

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI

«OLIV MATEMATIKA» KAFEDRASI

I.Achilov

**OLIV MATEMATIKADAN MA'RUZALAR
I-QISM**

«Geologiya kortagrafiya» yo'nalishi 1-kurs talabalari uchun

QARSHI-2016

Taqrizchilar:

Qarshi Davlat Universiteti
dotsenti E. Aliqulov
Qarshi Muhandislik Iqtisodiyot Instituti
dotsenti T. Aliqulov

1-ma'ruza. Mavzu: Determinantlar va ularning xossalari.

Reja:

1. Fanning vazifasi va uning turli sohalarda qo'llanishi
2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.
3. Minor va algebraik to'ldiruvchi.
4. Determinantlarning asosiy xossalari.
5. n-tartibli determinant haqida tushincha.

Adabiyotlar: 3,5,6,7,10,11,15.

Tayanch iboralar: determinant, satr, ustun, element, diagonal, minor, algebraik to'ldiruvchi.

1.1.Fanning vazifasi va uning turli sohalarda qo'llanishi

Mustaqil respublikamizning kelajagini bo'lajak yosh mutaxassislarning bilim saviyasi, ularning maxorati va malakasisiz tasovvur qilish mumkin emas.

Respublikamiz Oliy ta'lim tizimida bo'layotgan o'zgarishlar, test-reyting tizimlari ham asosan malakali mutaxassislarni tayyorlashga qaratilgan.

Oliy matematika fani fundamental fan bo'lib, uning maqsadi bo'lajak qishloq xo'jalik xodimlari uchun amaliy masalalarni tahlil qilish va yechishda zamonaviy matematik usullarni o'rganish, talabalarda ilmiy dunyoqarashni shakllantirishdan iborat.

Fanni o'zlashtirish natijasida talabalar Oliy matematika fanining asoslarini (qonunlari, qoidolari) va amaliy masalalarni yechishda matematik usullarining roli hamda o'rnini bilishlari lozim.

SHuningdek, talablar qishloq xo'jaligi bilan bog'liq masalalarni matematik modellarini tuza olishlari va ularni qulay usullar bilan yecha olishlari lozim.

Talablar Oliy matematikaning asosiy qonunlarini, tushunchalarini, amaliy masalalarni yechish usullari va metodlarini o'rganishlari, agronomiya sohasidagi obektlar va jarayonlarning matematik modellarini tahlil qila olishlari zarur.

Fanning asosiy bo'limlari va ularda o'rganiladigan muammolar

1. Chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari.
2. Matematik analizga kirish.
3. Bir o'zgaruvchi funktsiyaning differentsial hisobi.
4. Oliy algebra elementlari.
5. Integral hisob.
6. Oddiy differentsial tenglamalar.
7. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari.

Fanning boshqa fanlar va ishlab chiqarish bilan aloqadorligi

Oliy matematika fanini o'rganish, uning Amaliy masalalarini yecha bilish neft va gaz ishi, elektr energitika, issiqlik energiyasi sohalari fanlarini mukammal o'rganishda va ishlab chiqarishda muhim o'rin tutadi.

1.2.Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

1. Ikkinchi tartibli determinantlar. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar berilgan bo'lsin.

Bu sonlardan tuzilgan $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ ifoda(son) **ikkinchi tartibli determinant** deb ataladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi.

Demak ta'rifga binoan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar determinantning **elementlari** deb ataladi.

Ikkinchi tartibli determinantlar ikkita gorizantal va ikkita vertikal qatorlarga ega. Gorizantal qatorlarni **satrlar**, vertikal qatorlarni **ustunlar** deb ataymiz. Satrlar yuqoridan pastga qarab, ustunlar esa chapdan o'ngga qarab sanaladi. Ikkinchi tartibli determinantda $a_{11} a_{12}$ birinchi satrni, a_{21}, a_{22} ikkinchi satrni a_{11} birinchi ustunni, a_{12} esa ikkinchi ustunni tashkil etadi. Shuningdek $a_{11} a_{22}$ ikkinchi tartibli determinantning **bosh diagonalini** $a_{12} a_{21}$ uning **yon (yordamchi) diagonalini** tashkil etadi. Shunday qilib ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yon diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish lozim ekan.

2. Uchinchi tartibli determinantlar.
$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ifoda yordamida aniqlanadigan son **uchinchi tartibli determinant** deyiladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi. Bu yerdagi $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ sonlar ma'lum sonlar.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr, uchta ustun va to'qqizta elementlarga ega. Ta'rifga binoan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

Determinantning har bir elementi ikki xonali indeksga ega bo'lib ulardan birinchisi shu element turgan satrning nomerini, ikkinchisi shu element turgan ustunning nomerini bildiradi. Masalan a_{32} element uchinchi satr va ikkinchi ustunda turadi. $a_{11} a_{22} a_{33}$ uchinchi tartibli determinantning bosh diagonalini, $a_{13}a_{22}a_{31}$ uning **yon diagonalini** tashkil etadi.

1.3. Minor va algabraik to'ldiruvchi

Determinantni biror elementining **minori** deb, determinantdan bu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi. a_{ik} ($i, k=1, 2, 3$)

elementning minori M_{ik} kabi belgilanadi. Uchinchi tartibli determinant elementlarining minorlari ikkinchi tartibli determinant bo'ladi. Masalan:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant a_{12} elementining minori $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ son, a_{23} elementining minori

$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ son bo'ladi. Chunki M_{12} ni topish uchun Δ determinantning birinchi satri va ikkinchi ustuni M_{23} ni topish uchun esa shu a_{23} element turgan determinantning ikkinchi satri va uchinchi ustuni o'chiriladi.

$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ ($i, k=1, 2, 3$) son a_{ik} elementning **algebraik to'ldiruvchisi** deb ataladi. Masalan Δ determinantning a_{32} elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \text{ bo'ladi.}$$

1.4. Determinantning asosiy xossalari

1. Determinantning satrlarini unga mos ustunlar bilan almashtirish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Determinantning ikkita satr(yoki ustun)larini o'rinlarini almashtirish natijasida determinantning ishorasi o'zgaradi xolos, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Bu yerda berilgan determinantning ikkinchi va uchinchi ustunlari o'rin almashgan.

3. Ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant 0 ga tengdir.

4. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror λ songa ko'paytirish determinantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinantning bu xossasiga asoslanib 3-xossani biroz kuchaytirish mumkin. Ya'ni ikkita proporsional satr(yoki ustun)larga ega bo'lgan determinant nolga tengdir.

5. Biror satr (yoki ustun)elementlari nollardan iborat determinant nolga tengdir.

6. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib boshqa bir satr (yoki ustun) ning mos elementlariga qo'shish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ma_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ma_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ma_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu yerda berilgan determinantning uchinchi ustun elementlari m songa ko'paytirilib ikkinchi ustunning mos elementlariga qo'shildi.

7. Determinantning biror satr(yoki ustun) elementlarini ularning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi determinantning o'ziga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant uchun

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, \quad \Delta = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23},$$

$$\Delta = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}, \quad \Delta = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31},$$

$$\Delta = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}, \quad \Delta = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33},$$

tengliklar o'rinlidir.

Determinantning bunday yozilishi uning satr yoki ustun elementlari bo'yicha **yoyilmasi** deyiladi. Masalan, keltirilgan tengliklardan birinchisi Δ determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalasa, oxirgisi uni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalaydi.

Biz yuqorida keltirgan uchinchi tartibli determinantning ta'rifi uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekan.

Izoh. Determinantning qaysi qatorida nol ko'p bo'lsa, uni o'sha qator elementlari bo'yicha yoyish ma'quldir.

8. Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini unga parallel boshqa bir satr (yoki ustun)ning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi nolga teng bo'ladi.

Bu xolda ikkita bir xil satr (yoki ustun)da ega bo'lgan determinant hosil bo'ladi.

Masalan, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

Bu yerda Δ determinantning birinchi satr elementlari ikkinchi satrning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shildi.

1.5. n-tartibli determinant haqida tushincha

n -tartibli determinant deb n ta satr, n ta ustun va n^2 ta elementlarga ega bo'lgan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

kabi belgilanuvchi songa aytiladi

Yuqorida keltirilgan determinantning barcha xossalari istalgan tartibli determinantlar uchun ham o'rinlidir. Tartibi to'rt va undan yuqori bo'lgan determinantlarni determinantning 7-xossasidan foydalanib tartibini pasaytirish orqali hisoblanadi.

Masalan, to'rtinchi tartibli determinantni (1.2) formulaga o'xshash

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

Bu yerdagi uchinchi tartibli determinantlar $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ elementlarning minori deyiladi. $a_{ik}(i,k=1,2,3,4)$ elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ik} orqali belgilasak (1.3) tenglikni

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \quad \text{ko'rinishida yozish mumkin.}$$

Bu formula to'rtinchi tartibli determinantni uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasidir. Bunaqa yoyilmani har bir satr va ustun elementlari uchun yozib to'rtinchi tartibli determinantni hisoblash uchun 8 ta formulalarni hosil qilishimiz mumkin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
3. Determinantning elementlari nima?
4. Determinantning satr va ustunlari, hamda bosh va yon diagonallari nima?
5. Determinantni songa ko'paytirish nimani anglatadi?
6. Bir xil tartibli determinantlarni mos elementlarini qo'shish yoki ayrish mumkinmi?
7. Istalgan tartibli determinant qanday hisoblanadi?
8. Minor va algebraik to'ldiruvchi nima?
9. Determinantni biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish deganda nimani tushunasiz?
10. Determinantni qaysi qator elementlari bo'yicha yoygan ma'qul?

2-ma'ruza. Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemalari

Raja:

- 1 Ikki noma'lumli ikkita va uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemalari.
2. Kramer qoidasi.

3. n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi haqida tushuncha.

Adabiyotlar: 3,5,6,7,10,11,15.

Tayanch iboralar: sistema koeffitsienti, ozod had, sistemaning yechimi, birgalidakgi sistema, aniq sistema, aniqmas sistema, birgalikda bo'lmagan sistema.

2.1. Ikki noma'lumli ikkita va uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemalari

1. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x va y noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma'lum. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ lar sistema **koeffitsientlari**, b_1 va b_2 sonlar esa **ozod had** (son)lar deb ataladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish degan so'z, noma'lum sonlarning shunday qiymatlari to'plamini topish demakki, ularni sistema tenglamalarining har biriga mos noma'lumlarning o'rniga qo'yilganda ular ayniyatlarga aylanadi. Bunday sonlar to'plami sistemaning yechimi deyiladi. Kamida bitta yechimga ega bo'lgan sistema **birgalikdagi sistema** deb ataladi. Birgina yechimga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniq sistema** deb ataladi. Cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniqmas sistema** deb ataladi. Birorta ham yechimga ega bo'lmagan sistema **birgalikda bo'lmagan sistema** deyiladi.

Izoh. Keltirilgan ta'riflar istalgan sistema uchun o'rinalidir.

2. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x, y va z noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ sistemaning koeffitsientlari, b_1, b_2 , va b_3 ozod sonlar. Barcha ozod sonlar nolga teng bo'lganda (2.2) sistema **bir jinsli** deyiladi.

2.2. Kramer qoidasi

(2.1) sistema bizga o'rta maktab kursidan ma'lum. Uni yechishning o'riniga qo'yish, qo'shish va grafik usullari bilan tanishmiz.

Bu yerda (2.1) sistemani yechishning yana bir usuli ya'ni uni determinantlardan foydalanib yechish usuli bilan tanishmiz. Sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchisini $-a_{12}$ ga ko'paytirib hadlab qo'shamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (2.3)$$

Shuningdek sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi sini a_{11} ga ko'paytirib hadlab qo'shsak

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{22} - b_1a_{12} \quad (2.4)$$

hosil bo'ladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (2.5)$$

belgilashlarni kiritamiz.

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinant sistemaning asosiy determinanti deb ataladi. Δ_x determinant Δ dagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida, Δ_y esa Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

(2.5) dan foydalanib (2.3) va (2.4) formulalarni

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \quad (2.6)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Mumkin bo'lgan quyidagi hollarni qaraymiz.

I. Sistemaning determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsin. U holda (2.6) ning har bir tenglamasini Δ ga bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (2.7)$$

berilgan sistemaning yechimini topish formulasiga ega bo'lamiz. (2.7) formulalar uning ixtirochisi Shvetsariyalik matematik Kramer (1704-1752) ning sharafiga Kramer formulalari deb ataladi.

II. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lsin.

Bu holda quyidagilardan biri bo'ladi.

1) $\Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lsin. U holda (2.6) $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$ ko'rinishini olib berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega, chunki istalgan son bu tenglamalarni qanoatlantiradi.

2) Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi masalan $\Delta_x \neq 0$ bo'lsin. U holda (2.6) ni birinchi tenglamasi $0 \cdot x = \Delta_x \neq 0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u yechimga ega emas. Demak, bu holda berilgan sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Xulosa. a) (2.1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ ya'ni, $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ yoki $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi Kramer formulalari (2.7) yordamida topiladi.

$$b) \quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \quad \text{ya'ni} \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{bo'lganda}$$

(2.1) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas);

d) $\Delta = 0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli ya'ni

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmaydi (birgalikda emas).

(2.1) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. (2.1.)

sistemaning har bir tenglamasi to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalashi ayon $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$

bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaydi. Demak har ikkala to'g'ri chiziq bitta nuqtada kesishadi. Ana shu kesishish nuqtasining koordinatalari sistemasining yechimi bo'ladi.

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \quad \text{ya'ni} \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi (sistema cheksiz ko'p echimlarga ega) $\Delta = 0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lganligi sababli ular kesishmaydi (sistema yechimga ega bo'lmaydi) ya'ni birgalikda emas.

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2.8)$$

ni qaraymiz.

(2.8) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan uchinchi tartibli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant (2.8) sistemaning **asosiy** determinanti deb ataladi. Berilgan sistemani yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{11} ga, ikkinchi tenglamasini a_{21} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{21} ga va uchinchi tenglamasini a_{31} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{31} ga ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shamiz.

