

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI
FARG`ONA DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

Matematika yo`nalishi 07. 403 guruh bitiruvchisi

Yo`lbarsov Hojiakbar Akbarovichning

Laplas almashtirishi va uni tatbiqlari
mavzusidagi

BITIRUV
MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: f.m.f.n., A.Rafiqov

Farg`ona – 2011

Reja

Kirish

I Bob Laplas almashtirishi va uning xossalari.

1.1§ Laplas almashtirishi.

1.2§ Laplas almashtirishining xossalari.

II Bob Laplas almashtirishini tadbiqlari.

2.1 § O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalarni yechish.

2.2 § Chiziqli differensial tenglamalar sistemasini operatsion metod bilan yechish.

2.3 § Mehanik tebranishlarni differensial tenglamasi va uni yechish.

2.4 § Ba'zi hususiy hosilali differensial tenglamalarni tekshirish.

Xulosa

Foydalanilgan adabiyotlar

Kirish

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimov Oliy Majlisning XIV sessiyasida so'zlagan nutqida kadrlar tayyorlashning ahamiyatiga izoh berib shunday degan edi:

«Biz oldimizga qanday vazifa qo'ymaylik, qanday muammoni yechish zaruriyati tug'ilmasin, gap oxir oqibat, baribir kadrlarga borib qadalaveradi. Mubolag'asiz aytish mumkinki, bizning kelajagimiz, mamlakatimiz kelajagi, o'rnimizga kim kelishiga yoki boshqacharoq qilib aytganda, qanday kadrlar tayyorlashimizga bog'liq.

...Mamlakatimiz kelajagi uchun Oliy Majlisning IX sessiyasida qabul qilingan «Kadrlar tayyorlash bo'yicha milliy dasturi»ning amalga oshirilishi juda ham muhim ahamiyatga ega.

...Yuqori malakali pedagog kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashga alohida e'tibor berish lozim. Kadrlar tayyorlashning sifati, erkin fikrlovchi shaxs - fuqaroni kamol toptirishiga ertaga sinf xonalar va auditoriyalarda kimlar dars va saboq berishiga bog'liq».

Darhaqiqat, barkamol inson shaxsining shakllanishi bevosita uzluksiz ta'lim jarayonida amalga oshadi. Shunday ekan, har jabhada muvaffaqiyatga erishish, jumladan yuqori malakali kadrlar tayyorlashda milliy dasturni o'rni va ahamiyati beqiyosdir.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturida oliy ta'limning asosiy maqsadi bozor iqtisodiyoti sharoitida mustaqil ishlashga qodir, raqobatbardosh, yuqori malakali mutaxassislar tayyorlashdan iborat. Bu maqsadga erishish uchun, shuningdek Respublikamiz Prezidenti aytgani kabi «mamlakatimizning boy ilmiy - texnikaviy salohiyatidan keng foydalangan holda, yuksak texnologiya va fan yutuqlariga asoslangan ishlab chiqarish sohalari - avtomobilsozlik, samolyotsozlik, mikrobiologiya, elektrotexnika va elektronika sanoatlarini telekommunikatsiya va zamonaviy axborot texnologiya vositalarini tez sur'atlarda rivojlantirish» uchun

saboq olayotgan har bir shaxs o'zi o'rgangan ta'lim mazmunini chuqur anglashi, qayerda va qanday tatbiq qilishni bilishi, hayotda esa o'zi amaliyotga tatbiq qila olishi kerak.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.Karimovning «Jaxon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari» nomli asarida jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozining kelib chiqish sabablari, oqibatlari va uning O'zbekiston iqtisodiyotiga ta'sirini kamaytirish yo'llari chuqur va atroflicha taxlil qilingan. Inqirozning mamlakatimiz iqtisodiyotiga ta'sirini yumshatishga qaratilgan. Inqirozga qarshi choralar dasturini ishlab chiqishga yo'naltirilgan amaliy tavsiyalar berilgan.

Ma'lumki, yirik rivojlangan mamlakatlarda uzoq yillardan buyon muttasil davlat byudjeti taqchilligi kuzatilgani va ularning salbiy tashqi savdo balansiga ega ekanligi, davlat tashqi qarzining miqdori yalpi ichki mahsulotga nisbatan yuqori bo'layotgani, rivojlangan mamlakatlarda qayta moliyalash stavkasining past darajada ushlab turilishi oqibatida jahon kapital bozorida arzon kreditlarning vujudga kelishi, ipoteka kreditlari berish talablarining asossiz bo'shashtirib yuborilganligi, moliyaviy institutlarning o'z mablag'lari va qarz majburiyatlari o'rtasidagi nisbatning keskin buzilishi, jahon iqtisodiyotida real va moliyaviy sektor o'rtasidagi nisbatning keskin o'zgarishi jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi kelib chiqishiga sabab bo'ladi.

Shuni mamnuniyat bilan takidlash joizki, 2008 yilning dekabr oyida mamlakatimizga tashrif buyurgan Xalqaro valyuta jamg'armasining missiyasi tomonidan ko'plab davlatlarda ro'y berayotgan moliyaviy - iqtisodiy inqiroz va rivojlangan davlatlar iqtisodiy saloxiyati pasayishi kuzatilayotgan bir paytda, 2008 yilda O'zbekiston iqtisodiyoti barqarorligi saqlab qolinganligi, yalpi ichki mahsulotning real o'sishi 9 foizni tashkil etganligi, mamlakatda tashqi savdo balansi va byudjetning sezilarli profitsiti, valyuta zahiralarining oshayotganligi va pul krediti siyosati barqarorligi saqlanayotganligi e'tirof etiladi.

Jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi Prezidentimiz I.Karimov tomonidan ishlab chiqilgan mashxur besh tamoyilga asoslangan ijtimoiy yo`naltirilgan erkin bozor iqtisodiyotiga o`tish modeli naqadar to`g`ri va puxta ekanligi yana bir bor isbotlandi.

Avvalambor iqtisodiyotning mafkuradan xoli bo`lishi, iqtisodiyotning siyosatdan ustunligida o`z ifodasini topgan iqtisodiy siyosat, davlatning bosh islohotchi vazifasini o`z zimmasiga olish, qonun ustuvorligini ta`minlash, kuchli ijtimoiy siyosat olib borish, islohotlarni bosqichma - bosqich va vazminlik bilan amalga oshirish kabi tamoyillar dunyoda avj olib borayotgan moliyaviy - iqtisodiy inqiroz sharoitida o`zini namoyon etadi.

Prezidentimiz takidlaganidek, tobora chuqurlashib borayotgan moliyaviy - iqtisodiy inqiroz mamlakatimizga ta`sir ko`rsatmaydi, bizni chetlab o`tadi, deb qarash mumkin emas. Global iqtisodiy makonning uzviy bir qismi sifatida O`zbekiston ham jahon iqtisodiy inqirozining salbiy oqibatlarini his etmoqda. Xususan, jahon xom ashyo bozorlarida talablarning susayishi tufayli O`zbekiston eksport qiladigan qimmatbaxo va rangli metallar, paxta, uran neft mahsulotlari, mineral o`g`itlarning narxi tushib bormoqda. Asosiy savdo hamkorlarimizning xarid, to`lov qobiliyatining pasayishi eksport tushumining kamayishiga olib kelmoqda.

Mamlakatimiz ijtimoiy iqtisodiy rivojlanishining joriy va istiqboldagi chora tadbirlarini belgilashda jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi oqibatlari ta`sirini har tomonlama hisobga olish, iqtisodiy rivojlanish dasturini ushbu jarayonlar ta`siri nuqtai nazaridan shakllantirish va ularni izchil amalga oshirish zarur bo`ladi. Bu borada chora - tadbirlar Prezidentimiz Islom Karimovning «Jahon moliyaviy iqtisodiy inqirozi, O`zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo`llari va choralari» nomli asarida keng va batafsil bayon qilib berilgan. Asarda jahon moliyaviy iqtisodiy inqirozining O`zbekiston iqtisodiyotiga ta`siri, mazkur inqiroz oqibatlari oldini olish va yumshatishga asos bo`lgan omillar bayon qilib berilgan. Shuningdek, mamlakatlarimiz mexnatkashlari uchun g`oyat murakkab va og`ir bo`lishiga qaramay 2008 yilda erishgan ijobiy natija va yutuqlar baholanib

respublikamizdagi iqtisodiy salohiyatdan yanada kengroq foydalanish imkoniyatlari ko'rsatib berilgan. Asarda O'zbekiston uchun inqirozni bartaraf etish va jahon bozorida yangi marralarga chiqishning ishonchli yo'li sifatida 2009 yilga mo'jallangan iqtisodiy dasturning quyidagi eng muhim ustuvor yo'nalishlari belgilab berilgan:

1) mamlakatimizda qabul qilingan 2009 - 2012 yillarda jahon iqtisodiy inqirozi oqibatlarini oldini olish va bartaraf qilish bo'yicha inqirozga qarshi dasturni amalga oshirish, shu asosda iqtisodiy o'sishning uzoq muddatli barqaror sur'atlarini iqtisodiyotning muvozanatli rivojlanishini ta'minlash;

2) tarkibiy o'zgartirishlarni davom ettirish va iqtisodiyotni diversifikatsiyalash, buni birinchi navbatda, xalqaro sifat standartlariga javob beradigan, ichki va tashqi bozorlarda talab yuqori bo'lgan raqobatbardoshli mahsulotlar ishlab chiqarishga yo'naltirilgan iqtisodiyotning eng muhim tarmoqlarini modernizatsiya qilish, texnik va texnologik jixatdan qayta jixozlash yo'li bilan amalga oshirish;

3) qishloq turmush sifati va qiyofasini tubdan yaxshilashga, qishloq joylarda ijtimoiy va ishlab chiqarish infratuzilmasini jadal rivojlantirishga, mulkdorning, tadbirkorlik va kichik biznesning maqomi, o'rnini va ahamiyatini tubdan qayta ko'rib chiqishga, fermer xo'jaligini rivojlantirishni har tomonlama qo'llab - quvvatlashga yo'naltirilgan uzoq muddatli, o'zaro chuqur bog'langan chora tadbirlar keng kompleksini amalga oshirish;

4) aholi bandligini ta'minlash, uning turmush sifatini oshirishning eng muhim omili sifatida xizmatlar ko'rsatish sohasi va kichik biznesni jadal rivojlantirish;

5) mamlakatni modernizatsiya qilish va aholi bandligini oshirishning eng muhim omili sifatida ishlab chiqarish va ijtimoiy infratuzilmani yanada rivojlantirish;

6) banklar ishini yanada rivojlantirish, aholi va xo'jalik yurituvchi subyektlarning bo'sh mablag'larini tijorat banklardagi depozitlarga jalb qilishni rag'batlantirish.

Inqirozga qarshi choralar dasturida ko'zda tutilgan tadbirlarni amalga oshirish Prezidentimiz ta'kidlaganidek «O'zbekiston iqtisodiyotining yanada kuchli, barqaror va mutanosib rivojlangan xolda maydonga chiqishi, jaxon bozorlarida o'zimizning mustaxkam o'rnimizni egallash, shular asosida izchil iqtisodiy o'sishni ta'minlash, xalqimizning xayot darajasi va farovonligini yanada oshirish bo'yicha oldimizda turgan ustivor vazifalarni muvaffaqiyatli xal etish uchun ishonchli zamin yaratadi».

