

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

" $A(z)$ -ANALITIK FUNKSIYALAR
UCHUN SHVARS LEMMASI"

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bituruvchi: Tirkasheva. G

Ilmiy rahbar: Tishaboyev. J

Bitiruv Malakaviy ishi kafedrada dastlabki himoyadan o‘tdi:

- sonli bayonnomasi "__" may 2018 yil

TOSHKENT - 2018

M U N D A R I J A

Kirish	3
I bob: Analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi	5
1.1-§ . Analitik funksiyalar haqida asosiy tushunchalar.....	5
1.2-§ . Analitik funksiyalarning asosiy xossalari	13
1.3-§ . Analitik funksiyalar uchun ba’zi geometrik prinsiplar	17
1.4-§ . Analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi uning bir necha umumiy ko’rinishlari	27
II bob. $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi	30
2.1-§ . $A(z)$ -analitik funksiyalar va ularning ba’zi xossalari.	30
2.2-§ . $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi va uning bir necha umumiy ko’rinishlari.....	48
Xulosa	51
Foydalanilgan adabiyotlar	52

KIRISH

Mazkur bitiruv malakaviy ishi $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasiga bag'ishlangan. Ma'lumki $A(z)$ -analitik funksiyalar Beltrami tenglamasini yechimi bo'lib, kvazikonform akslantirishlar bilan uzviy bog'liq.

Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi. Hozirgi kunda tomografiya masalalarini (rentgen, seysmik va boshqalar) yechishda $A(z)$ -analitik funksiyalar nazariyasidan keng qo'llanilmoqda. Bu masalalar funksiyani tiklashga bag'ishlangan Radon masalasi bilan bo'g'liq. $A(z)$ -chiziqli uzluksiz operator bo'lganda bu masalalar A.L.Buxgeym va S.G. Kazansev ishlarida qaralgan. Shvars lemmasi analitik funksiyalarning geometrik nazariyasida, ya'ni konform izomorfizmlar nazariyasi, uzluksiz modullarni baholashda, variatsion hisob masalalarida, opraksimatsiya nazariyasi va boshqa ko'plab sohalarda tadbqiqilinadi.

Tadqiqot ob'yekti va predmetning belgilanishi. $A(z)$ -analitik funksiyalar va uning xossalari, $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun Koshi formulasi va Koshi teoremasi, $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun ba'zi geometrik prinsplar va Shvars lemmasini o'rganish.

Mavzu bo'yicha qisqacha adabiyotlar tahlili. Bitiruv malakaviy ishi bo'yicha Ahlfors L [7] kitobida Beltrami tenglamasi, kvazikonform akslantirishlar va ularning xossalari keltirilgan. Arbuzov E.V, Buxgeym A.L [2] maqolasida A -operator hol uchun A -garmonik funksiyalar o'rganilgan. Bers L [3] ishida A -analitik funksiyalar nazariyasini gaz denamika masalalarini yechishga qaratgan. Buxgeym A.L, Kazansev S.G [4] maqolasida bu nazariyani tomografiya masalalarini yechishda tadbqiqilingan. Sadullayev A.S, Jabborov N.M[8] maqolasida $A(z)$ -analitik funksiyalar sinfi keltirilgan. Jabborov N.M, Otaboyev T.U [5-6] A -funksiya bo'lgan xol uchun Koshi teoremasi va integral formulasini keltirgan. Tishaboyev J.K, Otaboyev T.U, Xursanov Sh.Y [9] larning maqolasida $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun chegirmalar nazariyasi va

argument prinsiplari isbotlangan. Jabborov N.M, Otaboyev T.U, Xursanov Sh.Y [11] da Shvars tengsizligi qavariq sohalar uchun isbotlangan.

Tadqiqotda qo'llanilgan uslublarning qisqacha tavsifi. $A(z)$ -analitik funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish, Koshining integral formulasini qo'llash.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishining natijalaridan ya'ni yagonalik teoremasi orqali yaqinlashuvchi ketma-ketlikda berilgan $A(z)$ -analitik funksiyani butun qavariq sohada aniqlash mumkin bo'ladi. $A(z)$ -funksiya o'zgarmas bo'lganda esa tomografiya masalalarini yechishda qo'llaniladi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Bitiruv malakaviy ishda qavariq sohalarda $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasi isbotlangan va bu teoremadan sohaning saqlanish prinsipini isbotlashda foydalanilgan.