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \quad (2.9)$$

Birinchi qavs ichidagi ifoda Δ determinantning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi bo'lganligi uchun determinantning 7-xossasiga ko'ra $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \Delta$ bo'ladi. (2.9) dagi ikkinchi va uchinchi qavs ichidagi ifodalar Δ determinantni ikkinchi va uchinchi ustun elementlarini boshqa bir ustunning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganligi uchun determinantning 8-xossasiga ko'ra ular nolga teng bo'ladi. Shunday qilib (2.8) tenglik

$$\Delta_x = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \quad (2.10)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

determinantni qaraymiz. E'tibor bersak bu determinant asosiy determinantdagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'lganligiga

iqror bo'lamiz. Bu determinantning b_1, b_2, b_3 , elementlarining algebraik to'ldiruvchilari mos ravishda Δ determinantning a_{11}, a_{21}, a_{31} elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga tengligini hisobga olsak $b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} = \Delta_x$ bo'lib (2.10) tenglik

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \quad (2.11)$$

ko'rinishini oladi.

Shunga o'xshash $\Delta \cdot y = \Delta_y, \Delta \cdot z = \Delta_z$ (2.12) tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Δ_y determinant sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga Δ_z esa Δ dagi uchinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Mumkin bo'lgan qo'yidagi hollarni qaraymiz:

I. (2.7) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsin. U holda (2.10) va (2.11) tenglamalarni har birini Δ ga bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (2.13)$$

formulalarga ega bo'lamiz. (2.13) **Kramer formulalari** deb ataladi. Shunday qilib (2.8) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (2.13) yordamida topilar ekan.

II. (2.8) sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lsin. U holda qo'yidagilardan biri sodir bo'ladi.

a) $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (2.8) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Haqiqatan, aniqlik uchun $\Delta_x \neq 0$ deb faraz qilsak bu holda $\Delta \cdot x = \Delta_x$ (2.11) tenglik $0x = \Delta_x \neq 0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u x ning hech bir qiymatida bajarilmaydi.

b) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsin. Bu holda (2.8) sistema yo yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

Izoh.

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \end{cases}$ sistema $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \neq \frac{b_1}{b_2}$ shartda aniqmas bo'ladi.

Xulosa. a) Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi (2.8) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (2.13) yordamida topiladi.

b) $\Delta = 0$ bo'lib $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlardan aqalli birortasi noldan farqli bo'lganda (2.7) sistema yechimga ega emas.

d) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lganda (2.8) sistema yo yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega.

2.3. n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

Umumiy holda n noma'lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasi

[illegible]

ko'rishga ega bo'ladi. Bu yerdagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \dots, b_n$ ozod had (son) lar hamda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ koeffitsientlar ma'lum sonlar.

Yuqorida keltirilgan Kramer qoidasi noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan istalgan (2.14) ko'rinishdagi sistema uchun o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda u yagona yechimga ega bo'lib, yechim Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}, \quad (2.15)$$

yordamida topiladi. Bu yerdagi Δ determinant (2.14) sistemaning noma'lumlari oldidagi koeffitsientlaridan tuzilgan bo'lib, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ determinantlar undagi birinchi, ikkinchi va hokazo n -ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Shuni aytish joizki, sistemadagi noma'lum (tenglama)lar soni orta borgan sari uni Kramer usuli bilan yechish qiyinlasha boradi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglama nima?
2. Sistema qachon birgalikda, qachon aniq, qachon birgalikda emas va qachon aniqmas deyiladi?
3. Kramer formulalarini keltirib chiqaring.
4. Sistema qachon yagona yechimga ega?
5. Sistema qay vaqtda aniqmas bo'ladi?
6. Uch noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'laoladimi?
7. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmasligi mumkinmi?
8. Noma'lumlari soni chiziqli tenglamalari soniga teng sistemaning yechimi qanday topiladi?
9. Bir jinsli sistemani noldan farqli yechimga ega bo'lish shartini ayting.
10. Kramer formulalari qanaqa sistemalar uchun o'rinli?

3-Ma’ruza. Mavzu: Matritsalar va ular ustida amallar. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsaviy usuli

Reja:

1. Matritsalar va ular ustida amallar.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali yozilishi va yechilishi.

Adabiyotlar: 3,5,6,7,10,11,15.

Tayanch iboralar: matritsa, xos matritsa, xosmas matritsa, birlik matritsa, teskari matritsa. matritsa, sistema, yechim, teskari matritsa, algebraik to'ldiruvchi.

3.1. Matritsalar va ular ustida amallar

1. Matritsa haqida tushincha. Malum sonlardan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

kabi jadvallar **matritsa** deb ataladi. $a_{11}, a_{12}, \dots$ sonlar esa matritsaning **elementlari** deyiladi. Jadvalning gorizantal qatorlari matritsaning **satrlari**, vertikal qatorlari esa uning **ustunlari** deyiladi. Satrlari soni ustunlari soniga teng matritsa **kvadrat matritsa** deyiladi va satrlari yoki ustunlarining soni shu matritsaning tartibi deyiladi. Masalan (3.1) dagi birinchi matritsa ikkinchi tartibli, uchinchi matritsa esa uchinchi tartibli kvadrat matritsadir. Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lmagan matritsa **to'g'ri burchakli** deyiladi. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli matritsa **$m \times n$ o'lchamli matritsa** deyiladi. Masalan (3.1) dagi ikkinchi matritsa 2×4 o'lchamli to'g'ri burchakli matritsa. Yagona satrga ega bo'lgan matritsa **satr-matritsa**, yagona ustunga ega bo'lgan matritsa **ustun-matritsa** deb ataladi. Masalan $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ satr-matritsa, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ esa ustun-matritsadir.

Kvadrat matritsaning elementlaridan matritsa belgisini determinant belgisi bilan almashtirish natijasida hosil bo'lgan determinant shu **matritsaning determinanti** deyiladi. Matritsani qisqacha bitta A harf bilan belgilasak uning determinanti $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. Masalan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning

determinanti $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ bo'ladi.

Determinanti noldan farqli kvadrat matritsa **xosmas**, determinanti nolga teng kvadrat matritsa **xos** matritsa deyiladi.

2. Matritsalarining tengligi. Bir xil o'lchamli A va B matritsalarining barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lganda ular **teng** ($A=B$) deb ataladi.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{matritsalar } a_{11}=b_{11}, a_{12}=b_{12}, a_{13}=b_{13},$$

$a_{21}=b_{21}, a_{22}=b_{22}, a_{23}=b_{23}$ bo'lganda teng bo'ladi ($A=B$).

3. Matritsalarini qo'shish. Ikkita bir xil o'lchamli matritsaning **yig'indisi** deb ularning mos elementlarini qo'shish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ matritsaning}$$

yig'indisi deb

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi.

Matritsalarining yig'indisi uchun $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$ tengliklar o'rinli.

Barcha elementlari nollardan iborat matritsa **nol matritsa** deb ataladi va (0) yoki 0 kabi belgilanadi. Istalgan A matritsa uchun $A+0=A$ bo'ladi, bu yerdagi 0 matritsa A bilan bir xil o'lchamli nol matritsa.

4. Matritsani songa ko'paytirish. Matritsani songa ko'paytmasi deb matritsaning barcha elementlarini shu songa ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa } mA = Am = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Matritsani nolga ko'paytirish natijasida nol-matritsa hosil bo'ladi.

5. Matritsalarini ko'paytirish.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ matritsaning } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

matritsaga **ko'paytmasi** deb elementlari quyidagicha aniqlanuvchi $C=AB$ matritsaga aytiladi

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Matritsalarini bu xilda ko'paytirish **satrlarni ustunga** deb yuritiladi. Matritsalarini ko'paytirish qoidasi birinchi ko'payuvchining ustunlari soni ikkinchi ko'payuvchining satrlari soniga teng bo'lgan har qanday to'g'ri burchakli matritsalar uchun o'rinlidir.

Matritsalarini ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

- 1) $(AB)C = A(BC)$; 2) $(A+B)C = AC + BC$; 3) $(mA)B = m(AB)$;
- 4) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Bu yerdagi A, B, C lar matritsalar bo'lib ular uchun yuqoridagi ko'paytirish va qo'shish amallari o'rinli, m-biror son.

6. Birlik matritsa. Bosh diagonalida turgan barcha elementlari 1 ga teng bo'lib qolgan elementlari 0 dan iborat kvadrat matritsa **birlik matritsa** deb ataladi va E orqali belgilanadi.

Masalan $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ikkinchi tartibli birlik matritsa,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ esa uchinchi tartibli birlik matritsadir.

Birlik matritsaning determinanti 1 ga teng, ya'ni $|E|=1$.

Istalgan A kvadrat matritsani uning tartibiga mos birlik matritsaga ko'paytirish natijasida o'sha matritsaning o'zi hosil bo'ladi, ya'ni $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Ikkita sonlardan kamida bittasi nol bo'lgandagina ularning ko'paytmasi nol bo'lishi ma'lum. Matritsalarini ko'paytmasi bunaqa xossaga ega emas, ya'ni ikkita noldan farqli matritsalarining ko'paytmasi nol matritsa bo'lishi ham mumkin.

7. Teskari matritsa. A kvadrat matritsaga **teskari matritsa** deb $A \cdot B = B \cdot A = E$ shartni qanoatlantiruvchi B matritsaga aytiladi. A matritsaga teskari matritsa odatda A^{-1} kabi belgilanadi. Har qanday kvadrat matritsaga teskari matritsa mavjudmi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

3.1-teorema. A kvadrat matritsaga teskari A matritsa mavjud bo'lishi uchun A matritsaning xosmas matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

3.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali yozilishi va yechilishi

Osonlik uchun uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \quad (3.3)$$

ni qaraymiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

belgilashni kiritamiz. U holda matritsalarini ko'paytirish qoidasiga binoan

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Shuning uchun (3.3) sistemani matritsalarini tengligidan foydalanib

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishida yoki qisqacha $A \cdot X = B$ (3.4) matritsali tenglama ko'rinishda yozish mumkin. (3.3) sistema (3.4) yordamida berilgan bo'lib A xosmas matritsa bo'lsa uni quyidagicha yechiladi. (3.4) tenglamaning har ikkala tomonini chapdan A matritsaga teskari A^{-1} ga ko'paytirsak, $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$; $(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$; $X = A^{-1} \cdot B$.

$X = A^{-1} \cdot B$ (3.5) matritsali tenglama (3.4) ning yechimidir.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Kvadrat matritsa nima? Uning determinantichi?
3. Xos va xosmas matritsalar deb qanday matritsalariga aytiladi?
4. Birlik matritsa nima?
5. Satr-matritsa nima?
6. Ustun-matritsa nima?
7. Matritsalar qachon teng bo'ladi?
8. Matritsani songa ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
9. Matritsalarini qo'shish va ayrish mumkinmi?
10. Matritsalarini ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
11. Qachon matritsalarini ko'paytirish mumkin?
12. Berilgan matritsaga teskari matritsa qanday aniqlanadi?
13. Har qanday matritsaga teskari matritsa mavjudmi?
14. Teskari matritsa qanday topiladi?
15. Teskari matritsaning determinantlari o'zaro qanday munosabatda bo'ladi?
16. Chiziqli tenglamalar sistemasining matritsali yozilishi qanday?
17. Matritsali tenglama qanday yechiladi?

4-ma'ruza. Mavzu: Tekislikda analitik geometriya

Reja:

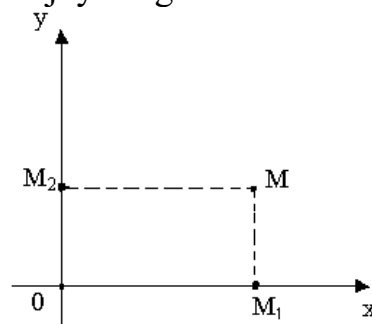
1. Tekislikda analitik geometriya.
2. Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
3. To'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari.
4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Adabiyotlar: 3,5,7,10,11,15,16.

Tayanch iboralar: Dekart sistemasi, nuqtaning koordinatalari, koordinata sistemasi, abssissa, ordinata, applikata, oktant, qutb koordinatalari, to'g'ri chiziq, burchak koeffitsient, boshlang'ich ordinata, parallellik, perpendikulyarlik, burchak, burchak koeffitsient, parallellik, perpendikulyarlik, tenglama, dasta, dasta markazi.

4.1. Tekislikda analitik geometriya

Bizga ma'lumki, to'g'ri chiziq nuqtalarining o'rne bitta son yani uning koordinatasi bilan to'la aniqlanadi. Tekislik nuqtalarining o'rne bir juft sonlar bilan aniqlanishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik tekislikda 0 nuqtada kesishuvchi, bir xil o'lchov birligiga ega va o'zaro perpendikulyar Ox , Oy o'qlar berilgan bo'lsin (ular tekislikda dekart sistemasini tashkil etadi). Ox va Oy o'qlari joylashgan tekislik koordinatalar tekisligi deb aytiladi va Oxy kabi belgilanadi (1-chizma). M nuqta shu Oxy tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M nuqtadan Ox va Oy o'qlariga perpendikulyar o'tkazib, ularning asoslarini M_1 va M_2 lar orqali belgilaymiz. M_1 nuqtaning Ox o'qdagi koordinatasi x M nuqtaning **abssissasi**, M_2 nuqtaning Oy o'qdagi koordinatasi y M nuqtaning **ordinatasi** deb aytiladi. x , y lar M nuqtaning koordinatalari (dekart koordinatalari) deb aytiladi.

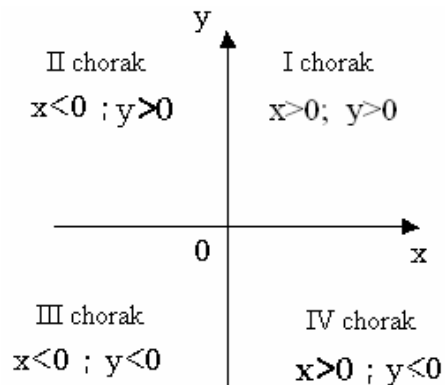


1-chizma.

Shunday qilib, Oxy koordinata tekisligining istalgan M nuqtasiga yagona tartiblangan sonlar jufti (x,y) –uning koordinatalari mos keladi.

Aksincha, har qanday (x,y) juftlik Oxy tekislikdagi yagona M nuqtani aniqlaydi. Demak, tartiblangan (x,y) sonlar jufti bilan Oxy koordinata tekisligining nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Ox o'q **abssissalar** o'qi, Oy o'q esa **ordinatalar** o'qi, ular birgalikda **koordinata o'qlari** deyiladi. O'qlarning kesishish nuqtasi 0 **koordinatalar boshi** deyiladi. Koordinata o'qlari koordinata tekisligini **choraklar** deb ataluvchi to'rtta qismlarga ajratadi (2-chizma). x abssissaga va y ordinataga ega bo'lgan M nuqtani $M(x;y)$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.