Vatanimiz mustaqilligi davrida ta'lim tizimida ro'y berayotgan ulkan o'zgarishlar iqtidorli o'quvchilarga bo'lgan munosabatni ham tubdan o'zgartirdi. Prezidentimiz I. A. Karimov o'zining «Yuksak malakali mutaxassislar-taraqqiyot omili» nomli asarida: «Iste'dodli va iqtidorli yoshlarni izlab topish, ularni qo'llab - quvvatlash hamda ularning qobiliyatlarini rivojlantirish uchun barcha shart-sharoitlar yaratishning Respublika tizimini ishlab chiqish kerak»-deb ta'kidlaganlar.

Yuqoridagi vazifalarni bajarish uchun matematik mutaxassislar, jumladan, matematika o'qituvchilari o'z fani va mutaxassisligini atroflicha egallagan va chuqur kasbiy ko'nikmalar hosil qilgan bo'lishi zarur. Shu nuqtai nazardan qaraganda, bakalavriatning «Matematika» yo'nalishini bitiruvchilariga Davlat standartida ko'zda tutilgan bilimlar hajmidan yuqoriroq bilim berish va ularni shu yo'l bilan ma'lum ma'noda ijodiy fikrlashni, ilmiy izlanishini va iqtidorlilarni rivojlantirish maqsadga muvofiq. Buni va yuqoridagilarni e'tiborga olsak, mazkur bitiruv malakaviy ishining mavzusi dolzarb deb hisoblash mumkin. Oxirgi bir necha o'n-yillikda matematik analizda integral almashtirish bilan bog'liq usullar keng tarqaldi.

Bu usullar integrallarni hisoblashda differensial va integral tenglamalarni yechishda hamda mahsus funksyalarni o'rganishda qo'llanilib kelmoqda. Bu integral almashtirishlarning afzaligi shundaki ko'plab tadbirlarida qo'llaniladigan funksiyalarning to'g'ri va teskari integral almashtirishlari uchun jadval tuzish mumkin. Shundek integral almashtirishlaridan biri Laplas almashtirishidir.

I BOB LAPLAS ALMASHTIRISHI VA UNING XOSSALARI

1.1 § Laplas almashtirishi

Haqiqiy argument t - ning $t \geq 0$ qiymatlarda aniqlangan $f(t)$ funksiya berilgan bo'lsa (yoki $-\infty \leq t \leq \infty$ desak, $t < 0$ bo'lganda $f(t) = 0$ deb olamiz) va $f(t)$ – funksiya chekli sondagi 1 tur uzilishga ega bo'lsin.

Bu funksiya $0 \leq t < \infty$ cheksiz intervalda integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$|f(t)| < M e^{s_0 t} \quad (1.1.1)$$

bo'lishi kerak ($0 \leq t < \infty$). Endi $f(t)$ funksiyaning e^{-pt} kompleks funksiyaga ko'paytmasini ko'ramiz. (bunda $p = a + ib$, $a > 0$)

$$e^{-pt} f(t) \quad (1.1.2)$$

(1.1.2)- funksiya haqiqiy argumentning kompleks funksiyasidir, haqiqatdan ham:

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t) e^{-ibt} = e^{-at} f(t) \cos bt - i e^{-at} f(t) \sin bt$$

Quyidagi hosmas integralni ko'ramiz:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos btdt - i \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin btdt \quad (1.1.3)$$

Agar $f(t)$ funksiya (1.1.1) shartni qanoatlantirsa va $a > s_0$ bo'lsa u holda (1.1.3) ning o'ng tomonidagi integrallar mavjud bo'ladi va absolyut yaqinlashadi:

s_0 - son $f(t)$ funksiyaning o'sish ko'rsatkichi deyiladi.

(Shunga o'xshash ikkinchi integralni ham yaqinlashishini ko'rsatish mumkin).

Shunday qilib $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ mavjud va p - ning biror funksiyasidir; biz uni $F(p)$

deb belgilaymiz:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1.1.4)$$

$F(p)$ – funksiya $f(t)$ funksiyaning Laplas tasviri yoki 1- tasvir (yoki tasviri) deyiladi. $f(t)$ funksiya original funksiya yoki original deyiladi. $F(t)$ - funksiyaning $f(t)$ – originalga nisbatan tasvir ekani quyidagicha yoziladi:

$$F(p) \rightarrow f(t) \text{ yoki } f(t) \leftarrow F(p) \text{ yoki } L\{f(t)\} = F(p)$$

(1.1.4) - integralni Laplas almashtirishi deb ham yurutiladi.

Tasvirlari bir hil bo'lgan funksiyalar haqida quyidagi teorema o'rinalidir.

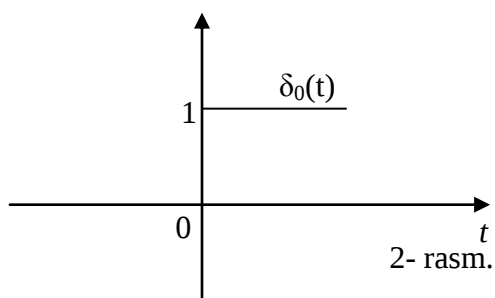
Teorema. Agar ikkita $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ uzluksiz funksiyalar bitta bir xil tasvirga ega bo'lsalar, u holda bu funksiyalar aynan tengdir.

$\delta_0(t)$, $\sin t$ va $\cos t$ funksiyalar tasvirlarini topaylik.

1. $f(t)$ - funksiya quyidagicha aniqlangan bo'ladi;

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{agar } t \geq 0 \text{ bo'lsa} \\ 0 & \text{agar } t < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Bu funksiya Xevisaydning birlik funksiyasi deyiladi va $\delta_0(t)$ deb belgilanadi



$$\delta_0 = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\delta_0(t)$ funksiya tasvirini topamiz:

$$L\{\delta_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

Demak: $1 \leftarrow \frac{1}{p}$ yoki $\delta_0(t) \leftarrow \frac{1}{p}$

Ba'zan $f(t)$ - funksiyaning tasviri uchun

$$F^*(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

ifoda olinadi. Bu holda: $\delta_0(t) \leftarrow 1$ demak $C \leftarrow C$ yoki $C\delta_0(t) \leftarrow C$, bo'ladi.

2. $f(t) = \sin t$

$$L\{\sin t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = \frac{e^{-pt}(-p \sin t - \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$3. \quad f(t) = \cos t$$

$$L\{\cos t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{p}{p^2 + 1};$$

$$\cos t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}.$$

$$\text{Izoh. 1)} \quad \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$2) \quad \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

Integrallar bo'laklab integrallash formulasiga asosan hisoblanadi.

1.2 § Laplas almashtirishning xossalari

I. Ixtiyoriy o'zgaruvchi t ning masshtabi o'zgarganda

$f(t)$ – funksiyani tasviri.

$a > 0$ bo'lganda $f(at)$ – funksiyani tasvirini topamiz. Ta'rifga ko'ra

$$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt$$

integralda $z = at$ almashtirishni bajarsak $t = \frac{z}{a}$, $dt = \frac{1}{a} dz$ bo'ladi, demak

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) dz = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

yani agar $F(p) \rightarrow f(t)$ bo'lsa $\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \rightarrow f(at)$ bo'ladi

Misol.

$$1) \quad \sin at \leftarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} \quad \text{yoki} \quad \sin at \leftarrow \frac{a}{p^2 + a^2}$$

$$2) \cos at \leftarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} \quad \text{yoki} \quad \cos at \leftarrow \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

II. Tasvirning chiziqlili xossasi

Teorema. O'zgarmas ko'paytuvchiga ko'paytirilgan bir nechta funksiyalar yig'indisini tasviri shu funksiyalar tasvirlarini mos ko'paytuvchilarga ko'paytmalarining yig'indisiga tengdir, yani

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \quad (1.2.1)$$

(bunda c_i lar o'zgarmas sonlar), $F(p) \rightarrow f(t)$ va $F_i(p) \rightarrow f_i(t)$ bo'lsa, u holda

$$F(t) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(p) \quad (1.2.2)$$

Isbot. (1.2.1) tenglikni hadlab e^{-pt} ga ko'paytrib, 0 dan ∞ gacha oraliqda integrallasak (1.2.2) kelib chiqadi.

Misol. 1) $f(t) = 3 \sin 4t - 2 \cos 5t$

$$L \left\{ \frac{1}{t} \right\} = 3 \frac{4}{p^2 + 16} - 2 \frac{p}{p^2 + 25} = \frac{12}{p^2 + 16} - \frac{2p}{p^2 + 25};$$

$$2) \quad F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9} \quad \text{berilgan tasvirga ko'ra original funksiya}$$

topilsin.

$$F(p) = \frac{5}{2} \frac{2}{p^2 + 4} + 20 \frac{p}{p^2 + 9}$$

$$f(t) = \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t$$

III. Siljish teoremasi

Teorema. Agar $f(t)$ funksiyaning tasviri $F(p)$ bo'lsa, u holda $e^{-pt} f(t)$ ning tasviri $F(p + \alpha) \rightarrow e^{-\alpha t} f(t)$ boladi. Bunda $\operatorname{Re}(p + \alpha) > S_0$ deb faraz qilinadi.

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt$$

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p + \alpha)$$

Bu teorema tasvirlar sinfini ancha kengaytiradi va ularning originali oson topiladi.

Misol. $e^{-\alpha t}$, $sh\alpha t$, $ch\alpha t$, $\sin at$, $e^{-\alpha t} \cos at$ funksiyalarning tasvirini topaylik.

bo'lgani uchun $\frac{1}{p + \alpha} \rightarrow e^{-\alpha t}$ bo'ladi, shunga o'xshash $\frac{1}{p - \alpha} \rightarrow e^{\alpha t}$. Bulardan

ikkinchisidan birinchisini ayirib 2-ga bo'lamiz: $\frac{1}{2}(\frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p + \alpha}) \rightarrow \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$

yoki $\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \rightarrow sh\alpha t$ agar ularni qo'shsak $\frac{p}{p^2 - \alpha^2} \rightarrow ch\alpha t$ kelib chiqadi.

$\frac{a}{p^2 + a^2} \rightarrow \sin at$ va $\frac{p}{p^2 + a^2} \rightarrow \cos at$ bo'lgani uchun siljish teoremasiga

asosan:

$$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \sin at \text{ va}$$

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \cos at$$

kelib chiqadi.

Misol: 1) Tasviri $F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}$ bo'lgan $f(t)$ funksiya topilsin.

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41} = \frac{7 \cdot 4}{4[(p + 5)^2 + 16]}; \quad f(t) = \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t$$

$$2) F(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 2p + 10} = \frac{p + 3}{(p + 1)^2 + 9} = \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 9} + \frac{2}{3} \frac{3}{(p + 1)^2 + 9};$$

$$f(t) = e^{-t} \cos 3t + \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t$$

IV. Tasvirlarni differensiallash va integrallash

Teorema 1. Agar $F(p) \rightarrow f(t)$ bo'lsa u holda

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \rightarrow t^n f(t) \quad (1.2.1)$$

bo'ladi.

