`an. Bul pitkeriw qa`nigelik jumısında ko`p kriteriyalı ma`selesin ayırım belgili metodlar menen sheshiw protsessi qaraladı.

Pitkeriw qa`nigelik jumısı kirisiw bo`liminen, altı praragraftan, juwmaqlaw, paydalang`an a`debiyatlar dizimi ha`m qosımshadan ibarat.

Jumıstıq kirisiw bo`liminde ko`p kriteriyalı ma`seleler haqqında so`z etiledi.

Birinshi paragrafta sızıqlı programmalastırıw ma`selelerin skalyarlıq ha`m vektorlıq kriteriyalar menen sheshiw haqqında so`z etiledi.

Ekinshi paragrafta sızıqlı programmalastırıwdın` tiykarg`ı ma`selesi sheshiminin` bar bolıwı ha`m onı tabıwdın` usılları qaraladı.

U`shinishi paragrafta sızıqlı programmalastırıw ma`selesin simpleks metodı menen sheshiw ko`riledi.

To`rtinshi paragrafte ko’p kriteriyli sızıqlı programmalastırıw ma’selesin sheshiwdin’ Pareto usılı qaraldi.

Juwmaqlaw bo`liminde pitkeriw qa`nigelik jumısında anıqlang`an na`tiyjeler keltiriledi.

§1. Sızıqlı programmalastırıw ma`selelerin skalyarlıq ha`m vektorlıq kriteriyalar menen sheshiw.

Ha`zirgi waqıtta optimallastırıwdı ilimde, texnikada ha`m adam iskerliginin` basqa tarawlarında da qollanıp kelmekte.

Optimallastırıw – sol waqıttag`ı jag`dayg`a qaramastan en` jaqsı na`tiyje alıw ushın maqsetke bag`darlang`an iskerlik.

Optimallıq sheshimlerdi izlew ayrıqsha matematikalıq metodlardı jaratıwg`a alıp keldi ha`m 18 a`sirde-aq optimizatsiyanın` matematikalıq tiykarları payda bola basladı (variatsiyalıq esaplaw, sanlı metodlar ha`m t.b.). Biraqta 20 a`sirdin` ekinshi yarımında optimallastırıw metodların ilim ha`m texnikanın` ko`pshilik tarawlarında az qollanılatug`ın edi, sebebi optimallastırıwdın` matematikalıq metodları a`meliyatta EEM siz iske asırıw qıyın bolg`an u`lken ko`lemdegi esaplawlardı talap etetug`ın edi.

Ma`selenin` qoyılıwına baylanıslı qa`legen optimizatsiya ma`selesi ha`r qıylı metodlar menen sheshiliwi ha`m kerisinshe qa`legen metod ko`pshilik ma`selelerdi sheshiwge qollanılıwı mu`mkin. Optimallastırıw metodları skalyarlı (bir kriteriya boyınsha optimallastırıladı), vektorlı (ko`p kriteriya boyınsha optimallastırıladı), izlewshi (regulyar ha`m tosınallı izlew metodlardı o`z ishine aladı), analitikalıq (differentsial ha`m variatsiyalıq esaplaw metodları ha`m t.b.), esaplawshı (matematikalıq programmalastırıwg`a tiykarlang`an sızıqlı, sızıqlı emes, diskretli, dinamikalıq, stoxastikalıq, evristikalıq ha`m t.b. bolıwı mu`mkin), itimallılıqlı-teoriyalıq, oyınlı-teoriyalıq ha`m t.b. bolıwı mu`mkin.  Shegaralı ha`m shegarasız ma`seleler optimallastırıwg`a alınıp keliniwi mu`mkin.

Ko`p qollanılatug`ın optimallastırıw metodlarının` biri bul sızıqlı programmalastırıw. Sızıqlı programmalastırıw en` birinshi ha`m tolıq u`yrenilgen optimallastırıw metodları bo`liminin` biri. Sızıqlı programmalastırıw ma`selesine to`mendegiler kiredi:

– o`nim ha`m materiallardan ratsional` paydalanıw;

– mekemenin` o`ndirislik programmasın optimallastırıw;

– transızıqlı programmalastırıwort jumısındag`ı ju`k tasıwdın` optimal planın qurıw;

– o`ndirislik zapaslardı basqarıw;

– optimal planlastırıw tarawına kiriwshi basqada ma`seleler.

Sızıqlı programmalastırıw ma`selesi dep, maqset funktsiyasıda ha`m ten`leme ha`m ten`sizlik ko`rinisindegi shegaralıq sha`rtlerde sızıqlı bolg`an ma`sele. Qısqasha sızıqlı programmalastırıw ma`selesin basqasha ta`riyplesekte boladı: sızıqlı ten`leme ha`m ten`sizlik ko`rinisindegi m shegaralıq sha`rtler boyınsha sızıqlı maqset funktsiyanın` ekstemumg`a erisiwinin` o`zgeriwshi vektor ma`nislerin tabıw.

Anıqlama tiykarınla, sızıqlı programmalastırıw ma`selesi mına ko`rinisinde jazıwg`a boladı:

$$\begin{aligned}
&\min(\max)(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i\,(i = \overline{1,k}),\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i\,(i = \overline{k+1,k+s}),\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\,(i = \overline{k+s+1,m}),\\
&x_j \ge 0,(j = \overline{1,n}),
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

Bull jerde $c_j, a_{ij}, b_{ij}\,(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ R haqıyqıy sanlardın` qandayda bir u`les F maydanının` elementleri bolıp tabıladı. Sızıqlı programmalastırıw dın` bunday forması ulıwma forması dep ataladı.

Sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` to`mendegi ko`rinisi

$$\begin{aligned}
&\min(\max)(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n),\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\,(i = \overline{1,m}),\\
&x_j \ge 0(j = \overline{1,n}),
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

kanonikalıq bolıp tabıladı, al sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` bul ko`rinsi

$$\begin{aligned}&\min(\max)(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n),\\&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i\,(i = \overline{1,m}),\\&x_j \ge 0(j = \overline{1,n}),\end{aligned} \qquad (1.3)$$

Standart forması bolıp tabıladı (normal).

Bunnan basqa ten`sizliktin` on` jaqları teris emes bolıwı tiyis yag`nıy to`mendegi sha`rtti qanaatlandıradı

$$b_i \ge 0 \;(i = \overline{1,m}).$$

Meyli A - matritsası $m \times n$ elementleri a_{ij}, b - bag`ana-vektor $(b_1,...,b_m)^T$, a $c$ - vektor-qatar $(c_1,...,c_n)$. Sızıqlı programmalastırıw ma`selesin kanonikalıq ha`m standart formasın matritsalıq ko`riniste

$$\begin{aligned}&\min(\max)cx,\\&Ax = b,\\&x \ge 0,\end{aligned} \qquad (1.4)$$

$$\begin{aligned}&\min(\max)cx,\\&Ax \le b,\\&x \ge 0,\end{aligned} \qquad (1.5)$$

Sızıqlı programmalastırıw ma`selesin sheshiwde qandayda bir metodtı qollanıw ushın standart formadan kanonikalıq formag`a o`tiw za`ru`r. Bul ha`r bir $ax \le b$ ko`rinisindegi ten`sizligine x' o`zgeriwshiisin qosıw menen erisiledi. Bunnan,

$$ax \le b \;\Rightarrow\; ax + x' = b.$$

Maqset funktsiyanı maksimumnan minimumg`a o`teriw ushın

$$\begin{aligned}&\max(-cx), \\ &Ax \le b, \\ &x \ge 0,\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}&\min cx,\\&Ax \le b,\\&x \ge 0.\end{aligned}$$

paydalanıladı.

§2. Sızıqlı programmalastırıwdın` tiykarg`ı ma`selesi sheshiminin` bar bolıwı ha`m onı tabıwdın` usılları.

Sızıqlı programmalastırıwdın` tiykarg`ı ma`selesin qarastıramız: $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, o`zgeriwshilerdin` teris emes ma`nislerin

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n &= b_{m,} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

ten`lemelerdin` m sha`rtlerin qanaatlandırıwshı ma`nislerin tabıw

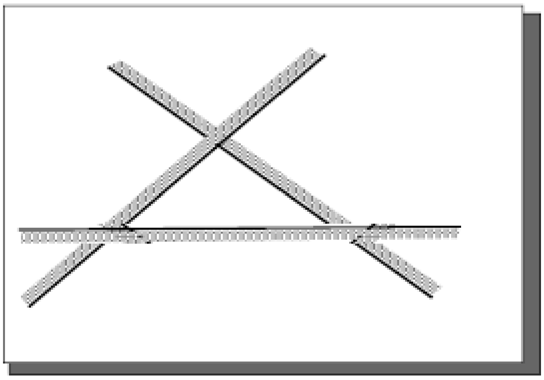
ha`m sol o`zgeriwshilerdin` sızıqlı funtsiyanı maksimumg`a aylandırıwshı

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \Rightarrow \max. \qquad (2.2)$$

A`piwayılıq ushın, (2.1) barlıq sha`rtleri sızıqlı g`a`rezsiz (r=m).

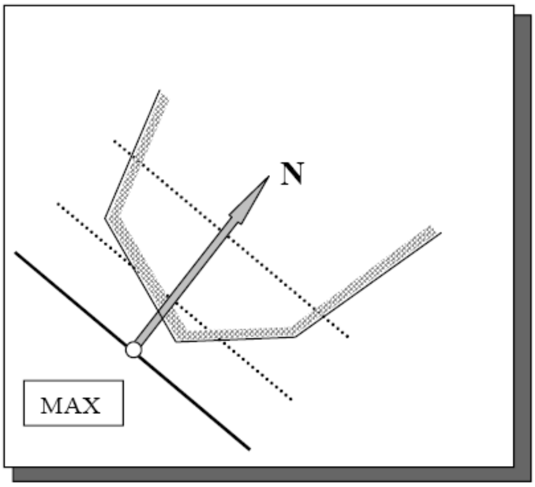
(2.1) sha`rtin qanaatlandırıwshı $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, teris emes ma`nisler sızıqlı programmalastırıw tiykarg`ı ma`selesinin` jetkilikli sheshimi dep ataymız. (2.2) funktsiyanı maksimumg`a aylandırıwshı jetkilikli sheshimlerine optimallı deymiz. Optimal sheshimdi tabıw talap etiledi.