2-chizma.

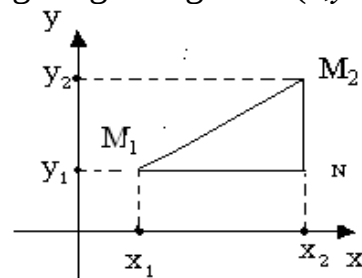
To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M izlanayotgan nuqta bo'ladi.

4.2. Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish

1. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofa. Oxy tekisligining berilgan $M_1(x_1;y_1)$

va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalari orasidagi masofani topish uchun formula chiqaramiz. M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasin (3-chizma).

M_1 nuqtadan Ox ga parallel, M_2 nuqtadan Oy ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib ularni kesishish nuqtasini N orqali belgilaymiz. M_1M_2N uchburchak to'g'riburchakli bo'lganligi sababli Pifagor teoremasiga binoan $M_1M_2^2=M_1N^2+NM_2^2$ bo'ladi.



3-chizma.

$M_1N=|x_2-x_1|$, $NM_2=|y_2-y_1|$ ekanini hisobga olsak, $M_1M_2^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ bo'ladi.

Izlanayotgan masofani d orqali belgilasak, tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofani topish uchun $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (4.1) formulaga ega bo'lamiz.

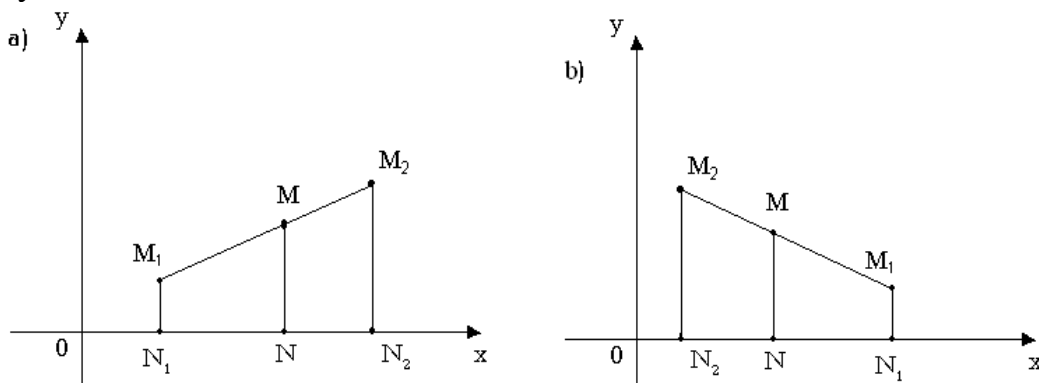
Xususiyl holda koordinatalar boshidan $M(x; y)$ nuqtachacha d masofa $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (4.2) formula yordamida topiladi.

(4.1) formula M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi.

2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda > 0$ nisbatda bo'lish deganda shu kesmada $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ munosabatni qanoatlantiruvchi M nuqtani topish tushuniladi.

Oxy tekislikda $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilganda M_1M_2 kesmani $\lambda > 0$ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish uchun formula chiqaramiz. M_1 , M va M_2 nuqtalarning Ox o'qlardagi proeksiyalarini N_1, N va N_2 lar orqali belgilaymiz. (4-chizma.)

Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi kesmalar proporsional bo'lishi elementar geometriyadan ma'lum.



4-chizma.

Shunga binoan, $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2} = \lambda$. Ammo $N_1N = |x - x_1|$, $NN_2 = |x_2 - x|$ bo'lgani

uchun $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \lambda$. $x - x_1$ va $x_2 - x$ ayirma bir xil ishorali ekanligini hisobga olib $|x - x_1|$

va $|x_2 - x|$ modullarni $x - x_1$ va $x_2 - x$ ayirmalarga almashtirib $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$ tenglikka ega

bo'lamiz. Oxirgi tenglikni yechib x ni aniqlaymiz: $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$; $x - \lambda x = x_1 + \lambda x_2$; $(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$; $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

Shunga o'xshash formulani y uchun ham hosil qilish mumkin.

Shunday qilib izlanayotgan M nuqtani x va y koordinatalarini topish uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (4.3)$$

formulalarni hosil qilamiz.

Xususiyl holda M_1M_2 kesmaning o'rtasini koordinatalarini topish talab etilganda $\lambda = 1$ bo'lib (4.3) dan

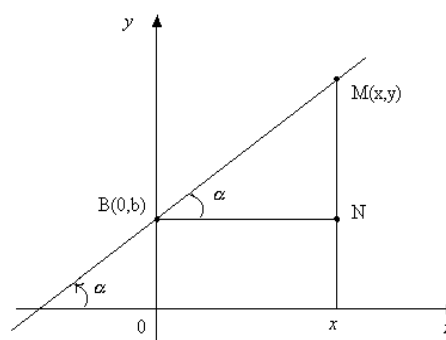
$$x = \frac{x_1 + x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{1 + \lambda}, \quad (4.4)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

4.3. To'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa, qutb koordinatalar sistemasi

1.To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi. Oxy tekislikni hamda unda yotgan to'g'ri chiziqni qaraymiz. To'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan Oy o'q bilan $B(0;b)$ nuqtada kesishsin va Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil etsin. (5-chizma.) Shu to'g'ri chiziqning dekartning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tenglamasini topamiz, ya'ni x va y dekart koordinatalarini bog'lovchi shunday tenglamani topamizki to'g'ri chiziqning barcha nuqtalarini koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradi, to'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi.

Faraz qilaylik $M(x;y)$ nuqta to'g'ri chiziqning $B(0;b)$ nuqtasidan farqli istalgan nuqtasi bo'lsin. 5-chizmadagi $\triangle BNM$ dan $\frac{MN}{BN} = \operatorname{tg} \alpha$ yoki $MN = \operatorname{tg} \alpha \cdot BN$ tenglikka ega bo'lamiz. $MN = y - b$, $BN = x$ ekanligini hisobga olsak $y - b = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$ yoki $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$ kelib chiqadi. $k = \operatorname{tg} \alpha$ deb belgilasak $y = kx + b$ (4.5) tenglama hosil bo'ladi.



5-chizma.

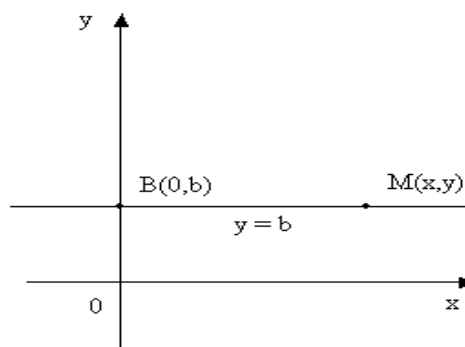
Bu tenglama berilgan to'g'ri chiziqni tenglamasi. Chunki uni to'g'ri chiziqni istalgan $B(0;b)$ nuqtadan farqli $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari qanoatlantirishini ko'rdik. $B(0;b)$ nuqtaning koordinatalari ham uni qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. To'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

$k = \operatorname{tg} \alpha$ son to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsienti** deb ataladi, B esa to'g'ri chiziqning **boshlangich ordinatasi** deyiladi.

To'g'ri chiziqning (4.5) tenglamasi uning **burchak koeffitsientli** tenglamasi deyiladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel bo'lsin (6-chizma).

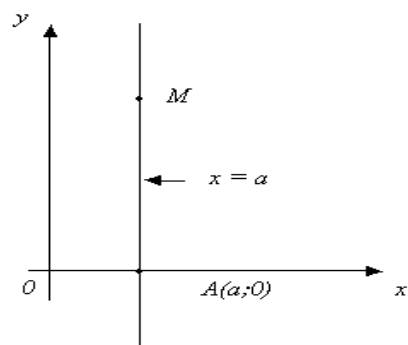
Bu holda $\alpha = 0$, $k = \operatorname{tg} 0 = 0$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziq tenglamasi $y = b$ (4.6) ko'rinishiga ega bo'ladi. (4.6) Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi. Xususiyl holda $y = 0$ Ox o'qning tenglamasi.



6-chizma.

To'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tsin. U holda $b = 0$ bo'lib koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $y = kx$ (4.7) hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $A(a;0)$ nuqtadan o'tib Oy o'qqa parallel bo'lsin. (7-chizma). Bu holda to'g'ri chiziq Ox o'q bilan 90° burchak tashkil etib $k = tg90^\circ$ mavjud bo'lmaganligi uchun uning tenglamasini (4.5) ko'rinishda yozib bo'lmaydi. To'g'ri chiziqning barcha nuqtalari a absissaga ega bo'lganligi uchun uning tenglamasi $x = a$



7-chizma

ko'rinishga ega bo'ladi, xususiyl holda $x=0$ Oy o'qning tenglamasi bo'ladi.

Izoh. Bundan buyon to'g'ri chiziq berilgan yoki to'g'ri chiziq topilsin deyilganda to'g'ri chiziqning tenglamasi berilganini yoki to'g'ri chiziqning tenglamasini topish kerakligi tushiniladi.

2. To'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi. Yuqorida to'g'ri chiziq tenglamasi dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali tenglama bo'lishini ko'rdik. Endi teskarisini isbotlaymiz.

4.1-teorema. Dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama to'g'ri chiziq tenglamasidir.

2-ta'rif. $Ax + By + C = 0$ (4.8) ($A^2 + B^2 \neq 0$) tenglama **to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi** deb ataladi.

Endi umumiy ko'rinishdagi tenglama bilan yanada batafsilroq tanishamiz.

1) $B=0$ bo'lsin. U holda tenglama

$$x = -\frac{C}{A}$$

ko'rinishga keltirilishini ko'rdik. Agar $C \neq 0$ bo'lsa to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel bo'ladi. $C=0$ bo'lsa tenglama $x=0$ ko'rinishga ega bo'lib bu holda to'g'ri chiziq Oy o'qda yotadi.

2) $A=0$ bo'lsin. U holda $B \neq 0$ va to'g'ri chiziq tenglamasi $y = -\frac{C}{B}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglama Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasidir. $C=0$ bo'lganda bundan $y=0$ Ox o'qning tenglamasi hosil bo'ladi.

3) $C=0$ bo'lsin. U holda (4.8) tenglama $Ax + By = 0$ yoki $y = -\frac{A}{B}x$ ko'rinishga ega bo'ladi. Oxirgi tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi ekanini bilamiz. Demak $C=0$ bo'lganda to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tar ekan.

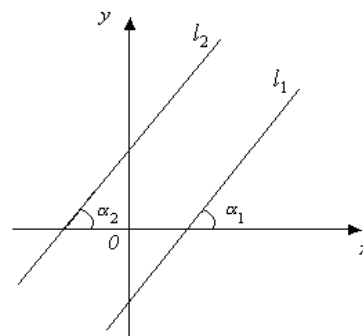
Izoh. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy ko'rinishda berilganda tenglamadan y topilsa to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi hosil bo'ladi.

Shuning uchun vaziyatga qarab to'g'ri chiziqning u yoki bu tenglamalaridan foydalanamiz.

Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti. Faraz qilaylik to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsin. U holda to'g'ri chiziqlar Ox o'q bilan bir xil burchak tashkil etadi, ya'ni $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'ladi. Demak $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$ va $k_1 = k_2$ (4.9) bo'ladi (8-chizma).

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'lib ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi. Ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlarni parallel sanab quyidagiga ega bo'lamiz.

Ikki to'g'ri chiziqning parallel bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsientlarini teng bo'lishi zarur va yetarlidir.



8-chizma.

Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti. ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsin, bu holda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni kotangensini topamiz:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}.$$

Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar uchun $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$ bo'lgani sababli

$\frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$, bundan $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ yoki $k_1 \cdot k_2 = -1$. Aksincha, $k_1 \cdot k_2 = -1$ bo'lsa to'g'ri chiziqlar perpendikulyar ekanini ko'rsatish mumkin.

Shunday qilib ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyar bo'lishi uchun $k_1 \cdot k_2 = -1$ (4.10) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Agar to'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishdagi $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tenglamalari yordamida berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \quad \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1 \quad \text{yoki} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad (4.11)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

3. Berilgan nuqtadan o'tib ma'lum yo'nalishga ega to'g'ri chiziq tenglamasi

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti k ma'lum va to'g'ri chiziqni $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tishi aniq bo'lganda shu to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

$$y = kx + b \quad (4.12)$$

ni yozamiz. Bu yerdagi k ma'lum son b esa noma'lum. b ni to'g'ri chiziqni $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tish shartidan foydalanib topamiz. $M_1(x_1; y_1)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasi (4.12) ni qanoatlantiradi, ya'ni

$$y_1 = kx_1 + b$$

Bundan

$$b = y_1 - kx_1$$

b ning topilgan qiymatini to'g'ri chiziq tenglamasi (4.12) ga qo'ysak

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

yoki

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad (4.13)$$

hosil bo'ladi. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deb aytiladi.

4. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi. $M_1(x_1; y_1)$ nuqta hamda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq berilgan. Shu nuqtadan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etiladi. (4.13) formulaga binoan izlanayotgan tenglama $y-y_1=k_1(x-x_1)$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi noma'lum k_1 ni to'g'ri chiziqlarni parallellik shartidan aniqlaymiz. Parallellik sharti (4.9) ga binoan $k_1=k$ bo'ladi.

Demak $y-y_1=k(x-x_1)$.

Bu berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

5. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi. Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan berilgan $y=kx+b$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etilsin (4.13) ga binoan izlanayotgan tenglama $y-y_1=k_1(x-x_1)$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan bu to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgani uchun (4.10) ga asosan $k \cdot k_1 = -1$ yoki $k_1 = -\frac{1}{k}$ bo'ladi.

$$\text{Demak} \quad y-y_1 = -\frac{1}{k}(x-x_1) \quad (4.14)$$

Bu tenglama berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

6. To'g'ri chiziqlar dastasi.

1-ta'rif. Tekislikning M nuqtasidan o'tuvchi va shu tekislikda yotgan barcha to'g'ri chiziqlar to'plami to'g'ri chiziqlar **dastasi** deb ataladi.