Isbot. $|f(t)| < M e^{S_0 t}$ bo'lganda quyidagi

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt$$

integral mavjud ekanini isbot qilamiz. Shartga ko'ra

$$|f(t)| < M e^{S_0 t}, \quad p = a + ib, \quad a > S_0, \quad a > 0, \quad S_0 > 0$$

Bunga asosan shunday $\varepsilon > 0$ topiladiki, bu uchun $a > S_0 + \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Shuning uchun quyidagi integral yaqinlashadi:

$$\int_0^{\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} f(t) dt < M \int_0^{\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} e^{S_0 t} dt = M \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} dt = \frac{M e^{-(a-\varepsilon-S_0)t}}{a-\varepsilon-S_0} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{a-\varepsilon-S_0}$$

endi

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt = \int_0^{\infty} \left| e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t) \right| dt$$

integralni ko'ramiz; bundagi $e^{-\varepsilon t} t^n$ funksiya chegaralangan va biror N sonidan kichik, shuning uchun

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt < N \int_0^{\infty} \left| e^{-(p-\varepsilon)t} f(t) \right| dt = N \int_0^{\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| dt < \infty.$$

Demak $\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt$ yaqinlashadi. Bu integralni quyidagi

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

integralning p -parametr bo'yicha n -tartibli hosilasi deb qarash mumkin, yani

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

oxirgi 2 tenglikdan :

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n f(t) dt \quad \text{yoki}$$

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \rightarrow t^n f(t) \quad \text{formula kelib chiqadi.}$$

Bu formuladan $f(t) = t^n$ - darajali funksiyaning tasvirini topamiz: $\frac{1}{p} \rightarrow 1$

formulaga asosan:

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) \rightarrow t \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{p^2} \rightarrow t$$

shunga o'xshash

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2} \right) \rightarrow t^2 \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{p^3} \rightarrow t$$

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^3} \right) \rightarrow t^3 \quad \text{yoki} \quad \frac{3}{p^4} \rightarrow t$$

$$----- \frac{n}{p^{n+1}} \rightarrow t^n$$

Misollar. 1) $\frac{a}{p^2 + a^2} \rightarrow \sin at$ bo'lgani uchun formulaga asosan

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{a}{p^2 + a^2} \right) = \frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2} \rightarrow t \sin at$$

$$2) \quad \frac{p}{p^2 + a^2} \rightarrow \cos at \quad \text{dan} \quad -\frac{a^2 + p^2}{(p^2 + a^2)^2} \rightarrow t \cos at;$$

$$3) \quad \frac{1}{p + a} \rightarrow e^{-at} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{(p + a)^2} \rightarrow te^{-at}$$

Teorema 2. Agar $F(p) \rightarrow f(t)$ bo'lsa, u holda:

$$\int_0^\infty F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}$$

Haqiqatdan ham $\frac{f(t)}{t} \leftarrow \hat{O}(p)$ yani $-\hat{O}'(p) = F(p)$. Bu tenglikni hadlab

integrallash bilan $\hat{O}(p) = \int_0^\infty F(p) dp$ ni olamiz yoki $\int_0^\infty F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}$

V. Originalni differensiallash va integrallash

Teorema1. Agar $F(p) \rightarrow f(t)$ bo'lsa, u holda $pF(p) * f(0) \rightarrow f'(t)$ bo'ladi.

Isbot. Tasvirni ta'rifi ko'ra:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt.$$

Bu integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = 0 - f(0) + pF(p);$$

(bunda $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$, $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p)$). Demak $pF(p) - f(0) \rightarrow f'(t)$

Shu yo'l bilan:

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \rightarrow f''(t) \text{ yoki}$$

$$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \rightarrow f''(t)$$

$$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-1} f'(0) + \dots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \rightarrow f^{(n)}(t)$$

Hususiyl holda, agar

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

bo'lsa, u holda:

$$F(p) \rightarrow f(t)$$

$$pF(p) \rightarrow f'(t)$$

$$p^n F(p) \rightarrow f^{(n)}(t)$$

Teorema 2. Agar $f(t) \leftarrow F(p)$ bo'lsa, u holda $\int_0^t f(u) du \leftarrow \frac{F(p)}{p}$ bo'ladi.

Isbot. $\varphi(t) = \int_0^t f(u) du \leftarrow \hat{O}(p)$ deb belgilasak, 1-teoremaga asosan:

$$\varphi'(t) \leftarrow p\hat{O}(p) - \varphi(0) = p\hat{O}(p) \text{ bo'ladi } (\varphi(0) = 0).$$

$$[\varphi(t)]' = \left[\int_0^t f(u) du \right]' = f(t) \quad \text{bo'lgani uchun} \quad \int_0^t f(u) du \leftarrow \frac{F(p)}{p} \text{ kelib chiqadi.}$$

Misol.

$$\cos t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}; \quad \int \cos t dt = \sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Odatda funksiyaning tasviri uchun jadval tuziladi va amalda foydalaniladi.

Bazi bir originallar va ularni tasvirlari.

№	Original $f(t)$	tasvir $F(t)$
1.	$\delta_0(t)$	$\frac{1}{p}$
2.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
3.	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
4.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
5.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
6.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
7.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
8.	$e^{-\alpha t} \sin at$	$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2}$
9.	$e^{-\alpha t} \cos at$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2}$
10.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

11.	$e^{-\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$
12.	$e^{-\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
13.	$t \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$
14.	$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
15.	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
16.	$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(p + \alpha)$
17.	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
18.	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$
19.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$
20.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_0^\infty F(p) dp$
21.	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(p) F_2(p)$

VI. Tasvirlari ratsional kasr bo'lgan funktsiyani topish

Noma'lum $f(t)$ - funktsiyani tasviri $F(p) = \frac{\psi(p)}{\varphi(p)}$ to'g'ri ratsional kasr bo'lsin.

Ma'lumki, har qanday to'g'ri ratsional kasrni quyidagi ko'rinishdagi elementar kasrlarni yig'indisi shaklida ifodalash mumkin:

$$1. \frac{A}{p-a} \quad 2. \frac{A}{(p-a)^k} \quad 3. \frac{Ap+B}{p^2+ap+b} \quad 4. \frac{Ap+B}{(p^2+ap+b)^k}$$

$$\text{bunda } \frac{a^2}{4} - b_2 < 0 \quad \text{va} \quad k \geq 2$$

Bu kasrlarni har biriga nisbatan original funksiyasini topamiz.

$$1. \frac{A}{p-a} \rightarrow A e^{at}$$

$$2. \frac{A}{(p-a)^k} \rightarrow A \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at}$$

$$3. \frac{Ap+B}{p^2+ap+b} = \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2} = \frac{A\left(p+\frac{a}{2}\right) + \left(B-\frac{Aa}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= A \frac{p+\frac{a}{2}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2} + \left(B-\frac{Aa}{2}\right) \frac{1}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right)^2}$$

Agar birinchi qo'shiluvchini M, ikkinchisini N bilan ifodalasak, u holda:

$$M \rightarrow A e^{-\frac{a}{2}t} \cos t \sqrt{b-\frac{a^2}{4}}, \quad N \rightarrow \left(B-\frac{Aa}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} e^{-\frac{a}{2}t} \sin t \sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$$

Shunday qilib:

$$\frac{Ap+B}{p^2+ap+b} \rightarrow e^{-\frac{a}{2}t} \left[A \cos t \sqrt{b-\frac{a^2}{4}} + \frac{b-\frac{Aa}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}} \sin t \sqrt{b-\frac{a^2}{4}} \right]$$

Misollar. 1) $y'' + 4y = \sin 3x$ tenglamaning $y(0) = 0, y'(0) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantruvchi yechimi topilsin.

Yechish. Yordamchi tenglamani tuzamiz:

$$\bar{y}(p)(p^2+4) = \frac{3}{p^2+9}; \quad \bar{y}(p) = \frac{3}{(p^2+9)(p^2+4)} \text{ yoki}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{-\frac{3}{5}}{p^2 + 9} + \frac{\frac{3}{5}}{p^2 + 4} = -\frac{1}{5} \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{3}{10} \frac{2}{p^2 + 4}$$

bundan tenglamaning yechimini topamiz:

$$y(t) = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t$$

2) $y'' + y = 0$ tenglamaning $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 6$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantruvchi yechimi topilsin.

Yechish. Yordamchi tenglama:

$$\bar{y}(p)(p^3 + 1) = p^2 \cdot 1 + p \cdot 3 + 6; \text{ yoki } \bar{y}(p) = \frac{p^2 + 3p + 6}{p^3 + 1} = \frac{p^2 + 3p + 6}{(p+1)(p^2 - p + 1)}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{-p+6}{p^2 - p + 1} = 2 \frac{1}{p+1} - \frac{p - \frac{1}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{11}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

VII. Ko'paytirish teoremasi

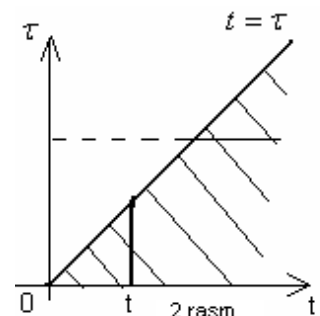
Teorema. Agar $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalarni tasvirlari $F_1(p)$ va $F_2(p)$ bo'lsa, ya'ni $F_1(p) \rightarrow f_1(t)$ va $F_2(p) \rightarrow f_2(t)$ u holda $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ funksiyani tasviri ko'paytmadan iborat bo'ladi; ya'ni

$$F_1(p)F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (1.2.3)$$

Isbot. $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ funksiyani tasvirini topamiz, tasvirni ta'rifiga asosan:

$$L \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt$$

O'ng tomondagi ikki karrali integral $\tau = 0$, $\tau = t$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'yicha olinadi (2 rasm)



Bu integralda integrallash tartibini o'zgartiramiz:

$$L \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty \left[f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau \quad (1.2.4)$$

O'zgaruvchini almashtiramiz: $t - \tau = z$, $dt = dz$ ichki integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z) dz = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z) dz = e^{-p\tau} F_2(p)$$

Ichki integralni qiymatini (1.2.4) ga qo'yamiz:

$$L \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} F_2(p) d\tau = F_2(p) \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau = F_2(p) F_1(p)$$

Demak $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ ifoda berilgan ikkita $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyani o'ramasi deyiladi.

Bunda $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$ tenglik kuchga egadir.

Misol. $y'' + y = f(t)$ tenglamaning $y(0) = y'(0) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantruvchi yechimi topilsin.

Yechish. Yordamchi tenglama tuzamiz:

$$\bar{y}(p)(p^2 + 1) = F(p)$$

bundan

$$\bar{y}(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 1}$$

$\frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t$ va $F(p) \rightarrow f(t)$ bo'lgani uchun $F(p) = F_1(p)$ orqali belgilab

ko'paytrish teoremasini tadbiq etsak,

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau$$

kelib chiqadi.

Izoh. 2) Agar $f_1(t) = f(t)$ va $f_2(t) = 1$ desak, u holda $F_1(p) = F(p)$ va $F_2(p) = \frac{1}{p}$

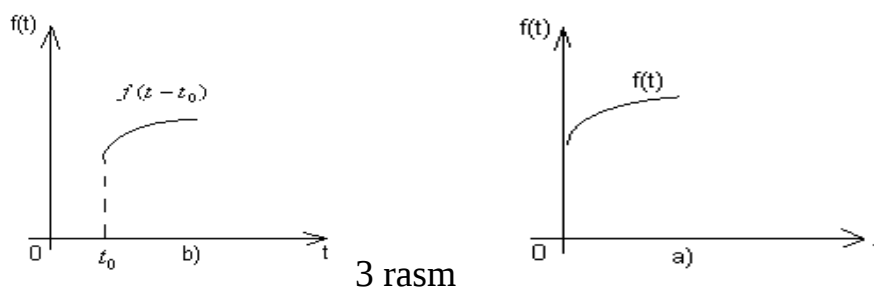
bo'ladi. Ko'paytirish teoremasiga asosan:

$$\frac{1}{p} F(p) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \text{yoki} \quad \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p} \quad \text{va} \quad f_2(t) = 1$$

originalni integrallash haqidagi teorema kelib chiqadi.

VIII. Kechikish teoremasi

Agar $f(t)$ funksiya $t < 0$ bo'lganda aynan nolga teng bo'lsa, u holda $f(t - t_0)$ funksiya $t < t_0$ bo'lganda aynan nolga teng bo'ladi (rasm 3 a) va b))



Quyidagi kechikish teoremasini isbot qilamiz.