Shegaralıq sha`rtler sistemanın` birgeliksizliginen sistema bir de sheshimge iye emes.



Su`wret 2.1 – Shegaralıq sha`rtler sistemasının` birgeliksizligi

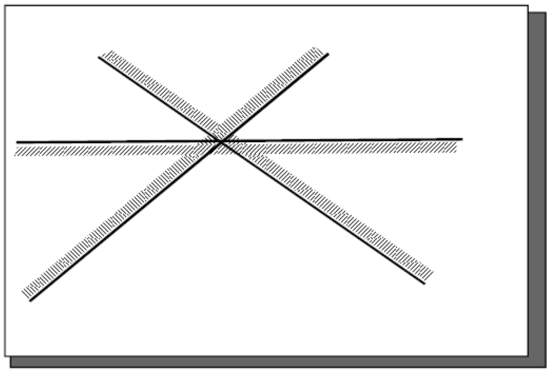
Sheshimler ko`pliginde maqset funktsiyanın` shegarasızlıg`ınan, basqasha aytqanda sızıqlı programmalastırıw ma`selesin max ge sheshkende maqset funktsiya sheksizlikke umtıladı, al sızıqlı programmalastırıw ma`selesin min dege jag`dayda –minus sheksizlikke, su`wret 2 degi sıyaqlı.



Su`wret 2.2 – Sheshimler ko`pliginde maqset fugktsiyanın` sheksizligi

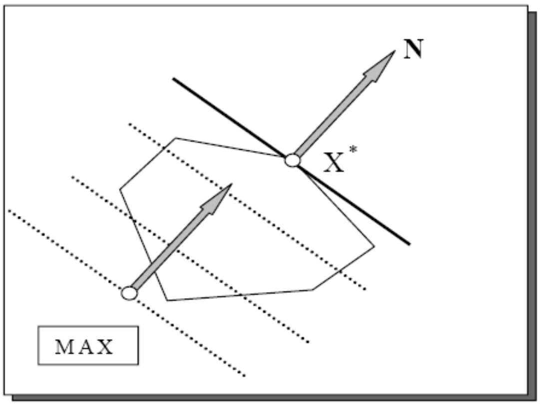
sızıqlı programmalastırıw ma`selesi sheshimge iye:

Sheshimler ko`pligi bir noqattan ibarat bolsa. Su`wret 3 te ko`rsetilgendey ol optimal bolıpta tabıladı.



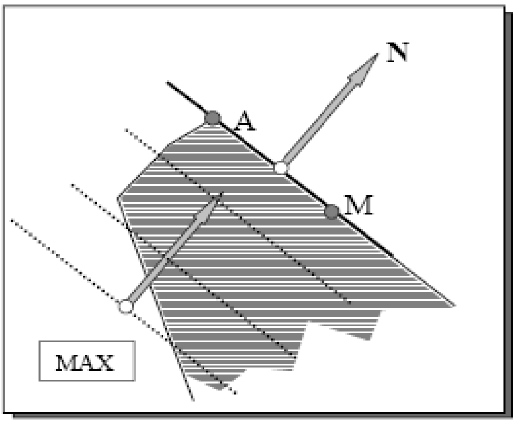
Su`wret 2.3 - Sheshimler ko`pligi bir noqattan ibarat

sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` jalg`ız bir optimal sheshimi. Su`wret 4 te ko`rsetilgendey tuwrı maqset funktsiyasına sa`ykes keliwshi shekli jag`dayda sheshimler ko`pliginde bir noqatta kesilisedi.



Su`wret 2.4 – Jalg`ız bir optimal sheshim

Sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` optimal sheshimi jalg`ız birew emes. N vektorı sheshimler ko`pliginin` bir ta`repine perpendikulyar. Su`wret 5 degidey bull jag`dayda AB kesindidegi qa`legen noqat optimal bolıp tabıladı.



Su`wret 2.5 – Optimal sheshim jalg`ız birew emes

§3. Sızıqlı programmalastırıw ma`selesin simpleks metodı menen sheshiw.

Joqarıda paragraflarda bayanlang`an materiallar tiykarında to`mendegi juwmaqqa keliwge boladı. Ma`selenin` maqset funktsiyası o`zinin` en` u`lken (en` kishi) ma`nisine erisetug`ın sheshimler ko`pjaqlısının` mu`yesh noqatı (to`besi) bar boladı. Ko`pjaqlının` ha`r bir to`besine ma`selenin` tayanısh sheshimi sa`ykes keledi. Ha`r bir tayanısh sheshimi, berilgen $n$ vektordan ibarat bolg`an $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar sistemasındag`ı $m$ sızıqlı baylanıssız vektorlardın` sisteması menen anıqlanadı. Ma`selenin` optimal` sheshimin tabıw ushın onın` tek tayanısh sheshimlerin g`ana izertlew kerek. Berilgen ma`selenin` tayanısh sheshimlerinin` joqarg`ı shegarası $C_n^m$ teriwlerinin` sanı menen anıqlanadı. Bundag`ı $m$ ha`m n nin` u`lken ma`nislerinde barlıq tayanısh sheshimlerinin` arasınan optimal` sheshimdi anıqlaw og`ada qıyın boladı. Sonlıqtan bir tayanısh sheshiminen ekinshisine belgili ta`rtip boyınsha o`tiwdi iske asıratug`ın usıl kerek. Ma`selenin` belgili tayanısh sheshiminen baslap, shekli sandag`ı adımda onın` optimal` sheshimin tabıwg`a mu`mkinshilik beretug`ın usıl simpleks usılı dep ataladı. Onın` ha`r bir adımı (iteratsiyası), tabılg`an tayanısh sheshimi menen salıstırg`anda, maqset funktsiyasına u`lken (kishi) ma`nis beretug`ın jan`a tayanısh sheshimin tabıwdan ibarat boladı. Bul protsess ma`selenin` optimal` sheshimi tabılg`ansha dawam etedi. Egerde ma`sele sheshimge iye bolmasa yamasa onın` maqset funktsiyası sheshimler ko`pjaqlısında shegaralanbag`an bolsa, onda simpleks usılı bunday jag`daylardı da anıqlawg`a mu`mkinshilik beredi.

Solay etip, sızıqlı programmalastırıw ma`selesin sheshiwdin` simpleks usılının` tiykarg`ı mazmunı mınalardan ibarat:

1) ma`selenin` baslang`ısh tayanısh sheshimi tabıladı;

2) maqset funktsiyasının` ma`nisi anıq optimal` ma`nisine jaqın bolg`anday etip, bir tayanısh sheshiminen ekinshisine o`tiw iske asırıladı;

3) ma`selenin` tayanısh sheshimlerin optimallıqqa tekseriwdi o`z waqtında toqtatıwg`a yamasa onın` sheshiminin` joq ekenligi haqqında juwmaq shıg`arıwg`a, yag`nıy ma`seleni sheshiw protsessinin` tamamlang`anın anıqlawg`a mu`mkinshilik beretug`ın o`lshemlerdi (kriteriylerdi) anıqlaydı.

Simpleks usılının` teoriyalıq tiykarların, sızıqlı programmalastırıwdın` tiykarın salıwshılardın` biri, AQSh tın` Kaliforniya universitetinin` professorı Djordj Bernard Dantsig 1949-jılı ja`riyalang`an. Usıldın` ataması, onın` da`slepki waqıtları mu`mkin bolg`an sheshimlerinin` oblast`ları a`piwayı ko`rinislerge iye bolg`an ma`selelerdi sheshiwge qollanılıwına baylanıslı kelip shıqqan (“simpleks” ataması latınnın` “simplex” degen so`zinen alıng`an bolıp, bizin`she “a`piwayı” degen ma`nisti an`latadı. Onın` matematikalıq ma`nisi berilgen sandag`ı o`lshemli a`piwayı do`n`es ko`pjaqlını, ma`selen tegislikte u`shmu`yeshlikti, ken`islikte tetraedrdi (u`shmu`yeshli piramidanı) an`latadı).

Egerde ma`selenin` sha`rtleri ha`m da`slepki berilgen mag`lıwmatları simpleks-keste dep atalatug`ın arnawlı kestege jazılsa, onda onın` tayanısh sheshimin optimallıqqa tekseriw ha`m bunnan son`g`ı esaplaw jumısların orınlaw a`dewir jen`illesedi (3.1-keste).

Kestenin` B bag`anasına tayanısh sheshimnin` bazisine kirgen vektorlar, al $C_Б$ bag`anasına, berilgen bazistin` vektorları qanday indekslerge iye bolsa, maqset funktsiyasının` belgisizlerinen tap sonday indekslerge iye bolg`an koeffitsientleri jazıladı. $P_0$ bag`anasına baslang`ısh tayanısh sheshiminin` on` du`ziwshileri (sheklewlerinin` saltan` ag`zaları) jazıladı: Usı bag`anag`a esaplawlardı orınlawdın` na`tiyjesinde kelip shıqqan, ma`selenin` optimal` sheshiminin` on` du`ziwshileri de jazıladı. Al $P_j$ vektorlarının` bag`anaları bul vektorlardı bazis vektorları boyınsha jiklewdin` koeffitsientlerin an`latadı.