Bunda M nuqta **dastaning markazi** deyiladi.

Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y-y_1=k_1(x-x_1) \quad (4.15)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi burchak koeffitsient k o'zgarsin. U holda k ning har bir aniq qiymatiga $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tuvchi aniq to'g'ri chiziq mos keladi. Aksincha abssissalar o'qiga perpendikulyar $x=x_1$ to'g'ri chiziqdan farqli barcha to'g'ri chiziqlar aniq k burchak koeffitsientiga ega bo'lib u (4.15) tenglama yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib k burchak koeffitsient istalgan sonli qiymatni qabul qilganda (4.15) tenglama $x=x_1$ to'g'ri chiziqdan farqli markazi $M_1(x_1; y_1)$ nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasini tenglamasini ifodalaydi.

7. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab etilsin. Shartga ko'ra to'g'ri chiziq $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tganligi uchun uning tenglamasi (4.15) ga ko'ra $y-y_1=k_1(x-x_1)$ bo'ladi. Bu yerdagi k noma'lum. Uni topish uchun to'g'ri chiziqning $M_2(x_2; y_2)$ nuqtadan o'tishi shartidan foydalanamiz. $M_2(x_2; y_2)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari shu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Bundan $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

k ning ushbu topilgan qiymatini to'g'ri chiziq tenglamasiga qo'ysak

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

yoki buni $y_2 - y_1$ ga bo'lsak

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (4.16)$$

tenglamaga ega bo'ladi.

Demak (4.16) berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir.

(4.16) da $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ deb faraz qilinadi, aks holda u ma'noga ega emas. Boshqacha aytganda to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmagan holni qaradik. Agar $x_1 = x_2$ bo'lsa to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel bo'lib, uning tenglamasi $x = x_1$ bo'ladi. Agar $y_1 = y_2$ bo'lsa, to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel bo'lib uning tenglamasi $y = y_1$ bo'ladi.

Izoh (4.16) tenglama to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham yaroqli.

U holda (4.16) dagi qaysi kasrning maxraji nolga teng bo'lsa uning suratini ham nolga tenglashtirish kerak xolos.

8.To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. Faraz qilaylik to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan u Ox o'qdan $OA=a$, Oy o'qdan $OB=b$ kesmalar ajratsin

U holda to'g'ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o'tishi ravshan. Shuning uchun ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (10.5) dan foydalanamiz: $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$ bo'lgani uchun $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$ yoki $\frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b}$, bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (4.17)$$

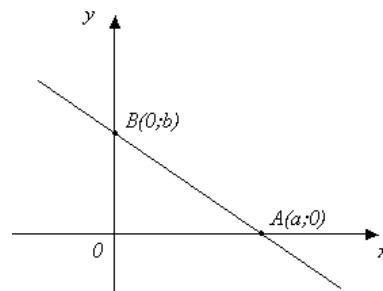
kelib chiqadi. Bu tenglama **to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb ataladi.

8.To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. Faraz

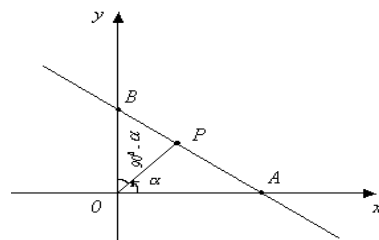
qilaylik to'g'ri chiziq $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tenglama orqali

berilgan bo'lib u koordinatalar boshidan o'tmasin (10-chizma). To'g'ri chiziqqa OP perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini p , OP perpendikulyar bilan Ox o'q orasidagi burchakni α orqali

belgilaymiz. p to'g'ri chiziqning **normali** deb ataladi.



9-chizma



10-chizma

Chizmadagi $\triangle AOP$ dan $\frac{OP}{OA} = \cos \alpha$; $OA = \frac{OP}{\cos \alpha} = \frac{p}{\cos \alpha}$; $a = \frac{p}{\cos \alpha}$. $\triangle ABP$ dan $\frac{OP}{OB} = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$; $OB = \frac{p}{\sin \alpha}$; $b = \frac{p}{\sin \alpha}$.

a va b ning ushbu qiymatlarini to'g'ri chiziqning tenglamasiga qo'ysak

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos \alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin \alpha}} = 1 \text{ yoki}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p; \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (4.18)$$

kelib chiqadi. (4.18)-to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasini o'ziga xos xususiyatlaridan biri undagi $p \geq 0$ va $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

9. To'g'ri chiziq tenglamasini normal ko'rinishiga keltirish. To'g'ri chiziq umumiy ko'rinishidagi tenglamasi $Ax + By + C = 0$ (4.8) yordamida berilgan bo'lsin. Shu tenglamani (4.18) ko'rinishdagi normal tenglamaga keltirish mumkinligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda (4.8) tenglamani shunday o'zgarmas son M ga ko'paytiramizki natijada

$$MAx + MBy + MC = 0 \quad (4.19)$$

to'g'ri chiziqning normal tenglamasi bo'lsin. Buni normal tenglama (4.18) bilan taqqoslab $M \cdot A = \cos \alpha$, $M \cdot B = \sin \alpha$, $M \cdot C = -p$ ekaniga iqrar bo'lamiz. Oxirgi tenglamadan M , α , p noma'lumlarni aniqlash qiyin emas. U yerdagi birinchi ikkita tenglamani kvadratga ko'tarib hadlab qo'shsak

$$M^2 A^2 + M^2 B^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \quad M^2 (A^2 + B^2) = 1; \quad M^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}$$

bo'lib bundan
$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (4.20)$$

kelib chiqadi. M ni **normallovchi ko'paytuvchi** deb ataladi. (4.20) da ishora ozod had C ning ishorasiga qarama-qarshi olinadi. M ning topilgan qiymatini (4.19) ga qo'yib $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ va p larni aniqlash mumkin:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Shunday qilib koordinatalar boshidan $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofa

$$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (4.21)$$

formula yordamida topilar ekan.

4.4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa

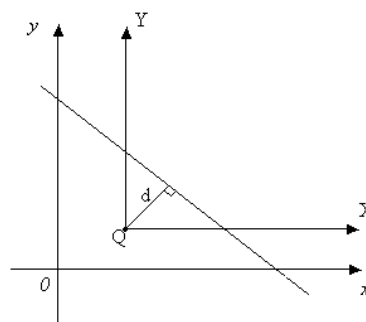
Aytaylik, $Q(x_0; y_0)$ nuqta hamda $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, Q nuqtadan to'g'ri chiziqqacha d masofani topish talab etilsin. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa deyilganda undan to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi. Oxy sistemani parallel ko'chirib koordinatalar boshini Q nuqtaga joylashtiramiz.

U holda

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

bo'lib to'g'ri chiziq tenglamasi yangi QXY sistemaga nisbatan quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$A(X+x_0)+B(Y+y_0)+C=0$ yoki
 $AX+BY+(Ax_0+By_0+C)=0$
 $Ax_0+By_0+C=C_0$ deb belgilasak to'g'ri chiziq $AX+BY+C_0=0$ tenglamaga ega bo'ladi.



11-chizma

$Q(x_0; y_0)$ nuqta yangi sistemaning koordinatalar boshi bo'lganligi uchun undan to'g'ri chiziqqa masofa (10.10) formula yordamida topiladi:

$$d = \frac{|C_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Bundan $C_0 = Ax_0 + By_0 + C$ ekanligini hisobga olib

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (4.22)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula **nuqtadan to'g'ri chiziqqa masofani topish** formulasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Tekislikda nuqtaning dekart koordinatalarini ta'riflang?
2. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofani topish formulasini yozing?
3. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulasini keltirib chiqaring?
4. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak nima?
5. To'g'ri chiziq tenglamasi nima?
6. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi qanaqa?
7. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi qanaqa?
8. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
9. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
10. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini yozing.
11. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
12. Nuqtadan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
13. Nuqtadan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
14. To'g'ri chiziqlar dastasi, dastaning markazi nima?
15. Dastaning tenglamasini yozing.
16. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
17. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.
18. To'g'ri chiziqning normal tenglamasini yozing.
19. To'g'ri chiziqning tenglamasini qanday qilib normal ko'rinishga keltiriladi.

- 20..Koordinatalar boshidan to'g'ri chiziqqacha masofa qanday topiladi?
 21.Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa qanday topiladi?

5-ma'ruza. Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Reja:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning kanonik tenglamalari.
2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalari.

Adabiyotlar: 3,5,8,10,11,15,16.

Tayanch iboralar: aylana, ellips, giperbola, parabola, markaz, radius, fokus, yarim o'q, fokal o'q, simmetriya o'q, ellipsning uchlari, haqiqiy o'q, mavhum o'q, giperbolaning uchi, direktrisa, parabolaning parametri, ekscentrisitet.

5.1.Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning kanonik tenglamalari

1-ta'rif. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (5.1) ko'rinishdagi tenglama *ikkinchi darajali algebraik tenglama* deb ataladi.

Bu yerdagi A, B, C, D, E, F ma'lum sonlar bo'lib ulardan A, B, C bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya'ni $A=B=C=0$ bo'lganda (5.1) tenglama

$$Dx + Ey + F = 0$$

ko'rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

2-ta'rif. Dekart koordinatalari x va y ra nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri chiziqlar *ikkinchi tartibli egri chiziqlar* deb ataladi. (5.1) ikkinchi tartibli egri chiziqning *umumiy tenglamasi* deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarga *aylana, ellips, giperbola* va *parabolalar* kiradi.

1.Aylana va uning kanonik tenglamasi.

3-ta'rif. Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **aylana** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi $O_1(a;b)$ nuqtada bo'lib radiusi R ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (1^a-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ desak aylananing ta'rifiga binoan:

$$MO_1 = R$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (1.2) dan foydalansak.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (5.2)$$

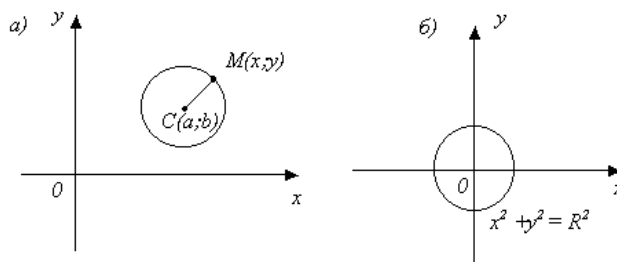
kelib chiqadi. Shunday qilib aylananing istalgan $M(x;y)$ nuqtasining kooordinatalari (5.2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek aylanaga tegishli bo'magan hech bir nuqtaning koordinatalari (5.2) tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (5.2) aylana tenglamasi. U aylananing kanonik (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiyl holda aylanani markazi $O_1(a,b)$ koordinatalar boshida bo'lsa $a=b=0$ bo'lib uning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (5.3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi (1^b-chizma).

Endi aylanani kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (5.1) bilan taqqoslaymiz. (5.2) da qavslarni ochib ma'lum almashtirishlarni bajarsak u



1-chizma.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (5.4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (5.1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi koeffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi xy ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni $A=C$ va $B=0$.

(5.1) tenglamada $A=C$ va $B=0$ bo'lsa u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.

Soddalik uchun $A=C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5.5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamani hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinlarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan $\frac{D^2}{4}$ va $\frac{E^2}{4}$ ni ham qo'shamiz ham ayirymiz. U holda

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} + F = 0$$

yoki

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \quad (5.6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

1) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$ (yoki $D^2 + E^2 > 4F$). Bu holda (5.6) tenglamani (5.2) bilan

taqqoslab u va unga teng kuchli (5.5) tenglama ham markazi $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtada,

radiusi $R = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

2) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F = 0$. Bu holda (5.6) tenglama $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = 0$

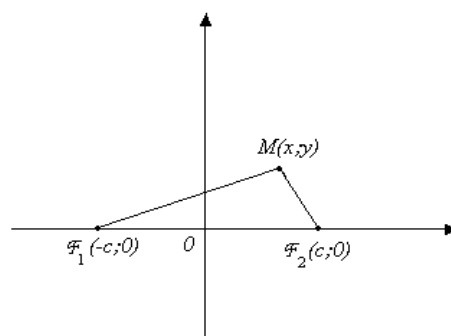
ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi holos.

3) $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F < 0$. Bu holda (5.6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa manfiy emas.

2. Ellips va uning kanonik tenglamasi.

4-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni ellipsning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini $2a$ orqali belgilaymiz, Oxy dekart koordinatalar sistemasini Ox o'qni ellipsning fokuslari F_1 va F_2 orqali o'tkazib F_1 dan F_2 tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (2-chizma).

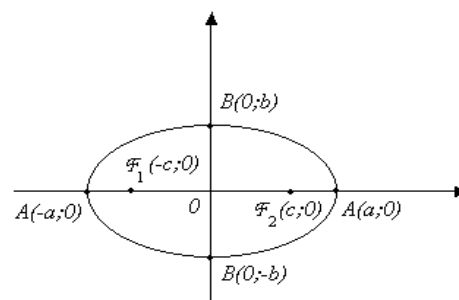


2-chizma

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglama ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar boshi **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning **simmetriya o'qlari** bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning **fokal o'qi** deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari** deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B(0;b)$ nuqtalar ellipsning uchlari.

a va b sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va ε orqali belgilanadi. Ellips uchun $0 < \varepsilon < 1$ bo'ladi, chunki $c < a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

Ellips shaklini 3-chizmada ko'rsatilgandek bo'ladi.



3-chizma

3. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

5-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **giperbola** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni giperbolaning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning ayirmasini $\pm 2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya'ni Ox o'qni

F_1, F_2 fokuslaridan o'tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.7)$$

tenglama hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (5.7) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi (5.7) giperbolaning **kanonik** tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida x va y juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari $0x$ va $0y$ o'qlarga parallel va mos ravishda $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

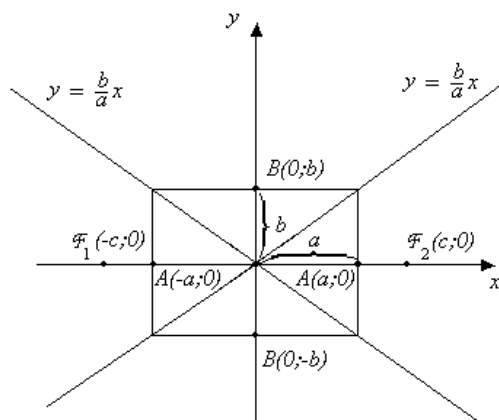
To'rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi (4-chizma).