Teorema. Agar $f(t)$ funksiyaning tasviri $F(p)$ bo'lsa, u holda $f(t - t_0)$ funksiyaning tasviri $e^{-pt_0} F(p)$ bo'ladi, ya'ni: $f(t) \leftarrow F(p)$ bo'lsa $f(t - t_0) \leftarrow e^{-pt_0} F(p)$

Isbot. Tasvirni ta'rifiga asosan.

$$L \{ f(t - t_0) \} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t - t_0) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt$$

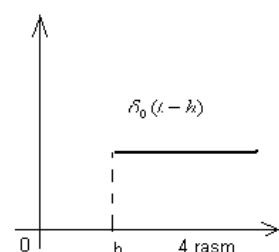
Tenglikni o'ng tomonidagi birinchi integral nolga teng, chunki $t < t_0$ bo'lganda $f(t - t_0) = 0$. Keyingi integralda o'zgaruvchini almashtiramiz: $t - t_0 = z$, $dt = dz$;

U holda

$$L \{ f(t - t_0) \} = \int_0^{\infty} e^{-p(z+t_0)} f(z) dz = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-pt_0} F(p).$$

demak $f(t - t_0) \leftarrow e^{-pt_0} F(p)$.

Misollar. I. § 1.1 da Xevisaydning birlik funksiyasi uchun $\delta_0(t) \leftarrow \frac{1}{p}$ topilgan edi. Kechikish teoremasiga



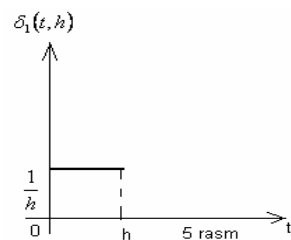
asosan $\delta_0(t-h)$ funksiya (rasm 4) uchun $\delta_0(t-h) \leftarrow \frac{1}{p} e^{-ph}$ boladi.

II. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$\delta_1(t, h) = \frac{1}{h} [\delta_0(t) - \delta_0(t-h)] = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ bo'lganda} \\ \frac{1}{h}, & 0 \leq t < h \text{ bo'lganda} \\ 0, & h \leq t \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

Agar bu funksiya 0 dan h gacha bo'lgan vaqt oralig'ida ta'sir etuvchi kuch deb qaralsa (boshqa vaqtlarda nolga teng), u holda bu kuch impulsi birga teng bo'ladi.

(rasm 5)



Bu funksiya tasviri

$$\delta_1(t, h) \leftarrow \frac{1}{h} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ph} \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{1 - e^{-ph}}{h} \right)$$

Mehanikada bazi qisqa vaqt oralig'ida ta'sir etuvchi oniy ta'sir etuvchi va chekli impulsga ega kuch deb qarash qulay bo'ladi. Shunga ko'ra $h \rightarrow 0$ bo'lganda $\delta_1(t, h)$ funksiyaning limitiga teng bo'lgan $\delta(t)$ funksiya qaraladi:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_1(t, h)$$

Bu funksiya impulsli funksiya yoki delta funksiya deyiladi. Ba'zan fizikada uni Dirak funksiyasi ham deyiladi. $\delta(t)$ funksiyani tasvirini $\delta_1(t, h)$ funksiya tasvirining

$h \rightarrow 0$ dagi limiti deb topamiz :

$$\delta_1(t, h) \leftarrow \int_0^{\infty} \delta_1(t, h) e^{-pt} dt = \frac{1}{ph} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{ph} = \frac{1}{ph} (1 - e^{-ph})$$

$t > 0$ bo'lganda $\delta_1(t, h) = 0$. Shuning uchun $\delta(t) \leftarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{ph} (1 - e^{-ph})$

Lopital qoidasiga asosan:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{pe^{-ph}}{p} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{-ph} = 1.$$

Demak $\delta(t) \leftarrow 1$. Delta funksiya mehanikada, matematikani ko'pgina bo'limlarida, hususan matematik – fizikaning ko'p masalalarida uchraydi. Agar $\delta(t)$ funksiya massasi 1 ga teng bo'lgan moddiy nuqta $t = 0$ momentda 1 ga teng tezlik beradigan kuch deb qarash mumkin.

Shunga o'xshash $\delta(t - t_0)$ funksiyani $t = t_0$ momentda birlik massaga 1 ga teng tezlik beruvchi kuch deb qarash mumkin. Kechikish teoremasiga asosan:

$$\delta(t - t_0) \leftarrow e^{-pt}$$

Yuqoridagi kabi $\int_t^{t_0} \delta(t - t_0) dt = 1$. Endi $\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t) + \delta(t)$ differensial tenglamaning $t = 0$ bo'lganda $x_0 = 0, x'_0 = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantruvchi yechimni ko'ramiz.

Yordamchi tenglama $p^2 \bar{x}(p) = F(p) + 1$. Bundan $\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2}$ va

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)(t - \tau) d\tau.$$

Delta funksiyani quyidagi xossalarini ko'rib o'tamiz:

$-\infty < t < 0$ bo'lganda 0 ga $0 \leq t < \infty$ bo'lganda 1 ga teng bo'lgan quyidagi integral

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Xevisaydning birlik funksiyasini $\delta_0(t)$ ga tengdir:

$$\delta_0(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Bu tenglikni ikki tomonini differensiallab, quyidagi shartli tenglikni olamiz:

$$\delta'_0(t) = \delta(t) \quad (1.2.5)$$

Bu tenglikni ma'nosini tushuntirish uchun quyidagi funksiyani olamiz:

$$\bar{\delta}_0(t, h) = \begin{cases} 0 & (\text{agar } t < 0 \text{ bo'lsa}) \\ h & (\text{agar } 0 < t < h \text{ bo'lsa}) \\ 1 & (\text{agar } t > h \text{ bo'lsa}) \end{cases}$$

Bu holda:

$$\overline{\delta'_0}(t, h) = \delta_1(t, h) \quad (1.2.6)$$

bunda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\delta_0}(t, h) = \delta_0(t) \quad \text{va} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\delta'_0}(t, h) = \delta'_0(t) \quad (1.2.7)$$

(1.2.4) va (5) tenglika asosan (1.2.5) shartli tenglik kelib chiqadi: $\delta'_0(t) = \delta(t)$.

II BOB Laplas almashtirishini tadbiqlari

2.1 § O'zgarmas koefitsiyentli chiziqli differensial tenglamalarni yechish

O'zgarmas koefitsiyentli chiziqli differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi hususiy yechimini Laplas almashtirishini qo'llash yo'li bilan topamiz:

1. Avval ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani yechamiz:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t) \quad (2.1.1)$$

tenglama berilgan bo'lsin; a_1 va a_2 o'zgarmas sonlar. Bu tenglamaning $y(0) = y_0$ $y'(0) = y'_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y(t)$ -xususiy yechimini topish kerak. Tenglamani yechimi $y(t)$, uning hosilalari $y'(t), y''(t)$ va o'ng tomoni $f(t)$ - originallar bo'lsin. Agar $y(t) \leftarrow \bar{y}(p)$ va $f(t) \leftarrow F(p)$ desak, u holda originalni differensiallab

$$y'(t) \leftarrow p\bar{y}(p) - y_0, \quad y''(t) \leftarrow p^2\bar{y}(p) - py_0 - y'_0$$

larni topamiz.

Tasvirni chiziqli xossasiga va (2.1.1) tenglamaga asosan:

$$p^2\bar{y}(p) - py_0 - y'_0 + a_1(p\bar{y}(p) - y_0) + a_2\bar{y}(p) = F(p)$$

$$(p^2 + a_1 p + a_2)\bar{y}(p) = F(p) + py_0 + y'_0 + a_1 y_0 \quad (2.1.2)$$

(2.1.2)- tenglama (2.1.1) differensial tenglamaning yordamchi tenglamasi yoki tasvirlovchi tenglamasi deyiladi.

Natijada original $y(t)$ - uchun (2.1.1) differensial tenglama o'rniga uning tasviri $\bar{y}(p)$ - uchun (2.1.2) algebraik tenglamani hosil qildik.

(2.1.2) tenglikdan

$$\bar{y}(p) = \frac{F(p) + py_0 + y'_0 + a_1 y_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \quad (2.1.3)$$

(2.1.3) formula (2.1.2) tenglamaning operator yechimidir. $\bar{y}(p)$ - tasvirga asosan $y(t)$ -originalni ya'ni (2.1.1) tenglamani yechimini topamiz.

Misol. 1) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$ differensial tenglamaning $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan hususiy yechimi topilsin.

Yechish.

$$F(p) = \frac{2}{p-3} \rightarrow 2e^{3t}, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 2, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 3$$

Bo'lgani uchun (2.1.3) formulaga asosan:

$$\bar{y}(p) = \frac{\frac{2}{p-3} + p \cdot 1 + 3 + (-3) \cdot 1}{p^2 - 3p + 2} = \frac{2 + p^2 - 3p}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} = \frac{1}{p-3}$$

jadvaldan $y(t) = e^{3t}$ - izlangan yechim bo'ladi.

2) $y'' + 4y = \sin t$ tenglamaning $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish. $\sin t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}, \quad y_0 = 1, \quad y'_0(0) = 1$

$$\bar{y}(p) = \frac{\frac{1}{p^2 + 1} + p + 1}{p^2 + 4} = \frac{1 + (p+1)(p^2 + 1)}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)} = \frac{p^3 + p^2 + p + 2}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)}$$

oxirgi kasrni elementar kasrlarga ajratamiz:

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{2}{3(p^2 + 4)} + \frac{1}{3(p^2 + 1)};$$

bundan jadvalga ko'ra

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t.$$

2. Endi n - tartibli chiziqli differensial tenglama olamiz:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t) \quad (2.1.5)$$

bunda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ o'zgarmas koeffitsientlar. Bu tenglamaning $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz.

(1) tenglamani hadlab e^{-pt} ga ko'paytramiz, (bunda $p = a + bi$) va 0 dan ∞ gacha oraliqda t bo'yicha integrallaymiz:

$$a_0 \int_0^{\infty} e^{-pt} y^{(n)}(t) dt + a_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} y^{(n-1)}(t) dt + \dots + a_{n-1} \int_0^{\infty} e^{-pt} y'(t) dt + a_n \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Bu tenglamani chap tomonida $y(t)$ funksiya va uning hosilalarining tasvirlari, o'ng tomonida $f(t)$ funksiyaning tasviri turibdi:

$$a_0 L \{ y^{(n)}(t) \} + a_1 L \{ y^{(n-1)}(t) \} + \dots + a_{n-1} L \{ y'(t) \} + a_n L \{ y(t) \} = L \{ f(t) \}$$

yoki

$$a_0 \left\{ p^n \bar{y}(p) - (p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y_0' + \dots + y_0^{(n-1)}) \right\} +$$

$$+ a_1 \left\{ p^{n-1} \bar{y}(p) - (p^{n-2} y_0 + p^{n-3} y_0' + \dots + y_0^{(n-2)}) \right\} + \dots +$$

$$+ a_{n-1} \{ p \bar{y}(p) - y_0 \} + a_n \bar{y}(p) = F(p) \quad (2.1.6)$$

(2.1.6)- tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{y}(p)(a_0 p^n + a_1 p + \dots + a_{n-1} p + a_n) = F(p) +$$

$$+ a_0 (p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y_0' + \dots + y_0^{(n-1)}) +$$

$$+ a_1 (p^{n-2} y_0 + p^{n-3} y_0' + \dots + y_0^{(n-2)}) + a_{n-2} (p y_0 + y_0') + a_{n-1} y_0 \quad (2.1.7)$$

(2.1.6) va (2.1.7) tenglama (2.1.5) differensial tenglamaning yordamchi tenglamasi yoki tasvirlovchi tenglamasi deyiladi.