3.1-keste

i	B	$C_Б$	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_r	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
				P_1	P_2	$\dots$	P_r	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2n}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
r	P_r	c_r	b_r	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	a_{rm+1}	$\dots$	a_{rn}	$\dots$	a_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	δ_{m+1}	$\dots$	δ_k	$\dots$	δ_n

Kestenin` da`slepki m qatarı ma`selenin` da`slepki berilgen mag`lıwmatları menen anıqlanadı, al $(m+1)$ qatarındag`ı mag`lıwmatlar esaplawlardı orınlaw arqalı tabıladı. Bul son`g`ı qatarına P_0 vektorınын` bag`anasına berilgen tayanısh sheshimine sa`ykes maqset funktsiyasının` ma`nisi $Z_0$, al $P_j$ vektorının` bag`anasına $\delta_j = Z_j - c_j$ bahasının` ma`nisi jazıladı. Bundag`ı Z_j ma`nisi $P_j$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$ vektorının` $C_Б = (c_1, c_2, ..., c_m)$ vektorına skalyar ko`beymesi esabında anıqlanadı:

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$$

Al Z_0 ma`nisi $P_0$ vektorının` $C_Б$ vektorına skalyar ko`beymesine ten`:

$$Z_j = Z\left(X^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

Bul 3.1-simpleks-kesteni toltırıp bolg`annan son`, baslang`ısh tayanısh sheshimdi optimallıqqa tekseredi. Bunın` ushın kestenin` $(m+1)$-qatarın ko`zden o`tkeredi. Usının` na`tiyjesinde to`mendegi u`sh jag`daydın` birewi orın alıwı mu`mkin:

1) $j = m+1, m+2, ..., n$ ma`nisleri ushın $\delta_j \geq 0$ ($j = \overline{1,m}$ bolg`anda $\delta_j = 0$ ha`m $Z_j = c_j$) boladı. Sonlıqtan bul jag`dayda barlıq $j = \overline{1,n}$ ushın $\delta_j \geq 0$ ten`sizligi orınlanadı;

2) bazı bir j indeksi ushın $\delta_j < 0$ ha`m bul indekske sa`ykes keletug`ın barlıq $a_{ij} \leq 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ boladı;

3) bazı bir j indeksleri ushın $\delta_j < 0$ ha`m bunday ha`r bir j ushın a_{ij} sanlarının` en` keminde birewi on` san boladı.

Birinshi jag`dayda $Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ optimallıq sha`rti boyınsha baslang`ısh tayanısh sheshimi optimal` sheshim boladı. Ekinshi jag`dayda mu`mkin bolg`an sheshimler ko`pliginde maqset funktsiyası joqarıdan shegaralanbag`an. Al, u`shinshi jag`dayda, ma`selenin` maqset funktsiyasının` ma`nisi o`skendey etip, baslang`ısh tayanısh sheshiminen jan`a tayanısh sheshimine o`tiwge boladı. Ma`selenin` bir tayanısh sheshiminen onın` ekinshi tayanısh sheshimine o`tiw, da`slepki bazisten qanday da bir vektordı shıg`arıw ha`m onın` ornına baziske jan`a vektordı kirgiziw arqalı iske asırıladı. Baziske kirgiziletug`ın vektor esabında $\delta_j < 0$ sha`rtin qanaatlandıratug`ın qa`legen P_j vektorın alıwg`a boladı. Ma`selen, egerde $\delta_k < 0$ bolsa, onda baziske P_k vektorı kirgiziledi.

Bazisten shıg`arılatug`ın vektordı anıqlaw ushın barlıq $a_{ik} > 0$ sanları ushın $\min\limits_{i}\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\right)$ shamasın tabadı. Meyli, bul minimumg`a $i = r$ bolg`anda erisilgen bolsın. Sonda bazisten P_r vektorı shıg`arıladı, al $a_{rk}$ sanın sheshiwshi element dep ataydı. Sheshiwshi element kesilisızıqlı programmalastırıwesinde jaylasqan bag`ana ha`m qatar bag`darlawshı bag`ana ha`m bag`darlawshı qatar dep ataladı.

Bag`darlawshı bag`ana ha`m bag`darlawshı qatar anıqlang`annan son`, jan`a tayanısh sheshimi ha`m P_j vektorının` bul sheshimge sa`ykes jan`a bazis vektorları boyınsha jikleniwinin` koeffitsientleri tabıladı. Bunı Jordan-Gauss usılı menen an`sat iske asırıwg`a boladı. Bul jag`dayda, jan`a tayanısh sheshiminin` on` du`ziwshileri mına formulalar menen esaplanadı:

$$b_i' = \begin{cases} b_i - (b_r / a_{rk}) a_{ik}, & \text{егер } \ i \neq r \ \text{ болса}, \\ b_r / a_{rk}, & \text{егер } \ i = r \ \text{ болса} \end{cases} \tag{3.1}$$

Al P_j vektorlarının` jan`a tayanısh sheshimine sa`ykes keletug`ın jan`a bazistin` vektorları boyınsha jikleniwlerinin` koeffitsientleri to`mendegi formulalar boyınsha tabıladı:

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj} / a_{rk}) a_{ik}, & \text{егер } \ i \neq r \ \text{ болса}, \\ a_{rj} / a_{rk}, & \text{егер } \ i = r \ \text{ болса} \end{cases} \tag{3.2}$$

Bul (3.1) ha`m (3.2) formulaları boyınsha $b_i'$ ha`m a_{ij}' sanları esaplang`annan son`, olardın` san ma`nisleri jan`a simpleks-kestege jazıladı (3.2-keste). Sonda bul kestenin` $(m+1)$-qatarının` elementleri

$$z_0' = z_0 - (b_r / a_{rk}) \delta_k , \tag{3.3}$$

$$\delta_j' = \delta_j - (a_{rj} / a_{rk}) \delta_k \tag{3.4}$$

formulaları menen yamasa olardın` anıqlaması boyınsha esaplanadı.

3.2-keste

i	B	$C_Б$	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_r	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
				P_1	P_2	$\dots$	P_r	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
1	P_1	c_1	b_2'	1	0	$\dots$	a_{1r}'	$\dots$	0	a_{1m+1}'	$\dots$	0	$\dots$	a_{1n}'
2	P_2	c_2	b_2'	0	1	$\dots$	a_{2r}'	$\dots$	0	a_{2m+1}'	$\dots$	0	$\dots$	a_{2n}'
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
r	P_r	c_r	b_r'	0	0	$\dots$	a_{rr}'	$\dots$	$\dots$	a_{rm+1}'	$\dots$	1	$\dots$	a_{rn}'
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	P_m	c_m	b_m'	0	0	$\dots$	a_{mr}'	$\dots$	1	a_{mm+1}'	$\dots$	0	$\dots$	a_{mn}'
$m+1$			z_0'	0	0	$\dots$	δ_r'	$\dots$	0	δ_{m+1}'	$\dots$	0	$\dots$	δ_n'

Esaplawlardı jen`illetiw maqsetinde baziske kirgiziletug`ın vektor, absolyut shaması boyınsha en` u`lken $\delta_j < 0$ sanı menen anıqlanadı. Egerde bunday sanlar bir neshe bolsa, onda $\delta_j < 0$ sanları menen anıqlang`an $c_j$ sanlarının` en` u`lkeni qanday indekske iye bolsa, tap sonday indekske iye bolg`an P_j vektorı baziske kirgiziledi.

Solay etip, ma`selenin` bir tayanısh sheshiminen ekinshisine o`tiw bir simpleks-kesteden ekinshi simpleks-kestege o`tiwdi an`latadı. Jan`a simpleks-kestenin` elementlerin (3.1)-(3.4) formulaları yamasa olardan tikkeley kelip shıg`atug`ın qa`deler boyınsha esaplawg`a boladı. Bul qa`deler to`mendegilerden ibarat.

Baziske kirgen vektorlardın` bag`analarına, atı birdey vektorlardın` qatarları ha`m bag`analarının` kesilisken jerine birlikler (1 ler) qoyıladı, al bul bag`analardın` qalg`an barlıq elementlerin nol`ge ten` dep esaplaydı.

Jan`a simpleks-kestenin` baziske kirgiziletug`ın vektor jazılg`an qatarındag`ı $P_0$ ha`m P_j vektorlarının` elementleri, da`slepki simpleks-kestenin` tap usınday qatarındag`ı elementlerdi sheshiwshi elementke bo`liwden kelip shıg`adı. Son`g`ı kestenin` $C_Б$ bag`anasına, baziske kirgiziletug`ın vektordın` qatarına c_k shaması jazıladı, bunda k-baziske kirgizletug`ın vektordın` indeksi.

Al, jan`a simpleks-kestenin` P_0 ha`m $P_j$ vektorlarının` bag`analarının` qalg`an elementleri u`shmu`yeshlik qa`desi boyınsha esaplanadı. Bul elementlerdin` qanday da bolsa birewin esaplaw ushın to`mendegi u`sh sandı anıqlaydı:

1) da`slepki berilgen simpleks-kestede, jan`a simpleks-kestenin` izlenip atırg`an elementinin` ornında turg`an san;

2) da`slepki berilgen simpleks-kestede, jan`a simpleks-kestenin` izlenip atırg`an elementi jaylasqan qatar menen baziske kirgiziletug`ın vektorg`a sa`ykes bag`ananın` kesilisken jerinde turg`an san;

3) jan`a simpleks-kestede, izlenip atırg`an element jaylasqan bag`ana menen baziske jan`adan kirgiziletug`ın vektordın` qatarının` kesilisken jerinde jaylasqan san (joqarıda atap ko`rsetilgenindey, jan`a simpleks-kestenin` bul qatarı da`slepki simpleks-kestenin` sa`ykes qatarının` elementlerin sheshiwshi elementlerge bo`liwden kelip shıg`adı).

Bul u`sh san, eki to`besi da`slepki simpleks-kestedegi eki sang`a, al u`shinshi to`besi jan`a simpleks-kestedegi sang`a sa`ykes keletug`ın, ayrıqsha u`shmu`yeshlikti payda etedi. Jan`a simpleks-kestenin` izlenip atırg`an elementin anıqlaw ushın birinshi sannan ekinshi ha`m u`shinshi sanlardın` ko`beymesin aladı.

Jan`a simpleks-kesteni toltırg`annan son` onın` $(m+1)$-qatarın tekseredi. Egerde barlıq $\delta'_j = Z'_j - c_j \geq 0$ bolsa, onda jan`a tayanısh sheshimi optimal` sheshim boladı. Al, egerde δ'_j sanlarının` arasında teris sanlar bar bolsa, onda joqarıda ko`rsetilgen a`meller izbe-izligin orınlap, jan`a tayanısh sheshimin tabadı. Bul protsessti ma`selenin` optimal` sheshimi tabılg`ansha yamasa onın` sheshimi joq ekenligi anıqlang`ansha dawam etedi.