$\frac{c}{a}$ nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va ε orqali belgilanadi. Giperbola uchun $c > a$ bo'lganligi sababli $\varepsilon > 1$ bo'ladi.

Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola **teng tomonli** yoki **teng yonli** deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.



4-chizma

4. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

6-ta'rif. Berilgan nuqtadan hamda berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga parabola deb ataladi.

Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ataymiz. Berilgan to'g'ri chiziqni parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha masofani p orqali belgilaymiz va uni parabolaning **parametri** deb ataymiz.

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \quad \text{yoki} \quad y^2 = 2px \quad (5.8)$$

tenglama ekan parabolaning **kanonik tenglamasi** deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning **uchi** deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.

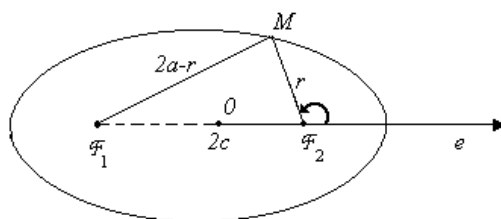
Izoh. Aylana, ellips, giperbola va parabola umumiy tenglamalari yordamida berilgan koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlarini burish yordamida umumiy tenglamani yangi sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

5.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalari

Qutb koordinatalar sistemasida ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun qutb boshini ellipsning o'ng fokusi F_2 ga joylashtirib qutb o'qini F_1F_2 dan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha yo'naltiramiz (5-chizma).

Faraz qilaylik $M(\varphi; r)$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda $F_2M=r$ ekanini hisobga olsak ellipsning ta'rifiga binoan $F_1M=2a-r$ bo'ladi, chunki ta'rifga ko'ra

$$F_1M + F_2M = 2a.$$



5-chizma

Kosinuslar teoremasiga binoan ΔF_1MF_2 dan

$$(2a - r)^2 = r^2 + (2c)^2 - 2 \cdot r \cdot 2c \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$$

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \varphi; a^2 - ar = c^2 + cr \cos \varphi,$$

$$a^2 - c^2 = ar + cr \cos \varphi, b^2 = ar(1 + \frac{c}{a} \cos \varphi); \frac{b^2}{a} = r(1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

kelib chiqadi. $p = \frac{b^2}{a}$ deb belgilasak.

$$p = r(1 + \varepsilon \cos \varphi) \text{ yoki } r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (5.9)$$

hosil bo'ladi.

p -ellipsning **parametri** deb ataladi. (5.9) ellipsning qutb tenglamasi. Bu yerda $0 < \varepsilon < 1$.

Agarda qutb boshini ellipsning chap fokusi F_1 ga joylashtirsak uning tenglamasi

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (5.10) \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Osonlik bilan tekshirib ko'rish mumkinki $\varepsilon > 1$ bo'lganda (5.9) yoki (5.10) tenglamalar giperbolaning tenglamasini $\varepsilon = 1$ bo'lganda esa ular parabolaning tenglamasini ifodalaydi.

Shunday qilib ε ning qiymatiga bog'lik ravishda bitta (5.9) yoki (5.10) tenglama uchta chiziq ellips, giperbola va paraboladan birini ifodalashi mumkin ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi darajali algebrlik tenglama deb qanaqa tenglamaga aytiladi.
2. Qanday chiziq aylana deb aytiladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.

3. Qanday chiziq ellips deb aytiladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.
4. Qanday chiziq giperbola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.
5. Qanday chiziq parabola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasi qanday?
6. Parabolaning fokusi va direktrisasi nima? Ular qanday xossa bilan bog'langan.
7. Qanday nuqta parabolaning uchi deb ataladi?
8. Parabolaning fokal o'qi nima? Unga nisbatan parabola qanday joylashadi?
9. Ikkinchi darajali algebraik tenglamalar aylana, ellips, giperbola va paraboladan tashqari yana nimalarni ifodalashi mumkin?
10. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar qae'larda ishlatiladi?
11. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalarini yozing.

6-ma'ruza. Mavzu: Bir o'zgaruvchining funksiyasi

Reja:

1. Haqiqiy sonlar to'plami.
2. Bir o'zgaruvchining funktsiyasi.
3. Funktsiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari.
4. Funktsiyaning berilish usullari.
5. O'suvchi, kamayuvchi, juft, toq, davriy funktsiyalar.
6. Asosiy elementar funktsiyalar.

Adabiyotlar: 3,5,8,9,12,16.

Tayanch iboralar: o'zgarmas, o'zgaruvchi, erkli, erksiz, argument, funksiya, kesma, segment, interval, atrof, aniqlanish sohasi, o'zgarish sohasi, grafik, murakkab funksiya, oraliq argument, elementar funksiya, ko'phad, kasr-ratsional funksiya, juft va toq funksiya, o'suvchi va kamayuvchi funksiya, monoton funksiya, chegaralangan funksiya, noto'g'ri va to'g'ri kasrlar.

6.1 Haqiqiy sonlar to'plami

Qaralayotgan sharoitda o'zini sonli qiymatlarini o'zgartmaydigan miqdor **o'zgarmas miqdor** deb ataladi. O'zgarmas miqdorni sonli qiymatlari to'plami birgina sondan iborat o'zgaruvchi miqdorning xususiy ko'rinishi deb qarash mumkin.

Bir miqdorning o'zi vaziyatga qarab o'zgaruvchi yoki o'zgarmas bo'lishi ham mumkin. Masalan tekis harakat qilayotgan jismning tezligi o'zgarmas, erkin tushayotgan jismning tezligi esa o'zgaruvchidir.

O'zgarmas miqdorlarni $a, b, c, \dots$ harflar bilan belgilanadi. O'zgaruvchi miqdorlarni esa $x, y, z, \dots$ harflar bilan belgilanadi. O'zgaruvchi miqdorlarning barcha son qiymatlari to'plami shu o'zgaruvchining **o'zgarish sohasi** deyiladi. O'zgaruvchi miqdorlarning sonli qiymatlari haqiqiy sonlarning qandaydir to'plamini tashkil etadi.

Bunga sonlar o'qining ma'lum nuqtalari to'plami mos keladi. Kelgusida kesma (segment) va interval deb ataluvchi sonlar to'plamlari bilan ko'proq ish ko'ramiz. O'zgaruvchi miqdor x ning ma'lum p xossaga ega qiymatlari to'plamini $\{x: p\}$ kabi belgilaymiz.

a va b sonlar (yoki ikkita nuqta) berilgan bo'lib $a < b$ bo'lsin. $a \leq x \leq b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to'plami $\{x: a \leq x \leq b\}$ **kesma** yoki **segment** deb ataladi va $[a, b]$ orqali belgilanadi. a va b kesmaning **uchlari** (yoki **oxirlari**) deb ataladi, hamda (qaralayotgan holda a va b sonlar ham to'plamga tegishli bo'ladi). $a < x < b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to'plami $\{x: a < x < b\}$ **interval** deb ataladi va (a, b) kabi belgilanadi. Bu holda intervalning a va b oxirlari sonlar to'plamiga tegishli bo'lmaydi. $a < x \leq b$ yoki $a \leq x < b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to'plami $\{x: a < x \leq b\}$ yoki $\{x: a \leq x < b\}$ **yarim ochiq kesma** yoki **yarim yopiq interval** deb ataladi hamda $(a, b]$ yoki $[a, b)$ kabi belgilanadi.

x biror X to'plamga tegishli bo'lganda $x \in X$ va u shu to'plamga tegishli bo'lmaganda $x \notin X$ kabi yoziladi. Masalan N natural sonlar to'plami bo'lganda $3 \in N$, $0 \notin N$, $\frac{1}{2} \notin N$. Shuningdek: $3 \in [2, 4]$, $5 \notin [0, 3]$, $2 \notin (0, 2)$.

Ba'zi hollarda cheksiz intervallar va cheksiz yarim intervallar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Ular quyidagicha ta'riflanadi va belgilanadi:

$$\{x: x > a\} = (a; +\infty), \quad \{x: x \geq a\} = [a; +\infty), \quad \{x: x < b\} = (-\infty; b), \quad \{x: x \leq b\} = (-\infty; b].$$

Butun sonlar o'qini (barcha haqiqiy sonlar to'plamini) cheksiz interval $(-\infty; +\infty)$ ko'rinishida tasvirlash mumkin. Ba'zan kesma, interval, yarim ochiq yoki yarim yopiq intervallarni **oraliqlar** deb ham ataymiz.

6.2. Bir o'zgaruvchining funktsiyasi

Ikkita x va y o'zgaruvchi miqdorni qaraymiz.

1-ta'rif. Agar x miqdorning D sohadagi har bir qiymatiga biror qonun yoki qoida bo'yicha y ning biror E sohadagi aniq bir qiymati mos qo'yilsa, y o'zgaruvchi miqdor x o'zgaruvchi miqdorning **funktsiyasi** deb ataladi.

Bu holda y miqdor x ning bir qiymatli funktsiyasi deb yuritiladi.

O'zgaruvchi x miqdor **erkli o'zgaruvchi** yoki **argument**, y miqdor esa **erksiz o'zgaruvchi** yoki **funksiya** deb ataladi.

y ning x o'zgaruvchining funktsiyasi ekanligi ramziy tarzda

$$y = f(x)$$

ko'rinishda yoziladi. $y = f(x)$ funktsiyaning argument x ni aniq x_0 qiymatidagi xususiy qiymati $f(x_0)$ yoki $y|_{x=x_0}$ kabi belgilanadi. Masalan, agar $f(x) = 2x + 3$ bo'lsa

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5, \quad f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3, \quad f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7.$$

Bu yerdagi f , funktsiyaning qiymatiga ega bo'lish uchun uning argument ustida qanaqa matematik amallarni bajarish lozimligini ko'rsatadi.

Funktsiyani $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$, $y = \phi(x)$, ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Baʼzan argumentning har bir qiymatiga funktsiyaning bir emas bir nechta qiymatlari mos keladi. Bunday holda funksiya **koʻp qiymatli** funksiya deb ataladi. Bundan buyon biz faqatgina bir qiymatli funktsiyalar bilan ish koʻramiz.

6.3.Funktsiyaning aniqlanish va oʻzgarish sohalari

2-taʼrif. Argument x ning $f(x)$ funksiya maʼnoga ega boʻladigan qiymatlari toʻplami funktsiyaning **aniqlanish sohasi** deb ataladi va $D(f)$ orqali belgilanadi.

Masalan $f(x) = \frac{1}{x-2}$ funksiya $x=2$ nuqtadan boshqa x ning barcha qiymatlarida aniqlangan. $x=2$ da kasrning maxraji nolga aylanib, funksiya maʼnosini yoʻqotadi, chunki hech bir sonni nolga boʻlib boʻlmaydi. Demak $D\left(\frac{1}{x-2}\right) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Funksiya biror nuqtada aniqlangan boʻlishi uchun u shu nuqtada $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ koʻrinishga ega boʻlmasligi lozim. Shuningdek $y = \sqrt[n]{\varphi(x)}$ koʻrinishdagi funksiya faqat x ning $\varphi(x) \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlaridagina aniqlangan.

3-taʼrif. $f(x)$ funktsiyaning qabul qiladigan qiymatlari toʻplami uning **oʻzgarish sohasi** yoki **qiymatlar sohasi** deb ataladi va $E(f)$ orqali belgilanadi. Masalan. $E(\sin x) = [-1; 1]$, $E(\tan x) = (-\infty; \infty)$.

4-taʼrif. Oxy tekislikning koordinatalari $y = f(x)$ munosabat bilan bogʻlangan $P(x, y)$ nuqtalarning geometrik oʻrni $y = f(x)$ funktsiyaning **grafigi** deb ataladi.

6.4.Funktsiyaning berilish usullarini

Funksiya turli usullar bilan berilishi mumkin. Ulardan koʻp uchraydigani analitik, jadval va grafik usullaridir.

x va y oʻzgaruvchi orasidagi moslik formula orqali ifodalanganda funksiya **analitik usulda** berilgan deb ataladi. Masalan: $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, $y = \frac{2^x}{x + 1}$.

x va y oʻzgaruvchi orasidagi bogʻlanish jadval koʻrinishida ifodalanganda funksiya **jadval usulda** berilgan deb ataladi. Masalan, logarifmik, trigonometrik funktsiyalarning qiymatlari jadvallari funktsiyaning jadval usulda berilishiga misol boʻla oladi.

Funksiya grafik usulda berilganda uning grafigi maʼlum boʻlib, argumentning turli qiymatlariga mos keluvchi funktsiyaning qiymatlarini bevosita ana shu grafikdan topiladi.

6.5.Oʻsuvchi, kamayuvchi, juft, toq, davriy funktsiyalar

1.Funktsiyaning juft va toqligi, davriyligi.

8-taʼrif. Agar $y = f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **juft funksiya** deb ataladi. Agar har bir $x \in D(f)$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **toq funksiya**

deb ataladi. Juft funksiyaning grafigi Oy o'qqa nisbatan, toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Masalan, $y=x$, $y=x^3$, $y=\sin x$ funksiyalar toq $y=x^2$, $y=x^4$, $y=\cos x$ funksiyalar juft (81 va 84 chizmalar) funksiyalardir. $y=a^x$, $y=\log_a x$ funksiyalar juft ham emas toq ham emas.

Ko'rinib turibdiki juft funksiyaning ham, toq funksiyaning ham aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

9-ta'rif. Agar o'zgarmas $T \neq 0$ son mavjud bo'lib $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **davriy funksiya** deb ataladi. $f(x \pm T) = f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi musbat T sonlarning eng kichigi T_0 $f(x)$ funksiya **davri** deb ataladi. Masalan, $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalar davri 2π ga teng davriy funksiyalar, $\tan x$, $\cot x$ funksiyalar esa davri π ga teng davriy funksiyalardir.

2.Monoton funksiyalar. $f(x)$ funksiya biror $[a; b]$ kesmada (interval, yarim interval bo'lishi ham mumkin) aniqlangan bo'lsin.

10-ta'rif. Agar x ning shu kesmaga tegishli ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ (yoki $f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada **o'suvchi** (yoki **kamayuvchi**) deyiladi.

Boshqacha aytganda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa funksiya o'suvchi deyilar ekan.

