

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЗАҲИРИДДИН МУҲАММАД БОБУР НОМИДАГИ
АНДИЖОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

“Абстракт алгебра”
фани бўйича

ЎҚУВ – УСЛУБИЙ МАЖМУА

Билим соҳаси:	100000 – Гуманитар
Таълим соҳаси:	130000 - Математика
Таълим мутахассислиги:	5A130101 –Математика (математик анализ)

Андижон – 2017

Мазкур ўқув – услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2017 йил 24 августдаги 603 – сонли буйруғининг 2 - иловаси билан тасдиқланган фан дастури асосида тайёрланди.

Тузувчи: АДУ доценти в.б., физика – математика фанлари доктори Ф. Арзикулов

Такризчи: Математика кафедраси доценти, физика – математика фанлари доктори Г. Мўминов

Ўқув – услубий мажмуа АДУ Кенгашининг 2017 йил 30 августдаги 1 – сонли қарори билан тасдиққа тавсия қилинган.

1. ЎҚУВ МАТЕРИАЛЛАРИ	4-98
2. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАШҒУЛОТЛАРИ.....	99-104
3. ГЛОССАРИЙ	105-110
4. ИЛОВАЛАР.....	111-122

1. ЎҚУВ МАТЕРИАЛЛАРИ

1, 2 – мавзу. Бинар амаллар. Яримгруппа ва моноидлар.

Режа

1. Бинар муносабатлар
2. алгебраик структура
3. Алгебраик структураларнинг гомоморфизми
4. Алгебраик структураларнинг изоморфизми
5. Асосий Алгебраик структуралар

2. Бинар муносабатлар. Ихтиёрий A тўплам берилган бўлсин. A тўпламнинг ихтиёрий R қисм тўплами A тўпламда **бинар муносабат** дейилади. Агар $(x, y) \in R$ бўлса, y ҳолда x элемент y элемент билан R бинар муносабатда дейилади ва xRy каби ёзилади.

Математикадаги муҳим бинар муносабатлар учун айрим белгилар киритилган.

Мисоллар. 1) R ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y сонларнинг тенглик муносабати. Унинг белгиси $x = y$. Бу муносабат R^2 текисликдаги $y = x$ тўғри чизик нуқталари билан берилади.

2) R ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y сонларнинг тенгмаслик муносабати. Унинг белгиси $x \neq y$. Бу муносабат R^2 текисликда $y = x$ тўғри чизикқа кирмаган барча нуқталардан иборат бўлган тўплам билан берилади.

3) R да y соннинг x сондан катта эканлиги муносабати: белгиси $y > x$ ёки $x < y$. Бу муносабат R^2 да $y = x$ тўғри чизикдан юқорида ётувчи нуқталар тўплами билан берилади;

4) $A = B$ — тўпламларнинг тенглик муносабати;

5) $A \neq B$ — тўпламларнинг тенгмаслик муносабати;

6) $A \subseteq B$ ёки $B \supseteq A$ — қисм тўплам муносабати;

- 7) $A \subset B$ ёки $B \supseteq A$ — хос қисм тўплам муносабати;
- 8) $\alpha \parallel \beta$ — тўғри чизиқларнинг параллеллик муносабати;
- 9) $a \perp \beta$ — тўғри чизиқларнинг тиклик муносабати;
- 10) $a \Rightarrow \beta$ — бир тенгламалар тизими иккинчисининг натижаси эканлиги;
- 11) $a \Leftrightarrow \beta$ — иккита тенгламалар тизимининг тенг кучлилиқ муносабати.

Агар A тўпламда берилган бирор R муносабат шундай бўлсаки, ҳар қандай $a \in A$ учун aRa ўринли бўлса, у **рефлексив** муносабат дейилади. Агар aRb муносабатдан $a \neq b$ муносабат келиб чиқса, (яъни aRa муносабат ҳеч қандай $a \in A$ элемент учун бажарилмаса), бундай муносабат **антирефлексив** дейилади.

Агар aRb муносабатнинг бажарилишидан bRa муносабатнинг ҳам бажарилиши келиб чиқса, бундай муносабат A да **симметриклик муносабати** дейилади.

Агар aRb ва bRc муносабатларнинг бажарилишидан aRc бажарилиши келиб чиқса, бундай муносабат **транзитивлик** дейилади.

Таъриф . Агар A тўпламдаги R муносабат рефлексив, симметрик ва транзитив бўлса, уни A да **эквивалентлик** муносабати дейилади ва унинг учун aRb белги ўрнига кўпинча $a \sim b$ белги ишлатилади.

Эквивалентликка мисоллар: 1) ҳақиқий сонларнинг тенглик муносабати;

2) тўпламларнинг тенглик муносабати;

3) тенгламалар тизимларининг тенг кучлилиқ муносабати;

4) функцияларнинг тенглик муносабати.

5) Мухим мисол. A тўпламда N ўзгартиришлар гуруҳи берилган бўлсин.

Бу N ўзгартиришлар гуруҳи ёрдамида A да эквивалентлик тушунчасини киритамиз.

Агар A тўпламнинг a ва b элементлари учун шундай $h \in N$ биекция мавжуд бўлсаки, $h(a) = b$ бўлса, бу элементлар N — эквивалент дейилади ва $a \sim b$ кўринишда ёзилади.

Агар ихтиёрий $a \in A$ ни олиб, $h \in H$ сифатида e_A ни олсак (e_A — бирлик акс эттириш ўзгартиришлар гуруҳининг таърифидаги d_2) шартга кўра H га тегишли, $e_A(a) = a$, яъни ҳар қандай $a \in A$ учун $a \sim a$ (рефлексивлик).

Энди $a \sim b$ бўлсин. U ҳолда шундай $h \in H$ мавжудки, $h(a) = b$. Ўзгартиришлар гуруҳининг таърифидаги d_3) шартга кўра. $h^{-1} \in H$. U ҳолда $h(a) = b$ тенгликка h^{-1} татбиқ қилсак, $h^{-1}(h(a)) = h^{-1}(b)$. Бундан $a = h^{-1}(b)$, яъни $b \sim a$ (симметриклик).

Агар $a \sim b$ ва $b \sim c$ бўлса, шундай $h_1 \in H$ ва $h_2 \in H$ биекциялар мавжудки, $h_1(a) = b$, $h_2(b) = c$. Булардан $h_2(b) = h_2(h_1(a)) = c$, яъни $(h_2 h_1)(a) = c$. Ўзгартиришлар гуруҳининг d_1) шартига кўра $h_2 h_1 \in H$. Бундан ва $(h_2 h_1)(d) = c$ тенгликдан $a \sim c$ муносабатни оламиз (транзитивлик).

Демак, $a \sim b$ (H -эквивалентлик) ҳақиқатан ҳам эквивалентлик муносабати экан.

Келажакда бу эквивалентликни H ўзгартиришлар гуруҳи ҳосил қилган эквивалентлик (H -эквивалентлик) деб атаимиз.

A тўплам бирор усул билан синфларга бўлинган бўлсин: $B = \{A_t, t \in T\}$, $A = \bigcup A_t, t \in T$. Бу бўлинма ёрдамида A тўпламга эквивалентлик муносабатини киритамиз.

Агар $x, y \in A$ элементлар B бўлинмадаги бир синфга тегишли бўлса, уларни B бўлинмага нисбатан эквивалент деймиз ва $x \sim y$ шаклда ёзамиз.

Бу эквивалентлик рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга.

Ихтиёрий A тўпламда ҳар қандай эквивалентлик муносабати шундай ҳосил қилиниши мумкинлигини кўрсатамиз.

A тўпламда бирор " $\sim$ " эквивалентлик муносабати берилган бўлсин. Ихтиёрий $x \in A$ учун x' орқали x га эквивалент бўлган барча $y \in A$ элементлар тўпламини белгилаймиз ва $\{x', x \in A\}$ тўпламлар тизими A ни синфларга бўлишини кўрсатамиз.

Рефлексивлик хоссасига асосан ҳар бир $x \in A$ учун $x \in x'$, яъни $\cup x' = A$. Энди ҳар бир $x \in A$ элемент ягона синфга тегишли эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $x \in x'$ ва $x \in z'$ бўлсин, яъни $z \sim x$. Бундан симметриклик хоссасига асосан $x \sim z$.

Ихтиёрий $y \in z'$ элементни оламиз. У ҳолда $z \sim y$. Юқоридаги $x \sim z$ ва $z \sim y$ муносабатлардан транзитивлик хоссасига асосан $x \sim y$ ни оламиз, яъни $y \in x'$. Ушбу $y \in z'$ элемент ихтиёрий бўлгани учун $z' \subseteq x'$. Юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар билан $x' \subseteq z'$ муносабат ҳам кўрсатилади, яъни $x' = z'$. Бу билан $\{x', x \in A\}$ тўпламлар тизими A тўпламни синфларга бўлиши кўрсатилди.

Шундай қилиб, A тўпламдаги эквивалентлик муносабати билан A ни синфларга бўлиш орасида ўзаро бир қийматли боғланиш кўрсатилди.

Алгебраик системалар ҳақида бошланғич тушунчалар. Алгебраик системалар учун гомоморфизм ва изоморфизм тушунчалари.

A бўш бўлмаган ихтиёрий тўплам бўлсин.

Таъриф. Агар A тўпламда $\circ$ алгебраик амал аниқланган бўлса, $(A, \circ)$ ни *алгебраик структура* ёки *алгебраик система* дейилади.

Масалан $\mathbb{Z}$ - бутун сонлар тўпламида одатдаги қўшиш, айириш, кўпайтириш амалларидан фарқли, улар ёрдамида $\mathbb{Z}$ да

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \circ m = n + m - n \cdot m, n \otimes m = -n - m$$

ва бошқа амалларни аниқлаш мумкин. Бу ҳолда $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Z}; \cdot)$, $(\mathbb{Z}; \circ)$, $(\mathbb{Z}; \otimes)$, ҳар хил алгебраик системаларга эга бўламиз.

1-мисол. $\forall (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ лар учун $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ кўринишдаги барча иккинчи тартибли квадратик матрицалар тўплами E да матрицаларни тенглиги, қўшиш ва кўпайтириш амалларини одатдагича аниқлаймиз:

$$\forall \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in E \right) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 & b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 & d_1 = d_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}; \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бу ҳолда $(E; +; \cdot)$ алгебраик система бўлиб, $+$; $\cdot$ амаллар E да аниқланган бинар алгебраик амаллар.

Таъриф. Айтайлик $(E; +)$ ва $(E; \circ)$ лар алгебраик система, $*$ ва $\circ$ уларнинг мос бинар алгебраик амаллари бўлсин, агар шундай $\varphi: E \rightarrow F$ сюръектив (биектив) акслантириш мавжуд бўлиб, $\forall a, b \in E$ учун $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ шарт бажарилса, φ акслантиришни E ни F га гомоморф (изоморф) акслантириш дейилади.

2-мисол. $C = \{z: z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ ҳамма комплекс сонларнинг тўплами,

$\mathbb{R}$ -ҳамма ҳақиқий сонларнинг тўплами бўлсин, у ҳолда $(C; +)$ ва $(\mathbb{R}; +)$ алгебраик системалар бўлади. $\varphi: C \rightarrow \mathbb{R}$ акслантиришни $\forall (z \in C) z = a + bi, \varphi(z) = a$ кўринишда аниқласак, $\varphi: C \rightarrow \mathbb{R}$ га гомоморф акслантириш бўлади.

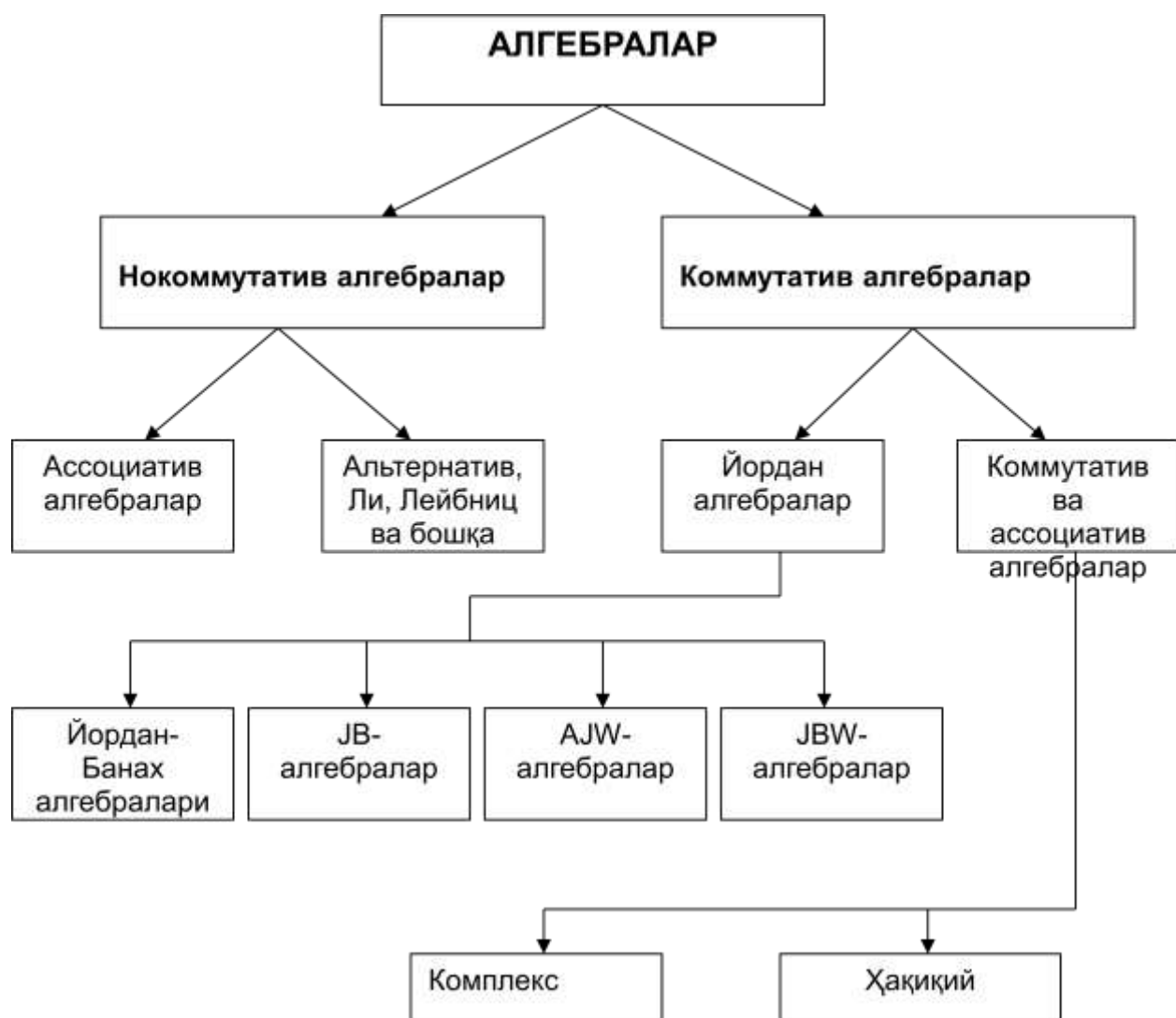
Δ Ҳақиқатан ҳам $\forall (z_1, z_2 \in C) z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i,$
 $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ бўлиб, бу ҳолда
 $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) = a_1 + a_2 = \varphi(a_1 + b_1 i) + \varphi(a_2 + b_2 i) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \varphi(0) = 0 \quad \forall.$

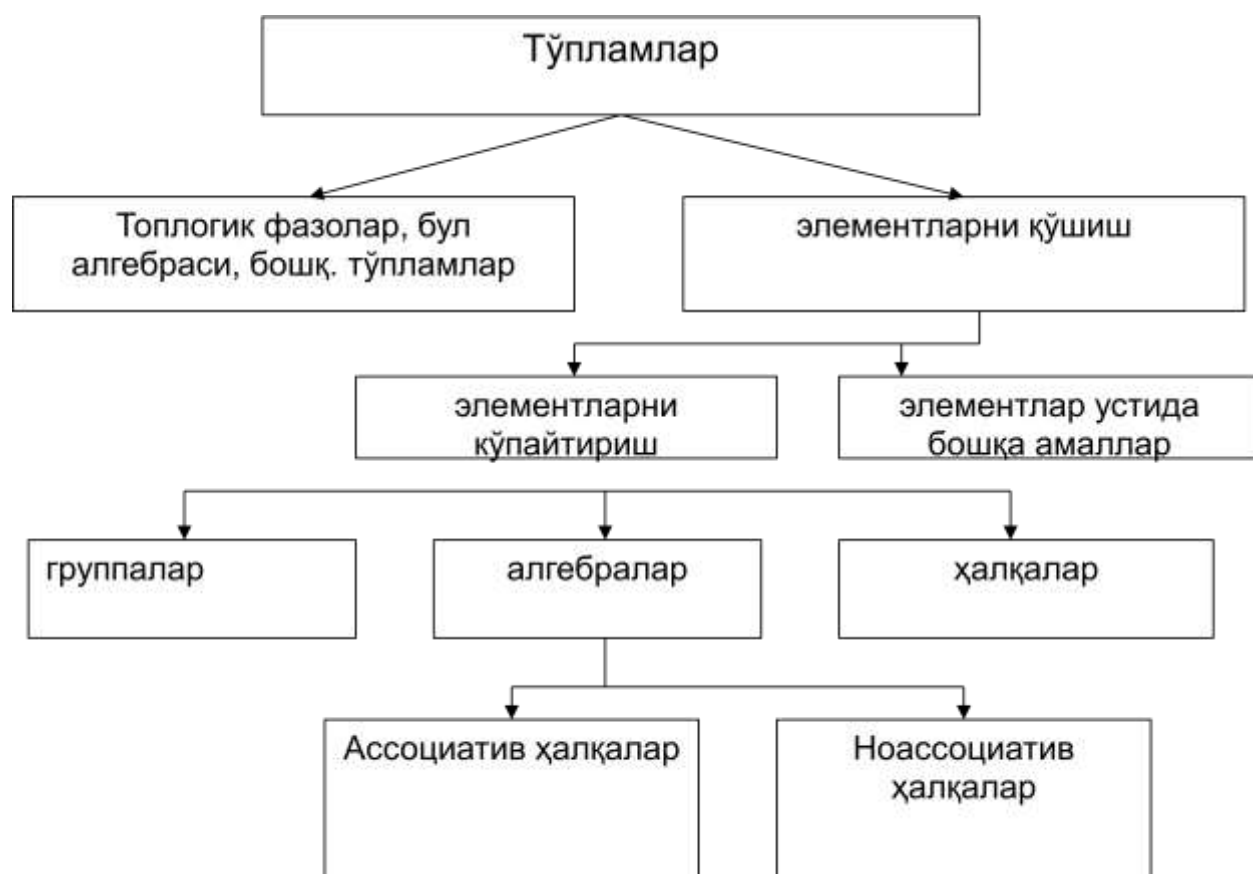
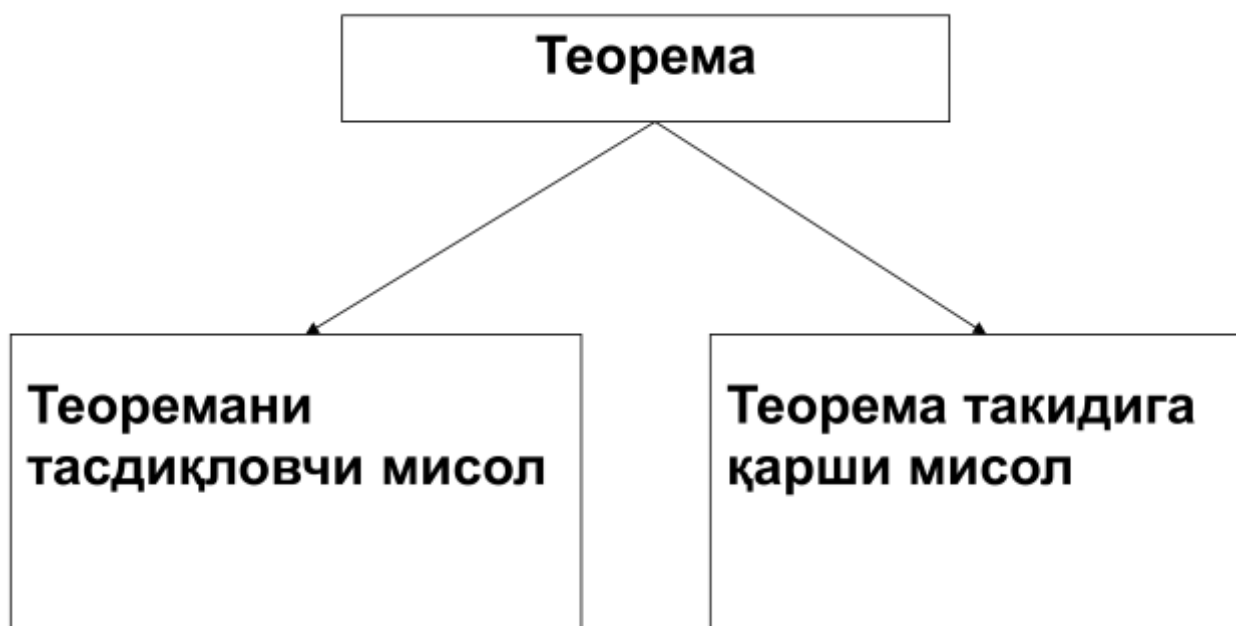
3-мисол. $(\mathbb{R}^+; \cdot)$ алгебраик система $(\mathbb{R}; +)$ алгебраик системага изоморф.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall (x \in \mathbb{R}^+) \varphi(x) = \lg x$ тенглик билан аниқласак, $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ биектив акслантириш.

$\forall (x, y \in \mathbb{R}^+) \varphi(x \cdot y) = \lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y = \varphi(x) + \varphi(y),$
 $\varphi(1) = \lg 1 = 0.$ Демак, $\varphi: (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$ алгебраик система изоморф акслантириш экан.

Таъриф. Агар $(E; *)$ алгебраик система $F \subset E$ ва $F \neq \emptyset$ бўлса, ҳамда $\forall a, b \in F$ учун $a * b \in F$ шарт бажарилса, $(F, *)$ алгебраик система $(E; *)$ алгебраик системада ёпиқ дейилади.





Таъриф

◦ ва * лар A тўғламда аниқланган ихтиёрий амаллар бўлсин:

а) $\forall(a,b \in B) a \circ b = b \circ a$ бўлса, у ҳолда амал коммутатив (ўрин алмаштириш) хоссасига;

б) $\forall(a,b,c \in A) (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ бўлса, у ҳолда ◦ - ассоциатив (группалаш) хоссасига;

в) $\forall(a,b,c \in A) (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$ ва $c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b)$ бўлса, мос равишда * амал ◦ амалга нисбатан ўнг ва чап дистрибутив (ўнг ва чап тақсимот) хоссасига эга дейилади. Агарда * амал коммутатив бўлса, охирида "ўнг" ва "чап" сўзлари туширилиб қолдирилади.

Таъриф

A тўғламда ◦ амал аниқланган бўлсин. Агар $\exists(e_{\text{ў}}, e_{\text{ч}} \in A) \forall(a \in A) a \circ e_{\text{ў}} = a$ ёки $e_{\text{ч}} \circ a = a$ бўлса, у ҳолда $e_{\text{ў}}$ ва $e_{\text{ч}}$ элементларини ◦ амалга нисбатан мос равишда ўнг ва чап нейтрал элемент дейилади.

Таъриф

Айтайлик $A \neq \emptyset$, ◦ - A тўғламда аниқланган амал, e ◦ амалга нисбатан A тўғламнинг нейтрал элементи бўлсин. Агар $\forall(a \in A) \exists(a_{\text{ў}}, a_{\text{ч}} \in A) a \circ a_{\text{ў}} = e, a_{\text{ч}} \circ a = e$ бўлса, у ҳолда $a_{\text{ў}}, a_{\text{ч}}$ ларни мос равишда ◦ амалга нисбатан a га ўнг ва чап симметрик элементлар дейилади. Агар $a \circ a' = a' \circ a = e$ бўлса, a' ни ◦ амалга нисбатан a га (ўз навбатида a ни a' га) симметрик элемент дейилади.

Таъриф

Айтайлик ◦ A тўғламда аниқланган амал ва $B \subset A$ бўлсин. Агар $\forall(a,b \in B) \Rightarrow a \circ b \in B$ бўлса, B тўғламни ◦ амалга нисбатан ёпиқ дейилади

Таъриф

(A, Ω) , (B, Ω') алгебралар берилган бўлсин. Ω даги барча амалларни сақлайдиган $\varphi: A \rightarrow B$ акслантириш (A, Ω) алгебранинг (B, Ω) алгебрага гомоморфизми дейилади.