Joqarıda sızıqlı programmalastırıw ma`selesi tayanısh sheshimlerge iye ha`m olardın` ha`r biri aynımag`an sheshimi boladı dep uyg`arıldı. Al, egerde ma`sele aynıg`an tayanısh sheshimlerge iye bolsa, onda simpleks usıldın` bazı bir adımında (iteratsiyasında) tayanısh sheshimnin` bir neshe belgisizleri nol`ge ten` bolıwı mu`mkin. Sonlıqtan bul jag`dayda, bir tayanısh sheshiminen ekinshisine o`tkende maqset funktsiyasının` ma`nisi o`zgermey, aldın`g`ı adımındag`ıday bolıp qalıwı mu`mkin. Bunnan tısqarı, ma`selenin` maqset funktsiyası usıldın` bir neshe adımında o`zinin` ma`nisin o`zgertpey saqlawı, sonday aq, baslang`ısh baziske qaytıp keliw mu`mkinshilikleri de bar. Son`g`ı jag`dayda, a`dette tsikllesiw (toparlasıw) kelip shıqtı dep aytadı. Biraqta, a`meliy ma`selelerdi sheshiwde bunday jag`day og`ada siyrek ushırasadı. Sonlıqtan onı talqılawg`a toqtamaymız.

Solay etip, 1-paragraftag'ı (1.2) sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` optimal` sheshimin simpleks usılı menen tabıw to`mendegi etaplardan turadı:

1. Berilgen sızıqlı programmalastırıw ma`selesin kanonikalıq ko`riniske keltirip jazadı.

2. Birlik vektorlardan du`zilgen bazisi bar baslang`ısh tayanısh sheshimin ha`m shegaralıq sha`rtlerdegi vektorlardın` tayanısh sheshimnin` bazisi boyınsha jikleniwlerinin` koeffitsientlerin tabadı. Egerde ma`selenin` tayanısh sheshimi joq

bolsa, onda sheklewler sistemasının` birlikli bolmawı sebepli, ma`sele sheshimge iye bolmaydı.

3. Tayanısh sheshimnin` $\delta_j$ bahaların esaplaydı, simpleks-kesteni toltıradı ha`m δ_j sanlarının` arasında teris sanlardın` barın yamasa joqlıg`ın anıqlaydı. Egerde olardın` arasında teris sanlar bar bolsa, onda ya ma`selenin` sheshimge iye bolmaytug`ınlıg`ı anıqlanadı, yamasa jan`a tayanısh sheshimine o`tedi.

4. Bag`darlawshı bag`ananı ha`m qatardı tabadı. Bag`darlawshı bag`ana absolyut shaması boyınsha en` u`lken $\delta_j < 0$ sanı menen, al bag`darlawshı qatar – P_0 vektorının` bag`anasındag`ı du`ziwshilerinin` bag`darlawshı bag`ananın` on` du`ziwshilerine qatnaslarının` en` kishisi menen anıqlanadı.

5. Joqarıdag`ı (3.1)-(3.4) formaları boyınsha jan`a tayanısh sheshimnin` on` du`ziwshilerin, $P_j$ vektorının` jan`a bazistin` vektorları boyınsha jikleniwinin` koeffitsientlerin, $Z_0'$ ha`m δ_j' sanların anıqlaydı. Bul sanlardın` barlıg`ın jan`a simpleks-kesetege jazadı.

6. Tabılg`an tayanısh sheshimdi optimallıqqa tekseredi. Egerde ol optimal` sheshim bolmasa ha`m jan`a tayanısh sheshimge o`tiw kerek bolsa, onda 4-etapqa qaytıp keledi, al optimal` sheshim tabılsa yamasa ma`selenin` sheshiminin` joq ekenligi anıqlansa, onda ma`seleni sheshiw protsessi toqtatıladı.

§4.Ko'p kriteriyli sızıqlı programmalastırıw ma'selesin sheshiwdin' Pareto usılı

Mazmunı ta`repinen ko`p kriteriylı qarama-qarsılıqlarg`a iye bolıwı mumkin, yamasa sheshimge iye bolmawı mumkin, biraq bunday ma`seleler a`meliyatta ushrasıp turatug`ın bolg`anlıqtan olardı sheshiw ushın durıs jolların islep shıg`ıw za`rur.

En` a`piwayı usıl-bul ma`seleni bir kriteriylı ma`selege uqsatıp jazıw

$$f_1(x)\to max,\ f_2(x)\to max,\ \dots,f_e(x)\to max \quad (4.1)$$

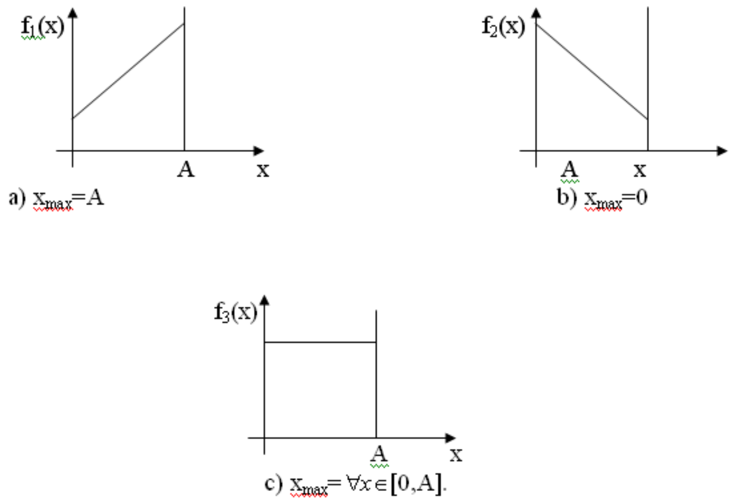
$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, & i=1,\dots,m \\ x_j \ge 0 & j=1,\dots,n \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

Bul jerde $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_l(x)$, -optimallıqtın` kerekli kriteriyleri.

Eger haqıyqıy kriteriyde minumumg`a umtılıw bar bolsa: $q_s(x)\to min$,

onda qarama-qarsı belgini alıw to`mendegini beredi: $f_s(x)=-q_s(x)\to max$.Joqarıdag`ı (4.2)- sha`rtler ma`selenin` belgili bolg`an oblastın anıqlap beredi, x-izlenip atırılg`an belgisizlerdin` vektorı. Bul (4.1)-(4.2) ma`selenin` qoyılıwı qanday na`tiyjege alıp keliwi mumkin ekenligin a`piwayı mısallarda ko`rip o`temiz. Bir o`lshemli jag`daydı alamız ha`m u`sh kriteriylı ushın mu`mkin bolg`an sa`ykesliklerdi suwretleymiz. Bunda ha`mme kriteriylar maksimumg`a umtıladı dep oylaymız.



4.1-suwret.

Maqset funktsiyasının` grafiginin` iymeyiw mu`yeshine baylanıslı bolg`an maksimum tochkasının` jaylasıwı 1-suwretten ko`rinip turg`anınday $0 \le x \le A$ sha`rtlerdin` birdey bolg`an kopliginde $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ kriteriylerdin` ha`r qaysısının` optimal ma`nisi ha`r tu`rli boladı.Bul $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ tuwrılardın` iymeyiw muyeshine baylanıslı boladı. $f_1(x)$-maqset funktsiyası o`sken jag`dayda (4.1a-suwret), maksimumge $x_{max}=A$ on` shegarasında erisiledi. $f_2(x)$ (4.1 v-suwret) maqset funktsiyası kemeyip barsa, onda maksimal ma`niske $0 \le x \le A$ shep tochkasında erisiledi. Eger maqset funktsiyası $f_3(x)=const$ bolsa, onda $0 \le x \le A$ qa`legen mumkin bolg`an ma`nisi $f_3(x)$ funktsiyasının` (4.1 s-suwret) maksimumın (ha`m sonın` menen birge minimumın) beredi. Solay etip ko`p kriteriylı ma`seleni sheshkende ha`r bir funktsionaldın` o`z aldına maksimumın yamasa minimumın tabıwg`a umtılıw kerek emes, sebebi bul sheshimler qarama-qarsı na`tiyjelerdi beriw mumkin. Al biz komplesli u(x) maqset funktsiyasın duziwimiz kerek, ol o`zinin` ha`mme dara funktsionallardı ($u(x)=F(f_1(x), f_2(x),\ldots f_l(x))$ aladı, ja`nede u(x) funktsiyası ushın x_{max}-optimal ma`nisti tabıwımız kerek. Na`tiyjede biz bari-bir bul ma`seleni bir kriteriylı ma`selege alıp kelemiz, lekin mazmunı boyınsha ol ma`sele ko`p kriteriylı tendentsiyalardı ko`rsetedi.