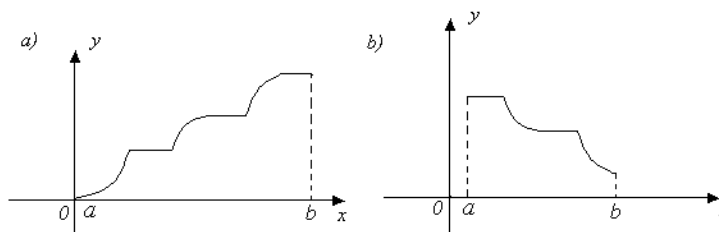
Argumentning katta qiymatiga funksiyaning kichik qiymati mos kelganda funksiya kamayuvchi deyilar ekan.

$[a; b]$ kesma $f(x)$ funksiyaning mos ravishda **o'sish** yoki **kamayish oralig'i** deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar **monoton** funksiyalar deb ataladi. Monoton funksiyaning o'sish, kamayish oralig'lari uning **monotonlik oralig'i** deyiladi.

Funksiyaning o'sish yoki kamayishi haqida gapirganda o'sish yoki kamayish oralig'lari ko'rsatilishi shart. Chunki bir funksiyaning o'zi bir oraliqda o'ssa u boshqa bir oraliqda kamayishi ham mumkin..

11-ta'rif. Agar $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ (yoki $f(x_1) \geq f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada **kamaymaydigan** (yoki **o'smaydigan**) **funksiya** deyiladi.

Masalan, 85(a)-chizmada kamaymaydigan, 85(b)-chizmada o'smaydigan funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



85-chizma.

6.6.Asosiy elementar funksiyalar

5-ta'rif. Elementar funksiya deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar va ulardan olingan murakkab funksiyalardan tuzilgan funksiyaga aytiladi. Asosiy elementar funksiyalarning o'zlari ham elementar funksiyalar sinfiga tegishli. Masalan,

$$y = \lg(1 + \sin^2 x), \quad y = 3^{\lg(\sin x)}, \quad y = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 3}, \quad y = \sin^2 3^x \text{ funksiyalarning}$$

barchasi elementar funksiyalardir.

Asosiy elementar funksiyalar

1. $y = C$ -o'zgarmas(konstanta) funksiya, bunda C -o'zgarmas son.
2. $y = x^n$ -darajali funksiya, bunda n noldan farqli son.
3. $y = a^x$ -ko'rsatkichli funksiya ($a > 0, a \neq 1$).
4. $y = \log_a x$ -logarifmik funksiya ($a > 0, a \neq 1$).
5. $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ -trigonometrik funksiyalar.
6. $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctg x, y = \operatorname{arccotg} x$ -teskari trigonometrik funksiyalar.

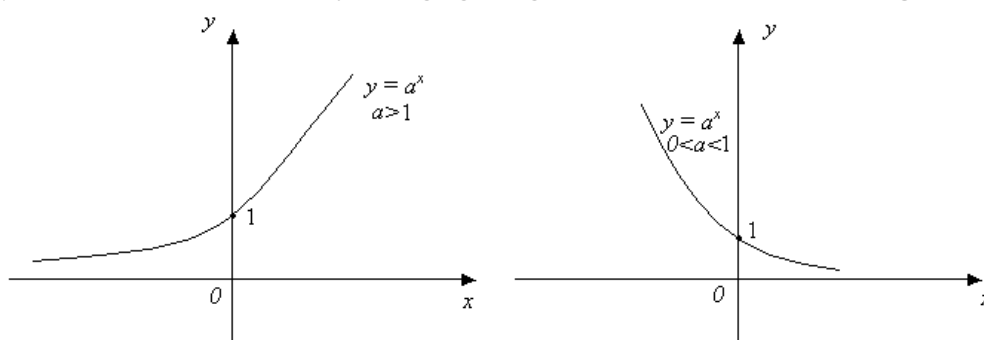
Bu funksiyalar **asosiy elementar funksiyalar** deb ataladi. Shu funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohaslarini hamda grafiklari bilan tanishamiz.

1. $y = C$ -o'zgarmas funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lib uning qiymatlari sohasi birgina C sonidan iborat, ya'ni $D(C) = (-\infty; +\infty)$, $E(C) = C$. Bu funksiyaning grafigi Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziqdan iborat ekanligi aytib o'tilgan edi.

2. $y = x^n$ -darajali funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari hamda grafigi n ko'rsatkichga bog'liq. Masalan, $D(x) = D(x^2) = D(x^3) = (-\infty; +\infty)$, $E(x) = (-\infty; +\infty)$, $E(x^2) = [0; +\infty)$. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$, $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$.

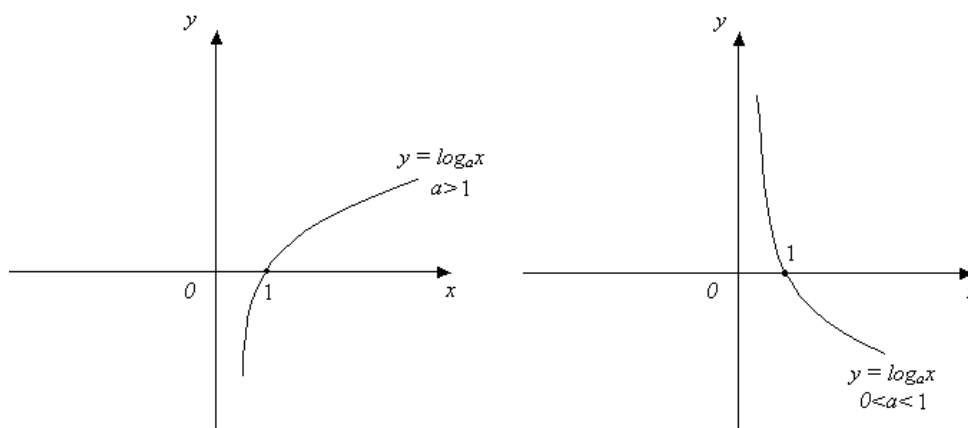
Ba'zi bir darajali funksiyalarning grafiklari 81-chizmada keltirilgan.

3. $y = a^x$ ko'rsatkichli funksiya ($a > 0, a \neq 1$) uchun: $D(a^x) = (-\infty; +\infty)$, $E(a^x) = (0; +\infty)$. Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi 82-chizmada tasvirlangan.



82-chizma.

4. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya ($a > 0, a \neq 1$) uchun: $D(\log_a x) = (0; +\infty)$, $E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$. Logarifmik funksiyaning grafigi 83-chizmada tasvirlangan.



83-chizma.

5. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ -trigonometrik funksiyalar uchun: $D(\sin x) = D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$, $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1]$. $y = \operatorname{tg} x$ funksiya son o'qining $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ko'rinishdagi nuqtalaridan farqli, $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya esa son o'qining $x = k\pi$ (k -butun son) ko'rinishdagi nuqtalaridan farqli barcha nuqtalarida aniqlangan. $E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = (-\infty; +\infty)$. Trigonometrik funksiyalarning grafiklari 84-chizmada tasvirlangan.

6. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ -teskari trigonometrik funksiyalarning aniqlanish, o'zgarish sohalari hamda ularning grafiklari bilan keyinroq tanishamiz.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. O'zgaruvchi miqdor nima? O'zgarmas miqdorchi?
2. O'zgaruvchi miqdorning o'zgarish sohasi nima?
3. Nuqtaning atrofi, ε -atrofi, kesma, interval nima?
4. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning ta'rifini ayting.
5. Aniqlanish va o'zgarish sohalari nima?
6. Funktsiyaning grafigi nima?
7. Funksiya ko'pincha qanaqa usullar bilan beriladi?
8. Qanaqa funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi? Ularning aniqlanish va o'zgarish sohalarini ayting.
9. Elementar funktsiyani ta'rifini ayting.
10. Funksiya qachon juft va qachon toq deb ataladi.

7-ma'ruza. Mavzu: O'zgaruvchi miqdorning limiti

Reja:

1. Sonli ketma-ketliklar.
2. Ketma-ketlikning limiti.
3. Chegaralangan monoton ketma-ketlikning limitini mavjudligi haqida.
4. Funktsiyaning cheksizlikdagi limiti, limitga ega bo'lgan funktsiyaning chegaralanganligi, bir tomonlama limitlar, cheksiz katta funksiyalar.
5. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,6,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: ketma-ketlik, limit, ketma-ketlikning hadlari, umumiy had, yaqinlashuvchi, uzoqlashuvchi, bir tomonlama limit, cheksiz kichik funksiya, cheksiz katta funksiya.

7.1.Sonli ketma-ketliklar

1-ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan $x_n = f(n)$, $n \in N$ funksiyaning qiymatlari to'plami **sonli ketma-ketliklar** deb ataladi.

Agar n ga 1,2,3,... qiymatlar bersak, bu funksiyaning

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$$

xususiy qiymatlariga ega bo'lamiz, ular ketma-ketlikning **hadlari** yoki **elementlari** deb ataladi.

Bunda x_1 ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 uning ikkinchi hadi va hakoza x_n ketma-ketlikning n -hadi deyiladi. Demak

$$x_1, x_2, \dots, x_n \dots \text{ yoki } f(1), f(2), \dots, f(n) \dots$$

sonli ketma-ketlikni tashkil etadi. Sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$ yoki $\{f(n)\}$ orqali belgilanadi. Ketma-ketlikning n -hadi $x_n = f(n)$ uning **umumiy hadi** deb ataladi.

Ketma-ketlikning umumiy hadi ma'lum bo'lsa u berilgan hisoblanadi.

Shunday M son mavjud bo'lsaki, barcha $n \in N$ uchun $x_n < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Shunday $M > 0$ son mavjud bo'lsaki, istalgan $n \in N$ uchun $x_n > M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **quyidan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan deb ataladi. Chegaralangan ketma-ketlik uchun shunday $M > 0$ son mavjud bo'lib barcha $n \in N$ uchun $|x_n| \leq M$ tengsizlik bajariladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **monoton o'suvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **monoton kamayuvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \geq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **o'smaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \leq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **kamaymaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

7.2.Ketma-ketlikning limiti

a o'zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lsaki, undan katta barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yoki $x_n \rightarrow a$ kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a chekli son bo'lsa **ketma-ketlik yaqinlashuvchi**, aks holda ya'ni a mavjud bo'lmasa yoki ∞ bo'lsa u **uzoqlashuvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklarga teng kuchli ekanini ko'rdik. Buni e'tiborga olsak, limit tushunchasini geometrik nuqtai nazardan bunday tushuntirish mumkin: agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topilsaki, $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots\}$ ketma-ketlikning $N+1$ - hadidan boshlab barcha hadlari a nuqtaning ε -atrofiga tushsa, ya'ni a nuqtaning ε -atrofiga $\{x_n\}$ ketma-ketlikning birinchi N ta chekli sondagi hadlaridan tashqari barcha hadlari tushsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi.

Shunday qilib a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lganda bu nuqtaning istalgan ε -atrofi $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ da ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotadi, ε -atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari qoladi xolos.

1-izoh. O'zgarmas sonning limiti shu sonning o'ziga teng.

Haqiqatan, o'zgarmas c sonni barcha hadlari shu songa teng bo'lgan ketma-ketlik deb qarash mumkin, ya'ni $x_n = c$. Shuning uchun istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

tengsizlik doimo bajariladi.

2-izoh. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat birgina limitga ega bo'ladi.

Haqiqatan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ bo'lib $a \neq b$ bo'lsin. U holda ketma-ketlik limitining ta'rifiga binoan istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 va N_2 natural sonlar topilib n ning N_1 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik va n ning N_2 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. N_1 va N_2 dan kattasini N deb belgilasak n ning N dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ ba $|x_n - b| < \varepsilon$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Demak $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_{N+1} - hadidan boshlab barcha hadlari ham $x=a$ nuqtaning ham $x=b$ nuqtaning ε -atrofida yotadi. Bu esa $a \neq b$ bo'lganda $\frac{b-a}{2}$ dan kichik ε lar uchun bajarilmaydi. Bundan $a=b$ ekani kelib chiqadi.

3-izoh. Har qanday ketma-ketlik ham limitga ega bo'lavermaydi.

Masalan, $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = \{0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, \dots\}$ ketma-ketlik hech qanday limitga ega emas, chunki uning toq raqamli hadlari 0 ga, juft raqamli hadlari 2 ga teng bo'lib, $|x_{n+1} - x_n| = 2$ va $\varepsilon < 1$ bo'lganda n ning barcha qiymatlarida $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi a son mavjud emas.

7.3. Chegaralangan monoton ketma-ketlikning limitini mavjudligi haqida

7.1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

7.2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

Bu teoremlarning isbotini keltirmaymiz.

7.4. Funktsiyaning cheksizlikdagi limiti, limitga ega bo'lgan funktsiyaning chegaralanganligi, bir tomonlama limitlar, cheksiz katta funktsiyalar

1. Funktsiyaning nuqtadagi limiti. $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin ($x=a$ nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin). $D(f)$ -funktsiyaning aniqlanish sohasidan limitga ega bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ketma-ketlikni olamiz. $f(x)$ funktsiyaning $\{x_n\}$ ketma-ketlikning nuqtalaridagi qiymatlari $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikni tashkil etadi.

3-ta'rif. Argument x ning a dan farqli va unga yaqinlashuvchi barcha $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $y = f(x)$ funktsiyaning shu ketma-ketlik nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b songa yaqinlashsa, b son $y = f(x)$ funktsiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a$ dagi) limiti deb ataladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ yoki $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow b$ ko'rinishda yoziladi.

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada faqat birgina limitga ega bo'ladi. Bu yaqinlashuvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning yagona limitga ega ekanligidan kelib chiqadi.

4-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x nuqtalar uchun $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b chekli son $f(x)$ funktsiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a$ dagi) **limiti** deb ataladi.

Bu ta'rifga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. b son $f(x)$ funktsiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti bo'lganda $(a-\delta, a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)$ funktsiyaning qiymatlari $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervalda yotadi.

Keltirilgan uchinchi va to'rtinchi ta'riflarni teng kuchlilikini ko'rsatish mumkin.

5-ta'rif. Istalgancha katta $M > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(M) > 0$ son mavjud bo'lib, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajarilsa, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi va bu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ kabi yoziladi.