Agar $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = \varphi(p)$ va

$$a_0 (p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y_0' + \dots + y_0^{(n-1)}) + a_1 (p^{n-2} y_0 + p^{n-3} y_0' + \dots + y_0^{(n-2)}) + \dots$$

$$+ a_{n-2} (p y_0 + y_0') + a_{n-1} y_0 = \psi_{n-1}(p)$$

deb belgilasak, u holda

$$\bar{y}(p) \varphi_n(p) = F(p) + \psi_{n-1}(p)$$

bo'ladi

$$\bar{y}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} \quad (2.1.8)$$

Bu esa $y(t)$ – funksiyaning tasviridir, yani $\bar{y}(p) \rightarrow y(t)$. Agar

$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ bo'lsa, u holda (2.1.8) dan

$$\bar{y}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)} \quad (2.1.9)$$

kelib chiqadi.

Misollar: 1) $y'(t) + y(t) = 1$ tenglamaning $y(0)=0$ boshlang'ich shartni

qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. $\bar{y}(p) = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ jadvaldan

$y(t) = 1 - e^{-t}$ tenglamani yechimi ekanini topamiz.

2) $y''(t) + 9t = 1$ boshlang'ich shart $y(0) = y'(0) = 0$ bo'lsa

$$\bar{y}(p)(p^2 + 9) = \frac{1}{p}; \quad \bar{y}(p) = \frac{1}{p(p^2 + 9)} = -\frac{1}{9} \frac{1}{p^2 + 9} + \frac{1}{9} \frac{1}{p}$$

$$y(t) = -\frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{9} \text{ tenglamani yechimi bo'ladi.}$$

3) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t$ boshlang'ich shartli $y(0) = y'(0) = 0$

$$\bar{y}(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2}; \quad \bar{y}(p) = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

4) $y'' + 2y' + 5y = \sin t$ boshlang'ich shart $y(0) = 1, y'(0) = 2$

$$\bar{y}(p)(p^2 + 2p + 5) = p * 1 + 2 + 2 * 1 + \frac{1}{p^2 + 1} \text{ yoki}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{p + 4 + \frac{1}{p^2 + 1}}{p^2 + 2p + 5} = \frac{p^3 + 4p^2 + p + 5}{(p^2 + 2p + 5)(p^2 + 1)} = \frac{\frac{11}{10}p + 4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{1}{5}}{p^2 + 1} \text{ yoki}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{11}{10} \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} + \frac{29}{20} \frac{2}{(p+1)^2 + 4} - \frac{1}{10} \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\text{jadvaldan } y(t) = \frac{11}{10} e^{-t} \cos 2t + \frac{29}{20} e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t.$$

2.2 § Chiziqli differensial tenglamalar sistemasini operatsion metod bilan yechish.

O'zgarmas koeffitsientli chiziqli birinchi tartibli ikkita differensial tenglamalar sistemasini Laplas almashtirishi yordamida yechilishini ko'ramiz: $x(t)$ va $y(t)$ noma'lum funksiyalar

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + a_{11}x(t) + a_{12}y(t) &= f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} + a_{21}x(t) + a_{22}y(t) &= f_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

$x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi hususiy yechimni topish kerak.

Izlanayotgan funksiyalar $x(t)$ va $y(t)$, tenglamalarni o'ng tomonidagi $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalar originallar bo'lsin. Ularning tasvirlarni mos ravishda quyidagicha belgilaylik:

$$\begin{aligned} x(t) &\leftarrow \bar{x}(p), & y(t) &\leftarrow \bar{y}(p) \\ f(t) &\leftarrow F_1(p) & f_2(t) &\leftarrow F_2(p) \end{aligned}$$

u holda:

$$x'(t) \leftarrow p\bar{x}(p) - x_0; \quad y'(t) \leftarrow p\bar{y}(p) - y_0$$

Tasvirni chiziqli xossasiga asosan:

$$\left. \begin{aligned} p\bar{x}(p) - x_0 + a_{11}\bar{x}(p) + a_{12}\bar{y}(p) &= F_1(p) \\ p\bar{y}(p) - y_0 + a_{21}\bar{x}(p) + a_{22}\bar{y}(p) &= F_2(p) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

(2.2.2) sistema (2.2.1) sistemaga nisbatan yordamchi sistema deyiladi, uni yechib $\bar{x}(p)$ va $\bar{y}(p)$ tasvirlarni topamiz; bu tasvirning originallari esa berilgan sistemaning yechimlari $x(t)$ va $y(t)$ bo'ladi.

Misol. 1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} - x - y &= t \\ \frac{dy}{dt} + 4x + 3y &= 2t \end{aligned} \right\}$$

sistemaning $x(0) = x_0 = 0$, $y(0) = y_0 = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish. $t \leftarrow \frac{1}{p^2}$, $2t \leftarrow \frac{2}{p^2}$ bo'lgani uchun yordamchi sistema quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} p\bar{x}(p) + \bar{x}(p) + \bar{y}(p) &= \frac{1}{p^2} \\ p\bar{y}(p) + 4\bar{x}(p) + 3\bar{y}(p) &= \frac{2}{p^2} \end{aligned} \right\} \text{ yoki } \left. \begin{aligned} \bar{x}(p)(p-1) - \bar{y}(p) &= \frac{1}{p^2} \\ 4\bar{x}(p) + \bar{y}(p)(p+3) &= \frac{2}{p^2} \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemani yechamiz $\bar{x}(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2}$, $\bar{y}(p) = \frac{2(p-3)}{p^2(p+1)^2}$

yoki

$$\begin{aligned} \bar{x}(p) &= -\frac{9}{p} + \frac{5}{p} + \frac{9}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2} \rightarrow -9 + 5t + 9e^{-t} + 4te^{-t} = x(t) \\ \bar{y}(p) &= \frac{14}{p} - \frac{6}{p^2} - \frac{14}{p+1} - \frac{8}{(p+1)^2} \rightarrow 14 - 6t - 14e^{-t} - 8te^{-t} = y(t) \end{aligned}$$

Demak berilgan sistemani yechimi:

$$x = -9 + 5t + 9e^{-t} + 4te^{-t} + 4te^{-t}, \quad y = 14 - 6t - 14e^{-t} - 8te^{-t}$$

2)

$$\left. \begin{aligned} 3\frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 3y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Sistemani $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantruvchi yechimini topamiz.

Yechish. Yordamchi sistema

$$\left. \begin{aligned} (3p+2)\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) &= \frac{1}{p} \\ p\bar{x}(p) + (4p+3)\bar{y}(p) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemani yechamiz $\bar{x}(p)$ va $\bar{y}(p)$ larni topamiz.

$$\bar{x}(p) = \frac{4p + 3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{5(p+1)} + \frac{33}{10(11p+6)}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(11p+6)(p+1)} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6} \right)$$

topilgan tasvirga asosan noma'lum funksiyalar $x(t)$ va $y(t)$ ni topamiz:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t})$$

Yuqori tartibli chiziqli tenglamalar sistemasi ham shunga o'xshash yechiladi.

2.3 § Mehanik tebranishlarni differensial tenglamasi va uni yechish.

I. Mehanika kursidan ma'lumki, massasi m ga teng bo'lgan moddiy nuqtani tebranish tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{\pi} f_1(t) \quad (2.3.1)$$

Bunda x nuqtani biror holatdan siljishi, k elastiklik, jismning qattiqligi harakatga bo'lgan qarshilik tezlikka proporsional bo'lib, λ proporsionallik koeffitsenti, $f(t)$ - tashqi kuch.

2. (2.3.1) tenglama yordami bilan elastik holda joylashgan maxovikning aylanish tebranishini ham ifodalash mumkin. U holda x maxovikning aylanish burchagi, m maxovikning inersiya momenti, k valning aylanish mustahkamligi $f_1(t)$ - tashqi kuchlarning qo'yilish o'qiga nisbatan momentik ifoda qiladi.

3. Shuningdek (2.3.1) tenglama elektron zanjirdagi harakatni ham ifodalaydi. Masalan: L induktivdan iborat elektr zanjirga ega bo'laylik. Undagi qarshilik R , sig'im C , qo'yilgan elektr yurituvchi kuch (E.Yu.K)- E bo'lsin.

Zanjirdagi tokni i , kondensator zaryadini Q bilan belgilaymiz. Elektrotexnikadan ma'lumki i va Q quyidagicha tenglamani qanoatlantiradi:

$$I \frac{di}{dt} + R_i + \frac{Q}{C} = E \quad (2.3.2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = i \quad (2.3.3)$$

(2.3.3)– tenglamadan:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \frac{di}{dt} \quad (2.3.3')$$

(2.3.3) va (2.3.3') tenglamalarni (2.3.2) ga qo'ysak (2.3.1) tipdagi tenglama kelib chiqadi:

$$I \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E \quad (2.3.4)$$

Agar (2.3.2) tenglamaning ikkala qismini differensiallab, (2.3.3) tenglamani hisobga olsak, u holda tokni topish uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$I \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dE}{dt} \quad (2.3.5)$$

(2.3.5) tenglama ham (2.3.1) tipdagi tenglamadir.

II. Tebranish tenglamasini quyidagicha umumiy ko'rinishda yozamiz

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(x). \quad (2.3.6)$$

Bu tenglamani noma'lum funksiya x , koeffitsentlar a_1, a_2 va $f(t)$ - larni fizik ma'nolarini (2.3.1), (2.3.4), (2.3.5) tenglama bilan solishtirib aniqlash qiyin emas. Endi (2.3.1) tenglamaning $t = 0$ bo'lganda $x = x_0, x' = x'_0$ bo'lgan boshlang'ich shartni qanoatlantruvchi yechimini topamiz.

Yordamchi tenglamani tuzamiz:

$$\bar{x}(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = x_0 p + x'_0 + a_1 x_0 + F(p)$$

bunda:

$$\bar{x}(p) = \frac{x_0 p + x'_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \quad (2.3.7)$$

(2.3.4)- tenglamaning $Q = Q_0, Q' = Q'_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantruvchi yechimi $Q(t)$ ning tasviri quyidagicha bo'ladi:

$$\bar{Q}(p) = \frac{i(QP + Q'_0) + RQ_0}{IP^2 + RP + \frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}(p)}{Sp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$$

(1) tenglama yechimining xarakteri $p^2 + a_1 p + a_2$ uchxad ildizining kompleks, yoki haqiqiy har xil, yoki haqiqiy o'zaro teng bo'lishiga bog'liqdir.

Uchxad ildizlari kompleks son ya'ni $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$ bo'lgan holda ko'rib

chiqamiz: ratsional kasrni originalini topish formulaga asosan:

$$\frac{x_0 p + x'_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x'_0 + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right]$$

Endi $\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}$ tasvirni originalini topish uchun ko'paytrish teoremasidan

foydalanamiz:

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \quad F(p) \rightarrow f(t)$$

bo'lgani uchun:

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} d\tau \quad (2.3.8)$$

(2.3.7) va (2.3.8) ni qo'shib (2.3.6) tenglamaning yechimini topamiz

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x'_0 + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right] + \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} d\tau \quad (2.3.9)$$

$p^2 + a_1 p + a_2$ uchxad ildizlari haqiqiy har xil yoki o'zaro teng bo'lganda ham yechimlari shu yo'l bilan topiladi.

III. Agar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(x) \quad (2.3.10)$$

tenglamada $f(t) \equiv 0$ deb olsak bu tenglama erkin tebranishni ifodalaydi.