Ko`plegen avtorlar ta`repinen u(x)-funktsiyasın tan`lawdın` ha`r qıylı usılları izertlengen. Biz Pareto ta`repinen usınılg`an usıldı qarap o`temiz. Onın` artıqmashılıqları,birinshiden, ol sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` du`zilisin buzbaydı (u(x)-funktsionalı sızıqlı bolıp qaladı); ekinshiden, formal ko`riniste onın` mazmunı ko`plegen anıq talaplarg`a juwap beredi. Bul jag`dayda esaplawlardın` qalegen anag`urlım asıwı mumkin, biraq sapalı sheshiletug`ın qosımsha ma`seleler bir-birine uqsas boladı. Solay etip ma`selenin` sapalı sheshiliwi saqlanıp qalıp, onın` tek g`ana mexanikalıq qıyınshılıg`ı yamasa ko`p miynet talap etiwi o`sip baradı. Joqarıdag`ı (2)-sha`rtler menen berilgen ha`m *l*-sandag`ı optimallıq kriteriylerı ha`m mu`mkin bolg`an sheshimlerge iye ma`seleni qaraymız. Endi k-shı maqset funktsiyasına iye bolg`an sızıqlı programmalastırıwdın` ma`selesin to`mendegi turde qoyamız:

$$\left.\begin{aligned} & f_k=\sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j \rightarrow \max \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,\dots,m \\ & x_j \ge 0; \qquad j=1,\dots,n \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

(4.3)-turdegi *l*-sanlı ma`selelerdin` ha`mmesin sheship bolg`annan keyin biz ($f_1(x)$, $f_2(x)$,…$f_l(x)$ funktsionallardın` optimal ma`nislerine iye bolamız, olardı to`mendegishe belgileymiz yag`nıy f_1^*, f_2^*,…f_l^* .Endi Pareto boyınsha to`mendegi bir kriteriylı maksimumlastırıw ma`selesin qoyamız:

$$\left.\begin{aligned} & F=\sum_{k=1}^{l} \frac{\alpha_k f_k}{f_k^*} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\alpha_k}{f_k^*} \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j \rightarrow \max \\ & \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i; \quad i=1,\dots,m \\ & x_j \ge 0; \qquad j=1,\dots,n \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

$\alpha_k \ge 0$ sanlar $\sum_{k=1}^{l} \alpha_k = 1$

qa`siyetine iye bolıp, $f_k$-dara kriteriylı ushın salmaq koeffitsientleri bolıp tabıladı. Bul sanlar a`dette eksızıqlı programmalastırıwertler ta`repinen belgilengen boladı ha`m ha`r bir kriteriydın` a`hmiyetliligin bildiredi.

Anıqlama. Pareto boyınsha effektiv tochka- dep (4.4) ma`selenin` bir qansha α_k-nın` kopligi menen baylanıslı bolg`an ha`r qıylı ma`nislerine baylanıslı bolg`an barlıq effektiv tochkalardın` ko`pligin aytamız. Endi bir neshe mısallardı qarap o`temiz.

1-ma`sele. A ha`m B turdegi eki turli o`nimlerdi islep shıg`arıw ushın tokorlıq, frezerlik, shlifovkalawshı uskeneler qollanıladı. To`mendegi kestede berilgen turdegi o`nimdi islep shıg`arıw ushın ha`r bir u`skenede ketetug`ın waqıt o`lshemleri berilgen.Sol kestede uskenenin` ha`r tu`ri ushın ajıratılg`an ulıwma fondı ko`rsetilgen,bir o`nimnin` bahası ha`m onı islep shıg`arıwg`a ketetug`ın shıg`ınlar korsetilgen. Eger karxana 5-danadan kem o`nim shıg`ara almaytug`ın bolsa, onın` paydaların maksimallastıratug`ın ha`m shıg`ınlardı minimumlastıratug`ın o`nim shıg`arıw boyınsha rejesin tabıw kerek.

Uskene turi	Bir o`nimdi qayta islewge ketetu`g`ın waqıt		Uskenenin` paydalı jumıs waqtının` ulıwma fondı
	A	**B**	
Frezerlik	10	8	168
Tokarlıq	5	10	180
Shlifovka islewshi	6	12	144
Baha	14	18	max
Shıg`ınlar	7	5	min

Sızıqlı programmalastırıw-ma`selesinin` sha`rtlerin jazamız. Meyli $x_1$ ha`m x_2 ler, A ha`m B o`nimlerdi shıg`arıw rejesi bolsın. Mumkin bolg`an oblast` to`mendegi ten`sizligi menen jazıladı:

$$\begin{cases} 10x_1+8x_2 \leq 168, \\ 5x_1+10x_2 \leq 180 \\ 6x_1+12x_2 \leq 144 \\ x_1+x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

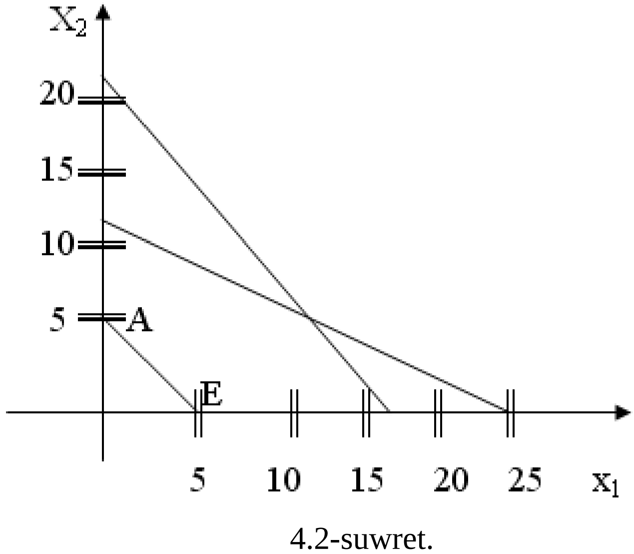
Maqset funktsiyalar to`mendegi ko`riniste boladı:

$$f_1=14x_1+18x_2 \rightarrow max$$

$$q_2=7x_1+5x_2 \rightarrow min$$

Bul jerde ekinshi funktsional minimumg`a izertlenip atırılg`anın esapqa alıp onı (-1) ko`beytip to`mendegishe jazamız: $f_2=q_2=-7x_1-5x_2 \rightarrow max$.

Bul eki kriteriylı ma`seleni grafikalıq usılda sheshemiz.



4.2-suwret.

Endi birinshi maqset funktsiyasının` optimal ma`nisin tabamız. Eki kriteriylı ma`selenin` mu`mkin oblasti 4.2-suwrette ko`rsetilgen-bul ABCDE ko`p mu`yeshlik bolıp tabıladı. Endi to`mendegi tuwrılar ten`lemelerin jazamız:

(BC) $6x_1+12x_2=144$

(CD) $10x_1+8x_2=168$

(AE) $x_1+x_2=5$

$5x_1+10x_2 \leq 180$ ABCDE ko`pmu`yeshliginin` barlıq tochkaları ushın orınlanadı. Birinshi maqset funktsiyasının` gradientinin` koordinataları (14, 18).

Maksimal ma`niske S -tochkada erisedi. S-tochkanın` koordinataların tabamız:

$$\begin{cases} 6x_1+12x_2=144 \\ 10x_1+8x_2=168 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1=12 \\ x_2=6 \end{matrix}$$

Solay etip f_1^* =14*12+18.6=276. Endi ekinshi maqset funktsiyasının` optimal ma`nisin tabamız. Onın` gradientinin` koordinataları (-7,-5). Maksimal ma`niske A(0,5) tochkada erisedi. Demek biz $f_2^*=-25$ bolamız. Biz kompleksli maqset funktsiyasın duzemiz. Aytayıq $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=1-\alpha$ $(0\leq \alpha \leq 1)$. Onda to`mendegi funktsiyag`a iye bolamız:

$$F(x_1,x_2)=\frac{\alpha}{276}*(14x_1+18x_2)+\frac{1-\alpha}{25}*(7x_1+5x_2)=$$

$$=\left(\frac{14\alpha}{276}+\frac{7*(1-\alpha)}{25}\right)*x_1+\left(\frac{18\alpha}{276}+\frac{5(1-\alpha)}{25}\right)*x_2$$

Optimal sheshimdi tabıw ushın F(x_1, x_2)=0 tuwrının` mu`yesh koeffitsientin esaplap ha`m onı (BC) ha`m (CD) tuwrılardın` mu`yesh koeffitsientleri menen salıstıramız.

$ax_1+bx_2=0$ tuwrısının` mu`yeshi koeffitsenti k=-a/b ten`. Demek,

$$k=\frac{\dfrac{14*25\alpha+7*276(1-\alpha)}{276*25}}{\dfrac{18*25*\alpha+5*276(1-\alpha)}{276*25}}=\frac{1936-1582*\alpha}{1380-930*\alpha}=-\frac{966-791*\alpha}{690-465*\alpha}$$

Sonday-aq (BC) ha`m (CD) tuwrılarının` mu`yesh koeffitsentleri sa`ykes

$k_1=-1/2$ $k_2=-10/8$ ten`.

Egerde $|k|<|k_1|$ bolsa, onda optimal sheshimge V-tochkada erisedi, egerde $|k_1|<|k|<|k_2|$ bolsa, onda S-tochkada, egerde $|k|>|k_2|$ bolsa, onda optimal sheshimge S-tochkada erisedi. Egerde $k=k_1$ bolsa, onda optimal sheshimge [BS]-kesindinin` qa`legen tochkasında erisedi, egerde $k=k_2$ bolsa, onda (CD)-kesindinin` qa`legen tochkasında erisedi.

Biz $|k|<|k_1|$ sha`rtin tekseremiz: $|k|<|k_1|$: $\left|-\dfrac{966-791*\alpha}{690-465*\alpha}\right|<\dfrac{1}{2}$

Demek to`mendegige iye bolamız:

$\lambda>\dfrac{1242}{1117}$. Biz $\lambda\le 1$ ekenligin esapqa alıp, V-tochkada opimal sheshim bolıwı mu`mkin emesligin ko`remiz.

Meyli $|k_1|<|k|<|k_2|$ bolsın. Bul jag`dayda to`mendegige iye bolamız.

$\left|-\dfrac{966-791*\alpha}{690-465*\alpha}\right|<\dfrac{10}{8}$. Bunnan $\lambda>\dfrac{414}{839}$ ekenligin ko`remiz. Demek $0\le\alpha\le\dfrac{414}{839}$ bolg`anda optimal sheshimge D-tochkada erisiw anıq. Solay etip biz, to`mendegi na`tiyjelerge iye bolamız $0\le\alpha<\dfrac{414}{839}$ bolg`anda optimal sheshim:

$x_1=16{,}8$; $x_2=0$; $F_{\max}=\dfrac{13524-11074\alpha}{2875}$;

$\dfrac{414}{839}<\alpha\le 1$ bolg`anda optimal sheshim: $x_1=12$; $x_2=6$; $F_{\max}=\dfrac{266-2047\alpha}{575}$;

$\alpha = \frac{414}{839}$ bolg`anda optimal sheshimge (CD)-kesindinin` qa`legen tochkasında erisedi, $.F_{\max} = \frac{2352}{839} \approx 2{,}8$ Dara jag`dayda, $\alpha_1=\alpha_2=1/2$ bolg`anda optimal sheshim: $x_1=12$; $x_2=6$; al $F_{max}$-maksimal ma`nisi $F_{\max} = \frac{9591}{3450} \approx 2{,}78$ ten` boladı.