2. Funktsiyaning cheksizlikdagi limiti

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N > 0$ son mavjud bo'lib, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas b son $y = f(x)$ funktsiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi **limiti** deb ataladi va bu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ kabi yoziladi.

7-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan yetarlicha katta $M > 0$ son uchun shunday $N > 0$ son topilsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajarilsa,

$y = f(x)$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da cheksizlikka intiladi deyiladi va $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ kabi yoziladi.

3. Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi

7.3-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti b chekli son bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangandir.

Isboti. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ chekli son bo'lsin. U holda limitni ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib $(a - \delta, a + \delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ yoki $|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < \varepsilon$, bundan $|f(x)| < |b| + \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M = |b| + \varepsilon$ deb olinsa a nuqtaning δ -atrofidagi barcha x lar uchun $|f(x)| \leq M$ tengsizlik bajariladi. Bu $f(x)$ funksiya $(a - \delta, a + \delta)$ intervalda chegaralanganligini ko'rsatadi.

Agar $f(x)$ funksiya biror intervalda chegaralangan va nolga teng bo'lmasa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya ham shu intervalda chegaralangan bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

4. Bir tomonlama limitlar

8-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limitining ta'rifida x o'zgaruvchi a dan kichik bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_1 limiti uning $x = a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a - 0$ dagi) **chap tomonlama limiti** deb ataladi va $b_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$, yoki $b_1 = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, yoki $b_1 = f(a - 0)$ kabi yoziladi.

Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $b_1 = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0)$ kabi yoziladi.

9-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti ta'rifida x o'zgaruvchi a dan katta bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_2 limiti uning $x = a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a + 0$ dagi) **o'ng tomonlama limiti** deb ataladi va $b_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ yoki $b_2 = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, yoki $b_2 = f(a + 0)$ kabi yoziladi.

Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $b_2 = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0)$ kabi yoziladi.

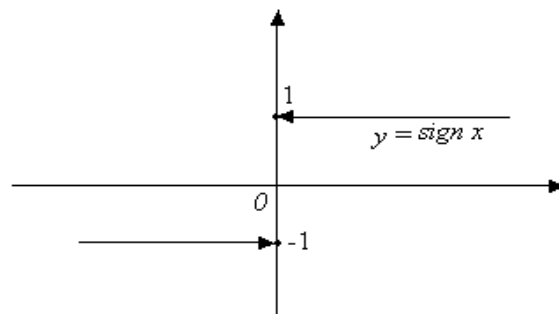
$f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari **bir tomonlama limitlar** deb ataladi. $b_1 = b_2$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada limitga ega. Aksincha, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bir tomonlama limitlari mavjud va ular teng, ya'ni

$$f(a - 0) = f(a + 0)$$

bo'lganda va faqat shundagina bu funksiya a nuqtada limitga ega bo'ladi.

Masalan,

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$



86-chizma.

funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega emas, chunki $f(-0)=-1$, $f(+0)=1$ va $f(-0) \neq f(+0)$ (86-chizma). Bu funksiya 0 dan farqli istalgan nuqtada limitga ega.

7.6.Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

10-ta‘rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ (yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) **cheksiz kichik funksiya** deyiladi.

Cheksiz kichik funksiya $x=a$ nuqtada chekli 0 limitga ega bo‘lgani uchun u shu nuqtaning qandaydir atrofida doimo chegaralangan bo‘ladi.

11-ta‘rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) **cheksiz katta funksiya** deyiladi.

Cheksiz katta funksiya qaralayotgan $x=a$ nuqtaning atrofida chegaralanmagan bo‘ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

7.4-teorema. 1. Agar $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz kichik funksiya bo‘lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

2. Agar $\varphi(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz katta funksiya bo‘lsa, u holda $\frac{1}{\varphi(x)}$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$ da) cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

- 1.Sonli ketma-ketlik nima? Qachon u chegaralangan va qachon monoton deyiladi?
- 2.Ketma-ketlikning limiti nima? Ta‘rifni tengsizlik yordamida bering va uni geometrik ma‘nosini tushuntiring.
- 3.Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremlarni ayting.
- 4.Funksiyaning nuqtadagi limiti nima?
- 5.Funksiyaning cheksizlikdagi limiti nima?
- 6.Limitga ega bo‘lgan funksiyaning chegaralanganligi haqidagi teoremani ayting.
- 7.Bir tomonlama limitlar nima? Funksiyaning nuqtadagi limiti va bir tomonlama limitlari orasida qanday bog‘lanish bor?
- 8.Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarni ta‘riflang? $x \rightarrow a$ va $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarga misollar keltiring.
- 9.Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida qanday bog‘lanish bor?
- 10.Cheksiz katta funksiya chegaralangan bo‘lishi mumkinmi?
- 11.Cheksiz kichik funksiya chegaralanmagan bo‘lishi mumkinmi?
- 12.Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalari ayting?
- 13.Aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring.

8-ma'ruza. Mavzu: Limitlar haqida asosiy teoremlar. Ajoyib limitlar

Reja:

1. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalari.
2. Limitlar haqida asosiy teoremlar. Tengsizlikdagi limitga o'tish. Oraliq funksiyaning limiti
3. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar
4. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: cheksiz kichik, ajoyib limitlar, bir xil tartibli, yuqori tartibli hamda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar.

8.1. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalari

1-xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig'indisi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2-xossa. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiya ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

3-xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \beta(x) = 0$.

4-xossa. Cheksiz kichik funksiyaning noldan farqli limitga ega bo'lgan funksiya bo'linmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

8.1.-teorema. 1. Agar $y = f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da chekli b limitga ega bo'lsa, u holda uni b son va $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

2. Agar $y = f(x)$ funksiyaning o'zgarmas b son bilan $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda b son bu funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti bo'ladi.

8.2. Limitlar haqida asosiy teoremlar

8.2-teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar algebraik yig'indisining limiti qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\lim(u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)) = \lim u_1(x) + \lim u_2(x) + \dots + \lim u_n(x)$$

8.3-teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim(u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x)) = \lim u_1(x) \cdot \lim u_2(x) \cdot \dots \cdot \lim u_n(x)$$

8.4- teorema. Ikkita limitga ega funksiya bo'linmasining limiti maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, shu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng, ya'ni agar $\lim v \neq 0$ bo'lsa, $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$ bo'ladi.

8.5-teorema. Agar a nuqtaning biror atrofida tegishli barcha x lar uchun $y = f(x) \geq 0$ va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (b -chekli son) bo'lsa, u holda $b \geq 0$ bo'ladi.

8.6- teorema. Agar $x \rightarrow a$ da limitga ega $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyaning mos qiymatlari uchun $f_1(x) \geq f_2(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ bo'ladi.

8.7-teorema (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar $x \rightarrow a$ da limitga ega bo'lgan $u(x)$, $v(x)$ va $z(x)$ funksiyalarning mos qiymatlari uchun $u(x) \leq v(x) \leq z(x)$ tengsizliklar bajarilsa va $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} z(x) = b$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = b$ bo'ladi.

Shunday qilib $x > 0$ uchun $0 < \sin x < x$ va $x < 0$ uchun $0 < |\sin x| < |x|$ tengsizliklarga ega bo'ldik. $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ekanligini hisobga olsak 17.6-teoremaga binoan $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

8.2. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar

1. Birinchi ajoyib limit. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya faqat $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, chunki bu nuqtada kasrning surati ham, mahraji ham 0 ga aylanib uni o'zi $\frac{0}{0}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Shu funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limitini topamiz. Bu limit **birinchi ajoyib limit** deb ataladi.

8.8-teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x \rightarrow 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Ya'ni $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$.

2-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} m \cdot \frac{\sin mx}{mx} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = m \cdot 1 = m$ (m -o'zgarmas son).

3-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \alpha x}{x}}{\frac{\sin \beta x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \beta x}{x}} = \frac{\alpha}{\beta}$.

2. Ikkinchi ajoyib limit. Ushbu $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz,

bunda n -natural son.

8.9-teorema. Umumiy hadi $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ da 2 bilan 3 orasida yotadigan limitga ega.

Ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

e -irratsional son, $e = 2,7182818284$.

8.10-teorema. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da e songa teng limitga ega:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (8.1).$$

Izoh. Asosi $e = 2,7182818284$ sonidan iborat logarifmlar natural logarifmlar yoki Niper logarifmlari deb ataladi va $\log_e x$ o'rniga $\ln x$

deb yoziladi. Bir asosdan ikkinchi asosga o'tish formulasi $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ dan foydalanib o'nli va natural logarifmlar orasida bog'lanish o'rnatish mumkin:

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x = 0,434294 \ln x \text{ yoki } \ln x = \ln 10 \lg x = 2,302585 \lg x.$$

8.4. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash

$\alpha = \alpha(x)$ va $\beta = \beta(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ (yoki $x \rightarrow \infty$) da cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin. Bu funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rdik. Ularning nisbati, ya'ni bo'linmasi haqida gapirilmagan edi. Ikkita cheksiz kichik funksiyalar ularning nisbatlarini limitiga qarab taqqoslanadi.

1-ta'rif. Agar $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ (yoki $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$) bo'lsa, α funksiya β funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan $x \rightarrow 0$ da $\alpha = \sin^2 x$ funksiya $\beta = x$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ va

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0.$$

2-ta'rif. Agar $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ bo'lsa, α va β funksiyalar bir xil tartibli **cheksiz kichik funksiyalar** deyiladi.

Masalan $x \rightarrow 0$ da $\alpha = \sin 3x$ va $\beta = x$ funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalardir, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ va $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \neq 0$.

3-ta'rif. Agar $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ bo'lsa, α va β cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent deb ataladi va $\alpha \sim \beta$ yoki $\alpha \approx \beta$ kabi yoziladi.

Masalan, $x \rightarrow 0$ da $\sin x \sim x$, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ va $x \rightarrow 0$ da $\tan x \sim x$, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

Amaliyotda qo'yidagi teoremdan ko'p foydalaniladi.

8.11-teorema. Agar $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ bo'lsa, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ tenglik to'g'ridir.

$$\text{Haqiqatan } \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{\beta_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Yig'indining limiti haqidagi teoremani ayting.

2. Ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani ayting.
3. Bo'linmaning limiti haqidagi teoremani ayting.
4. Tengsizlikda limitga o'tish mumkinligi haqidagi teoremani ayting.
5. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani ayting.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ formulani isbotlang.
7. Chegaralangan monoton ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremani ayting.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ formulani isbotlang.
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ formulani isbotlang.
10. e qanday son?

9-ma'ruza. Mavzu: Funksiyaning uzluksizligi

Reja:

1. Argument va funksiyaning orttirmalari.
2. Funksiyaning nuqtada va intervalda uzluksizligi.
3. Uzilish nuqtalari va ularning turlari.
4. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,9,10,11,13,14,15.

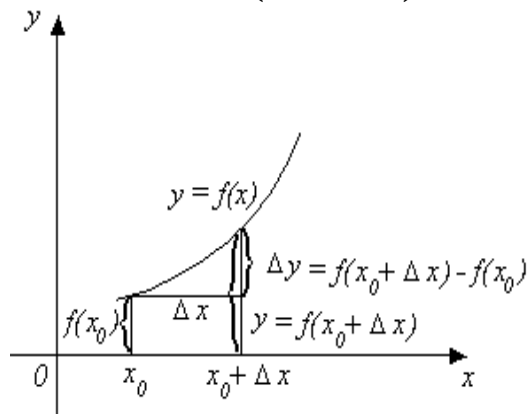
Tayanch iboralar: uzluksiz, uzlukli, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, yo'qotiladigan uzilish nuqta, birinchi tur uzilish nuqta, ikkinchi tur uzilish nuqta.

9.1. Argument va funksiyaning orttirmalari

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervaldan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz, unga funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati mos keladi (1-chizma).

$(a; b)$ intervaldan olingan argumentning boshqa x qiymatiga funksiyaning $y = f(x)$ qiymati mos keladi. $x - x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx orqali belgilanadi.

$f(x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning argument orttirmasi Δx ga mos orttirmasi deyiladi va Δy orqali belgilanadi. Shunday qilib, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Bundan $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

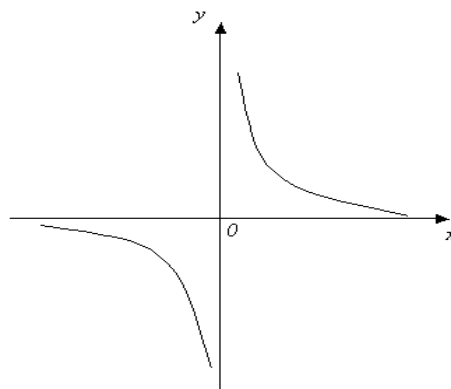


1-chizma.

1-chizmada $(a; b)$ intervalning hech bir nuqtasida grafigi uzilmaydigan funksiya tasvirlangan. Undan ko'rinib turibdiki argumentning kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham kichik Δy orttirmasi mos keladi. Boshqacha aytganda argument x ning bir-biriga yaqin qiymatlariga funksiyaning ham bir-biriga yaqin qiymatlari mos keladi. Bu qoida har qanday funksiya uchun ham to'g'ri kelavermaydi. Masalan, $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning qaraylik. x ning bir-biriga ancha yaqin $x_1 = -10^{-6}$ va $x_2 = 10^6$ qiymatlariga funksiyaning bir-biridan katta farq qiladigan $y_1 = -10^6$ va $y_2 = 10^6$ qiymatlari mos keladi. Agar biz $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning grafigini (2-chizma) kuzatsak grafikning uzilishga ega ekanligini va uzilish x ning $x=0$ qiymatida sodir bo'lishini ko'ramiz.

Shuning uchun ham argumentning $x_0=0$ nuqtaga yaqin nuqtalardagi kichik orttirmasiga funksiyaning kichik orttirmasi mos kelmaydi.

Bu kabi hollar barcha funksiyalar sinfini ikkiga, ya'ni grafigi uzilmaydigan va grafigi bir nechta qismlardan iborat funksiyalar sinfiga bo'lib o'rganishni taqozo etadi.



2-chizma.

9.2. Funksiyaning nuqtada va intervalda uzluksizligi

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$ (9.1)

ya'ni funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Bu ta'rifga teng kuchli yana bir ta'rifni keltiramiz.