Qulaylik uchun $a_1 = 2n$, $a_2 = k^2$, $k_1^2 = k^2 - n^2$ deb olamiz, u holda (2.3.10) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = f(x) \quad (2.3.11)$$

Bu tenglamani $t = 0$ bo'lganda $x = x_0$, $x' = x'_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantruvchi x yechimi (2.3.7) formulaga asosan

$$x(t) = e^{-nt} \left[x_0 \cos kt + \frac{x'_0 + x_0 n}{k_1} \sin k_1 t \right] \quad (2.3.12)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar $x_0 = a_1$, $\frac{x'_0 + x_0 n}{k_1}$ deb belgilasak, u holda „ a ” va „ b ” ning har qanday

qiymatida shunday M va δ sonlar topish mumkinki, unda $a = M \sin \delta$,

$b = M \cos \delta$ va $M^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tg} \delta = \frac{a}{b}$ bo'ladi.

Bularga asosan (2.3.12) tenglikni quyidagicha yozamiz:

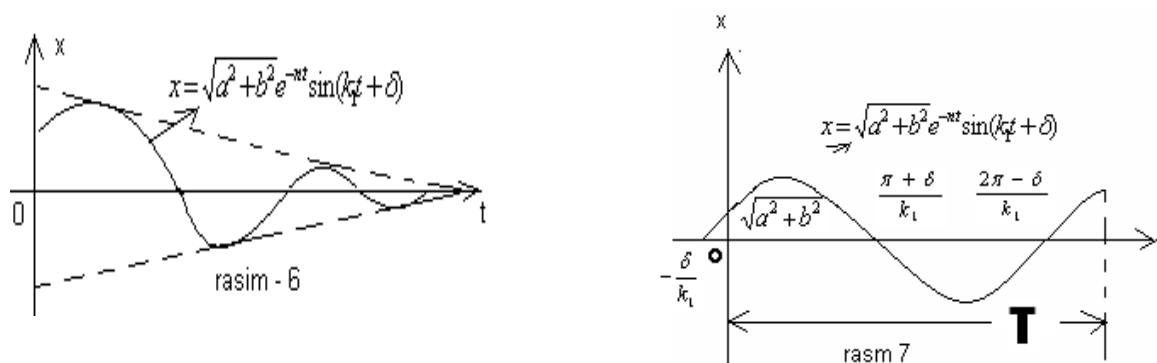
$$\begin{aligned} x &= e^{-nt} [M \cos k_1 t \sin \delta + M \sin k_1 t \cos \delta] \\ x &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Bu (2.3.13) yechimni so'nuvchi tebranishga mos yechimdir (rasm 6).

Agar ichki ishqalanishlar bo'lmasa, u holda yechimning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi ($2n = a_1 = 0$):

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta)$$

Bu hol garmonik tebranishlarga mos keluvchi yechimni ifoda qiladi (rasm 7)



Bunda T - tebranish davriy ($T = \frac{2\pi}{k_1}$), k_1 - tebranish chastotasi, ya'ni 2π vaqt

ichida tebranishlar soni, $\sqrt{a^2 + b^2}$ - tebranishlar amplitudasi, δ - boshlang'ich faza.

IV. Tashqi kuchlar davriy bo'lganda mehanik va elektrik tebranishlarni tekshirish. Mehanik sistemalarning tebranishini va ayniqsa elektrik tebranishlarni tekshirishda $f(t)$ - tashqi kuchlarning har xil ko'rinishlari uchraydi. Tashqi kuchlar davriy bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Bu holda tebranish tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = A \sin \omega t. \quad (2.3.14)$$

Harakat harakterini aniqlash uchun $t = 0$ bo'lganda quyidagi holni ko'rib chiqishning o'zi kifoya.

$$\bar{x}(p) = (p^2 + 2np + k^2) = A \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

bundan

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} \quad (2.3.15)$$

$2n \neq 0$ va $n^2 < k^2$ bo'lsin. (2.3.15) ning o'ng tomonidagi kasrni elementar kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2}$$

Sonlarni aniqmas koeffisientlar metodi bilan topib, so'ngra boshlang'ich funksiyani topamiz:

$$x(t) \frac{A}{(k^2 - \omega^2) + 4n^2 \omega^2} \left\{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n \cos \omega t + e^{-nt} \left[(2n^2 - k^2 - \omega^2) \frac{\omega}{k_1} \sin k_1 t + 2n \omega \cos K_1 t \right] \right\} \quad (2.3.16)$$

bundan $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. (2.3.16) bilan ifodalangan $x(t)$ funksiya (2.3.14) tenglamani yechimidir. Bu hol mehanik sistemalarda ichki qarshilik yo'qligini ya'ni amortizator yo'qligini ko'rsatadi.

Bu holda (2.3.14) tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = A \sin \omega t \quad (2.3.17)$$

bu tenglamaning $t = 0$ bo'lganda $x_0 = x'_0 = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi (2.3.16) tenglikdan $n = 0$ deb faraz qilganda kelib chiqadi:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^k} [-\omega \sin kt + k \sin \omega t] \quad (2.3.18)$$

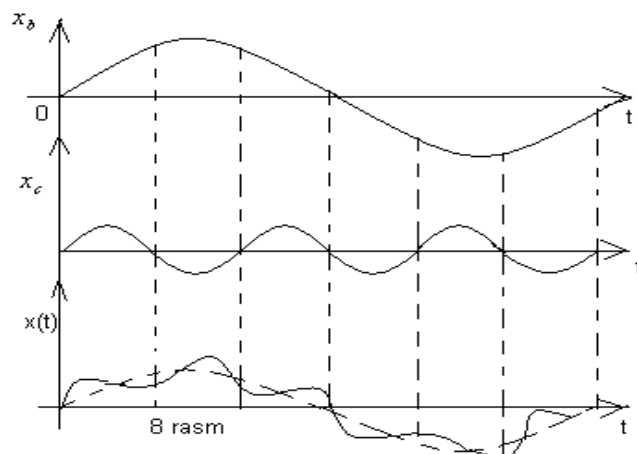
Bu yerda $x(t)$ chastotalari k va ω bo'lgan ikkita garmonik tebranishlar:

$$x_a(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k} \sin kt \quad \text{va}$$

$$x_b(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

larni yig'indisidan iborat.

$k > \omega$ bo'lgandagi tebranish xarakteri 8-rasmda tasvirlangan.



(2.3.15) formulada $2n > 0$ bo'lgan holni ko'ramiz. Bu hol formuladagi e^{-nt} ko'paytuvchi bo'lgan holda t – ning o'sishi bilan juda tez kamayadi (so'nuvchi mahsus tebranishni ko'rsatuvchi had). T – yetarli katta bo'lganda tebranishning xarakteri e^{-nt} ko'paytuvchisi bo'lgan had bilan aniqlanadi, ya'ni:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2) + 4n^2\omega^2} \{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n \cos \omega t \} \quad (2.3.19)$$

$$\text{Agar } \frac{A(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2) + 4n^2\omega^2} = M \cos \delta, \quad - \frac{A2n\omega}{(k^2 - \omega^2) + 4n^2\omega^2} = M \sin \delta,$$

$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2) + 4n^2\omega^2}}$ deb belgilasak, u holda (2.3.19) yechimni quyidagicha yozish mumkin.

$$x(t) = \frac{A}{k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\omega^2}{k^4}}} \sin(\omega t + \delta) \quad (2.3.20)$$

Bu formuladan ko'rinadiki, majburiy tebranishlarning chastotasi k tashqi kuchning chastotasi ω bilan teng bo'lmaydi. n – bilan xarakterlanadigan ichki qarshilik kichik bo'lganda va ω chastota k – chastotaga yaqin bo'lganda tebranishn amplitudasini istagancha katta qilish mumkin, chunki bu holda maxraj istalgancha kichik.

$n = 0$, $\omega^2 = k^2$ bo'lganda esa tenglamaning yechimi (2.3.7) formula bilan ifodalanmaydi.

V. Rezonans bo'lgan holda tebranish tenglamasini yechish. $a_1 = 2n = 0$ ya'ni qarshilik yo'q bo'lgan va $K = \omega$ ya'ni tashqi kuch chastotasi bilan majburiy tebranish chastotasi teng bo'lgan hususiy holni ko'ramiz. Bu holda tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = A \sin kt \quad (2.3.21)$$

Bu tenglamaning $t = 0$ bo'lganda $x_0 = x'_0 = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantruvchi yechimini izlaymiz: Yordamchi tenglama

$$\bar{x}(p)(p^2 + k^2) = A \frac{K}{p^2 + k^2}$$

ko'rinishga ega bundan:

$$x(t) = \frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2}$$

jadvalga asoslanib original funksiya $x(t)$ ni ya'ni (2.3.21) tenglamaning yechimini topamiz:

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right) \quad (2.3.22)$$

Bu yechimni ikkinchi qo'shiluvchisi

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k} t \cos kt \quad (2.3.23)$$

t - cheksiz ortganda chegaralanmagan miqdor bo'lib, (2.3.23) formula bilan ifodalangan tebranish amplitudasi ham cheksiz ortib boradi. Demak (2.3.22) tenglama bilan ifodalangan tebranishning amplitudasi ham cheksiz ortadi.

Majburiy tebranish chastotasi bilan tashqi kuch chastotasi bir xil bo'lganda sodir bo'ladigan bu hol rezonans deb yuritiladi.

2.4 § Ba'zi hususiy hosilali differensial tenglamalarni tekshirish

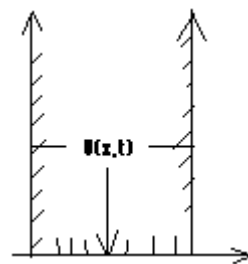
I. Issiqlik tarqalish ya'ni diffuziya tenglamasiga tadbiqi.

Issiqlik tarqalish jarayoni ya'ni diffuziya jarayoni hususiy hosilali tenglama ko'rinishda yoziladi.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{dU}{dt} \quad (2.4.1)$$

Bu tenglamani Laplas almashtirishi orqali yechimini qanday topilishini ko'rib chiqamiz. Bunda issiqlik o'tkazuvchanlik nazariyasini qo'llaymiz. U holda issiqlikni chiziqli o'tkazuvchi $U(x, t)$ bo'ladi (yoki fazodagi chiziqli o'tkazuvchi bo'ladi, lekin bunda temperatura faqat bitta kordinataga bog'liq, ya'ni sohaning har bir kesimi yuzida temperatura o'zgarmas bo'ladi). Aytaylik issiqlik o'tkazgich $\delta = 0$ dan $\delta = l$ gacha cho'zilgan bo'lsin. t o'zgaruvchi vaqtni bildirib $t = 0$ dan $t = \infty$ gacha o'zgaradi. U holda qidirilayotgan $U(x, t)$ funktsiyaning aniqlanish sohasi, agar l chekli bo'lsa xt tekislikni yarim tasmasidan va agar $l = \infty$ bo'lsa, xt tekislikni chorak qismidan iborat bo'ladi.

Aytaylik $t = 0$ vaqtda o'tkazgich ma'lum haroratga ega bo'lsin va u_x ga bog'liq bo'lishi mumkin; uni $U_0(x)$ deb belgilaymiz. $U(x, t)$ funktsiyani boshlang'ich qiymatini ifodalaydi, ya'ni $U(x, t)$ funktsiya



$$U(x, +0) = U_0(x) \quad (2.4.2)$$

shartni qanoatlantirishi kerak.