Таъриф

$\varphi: A \rightarrow B$ акслантириш (A, Ω) алгебранинг (B, Ω') алгебрага гомоморфизми бўлсин. У ҳолда агар φ - инъектив акслантириш бўлса, мономорфизм, φ - сюръектив акслантириш бўлса, эпиморфизм, φ - биектив акслантириш бўлса изоморфизм дейилади. Мономорф акслантиришни изоморф жойлаштириш деб ҳам юритилади.

Таъриф

Алгебрани ўзини ўзига гомоморф акслантириш эндоморфизм, алгебрани ўзини ўзига изоморф акслантириш эса автоморфизм дейилади.

Таъриф

(A, Ω) алгебрани (B, Ω') алгебрага акслантирадиган камида битта изоморфизм мавжуд бўлса, у ҳолда (A, Ω) алгебра (B, Ω') алгебрага изоморф дейилади.

Таъриф

$A \neq \emptyset$ ихтиёрий табиатли элементнинг тўплами, n манфий бўлмаган бутун сон бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $f: A^n \rightarrow A$ акслантириш A тўпламда аниқланган n ўринли ёки n -ар алгебраик амал. n сонни эса f алгебраик амалнинг ранги дейилади.

A тўпламда аниқланган нол ўринли амал деб, A тўпламнинг қандайдир элементини тайинлашни (ажратишни) айтилади.

Таъриф

Агар $f: A^n \rightarrow A$ акслантиришнинг аниқланиш соҳаси A^n нинг тўғри қисмидан иборат бўлса, у ҳолда f ни A тўпламда аниқланган қисман алгебраик амал дейилади.

Таъриф

Ранги 0,1 ва 2 бўлган алгебраик амалларни мос равишда нолар, унар ва бинар алгебраик амаллар дейилади. Унар амални оператор ҳам деб аталади. Бундан буён n -ар алгебраик амал дейиш ўрнига n -ар амал ёки амал деган терминларни ишлатишга келишамиз. f - A тўпламда аниқланган ихтиёрий амал бўлсин. Агар $f: A^n \rightarrow A$ акслантиришда $\langle a, b \rangle \in A^2$ элементга $c \in A$ мос келтирилган бўлса, у ҳолда $f(\langle a, b \rangle) = c$ ёки $f(a, b) = c$ кўринишда ёзишнинг ўрнига $a \cdot b = c$ ёки $\langle a, b \rangle \rightarrow c$ ёки $a \mid b = c$ ёки $a \perp b = c$ ёки $a \circ b = c$ ёки $a * b = c, \dots$ кўринишда белгилаш қабул қилинган. Қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амалларини мос равишда $a + b = c$, $a - b = c$, $ab = c$ ва $a : b = c$ кўринишда белгиланади.

Таъриф. Яримгурух деб ҳар қандай тартибланган элементлар жуфтлигига учинчи элементни мос қўйиш амали киритилган тўпламга айтилади. Амал ассоциатив деб фараз қилинади.

Таъриф. Яримгурух гурух деб аталади, агарда тўпламда шундай e нейтрал элемент мавжуд бўлиб, гурухдаги барча a элементи учун $a \bullet e = e \bullet a = a$ ($\bullet$ - киритилган амал), ва ҳар қандай a элементи учун шундай a^{-1} тескари элемент мавжуд бўлиб, $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$ ўринли бўлса.

Агар гурухда ҳар қандай a ва b элементлар учун $a \bullet b = b \bullet a$ тенглик бажарилса, у коммутатив (абель) гурух деб аталади.

Мисоллар:

- Бутун сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан гурух ташкил қилади;

- Мусбат рационал сонлар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан гурух ташкил қилади.

Таъриф. Иккита амал қўшиш ва кўпайтириш амаллари киритилган A математик объектлар тўплами ҳалқа дейилади, агарда у қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1. A тўплагам қўшиш амалига нисбатан коммутатив гурух ҳосил қилади;
2. A тўплагам кўпайтириш амалига нисбатан яримгурух ҳосил қилади;
3. Қўшиш ва кўпайтириш амаллари дистрибутивлик қонунлари билан боғланган $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$, $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

Мисоллар:

1. Z , Q , R тўплагамлар сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ҳосил қилади;

2. Элементлари мос равишда Z , Q , R ҳалқаларда ётувчи барча n -тартибли квадрат матрицалардан иборат $M_n(Z)$, $M_n(Q)$, $M_n(R)$, тўплагамлар матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ҳосил қилади.

Агар A ҳалқада кўпайтириш амали коммутатив бўлса, у коммутатив ҳалқа дейилади.

Агар A ҳалқада кўпайтириш амали учун $e \in A$ бирлик элемент мавжуд бўлса, e элемент A ҳалқанинг бирлик элементи ва A эса бирлик элементли ҳалқа дейилади.

Агар A ҳалқада нолдан фарқли a ва b элементлар учун $a \bullet b = 0$ бўлса a ва b элементлар нолнинг бўлувчилари дейилади. Бундай элементларга эга бўлган ҳалқа нолнинг бўлувчиларига эга бўлган ҳалқа дейилади.

Масалан:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Агар камида иккита элементга эга бўлган бирлик элементли коммутатив ҳалқада, ҳар қандай нолдан фарқли элемент тескариланувчи бўлса, бундай ҳалқа майдон дейилади.

Юқорида келтирилган мисоллар ичида, $\mathbf{Q}$ ва $\mathbf{R}$ ҳалқалар майдондир. Майдонга яна бир мисол келтирамиз: $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ орқали $a+b\sqrt{2}$ ҳақиқий сонлар тўпламини белгилаймиз. Ҳақиқий сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан бу тўплам нолдан фарқли бирлик элементли ҳалқадир, у майдон бўлади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.

Мавзу бўйича тестлар

1	$f(x) = x^4$ формула билан аниқланган $f:R \rightarrow R$ акслантириш турини аниқланг.	*Бир қийматли хам устига акслантириш хам эмас	Бир қийматли, аммо устига акслантириш эмас	Ўзаро бир қийматли	Устига акслантириш аммо бир қийматли эмас
2	Қуйида берилган тўпламлардан қайси бири ҳалқа ташкил қилади, лекин майдон эмас:	* $Z(\sqrt{5}) = \{a+b\sqrt{5}\};$	$Q;$	$R;$	$C.$
3	$f(x) = x^6$ формула билан аниқланган $f:R \rightarrow R$ акслантириш турини аниқланг.	*Бир қийматли хам устига акслантириш хам эмас	Бир қийматли, аммо устига акслантириш эмас	Ўзаро бир қийматли	Устига акслантириш аммо бир қийматли эмас
4	Қуйидаги аксиомаларда қайси бири вектор фазо	* $(\bar{a}^2 b^-) \bar{a} = \bar{a}^2 (\bar{b} \bar{a})$	$\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$ $\bar{a} + \bar{a} = \bar{b} + \bar{a}$		$\exists \bar{o} \in V \quad \forall \bar{a} \in V$ $\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$

	аксиомаси булмайди			$\forall(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V)$ $\bar{a} \cdot \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$	
--	--------------------	--	--	---	--

3 – мавзу. Группалар ва унинг хоссалари.

Режа:

1. Группа.
2. Группа турлари.
3. Қисм группа.
4. Қисм группа бўйича қўшни синфлар

Берилган параграфда гурухлар ҳақида қисқача маълумот берамиз. Гурух тушунчаси хозиги кундаги тиниқ қўринишига келгунча тахминан юз йилча вақт давомида математикларнинг бир неча авлоди тер тўкиб меҳнат қилишига тўғри келди. Алгебраик тенгламаларни радикалларда ечишга ўрнига қўйишлар гуруҳини қўллаган Лагранждан тортиб (1771), Руффини (1799) ва Абел (1824) илмий ишлари орқали Эварист Галуагача (1830), қайсики унинг ишларида гурух ғояси етарлича мазмунли қўлланилган. Мана шу ғоянинг алгебраик тенгламалар назарияси доирасидаги ривожланиш йўлидир.

Таъриф. Ихтиёрий табиатли (масалан, сонлар, акслантиришлар, матрицалар) элементларнинг бўш бўлмаган G тўплами берилган бўлсин. Ушбу тўпланда $\cdot$ — бинар амал (композиция қонуни) берилган бўлсин, қайсики у G тўпламнинг ихтиёрий a ва b элементлари жуфтига шу G тўпламнинг бирон бир ab (ёки $a \cdot b$ каби белгиланиши мумкин) элементини мос келтиради. Одатда бинар амал $\cdot$ берилган a ва b элементларни

акслантирган элемент a ва b элементларининг кўпайтмаси деб аталади ва ab ёки $a \cdot b$ каби белгиланади (Кўпайтма кўпайтувчилар тартибига боғлиқ бўлиши мумкин: $ab=ba$ тенгликнинг бажарилиши шарт эмас). Агар шу G тўплам ва $\cdot$ бинар амал жуфтлиги $(G, \cdot)$ қуйидаги шартларга қаноатлантирса, у ҳолда бу жуфтлик гуруҳ деб аталади.

1. Ассоциативлик қонуни. G тўпламнинг ихтиёрий a, b, c элементлари учун қуйидаги тенглик бажарилади

$$ab \cdot c = a \cdot bc.$$

2. G тўпламда e (чап) бирлик элемент мавжуд, яъни қуйидаги хоссага эга бўлган e элемент: $ea=a$ ихтиёрий $a \in G$ элемент учун.

3. G тўпламнинг ҳар бир a элементи учун G тўпламда (ҳеч бўлмаганда) битта қуйидаги хосса билан аниқланувчи (чап) a^{-1} тескари элемент мавжуд: $a^{-1}a=e$.

Гуруҳ G Абел гуруҳи деб аталади, агар, бундан ташқари, G гуруҳнинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $ab=ba$ (коммутативлик қонуни) тенглик бажарилса.

Мисоллар. 1. Агар кўрилатган G тўплам элементлари сонлардан иборат бўлса ва ушбу тўпламда аниқланган бинар амал бу оддий кўпайтириш амали бўлса, у ҳолда гуруҳ ҳосил қилиш учун биринчи навбатда нолни тўпламдан олиб ташлаш керак. Чунки унинг тескари элементи йўқ. Нолдан фарқли барча рационал сонлар гуруҳ ташкил қилади (бирлик элементи сифатида 1 сони хизмат қилади). Шунга ўхшаш 1 ва -1 сонлари (яъни $G=\{-1,1\}$) ҳамда 1 сони ўзи алоҳида (яъни $G=\{1\}$) гуруҳ ташкил қилади.

Агар барча ҳақиқий сонлар тўпламидан нолни олиб ташласак ҳосил бўлган тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади.

2. Агар кўрилатган G тўплам элементлари сонлардан иборат бўлса ва ушбу тўпламда аниқланган бинар амал бу оддий қўшиш амали бўлса, у ҳолда барча рационал сонлар $\mathbf{Q}$ гуруҳ ташкил қилади (бирлик элементи сифатида 0

сони хизмат қилади). Шунга ўхшаш барча бутун сонлар $\mathbf{Z}$ ҳамда барча ҳақиқий сонлар $\mathbf{R}$ тўпламлари гуруҳ ташкил қилади.

3. Дейлик $M_2(\mathbf{R})$ — элементлари ҳақиқий сонлардан иборат барча 2×2 – ўлчовли матрицалар тўплами бўлсин. У ҳолда бу тўплам матрицаларни қўшиш амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади.

Шунга ўхшаш агар $M_2(\mathbf{C})$ элементлари комплекс сонлардан иборат барча 2×2 – ўлчовли матрицалар тўплами бўлса, бу тўплам матрицаларни қўшиш амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади. Ҳақиқатан ҳам берилган

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матрица учун қўшув амалига нисбатан унга тескари матрица қуйидаги кўринишга эга

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ушбу гуруҳ бирлик элементи қуйидаги кўринишга эга

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

яъни нол матрица бирлик элемент ҳисобланади.

Умуман, агар $M_n(\mathbf{C})$ элементлари комплекс сонлардан иборат барча $n \times n$ – ўлчовли матрицалар тўплами бўлса, бу тўплам қўшиш амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади.

Шунга ўхшаш, дейлик $M_n(\mathbf{R})$ элементлари ҳақиқий сонлардан иборат барча $n \times n$ – ўлчовли матрицалар тўплами бўлсин. У ҳолда бу тўплам қўшиш амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади.

Гуруҳларга яна қўплаб мисоллар келтириш мумкин. Лекин юқорида келтирилган мисоллар берилган битирув малакавий ишига таалуққидир.

2 ва 3 аксиомалардан қуйидагилар келиб чиқади

$$a^{-1}aa^{-1}=ea^{-1}=a^{-1};$$

шундай қилиб, агар охирги тенгликни чапдан a^{-1} элементга тескари элементга кўпайтурсак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз

$$eaa^{-1}=e$$

ёки

$$aa^{-1}=e;$$

бошқача қилиб айтганда, ҳар бир чап тескари элемент бир вақтнинг ўзида ўнг тескари элемент бўлиб ҳам хизмат қилади. Шундай йўл билан a^{-1} элементга тескари элемент a га тенглиги ҳам исботланади. Қуйидаги тенгликлардан

$$ae=aa^{-1}a=ea=a,$$

яъни ҳар бир чап бирлик элемент ўнг бирлик элемент бўлади. Бундан (икки томонлама) бўлиш имконияти келиб чиқади.

4. $ax=b$ тенглама G гурӯҳда ечимга эга, шунга ўхшаш $ya=b$ тенглама ҳам, бу ерда a ва b — G гуруҳнинг ихтиёрий элементлари.

Айнан, юқоридаги тенгламалар ечимлари бўлиб $x=a^{-1}b$, $y=ba^{-1}$ элементлар хизмат қилишади. Чунки

$$a(a^{-1}b)=(aa^{-1})b=eb=b,$$

$$(ba^{-1})a=b(a^{-1}a)=be=b.$$

Бўлишнинг ягоналиги ҳам шунга ўхшаш исботланади:

5. Тенгликлар $ax_1=ax_2$ ва $x_1a=x_2a$ қуйидаги тенгликни беради: $x_1=x_2$. $ax_1=ax_2$ тенгликнинг ҳар икки томонини a^{-1} элементга кўпайтириб $x_1=x_2$ тенгликни ҳосил қиламиз. Ушбу тақиднинг иккинчи қисми ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Хусусан, бундан бирлик элементнинг ягоналиги келиб чиқади ($xa=a$ тенгламанинг ечими сифатида) ва тескари элементнинг ягоналиги келиб чиқади ($xa=e$ тенгламанинг ечими сифатида). Кўпинча бирлик элемент 1 орқали белгиланади.

4 тақидда кўрсатилган бўлиш имконияти, аксиома сифатида 2 ва 3 шартларнинг ўрнини босиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик, 1 ва 4 шартлар бажарилсин ва улардан 2 шарт бажарилишини исботлаймиз. Ихтиёрий c элементни танлаб оламиз ва e ни $xc=c$ тенгламанинг ечими деб оламиз. У ҳолда

$$ec=c.$$

Ихтиёрий a элемент учун қуйидаги тенгламани ечамиз

$$cx=a.$$

У ҳолда

$$ea=ecx=cx=a,$$

бундан 2 шарт келиб чиқади. 3 аксиома $xa=e$ тенгламанинг ечими мавжудлигидан тўғридан – тўғри келиб чиқади.

Шунга мос равишда, биз гуруҳ аксиомалари сифатида 1, 2, 3 шартлар ўрнига 1 ва 4 шартлардан фойдаланишимиз мумкин.

Агар G — чекли тўплам бўлса, у ҳолда 4 шартни 5 шартдан келтириб чиқариш мумкин. Бунинг учун бўлиш имкониятидан эмас (1 аксиомадан ташқари) балки бўлиш имкониятининг ягоналигидан фойдаланиш керак.

Исбот. a — ихтиёрий элемент бўлсин. Ҳар бир x элементга ax элементни мос қўямиз. 5 шартга кўра бу мослик ягона тескарланувчидир, яъни у G тўпламни ax кўринишдаги элементлар тўпламига бирга – бир акслантиради. G тўплам чекли бўлгани учун, у ўзининг қисм тўпламига бирга – бир акслана олмайди. Шунинг учун ax элементлар мажмуаси G тўплам билан утсма – уст тушиши керак, бу эса 4 шартлардан биринчисида такидланганидек ҳар бир b элемент $b=ax$ кўринишда ёзилишини билдиради. $b=xa$ тенгламанинг ечимга эга эканлиги ҳам худди шундай исботланади. Шундай қилиб, 4 дан 5 келиб чиқади. Чекли гуруҳнинг элементлари сони унинг *тартиби* деб аталади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қуйидаги шартлардан қайси бири аддитив группа учун ўринли?	* ихтиёрий a элемент учун шундай b элемент мавжудки $b+a=e$ (e — бирлик элемент) тенглик ўринли бўлади	ихтиёрий a элемент учун шундай b элемент мавжудки $b+a=2b$ тенглик ўринли бўлади	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a$ тенглик ўринли	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $b/a=a$ тенглик ўринли
2	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири мультипликатив Абел группаси учун ўринли эмас?	* $a^2(ba)=a^2(bc)$	$ab=ba$	$a(bc)=(ab)c$	$bab=ab^2$
3	Қуйидагилардан қайси бири группа бўлмайди?	*Ҳақиқий сонлар устида барча 2×2 ўлчовли матрицалар тўплами	Барча n ўринли ўрнига қўйишлар тўплами	Ҳақиқий сонлар тўплами	Комплекс сонлар тўплами
4	Қуйидагилардан қайси бири группа бўлмайди?	*Барча натурал сонлар тўплами	Барча ҳақиқий сонлар тўплами	Барча комплекс сонлар тўплами	Барча рационал сонлар тўплами
5	Қуйидаги шартлардан қайси бири группа учун ўринли?	*қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта нол элемент 0 мавжуд: $a+0=a$ барча a учун	барча a учун қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта элемент b мавжуд: $a \cdot b = b^2$	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a^2$ тенглик ўринли	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $aba=a$ тенглик ўринли
6	Қуйидаги шартлардан қайси бири группа учун ўринли?	барча нолдан фарқли a учун қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва	барча a учун қуйидаги хоссага эга бўлган битта	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a

		фақат битта тескари элемент b мавжуд: $a b = e$ (e — бирлик элемент)	ва фақат битта элемент b мавжуд: $a b = b^2$	элемент учун $ba = a^2$ тенглик ўринли	элемент учун $aba = a$ тенглик ўринли
7	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*группа ҳар доим ҳам халқа бўлавермайди	Ҳар қандай группа бирор халқада ётади	Ҳар қандай халқа бирор группада ётади	группа бўлмайдиган майдон мавжуд
8	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*Майдон ҳар доим қўшув амалига нисбатан группа бўлади	Ҳар қандай халқа қисм группа бўлади	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган халқа мавжуд	Халқа бўлмайдиган группа мавжуд эмас
9	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*Ҳар қандай группада бирлик элемент ва ихтиёрий элементга тескари элемент мавжуд	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд	Аддитив группа бўлмайдиган майдон мавжуд	Ҳар қандай халқа бирор группада ётади
10	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади?	$*\{-1,1\}$	$\{-1,0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{-1,0\}$
11	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади?	$*\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Q}$
12	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади?	$*\mathbf{C} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{Q}$
13	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади?	$*\mathbf{Q} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Q}$
14	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилади?	$*(\mathbf{Q} + \sqrt{2}\mathbf{Q}) \setminus \{0\}$	$\mathbf{Z} \setminus \{0\}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{Q}$
15	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ	$*(\mathbf{Q} + \sqrt{3}\mathbf{Q}) \setminus \{0\}$	$\mathbf{Z} \setminus \{0\}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R}$

	ташkil қилади?				
16	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташkil қилади?	$*(Q+\sqrt{5}Q)\setminus\{0\}$	Q	C	N
17	Қайси тўплам кўпайтирув амалига нисбатан гуруҳ ташkil қилади?	$*(Q+\sqrt{7}Q)\setminus\{0\}$	$Z\setminus\{0\}$	C	Q
18	N, Z, Q, R тўпламларнинг қайси бири $+$ га нисбатан гуруҳ булади	$*Z, C, R$	Z, Q	N, Z	N, Q, R
19	G тўпламда $*$ амал аниқланган бўлса, қуйидаши аксиомалардан қайсилари гуруҳ аксиомалари булади 1) $\forall a, b \in G \quad a*(b*c)=(a*b)*c$ 2) $\forall a, b \in G \quad a*b=e$; 3) $\forall a, b \in G \quad (a*b)*b=(b*a)*a$ 4) $\forall a \in G \quad \exists a' \in G \quad a*a'=e$ 5) $\forall a \in G \quad a*e=a$	$*1, 4, 5$	хаммаси	$1, 2, 3$	$2, 3, 5$
20	Қуйида берилган тўпламлардан қайси бири берилган амалларда моноид ташkil этади, лекин гуруҳ эмас	$*(Q, \cdot);$	$(C, +);$	$(Q, +);$	$(C \setminus 0, +).$
21	Қуйида берилган тўпламлардан қайси бири берилган амалларда яримгуруҳ ташkil этади, лекин моноид эмас:	$*(N, \cdot);$	$(Q, \cdot);$	$(R, \cdot);$	$(C, +).$
22	Қуйида берилган тўпламлардан қайси бири берилган амалларда группоид бўлади, лекин яримгуруҳ эмас	$*(Q_0, \cdot)$ -манфиймас рационал сонлар тўплами	$(R, \cdot);$	$(Z, \cdot);$	$(N, \cdot).$
23	Қуйида берилган тўпламлардан қайси бири берилган амалларда группани ташkil этади.	$*(Q, +)$	$(Z_0, +)$	$(Z, -)$	$(Z, \cdot)$

4 – мавзу. Қисмгруппалар. Циклик группалар.

Режа

1. Қисмгруппа тушунчаси
2. Қисмгруппаларга мисоллар
3. Циклик группалар
4. Циклик группаларнинг хоссалари

Тескари элементга оид яна бир қоида. Кўпайтмага тескари элемент учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$(b^{-1}a^{-1})ab=b^{-1}(a^{-1}ab)=b^{-1}b=e.$$

Мураккаб кўпайтмалар ва йиғиндилар. Даражалар. Биз ab -с кўпайтмани қисқача abc каби ёза бошлаганимиздек, кўп кўпайтувчилар қатнашган мураккаб кўпайтмалар киритамиз

$$\prod_{v=1}^n a_v = \prod_v^n a_v = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Дейлик $a_1, a_2, \dots, a_N$ берилган бўлсин; Математик индукция бўйича ($n < N$ учун):

$$\prod_1^1 a_v = a_1,$$

$$\prod_1^{n+1} a_v = (\prod_1^n a_v) \cdot a_{n+1}.$$

Хусусан, $\prod_v^3 a_v$ — бу бизнинг аввалги $a_1 a_2 a_3$ кўпайтма, $\prod_v^4 a_v = a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 a_2 a_3) a_4$ белгилашлар ўринли ва х.к.

Фақат ассоциативлик қонунидан фойдаланиб қуйидаги қоидани исботлаймиз:

$$\prod_{\mu=1}^m a_{\mu} \cdot \prod_{v=1}^n a_{m+v} = \prod_{v=1}^{m+n} a_v$$

Сўз билан ёзсак: иккита мураккаб кўпайтманинг кўпайтмаси мураккаб кўпайтма бўлади. Бунда кўпайтмада барча кўпайтувчилар ўзларининг аввалги тартибида келишади. Масалан,

$$(ab)(cd)=abcd$$

тенглик (1) тенгликнинг хусусий холи бўлади.

(1) Формула $n=1$ ҳолатда бажарилади — бу равшан кўриниб турибди (П белгининг тарифига кўра). Математик индукция усулига кўра бу формула бирон бир n учун исботланган деб фараз қилайлик ва бу фараздан фойдаланиб формулани $n+1$ қиймат учун исботлаймиз:

$$\prod_1^m a_\mu \cdot \prod_1^{n+1} a_{m+\nu} = \prod_1^m a_\mu \cdot (\prod_1^n a_{m+\nu} \cdot a_{m+n+1}) = \\ \square \square \prod_1^m a_\mu \square \prod_1^n a_{m+\nu} \square a_{m+n+1} = \square \prod_1^{m+n} a_\mu \square a_{m+n+1} = \square \prod_1^{m+n+1} a_\nu \square$$

Шундай қилиб (1) формула исботланди.