Joqarıda keltirilgen formulalardan belgili boladı, eger ekinshi kriteriyi ahmiyetlirek bolg`an jag`dayda optimal sheshimge sa`ykes tekg`ana A-tu`rindegi o`nim shıg`arıladı, sebebi o`ndiristegi summalıq shıg`ınlar minimal boladı. Egerde birinshi kriteriyi a`hmiyetlirek bolsa, onda ka`rxana eki tu`rdegi o`nim islep shıg`arıwı tiyis.

2-ma`sele. Birinshi ma`selenin` sha`rtlerine ja`ne bir sha`rt qosamız: mu`mkin bolg`anısha taza tovarlar shıg`arıw kerek. Ha`r bir tovarg`a tazalıq (novizna) koeffitsentin salıstıramız. A-tu`rdegi o`nim ushın koeffitsient birge ten` (go`nergen tovar), B-turdegi tovar ushın koeffitsient u`shge ten` boladı (taza tovar).

To`mendegi ko`rinistegi maqset funktsiyasın kiritemiz.

$$F_3(x_1,x_2)=x_1+3x_2 \rightarrow \max.$$

U`shinshi maqset funktsiyanın` optimal sheshimin tabamız. Onın` gradienti (1,3) koordinatalarına iye. Maksimal ma`nisine B(0,12) tochkasında erisedi. Onda $f_3^*=36$ iye bolamız.

Kompleksli maqset funktsiyasın du`zemiz.

Aytayıq $\alpha_3=1-\alpha_1-\alpha_3$ ($\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1+\alpha_2 \leq 1$). Bunnan to`mendegige iye bolamız:

$$F(x_1,x_2) = \frac{\alpha_1}{276} * (14x_1 + 18x_2) + \frac{\alpha_2}{25} * (7x_1 + 5x_2) + \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{36} * (x_1 + 3x_2) =$$
$$= (\frac{14\alpha_1}{276} + \frac{7\alpha_2}{25} + \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{36}) * x_1 + (\frac{18\alpha_1}{276} + \frac{5\alpha_2}{25} + \frac{3*(1-\alpha_1-\alpha_2)}{36}) * x_2)$$

Endi $F(x_1, x_2)=0$ tuwrısının` mu`yesh koeffitsientin esaplaymız:

$$K=\frac{\dfrac{14*25*36\alpha_1+7*276*36*\alpha_2+276*25(1-\alpha_1-\alpha_2)}{276*25*36}}{\dfrac{18*25*36*\alpha_1+5*276*36*\alpha_2+276*25*3(1-\alpha_1-\alpha_2)}{276*25*36}}=-\frac{575+475*\alpha_1+5221*\alpha_2}{1725-375*\alpha_1+2415*\alpha_2}$$

Mu`yesh koeffitsienti k-nin` ma`nisin (BC) ha`m (CD) tuwrılarının` mu`yesh koeffitsientleri menen salıstıramız. Meyli $|k|<\frac{1}{2}$ bolsa, onda

$\frac{575+475*\alpha_1+5221*\alpha_2}{1725-375*\alpha_1+2415*\alpha_2}<\frac{1}{2}$ boladı.

Bunnan $1325*\alpha_1+8027*\alpha_2<575$ kelip shıg`adı. Bul sha`rtte V-tochkası optimal bolıp tabıladı. Meyli endi $\frac{1}{2}<|k|<\frac{5}{4}$ bolsın. Onda to`mendegi ten`sizlikti ko`rip shıg`ıw jetkilikli: $\frac{575+475*\alpha_1+5221*\alpha_2}{1725-375*\alpha_1+2415*\alpha_2}<\frac{5}{4}$. Bunnan $25*\alpha_1+8809*\alpha_2<6325$ alamız.

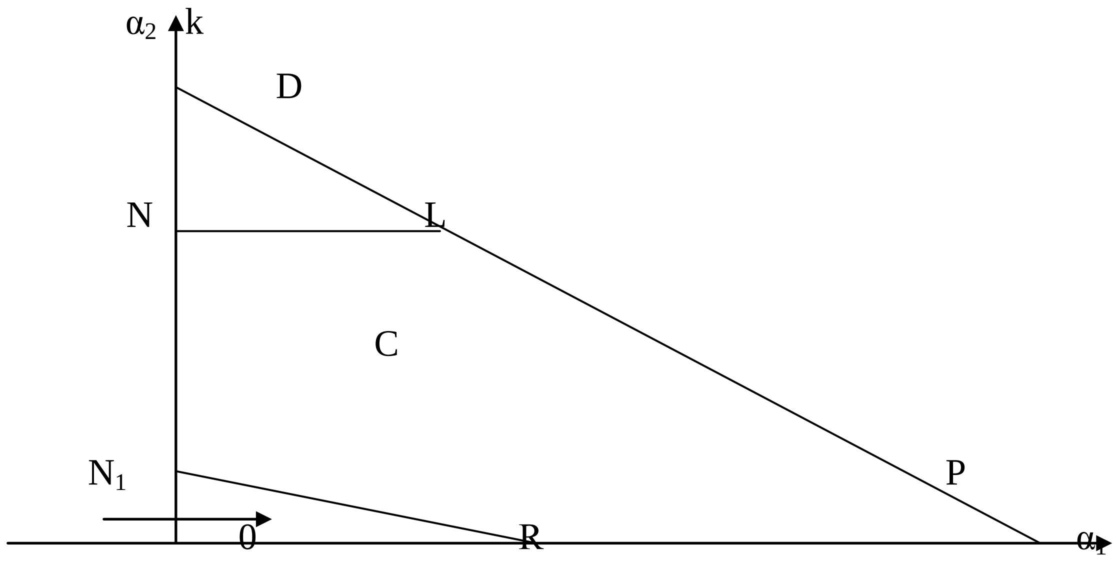
Solay etip, to`mendegi sha`rtlerdin` orınlanıwında S-tochkasında optimal ma`niske erisemiz.

$$\begin{cases}1325*\alpha_1+8027*\alpha_2>575\\ 25*\alpha_1+8809*\alpha_2<6325\\ \alpha_1+\alpha_2\le 1\end{cases}$$

Eger |k|>5/4 bolsa, onda D-tochkası optimal tochka bolıp, bul jag`dayda to`mendegi sha`rtler orınlanıwı kerek.

$$\begin{cases}25*\alpha_1+8809*\alpha_2>6325\\ \alpha_1+\alpha_2\le 1\end{cases}$$

Joqarıda alıng`an na`tiyjelerdi grafik arqalı ko`rsetkenimiz qolaylı boladı. 4.3-suwrette ($\alpha_1$, $\alpha_2$) parametrlerinin` tegisligindegi oblastlar ko`rsetilgen bolıp ha`m sonın` menen birge $F(x_1,x_2)$ funktsiyası maksimal ma`nisine jetetug`ın tochkalar ha`m ko`rsetilgen.



4.3-suwret

Tuwrılar ten`lemeleri:

(MR) $1325*\alpha_1+8027*\alpha_2=575$

(NL) $25*\alpha_1+8809*\alpha_2=6325$

(KP) $\alpha_1+\alpha_2=1$

Eger (α_1, α_2) kordinataları bar bolg`an tochka parametrleri ken`isliginde OMR u`shmuyeshliginin` ishinde jaylasqan bolsa, onda optimal sheshim to`mendegishe boladı.

$x_1=0$; $x_2=12$ (B-tochkası), $F_{\max}=\dfrac{1725-375*\alpha_1+2415*\alpha_2}{1725}$. Al MNLPR besmu`yeshliginin` ishinde optimal sheshim to`mendegishe boladı:

$x_1=12$; $x_2=6$ (C-tochkası), $F_{\max}=\dfrac{4025+3325*\alpha_1+12857*\alpha_2}{8625}$.

Sondayaq NKL- u`shmu`yeshliginin` ishinde optimal sheshim to`mendegishe boladı $x_1=16{,}8$; $x_2=0$ (D-tochkası), $F_{\max}=\dfrac{4025+3325*\alpha_1+36547*\alpha_2}{8625}$.

Eger u`shinshi kriteriydın` ma`nisi birge jaqın bolg`an jag`dayda, optimal sheshimge sa`ykes tekg`ana B-turdegi o`nim shıg`arılıwı ko`zde tutılg`an. Eger ekinshi ($\alpha_2$>0,72) kriteriydın` ma`nisi og`ada joqarı bolsa, onda tekg`ana A-turdegi o`nim islenilip shıg`arılıwı kerek. Basqa ha`mme jag`daylarda eki turdegi o`nimlerdi islep shıg`arıw optimal bolıp tabıladı.

joqarıdag`ı 1-shi ha`m 2-shi ma`selelerdin` maqset funktsiyaları eki belgisizge baylanıslı boldı. Sonlıqtan olardı grafikalıq usılda sheshiw qolaylı boladı. Kelesi mısalda Pareto usılın ulken o`lshemdegi ma`selelerge qollanıwdı qarap o`temiz.

3-ma`sele. U`sh tu`rdegi A,B,C o`nimlerin islep shıg`arıw ushın karxana u`sh tu`rli shiyki zattan paydalanadı. Ha`r tu`rdegi o`nimdi shıg`arıw ushın sarplanatug`ın shiyki zattın` normaları, o`nimlerdin` bahası, sonday-aq shiyki zatlar qorları kestede ko`rsetilgen. Ha`r bir o`nimge jan`alıq (novinka) koeffitsentin salıstıramız. İslep shıg`arılg`an o`nimlerdin` bahası maksimal bola turıp, biraq karxana mu`mkin bolg`ansha ko`birek taza tovarlardı shıg`aratug`ın jag`daydag`ı o`nimlerdi shıg`arıw rejesin du`ziw talap etiledi.