Fizika qonunlariga asosan ko'rilayotgan masalada bitta va yagona boshlang'ich qiymatlar yetarli; u holda $U_t(x, +0), \dots$ boshlang'ich qiymatlar bizga kerak emas. Bunga asosiy sabab (2.4.1) ko'rinishdagi tenglama t ga nisbatan birinchi tartibli tenglamadir. Issiqlik o'tkazuvchining ikki $x = 0$ va $x = l$ uchlari ma'lum haroratni ushlab turuvchi issiqlik manbayi bilan ulangan bo'lsin, ular vaqtga bog'liq bo'lishi mumkin, u holda quydagi shartlar o'rinli bo'lishi kerak.

$$U(+0, t) = A_0(t), \quad U(l-0, t) = A_1(t) \quad (2.4.3)$$

bu shartlar "chegaraviy shartlar"ni tashkil qiladi. Albatta bu shartlar mumkin bo'lgan yagona shart emas: boshqa hollarda masalan, issiqlik o'tkazgichining bir uchiga manba ulanib, ikkinchi uchidan issiqlik atrof muhitga tarqalsa chegaraviy shartlar boshqacha bo'ladi.

Endi (2.4.1) tenglama uchun (2.4.2) boshlang'ich shartlar va (2.4.3) chegaraviy shartlari bo'lgan holda tasvirlovchi tenglama tuzamiz. Laplas almashtirishini qo'llab (2.4.2) boshlang'ich shartlarni hisobga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$L \left\{ \frac{dU}{dt} \right\} = su(x, s) - U(x, +0) = su(x, s) - U_0(x)$$

x bo'yicha differentsiallash va Laplas almashtirishini o'zaro o'rin almashishini hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$L \left\{ \frac{d^2 U}{dx^2} \right\} = \frac{d^2}{dx^2} L \{ U \} = \frac{d^2 U(x, s)}{dx^2}$$

Tasvirlar fazoga o'tkanimizdan keyin faqat x bo'yicha hususiy hosila qolishini hisobga olib, uni oddiy hosila bilan almashtirishimiz mumkin, almashtirishdan keyin tasvirlovchi tenglama quyidagi ko'rinishga ega.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = su - U_0(x) \quad (2.4.4)$$

Bu tenglamadagi s o'zgaruvchi parametr rolini o'ynaydi masala yechimi unga bog'liq; shuning uchun ham $U(x, s)$ belgilashni kiritdik.

Endi Laplas almashtirishini (2.4.3) chegaraviy shartlarga qo'llaymiz.

$$L\{U(+0, t)\} = L\{A_0(t)\} = a_0(s), \quad L\{U(l-0, t)\} = L\{A_1(t)\} = a_1(s)$$

ni hosil qilamiz.

$L\{U(+0, t)\}$ ni $U(+0, s)$ bilan $L\{U(l-0, t)\}$ ni $U(l-0, s)$ bilan ayniyat ekanligini hisobga olib (2.4.4) tasvirlovchi tenglama uchun qidirilayotgan chegaraviy shartlarni topamiz:

$$u(+0, s) = a_0(s), \quad u(l-0, s) = a_1(s) \quad (2.4.5)$$

(2.4.2) berilgan boshlang'ich shart tasvirlovchi tenglamaga kirdi va u kelajakda avtomatik ravishda hisobga olinadi va bu ko'rib chiqilayotgan usul klassik usulga nisbatan ancha afzalligini ko'rsatadi.

(2.4.4) ko'rinishdagi differensial tenglama berilgan chegaraviy shartlarda odatda quyidagicha integrallanadi. Avval bir jinisli tenglama ixtiyoriy chegaraviy shartlarda yechiladi; bunda berilgan tenglamani bir jinislimas qiluvchi $U_0(x)$ had, ya'ni boshlang'ich harorat nolga teng deb olinadi. Keyin, $a_0(s)$ va $a_1(s)$ chegaraviy qiymatlar nolga teng bo'lgan bir jinislimas tenglama yechiladi; Bunda $A_0(t)$ va $A_1(t)$ chegaraviy haroratlar nolga teng deb olinadi. Bu ikkala yechimlar yig'indisi berilgan tenglamani yechimini beradi.

a) Boshlang'ich temperatura nolga teng, chegaraviy temperaturalar ixtiyori bo'lgan hol

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = su \quad (2.4.6)$$

bir jinsli tenglamaning yechimi oddiy usul bilan bajariladi: $U = e^{kx}$ almashtirish, $k^2 = s$ karakteristik tenglamaga olib keladi. Bu tenglamaning ikkita $k = \pm \sqrt{s}$ yechimi $C_1 e^{x\sqrt{s}} + C_2 e^{-x\sqrt{s}}$ umumiy integralni hosil qiluvchi $e^{x\sqrt{s}}$ va $e^{-x\sqrt{s}}$ hususiy integrallarni beradi. C_1 va C_2 o'zgarmaslarni shunday aniqlash keraki bunda (2.4.5) chegaraviy shartlar bajarilsin. Osonrog'i, avval ikkita hususiy yechim tuzish, ulardan biri chap chegarada 1 qiymatga o'ng chegarada esa 0 qiymatga, ikkinchisi chap chegarada 0 qiymatga, o'ng chegarada 1 qiymatga ega bo'lsin. Bunday yechimlar quyidagicha bo'ladi:

$$U_0(x, s) = \frac{e^{(l-x)\sqrt{s}} - e^{-(l-x)\sqrt{s}}}{e^{l\sqrt{s}} - e^{-l\sqrt{s}}}, \quad U_1(x, s) = \frac{e^{x\sqrt{s}} - e^{-x\sqrt{s}}}{e^{l\sqrt{s}} - e^{-l\sqrt{s}}}$$

Bu funksiyalarni kiritib tasvirlovchi tenglamaning qidirilayotgan yechimini quyidagi ko'rinishda berishimiz mumkin:

$$U(x, s) = a_0(s)U_0(x, s) + a_1(s)U_1(x, s)$$

Endi $U(\tilde{o}, s)$ tasvirga mos keladigon originalni aniqlash qoldi. Masalani yechimini yengillashtirish maqsadida $l \rightarrow \infty$ chegara holi bilan cheklanamiz. $l \rightarrow \infty$ da $U_1(x, s)$ funktsiya nolga teng, $U_0(x, s)$ funktsiya uchun quyidagini hosil qilamiz

$$U(x, s) = \frac{e^{-x\sqrt{s}} - e^{-(2l-x)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2l\sqrt{s}}} \rightarrow e^{-x\sqrt{s}}$$

shunday qilib

$$U(x, s) = a_0(s)e^{-x\sqrt{s}} \quad (2.4.7)$$

funktsiya uchun Laplas almashtirishini teskarisini qo'llash kerak.

$$e^{-x\sqrt{s}} \bullet \circ \frac{x}{2\sqrt{\pi t}^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \psi(x, t) \quad (\tilde{o} > 0)$$

munosabatdan o'ralish teoremasini qo'llab

$$U(x, t) = A(t) \cdot \psi(x, t) \quad (2.4.8)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bunda ψ funktsiya issiqlik tarqalishi nazariyasida ikki tomonlama manbani bildiruvchi funktsiya. (2.4.8) tenglamani o'ng tomonini aniq ko'rinishda yozib olib

$$U(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^t A_0(t - \tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{3/2}} d\tau$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan ko'rinib turibdiki, chegara qiymatlarini $U(0, t) = A_0(t)$ shaklda emas $\lim_{x \rightarrow 0} U(x, t) = A_0(t)$ shaklda olganimiz o'zini oqlaydi.

Haqiqatdan, agar integral ostidagi ifodada $\delta = 0$ ni qo'ysak, integral maxrajda $\tau^{3/2}$ borligi uchun $\tau = 0$ da integral uzoqlashuvchi bo'ladi. Lekin integral aniq qiymatga ega bo'lgan taqdirda ham δ ko'paytuvchi hisobga, u $A_0(t)$ ga emas nolga teng bo'lib qoladi. Boshqa tomondan bir qancha uzoq hisoblashlardan keyin (2.4.8) funksiyani $x \rightarrow 0$ holda $A_0(t)$ qiymatga ega bo'lishini isbotlash mumkin, faqat $A_0(t)$ nuqtada uzluksiz funksiya bo'lsa.

$U(x, +0)$ boshlangich shart qoniqtirilishiga bevosita ishonch hosil qilamiz.

b) Boshlang'ich temperatura ixtiyoriy, chegaraviy temperaturalar nolga teng.

Endi (2.4.4) bir jinsli bo'lmagan tenglamani

$$U(+0, s) = 0, \quad U(l-0, s) = 0$$

chegaraviy shartlarda yechish qoldi. Agar biz avval boshidan $l = \infty$ deb qabul qilsak, u holda yechim

$$U(x, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left\{ \int_0^x U_0(\xi) \left[e^{-(x-\xi)\sqrt{s}} - e^{-(x+\xi)\sqrt{s}} \right] d\xi + \int_x^\infty U_0(\xi) \left[e^{-(\xi-x)\sqrt{s}} - e^{-(\xi+x)\sqrt{s}} \right] d\xi \right\} \quad (2.4.9)$$

ko'rinishda bo'ladi. (Albatta $U_0(x)$ funktsiya cheksizlikda o'zini shunday tutishi kerakki bunda ikkinchi integral yaqinlashuvchi bo'lsin; agar $U_0(x)$ funktsiya chegaralangan bo'lsa, bunday yaqinlashishi taminlanadi).

Teskari Laplas almashtirishi uchun

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}} \bullet - \circ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{l^2}{4t}} = x(a, t)$$

munosabatandan foydalanamiz. Bu munosabatni faqat $\alpha \geq 0$ bo'lgandagina qo'llash mumkin. Ko'rilayotgan holda bu shart bajariladi, chunki har doim $x + \xi \geq 0$ va bundan tashqari 1 – integralda $x - \xi \geq 0$, 2- integralda esa $\xi - x \geq 0$. Integral belgilari ostida almashtirishni bajarib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$U(x, s) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^x U_0(\xi) [\chi(x - \xi_1 t) - \chi(x + \xi_1 t)] d\xi + \int_x^\infty U_0(\xi) [\chi(x - \xi_1 t) - \chi(x + \xi_1 t)] d\xi \right\}$$

$\chi(x - \xi_1 t) = \chi(x + \xi_1 t)$ ekanligini inobatga olgan holda bu yechimni ancha sodda holga keltirish mumkin.

$$U(x, s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty U(\xi) \left[x^{(x-\xi_1 t)} - x^{(x+\xi_1 t)} \right] d\xi \quad (17.10)$$

yanada aniq kuzatishlar shuni ko'rsatadiki agar U_0 funktsiya x nuqtada uzluksiz bo'lsa, bu funktsiya $t \rightarrow 0$ da haqiqatdan ham $U_0(x)$ ga intiladi.

II. Telegraf tenglamasi.

$x = 0$ dan $x = l$ gacha oraliqdagi ikkitali elektr simini ko'rib chiqamiz. Bu sim uzunlik birligiga nisbatan o'zgarmas R – qarshilik, L – induktivlik, C – sig'im, G – yo'qotish qiymatlarga ega.

Bunday simdagi tok, hamda simdagi to'g'ri va teskari yo'nalish orasidagi kuchlanish telegraf tenglama deb ataluvchi tenglama orqali aniqlanadi.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = LC \frac{d^2 U}{dt^2} + (RC + LG) \frac{dU}{dt} + RGU$$

Bunda t – vaqt. Yozuni qisqartirish maqsatida quyidagi belgilashlarni kiritib

$$LC = a, \quad RC + LG = b, \quad RG = c$$

tenglamani sodda ko'rinishga keltiramiz

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - a \frac{d^2 U}{dt^2} - b \frac{dU}{dt} - cU = 0. \quad (2.4.11)$$

Bunda a, b, c doimiylar o'zini fizik mohiyatiga nisbatan musbat yoki nolga teng bo'lishi mumkin. $a > 0$ deb olamiz, chunki $a = 0$ bo'lsa (2.4.11) tenglama issiqlik tarqalish tenglamasiga o'xshab qoladi.