И з о х. Ёзув $\prod_1^n a_{m+\nu}$ ўрнига кўпинча $\prod_{m+1}^{n+m} a_\nu$ каби ҳам ёзишади. Бундан ташқари, алоҳида ҳолларда, агар бу қулай бўлса, $\prod_1^0 a_\nu = e$ каби ҳам ёзишади. n та бир ҳил кўпайтувчилар кўпайтмаси даража деб аталади:

$$a^n = \prod_1^n a \text{ (хусусан, } a^1 = a, a^2 = aa \text{ ва х.к.)}$$

Юқорида исботланган теоремадан, қуйидагилар келиб чиқади

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}. \quad (2)$$

Кейин

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (3)$$

Бу формулалар ҳам математик индукция усули ёрдамида исботланади. Ҳозиргача ҳосил бўлган (1), (2) ва (3) қоидаларни исботлашда фақат ассоциативлик қонуни талаб қилинган эди; шунинг учун ҳар доим қачонки кўрилатган соҳада кўпайтма аниқланган бўлса ва ассоциативлик қонуни ўринли бўлса бу қоидалар бажарилади (масалан натурал сонлар соҳасида) ҳатто бу соҳа гуруҳ бўлмаса ҳам.

Агар кўпайтирув амали, бундан ташқари, коммутатив бўлса (Абел гуруҳи ҳолати), у ҳолда бундан ҳам кўпроғини исботлаш мумкин: мураккаб кўпайтма қиймати ундаги кўпайтувчилар тартибига боғлиқ бўлмайди. Аниқроғи:

Теорема 1. агар φ — $(1, n)$ натурал сонлар кесмасини ўз-ўзига бирга-бир акслантириш бўлса, у ҳолда

$$\prod_{v=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^n a_v.$$

Исбот. $n=1$ учун тақид равшан. Шунинг учун математик индукция усули бўйича уни $n-1$ учун ҳам тўғри деб фараз қиламиз. Дейлик k сони n сонга акслансин: $\varphi(k)=n$. У ҳолда

$$\prod_{\varphi(v)=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^{k-1} a_{\varphi(v)} \cdot a_{\varphi(k)} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} a_{\varphi(k+v)} = (\prod_{v=1}^{k-1} a_{\varphi(v)} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} a_{\varphi(k+v)}) a_n.$$

Қавс ичига олинган кўпайтувчилар фақат ихтиёрий тартибда олинган $a_1, \dots, a_{n-1}$ элементлардан иборат. Математик индукция фарзига кўра бу ифода $\prod_{v=1}^{n-1} a_v$ га тенг. Шунинг учун

$$\prod_{\varphi(v)=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^{n-1} a_v \cdot a_n = \prod_{v=1}^n a_v.$$

Исботланган қоидадан Абел гуруҳларида қуйидаги кўринишдаги ёзув ўринли бўлади

$$\prod_{1 \leq i < k \leq n} a_{ik}$$

ёки

$$\prod_{i < k} a_{ik} \quad (i=1, \dots, n; k=1, \dots, n),$$

қайсики бу $1 \leq i < k \leq n$ шартга қаноатлантирувчи i, k индекслар жуфтликлари тўпламининг қандайдир йўл билан номерланишини ва кейин кўпайтма ташкил қилинишини билдиради.

Ихтиёрий гуруҳда ихтиёрий a элемент учун нолинчи ва манфий даража одатий йўл билан аниқланади:

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n,$$

(2), (3) қоидаларнинг ихтиёрий бутун сонли кўрсаткичлар учун ўринли бўлиши ҳам қийинчиликсиз исботланади.

Аддитив гуруҳда $\prod_1^n a_v$ ўрнига $\sum_1^n a_v$ ёзилади, a^n даража ўринига мос равишда na ёзилади. Кўпайтмалар учун исботланганларнинг барчаси энди йиғиндиларга ҳам ўтади.

Қоида (3) аддитив кўринишда ёзилганда ассоциативлик қонуни кўринишини олади

$$n \cdot ma = nm \cdot a,$$

шу билан бирга (2) формула дистрибутивлик қонуни кўринишини олади:

$$ma + na = (m+n)a.$$

Бу икки қонунга яна бир дистрибутивлик қонуни қўшилади:

$$m(a+b) = ma + mb$$

(бу мультипликативлик ёзувида $(ab)^m = a^m b^m$ кўринишга эга), қайсики, бу фақат Абел гуруҳларида ўринлидир. Бу математик индукция усули ёрдамида оsonгина исботланади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
4. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
5. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
6. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
7. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
8. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*Халка ҳар доим хам майдон бўлавермайди	Ҳар қандай группа бирор	Ҳар қандай халка бирор группада	Халка бўлмайдиган майдон
---	--	---	-------------------------	---------------------------------	--------------------------

			халқада ётади	ётади	мавжуд
2	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*Майдон ҳар доим халқа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм группа бўлади	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд	Халқа бўлмайдиган майдон мавжуд
3	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*Ҳар қандай майдонда бирлик элемент ва ихтиёрий нолдан фаркли элементга тескари элемент мавжуд	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд	Халқа бўлмайдиган майдон мавжуд	Ҳар қандай группа бирор халқада ётади
4	Қандай группа чекли группа дейилади?	*Элементлари тўплами чекли бўлган группа	Элементлари индекслари чекли бўлган группа	Қўшни синфлари тўплами чекли бўлган группа	Қисм группалари тўплами чекли бўлган группа
5	Чекли тўпламни шу тўпламнинг ўзига суръектив бирга – бир акслантиришлари тўплами қандай группа бўлади?	*Симметрик группа	Абел группаси	Циклик группа	Бир элементли группа
6	G группанинг $H \subseteq G$ қисм тўплами группа бўлиши учун қайси шарт бажарилиши керак?	*Бирлик элемент ва $H \subseteq G$ қисм тўпламнинг ихтиёрий элементига тескари элемент шу $H \subseteq G$ қисм тўпламда ётиши, ҳамда $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ дан $h_1 h_2 \in H$ келиб чиқиши зарур.	Бирлик элемент шу $H \subseteq G$ қисм тўпламда ётиши, ҳамда $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ дан $h_1 h_2 \in H$ келиб чиқиши зарур.	$h_1 \in H$, $h_2 \in H$ дан $h_1 h_2 \in H$ келиб чиқиши зарур.	Бирлик элемент ва $H \subseteq G$ қисм тўпламнинг ихтиёрий элементига тескари элемент шу $H \subseteq G$ қисм тўпламда ётиши зарур.

5, 6 – мавзу. Қисм гуруппага нисбатан қўшни синфлар.

Лагранж теоремаси

Режа

1. Қисм гуруппага нисбатан қўшни синфлар
2. Қўшни синфларнинг хоссалари
3. Қўшни синфларга мисоллар
4. Лагранж теоремаси

Қисмгруппалар. G группанинг Δ қисмтўплами ўзи ҳам G группадаги бинар амалга нисбатан группа бўлиши учун, агар a ва b элементлар Δ қисмтўпланда ётишса, у ҳолда уларнинг ab кўпайтмаси ҳам Δ тўпланда ётиши ва ушбу Δ қисм тўпланда 1, 2, 3 аксиомаларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. 1 аксиома Δ тўпланда бажарилади, агарда бу аксиома G да ўринли бўлса. Аксиомалар 2 ва 3 бирлик элементнинг ва ҳар бир a элемент билан a^{-1} унга тескари элементнинг Δ тўпланда ётишини билдиради. Берилган ҳолда бирлик элемент бўйича талаб ортиқча, чунки, агар $a \in \Delta$ тўпландаги ихтиёрий элемент бўлса, у ҳолда a^{-1} элемент ҳам Δ тўпланда ётади, ва, демак $aa^{-1}=e$ кўпайтма ҳам Δ тўпланда ётади. Шундай қилиб қуйидагини исбот қилдик:

Теорема. Берилган G группанинг бўш бўлмаган Δ қисмтўплами қисмгруппа бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир:

- 1) Δ тўплам ўзининг ихтиёрий иккита элементи билан уларнинг кўпайтмасини ҳам ўз ичига олади;
- 2) Δ тўплам ўзининг ҳар бир a элементи билан биргаликда унга тескари a^{-1} элементни ҳам ўз ичига олади.

Агар, хусусан, тўплам Δ чекли бўлса, у ҳолда талаблардан иккинчиси ортиқча, чунки бу ҳолда 2 ва 3 талаблар 5 талабга алмаштирилиши мумкин,

бу талаб эса, G группда ўринли бўлган ҳолда, Δ тўпламда ҳам ўринли бўлади.

Умуман, 1) ва 2) шартларни битта шартга бирлаштириш мумкин: Δ тўплам ўзининг ихтиёрий иккита a ва b элементлари билан бирга ab^{-1} кўпайтмани ҳам ўз ичига олиши керак. У ҳолда Δ тўплам a элемент билан биргаликда бирлик элемент $aa^{-1}=e$ ва тескари элемент $ea^{-1}=a^{-1}$ ўз ичига олади, шунинг учун a, b элементлар билан биргаликда b^{-1} элементни ҳам, $a(b^{-1})^{-1}=ab$ кўпайтмани ҳам ўз ичига олади.

Агар (Абел группасида) группа муносабатлари аддитив ёзилган бўлса, у ҳолда қисмгруппа ўзининг ихтиёрий иккита a, b элементи билан $a+b$ элементни ҳам, шу билан бирга, a элемент билан бирга $-a$ элементни ҳам ўз ичига олиши билан характерланади. Бу икки талабни бир талабга бирлаштириш мумкин: a ва b элементлар билан биргаликда қисмгруппада $a-b$ элемент ҳам ётиши керак.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Prasolov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қуйидагилардан қайси бири аддитив группа бўлади?	*Барча бутун сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча жуфт сонлар тўплами	Барча тоқ сонлар тўплами
2	барча 2×2 – ўлчовли матрицалар тўплами қайси амалларга нисбатан группа бўлади?	* матрицаларни қўшиш	ҳеч қайси амалга нисбатан группа бўлмайди	матрицани сонга қўпайтириш	матрицаларни қўпайтириш
3	барча $n \times n$ – ўлчовли матрицалар тўплами қайси амалларга нисбатан группа бўлади?	* Элементларни қўшиш	ҳеч қайси амалга нисбатан группа бўлмайди	элементни сонга қўпайтириш	Элементларни қўпайтириш
4	Агар группада коммутативлик қонуни бажарилса у қандай аталади?	*Абел группаси	Ассоциатив группа	Аддитив группа	Мультипликатив группа
5	Агар группада коммутативлик қонуни бажарилса у қандай аталади?	*Коммутатив группа	Ассоциатив группа	Аддитив группа	Мультипликатив группа
6	Қайси группа симметрик группа дейилади	Ўрнига қўйишлар группаси	Учбурчакни буришлар группаси	Квадратни буришлар группаси	Айланани буришлар группаси

7 - мавзу. Нормал қисм группа ва фактор группалар.

Режа

1. Нормал қисм группа
2. Нормал қисм группага мисоллар
3. Фактор группалар
4. Симметрик группа қисмгруппалари

Нормал қисмгруппаларга мисоллар. Ҳар бир гуруҳ ўз қисмгруппаси сифатида ягона бирлик элементдан иборат бўлган бирлик группасига эга.

n Та объектнинг барча ўрнига қўйишларидан иборат S_n симметрик группанинг муҳим қисмгруппаси сифатида $x_1, \dots, x_n$ ўзгарувчиларга қўллаганда

$$\Delta = \prod_{i < k} (x_i - x_k)$$

функцияни яна ўзига ўтказувчи $\mathcal{S}_n$ барча ўрнига қўйишлар группасини олиш мумкин. Бундай ўрнига қўйишлар жуфт ўрнига қўйишлар деб аталади, қолганлари эса $\square$ тоқ ўрнига қўйишлар деб аталади. Тоқ ўрнига қўйишлар Δ функциянинг ишорасини ўзгартиради. Ҳар бир транспозиция (яъни иккита рақамнинг ўринларини алмаштирувчи ўрнига қўйиш) тоқ ўрнига қўйиш бўлади. Иккита жуфт ёки иккита тоқ ўрнига қўйишларнинг кўпайтмаси $\square$ жуфт ўрнига қўйишдир; жуфт ва тоқ ўрнига қўйишлар кўпайтмаси $\square$ тоқ ўрнига қўйишдир. Биринчи хоссадан $\mathcal{S}_n$ нинг группа бўлиши келиб чиқади. Белгиланган транспозиция кўпайтирувда жуфт ўрнига қўйишни тоқ ўрнига қўйишга ва аксинча бўлгани учун, жуфт ва тоқ ўрнига қўйишлар сонлари бир хил $n!/2$ га тенг.

n Та элементларнинг барча ўрнига қўйишлари группаси S_n нинг қисмгруппасининг анча қулай тавсифи учун ўрнига қўйишларни цикллар ёрдамида ифодалашдан фойдаланилади: $(p\ q\ r\ s)$ белги билан p ни q га, q ни r га, r ни s га ва s ни p га ўтказувчи ва қолган объектларни ўзгаришсиз қолдирувчи циклик ўрнига қўйиш белгиланади. Ҳар қандай ўрнига қўйишни ягона кўринишда циклик ўрнига қўйишларнинг “циклларнинг” кўпайтмаси кўринишида ифодалаш мумкин:

$$(ikl\dots)(pq\dots)\dots,$$

бу ерда ҳеч қандай иккита цикл умумий элементга эга эмас. Бу кўпайтмадаги кўпайтувчиларни ўрнини алмаштириш мумкин. Бир элементдан иборат

ўрнига қўйиш, масалан (1), бирлик ўрнига қўйишдан иборат. Албатта куйидаги тенглик ўринли

$$(1254)=(2541) \text{ ва х.к.}$$

Бу белгилар ёрдамида S_3 группасининг барча $3!=6$ ўрнига қўйишларини куйидагича ифодалашимиз мумкин:

$$(1), (12), (13), (23), (123), (132).$$

Берилган ҳолатда барча қисмгруппалар осонгина аниқланади. Улар куйидагилар (S_3 группанинг ўзидан ташқари):

$$\varnothing_3: (1), (123), (132);$$

$$S_1: (1), (23); S_2: (1), (13); S_3: (1), (12);$$

$$G: (1).$$

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
4. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
5. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
6. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
7. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун коммутативлик қонуни бўлади?	$*ab=ba$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$a(bc)=(ab)c$
2	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун ассоциативлик қонуни бўлади?	$*a(bc)=(ab)c$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$ab=ba$
3	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*Ҳар қандай қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан группа бўлган тўплам халқа бўлавермайди	Ҳар қандай майдон фактор халқа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм халқа бўлади	халқа бўлмайдиган майдон мавжуд
4	Қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли?	*қўшиш амалига нисбатан халқа группа бўлади	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд	Ҳар қандай майдон қисм группа бўлади	кўпайтириш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд
5	Қуйидаги шартлардан қайси бири группа учун ўринли?	*Ҳар қандай майдон аддитив группа бўлади	Ҳар қандай майдон фактор группа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм группа бўлади	группа бўлмайдиган майдон мавжуд
6	Қуйидаги шартлардан қайси бири группа учун ўринли?	*Ҳар қандай майдон қўшиш амалига нисбатан группа бўлади	Ҳар қандай майдон фактор группа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм группа бўлади	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд
7	Қуйидаги шартлардан қайси бири группа учун ўринли?	*Ҳар қандай майдон кўпайтириш амалига нисбатан группа бўлмайди	Ҳар қандай майдон фактор группа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм группа бўлади	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган

					майдон мавжуд
8	Қуйидаги шартлардан қайси бири группа учун ўринли?	*Қар қандай группада бирлик элемент мавжуд	Бирон бир элементга тесқари элемент мавжуд бўлмаган группа мавжуд	Қар қандай группа қисм халқа бўлади	Қар қандай майдон қисм группа бўлади
9	Қандай группа чекли группа дейилади?	*Элементлари тўплами чекли бўлган группа	Элементлари индекслари чекли бўлган группа	Қўшни синфлари тўплами чекли бўлган группа	Қисм группалари тўплами чекли бўлган группа
10	Чекли тўпламни шу тўпламнинг ўзига суръектив бирга – бир акслантиришлари тўплами қандай группа бўлади?	*Симметрик группа	Абел группаси	Циклик группа	Бир элементли группа
11	G группанинг $H \subseteq G$ қисм тўплами группа бўлиши учун қайси шарт бажарилиши керак?	*Бирлик элемент ва $H \subseteq G$ қисм тўпламнинг ихтиёрий элементига тесқари элемент шу $H \subseteq G$ қисм тўпламда ётиши, ҳамда $h_1 \in H, h_2 \in H$ дан $h_1 h_2 \in H$ келиб чиқиши зарур.	Бирлик элемент шу $H \subseteq G$ қисм тўпламда ётиши, ҳамда $h_1 \in H,$ $h_2 \in H$ дан $h_1 h_2 \in H$ келиб чиқиши зарур.	$h_1 \in H, h_2 \in H$ дан $h_1 h_2 \in H$ келиб чиқиши зарур.	Бирлик элемент ва $H \subseteq G$ қисм тўпламнинг ихтиёрий элементига тесқари элемент шу $H \subseteq G$ қисм тўпламда ётиши зарур.

8 - мавзу. Группаларнинг гомоморфизм ва изоморфизмлари.

Режа

1. Группалар гомоморфизми
2. Группалар изоморфизмлари
3. Чекли группалар классификацияси
4. Группа элементи тартиби

Группанинг тўпلامдаги таъсири. Берилган тўпلامнинг ҳамма бирга-бир акслантиришлари (ўз-ўзига) группаси қаралади. Бирор G группанинг шу группага гомоморфизми олинади ва бу ёрдамида G группанинг берилган тўпلامга чап томондан таъсири аниқланади.

Орбита. Берилган группа ва у таъсир этувчи тўпلام (юқоридагидек) берилган бўлса, шу группа ёрдамида тўпلام элементлари орасида эквивалентлик муносабати киритилади. Ушбу эквивалентлик муносабати берилган тўпلامни ўзаро кесишмайдиган синфларга (қисмтўпلامларга) ажратади. Бу эквивалентлик синфларини берилган группа орбиталари деб аталади.

Стационар қисм группалар. Тўпلام ва унга таъсир этувчи группа оламиз. Тўпلامнинг белгиланган нуқтасини ўз жойида қолдирувчи берилган группага тегишли гомоморфизмлар тўплами шу группанинг қисмгруппасини ташкил қилади. Бу қисмгруппа берилган группанинг берилган нуқтадаги стационар қисмгруппаси деб аталади. Орбита узунлигининг стационар группа индекси билан устма-уст тушади.

Дейлик $a, b, \dots$ — бирон бир G группанинг ихтиёрий элементлари бўлсин. У ҳолда, G группадан ташқари унда $a, b, \dots$ элементларни ўз ичига оловчи қисмгруппалар ҳам бўлиши мумкин. Бундай қисмгруппаларнинг барчасининг кесишмаси бирон бир $\varnothing$ группа бўлади. Бу ҳолатда $a, b, \dots$ элементлар $\varnothing$ группани *яратади* дейилади. Бу группа албатта $a^{-1}a^{-1}bab^{-1}$

кўринишдаги кўпайтмаларни ўз ичига олади (чекли миқдордаги такрорланувчи ёки такрорланмайдиган кўпайтувчилардан ташкил топган). Бундай кўпайтмалар $a, b, \dots$ элементларни ўз ичига олувчи группани ташкил қилади. Демак бу группа $\neq$ ни ҳам ўз ичига олади. Шунинг учун бу группа $\neq$ группа билан устма – уст тушади. Шундай қилиб қуйидаги теоремани исбот қилдик:

Теорема. $a, b, \dots$ элементлардан яратилган группа, ушбу элементларнинг ва уларга тескари элементларнинг ихтиёрий чекли кўпайтмаларидан иборат.

Хусусан, алоҳида a элемент ўзининг барча $a^{\pm n}$ даражалари группасини яратади ($a^0 = e$ элементни ҳам ҳисобга олган ҳолда). Қуйидаги тенгликлар ўринли бўлгани учун

$$a^n a^m = a^{n+m} = a^m a^n,$$

бу группа Абел группасидир.

Бир элементнинг даражаларидан иборат группа циклик группа деб аталади.

Иккита имконият мавжуд. Ёки барча a^h даражалар бир – биридан фарк қилади; у ҳолда циклик группа

$$\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots$$

чексиздир. Ёки улар такроланишади ва қуйидаги тенглик ўринли бўлади

$$a^h = a^k, h > k.$$

У ҳолда

$$a^{h-k} = e \quad (h-k > 0).$$

Дейлик бу ҳолда n — бу $a^n = e$ тенгликни қаноатлантирувчи энг кичик мусбат кўрсаткич. У ҳолда $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ даражалар ҳар хил, чунки акс ҳолда

$$a^h = a^k \quad (0 \leq k < h < n),$$

бундан қуйидаги шарт келиб чиққан бўлар эди

$$a^{h-k} = e \quad (0 < h-k < n).$$

Бу эса n сонининг қандай танланганлигига зиддир.

Агар ихтиёрий бутун сон m куйидаги кўринишда ёзилса

$$m = qn + r \quad (0 \leq r < n)$$

у ҳолда куйидаги ҳосил бўларди

$$a^m = a^{qn+r} = a^{qn} \cdot a^r = (a^n)^q a^r = e a^r = a^r.$$

Шундай қилиб, a элементнинг барча даражалари $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ қаторда катнашади. Шунинг учун циклик группа n та элементга эга бўлади, айнан

$$a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$$

элементлар. Сон n a элемент бўйича яратилган циклик группанинг тартиби шу a элементнинг тартиби деб аталади. Агар a элементнинг барча даражалари ҳар хил бўлса, у ҳолда a чексиз тартибли элемент дейилади.

Мисоллар. Масалан бутун сонлар

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

бинар амал сифатида қўшиш амалини олганимизда чексиз циклик группани ташкил қилади. Юқорида тавсифланган S_i ($i=1,2,3$) и $\mathcal{P}_3$ группалар 2, 3 тартибдаги циклик группалардир.

Циклик группанинг барча қисмгруппаларини аниқлаймиз. Дейлик G — a яратувчисига эга бўлган ихтиёрий циклик группа ва G_0 — фақат бирлик элементдан иборат бўлмаган қисмгруппа бўлсин. Агар G_0 группа a^m манфий баражали элементни ўз ичига олса, у ҳолда унга тескари элемент ҳам G_0 группда ётади. Дейлик a^m — G_0 группда энг кичик мусбат даража кўрсатгичига эга бўлган элемент бўлсин. G_0 группанинг барча элементлари a^m элементнинг даражаларидан иборат эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, агар a^s — G_0 нинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда куйидаги ўринли

$$s = qm + r \quad (0 \leq r < m).$$

У ҳолда, $a^s(a^m)^{-q} = a^{s-mq} = a^r$ — G_0 группанинг $r < m$ шартга қаноатлантирувчи элементи. Бундан m соннинг келиб чиқишига кўра $r=0$ ва, демак, $s=qm$ ва $a^s = (a^m)^q$. Шундай қилиб, G_0 группанинг барча элементлари a^m элементнинг даражаларидан иборат.

Агар a элемент чекли n тартибга эга бўлса, яъни $a^n=e$, у ҳолда $a^n=e$ элемент G_o гурппада ётиши керак. Шунинг учун n сон m сонига бўлинади: $n=qt$. Ушбу ҳолда G_o қисмгурппа $a^m, a^{2m}, a^{3m}, \dots, a^{qm}=e$ элементлардан иборат ва q тартибга эга. Аммо, агар a чексиз тартибга эга бўлса, у ҳолда $e, a^{\pm m}, a^{\pm 2m}, \dots$, элементлардан иборат бўлган G_o гурппа ҳам чексиз тартибга эга. Шундай қилиб биз қуйидагини исботладик:

Циклик гурппанинг қисмгурппаси ҳаи циклик гурппа бўлади. У бирлик элементдан иборат бўлади ёки қисмгурппада энг кичик мусбат m кўрсаткичга эга бўлган a^m элементнинг даражаларидан иборат. Бошқача қилиб айтганда, у бошланғич гурппанинг элементларининг m – чи даражаларидан иборат. Бунда чексиз циклик гурппа учун бу m сони ихтиёрий, аммо чекли n тартибли циклик гурппа учун m сони n сонининг бирон бир бўлувчиси бўлиши лозим. Ушбу ҳолда қисм гурппа $q=n/m$ тартибга эга. Ҳар бир шундай m сони учун $\{a\}$ гурппада фақат бир $\square$ ягона n/m тартибли қисмгурппа мавжуд, айнан бу $\{a^m\}$ гурппасидир

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.

10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.