Shiyki zat tu`ri	Bir o`nimge sarplanatug`ın shiyki zat norması			Shiyki zattın` ulıwma sanı
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Bir o`nimnin` bahası	9	10	16	max
Jan`alıq koeffitsenti	4	2	1	max

Ma`selenin` matematikalıq modelin du`zemiz.

Meyli x_1,x_2,x_3-ler A,B,C turindegi o`nimlerdin` tu`rlerinin` shıg`arılıw kerek mug`darı bolsın.

Sonda ma`selenin` mu`mkin bolg`an oblastın anıqlaytug`ın sha`rtleri to`mendegi ko`riniste boladı:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Keyingi qatarda jazılg`an sha`rtler ma`selenin` ekonomikalıq ma`nisinen kelip shıg`adı: biz o`nimlerdin` teris sandag`ı mug`darın shıg`ara almaymız. Bul ma`selenin` mu`mkin bolg`an sheshimler ko`pligi bos emes shegaralang`an ko`pta`repli boladı. Ol $x_1=x_2=x_3=0$ tochkalarg`a iye, bunda mına ten`sizlikler orınlı: $0 \le x_1 \le 20$, $0 \le x_2 \le 24$, $0 \le x_3 \le 24$ demek qa`legen sızıqlı funktsiya berilgen ko`plikte o`zinin` maksimal ha`m minimal ma`nislerine iye boladı.

Ma`selenin` maqset funktsiyaları to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$f_1=9x_1+10x_2+16x_3 \rightarrow max$

$f_2=4x_1+2x_2+x_3 \rightarrow max$

Bul ma`seleni simpleks usılı ja`rdeminde sheshemiz. Onın` ushın ma`seleni kanonikalıq formada jazamız. Teris bolmag`an $x_4, x_5, x_6$ belgisizlerdi kirgizemiz ha`m sheklewler ten`sizliklerinen sheklewler ten`lemelerine o`temiz. Joqarıda keltirilgen qosımsha belgisizler ekonomikalıq ma`niste bul berilgen o`nim shıg`arıw rejesindegi paydalanılmaytug`ın shiyki zattın` tu`rlerinin` sanın an`latadı. Solay etip sheklewler sisteması to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_5 = 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180 \\ x_j \ge 0, j = 1,,, \ 6 \end{cases}$$

Bul ten`lemeler sistemasın vektorlıq formada jazamız:

$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4+x_5A_5+x_6A_6=b$

bunda

$$A_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Endi $f_1=9x_1+10x_2+16x_3$ birinshi maqset funktsiyasının` maksimumın tabamız. $A_4$,$A_5$,$A_6$-birlik vektorları u`sh o`lshemli ken`islikte bazis payda etedi. Sonlıqtan tirek sheshimdi birden jazıwg`a boladı: $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=360$, $x_5=192$, $x_6=180$.

Birinshi adım ushın simpleks kestesin du`zemiz. $A_j$(j=1,…,6,) vektorlarının` ustine maqset funktsiyasının` belgisizleri aldındag`ı koeffitsentleri jazıladı. Ha`r vektorg`a sa`ykes bag`anada olardın` koeffitsentlerin jazamız. Cbaz-bag`anasına maqset funktsiyasına kiretug`ın

koeffitsentlerdi jazamız, olar bazisti du`zetug`ın vektorlarg`a sa`ykes bolıwı kerek (bizin` jag`daylar olar ha`mmesi nol`ge ten` boladı yag`nıy $x_4=x_5=x_6=0$). Keyingi qatarda ha`r bir $A_j$ -vektorı ushın $\Delta_j$-bahasın jazamız, al b-vektorına sa`ykes keliwshi bag`anag`a maqset funktsiyasının` ha`zirgi ma`nisin jazamız.

Bazis	C_{baz}	b	9	10	16	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
A_5	0	192	6	4	8	0	1	0
A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
Δ_j		0	-9	-10	-16	0	0	0

ha`r bir vektordın` bahası-bul sa`ykes bazis koeffitsentin vektor koordinatlarına ko`beytiw summası minus vektordın` ustinde turg`an koeffitsent. Funktsiyanın` ha`zirgi ma`nisi-sa`ykes bazislik koeffitsentlerge

b-vektorının` koordinataların ko`beytiw summası. Bul qag`ıydadan paydalana otırıp, to`mendegilerdi tabamız:

Δ_1=18*0+6*0+5*0-9=-9,

Δ_2=15*0+4*0+3*0-10=-10,

Δ_3=12*0+8*0+3*0-16=-16

$\Delta_4=\Delta_5=\Delta_6$ (bazislik vektorlar ushın Δ_j=0),

$f_{1=}$360*0+192*0+180*0=0

Bahalardın` arasında terisleride bar, al teris bahalı ha`r bir bag`anada on` elementler bar. Demek taza sheshimge otiw kerek. Bahalardın` arasınan en` kishkenesin tabamız bul Δ_3. Bul A_3-vektorının` baziske kirgiziletug`ının an`latadı.

Endi b-vektorının` komponentlerinin` sa`ykes $A_3$-vektorının` komponentlerine (eger keyingileri on` san bolsa) qatnasın tabamız ha`m ol qatnaslardın` ishinen en` minimumın saylap alamız:

$$\min\left(\frac{360}{12},\frac{192}{8},\frac{180}{3}\right)=\frac{192}{8}$$

Demek bul A_5-vektorının` bazisten shıg`ıwın an`latadı. Endi $A_4$,$A_5$,$A_6$ taza bazislerge o`temiz. Onın` ushın taza bazistegi ha`mme vektorlardın` koeffitsentlerin esaplap shıg`amız. To`mendegi belgilewlerdi kiritemiz. Meyli $a_{ij}$(i=1,2,3; j=1,…,6) $A_j$-vektorlarının` komponentleri bolsın, a_{io}-go`ne bazizistegi b-vektorının` komponentleri bolsın, taza baziste bul vektorlardın` komponentlerin to`mendegishe belgileymiz. a_{ij}(i=1,2,3; j=1,…,6). Onda to`mendegi formulalar orınlı boladı:

$$a'_{ij}=\frac{a_{2j}}{a_{23}}\ \text{(j=0,…,6)},\quad a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{2j}}{a_{23}}a_{i3}\quad \text{(i=1,3; j=0,…,6).}$$

Ekinshi adım ushın keste du`zemiz:

Bazis	C_{baz}	b	9	10	16	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	72	9	9	0	1	3/2	0
A_5	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
A_6	0	108	11/4	3/2	0	0	3/8	1
Δ_j		384	3	-2	0	0	2	0

$\Delta_2<0$-minimal baha. A_2-vektorının` koordinataları on` sanlar boladı.

$$\min\left(\frac{72}{9},\frac{24}{1/2},\frac{108}{3/2}\right)=\frac{72}{9}$$ tabamız.

Demek A_4-vektorın bazisten shıg`arıp taslaw kerek ha`m onın` ornına $A_2$-vektordı kirgiziw kerek. $A_2,A_3,A_6$-bazistegi ha`mme vektorlardın` koeffitsentlerin esaplaymız.

$$a'_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{12}}(j=0,...,6),\qquad a'_{1j}=a_{1j}-\frac{a_{1j}}{a_{12}}*a_{i2}(i=2,3,j=0,...,6),$$

Endi u`shinshi adım ushın keste du`zemiz.

Bazis	C_{baz}	b	9	0	6	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
A_5	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
A_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
Δ_j		400	5	0	0	1/9	5/3	0

U`shinshi adımdan keyin ha`mme $\Delta_j \geq 0$. Bul bizin` optimal sheshimdi $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$, $f_1^*=400$ tapqanımızdı an`latadı. Bul jerde x_4,x_5,x_6- qosımsha belgisizlerdin` ma`nisleri a`hmiyetke iye emes. Endi $f_2=4x_1+2x_2+x_3$ ekinshi maqset funktsiyasının` maksimal ma`nisin tabamız. Tirek sheshim bizge belgili: $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=360$, $x_5=192$, $x_6=180$. Demek biz 1-shi adım ushın keste du`zemiz:

Bazis	C_{baz}	b	9	10	16	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
A_5	0	192	6	4	8	0	1	0
A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
Δ_j		0	-4	-2	-1	0	0	0

Minimal baha $\Delta_1<0$. A_1-vektorının` koordinataları on` san boladı. Endi $\min(\frac{360}{18},\frac{192}{6},\frac{180,}{5})=\frac{360}{8}$ tabamız.

Demek bazisten A_4-vektorın shıg`arıp ha`m A_1-vektorın baziske kirgiziw kerek. A_1,$A_{5,}$$A_6$-bazisinde ha`mme vektorlardın` koeffitsentlerin esaplaymız:

$$a_{1j}^{'}=\frac{a_{1j}}{a_{12}}(j=0,...,6),\qquad a_{1j}^{'}=a_{1j}-\frac{a_{1j}}{a_{12}}*a_{i2}(i=2,3,\ j=0,...,6),$$

Endi 2-shi adım ushın keste du`zemiz:

Bazis	C_{baz}	b	9	10	16	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	20	1	5/6	2/3	1/18	0	0
A_5	0	72	0	-1	4	-1/3	1	0
A_6	0	80	0	-7/6	-1	-5/18	0	1
Δ_j		80	0	2/3	5/3	2/9	0	0

Barlıq $\Delta_j\geq 0$, sonlıqtan optimal sheshim to`mendegishe boladı:

$x_1=20$, $x_2=0$, $x_3=0$, $f_2^*=80$

Endi kompleksli maqset funktsiyasın du`zemiz:

$$F=\frac{\alpha_1}{400}(9x_1+10x_2+16\ \ x_3)+\frac{\alpha_2}{80}(4x_1+2x_2+x_3)\to\max$$

Aytayıq $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=1-\alpha$ $(0\leq\alpha\leq 1)$ bolsın. Sonda

$$F=\frac{\alpha}{400}(9x_1+10x_2+16x_3)+\frac{1-\alpha}{80}(4x_1+2x_2+x_3)=\frac{20-11\alpha}{400}x_1+\frac{x_2}{40}+\frac{5+11\alpha}{400}*x_3\to\max$$

Bul jerde tirek sheshim to`mendegishe boladı: $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=360$, $x_5=192$, $x_6=180$.