Agar $t = 0$ vaqtda tok va kuchlanish qiymati berilsa, u holda bu $U(x, +0)$ va $U_t(x, +0)$ qiymatlar berilganligini anglatadi. Aytaylik, $t = 0$ paytdagi

ulash vaqtida, simda tok va kuchlanish yo'q bo'lsin; u holda boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi.

$$U(x, +0) = 0, \quad U_t(x, +0) = 0 \quad (2.4.12)$$

$U(\delta, t)$ funksiyani vaqt bo'yicha o'zgarish qonunini ma'lum deb olamiz, ya'ni tok yoki kuchlanish simini boshida va oxiridan ma'lum. Bu quyidagi chegaraviy shartlar berilganligini bildiradi.

$$U(+0, t) = A_0(t), \quad U(l-0, t) = A_1(t) \quad (2.4.13)$$

(2.4.11) tenglama uchun (2.4.12) boshlang'ich shartlarni hisobga olgan holda Laplas almashtirishini qo'llab quyidagi tasvirlovchi tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - (as^2 + bs + c) = 0 \quad (2.4.14)$$

$U(\delta, t)$ funksiya uchun (2.4.13) chegaraviy shart, bu almashtirishda $U(\delta, s)$ tasvir uchun

$$U(+0, t) = a_0(s), \quad U(l-0, s) = a_1(s) \quad (2.4.15)$$

chegaraviy shartlarga o'tadi.

Shunday qilib, masala (2.4.6) tenglamaga o'xshash tenglamaga faqat s o'rniga $as^2 + bs + c$ parametr bilan chegaraviy shartlar esa (2.4.5) shartga o'xshash shartlarga o'tadi. Oldingi paragrafdagi kabi $l \rightarrow \infty$ ga intilsa $x = l$ chegaraga ega bo'lgan shart yo'qoladi va tasvirlovchi tenglamani yechimi (2.4.7) yechimga o'xshash ko'rinishga keladi

$$U(x, s) = a_0(s) e^{-x\sqrt{as^2 + bs + c}} \quad (2.4.16)$$

Endi (2.4.16) tasvirdan originallar fazosiga o'tish kerak. Bu amalni umumiy holda bajarishdan oldin 2 ta hususiy hol uchun ko'rib chiqamiz.

a) Yo'qotishsiz sim.

Agar $b = c = 0$ bo'lsa (2.4.11) tenglama to'lqin tenglamasiga o'tadi.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = a \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (2.4.17)$$

Bu holda $RC + LG = 0$, $RG = 0$ demak yoki $R = 0$ $G \neq 0$ shuning uchun $L = 0$ yoki $G = 0$ $R \neq 0$ shuning uchun $C = 0$ yoki $R = 0$ $G = 0$ shuning uchun C va L ixtiyori bo'lishi mumkin.

$a = LC \neq 0$ bo'lishi shartligidan birinchi 2 ta holat yo'qoladi. Shunday qilib, agar $R = G = 0$ ya'ni o'tkazgichda hech qanday yo'qotish bo'lmasa telegraf tenglamasi to'lqin tenglamasiga o'tadi. Qidirilayotgan funksiya tasviri quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$U(x, t) = a_0(s) e^{-x\sqrt{as}}. \quad (2.4.18)$$

$F(t - a) \circ - \bullet e^{-as} f(s)$ – formulani qo'llab

$$U(x, t) = A_0(t - x\sqrt{a}) \quad (2.4.19)$$

Originalni olamiz. Bunda $t < 0$ holda $A_0(t) = 0$. Olingan natija shuni ko'rsatadiki o'tkazgichda chap chegaradan o'nga qarab $\frac{1}{\sqrt{a}}$ tezlik bilan A_0 to'lqin tarqalmoqda. Haqiqatdan ham agar $t - x\sqrt{a} = T$ bo'lsa u holda chegara qiymat $A_0(T)$ aniq qiymatni t vaqitda x nuqtada qa'bul qiladi, bundan

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}(t - T), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

kelib chiqadi.

b) Buzulishsiz o'tkazgich (signallarni buzmaydigan o'tkazgich)

(2.4.18) tasvirdan original fazoga qaytib o'tish $b = c = 0$ da juda ham sodda bo'ladi, chunki bunda (2.4.16) umumiy yechimda $as^2 + bs + c$ ko'phaddan ildiz birdan hisoblanadi va $\sqrt{as}$ ga teng bo'ladi. $as^2 + bs + c$ ko'phad chiziqli ifodaning kvadratidan iborat bo'lganda ham masala oson yechiladi. Ma'lumki, bu hol faqat va faqat

$$as^2 + bs + c = \frac{1}{a} \left[\left(as + \frac{b}{2} \right)^2 + \left(as - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) \right]$$

ayniyatning o'ng tomonidagi ikkinchi qavis ichidagi had nolga teng bo'lsa ya'ni

$$as - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0 \quad (2.4.20)$$

bo'lsagina bajariladi. a, b, c larni ularning R, L, C va G lar orqali ifodasi bilan almashtirib quyidagini hosil qilamiz

$$LCRG - \frac{1}{4}(RC + LG)^2 = -\frac{1}{4}(RC - LG)^2 = 0.$$

Ko'rinib turibdiki doimiylik orasida doimo

$$RC = LG \quad (2.4.21)$$

munosabat o'rinli bo'lishi shart.

Agar (2.4.21) shart bajarilsa u holda

$$as^2 + bs + c = \left(\sqrt{a}s + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

va $U(x, s)$ tasvir quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$U(x, s) = a_0(s) e^{-x\left(\sqrt{a}s + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)} \quad (2.4.22)$$

Unga mos kelgan original

$$U(x, t) = e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x} A_0(t - x\sqrt{a})$$

bunda $t > 0$ da $A_0(t) = 0$.

Bunday holda chap chegarada qo'yilgan qo'zg'alish o'nga tarqaladi faqat endi bu

qo'zg'alish $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ logarifimik dekrement bo'yicha so'nadi. Bunday so'nishni

tarqalishi buzilishsiz sodir bo'ladi, chunki t oniy vaqt ichida x ni xar bir nuqtasida bitta chegaraviy qo'zg'alish sodir bo'lib, boshqa chegaraviy qo'zg'alishlar unga ta'sir etmaydi (faqat shuning uchun (2.4.21) shart bajarilgan holda simda signal buzilishi bo'lmaydi deyiladi)

d) Umumiy holat

Agar $d = as - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \neq 0$ bo'lsa u holda (2.4.16) tasvirga mos originalni

aniqlash uchun $I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}$ Bessel funksiyasidan foydalanish

zarur.

Bunda biz

$$e^{-x\sqrt{as^2+bs+c}} = e^{-x\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-x\sqrt{as}} - x\sqrt{\frac{d}{a}} \int_{x\sqrt{a}}^{\infty} e^{-st} e^{-\frac{b}{2a}t} \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}} dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu formulani quyidagicha tushunish kerak. Chap tomondagi funksiya ikkita qo'shiluvchilarga ajraydi, ulardan birinchisi, (2.4.22) buzilishsiz o'tkazgich uchun funksiya qanday ko'rinishga ega bo'lsa o'shandek, ikkinchisi esa

$$V(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{agar } 0 \leq t < x\sqrt{a} \text{ bo'lsa} \\ -\sqrt{\frac{d}{a}} e^{-\frac{b}{2a}t} \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}} & \text{agar } t \geq x\sqrt{a} \end{cases}$$

funktsiyaning Laplas almashtirishiga teng.

Birinchi qo'shiluvchiga $F(t-a) \circ - \bullet e^{-as} f(s)$ formulani qo'llab, ikkinchisiga

$F_1 * F_2 = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau$ formulani qo'llab (2.4.16) tasvirga $0 \leq t < x\sqrt{a}$ da

$U(x, t) \equiv 0$ originalni mos kelishini va $t \geq x\sqrt{a}$ da

$$U(x, t) = e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x} A_0(t - x\sqrt{a}) + A_0(t) * V(t, x) = \\ = e^{-\frac{b}{2\sqrt{a}}x} A_0(t - x\sqrt{a}) - x\sqrt{\frac{d}{a}} \int_{x\sqrt{a}}^t A_0(t-\tau) e^{-\frac{b}{2a}\tau} \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\sqrt{\tau^2-ax^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-ax^2}} d\tau$$

Original mos kelishini topamiz. Shunday qilib, t vaqt birligida x nuqtada to'g'ri keladigan fazoviy so'nuvchi chegaraviy $A_0(t - x\sqrt{a})$ qo'zg'alishga bu nuqtaga oldingi vaqt momentlarida qo'yilgan barcha chegaraviy qo'zg'alishlar yig'indisi $A_0(t - \tau)$ qo'yiladi va bu qo'zg'alish uzatilishini buzilishiga olib keladi.

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishda Laplas almashtirishi va uning xossalari, Laplas almashtirishini oddiy va hususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga tadbig'i o'rganilgan.

Birinchi bob birinchi paragrafda Laplas almashtirishi ta'rifi va ba'zi funksiyalarning Laplas almashtirishi o'rganilgan. Ikkinchi paragrafda Laplas almashtirishining xossalari va bu xossalariga mos misollar va ba'zi bir original va ularning tasvirlari jadvali keltirilgan.

Ikkinchi bob birinchi paragrafda Laplas almashtirishi yordamida oddiy differentsial tenglamalar uchun, ikkinchi paragrafda oddiy differentsial tenglamalar sistemasi uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechish usuli misolar yordamida keltirilgan. Uchinchi paragrafda mexanik tebranishlarning differensial tenglamalari va unga qo'yilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Laplas almashtirishi yordamida topilgan. To'rtinchi paragrafda issiqlik tarqalish tenglamasi va telegraf tenglamasi uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar Laplas almashtirishi yordamida topilgan.

Bitiruv malakaviy ishda o'rganilgan natijalar nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lib, ulardan differentsial tenglamalar va matematik fizika tenglamalariga qo'yilgan masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. И.А.Каримов. Жахон молиявий – иқтисодий инқироzi, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишнинг йўллари ва чоралари. Тошкент - «Ўзбекистон», 2009 йил.
2. И.А.Каримов. Юксак маънавият – енгилмас куч. Тошкент - «Маънавият», 2008 йил.
3. Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”. Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори – Тошкент, Шарқ 1997.
4. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида” ги Қонуни. Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори – Тошкент, Шарқ 1997.
5. М.С.Салохитдинов, Г.Н. Насритдинов. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, Ўқитувчи, 1992й.
6. М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабот-Методи теории функции комплексного переменного.
7. В.А.Гончаров-Теория функций комплексного переменного.
8. А.И.Макушевич и Л.А. Макушевич-Введение в теорию аналитических функций.
9. П.И.Романовский-Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.
10. В.Е.Шнейдер, А.И.Слудский, А.С.Шумов-Краткий курс высшей математики. Книга 2.
11. Н.С.Пискунов-Дифференциальное и интегральное исчисление Книга 2.
12. Г.Корн и Т.Корн-Справочник по математика.
13. М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко-Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.
14. Я.С.Бугров, С.М.Никольский-Задачник.
15. Г.Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. ФИЗМАТГИЗ Москва.1960.

16. www.ziynet.uz
17. www.ref.uz
18. www.info.uz