11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қуйидагилардан қайси бири қўшиш амалига нисбатан группа бўлади?	*Барча ҳақиқий сонлар тўплами	Барча манфий сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча мусбат сонлар тўплами
2	Қуйидагилардан қайси бири қўпайтириш амалига нисбатан группа бўлади?	*Барча нолдан фарқли ҳақиқий сонлар тўплами	Барча манфий сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча бутун сонлар тўплами
3	Қуйидагилардан қайси бири қўпайтириш амалига нисбатан группа бўлади?	*Барча нолдан фарқли комплекс сонлар тўплами	Барча иррационал сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча бутун сонлар тўплами
4	Қуйидагилардан қайси бири қўшиш амалига нисбатан группа бўлади?	*Барча комплекс сонлар тўплами	Барча иррационал сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча манфий сонлар тўплами
5	Қуйидагилардан қайси бири қўшиш амалига нисбатан группа бўлади?	*Барча рационал сонлар тўплами	Барча манфий сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча туб сонлар тўплами
6	Қуйидагилардан қайси бири қўпайтириш амалига нисбатан группа бўлади?	*Барча нолдан фарқли рационал сонлар тўплами	Барча бутун сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча туб сонлар тўплами
7	Қуйидагилардан қайси бири группа бўлмайди?	* Ҳақиқий сонлар устида барча 2×2 ўлчовли матрицалар тўплами	Барча рационал сонлар тўплами	Барча комплекс сонлар тўплами	Барча ҳақиқий сонлар тўплами

9 - мавзу. Гомоморфизм ҳақидаги теоремалар.

Режа

1. Гомоморфизм ва изморфизм.
2. Ядро ва образ.
3. Изоморф нормал группалар. Хоссалари.
4. Изомрф фактор группалар
5. Группалар гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема

1. Гомоморфизм.

Таъриф. Бир группани иккинчи группага акслантириш гомоморфизм деб аталади, агар ушбу акслантиришда элементлар кўпайтмасининг образи шу элементлар образларининг кўпайтмасига тенг бўлса.

Гомоморфизм изморфизм деб аталади, агарда ушбу гомоморфизм суръектив (устига акслантириш) ва инъектив (бирга – бир акслантириш) бўлса.

2. Ядро ва образ.

Гомоморфизм берилган бўлсин. Ушбу гоморфизм ядроси деб ҳамма бирлик элементга аксланувчи элементлар тўпламига айтилади. Гомоморфизм ядроси мос группанинг қисмгруппаси бўлади.

3. Нормал қисм группалар. Хоссалари.

Теорема. Ҳар қандай группалар гомоморфизми ядроси нормал қисмгруппадир.

Фактор группа. Берилган группа ва ундаги бирор қисмгруппа бўйича эквивалентлик муносабати киритиш мумкин. Ушбу эквивалентлик бўйича бўлинган синфлар, агар берилган қисмгруппа нормал қисмгруппа бўлса, группа ташкил қилишади. Бу группа факторгруппа деб аталади.

Группалар гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема. Тадбиқлар.

Теорема. Иккита группа устида бирор гомоморфизм берилган бўлсин. У ҳолда гомомрфизм ядроси нормал қисмгруппа бўлади. Бундан ташқари

ушбу нормал қисмгруппа бўйича биринчи группадан олинган факторгруппа гомоморфизм образига изоморф бўлади.

Аксинча, агар берилган группادا бирор нормал қисмгруппа олсак, у ҳолда берилган группа ва улардан қурилган фактор группа учун шундай эпиморфизм мавжудки унинг ядроси берилган нормал қисмгруппа бўлади.

Қисмгурухлар. G гурухнинг Δ қисмтўплами ўзи ҳам G гурухдаги бинар амалга нисбатан гурух бўлиши учун, агар a ва b элементлар Δ қисмтўпланда ётишса, у ҳолда уларнинг ab кўпайтмаси ҳам Δ тўпланда ётиши ва ушбу Δ қисм тўпланда 1, 2, 3 аксиомаларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. 1 аксиома Δ тўпланда бажарилади, агарда бу аксиома G да ўринли бўлса. Аксиомалар 2 ва 3 бирлик элементнинг ва ҳар бир a элемент билан a^{-1} унга тескари элементнинг Δ тўпланда ётишини билдиради. Берилган ҳолда бирлик элемент бўйича талаб ортиқча, чунки, агар $a \in \Delta$ тўпландаги ихтиёрий элемент бўлса, у ҳолда a^{-1} элемент ҳам Δ тўпланда ётади, ва, демак $aa^{-1}=e$ кўпайтма ҳам Δ тўпланда ётади. Шундай қилиб қуйидагини исбот қилдик:

Теорема 2. Берилган G гурухнинг бўш бўлмаган Δ қисмтўплами қисмгурух бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир:

1) Δ тўплам ўзининг ихтиёрий иккита элементи билан уларнинг кўпайтмасини ҳам ўз ичига олади;

2) Δ тўплам ўзининг ҳар бир a элементи билан биргаликда унга тескари a^{-1} элементни ҳам ўз ичига олади.

Агар, хусусан, тўплам Δ чекли бўлса, у ҳолда талаблардан иккинчиси ортиқча, чунки бу ҳолда 2 ва 3 талаблар 5 талабга алмаштирилиши мумкин, бу талаб эса, G гурухда ўринли бўлган ҳолда, Δ тўпланда ҳам ўринли бўлади.

Умуман, 1) ва 2) шартларни битта шартга бирлаштириш мумкин: Δ тўплам ўзининг ихтиёрий иккита a ва b элементлари билан бирга ab^{-1}

кўпайтмани ҳам ўз ичига олиши керак. У ҳолда Δ тўплам a элемент билан биргаликда бирлик элемент $aa^{-1}=e$ ва тескари элемент $ea^{-1}=a^{-1}$ ўз ичига олади, шунинг учун a, b элементлар билан биргаликда b^{-1} элементни ҳам, $a(b^{-1})^{-1}=ab$ кўпайтмани ҳам ўз ичига олади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasolov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGraw-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири мультипликатив группа учун ўринли?	$* a(bc)=a(bc)$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$a(b+c)=ab+ac$	$bab=ab^2$
2	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири аддитив группа учун ўринли?	$* a+(b+c)=(a+b)+c$	$a+b=b+a$	$a+b=b+2a$	$ba+b=ab^2$
3	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири мультипликатив Абел группаси учун ўринли?	$* ab=ba$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$a+2b=b+2a$	$ba+b=ab+b$
4	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири аддитив Абел группаси учун ўринли?	$* a+b=b+a$	$a(b+c)=ab+a$ c	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$bab=ab^2$
5	Қуйидаги шартлардан қайси бири аддитив группа учун ўринли?	$* \text{шундай } e \text{ элемент мавжудки ихтиёрий } a \text{ элемент учун } e+a=a \text{ тенглик ўринли}$	$ab=ba$	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a$ тенглик ўринли	$bab=ab^2$
6	Группанинг ихтиёрий қисм группалари кесишмаси нима бўлади?	$* \text{Қисм группа}$	Фактор группа	Абел группаси	Чекли қисм группа
7	Бир мультипликатив группани иккинчи мультипликатив группага акслантириш изоморфизм бўлиши учун...	$* \text{Бу акслантириш биектив бўлиши ва бунда кўпайтма образи кўпайтувчилар образлари кўпайтмасига тенг бўлиши керак}$	Бу акслантириш суръектив бўлиши ва бунда кўпайтма образи кўпайтувчилар образлари кўпайтмасига тенг бўлиши керак	Бу акслантириш биектив бўлиши ва бунда кўпайтма образи кўпайтувчилар образлари квадратлари кўпайтмасига тенг бўлиши керак	Бу акслантириш биектив бўлиши ва бунда кўпайтма образи кўпайтувчилар образлари йиғиндисига тенг бўлиши керак

10, 11 - мавзу. Ҳалқалар ва майдонлар

Режа

1. Ҳалқа тушунчаси.
2. Ҳалқа турлари.
3. Муҳим ҳалқалар. Тана ва майдон
4. Майдонлар

Ҳалқа тушунчаси. Ҳалқа турлари. Қисм-ҳалқа. Ҳалқа берилган тўплам устида иккита аддитив ва мультипликатив амаллар ёрдамида аниқланади. Агар берилган тўплам қўшув (аддитив) амалига нисбатан абел группасини, кўпайтирув амалига нисбатан ярим группа ташкил қилса ва тўпламнинг ихтиёрий элементлари учун қўшув ва кўпайтирув амалларига нисбатан чап ва ўнг томондан дистрибутивлик қонунлари бажарилса, у ҳолда ушбу тўплам берилган қўшув ва кўпайтирув амалларига нисбатан ҳалқа деб аталади. Ҳалқанинг ихтиёрий қисмтўплами берилган амалларга нисбатан ёпиқ бўлса, у ҳолда бу қисмтўплам қисмҳалқа бўлади.

Алгебра ва арифметикада ҳар хил табиатли объектлардан фойдаланилади; бу — бутун, рационал, ҳақиқий, комплекс, алгебраик сонлар, n ўзгарувчили кўпҳадлар ва рационал функциялар ва х.к. Шунинг учун юқорида келтириб ўтилган объектлар синфларини бир умумий тушунча ёрдамида бирлаштириш ва бу синфлардаги ҳисоблаш қоидаларини умумий ҳолатда тавсифлаш мақсадга мувофиқдир.

Таъриф. Иккита бинар амалли система деб ихтиёрий иккита a, b элементлари учун ягона аниқланган ва яна шу тўпламнинг ўзига тегишли бўлган йиғинди $a+b$ ва кўпайтма $a \cdot b$ мавжуд бўлган $a, b, \dots$ элементлар тўпламига айтилади.

Агар икки бинар амалли системада элементлар устида операцияларни амалга оширувчи ушбу бинар амаллар қуйидаги шартларга қаноатлантирса бу система ҳалқа деб аталади:

I. Қўшиш қонуни:

а) Ассоциативлик қонуни: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

б) Коммутативлик қонуни: $a+b=b+a$.

в) Барча a, b элементлар учун $a+x=b$ тенгламанинг ечимининг мавжудлиги.

II. Кўпайтириш қонуни:

а) Ассоциативлик қонуни: $(ab)c=a(bc)$.

III. Дистрибутивлик қонуни:

а) $a \cdot (b+c)=ab+bc$;

б) $(b+c) \square a=ba+ca$.

Халқаларга мисоллар. 1. Агар кўрилатган тўпلام элементлари сонлардан иборат бўлса ва ушбу тўпلامда аниқланган бинар амаллар бу оддий кўпайтириш ва қўшиш амаллари бўлса, у ҳолда барча рационал сонлар тўплами $\mathbf{Q}$ ҳалқа ташкил қилади (бирлик элементи сифатида 1 сони хизмат қилади). Шунга ўхшаш барча бутун сонлар тўплами $\mathbf{Z}$ ҳамда барча ҳақиқий сонлар тўплами $\mathbf{R}$ ҳалқа ташкил қилади.

2. Дейлик $M_2(\mathbf{R}) \square$ элементлари ҳақиқий сонлардан иборат барча 2×2 – ўлчовли матрицалар тўплами бўлсин. У ҳолда бу тўпلام матрицаларни қўшиш ва матрицаларни кўпайтириш амалларига нисбатан гуруҳ ташкил қилади.

Шунга ўхшаш агар $M_2(\mathbf{C})$ элементлари комплекс сонлардан иборат барча 2×2 – ўлчовли матрицалар тўплами бўлса, бу тўпلام матрицаларни қўшиш ва матрицаларни кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ташкил қилади.

Умуман, агар $M_n(\mathbf{C})$ элементлари комплекс сонлардан иборат барча $n \times n$ – ўлчовли матрицалар тўплами бўлса, бу тўплам матрицаларни қўшиш ва матрицаларни кўпайтириш амалларига нисбатан гуруҳ ташкил қилади.

Шунга ўхшаш, дейлик $M_n(\mathbf{R})$ элементлари ҳақиқий сонлардан иборат барча $n \times n$ – ўлчовли матрицалар тўплами бўлсин. У ҳолда бу тўплам матрицаларни қўшиш ва матрицаларни кўпайтириш амалларига нисбатан гуруҳ ташкил қилади.

Тана. Ҳалқа тана деб аталади, агарда:

- а) унда ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли элемент мавжуд бўлса;
- б) қуйидаги тенгламалар

$$ax=b,$$

$$ya=b$$

$a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга.

Агар, бундан ташқари, берилган ҳалқа коммутатив бўлса, у ҳолда у майдон ёки рационал ҳалқа деб аталади.

Худди гуруҳлар ҳолидагидек а) дан б) келиб чиқиши исботланади.

в) Чап бирлик e элементнинг мавжудлиги. Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир $a \neq 0$ учун $xa=a$ тенглама ечимга эга; унинг ечимини e орқали белгилаймиз. Ҳар бир b элемент учун $ax=b$ тенглама ечимга эга; демак,

$$eb=eax=ax=b.$$

Ўнг бирлик элементнинг мавжудлиги ва умуман бирлик элементнинг мавжудлиги ҳам худди шундай исботланади.

в) дан тўғридан – тўғри қуйидаги келиб чиқади.

г) ҳар бир $a \neq 0$ элемент учун a^{-1} чап тескари элементнинг мавжудлиги ва, худди шундай, ўнг тескари элементнинг мавжудлиги; шундай қилиб, умуман олганда тескари элементнинг мавжудлиги кўрсатилди.

Гуруҳдаги каби, яна, тескарисини, яъни в) ва г) дан б) нинг келиб чиқиши исботланади.

Танада нолнинг бўлувчилари мавжуд эмас, чунки $ab=0$, $a \neq 0$ тенгликлардан a^{-1} га кўпайтириш ёрдамида $b=0$ тенглик келиб чиқади. (3) тенгламалар ягона ечимга эга, чунки иккита x , y ечимларнинг мавжудлигидан, масалан, биринчи тенгламанинг, қуйидаги келиб чиқарди

$$ax=ay$$

ва чапдан a^{-1} элементга кўпайтириш ёрдамида қуйидагига эга бўламиз

$$x=y.$$

Равшанки (3) тенгламларнинг ечимлари қуйидагиларга тенг

$$x=a^{-1}b,$$

$$y=ba^{-1}.$$

Коммутатив ҳолатда $a^{-1}b=ba^{-1}$, шунинг учун b/a деб ҳам ёзишади.

Ихтиёрий тананинг нолдан фарқли элементлари кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилишади $\square$ тананинг мультипликатив гуруҳини ташкил қилишади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.

11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGraw-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири халқа учун ўринли?	$*a(b+c)=ab+ac$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$ab=ba$	$bab=ab^2$
2	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири халқа учун ўринли?	$*a+(b+c)=(a+b)+c$	$a+b=a+c$	$a+b=b+2a$	$ba+b=ab^2$
3	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири халқа учун ўринли?	$*a+b=b+a$	$ab=ba$	$a+2b=b+2a$	$ba+b=ab+b$
4	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири халқа учун ўринли?	$* (b+c)a=ba+ca$	$ab=ba$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$bab=ab^2$
5	Қуйидаги шартлардан қайси бири халқа учун ўринли?	* шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $b+a=a$ тенглик ўринли	$ab=ba$	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a$ тенглик ўринли	$bab=ab^2$
6	Қуйидаги шартлардан қайси бири халқа учун ўринли?	* ихтиёрий a элемент учун шундай b элемент мавжудки $b+a=0$ тенглик ўринли бўлади	ихтиёрий a элемент учун шундай b элемент мавжудки	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a$	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $b/a=a$

			$b+a=2b$ тенглик ўринли бўлади	тенглик ўринли	тенглик ўринли
7	Қуйидаги тенгликлардан қайси бири ҳалқа учун ўринли?	$* a(bc)=(ab)c$	$ab=ba$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$bab=ab^2$
8	Қуйидагилардан қайси бири ҳалқа бўлади?	*Ҳақиқий сонлар устида барча 2×2 ўлчовли матрицалар тўплами	Барча n ўринли ўрнига қўйишлар тўплами	Ҳақиқий сонлар устида барча 2×2 ўлчовли битта компонентас и нолга тенг матрицалар тўплами	Ҳақиқий сонлар устида барча 2×2 ўлчовли иккита компонентас и нолга тенг матрицалар тўплами
9	Ҳалқа тана деб аталади, агарда...	*а) унда ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли элемент мавжуд бўлса; б) қуйидаги тенгламалар $ax=b$, $ya=b$, $a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга бўлса.	а) унда ҳеч бўлмаганда битта бирдан фарқли элемент мавжуд бўлса; б) қуйидаги тенгламалар $axb=0$, $ya=b$, $a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга бўлса.	а) унда ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли элемент мавжуд бўлса; б) қуйидаги тенглама $ax=b$, $a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга бўлса.	қуйидаги тенгламалар $ax=b$, $ya=b$, $a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга бўлса.
10	Ҳалқа майдон деб аталади, агарда...	* ҳалқа коммутатив бўлса ва а) унда ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли элемент мавжуд бўлса; б) қуйидаги тенгламалар $ax=b$,	ҳалқа коммутатив бўлса ва а) унда ҳеч бўлмаганда битта бирдан фарқли элемент мавжуд бўлса; б)	а) унда ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли элемент мавжуд бўлса; б) қуйидаги тенглама $ax=b$,	ҳалқа коммутатив бўлса ва қуйидаги тенгламалар $ax=b$, $ya=b$, $a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга

		$ya=b, a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга бўлса.	қуйидаги тенгламалар $axb=0,$ $ya=b, a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга бўлса.	$a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга бўлса.	бўлса.
--	--	--	---	--	--------

12 - мавзу. Баъзи муҳим ҳалқалар.

Режа

1. Алгебралар.
2. Эркин алгебра.
3. Моноидаль алгебра
4. Кўпхадлар ҳалқаси

Эркин алгебра. Моноидаль алгебра.

R ҳалқа бўлсин, F ассоциатив коммутатив бирлик элементли ҳалқа бўлсин. Агар R F -модуль ва $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b), \forall \lambda \in F, \forall a, b \in R$ бўлса, у ҳолда R ҳалқа F устидаги (чизиқли) алгебра деб аталади. Алгебра учун кўпинча F – майдон бўлган ҳолат кўрилади. Демак, R ҳалқа F -устида вектор фазодир. Алгебра чекли ўлчовли деб аталади, агар у чекли ўлчовли вектор фазо бўлса. Ҳар қандай ҳалқани бутун сонлар ҳалқаси устидаги алгебра сифатида қараш мумкин.

F —майдон, $M_n(F)$ – $n \times n$ -ўлчовли матрицалар ҳалқаси, $F(x)$ – кўпхадлар ҳалқаси. $M_n(F)$ — $n < \infty$ - чекли ўлчовли алгебра, $F(x)$ – чексиз ўлчовли алгебра.

Эркин алгебра қуйидагича қурилади. X — бўш бўлмаган тўплам, P —майдон бўлсин. X эркин қурувчили, бирлик элементга эга F эркин алгебра

деб, $X \cup \{1\}$ тўплам орқали қурилган шундай алгебрага айтиладики, бунда X нинг ихтиёрий бирлик элементли A алгебрага ϕ акслантириши учун шундай $\psi: F \rightarrow A$ гомоморфизм мавжудки, бунда ҳар қандай $x \in X$ учун $\phi(x) = \psi(x)$ шарти бажарилади.

Кўпхаднинг умумий таърифи. Элементар хоссалари. Евклид алгоритми. Маълумки кўпхадлар қўшилувчилари бир ёки бир нечта ўзгарувчининг даражалари ва соннинг кўпайтмаларидан иборат бўлган йиғинди шаклидадир. Йиғинди қўшилувчилари кўпхаднинг ҳадлари дейилади. Бир ўзгарувчили кўпхадлар ҳадларида фақат битта ўзгарувчи қатнашади. Бир x ўзгарувчили кўпхадлар тўпламини $F(x)$ каби белгилаш мумкин. Бир x ўзгарувчили кўпхадларни қўшишда x нинг бир хил даражалари мавжуд бўлган ҳадлар мос равишда қўшилади. Аниқроғи уларнинг коэффициентлари, яъни сонлар қўшилади. Бир x ўзгарувчили кўпхадларни кўпайтиришда эса биринчи кўпхаднинг ҳар бир ҳади иккинчи кўпхаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтрилади ва x нинг бир хил даражаларига эга бўлган ҳадлар қўшиб чиқилади. Шу тарзда $F(x)$ тўпламида элементларни қўшиш ва кўпайтириш амалларини киритиш мумкин. Сонни $F(x)$ тўплamidан олинган ихтиёрий кўпхадга кўпайтириш шу сонни берилган кўпхаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириш орқали амалга оширилади. Бунинг натижасида, агар 0 сонини ҳам кўпхад деб олсак, $F(x)$ вектор фазосига айланади. $F(x)$ вектор фазоси юқоридагидек киритилган кўпхадларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан халқа бўлади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.

3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука” 1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қуйидагилардан қайси бири ҳалқа бўлмайди?	*Барча натурал сонлар тўплами	Барча ҳақиқий сонлар тўплами	Барча комплекс сонлар тўплами	Барча икки ўлчовли матрицалар тўплами
2	Қуйидагилардан қайси бири ҳалқа бўлади?	*Барча бутун сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча жуфт сонлар тўплами	Барча тоқ сонлар тўплами
3	Қуйидагилардан қайси бири ҳалқа	*Барча рационал сонлар тўплами	Барча натурал	Барча мусбат сонлар	Барча иррационал

			сонлар тўплами	тўплами	сонлар тўплами
4	Қуйидагилардан қайси бири ҳалқа	*Барча ҳақиқий сонлар тўплами	Барча манфий сонлар тўплами	Барча мусбат сонлар тўплами	Барча иррационал сонлар тўплами
5	Қуйидагилардан қайси бири ҳалқа бўлади?	*Ҳақиқий сонлар устида барча $n \times n$ ўлчовли матрицалар тўплами	Барча n ўринли ўрнига қўйишлар тўплами	Ҳақиқий сонлар устида барча $n \times n$ ўлчовли битта компонентаси нолга тенг матрицалар тўплами	Ҳақиқий сонлар устида барча $n \times n$ ўлчовли иккита компонентас и нолга тенг матрицалар тўплами
6	барча 2×2 – ўлчовли матрицалар тўплами қайси амалларга нисбатан ҳалқа бўлади?	*матрицаларни қўшиш ва кўпайтириш	матрицаларн и қўшиш ва матрицани сонга кўпайтириш	матрицани сонга қўшиш ва матрицани сонга кўпайтириш	матрицаларн и қўшиш ва скаляр кўпайтириш
7	барча $n \times n$ – ўлчовли матрицалар тўплами қайси амалларга нисбатан ҳалқа бўлади?	*Элементларни қўшиш ва кўпайтириш	Элементларн и қўшиш ва элементни сонга кўпайтириш	Элементни сонга қўшиш ва элементни сонга кўпайтириш	Элементларн и қўшиш ва скаляр кўпайтириш

13 - мавзу. Қисм ҳалқалар.

Режа

1. Коммутатив ҳалқа қисмҳалқалари
2. Бирлик элементли минимал қисмҳалқа
3. Бирлик элементсиз ҳалқа
4. Тескариланувчи элементли минимал қисмҳалқалар

Агар берилган ҳалқада кўпайтирув амали учун коммутативлик қонуни бажарилса:

$$\text{II. б) } a \cdot b = b \cdot a,$$

у ҳолда ҳалқа коммутатив ҳалқа деб аталади.

Қўшиш қонунларига шуни қўшимча қилиш мумкинки. Учта I а), б), в) қонунлар биргаликда шуни билдирадики ҳалқа элементлари қўшиш амалига нисбатан абел гуруҳини ташкил қилади. Шундай қилиб Абел группаси учун ўринли бўлган фактларни ҳалқаларга ҳам қўллашимиз мумкин: қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта нол элемент 0 мавжуд:

$$a + 0 = a \text{ барча } a \text{ учун.}$$

Бундан ташқари, ҳар бир a элемент учун қуйидаги хоссага эга бўлган, унга қарама – қарши элемент $-a$ мавжуд

$$(-a) + a = 0.$$

Шундай қилиб $a + x = b$ тенглама фақат ечимга эга бўлибгина қолмай ягона учимга эга; унинг ягона ечими — қуйидаги элемент

$$x = (-a) + b,$$

бу элементни $b - a$ орқали белгилаймиз. $a - b = a + (-b)$ бўлгани учун ҳар қандай айирмани йиғиндига айлантириш мумкин; демак, шу маънода айирмалар учун ҳам йиғиндиларга ўринли бўлган қоидалар ўринли бўлади, масалан

$$(a - b) - c = (a - c) - b.$$

Нихоят, $-(-a) = a$ ва $a - a = 0$.