Endi birinshi iteratsiya ushın keste duemiz:

Bazis	C baz	b	$\frac{20-11\alpha}{400}$	1/40	$\frac{5+11\alpha}{400}$	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
A_5	0	192	6	4	8	0	1	0
A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
Δ_j		0	$\frac{11\alpha-20}{400}$	-1/40	$-\frac{5+11\alpha}{400}$	0	0	0

Eger $\alpha \le \frac{15}{22}$ bolsa, onda Δ_1<0 en` kishkene boladı. Vektor koeffitsentleri A_1-boladı. Endi $\min\left(\frac{360}{18}, \frac{192}{6}, \frac{180}{5}\right) = \frac{360}{18}$ tabamız.

Demek bazisten A_4-shıg`arıp, baziske A_1-vektordı kirgiziw kerek.

Endi A_1, A_5, A_6-bazistegi ha`mme vektorlardın` koeffitsentlerin esaplaw kerek:

$$a_{1j}^1 = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j=0,\ldots,6); \qquad a_{ij}^1 = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1} \quad (i=2,3; j= 0,\ldots,6)$$

Endi 2-shi iteratsiya ushın keste duzemiz:

Bazis	C_{baz}	b	$\frac{20-11\alpha}{400}$	1/40	$\frac{5+11\alpha}{400}$	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	$\frac{20-11\alpha}{400}$	20	1	5/6	2/3	1/18	0	0
A_5	0	72	0	-1	4	-1/3	1	0
A_6	0	80	0	-7/6	-1/3	-5/18	0	1

Δ_j		$\frac{20-11\alpha}{20}$	0	$\frac{8-11\alpha}{400}$	$\frac{5-11\alpha}{240}$	$\frac{20-11\alpha}{7200}$	0	0

Eger $0 \le \alpha \le \frac{5}{11}$ bolsa, barlıq $\Delta_j \ge 0$ boladı, sonlıqtan optimal sheshim to`mendegishe:

$X_1=20$, $X_2=0$, $X_3=0$, $F_{max}=\frac{20-\alpha}{20}$.

Eger $\alpha > \frac{5}{11}$ bolsa, en`kishi baha $\Delta_3<0$ boladı. $A_3$-vektorının` koordinataları arasında on` sanlar bar. Endi

$$\min\left(\frac{20}{2/3}, \frac{72}{4}\right) = \frac{72}{4} \quad \text{tabamız.}$$

Demek bazisten A_5-shıg`arıp ha`m baziske A_3-vektorın kirgiziw kerek. Endi A_1, A_3, A_6- bazisindegi ha`mme vektorlardın` koeffitsentlerin esaplaymız:

$$a_{2j}^1 = \frac{a_{2j}}{a_{23}} \quad (j=0,\dots,6); \qquad a_{ij}^1 = a_{ij} - \frac{a_{2j}}{a_{23}} a_{i3} \quad (\, i=1,3;\ j=0,\dots,6\,)$$

Endi 3-shi adım ushın keste duzemiz:

Bazis	C_{baz}	b	$\frac{20-11\alpha}{400}$	1/40	$\frac{5+11\alpha}{400}$	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	$\frac{20-11\alpha}{400}$	8	1	1	0	1/9	0	0
A_3	$\frac{5+11\alpha}{400}$	18	0	-1/4	1	-1/12	1	0
A_6	0	86	0	-5/4	0	-11/36	0	1
Δ_j		$\frac{25-11\alpha}{400}$	0	$\frac{7-11\alpha}{320}$	0	$\frac{65-77\alpha}{14400}$	$\frac{11\alpha-5}{960}$	0

Eger $\frac{5}{11} \le \alpha \le \frac{7}{11}$ bolsa, onda ha`mme $\Delta_j \ge 0$ boladı, sonlıqtan optimal sheshim to`mendegishe boladı: $X_1=8$, $X_2=0$, $X_3=18$, $F_{max}=\frac{25+11\alpha}{40}$

Eger $\alpha > \frac{7}{11}$ bolsa, $\Delta_2<0$ en` kishkene baha boladı. $A_2$-vektorının` bir koordinatası on` san boladı, sonlıqtan bazisten $A_1$- vektorın shıg`aramız ha`m $A_2$-vektorın baziske kirgizemiz. Endi $A_2$, $A_3$, $A_6$-bazisinin` ha`mme vektorlarının` koeffitsentlerin esaplaymız:

$$a'_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{12}} (j = 0,...,6), \qquad a'_{1j} = a_{1j} - \frac{a_{1j}}{a_{12}} * a_{i2} (i = 2,3, j = 0,...,6),$$

Biz endi 4-shi adım ushın keste du`zemiz:

Bazis	C_{baz}	b	$\frac{20-11\alpha}{400}$	1/40	$\frac{5+11\alpha}{400}$	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1/40	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
A_3	$\frac{5+11\alpha}{400}$	20	0	0	1	-1/18	5/24	0
A_6	0	96	0	0	0	-1/6	-1/8	1
Δ_j		$\frac{9+11\alpha}{200}$	0	0	0	$\frac{15-11\alpha}{7200}$	$\frac{11\alpha-3}{1920}$	0

Eger $7/11 \le \alpha \le 1$ bolsa, barlıq $\Delta_j \ge 0$ boladı, sonlıqtan optimal sheshim to`mendegishe boladı: $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$, $F_{max}=\frac{9+11\alpha}{20}$

Endi juwmaqlastıramız. Eger $0 \le \alpha \le 5/11$ bolsa, optimal sheshim to`mendegi ko`riniske iye boladı: $x_1=20$, $x_2=0$, $x_3=0$ $F_{max}=\frac{20-\alpha}{20}$, yag`nıy, eger ekinshi kriteriydin` a`hmiyeti jetkilikli da`rejede u`lken bolsa ,optimal rejede tekg`ana

A-tu`rindegi o`nim shıg`arılıwın ko`zde tutıladı. Eger 5/11≤α≤7/11 bolsa, optimal sheshim to`mendegishe boladı:

x_1=8, x_2=0, x_3=18, $F_{max}=\dfrac{25+11\alpha}{40}$,

Bunda kriteriyalardın` a`hmiyetliligi (bahalıg`ı) shama menen ten`dey. Bul jag`dayda karxana o`nimnin` A ha`m S tu`rlerin shıg`arıw kerek. Eger 7/11≤α≤1 bolsa, optimal sheshim to`mendegishe boladı:

x_1=0, x_2=8, x_3=20, $F_{max}=\dfrac{9+11\alpha}{20}$

Eger birinshi kriteriydın` a`hmiyetliligi u`lken bolsa, karxana B ha`m C tu`rindegi o`nimlerdi shıg`arıw kerek.

Juwmaqlaw.

Juwmaqlap aytqanda, pitkeriw qa`nigelik jumısında to`mendegi tiykarg`ı na`tiyjeler alındı:

- Sızıqlı programmalastırıw ma`selelerin skalyarlıq ha`m vektorlıq kriteriyalar menen sheshiw ma`seleleri u`yrenildi;

- Sızıqlı programmalastırıwdın` tiykarg`ı ma`selesi sheshiminin` bar bolıwı ha`m onı tabıwdın` usılları analizlendi ha`m u`yrenildi;

- Kriteriyalardın` salıstırmalı a`hmiyetine baylanıslı sanlı informatsiyalar tiykarında sheshim qabıl ma`seleleri u`yrenildi;

- Anıq ko`p kriteriyalı sızıqlı programmalastırıw ma`selesin ko`p kriteriyalı simpleks usılı menen sheship ko`rsetildi;

-anıq eki kriteriyalı sızıqlı programmalastırıw ma`selesi Pareto usılı ja`rdeminde sheship ko`rsetildi ha`m komp`yuterde na`tiyje alındı.

Paydalanılg`an a`debiyalar:

1. Larichev O. İ. Teoriya i metodı prinyatiya resheniy: uchebnik. – M.: Logos, 2003.
2. Taxa Xemdi A. Vvedenie v issledovanie operatsiy. – M.: İzdatel`skiy dom «Vil`yams», 2005.
3. Volkov İ., Zagoruyko E. İsledovanie operatsiy. M.: Nauka, 2002.
4. Samarskiy A. A., Mixaylov A. P. Matematicheskoe modelirovanie: İdei. Metodı. Primerı. M.:FİZMATLİT. 2005.
5. Shikin E., Chxartishvili A. Matematicheskie metodı i modeli v upravlenii. M.: Nauka, 2000.
6. Makarov İ., Vinogradskaya T. Teoriya vıbora i prinyatiya resheniy. M.: Vısshaya shkola, 1982.
7. Venttsel` E.S. İssledovanie operatsiy. M.: Sovetskoe radio. -1972.- 485s
8. Venttsel` E.S. İssledovanie operatsiy: zadachi, printsipı, metodiki. M.: Vısshaya shkola. -2004.- 208s.
9. Shiryaev V.i. İssledovanie operatsiy i chislennıe metodı optimizatsii. M.: Komkniga.- 2007.-216s
10. Shikin E.V. İssledovanie operatsiy. Uchebnik. TK Velbi, Prospekt. -2006.- 314s
11. Kostevich L.S., Lapko A.A. İssledovanie operatsiy. Teoriya igr. M.:Vısshaya shkola. -2008.- 368s
12. Suxarev A.G., Timoxov A.V., Fedorov V.V. Kurs metodov optimizatsii.- M.: FİZMATLİT.- 2005.- 386s.
13. Moiseev N.N., İvanilov Yu.P., Stolyarova E.M. Metodı optimizatsii.- M.: Nauka. - 1978. - 352s.
14. Moiseev N.N. Elementı teorii optimal`nogo upravleniya. M.: Nauka. 1974.- 525s.
15. Moiseev N.N. Matematicheskie zadachi sistemnogo analiza. M.: Nauka. – 1981.- 488s.