2-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - x_0| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan istalgan x uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

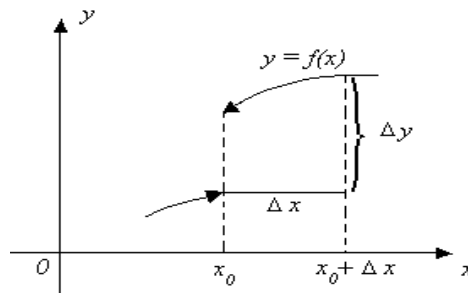
3-ta'rif. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ (9.2)

bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

2-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, chunki (18.2) shart bajariladi.

3-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz emas, chunki $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y \neq 0$

Har bir elementar funksiya uchun shu tariqa mulohaza yuritib quyidagi teoremaning to'g'riligiga iqror bo'lamiz.



3-chizma.

9.1-teorema. Asosiy elementar funksiyalar o'zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib uzluksizlikni quyidagicha ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari mavjud va o'zaro teng bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Shunday qilib $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun u shu nuqtada aniqlangan va $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ shart bajarilishi lozim ekan.

Yana 1-ta'rifga qaytib uni $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ ko'rinishda yozamiz. Bundan ko'rinib turibdiki x_0 nuqtada funksiya uzluksiz bo'lsa funksiyaning shu nuqtadagi limitini topishda limit ishorasini funksiya belgidan ichkariga kiritish mumkin ekan

5-ta'rif. $(a; b)$ intervalning barcha nuqtalarida uzluksiz $f(x)$ funksiya shu intervalda uzluksiz deb ataladi.

Agar funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada **o'ngdan uzluksiz** deyiladi.

Agar funksiya $x = x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada **chapdan uzluksiz** deyiladi.

6-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda uzluksiz bo'lib $x = a$ nuqtada o'ngdan va $x = b$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u $[a; b]$ kesmada uzluksiz deb ataladi.

9.2- teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va $g(x_0) \neq 0$ bo'lganda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bo'linmasi ham shu x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremaning isboti funksiya limitining xossalariga asoslangan.

Endi murakkab funksiyaning uzluksizligiga oid teorema bilan tanishamiz.

Nuqtada uzluksiz funksiya xossalarini ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

9.3-teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $y = f(u)$ funksiya $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Asosiy elementlar va murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremalarga tayanib elementar funksiyaning uzluksizligi haqidagi qo'yidagi teoreмага ega bo'lamiz.

9.4-teorema. Barcha elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdirlar.

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$ formulaga ega bo'ldik.

Uzluksizlik tushunchasidan foydalanilsa limitni hisoblash ancha osonlashadi, ya'ni uzluksiz funksiyaning biror nuqtadagi limitini hisoblash uning shu nuqtadagi qiymatini hisoblashga keltiradi.

Endi asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarining chetlaridagi limitlari hamda ajoyib limitlar jadvalini keltiramiz.

1) $x = a$ nuqtada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ bo'ladi.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

3) $a > 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ bo'ladi.

4) $0 < a < 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ bo'ladi.

5) $\alpha > 0$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$, $\alpha < 0$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ bo'ladi;

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$.

6') $a > 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$

7) $0 < a < 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$.

8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

11) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

12') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

14') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

9.3. Uzilish nuqtalari va ularning turlari

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada aniqlangan, x_0 nuqtada o'zaro teng $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ bir tomonlama limitlarga ega hamda bu bir tomonlama limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lishini ko'rdik. Ana shu shartlardan birortasi bajarilmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **uzilish nuqtasi**, funksiyaning o'zi **uzlukli funksiya** deb ataladi.

Shunday qilib:

1) funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan;

2) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, lekin $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ bir tomonlama limitlardan kamida bittasi mavjud emas;

- 3) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud, ammo ular o'zaro teng emas;
- 4) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud va o'zaro teng, lekin ular funksiyaning bu nuqtadagi qiymatlariga teng emas: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ shartlardan kamida bittasi bajarilganda x_0 nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi deyilar ekan.

Masalan, $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega(uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya aniqlanmagan. Shuningdek $f(x) = \operatorname{sign} x$ funksiya ham $x=0$ nuqtada uzilishga ega(uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya limitga ega emas, ya'ni $f(-0) \neq f(+0)$.

Uzilish nuqtalari uch turga bo'linadi.

7-ta'rif. x_0 nuqtada $y = f(x)$ funksiya aniqlanmagan biroq shu nuqtadagi bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng, ya'ni $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **yo'qotiladigan uzilish** nuqtasi deb ataladi.

Masalan, $x_0 = 0$ nuqta $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiyaning yo'qotiladigan uzilish nuqtasi, chunki bu funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, biroq

$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ya'ni $f(-0) = f(+0)$ bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng. Agar biz funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymati sifatida uning bir tomonlama limitlarining qiymati 1 ni olsak, $f(0) = f(-0) = f(+0) = 1$ bo'lib funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz funksiyaqa aylanadi va $x=0$ uzilish nuqta yo'qoladi.

8-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan yoki aniqlanmagan, lekin bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **birinchi tur uzilish** nuqtasi deb ataladi.

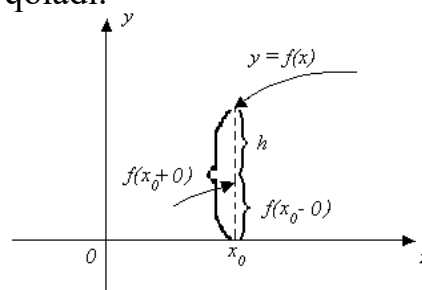
$h = f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$ soni funksiyaning x_0 nuqtadagi **sakrashi** deb ataladi (4-chizma).

Masalan,

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0, \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0, \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun $x=0$ nuqta birinchi tur uzilish nuqtasi bo'lib bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi 2 ga teng.

Haqiqatan, $f(x) = \operatorname{sign} x$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlangan va $f(0)=0$. $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$. $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1$, ya'ni $x=0$ nuqtada bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng emas. $h = f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2$.



4-chizma

9-ta'rif. Agar x_0 nuqtada bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud bo'lmasa yoki cheksizlikka teng bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **ikkinchi tur uzilish** nuqtasi deb ataladi.

Masalan, $x=0$ nuqta $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya uchun **ikkinchi tur uzilish** nuqtasi bo'ladi, chunki $x=0$ nuqtada bir tomonlama limitlarning har ikkalasi cheksizlikka teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$ va $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$.

9.4. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

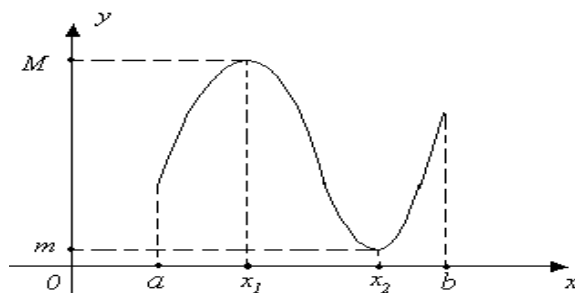
Kesmada uzluksiz funksiyalarning ayrim xossalarini isbotsiz keltiramiz.

18.5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u bu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni $[a; b]$ kesmada shunday x_1, x_2 nuqtalar mavjud bo'lib $[a; b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $f(x_1) \leq f(x)$ va $f(x_2) \geq f(x)$ tengsizliklar to'g'ri bo'ladi (5-chizma).

$m = f(x_1)$ va $M = f(x_2)$ $y = f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

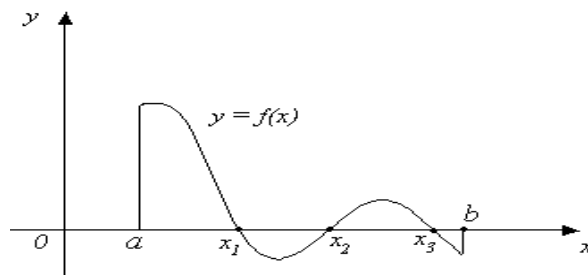
Izoh. Teoremaning shartidagi kesmani interval yoki yarim intervalga almashtirish mumkin emas.

Masalan, $(0; 1)$ intervalda uzluksiz $y = x$ funksiya bu intervalda o'zining eng kichik va eng katta qiymatlarini hech biriga erisha olmaydi.



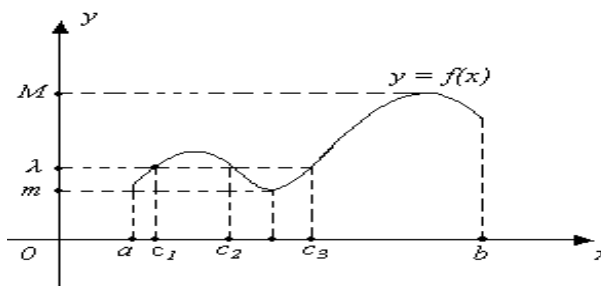
5-chizma

9.6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning oxirida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi. 6-chizmada $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ va x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiyaning grafigi Ox o'qni kesib o'tadi, demak, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$



6-chizma

9.7-teorema. $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lib m va M uning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsin, u holda funksiya shu kesmada m bilan M orasidagi barcha oraliq qiymatlarini qabul qiladi, ya'ni $m < \lambda < M$ shartni qanoatlantiradigan istalgan λ son uchun $[a; b]$ kesmada kamida bitta $x = c$ nuqta mavjud bo'lib, $f(c) = \lambda$ tenglik to'g'ri bo'ladi (7-chizma).



7-chizma

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Argument orttirmasi nima?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Funksiyaning nuqtada uzluksizligini ta'riflang.
4. Funksiyani intervalda va kesmada uzluksizligini ta'riflang.
5. Bir tomonlama uzluksizlikni ta'riflang.
6. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
7. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
8. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar haqidagi teoremani ayting.
9. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
10. Kesmada uzluksiz funksiyaning asosiy xossalarini ayting.
11. Funksiyaning uzilish nuqtasi nima?
12. Yo'qotiladigan uzilish nuqtasi nima?
13. Birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari nima?

ADABIYOTLAR

1. Ё.У.Соатов-Олий математика 1-жилд.Тошкент, 1992й.
2. Н.С.Пискунов-Дифференциал ва интеграл ҳисоб.1-том,Тошкент,1972й.
3. И.И.Привалов-Аналитическая геометрия.Москва,1966й.
4. Н.В.Ефимов-Краткий курс аналитической геометрии.Москва,1958й
5. И.А.Зайцев-Высшая математика.Москва,1991й.
6. О.Т.Цубербиллер-Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Москва,1970й.
7. С.М.Николский-Курс математического анализа.1-том.Москва,1973й.
8. В.С.Шипачев- Высшая математика.Москва,1985й.
9. Б.Абдалимов,Ш.Солихов-Олий математика қисқа курси.Тошкент,1981й.
10. И.Шнейдер, А.И.Слуцкий,А.С.Шимов-Краткий курс высший математики. Москва,1972й.
11. И.А.Каплан-Практические занятия по высшей математики.1,2-часть, Харьков,1973й.
12. Э.Холмуродов,З.Узоқов-Экстремумлар назариясининг амалий масалалар ечишга тадбиқи,Қарши,1991й.
13. Г.Худайбергенов,А.Ворисов,Х.Мансуров-Математик анализ.1-қисм.Қарши, «Насаф»,2003й.
14. В.С.Шипачев.Высшая математика.Москва, «Наука», 2001й.
15. В.А. Шнейдер, А.И.Слущкий, А.С.Шумов-Олий математика қисқа курси. 1-қисм. «Ўқитувчи»,1983й.
16. Т.Н.Қори-Ниезий-Аналитик геометрия асосий курси. Тошкент «Ўқитувчи»,1971й.
17. Ш.И.Тожиев-Олий математикадан масалалар ечиш.Тошкент, «Ўзбекистон»,2002й.

М у н д а р и ж а

1. Determinantlar va ularning xossalari.....	3
1.1. Fanning vazifasi va uning turli sohalarda qo'llanishi.....	3
1.2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.....	4
1.3. Minor va algebraik to'ldiruvchi.....	5
1.4. Determinantlarning asosiy xossalari.....	5
1.5. n -tartibli determinant haqida tushincha.....	7
2. Chiziqli tenglamalar sistemalari.....	8
2.1. Ikki noma'lumli ikkita va uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemalari.....	8
2.2. Kramer qoidasi.....	9
2.3. n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi haqida tushuncha....	12
3. Matritsalar va ular ustida amallar. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsaviy usuli.....	13
3.1. Matritsalar va ular ustida amallar.....	13
3.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali yozilishi va yechilishi.....	16
4 Tekislikda analitik geometriya.....	17
4.1. Tekislikda analitik geometriya.....	17
4.2. Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish.....	18
4.3. 3.To'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari.....	19
4.4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.....	25
5. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.....	26
5.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning kanonik tenglamalari.....	26
5.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalari.....	30
6. Bir o'zgaruvchining funksiyasi.....	32
6.1. Haqiqiy sonlar to'plami.....	32
6.2. Bir o'zgaruvchining funksiyasi.....	33
6.3. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari.....	33
6.4. Funksiyaning berilish usullari.....	34
6.5. O'suvchi, kamayuvchi, juft, toq, davriy funksiyalar.....	34
6.6. Asosiy elementar funksiyalar.....	35
7. O'zgaruvchi miqdorning limiti.....	37
7.1. Sonli ketma-ketliklar.....	37
7.2. Ketma-ketlikning limiti.....	38
7.3. Chegaralangan monoton ketma-ketlikning limitini mavjudligi haqida..	39
7.4. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti, limitga ega bo'lgan funksiyaning chegaralanganligi, bir tomonlama limitlar, cheksiz katta funksiyalar.....	39
7.5. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.....	41
8. Limitlar haqida asosiy teoremlar. Ajoyib limitlar.....	42
8.1. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalari.....	42

8.2.	Limitlar haqida asosiy teoremlar.Tengsizlikdagi limitga o'tish. Oraliq funktsiyaning limiti.....	43
8.3.	Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.....	43
8.4.	Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.....	44
9.	Funksiyaning uzluksizligi.....	46
9.1.	Argument va funktsiyaning orttirmalari.....	46
9.2.	Funksiyaning nuqtada va intervalda uzluksizligi.....	47
9.3.	Uzilish nuqtalari va ularning turlari.....	49
9.4.	Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari.....	50