Умумий ассоциативлик қонуни. Кўпайтириш учун ассоциативлик қонуни асосида мураккаб кўпайтмаларни аниқлаш мумкин

$$\prod_{v=1}^n a_v = a_1 a_2 \dots a_n \quad (*)$$

ва уларнинг асосий хоссасини исботлаш мумкин:

$$\prod_{\mu=1}^m a_{\mu} \cdot \prod_{v=1}^n a_{m+v} = \prod_{v=1}^{n+m} a_v.$$

Аввал (*) тенгликнинг ўринли экалигини кўрсатамиз. Элементлар $a_1, a_2, \dots, a_n$ берилган бўлсин. Математик индукция усули бўйича ($m < n$) қуйидагиларни аниқлаймиз.

$$\prod_{v=1}^1 a_v = a_1,$$

$$\prod_{v=1}^{m+1} a_v = (\prod_{v=1}^m a_v) \cdot a_{m+1}.$$

Агар бундан ташқари, агар кўпайтирув амали коммутатив бўлса бундан кўпроғини исботлаш мумкин: мураккаб кўпайтма қиймати кўпайтирувчиларнинг жойлашиш тартибига боғлиқ эмас. Аниқроғи:

Теорема 1. агар φ — $(1, n)$ натурал сонлар кесмасини ўз-ўзига бирга-бир акслантириш бўлса, у ҳолда

$$\prod_{v=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^n a_v.$$

Исбот. $n=1$ учун тақид равшан. Шунинг учун математик индукция усули бўйича уни $n-1$ учун ҳам тўғри деб фараз қиламиз. Дейлик k сони n сонга акслансин: $\varphi(k)=n$. У ҳолда

$$\prod_{\varphi(v)=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^{k-1} a_{\varphi(v)} a_{\varphi(k)} \prod_{v=1}^{n-k} a_{\varphi(k+v)} = (\prod_{v=1}^{k-1} a_{\varphi(v)} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} a_{\varphi(k+v)}) a_n.$$

Қавс ичига олинган кўпайтувчилар фақат ихтиёрий тартибда олинган $a_1, \dots, a_{n-1}$ элементлардан иборат. Математик индукция фарзига кўра бу ифода $\prod_{v=1}^{n-1} a_v$ га тенг. Шунинг учун

$$\prod_{\varphi(v)=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^{n-1} a_v \cdot a_n = \prod_{v=1}^n a_v.$$

Худди шунга ўхшаш қуйидаги йиғиндиларни аниқлаш мумкин

$$\sum_{v=1}^n a_v = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

ва уларнинг асосий хоссасини исботлаш мумкин:

$$\sum_{\mu=1}^m a_{\mu} + \sum_{v=1}^n a_{m+v} = \sum_{v=1}^{m+n} a_v.$$

I б) шартга кўра ихтиёрий йиғиндида қўшилувчиларни ихтиёрий тартибда алмаштириб қўйиш мумкин, коммутатив ҳалқаларда эса булар кўпайтмалар учун ҳам ўринли.

Умумий дистрибутивлик қонуни. Агар коммутативлик қонуни кўпайтирув учун ўринли бўлса, у ҳолда, албатта, III б) шарт III а) шартдан келиб чиқади.

III а) шартдан индукция бўйича қўйидагини ҳосил қиламиз

$$a(b_1+b_2+\dots+b_n)=ab_1+ab_2+\dots+ab_n,$$

худди шундай, III б) шартдан қўйидагига эгамиз:

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)b=a_1b+a_2b+\dots+a_nb.$$

Бу икки қонун йиғиндиларни қўпайтиришнинг одатий қоидасини беради:

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n) &= \\ &= a_1b_1+\dots+a_1b_m+\dots+a_nb_1+\dots+a_nb_m=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^m a_ib_k.\end{aligned}$$

Дистрибутивлик қонуни айирма учун ҳам бажарилади; масалан,

$$a(b-c)=ab-ac,$$

бунга осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$a(b-c)+ac=a(b-c+c)=ab.$$

Хусусан,

$$a\cdot 0=a(a-a)=a\cdot a-a\cdot a=0,$$

ёки: агар қўпайтирувчилардан бири нолга тенг бўлса қўпайтма нолга тенг.

Аммо бу таъкиднинг тескараси ҳар доим ҳам тўғри бўлавермайди: шундай бўлиши мумкинки

$$a\cdot b=0, a\neq 0, b\neq 0.$$

Бу ҳолда a ва b элементлар нолнинг бўлувчилари деб аталади. Бунда a — нолнинг чап бўлувчиси, b — нолнинг ўнг бўлувчиси деб аталади. (Коммутатив ҳалқаларда бу икки тушунчалар устма – уст тушади.) Нолнинг ўзини ҳам нолнинг бўлувчиси деб ҳисоблаш қулайдир. Шунинг учун a нолнинг чап бўлувчиси деб аталади, агарда $ab=0$ тенгликка қаноатлантирувчи шундай $b\neq 0$ элемент мавжуд бўлса. Агар ҳалқада нолдан бошқа нолнинг бўлувчилари мавжуд бўлмаса, яъни агар $ab=0$ шартдан ёки $a=0$, ёки $b=0$ шарт келиб чиқса, у ҳолда ҳалқа нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган ҳалқа деб аталади. Агар, бундан ташқари, ҳалқа коммутатив бўлса, у ҳолда у бутунлик ҳалқа деб аталади.

Мисоллар. Юқорида келтирилган бутун сонлар ҳалқаси $\mathbf{Z}$, рационал сонлар ҳалқаси $\mathbf{Q}$ ва ҳақиқий сонлар ҳалқаси $\mathbf{R}$ нолнинг бўлувчиларига эга

бўлмаган ҳалқаларга мисол бўла оладилар. $(-1,1)$ интервалда аниқланган барча узлуксиз функциялар ҳалқаси нолнинг бўлувчиларига эга. Чунки, агар

$$f=f(x)=\max(0,x),$$

$$g=g(x)=\max(0,-x),$$

кўринишдаги функцияларни олсак, у ҳолда $f \neq 0$, $g \neq 0$, $fg=0$ тенгликлар ўринли бўлади.

Бирлик элемент. Агар ҳалқа чап бирлик e элементга эга бўлса:

$$ex=x \text{ барча } x \text{ элементлар учун,}$$

ва бир вақтнинг ўзида — ўнг бирлик $\hat{e}$ элементга эга бўлса:

$$\hat{e}x=x \text{ барча } x \text{ элементлар учун,}$$

у ҳолда бу иккала элементлар ўзаро тенг бўлишлари керак. Чунки

$$e=e\hat{e}=\hat{e}.$$

Шунга ўхшаш ҳар қандай ўнг бирлик элемент ва чап бирлик элемент e га тенг бўлади. Бундай ҳолатда e элементни оддийгина қилиб бирлик элемент ёки бир деб аталади ва берилган ҳалқа бирлик элементли ҳалқа ёки бирлик ҳалқа деб аталади. Кўпинча, агар бу 1 сони билан чалкашликка олиб келмаса бирлик элемент 1 орқали белгиланади.

Бутун сонлар $\mathbf{Z}$ бирлик элементли ҳалқа ташкил қилишади, жуфт сонлар эса — бирлик элементсиз ҳалқа ташкил қилишади. Бир нечта ўнг бирлик элементли ва ҳеч қандай чап бирлик элементсиз ҳалқалар ҳам мавжуд.

Тескари элемент. Агар a — бирлик ҳалқанинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда a элементнинг чап тескарисини деб қуйидаги ҳоссага эга бўлган $a_{(l)}^{-1}$ элемент тушунилади:

$$a_{(l)}^{-1}a=e,$$

ўнг тескарисини деб қуйидаги ҳоссага эга бўлган $a_{(r)}^{-1}$ элемент тушунилади:

$$aa_{(r)}^{-1}=e.$$

Агар a элемент чап тескари ва ўнг тескари элементларга эга бўлса, у ҳолда бу тескари элементлар устма – уст тушади, чунки

$$a_{(l)}^{-1} = a_{(l)}^{-1} (aa_{(r)}^{-1}) = (a_{(l)}^{-1}a) a_{(r)}^{-1} = a_{(r)}^{-1},$$

ва, демак, а элементнинг ҳар бир ўнг тескараси, а элементнинг ҳар бир чап тескараси каби юқорида кўрсатилган элементга тенг. Бундай ҳолда “а элемент тескари элементга эга” дейилади, тескари элементнинг ўзи эса a^{-1} орқали белгиланади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука” 1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун коммутативлик қонуни бўлади?	$*ab=ba$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$a(bc)=(ab)c$
2	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун ассоциативлик қонуни бўлади?	$*a(bc)=(ab)c$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$ab=ba$
3	Қуйидаги шартлардан қайси бири халқа учун ўринли?	*қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта нол элемент 0 мавжуд: $a+0=a$ барча a учун	қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта тескари элемент b мавжуд: $a \cdot b = 1$ барча a учун	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a$ тенглик ўринли	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $aba=a$ тенглик ўринли
4	Қуйидаги хоссалардан қайси бирлари ихтиёрий E халқа учун ўринли эмас 1. $\forall(a,b \in E) \ a+b=b+a$; 2. $\forall(a,b \in E) \ a+(b+c)=(a+b)+c$; 3. $(\forall a \in E) (\exists a^{-1} \in E) \ a \cdot a^{-1}=1$ 4. $\forall(a,b,c \in E) \ a \cdot (b+c)=ab+ac$ 5. $\forall(a,b \in E) \ a+x=b$ учун $a+x=b$ ечимга эга 6. $\forall(a,b,c \in E) \ a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$	*3	1,2	4	5,6
5	Қуйидаги халқа аксиомаларидан қайси бири нотугри 1. $\forall a,b,c \in E$ $a+(b+c)=(a+b)+c$,	*6)	2),3)	1),5)	1),5)

	2. $\forall a, b \in E \quad a+b=b+a,$ 3. $\exists 0 \in E \quad \forall a \in E \quad a+0=a,$ 4. $\forall a, b, c \in E \quad a(b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$, 5. $\forall a, b, c \in E \quad a(b+c)=ab+ac,$ $(b+c)a=ba+ca$ 6. $\forall a \in E \quad \exists a^{-1} \in E \quad a \cdot a^{-1}=1,$				
6	Куйида берилган тўпламлардан қайси бири ҳалқа ташкил қилади, лекин майдон эмас:	$^* \quad Z(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}\};$	$Q;$	$R;$	$C.$

14 - мавзу. Идеал ва фактор ҳалқалар.

Режа

1. Модуль-ҳалқа.
2. Қисм-модуль.
3. Модулларнинг гомоморфизмлари.
4. Қисм-ҳалқа.
5. Чап ва ўнг идеал.

Чап ва ўнг идеал. Агар M ҳалқанинг I қисмҳалқаси $MI \subseteq I$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда I ўнг идеал деб аталади. Агарда M ҳалқанинг I қисмҳалқаси $IM \subseteq I$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда I чап идеал деб аталади. Агарда M ҳалқанинг I қисмҳалқаси $MI \subseteq I$ ва $IM \subseteq I$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда I ҳалқа икки томонлама идеали деб аталади.

Бош идеал. Бош идеаллар ҳалқаси. Агар K ҳалқада $a \neq 0, b \neq 0$ учун $ab=0$ бўлса, a —нолнинг чап бўлувчиси, b — ўнг бўлувчиси дейилади. Агарда K ҳалқанинг 0 дан бошқа) нинг бўлувчилари бўлмаса, у ҳолда K нольнинг бўлувчиларига эга бўлмаган ҳалқа дейилади. $1 \neq 0$ бўлган ва нольнинг бўлувчиларига эга бўлмаган K ҳалқа “бутунлик ҳалқа” дейилади. Агар K

бутунлик ҳалқада ҳамма идеаллари бош идеаллар бўлса, яъни идеаллар xK кўринишга эга бўлса, у ҳолда K бош идеаллар ҳалқаси деб аталади.

Идеаллар устида амаллар. Фактор ҳалқалар. Гильбертнинг базис ҳақидаги теоремаси. M ҳалқанинг қўшув амалига нисбатан ўзининг бирон бир нормал қисмгруппаси L бўйича фактор группаси M/L учун, агар $a+L \in M/L$ бўлса ва қўшиш амали қуйидагича бажарилса $(a+L) \oplus (b+L) = (a+b)+L$, $-(a+L) = -a+L$, у ҳолда M/L фактор ҳалқа бўлади. Бунда $a+L$ синфлар учун кўпайтирув амали қуйидагича бажарилади $(a+L) \bullet (b+L) = ab+L$.

Модуль. Қисм-модуль. K —ассоциатив ҳалқа бўлсин, V —ассоциатив абел группаси бўлсин. У ҳолда агар $K \times V$ ни V га акслантирувчи $(x,v) \rightarrow xv$ акслантириш қуйидаги шартларга қаноатлантирса

$$(M1) \ x(u+v) = xu + xv,$$

$$(M2) \ (x+y)v = xv + yv,$$

$$(M3) \ (x+y)v = xv + yv,$$

$$(M4) \ 1v = v,$$

у ҳолда V чап K -модул (K ҳалқа устида чап модул) деб аталади. Ўнг K -модул ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

V — K -модул бўлсин. $U \subseteq V$ қисмгруппа (қўшув амалига нисбатан) V нинг қисммодули дейилади, агарда $\forall x \in K, u \in U$ учун $xu \in U$ бўлса.

Агар бир K -модулни иккинчи K -модулга σ акслантиришда элементлар йиғиндиси образи шу элементлар образлари йиғиндисига тенг бўлса ва $\sigma(xu) = x\sigma(u)$, $u \in U$, $x \in K$ бўлса ушбу σ акслантириш K -модулар гомоморфизми дейилади.

Модуларнинг гомоморфизмлари. Модулар устида амаллар.

V — K -модул бўлсин. $U \subseteq V$ қисммодул бўлсин. У ҳолда $V/U = \{v+U \mid v \in V\}$ фактормодул дейилади. Бу аддитив абел группанинг фактор группасидир. Кўпайтирув қуйидагича аниқланади $x(v+U) = xv+U$. Группалар учун

исботланган гомоморфизмлар ҳақидаги асосий теорема модуллар учун озгина ўзгариш билан ўринлидир.

Берилган модул қисммодуллари кесишмаси қисммодул бўлади. Модулнинг бирон-бир қисмтўпламини ўз ичига олувчи барча қисммодуллар кесишмаси яна қисммодул бўлади. Агар модул бир элемент бўйича қурилган бўлса, у ҳолда ушбу модул циклик модул деб аталади. Агар модул чекли микдордаги циклик модуллар йиғиндиси бўлса бу модул чекли типдаги модул деб аталади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука” 1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.

15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун коммутативлик қонуни бўлади?	$*ab=ba$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$a(bc)=(ab)c$
2	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун ассоциативлик қонуни бўлади?	$*a(bc)=(ab)c$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$ab=ba$
3	Қуйидаги шартлардан қайси бири халқа учун ўринли?	$*қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта нол элемент 0 мавжуд: a+0=a барча a учун$	қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта тескари элемент b мавжуд: $a \cdot b = 1$ барча a учун	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a$ тенглик ўринли	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $aba=a$ тенглик ўринли
4	Қуйидаги хоссалардан қайси бирлари ихтиёрий E халқа учун ўринли эмас 1. $\forall(a,b \in E) \ a+b=b+a$; 2. $\forall(a,b \in E) \ a+(b+c)=(a+b)+c$; 3. $(\forall a \in E) (\exists a^{-1} \in E) \ a \cdot a^{-1}=1$ 4. $\forall(a,b,c \in E) \ a \cdot (b+c)=ab+ac$ 5. $\forall(a,b \in E) \ a+x=b$ учун x ечимга эга 6. $\forall(a,b,c \in E) \ a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$	$*3$	1,2	4	5,6

5	Қуйидаги ҳалқа аксиомаларидан қайси бири нотўғри 1. $\forall a, b, c \in E$ $a + (b + c) = (a + b) + c$, 2. $\forall a, b \in E$ $a + b = b + a$, 3. $\exists o \in E \quad \forall a \in E \quad a + o = a$, 4. $\forall a, b, c \in E \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, 5. $\forall a, b, c \in E \quad a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ 6. $\forall a \in E \quad \exists a^{-1} \in E \quad a \cdot a^{-1} = 1$,	*6)	2),3)	1),5)	1),5)
6	Қуйида берилган тўпламлардан қайси бири ҳалқа ташкил қилади, лекин майдон эмас:	* $Z(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}\}$;	Q ;	R ;	C .

15 - мавзу. Ҳалқаларнинг гомоморфизмлари.

Режа

1. Ҳалқалар гомоморфизмлари.
2. Чекли ва чексиз ҳалқалар.
3. Ҳалқалар изморфизмлари.
4. Ҳалқа гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема.

Ҳалқалар гомоморфизмлари. Иккита ҳалқа берилган бўлсин. Агар улар орасидаги акслантиришда элементлар йиғиндиси образи шу элементлар образлари йиғиндисига тенг бўлса ва элементлар кўпайтмаси образи шу элементлар образлари кўпайтмасига тенг бўлса, у ҳолда ушбу акслантириш берилган ҳалқалар гомоморфизми дейилади. Гомоморфизмда биринчи

ҳалқанинг 0 га аксланадиган барча элементлари тўплами шу гомоморфизм ядроси дейилади. Гомоморфизмдаги биринчи ҳалқанинг барча элементлари образлари тўплами биринчи ҳалқа образи деб аталади. Агар гомоморфизм ядроси 0 га тенг бўлса, у ҳолда ушбу гомоморфизм мономорфизм деб аталади. Агар биринчи ҳалқа образи иккинчи ҳалқа билан устма – уст тушса, у ҳолда берилган гомоморфизм эпиморфизм деб аталади. Агар бир вақтнинг ўзида гомоморфизм ҳам мономорфизм ҳам эпиморфизм бўлса, у ҳолда ушбу гомоморфизм *изоморфизм* деб аталади.

Чекли ва чексиз ҳалқалар. Ҳалқа гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема. M ҳалқанинг ҳар қандай икки томонлама идеали $a+L \in M/L$ учун қўшиш амали қуйидагича $(a+L) \oplus (b+L) = (a+b)+L$, $-(a+L) = -a+L$, кўпайтирув амали қуйидагича $(a+L) \bullet (b+L) = ab+L$ киритилса, берилган фактор тўпلام M/L ҳалқа бўлади. Бунда M/L тўпلام M ҳалқанинг L ядроли гомоморфик образи бўлади.

Тескариси, берилган ихтиёрий гомоморфизм учун биринчи ҳалқа образи биринчи ҳалқанинг гомоморфизм ядроси бўйича фактор ҳалқага изоморфдир.

Даражалар ва карралилар. Ассоциативлик қонуни асосида ҳар бир a элемент учун ҳалқада a^n даражаларни киритиш мумкин (n — натурал сон) ва қуйидаги оддий қоидаларни ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \\ (a^n)^m &= a^{nm}, \\ (ab)^n &= a^n b^n; \end{aligned} \tag{1}$$

Бунда охирги тенглик фақат коммутатив ҳалқалар учун ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам, 1 теоремадан (1) даги тенгликлардан биринчиси келиб чиқади. (1) тенгликлардан иккинчисини ҳам математик индукция усули ёрдамида исботлаш мумкин.

Агар ҳалқа бирлик элементга эга бўлса, a элемент эса тескари элементга эга бўлса, у ҳолда нол ва манфий даражаларни киритиш мумкин; бунда (1) тенгликлар ўринлилигича қолади.

(1) Тенгликлардан иккинчиси қўшиш амали учун қуйидаги кўринишга эга

$$n \cdot ma = nm \cdot a,$$

биринчи тенглик дистрибутивлик қонунига айланади

$$ma + na = (m+n)a.$$

Бу икки қонунга яна бир дистрибутивлик қонуни қўшилади

$$m(a+b) = ma + mb.$$

Бу тенглик (1) нинг учинчи тенглигининг қўшиш амали учун кўринишидир.

Бу тенгликни ҳам математик индукция усули ёрдамида исботлаш мумкин.

Охирги тенгликлар қаторида қуйидаги тенглик ҳам ўринли

$$n \cdot ab = na \cdot b = a \cdot nb.$$

Даражалар ҳолидаги каби қуйидаги белгилашни қабул қиламиз

$$(-n) \cdot a = -na;$$

у ҳолда, ҳосил қилинган

$$n \cdot ma = nm \cdot a$$

$$ma + na = (m+n)a$$

$$m(a+b) = ma + mb$$

$$n \cdot ab = a \cdot nb$$

тенгликлар барча бутун (мусбат, манфий ва нолга тенг бўлган) сонлар учун бажарилади. Шу билан бирга $n \cdot a$ ифодага ҳалқанинг иккита элементининг кўпайтмаси сифатида қарамаслик керак. Чунки умумий ҳолда n сони ҳалқанинг элементи бўлмайди, балки қандайдир ташқи нарса $\square$ бутун сон бўлади. Аммо, агар ҳалқа e бирлик элементга эга бўлса, у ҳолда na ифодани элементлар кўпайтмаси сифатида олиш мумкин:

$$na = n \cdot ea = ne \cdot a.$$

Тана. Ҳалқа тана деб аталади, агарда:

а) унда ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли элемент мавжуд бўлса;

б) қуйидаги тенгламалар

$$ax=b,$$

$$ya=b$$

$a \neq 0$ да берилган ҳалқада ечимга эга.

Агар, бундан ташқари, берилган ҳалқа коммутатив бўлса, у ҳолда у майдон ёки рационал ҳалқа деб аталади.

Худди гуруҳлар ҳолидагидек а) дан б) келиб чиқиши исботланади.

в) Чап бирлик e элементнинг мавжудлиги. Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир $a \neq 0$ учун $xa=a$ тенглама ечимга эга; унинг ечимини e орқали белгилаймиз. Ҳар бир b элемент учун $ax=b$ тенглама ечимга эга; демак,

$$eb=eax=ax=b.$$

Ўнг бирлик элементнинг мавжудлиги ва умуман бирлик элементнинг мавжудлиги ҳам худди шундай исботланади.

в) дан тўғридан – тўғри қуйидаги келиб чиқади.

г) ҳар бир $a \neq 0$ элемент учун a^{-1} чап тескари элементнинг мавжудлиги ва, худди шундай, ўнг тескари элементнинг мавжудлиги; шундай қилиб, умуман олганда тескари элементнинг мавжудлиги кўрсатилди.

Гуруҳдаги каби, яна, тескарисини, яъни в) ва г) дан б) нинг келиб чиқиши исботланади.

Танада нолнинг бўлувчилари мавжуд эмас, чунки $ab=0$, $a \neq 0$ тенгликлардан a^{-1} га кўпайтириш ёрдамида $b=0$ тенглик келиб чиқади.

(3) тенгламалар ягона ечимга эга, чунки иккита x , y ечимларнинг мавжудлигидан, масалан, биринчи тенгламанинг, қуйидаги келиб чиқарди

$$ax=ay$$

ва чапдан a^{-1} элементга кўпайтириш ёрдамида қуйидагига эга бўламиз

$$x=y.$$

Равшанки (3) тенгламаларнинг ечимлари қуйидагиларга тенг

$$x=a^{-1}b,$$

$$y=ba^{-1}.$$

Коммутатив ҳолатда $a^{-1}b=ba^{-1}$, шунинг учун b/a деб ҳам ёзилади.

Ихтиёрий тананинг нолдан фарқли элементлари кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ ташкил қилишади $\mathfrak{J}$ тананинг мультипликатив гуруҳини ташкил қилишади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGraw-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.

15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун коммутативлик қонуни бўлади?	$*ab=ba$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$a(bc)=(ab)c$
2	Қайси тенглик кўпайтирув амали учун ассоциативлик қонуни бўлади?	$*a(bc)=(ab)c$	$bab=ab^2$	$a^2(ba)=a^2(bc)$	$ab=ba$
3	Қуйидаги шартлардан қайси бири халқа учун ўринли?	$*қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта нол элемент 0 мавжуд: a+0=a барча a учун$	қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта тескари элемент b мавжуд: $a \cdot b = 1$ барча a учун	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a$ тенглик ўринли	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $aba=a$ тенглик ўринли
4	Қуйидаги хоссалардан қайси бирлари ихтиёрий E халқа учун ўринли эмас 1. $\forall(a,b \in E) \ a+b=b+a$; 2. $\forall(a,b \in E) \ a+(b+c)=(a+b)+c$; 3. $(\forall a \in E) (\exists a^{-1} \in E) \ a \cdot a^{-1}=1$ 4. $\forall(a,b,c \in E) \ a \cdot (b+c)=ab+ac$ 5. $\forall(a,b \in E) \ a+x=b$ ечимга эга 6. $\forall(a,b,c \in E) \ a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$	$*3$	1,2	4	5,6

5	Куйидаги халқа аксиомаларидан қайси бири нотугри 1. $\forall a, b, c \in E$ $a + (b + c) = (a + b) + c$, 2. $\forall a, b \in E \quad a + b = b + a$, 3. $\exists o \in E \quad \forall a \in E \quad a + o = a$, 4. $\forall a, b, c \in E \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, 5. $\forall a, b, c \in E \quad a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ 6. $\forall a \in E \quad \exists a^{-1} \in E \quad a \cdot a^{-1} = 1$,	*6)	2),3)	1),5)	1),5)
6	Қуйида берилган тўпламлардан қайси бири ҳалқа ташкил қилади, лекин майдон эмас:	* $Z(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}\}$;	Q ;	R ;	C .

16 - мавзу. Кўпхадлар вектор фазоси ва у устида алгебраик амаллар.

Режа

1. Кўпхадлар устида амаллар
2. Кўпхадларни қолдиқли бўлиш
3. Горнер схемаси
4. Безу теоремаси.

Бизга коммутатив бирлик ҳалқа берилган бўлсин.

Таъриф 1. $\forall a_i \in K, i \in N_0 \equiv \{0\} \cup N$ бўлганда

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

ёки

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

ифодага K ҳалқа устида берилган кўпхад дейилади. Бу ерда x элемент қандайдир белги (символ) деб қаралади ва одатда номаълум ифода деб ҳам юритилади ва x^i ҳар бир ясовчили $\langle x \rangle = \{x^i \mid i \in N_0\}$ коммутатив моноиддан олинган деб қаралади ва $x^0 = 1, 1 \cdot x^i = x^i$ деб олинади. (1) ифодадаги $a_i \in K$ ларга кўпхаднинг коэффицентлари, $a_i x^i$ ларга эса кўпхаднинг ҳадлари дейилади. Бу ҳадлар ўртасидаги "+" қўшиш амали шартли символ сифатида қаралади. Бундан ташқари $a_i x^i = x^i a_i$ деб ҳисоблаймиз. Агра $a_n \neq 0$ бўлса, a_n га бош коэффицент, $a_n x^n$ эса бош ҳад ва кўпхаднинг a_0 ҳадига озод ҳад дейилади. Кўпхаднинг даражаси $\deg f(x)$ шаклида ёзилади ва $a_n \neq 0$ да $\deg f(x) = n$ бўлади. Барча коэффицентлари нолга тенг кўпхад нолга тенг бўлган кўпхад дейилади.

Таърифга асосан камида битта коэффиценти нолдан фарқли кўпхад нолмас кўпхад деб аталади. Шунга асосан, биз $0 \cdot x^i = 0$ деб қабул қиламиз. Бундан фойдаланиб, биз ҳар қандай кўпхадни бир хил даражали кўпхад деб ҳисоблашимиз мумкин, яъни агар

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m$$

кўпхад бўлиб, $m < n$ бўлса, у ҳолда $g(x)$ кўпхадга $0 \cdot x^{m+1} + \dots + 0 \cdot x^n$ ҳадлар қўшиб, бир хил даражали кўпхад деб ҳисоблашимиз мумкин.

Таъриф 2. Бир хил даражали олдидаги коэффицентлар тенг бўлган кўпхадлар ўзаро тенг кўпхадлар дейилади, яъни

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

K ҳалқада берилган ҳамма кўпхадлар тўпламини $K[x]$ кўринишда белгилаб оламиз. Кўп ҳолларда биз қулайлик учун $f(x)$ ни f билан белгилаб оламиз.

Кўп ҳолларда математикада биз юқорида баён этган кўпхадларнинг алгебраик тушунчаси ўрнига функционал тушунчаси ишлатилади, яъни агар

$$x = \alpha \in K \text{ бўлса,}$$

$$f(x) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n \in K$$

бўлиб, $f(\alpha)$ га $f(x)$ кўпхаднинг $x = \alpha$ даги қиймати дейилади.

Шуни таъкидлаймизки, агар $f(x) = g(x)$ бўлса, кўпхадларни алгебраик маънодаги тенглиги таърифидан $f(\alpha) = g(\alpha)$ тасдиқдан, $f(x) = g(x)$ тенглик ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $K = Z_2$ ҳалқада (майдонда) $f(x) = x^2$ ва $g(x) = x$ кўпхадлар тенг эмас, лекин

$$f(\bar{0}) = \bar{0} = g(\bar{0}) \text{ ва } f(\bar{1}) = \bar{1} = g(\bar{1})$$

функционал маънода булар тенг.

Энди биз $K[x]$ тўпдамда қўшиш амалини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\forall f(x), g(x) \in K[x].$$

Кўпхадларни $f(x) + g(x)$ йиғиндиси деб, уларнинг мос даражалари олдидаги коэффициентларни қўшишдан ҳосил бўлган кўпхадга айтилади, яъни

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^i \quad (2)$$

Бу ерда $c_i = a_i + b_i$ бўлиб, $a_i, b_i \in K$ дан $c_i \in K$ бўлади. Демак

$$f(x) + g(x) \in K[x].$$

Шундай аниқланган кўшиш амалига нисбатан $(K[x], +)$ абел группаси бўлади. Бу абел группасида 0 кўпхад нейтрал элемент ва $f(x)$ кўпхадга

$$-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n$$

карама-қарши кўпхад бўлади, чунки $a_i \in K$ дан $-a_i \in K$ ҳам бўлади ва демак $-f(x) \in K[x]$.

$K[x]$ тўпланда кўпайтириш амалини қуйидагича киритамиз:

$\forall f(x), g(x) \in K[x]$ кўпайтмаси деб коэффициентлари

$$d_j = \sum_{k+l=j}^{n+m} a_k b_l \in K$$

тенглик билан аниқланган

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n+m} d_j x^j$$

кўпхад тушунилиб, бу ерда

$$d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \dots$$

лардан иборатдир. Шунини таъкидлаймизки, агар биз K ҳалқани бутун ҳалқа деб олсак, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ дан $a_n \cdot b_m = d_{n+m} \neq 0$ бўлади ва $\varphi(x)$ кўпхад $\deg \varphi(x) = n + m$ даражали кўпхад бўлади. Кўпайтириш амали коммутатив, чунки

$$\sum_{k+l=0}^{n+m} a_k b_l = \sum_{l+k=0}^{n+m} b_l a_k$$

Бўлганлигида $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$ бўлади. Кўпхадларни кўпайтириш ассоциативдир, яъни

$$f(x)(g(x) \cdot \varphi(x)) = (f(x) \cdot g(x))\varphi(x)$$

тенглик ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_px^p = \sum_{s=0}^p c_s x^s$$

деб олсак, у ҳолда $(f(x) \cdot g(x))\varphi(x)$ кўпхаднинг x^i ($i=0, 1, \dots, n+m+s$) олдидаги коэффициентни

$$\sum_{j+s=i=0}^{n+m+p} \left(\sum_{k+l=j=0}^{n+m} a_k b_l \right) c_s = \sum_{k+l+s=i=0}^{n+m+p} a_k b_l c_s$$

бўлиб, $f(x)(g(x) \cdot \varphi(x))$ кўпхаддаги x^i ($i=0, 1, \dots, n+m+p$) нинг коэффициенти эса

$$\sum_{k+j=i=0}^{n+m+p} a_k \left(\sum_{l+s=j=0}^{p+m} b_l c_s \right) = \sum_{k+l+s=i=0}^{n+m+p} a_k b_l c_s$$

бўлади. Бу икки йиғиндининг тенглиги асосида кўпхадларнинг кўпайтмасини ассоциативлиги келиб чиқади. $K[x]$ тўпламда шундай аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари учун дистрибутивлик

$$f(x)(g(x) + \varphi(x)) = f(x)g(x) + f(x)\varphi(x)$$

қонун ҳам ўринли бўлади. Бу қонунни ўринлилиги

$$\sum_{k+l=0}^{n+m} (a_k + b_k) c_l = \sum_{k+l=0}^{n+m} a_k c_l + \sum_{k+l=0}^{n+m} b_k c_l$$

тенгликнинг ўринлилигидан келиб чиқади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.

5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasolov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

Кўпхадлар халқасида шундай энг кичик даражали кўпхад топингки у учун i сони икки каррали илдиз бўлиб, $-1-i$ сони содда илдиз бўлсин.	$x^3 + (1-i)x^2 + (1-2i)x - 1$	$x^3 - 3(1+2i)x^2 + 3(3+4i)x + 11$	$x^3 - (1+2i)x^2 + (1-i)x - 1$	$x^3 - (1-i)x^2 - 1$
$f(x) = (7-3x-3x^5)^{100}(5-x^2-5^{1000})$ кўпхаднинг коэффициентлари йиғиндисини топинг	1000	100	10	1
$x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ кўпхаднинг рационал илдизларини топинг.	2	7	1	14

Нотўғри рационал касрни кўрсатинг	$\frac{x^3 - 3x + 5}{(x+1)^4}$	$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)^3}$	$\frac{x^3 - 3x + 5}{(x+1)^3}$	$\frac{3x + 5}{x^2 + 1}$
Хақиқий сонлар майдонида қуйидаги рационал касрлардан қайсиниси содда каср?	$\frac{x^2 - 2x}{(x+1)^3}$	$\frac{5}{(x+1)^3}$	$\frac{3x^2 + 5}{x^2 + 1}$	$\frac{x - 5}{(x+1)^4}$
Хақиқий сонлар майдонида қуйидаги рационал касрлардан қайсиниси примар каср?	$\frac{x^2 - 2x}{(x+1)^3}$	$\frac{x^3 - 2}{(x+3)^3}$	$\frac{3x^2 + 5}{x^2 + 1}$	$\frac{x^5 - 3x^2 + 5}{(x+1)^4}$
$\frac{1}{x^2 - 1}$ рационал касрни содда касрларга ёйинг	$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$	$\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)}$	$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)}$	$\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)}$

17 - мавзу. Кўпхадлар вектор фазосининг

у устидаги алгебраик амалларга нисбатан халқа бўлиши.

Режа

1. Кўпхадлар устида амаллар
2. Кўпхадларни қолдиқли бўлиш
3. Горнер схемаси
4. Безу теоремаси.

Шундай қилиб, $K[x]$ тўплам ўнгдан киритилган қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан коммутатив халқа ташкил этади. Бу халқа бирлик халқа ҳам ташкил этади, чунки $x^0 = 1$ кўпхад кўпайтириш амалига нисбатан нейтрал (бирлик)вазифасини ўтайди. Бундан ташқари, агар K бутун соҳали халқа бўлса, у ҳолда $K[x]$ ҳам бутун соҳали халқа бўлади, чунки $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ дан $f(x) \cdot g(x)$ кўпайтманинг бош коэффициенти $a_n b_m \neq 0$

бўлади. Шунга қарамасдан, $K[x]$ коммутатив бирлик ҳалқамиз майдон ташкил этмайди, чунки $f(x)$ учун

$$f(x) \cdot g(x) = 1$$

тенгликни қаноатлантирувчи $g(x) \in K[x]$ кўпхад умуман айтганда мавжуд эмас. Масалан, $f(x) = x$ бўлган $x \cdot g(x)$ кўпхад нолмас $m+1$ даражали кўпхад бўлиб, у 1 га тенг бўлмайди. Шунга таъкидлаймизки, $g(x) = x^{-1}$ шаклдаги ифода таърифга асосан кўпхад бўлмайди. Агар $f(x) = a_0 \in K$ озод ҳадли кўпхаддан иборат бўлиб, унга тескари кўпхад мавжуд бўлиши мумкин, агарда a_0 элемент K да тескариланувчи бўлса.

Агар $K = P$ майдон бўлса, (шунга қарамасдан, $P[x]$ майдон бўлмайди) $P[x]$ ҳалқага P майдон устида берилган кўпхадлар ҳалқаси дейилади. Шунга асосан, агар $K = Z$ бўлса, $Z[x]$ бутун кўпхадлар $K = Q$ рационал бўлса, $Q[x]$ рационал, $K = R$ ҳақиқий бўлса, $R[x]$ ҳақиқий ва агар $K = C$ комплекс бўлса, $C[x]$ комплекс коэффициентли кўпхадлар ҳалқаси дейилади. Худди шундай чекли Z_m ҳалқа ва Z_p майдонларда $Z_m[x]$ ва $Z_p[x]$ ҳалқалар ҳақида ҳам сўз юритишимиз мумкин.

Ҳар қандай кўпхадлар ҳалқасини берилган ҳалқанинг кенгайтмаси ёки ўз ичига олади деб қарашимиз, яъни $K \subset K[x]$ ҳисоблашимиз мумкин, чунки $\forall a_0 \in K$ элемент $K[x]$ ҳалқада нолинчи даражали кўпхад вазифасини бажаради.

Биз шунга таъкидлаймизки, алгебра ва математиканинг бошқа тармоқларида $x_1, x_2, \dots, x_n$ символли (номаълумли) кўпхадлар ҳам кўрилади ва ўрганилади. Бу кўпхадларнинг умумий кўриниши

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

кўринишда бўлиб, унинг $\deg f(x_1, \dots, x_n) = k_1 + \dots + k_n$ дан иборат бўлади ва $x_1, x_2, \dots, x_n$ символлар $x_1, x_2, \dots, x_n$ ясовчили $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ коммутатив моноиддан олинган. Бундан кўпхадлар тўплами $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ шаклда белгиланади ва тўплам кўпхадларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этади. Хусусан, $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n \in K$ ларда $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ кўпхадли функциялар ҳақида сўз юритиш мумкин ва табиийки, $n=1$ да биз бир номаълумли ҳалқани ҳосил қиламиз. Бу кўпхадларнинг хусусий ҳоллари билан биз танишмиз. Масалан, чизиқли тенгламалар системасидаги ҳар бир тенгламанинг чап томони

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

n номаълумли кўпхаддир.

Мисол. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ ва $g(x) = x^2 - 3x + 1$ кўпхадларни кўпайтмасини қараймиз. Қулайлик учун кўпайтмани қуйидагича оламиз:

$$\begin{aligned} g(x) \cdot f(x) &= (x^2 - 3x + 1)(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1) = \\ &= 2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - x^2 - 6x^4 + 15x^2 - 9x + 3x + \\ &+ 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 2x^5 - 11x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 3x - 1. \end{aligned}$$

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.

5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasolov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGraw-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

$f(x) = x^3 - 8$ кўпхадни ҳақиқий сонлар майдонида келтирилмас кўпхадлар кўпайтмасига ёйинг?	$f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 4)$	$f(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$	$f(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 4)$	$f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 4)$
$R[x]$ кўпхадлар халқасида $f(x) = 5x^4 - x^2 + 6$ кўпхадни $g(x) = x^2 + 3x + 2$ кўпхадга бўлганда ҳосил бўладиган бўлинма $q(x)$ ва қолдиқ $r(x)$ топилсин	$q(x) = 5x^2 - 15x + 34, r(x) = 72x - 62$	$q(x) = 5x^2 - 15x + 34, r(x) = -72x - 62$	$q(x) = 5x^2 + 15x + 34, r(x) = -72x - 62$	$q(x) = 5x^2 - 15x + 34, r(x) = 72x + 62$
2 сони $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ кўпхаднинг неча қаррали илдизи бўлади?	3	2	1	4
2i сони икки қаррали илдизи	$x^2 - 4ix - 4$	$x^2 + 4ix - 4$	$x^2 - 4ix + 4$	$x^2 + 4ix + 4$

бўлган энг кичик даражали кўпхадни ёзинг				
$f(x) = x^2 - 2$ кўпхад учун қуйидаги тасдиқлардан қайсиниси тўғри?	бу кўпхад хақиқий сонлар майдонида келтирилмас	бу кўпхад хақиқий сонлар майдонида келтирилув чи аммо рационал сонлар майдонида келтирилмас дир	бу кўпхад хақиқий сонлар майдонида илдизга эга эмас	бу кўп=ад рационал сонлар майдонида иккита илдизга эга
$f(x) = x^2 + 4$ кўпхад учун қуйидаги тасдиқлардан қайсиниси тўғри?	бу кўпхад комплекс сонлар майдонида келтирилмас	бу кўпхад хақиқий сонлар майдонида илдизларга эга	бу кўпхад хақиқий сонлар майдонида келтирил- мас аммо комплекс сонлар майдонида келтирилувч идир	бу кўпхад рационал илдизларга эга
Нотўғри тасдиқни кўрсатинг	Агар $f(x)$ кўпхад $g(x)$ $= (x-c)^2$ кўпхадга бўлинмаса, у холда $h(x)$ $= x-c$ кўпхадга ҳам бўлинмайди (c – ўзгармас сон)	Агар $f(x)$ кўпхад $h(x)$ $= x-c$ кўпхадга бўлинмаса у холда $g(x) =$ $(x-c)^2$ кўпхадга ҳам бўлинмайди	Ихтиёрий майдон устида чексиз кўп келтирилмас кўпхадлар мавжуддир	Агар $\varphi(x) \in K[x]$ келтирилмас кўпхад бўлса у холда ихтиёрий $f(x) \in K[x]$ кўпхад ёки $\varphi(x)$ га бўлинади, ёки у билан ўзаро туб бўлади

Кўпхадлар халқасида шундай энг кичик даражали кўпхад топингки у учун i сони икки каррали илдиз бўлиб, $-1-i$ сони содда илдиз бўлсин.	$x^3 + (1-i)x^2 + (1-2i)x - 1$	$x^3 - 3(1+2i)x^2 - 3(3+4i)x + 11$	$x^3 - (1+2i)x^2$	$x^3 - (1-i)x^2$
$f(x) = (7 - 3x - 3x^5)^{100}(5 - x^2 - 5x)$ кўпхаднинг коэффициентлари йиғиндисини топинг	1000	100	10	1
$x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ кўпхаднинг рационал илдизларини топинг.	2	7	1	14
Нотўғри рационал касрни кўрсатинг	$\frac{x^3 - 3x + 5}{(x+1)^4}$	$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)^3}$	$\frac{x^3 - 3x + 5}{(x+1)^3}$	$\frac{3x+5}{x^2+1}$
Хақиқий сонлар майдонида куйидаги рационал касрлардан қайсиниси содда каср?	$\frac{x^2 - 2x}{(x+1)^3}$	$\frac{5}{(x+1)^3}$	$\frac{3x^2 + 5}{x^2 + 1}$	$\frac{x-5}{(x+1)^4}$
Хақиқий сонлар майдонида куйидаги рационал касрлардан қайсиниси примар каср?	$\frac{x^2 - 2x}{(x+1)^3}$	$\frac{x^3 - 2}{(x+3)^3}$	$\frac{3x^2 + 5}{x^2 + 1}$	$\frac{x^5 - 3x^2 + 5}{(x+1)^4}$
$\frac{1}{x^2 - 1}$ рационал касрни содда касрларга ёйинг	$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$	$\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)}$	$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)}$	$\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)}$

18 – мавзу. Рационал касрлар вектор фазоси ва у устида алгебраик амаллар.

Режа

1. Рационал каср
2. Тўғри ва оддий касрлар
3. Рационал касрни тўғри касрлар бўйича ёйиш
4. Тўғри касрни оддий касрлар бўйича ёйиш

P майдони ва $P[x]$ кўпхадлар ҳалқаси берилган бўлсин.

$f(x), g(x) \in P[x]$ учун $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ кўпхадлар нисбатига рационал

касрли функция ёки қисқача рационал каср дейилади. Ҳамма касрлар тўпламини $P(x)$ билан белгилаб оламиз. Бу тўпланда иккита $\frac{f_1}{g_1}$ ва $\frac{f_2}{g_2}$

рационал касрлар $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ тенг дейилади, агарда $f_1 g_2 = g_1 f_2$ тенглик

ўринли бўлса.

Шуни таъкидлаймизки, келтирилган таърифдан математик таҳлил нуқтаи назаридан тенг бўлган касрлар алгебраик нуқтаи назардан қараганда

тенг бўлиши мумкин. Масалан, $\frac{1}{x-1}$ ва $\frac{x+1}{x^2-1}$ рационал касрлар математик

таҳлил нуқтаи назардан тенг эмас, чунки уларнинг аниқланиш соҳалари ҳар хилдир, аммо алгебраик нуқтаи назаридан бу касрлар тенг ҳисобланади, яъни

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

тенг кучли бўлгандан келиб чиқади. Шунга асосан, $\frac{f}{g} = \frac{fh}{gh}$, $h \neq 0$

ўринлидир, яъни касрларни сурат ва махражини нолдан фарқли h кўпхадга кўпайтиришимиз ёки умумий карралига қисқартиришимиз мумкин. Бундан ташқари

$$\frac{0}{g} = \frac{0 \cdot g}{1 \cdot g} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{g}{g} = \frac{1 \cdot g}{1 \cdot g} = \frac{1}{1} = 1$$

ҳосил қиламиз. $P(x)$ рационал касрлар тўпламида қўшиш ва кўпайтириш амалларини қуйидагича аниқлаймиз:

$$1. \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 + g_1 f_2}{g_1 g_2} \in P(x)$$

$$2. \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 \cdot f_2}{g_1 \cdot g_2} \in P(x).$$

Осонлик билан кўрсатиш мумкинким, $P(x)$ унга киритилган амалларга нисбатан майдон ташкил этади. Бу майдонда рационал касрлар майдони дейилади. $P(x)$ майдон $P[x]$ кўпхадлар ҳалқасини кенгайтмасидан ҳосил бўлган майдондир, яъни $P[x] \subset P(x)$. $P(x)$ майдонда ҳамма вақт $(f, g) = 1$ деб олишимиз ва бундан ташқари уларнинг бош коэффициентлари 1 га тенг деб ҳисоблашимиз мумкин. Чунки масалан, агар $(f, g) = d$ бўлса, у ҳолда $f = df_1$ ва $g = dg_1$ бўлганлигидан $\frac{f}{g} = \frac{df_1}{dg_1} = \frac{f_1}{g_1}$, $(f_1, g_1) = 1$ келиб чиқади. Бундай касрларга нормаллашган касрлар деб аталади.

Шундай тузилган рационал касрлар майдонини нафақат P майдонда, балки ихтиёрий нолнинг бўлувчиларига эга бўлмаган коммутатив бирлик (бутун соҳали) K ҳалқада берилган $K[x]$ (бу ҳам бутун соҳали) ҳалқада бажариб $K(x)$ рационал касрли майдонини ва умуман бир нечта $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумли $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ кўпхадлар ҳалқасига бажарилиб, $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ рационал касрли майдон ҳосил қилинади.

Тўғри ва оддий касрлар. $\frac{f}{g}$ рационал касрга нотўғри каср дейилади,

агар $\deg f \geq \deg g$ бўлса, тўғри каср дейилади, агарда $\deg f < \deg g$.

Шуни таъкидлаймизки, тўғри касрлар тўғри касрлигича қолади, чунки

уларнинг сурати ва махражумумий карралига қисқартирилса биз яна тўғри касрни ҳосил қиламиз.

Теорема 1. Ҳар қандай рационал каср кўпхад ва тўғри касрларни йиғиндиси орқали ифодаланади.

Теорема 2. Тўғри касрларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси тўғри каср бўлади.

Теорема 3. Агарда $\frac{f}{g_1 \cdot g_2}$ касрда $(g_1, g_2) = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{f}{g_1 \cdot g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}$$

тўғри касрларнинг йиғиндиси орқали ягона равишда ифодаланади.

Бу теоремани умумлаштириб, қуйидаги натижага эга бўламиз:

Натижа 4. Агар

$$\frac{f}{g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_k}$$

касрда $(g_i, g_j) = 1, \quad i \neq j$ бўлса, у ҳолда бу каср тўғри касрларнинг

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \dots + \frac{f_k}{g_k} \tag{1}$$

йиғинди ёйилмаси орқали ягона равишда ифодаланади.

Натижани исботи математик индукция методи ёрдамида исботланади ва биз уни кўрсатиб ўтувчи ихтиёрига ҳавола этамиз.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
3. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.

4. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
5. Prasolov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
6. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
7. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
8. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	$x^3 + 1$ va $x^2 - x + 1$ ko'phadlarning yig'indisini toping	$x^3 + x^2 - x + 2$	$x^3 + 2x^2 + 1$	$x^3 + 3x + 2$	$2x^3 + x + 2$
2	$2x^3 - x^2 - 1$ va $x^2 + 2x + 1$ ko'phadlarning ko'paytmasini toping	$2x^4 + 3x^4 - 3x^2 - 2x - 1$	$2x^5 - 3x^4 + x^2 - 1^3 + 3x + 2$	$2x^5 - 3x^4 + x^2 + 1$	
3	$x^3 + 3x^2 - x + 1$ ni $x^2 + x - 1$ ga bo'lishdan chiqqan qoldiq nimaga teng?	$* 3 - 2x$	1	0	$1 + x$
4	$x^4 - 7x^3 + 4x^2 + x + 22$ ni $x - 2$ ga bo'lishdan chiqqan qoldiq nimaga teng	$* 0$	1	2	3
5	$x^8 - 4x^5 + 4x^3 - 1$ ko'phadning ildizi bo'lgan 1 ning karaligini aniqlang	$* 3$	4	5	6
6	$x^2 + x + 1 = 0$ tenglama ildizlari kvadratlarining yig'indisini toping	$* 3$	4	5	6

19 – мавзу. Рационал касрлар майдони.

Режа

1. Рационал каср
2. Тўғри ва оддий касрлар
3. Рационал касрни тўғри касрлар бўйича ёйиш
4. Тўғри касрни оддий касрлар бўйича ёйиш

$P[x]$ ҳалқада ҳар қандай келтирилмайдиган кўпхадларнинг каноник ёйилмасидан

$$g = a_0 p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$$

иборатдир, бу ерда $k_1 + k_2 + \dots + k_s = \deg g$ бўлиб, p_i кўпхадлар киритилмайдиган кўпхадлардир. Шунини таъкидлаймизки, $p(x) \in P[x]$ кўпхадга келтирилмайдиган кўпхад дейилади, агарда уни $P[x]$ ҳалқада даражалари бирдан катта ва тенг бўлган кўпхадларнинг кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин бўлмаса, масалан, $C[x]$ ҳалқада $x - \alpha$ шаклидаги чизиқли кўпхадлар келтирилмайдиган ва бу ерда биз кўпхадларни $x - \alpha$ келтирилмайдиган кўпхадларнинг каноник ёйилмасини келтирган эдик. $R[x]$ ҳалқада келтирилмайдиган кўпхадлар $x - \alpha$ ва $x^2 + a_1x + a_2$, $D = a_1^2 - 4a_2 < 0$ кўпхадлардан иборатдир. $Q[x]$ ҳалқада бу кўпхадлардан ташқари юқори даражали келтирилмайдиган кўпхадлари ҳам мавжуддир, масалан, $x^3 - 3$ келтирилмайдиган кўпхад бўлсада, биз билган

$$x^3 - 3 = (x - \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$$

ёйилмадаги кўпайтувчилар $Q[x]$ ҳалқага тегишли эмас.

Шунга асосан, биз юқоридаги натижани умумлаштириб, $\frac{f}{g}$ каср

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \frac{f_2}{p_2^{k_2}} + \dots + \frac{f_s}{p_s^{k_s}} \quad (2)$$

ёйилмадан иборат бўлишини айтишимиз мумкин. Бу ёйилмадаги

$$\frac{f_i}{p_i^{k_i}}$$

тўғри касрларга примар касрлар дейилади, агар $\deg f_i < \deg p_i$ бўлса, бу примар касрга оддий каср деб аталади.

Теорема 5. Ҳар қандай примар тўғри каср оддий касрларнинг йиғиндиси шаклида ифодаланади.

Бу теорема ва (2) ифодадан қуйидаги умумлашган натижага келамиз:

Натижа 6. $P[x]$ рационал касрлар майдонидаги ҳар бир тўғри каср ягона равишда оддий касрларнинг йиғиндиси шаклига келади.

Юқоридаги айтилганларни C комплекс сонлар майдонида берилган $C(x)$ рационал касрли майдон қарасак, бу ерда

$$g = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_s)^{k_s}$$

каноник ёйилмадан иборат бўлиб, $\frac{A}{(x - \alpha_i)^{k_i}}$, $A \in C$ лар оддий касрлар

бўлиб, тўғри касрнинг оддий касрларга ёйилмаси

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} = & \frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_{21}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - \alpha_2)} + \dots + \\ & + \frac{A_{s1}}{(x - \alpha_s)^{k_s}} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{(x - \alpha_s)} \end{aligned}$$

шаклга эга бўлади.

Худди шундай $R(x)$ ҳақиқий рационал касрлар майдонида иккита типдаги касрлар

$$\frac{A}{(x - \alpha_i)^{k_i}} \quad \text{ва} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + a_j x + b_j)^{e_j}}, \quad D = a_j^2 - 4b_j < 0$$

оддий касрлар бўлиб, $R(x)$ даги ихтиёрий тўғри касрлар шу оддий касрларнинг ёйилмасидан иборат бўлади.

Бу ёйилмалар математик таҳлил ва комплекс ўзгарувчилик функциялар назариясига муҳим аҳамиятга эгадир, чунки оддий касрларнинг ҳосиласи ва интегралли жуда оддий ҳисобланади.

Мисол. R да $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ тўғри касрни оддий касрларга ёямиз. Бу

каср

$$\frac{A_1}{x-1} \text{ ва } \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$$

оддий касрларнинг йиғиндисига ёйилади. Бу йиғиндидан

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$$

A_1, A_2, A_3 ларни опамиз. Бунинг учун тенгликни иккала томонини

$(x-1)(x^2+1)$ касрларнинг умумий махражига кўпайтирсак

$$1 = A_1(x^2+1) + (A_2x+A_3)(x^2-1)$$

тенглик ҳосил бўлади. A_1, A_2, A_3 коэффицентларни топиш учун

фойдаланамиз, яъни $1, x, x^2$ лар олдидаги коэффицентларни тенглаштириб,

$$x^0 = 1: \quad A_1 - A_3 = 1,$$

$$x: \quad -A_2 + A_3 = 0,$$

$$x^2: \quad A_1 + A_2 = 0.$$

Учта A_1, A_2, A_3 номаълумли учта тенгламалар системасини ҳосил қиламиз

ва уни ечиб,

$$A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = -\frac{1}{2}, A_3 = -\frac{1}{2}$$

ларни топамиз. Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

бўлади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

$f(x) = x^3 - 8$ кўпхадни ҳақиқий сонлар майдонида келтирилмас кўпхадлар кўпайтмасига ёйинг?	$f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 4)$	$f(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$	$f(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 4)$	$f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 4)$
$R[x]$ кўпхадлар халқасида $f(x)$	$q(x) = 5x^2 -$	$q(x) = 5x^2 -$	$q(x) = 5x^2$	$q(x) = 5x^2 -$

$=5x^4 - x^2 + 6$ кўпхадни $g(x) = x^2 + 3x + 2$ кўпхадга бўлганда ҳосил бўладиган бўлинма $q(x)$ ва қолдиқ $r(x)$ топилсин	$15x + 34, r(x) = 72x - 62$	$15x + 34, r(x) = -72x - 62$	$+15x + 34, r(x) = -72x - 62$	$15x + 34, r(x) = 72x + 62$
2 сони $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ кўпхаднинг неча қаррали илдизи бўлади?	3	2	1	4
2i сони икки қаррали илдизи бўлган энг кичик даражали кўпхадни ёзинг	$x^2 - 4ix - 4$	$x^2 + 4ix - 4$	$x^2 - 4ix + 4$	$x^2 + 4ix + 4$
$f(x) = x^2 - 2$ кўпхад учун қуйидаги тасдиқлардан қайсиниси тўғри?	бу кўпхад ҳақиқий сонлар майдонида келтирилмас	бу кўпхад ҳақиқий сонлар майдонида келтирилувчи аммо рационал сонлар майдонида келтирилмас дир	бу кўпхад ҳақиқий сонлар майдонида илдизга эга эмас	бу кўпхад рационал сонлар майдонида иккита илдизга эга
$f(x) = x^2 + 4$ кўпхад учун қуйидаги тасдиқлардан қайсиниси тўғри?	бу кўпхад комплекс сонлар майдонида келтирилмас	бу кўпхад ҳақиқий сонлар майдонида илдизларга эга	бу кўпхад ҳақиқий сонлар майдонида келтирилмас аммо комплекс сонлар майдонида келтирилувчи дир	бу кўпхад рационал илдизларга эга
Нотўғри тасдиқни кўрсатинг	Агар $f(x)$ кўпхад $g(x) = (x-c)^2$ кўпхадга бўлинмаса,	Агар $f(x)$ кўпхад $h(x) = x-c$ кўпхадга бўлинмаса у	Ихтиёрий майдон устида чексиз кўп келтирилмас	Агар $\varphi(x) \in K[x]$ келтирилмас кўпхад бўлса у холда

	у холда $h(x) = x - c$ кўпхадга хам бўлинмайди (c – ўзгармас сон)	холда $g(x) = (x - c)^2$ кўпхадга хам бўлинмайди	кўпхадлар мавжуддир	ихтиёрий $f(x) \in K[x]$ кўпхад ёки $\varphi(x)$ га бўлинади, ёки у билан ўзаро туб бўлади
--	--	---	------------------------	---

20 - мавзу. Майдонлар ва уларнинг алгебраик кенгайтмалари

Режа

1. Евклид соҳалар. Майдон.
2. Майдон кенгайтмаси.
3. Чекли ва алгебраик кенгайтмалар.
4. Кенгайтманинг даражаси.
5. Кенгайтма даражаларининг хоссалари.
6. Алгебраик элемент.
7. Чекли хосил қилинган кенгайтмалар.

Майдон кенгайтмаси. Чекли кенгайтмалар. P тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амаллари берилган бўлсин. Агар P тўплам ушбу амалларга нисбатан ҳалқа бўлса, ундан ташқари, P да кўпайтирувга нисбатан қўшув бўйича группа бирлик элементи—нолдан фарқли бирлик элемент мавжуд бўлса, ҳамда P нинг ҳар бир элементи учун (0 дан бошқа) унга тесқари элемент (яъни берилган элемент ва унга тесқари элемент кўпайтмаси бирга тенг бўладиган) мавжуд бўлса, у ҳолда P тўплам юқоридаги қўшув ва кўпайтирув амаллари билан бирга *майдон* деб аталади.

P —майдон ва F — P майдон қисмҳалқаси бўлсин. Агар F майдон бўлса, у ҳолда F *қисммайдон* деб аталади. Масалан, ҳақиқий сонлар тўплами, комплекс сонлар тўплами, рационал сонлар тўплами майдонга мисол бўлади. Бундан ташқари рационал сонлар майдони ҳақиқий сонлар майдонининг қисммайдони бўлади.

Чекли кенгайтма майдонда берилган қисммайдонга унда ётмайдиган чекли микдордаги бир нечта элементни қўшиб олиб қисммайдон ҳосил қилиш йўли билан қурилади ва у табиийки майдон бўлади ҳамда майдоннинг берилган қисммайдонининг *чекли кенгайтмаси* дейилади.

Майдонлар кенгайтмалари. Алгебраик кенгайтмалар. Кенгайтманинг даражаси. Кенгайтма даражаларининг хоссалари. Алгебраик элемент.

$P \subseteq K$, P —қисммайдон, K —майдон. Элемент $\alpha \in K \setminus P$ ҳалқадан олинган бирон бир кўпхаднинг илдизи бўлса, α — P устида *алгебраик* деб аталади. Бунда α ягона аниқланган, келтирилмайдиган $\varphi(x)$ кўпхад илдизи бўлади. Табиийки, бу $\varphi(x)$ кўпхад катта коэффициенти 1 деб олинади. Ушбу $\varphi(x)$ кўпхаднинг даражаси α элемент *даражаси* дейилади ва унинг илдизлари (K майдонда ётувчи ёки K нинг бирон бир кенгайтмасида ётувчи) α га қўшма элементлар деб юритилади.

$P \subseteq K$, P —қисммайдон, K —майдон бўлсин. Агар K нинг ҳар бир элементи P устида алгебраик бўлса, у ҳолда K — P қисммайдоннинг алгебраик кенгайтмаси дейилади.

Майдонлар кенгайтмаларининг айрим хоссалари. Агар K — P устида чекли ўлчовли чизиқли алгебра бўлса ва ўлчови n бўлса, K — P қисммайдоннинг *чекли кенгайтмаси* деб юритилади. K нинг P устида даражаси n ($K:P$) билан белгиланади. Қуйидаги такидлар ўринлидир:

- ҳар қандай чекли кенгайтма алгебраик кенгайтма бўлади.

- агар характеристикасиз майдон K майдон P нинг алгебраик кенгайтмаси бўлса ва P га чекли микдордаги элементларни қўшиб олиш йўли билан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда K майдон P майдонга ягона элементни қўшиб олиш йўли билан ҳосил қилинади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.
9. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
10. Prasalov V.V. Polinimails, 2012, Sprenger.
11. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.- WCB McGrew-Hill, 1997, p.636.
12. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005 г.
13. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука” 1984г.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.
15. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

Мавзу бўйича тестлар

1	Қайси тенглик дистрибутивлик қонуни бўлади?	$*(b+c)a=ba+ca$	$a+b=b+a$	$a+2b=b+2a$	$ba+b=ab+b$
2	Қайси тенглик дистрибутивлик қонуни бўлади?	$*a(b+c)=ab+ac$	$a+b=b+a$	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$b+a=a$
3	Қуйидаги шартлардан қайси бири майдон учун ўринли?	*қуйидаги хоссага эга бўлган битта ва фақат битта тесқари элемент b мавжуд: $a \cdot b = 1$ барча a учун	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ba=a^2$ тенглик ўринли	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $aba=a$ тенглик ўринли	ихтиёрий a элемент учун шундай b элемент мавжудки $b+a=2b$ тенглик ўринли бўлади
4	Қуйидаги шартлардан қайси бири майдон учун ўринли?	*шундай e элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $ea=a$ тенглик ўринли	шундай b элемент мавжудки ихтиёрий a элемент учун $aba=abb$ тенглик ўринли	ихтиёрий a элемент учун шундай b элемент мавжудки $b+a=2b$ тенглик ўринли бўлади	ихтиёрий a элемент учун шундай b элемент мавжудки $b+a=3b$ тенглик ўринли бўлади
5	Қуйидагилардан қайси бири қўшиш ва қўпайтириш амалларига нисбатан майдон бўлади?	*Барча ҳақиқий сонлар тўплами	Барча манфий сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча бутун сонлар тўплами
6	Қуйидагилардан қайси бири қўшиш ва қўпайтириш амалларига нисбатан майдон бўлади?	*Барча комплекс сонлар тўплами	Барча иррационал сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча бутун сонлар тўплами
7	Қуйидагилардан қайси бири қўшиш ва қўпайтириш амалларига нисбатан майдон бўлади?	*Барча рационал сонлар тўплами	Барча манфий сонлар тўплами	Барча натурал сонлар тўплами	Барча бутун сонлар тўплами

	бўлади?				
8	Қуйидагилардан қайси бири майдон бўлмайди?	* Ҳақиқий сонлар устида барча 2×2 ўлчовли матрицалар тўплами	Барча рационал сонлар тўплами	Барча комплекс сонлар тўплами	Барча ҳақиқий сонлар тўплами
9	Қуйидаги шартлардан қайси бири майдон учун ўринли?	*Ҳар қандай майдон халқа бўлади	Ҳар қандай майдон фактор халқа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм халқа бўлади	халқа бўлмайдиган майдон мавжуд
10	Қуйидаги шартлардан қайси бири майдон учун ўринли?	*Ҳар қандай майдон қўшиш амалига нисбатан группа бўлади	Ҳар қандай майдон фактор халқа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм халқа бўлади	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд
11	Қуйидаги шартлардан қайси бири майдон учун ўринли?	*майдон кўпайтириш амалига нисбатан группа бўлмайди	Ҳар қандай майдон фактор халқа бўлади	Ҳар қандай майдон қисм группа бўлади	қўшиш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд
12	Қуйидаги шартлардан қайси бири майдон учун ўринли?	*Ҳар қандай майдонда бирлик элемент мавжуд	Бирон бир элементга тескари элемент мавжуд бўлмаган майдон мавжуд	Ҳар қандай майдон қисм группа бўлади	кўпайтириш амалига нисбатан группа бўлмайдиган майдон мавжуд

2. Мустақил таълим машғулоти

TOPSHIRIQLAR

Mustaqil ish mavzulari

Quyidagi mustaqil ish topshiriqlari daftarga yozib bajariladi.

1. —

a) nazariy topshiriq: Gruppalar va ularning asosiy xossalari.

b) masala: Haqiqiy sonlar to'plami, Kompleks sonlar to'plami, Ratsional sonlar to'plami qo'shuv amali bo'yicha gruppalar tashkil qilishini ko'rsating.

c) masala: Haqiqiy sonlar to'plami ko'paytiruv amali bo'yicha gruppalar bo'lmavligini ko'rsating.

d) Qaysi sonlar to'plami ko'paytiruv amali bo'yicha gruppalar tashkil qiladi?

2. —

a) nazariy topshiriq: Xalqlar va ularning asosiy xossalari.

b) masala: Haqiqiy sonlar to'plami, Kompleks sonlar to'plami, Ratsional sonlar to'plami qo'shuv va ko'paytiruv amali bo'yicha xalqlar tashkil qilishini ko'rsating.

c) masala: Haqiqiy sonlar to'plami, Kompleks sonlar to'plami, Ratsional sonlar to'plami ustida aniqlangan n -o'lchovli matritsalar to'plami qo'shuv va ko'paytiruv amali bo'yicha xalqlar tashkil qilishini ko'rsating.

3. —

a) nazariy topshiriq: Vektor fazolar va ularning asosiy xossalari.

b) masala: Haqiqiy sonlar to'plami, Kompleks sonlar to'plami, Ratsional sonlar to'plami qo'shuv va ko'paytiruv amali bo'yicha vektor fazosi tashkil qilishini ko'rsating.

c) masala: Haqiqiy sonlar to'plami, Kompleks sonlar to'plami, Ratsional sonlar to'plami ustida aniqlangan n -o'lchovli matritsalar to'plami qo'shuv va ko'paytiruv amali bo'yicha vektor fazosi tashkil qilishini ko'rsating.

d) b) va c) masalalardagi har bir vektor fazosi uchun unga mos maydonni ko'rsating.

4. —

a) nazariy topshiriq: Maydonlar va ularning asosiy xossalari.

b) masala: Haqiqiy sonlar to'plami, Kompleks sonlar to'plami, Ratsional sonlar to'plami qo'shuv va ko'paytiruv amali bo'yicha maydon tashkil qilishini ko'rsating.

c) masala: Haqiqiy sonlar to'plami, Kompleks sonlar to'plami, Ratsional sonlar to'plami ustida aniqlangan n -o'lchovli matritsalar toplami qo'shuv va ko'paytiruv amali bo'yicha maydon bo'la olmasligini ko'rsating.

d) Kompleks sonlar maydonida har qanday kvadrat tenglama ikkita yechimga ega ekanini ko'rsating.

Мустақил таълим машгулотлари учун масалалар тўплами

«Абстракт алгебра» фани буйича

(I-семестр)

1. $S \nabla T$ оркали симметрик фарк берилган S ва T тупламлар учун белгиланади: $S \nabla T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$. Куйидагини курсатинг: $S \nabla T = (S \cup T) \setminus (T \cap S)$.

2. $f: X \rightarrow Y$ акслантириш ва X тупламининг S, T кимступламлари берилган булсин. Куйидагини курсатинг: $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$, $f(T \cap S) \subset f(S) \cap f(T)$. Охирги $\subset$ белгини $=$ га алмаштириш мумкин эмаслигига мисол келтиринг.

3. Берилган S туплами учун $\mathfrak{I}(S) = \{T: T \subseteq S\}$ туплами элементлари сонини курсатинг.

4. $f: X \rightarrow Y$ акслантириш ва $b = f(a)$, $a \in X$ берилган булсин. Туплам $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = \{x: f(x) = f(a)\}$ баъзан $b \in \text{Im } f$ элемент устида *катлам* деб хам аталади. Туплам X узаро кесишмайдиган катламлар билашмасидан иборатлигини курсатинг (X тупламнинг булиниши).

5. Санокли тупламнинг чекли декарт купайтмаси яна санокли туплам булишини исботланг.

6. Декарт координаталар системаси билан $\mathbf{R}^2$ текистлик берилган булсин. $\mathbf{R}^2$ тексиликни Ох укига паралел тугри чизиклар бирлашмаси сифатида олиб шу тугри чизикларга нисбатан $\mathbf{R}^2/\sim$ эквивалентлик синфлари тупламини оламиз. Ушбу туплам

билан Ох укини кесиб утувчи ихтиерий тугри чизик орасида биектив (бирга - бир) мослик мавжуд эканини курсатинг.

7. Хакикий сонли координаталар текистлиги $\mathbf{R}^2$ нукталари (x,y) , (x',y') учун $(x,y) \sim (x',y')$ деб оламиз, агарда $x'-x \in \mathbf{Z}$ ва $y'-y \in \mathbf{Z}$ булса. Бу эквивалентлик муносабати эканини курсатинг. $\mathbf{R}^2/\sim$ туплам эса текистликда Тордаги нукталар куринишда тасвирланишини курсатинг.

8. Агар $M = \langle S \rangle$ бирлик элементга эга булган S туплам ердамида курилган яримгруппа булса, ва хар бир элемент $s \in S$ M да тескарланувчи булса, у холда M группа булишини курсатинг.

9. Группа — бу бирлик элементга эга булган шундай G яримгруппаки, унда $ax=b$, $ya=b$ тенгламалардан хар бири хар кандай $a, b \in G$ кийматларда ягона ечимга эга. Шуни курсатинг.

10. $S_n = \langle (12), (13), (14), \dots, (1n) \rangle$ эканини курсатинг.

11. $S_n = \langle (12), (123), (1234), \dots, (1123 \dots n) \rangle$ эканини курсатинг.

12. Агар G группанинг буш булмаган H кисмтуплами учун $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$ булса, у холда H группа булади.

13. $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ ва бирон бир m бутун сон учун $(AB)^m = E$ булсин. У холда $(BA)^m = E$ буладими?

14. Изоморфизм аниклигида берилган n сонини учун чекли $\rho(n)$ микдорда n тартибли группалар мавжудлигини исботланг (бунинг учун n тартибли хар хил Кели жадваллари сонини юкоридан чегараланг).

15. 4-чи тартибли хамма группалар Абел группаси эканини исботланг, ва ушбу группалар куйидаги группаларга изоморф эканини курсатинг:

$U = \langle (1234) \rangle$, $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, куйидаги матрицалар группалари

$L_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \} \subset GL(2, \mathbf{R})$,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \} \subset GL(2, \mathbf{R})$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$U \rightarrow L_1$, $V_4 \rightarrow L_2$ изоморфизмларни аник куринишда езиб чикинг. (Курсатма. Агар хар кандай элемент $x \in G$ учун $x^2 = e$ булса, у холда $abab = e \Rightarrow ab = b^{-1}a^{-1} = b(b^{-1})^2(a^{-1})^2a = beea = ba$.)

16. n тартибли симметрик группанинг хамма кисмгруппалари тартибини аникланг ва n сони унга булинишини текширинг. Берилган n натурал сонни туб купайтувчиларга ажратинг ва ушбу купайтувчилар тартибидаги кисмгруппалар бор-йуклигини аникланг.

Магистрант учун «АБСТРАКТ АЛГЕБРА» курси бўйича қўшимча

К У Р С А Т М А Л А Р

Фойдаланиладиган асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар рўйхати:

АДУ библиотеказида мавжуд адабиётлар:

1. Курош А.Г. «Курс высшей алгебры» М. «НАУКА» 1975 г. 432 стр.
2. Общая алгебра. Том 1. Под ред. О.В.Мельников и др. М. «НАУКА» 1990 г.
3. Нечаев В.И. «Числовые системы». М. «Просвещение» 1975 г. 200 стр.

Ишчи дастурда курсатилган адабиётлар:

Асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар.

- А) Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
 - Б) Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
 - В) Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.
- Қўшимча адабиётлар.
- Г) Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
 - Д) Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
 - Е) Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
 - Ж) Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
 - З) Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.

Тўпламлар ва улар устида амаллар [2, 11-bet]. Муносабатлар [2, 15-bet], [3, 9-bet].
Бинар ва эквивалентлик муносабатлари [2, 15-35-betlar], [3, 11-bet]. Акслантиришлар [3, 16-21-betlar].

Группалар [1, 392-bet], [3, 22-25-betlar], [2, 66-bet]. Группа турлари [1, 401-bet] (циклик группа), [16 393-bet] (абел группаси), [1, 397-bet] (симметрик группа). қисм группа [1, 398-bet]. Нормал қисм группалар [1, 404], [2, 74-bet]. Ядро ва образ (гомоморфизм) [1, 408-bet]. Хоссалари [1, 409-bet]. қисм группа бўйича қўшни синфлар [1, 402-403-betlar], [2, 70-bet]. Фактор группа [1, 406-bet], [2, 75-bet]. Группалар гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема [1, 409-bet]. Тадбиқлар. Группанинг тўпламдаги таъсири. Орбита [2, 20-bet]. Стационар қисм группалар. Орбита узунлигининг стационар группа индекси билан устма-уст тушиши. Инвариант элемент ва инвариант қисм-фазо.

Ҳалқалар. Ҳалқа тушунчаси [1, 270-bet], [2, 291-bet], [3, 25-bet]. Ҳалқа турлари [1,

312-bet], [2, 291-380-betlar]. Қисм-ҳалқа [2, 292-bet]. Чап ва ўнг идеал. Чекли ҳосил қилинган идеаллар. Бош идеал. Бош идеаллар ҳалқаси. Идеаллар устида амаллар. Фактор ҳалқалар. Гильбертнинг базис ҳақидаги теоремаси. Ҳалқалар гомоморфизмлари [1, 281-bet], [1, 285-bet]. Чекли ва чексиз ҳалқалар. Ҳалқа гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема.

Модуллар. Модуль [2, 441-bet]. Қисм-модуль [2, 443-bet]. Модулларнинг гомоморфизмлари [2, 442-446-betlar]. Модуллар устида амаллар [2, 446-473-betlar]. Модулларнинг тензор кўпайтмалари [2, 455-bet]. Вектор фазолар. Дуаль фазолар.

Кўпхадлар [1, 130-131-betlar]. Эркин алгебра [1, 285-bet]. Моноидаль алгебра. Кўпхаднинг умумий таърифи [1, 312-bet]. Элементар хоссалари [1, 130-147-betlar]. Евклид алгоритми [1, 138-bet], [1, 289-bet].

Майдонлар [1, 276-bet], [2, 335-bet]. Майдон кенгайтмаси [1, 280-bet]. Чекли ва алгебраик кенгайтмалар. Кенгайтманинг даражаси. Кенгайтма даражаларининг хоссалари. Алгебраик элемент. Чекли ҳосил қилинган кенгайтмалар. Чекли сондаги алгебраик элементлар билан ҳосил қилинган кенгайтманинг чеклилиги. Белгиланганлик. Трансцендент кенгайтмалар [1, 288-bet], [1, 358-bet]. Трансцендентлик даражаси ва базиси.

3. G L O S S A R I Y

№	O'zbek tili	Rus tili	Ingliz tili	Qisqacha mazmuni
1	Algebraik struktura	Алгебраическая структура	Algebraic structure	Algebraik amal kiritilgan to'plam
2	kommutativlik	коммутативность	commutativity	Binar amalda o'rin almashtirish qonuni
3	Assotsiativlik	ассоциативность	associativity	Uchta element ustidagi binar amalda qavslarni o'zgartirish qonuni
4	distributivlik	дистрибутивность	distributivity	Ikkita har xil binar amalda qatnashgan uchta elementda qavsni ochib chiqish qonuni
5	Implikatsiya	Импликация	Implication	A mulohaza chin, B mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'lib, qolgan barcha hollarda chin bo'ladigan mulohaza A va B larning implikativ bog'lanishidan sodir bo'lgan mulohazadir. U o'zbek tilidagi « agar ... bo'lsa, u

				xolda ... bo'ladi» bog'lovchisiga mos keladi
6	Ko'phad	Многочлен	polynomial	Songa ko'paytirilgan x o'zgaruvchining butun nomanfiy dragalaridan tuzilgan yig'indi
7	ekvivalentlik	эквивалентность	equivalentness	Refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lgan munosabat
8	Tartib munosabati	Отношение порядка	order	Refleksiv, antisimmetrik va tranzitiv bo'lgan munosabat
9	Komplex son	Комплексное число	Complex number	$X^2 = -1$ tenglamaning echimi ustida qurilgan son
10	Yarimgruppa	полугруппа	semigroup	Assotsiativ binar amalga ega bo'lgan to'plam
11	gruppoid	группоид	groupoid	Binar amalga ega bo'lgan to'plam
12	Monoid	Моноид	Monoid	Berilgan binar amalga nisbatan barcha elementlari teskarilanuvchi bo'lgan to'plam
13	Gruppa	Группа	Group	Berilgan binar

				amalg nisbatan birlik elementga ega bolgan, assotsiativlik o'rinli bo'lgan va barcha elementlari teskarilantuvchi bo'lgan to'plam
14	Abel gruppasi	Абелева группа	Abelian group	Binar amali uchun Kommutativlik qonuni o'rinli bo'gan grupp

Absissa – nuqtaning dekart koordinatalaridan birinchisi.

Aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan jumla.

Algebra – turli miqdorlar ustida amallarni hamda ana shu amallar bilan bog'liq bo'lgan tenglamalarni echishni o'rganuvchi matematika bo'limi.

Algebraik to'ldiruvchi - ishora aniqligidagi minor.

Algoritim – berilgan ma'lumotlardan izlanayotgan natijaga o'tish jarayonini ko'rsatib beruvchi aniq qoida.

Analiz – noma'lumdan ma'lumni, ma'lumdan ma'lum tahlil asosida isbotlovchi usul.

Analitik geometriya – geometric obrazlarni algebra vositasidagi koordinatalar usulida asoslovchi matematika bo'limi.

Aniqlovchi (determinant) – kvadrat matritsaga ma'lum qoidalar bo'yicha mo'qoyilgan son.

Aniomas integral - differensiallashga teskari matematik amal.

Applikat – uch o'lchovli fazodagi nuqtaning dekart koordinatalaridan uchinchisi.

Asimptota – shunday to'g'ri chiziqki, egri chiziq nuqtasi cheksizga intilganda shu to'g'ri chiziqqa etarlicha yaqinlashadi.

Argument – erkli o'zgaruvchi.

Birlik matrisa - diagonal elementlari birlardan iborat bo'lgan diagonal matrisa.

Birlik vector - uzunligi birga teng vector.

Garmonik qator – ikkinchisidan boshlab har bir hadi ikkita qo'shni hadining o'rta geometrigiga teng sonli qator.

Giperbola – konus kecimlaridan biri.

Grafik – funksiyani tasvirlash usullaridan biri.

Davriy kasr – cheksiz o'nli kasr

Darajali funksiya - ko'rinishidagi funksiya.

Differensial – funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi.

Differensial tenglama – erkli o'zgaruvchi, no'malum funksiya va uning hosilalarini bog'lovchi munosabat.

Differensial hisob – funksiyani hosila ba differensial tushunchalari yordamida tekshiruvchi matematika bo'limi.

Diagonal matrisa – diagonal elementlaridan boshqa elementlari noll bo'lgan kvadrat matrisa.

Ellipsning katta yarim o'qi – uning fokuslari yotuvchi simmetriya o'qi.

Evklid fazosi – norma aniqlangan vector (chiziqli) fazo.

Integral hisob – matematik analizning integrallar, ularning xossalari, hisoblash usullari va tadbiqlarini o'rganadigan bo'limi.

Isbot – tasdiqning to'g'riligi aniqlanadigan mushohadalar zanjiri.

Kanonik tenglama – soda tenglama.

Kolleniar vektorlar – bir to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan vektorlar.

Komplanar vektorlar – bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar

Kvadrat matrisa - satrlari soni ustunlari soniga teng matrisa.

Kvadratik forma – ikkinchi darajali bir jinsli ko'phad.

Limit – agar o'zgaruvchi miqdor o'zining o'zgarish jarayonida a soniga cheksiz yaqinlashsa, u holda a soni x o'zgaruvchining limitidir.

Matematik iqtisod (iqtisodiyotda matematika) – iqtisodiy ob'ektlar va jarayonlarning matematik modellari va ularni tadqiq etish usullari bo'lgan nazariy fan.

Matrisa – elementlari ixtiyoriy to'g'ri to'rtburchak shaklidagi jadval.

Minor – element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinant.

Normal – chiziqning berilgan nuqtasidan shu nuqtagagi urinmaga perpendikulyar o'tuvchi to'g'ri chiziq.

Parabola – konus kesimlaridan biri.

Teorema – isbot talab qiluvchi mulohaza.

Vektor – yo'naltirilgan kesma.

Vektor fazo – (uch o'lchovli) fazo tushunchasining umumlashmasi.

Xosmas integral – chegarasi zeksiz yoki integral ostidagi funksiya ikkinchi tur uzilishga ega bo'lgan integral.

Chiziqli algebra - chekli chiziqli fazolarda chiziqli akslanishlarni o'rganuvchi algebra bo'limi.

Zaruriy va yetarli shartlar – teoremlarni yozish va talqin qilish shakli.

Zaruriy shart - xulosadan shart kelib chiqadi.

Yetarli shart – shartdan xulosa kelib chiqad.

4. Иловалар

4.02.	Илмий-педагогик иш	378		260						118	4	3	6	
	ҲАММАСИ	4212		2808						1404	36	36	36	36

ДАВЛАТ АТТЕСТАЦИЯСИ:
1. Фанлар (ёки фан) бўйича давлат аттестацияси
2. Магистрлик диссертациясини ҳимоя қилиш

Изоҳ:

1. Ушбу ўқув режаси асосида олий таълим муассасаси қўлланма ўқув режасини ишлаб чиқади. Бунда олий таълим муассасасига ҳафталик юкламани ўзгаришсиз сақлаб қолган ҳолда соатлар ҳажмини фанлар блоклари учун 5 фоиз доирасида, блокка кирувчи фанлар учун эса 10 фоиз доирасида ўзгартириш ҳукуқи берилади.

2. Маъруза соатлари ҳажми аудитория вақтининг 50 фоизидан ошмаслиги керак. Фан мавзуларининг камида 25 фоизи мустақил таълим тарзида ўзлаштирилиши лозим.

3. Фанлар (фан) бўйича давлат аттестациясига қадар ҳар бир фан бўйича 6 соат ҳажмида маслаҳатлар берилади.

4. *Танлов фанлари таркиби ва мазмуни соҳа бўйича республика ҳамда хориждаги етакчи мутахассис-олимларининг муаллифлик курслари ва муаммоли маърузалари асосида шакллантирилади.

Мувофиқлаштирувчи кенгаш раиси

(имзо)

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг Олий ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими йўналишлари бўйича ўқув-услубий бирлашмалар фаолиятини Мувофиқлаштирувчи кенгашда маъқулланган

Олий таълим муассасалари бош бошқармаси бошлиғи

И. Мажидов

Маънавий ва ахлоқий тарбия бошқармаси бошлиғи

М.Комилов

201__ йил “__” _____ даги _____ - сонли баённома

ОЎМКХТРМ директори

Б.Рахимов

ЎзМУ ректори

А.Марахимов

НАМУНАВИЙ ДАСТУР

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Рўйхатга олинди

№ UD-SA130101

“ 18 ” 08 201 7 й



201 7 йил “ 24 ” 08

АБСТРАКТ АЛГЕБРА

ФАН ДАСТУРИ

Билим соҳаси: 100 000 – Гуманитар

Таълим соҳаси: 130000 – Математика

Мутахассислик: 5A130101– Математика (математик мантик, алгебра ва
сонлар назарияси);
5A130101 – Математика (математик анализ);
5A130101 – Математика (геометрия ва топология);

Тошкент – 201 7

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2017 йил "24" 08 даги "603"-сонли буйруғининг 2-иловаси билан фан дастури рўйхати тасдиқланган.

Фан дастури Олий ва ўрта махсус, касб-хунар таълими ўқув-методик бирлашмалари фаолиятини мувофиқлаштирувчи кенгашнинг 2017 йил «18» 08 даги «4» – сон мажлис баёни билан тасдиқланган.

Фан дастури Ўзбекистон Миллий Университетида ишлаб чиқилди.

Тузувчилар:

Ибрагимов Ф.Н. - ЎзМУ, "Алгебра ва функционал анализ" кафедраси доценти, физика математика фанлари номзоди.

Такризчилар:

Омиров.Б.А - ЎзМУ, "Алгебра ва функционал анализ" кафедраси муdiri, физика математика фанлари доктори.

Эгамбердиев О.И. - Математика Институтининг илмий котиби, физика математика фанлари номзоди.

Фан дастури Ўзбекистон Миллий университети Кенгашида кўриб чиқилган ва тасдиқ қилинган ("14" 07 2017 йилдаги № 4 баённома).

КИРИШ

«Абстракт алгебра» фани замонавий математиканинг энг муҳим соҳаларидан бири бўлиб бугунги кунда унинг асосларини эгалламаган нафақат етук алгебрачи математикни балки кенг маънодаги математик мутахассисни ҳам тасаввур қилиб бўлмайди. Шу маънода ушбу фанни «Геометрия» ва «Математик анализ» мутахассисликлари магистрантлари учун ҳам кўзда тутилаётгани бежиз эмас. Бу фан сўзсиз ўқувчиларнинг теран мулоҳаза юрғатишга ўрганишларида ҳам муҳим ўрин тутди.

Шундай қилиб мазкур фаннинг асосий вазифаси магистрантларга билим бериш билан бирга уларнинг абстракт фикрлаш қобилиятини кучайтиришга йўналтирилган.

Фанни ўқитишнинг мақсади ва вазифалари

«Абстракт алгебра» фанининг асосий мақсади талабаларга назарий билим бериш, тегишли тушунчалар, тасдиқлар, алгебрага хос бўлган исботлаш усуллариини ўргатиш, олган назарий билимларини масалалар ечишга тадбиқ эта билиш, уларда мантиқий мушоҳада қилиш, фазовий тасаввур ҳамда абстракт тафаккур каби, инсон фаолиятининг барча соҳалари учун зарур бўлган қобилиятни шакллантиришдан иборатдир. Фанни ўқитишнинг вазифаси талабаларга алгебрага оид билимлар бериш, олган назарий билимларини амалиётга қўллай билишга ўргатишдан ва оқибат натижада уларни абстракт фикрлаш маданиятини юксак поғоналарга кўтаришдан иборатдир.

Фан бўйича талабаларнинг билим, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар

«Абстракт алгебра» ўқув фанини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида магистрант :

- Тўпламлар ва улар устида амаллар. Муносабатлар. Бинар ва эквивалентлик муносабатлари. Акслантиришлар. Группа. Группа турлари. қисм группа. Нормал қисм группалар. Ядро ва образ. Хоссалари. қисм группа бўйича қўшни синфлар. Фактор группа. Группалар гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема. Тадбиқлар. Группанинг тўпламдаги таъсири. Орбита. Стационар қисм группалар. Орбита узунлигининг стационар группа индекси билан устма-уст тушиши. Инвариант элемент ва инвариант қисм-фазо ҳақида тасаввурга эга бўлиши ва билиши;

- Ҳалқа тушунчаси. Ҳалқа турлари. Қисм-ҳалқа. Чап ва ўнг идеал. Чекли ҳосил қилинган идеаллар. Бош идеал. Бош идеаллар ҳалқаси. Идеаллар устида амаллар. Фактор ҳалқалар. Гильбертнинг базис ҳақидаги теоремаси. Ҳалқалар гомоморфизмлари. Чекли ва чексиз ҳалқалар. Ҳалқа гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема каби мавзуларни мукаммал билиши.

-Модуль. Қисм-модуль. Модулларнинг гомоморфизмлари. Модуллар устида амаллар. Модулларнинг тензор кўпайтмалари. Вектор фазолар. Дуаль фазолар ҳақида тўлиқ тушунчага эга бўлиши.

- Эркин алгебра. Моноидаль алгебра. Кўпхаднинг умумий таърифи. Элементар хоссалари. Евклид алгоритми.

- Майдон кенгайтмаси. Чекли ва алгебраик кенгайтмалар. Кенгайтманинг даражаси. Кенгайтма даражаларининг хоссалари. Алгебраик элемент. Чекли ҳосил қилинган кенгайтмалар. Чекли сондаги алгебраик элементлар билан ҳосил қилинган кенгайтманинг чеклилиги. Белгиланганлик. Трансцендент кенгайтмалар. Трансцендентлик даражаси ва базиси.

Магистрантлар келтирилган мавзуларидан билим ва кўникмаларга эга бўлиши керак.

Фаннинг ўқув режадаги бошқа фанлар билан ўзаро боғлиқлиги ва услубий жиҳатдан узвий кетма-кетлиги

Замонавий математикада алгебранинг тутган ўрни бекиёс. Кўпгина математик объектлар (топологик фазолар, дифференциал тенгламалар, кўп ўзгарувчили комплекс функциялар) ни ўрганишда, аввало уларга мос келадиган алгебраик тузилмалар тузиб олинади. Иқтисоднинг моделлаштириш масалаларида, замонавий компьютерларни қуришда ва ҳоказоларда алгебраик усуллардан фойдаланилади.

Абстракт алгебра фани математиканинг бошқа бўлимларидан фойдаланади ва аксинча. Масалан, равшанки математик анализ, аналитик геометрия ва дифференциал тенгламалар билан чамбарчас боғланган.

Фаннинг ишлаб чиқаришдаги ўрни

Мазкур дастурга кўра ушбу фан доирасида кўплаб модель масалалар ўрганиладигани, бу мазкур фанни чуқур ўрганган ҳар бир магистрант билим ва кўникмаларини илмий-тадқиқот ишларида, шунингдек, таълим тизимида самарали фойдаланиши имконини беради.

Фанни ўқитишда замонавий ахборот ва педагогик технологиялар

Алгебра курсини ўқитиш маъруза, амалий машғулотлар, семинар машғулотлари ва мустақил таълим кўринишида олиб бориш билан бирга ўқитишнинг илғор ва замонавий усулларида фойдаланиш, янги информацион-педагогик технологияларни тадбиқ қилиш муҳим аҳамиятга эга. Чунончи, ушбу фанни ўқитиш жараёнида янги математик дастурлар Powerpoint, Maple, Mathcad ва мавжуд электрон дарсликлар, вебсайтлардан фойдаланилади.

Асосий қисм

Фаннинг назарий машғулотлари мазмуни

Кириш. Тўпламлар ва улар устида амаллар. Муносабатлар. Бинар ва эквивалентлик муносабатлари. Акслантиришлар.

Группалар. Группа. Группа турлари. қисм группа. Нормал қисм группалар. Ядро ва образ. Хоссалари. қисм группа бўйича қўшни синфлар. Фактор группа. Группалар гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема. Тадбиқлар. Группанинг тўпламдаги таъсири. Орбита. Стационар қисм группалар. Орбита узунлигининг стационар группа индекси билан устма-уст тушиши. Инвариант элемент ва инвариант қисм-фазо.

Ҳалқалар. Ҳалқа тушунчаси. Ҳалқа турлари. Қисм-ҳалқа. Чап ва ўнг идеал. Чекли ҳосил қилинган идеаллар. Бош идеал. Бош идеаллар ҳалқаси. Идеаллар устида амаллар. Фактор ҳалқалар. Гильбертнинг базис ҳақидаги теоремаси. Ҳалқалар гомоморфизмлари. Чекли ва чексиз ҳалқалар. Ҳалқа гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема.

Модуллер. Модуль. Қисм-модуль. Модуллернинг гомоморфизмлари. Модуллер устида амаллар. Модуллернинг тензор кўпайтмалари. Вектор фазолар. Дуаль фазолар.

Кўпҳадлар. Эркин алгебра. Моноидаль алгебра. Кўпҳаднинг умумий таърифи. Элементар хоссалари. Евклид алгоритми.

Майдонлар. Майдон кенгайтмаси. Чекли ва алгебраик кенгайтмалар. Кенгайтманинг даражаси. Кенгайтма даражаларининг хоссалари. Алгебраик элемент. Чекли ҳосил қилинган кенгайтмалар. Чекли сондаги алгебраик элементлар билан ҳосил қилинган кенгайтманинг чеклилиги. Белгиланганлик. Трансцендент кенгайтмалар. Трансцендентлик даражаси ва базиси.

Амалий машғулотларни ташкил этиш бўйича кўрсатмалар

Бу фан бўйича амалий машғулотларини ташкил этишда адабиётлар рўйхатининг [5] да келтирилган масалалар тўпламларидан масалалар ечилади. Уй ишлари ва мустақил ишлар учун топшириқлар беришда рўйхатда келтирилган адабиётлардан фойдаланилади. Амалий машғулотларини ташкил этишда асосий адабиётларда [1]- [3] келтирилган назарий материаллар дарс бошида келтирилади.

Амалий машғулотлар мавзулари:

1. Тўпламлар ва улар устида амаллар. Муносабатлар. Бинар ва эквивалентлик муносабатлари.
2. Акслантиришлар.
3. Группа турлари. қисм группа. Нормал қисм группалар. Ядро ва образ. Хоссалари. қисм группа бўйича қўшни синфлар. Фактор группа. Группалар гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема. Тадбиқлар.
4. Группанинг тўпламдаги таъсири. Орбита. Стационар қисм группалар. Орбита узунлигининг стационар группа индекси билан устма-уст тушиши. Инвариант элемент ва инвариант қисм-фазо.
5. Ҳалқа турлари. Қисм-ҳалқа. Чап ва ўнг идеал. Чекли хосил қилинган идеаллар. Бош идеал. Бош идеаллар ҳалқаси. Идеаллар устида амаллар. Фактор ҳалқалар.
6. Гильбертнинг базис ҳақидаги теоремаси. Ҳалқалар гомоморфизмлари. Чекли ва чексиз ҳалқалар. Ҳалқа гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема.
7. Модуль. Қисм-модуль. Модулларнинг гомоморфизмлари. Модуллар устида амаллар. Модулларнинг тензор кўпайтмалари.
8. Вектор фазолар. Дуаль фазолар.
9. Эркин алгебра. Моноидаль алгебра. Кўпҳаднинг умумий таърифи. Элементар хоссалари. Евклид алгоритми.

10. Майдон кенгайтмаси. Чекли ва алгебраик кенгайтмалар. Кенгайтманинг даражаси. Кенгайтма даражаларининг хоссалари.

11. Алгебраик элемент. Чекли хосил қилинган кенгайтмалар. Чекли сондаги алгебраик элементлар билан хосил қилинган кенгайтманинг чеклилиги. Белгиланганлик.

12. Трансцендент кенгайтмалар. Трансцендентлик даражаси ва базиси.

Семинар машғулотларни ташкил этиш бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Бу фан бўйича семинар машғулотларини ташкил этишда адабиётлар рўйхатдан, қўшимча адабиётлардан, шунингдек, сохага оид янги илмий маколаларни ўрганиб, тингловчиларга етказиб бериш кўникмаларини бериш кўзда тутилган. Шу йўл билан магистрантларни мазкур фан бўйича олган билимларини мустахкамлаш ва аудитория билан ишлаш малакасини ошириш мумкин.

Семинар машғулотларнинг тавсия этиладиган мавзулари:

1. Тўпламлар. Муносабатлар ва акслантиришлар.
2. Группалар.
3. Ҳалқалар.
4. Модуллар.
5. Кўпҳадлар.
6. Майдонлар.

Курс ишларини ташкил этиш бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Курс ишларидан мақсад маъруза, амалий ва семинар машғулотларида олинган билимлардан фойдаланган ҳолда муайян мавзулар бўйича магистрантлар мустақил равишда ҳисоблаш эксперименти ўтказиш, олинган

натижаларни реал жараёнлар билан солиштириш ва уларни таҳлил қилиш ҳамда мустақил равишда илмий изланишлар олиб бориш кўникмаларини ҳосил қилиш ва уларни кенгайтиришдан иборат.

Курс ишларининг тахминий тавсия этиладиган мавзулари:

1. Буль ҳалқалари.
2. Ҳалқаларнинг тўғри йиғиндилари.
3. Содда ва келтирилмас элементлар.
4. Максимал, содда ва примар идеаллар.
5. Ёйилиш майдонлари. Кронекер теоремаси.

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни

Бунда ушбу ишларни бажарадилар:

- Семинар машғулотларга тайёргарлик;
- Назарий тайёргарлик кўриш;
- Уй вазифаларни бажариш;
- Ўтилган материаллар мавзуларини қайтариш;
- Мустақил иш учун мўлжалланган назарий билим мавзуларини ўзлаштириш.

Бунда талабалар маърузаларда олган билимларини амалий машғулотларни бажаришлари билан мустаҳкамлаши ҳамда ушбу фаннинг баъзи мавзуларини тушуниши ҳамда уларга оид масалаларни ечишлари керак.

Мустақил иш мавзуларини ўзлаштириш таълим жараёнида узлуксиз назорат қилиб борилади ва ёзма ҳисобот сифатида топширилади.

Тавсия этилаётган мустақил ишларнинг мавзулари:

1. S_n , $SL_n(Z)$ группаларнинг ясовчилари.
2. Q нинг локаль циклик группалиги.
3. Гомоморфизмлар ҳақидаги теоремалар.
4. Уч коммутатор ҳақидаги лемма.
5. S_n нинг автоморфизмлар группаси.
6. S_n нинг мукамаллиги ҳақидаги Гёльдер теоремаси.
7. Нильпотент группалар.
8. Регуляр ҳалқалар.
- 9 Чекли майдонлар.
- 10 Кўпҳад илдизларини радикалларда ифодалаш.

Дастурнинг инфор­мацион - услубий таъминоти

Фанни ўқитиш жараёнида Интернет тизими воситасида тегишли веб-сайтлардаги маълумотлардан кенг фойдаланилади, хусусан соҳага оид янги илмий мақолалар қидириб топилади ва ўрганилади <http://lib.mexmat.ru>; <http://www.mcce.ru>, <http://www.mcce.ru> веб-сайтларидан, шунингдек *ўргатувчи дастурлардан* фойдаланилади.

Замонавий педагогик ва инфор­мацион технологиялар методлари қўлланилади.

Фойдаланиладиган асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар рўйхати

Асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар

1. Курош А.Г. «Лекции по общей алгебре» М. 1973 г.
2. Кострикин А.И. «Введение в алгебру» М. 1977 г.
3. Калужнин Л.А. «Введение в общую алгебру» М. 1973 г.

Қўшимча адабиётлар.

4. Ленг С. «Алгебра» М. 1968 г.
5. Кон П.М. «Универсальная алгебра» М. 1968 г.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. «Алгебра» М. 1976 г.
7. Мальцев А.И. «Алгебраические системы» М. 1970 г.
8. Кострикин А.И. «Сборник задач по алгебре» М. 1986 г.