Bitiruv malakaviy ishining qisqacha tavsifi. Bitiruv malakaviy ishi kirish, oltita paragrafga bo'lingan ikkita bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. 1-bob analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasiga bag'ishlangan bo'lib, unda analitik funksiyalar haqida asosiy tushunchalar va ularning asosiy xossalari, analitik funksiyalar uchun ba'zi geometrik prinsiplar, Shvars lemmasi va uning bir nechta umumiy ko'rinishlari o'rganiladi. 2-bob $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi va uning bir necha umumiy ko'rinishlariga bag'ishlangan bo'lib, unda $A(z)$ -analitik funksiyalar va ularning ba'zi xossalari, $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasi, sohaning saqlash prinsipi, Shvars lemmasi va uning bir necha umumiy ko'rinishlari keltirilgan.

I Bob. Analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi

1.1-§ .Analitik funksiya haqida tushunchalar.

Faraz qilaylik bizga $w = f(z)$ funksiya D to'plamda ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan bo'lsin. Bu D to'plamdan z_0 nuqtani olib unga shunday Δz orttirma beraylikki, $z_0 + \Delta z \in D$ bo'lsin. Natijada $f(z)$ funksiya ham z_0 nuqtada

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

1.1.1-ta'rif. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

mavjud va chekli bo'lsa bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

1.1.2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya D to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya D to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Unda ravshanki,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

bo'lib,

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z_0 + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

bo'ladi. Bu yerda $\Delta z \rightarrow 0$ da $\alpha(z_0, \Delta z)$ ham nolga intiladi:

$$\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$$

Natijada quyidagi tasdiqqa kelamiz.

1.1.1-Teorema. [10] $f(z)$ funksiyaning $z_0 \in D$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning orttirmasi $\Delta f(z_0)$ ni ushbu

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

ko'rinishida ifodalanishi zarur va yetarli. Bunda A miqdor Δz hamda $\alpha(z_0, \Delta z)$ larga bog'liq bo'lmagan miqdor.

Biz yuqorida kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi kabi tushunchalarning kiritilishi kabi ekanligini ko'rdik. Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning hosilasini hisoblashda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilasini hisoblashdagi ma'lum qoida va jadvallardan foydalanish mumkin.

Ba'zi qoidalarni keltiramiz:

1. Agar $f(z) = c \equiv \text{const}$ bo'lsa, $f'(z) = 0$ bo'ladi,
2. $(k \cdot f(z))' = k \cdot f'(z)$, $k \equiv \text{const}$,
3. $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$,
4. $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$,
5. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z) \neq 0$
6. Agar $w = f(z)$, $F(z) = \varphi(w)$ bo'lib, $F = \varphi(f(z))$ bo'lsa, u holda
 $(\varphi(f(z)))' = \varphi'(w) \cdot f'(z)$ bo'ladi,
7. Agar $w = f(z)$ va $z = f^{-1}(w)$ bo'lsa, $(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)}$, $(f'(z) \neq 0)$ bo'ladi.

Garchi kompleks hamda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar hosilalari tushunchalarining kiritilishi bir xil bo'lsa ham, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilaga ega bo'lsin deyilishi (binobarin, differensiallanuvchi bo'lsin deyilishi) talabi ancha og'ir talab hisoblanadi. Bitta sodda misolni qaraylik.

Ushbu $f(z) = x$ funksiyani olaylik. Agar bu funksiya haqiqiy o'qda joylashgan E to'plamda ($E \subset \mathbb{R}$) qaralsa, ravshanki, u hosilaga ega bo'lib, $f'(z) = 1$ bo'ladi.

Endi $f(z) = x$ funksiyani kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da qaraylik. Ravshanki bu funksiya uchun $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$ bo'ladi.

Bu nisbat $z \rightarrow z_0$ da limitga ega emas, chunki, $x = x_0$ $y \neq y_0$ da nisbat 0 ga teng, $x \neq x_0$ $y = y_0$ da esa 1 ga teng. Demak, $f(z) = x$ funksiya differensiallanuvchi emas.

Faraz qilaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya biror D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan bo'lib $z_0 = x_0 + y_0 \in D$ bo'lsin.

1.1.3-Ta'rif. Agar haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada ($(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$) differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida (qisqacha $\mathbb{R}^2$ ma'noda) differensiallanuvchi deyiladi.

1.1.2-Teorema [10]. $f(z)$ funsiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun

1. $f(z)$ ning z_0 nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida ($\mathbb{R}^2$ ma'noda) differensiallanuvchi bo'lishi va

2. Ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1.1)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada ($z_0 \in D$) $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

ya'ni

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z + \alpha \Delta z \quad (1.1.2)$$

bo'lad. Bu yerda $\Delta z = z - z_0 = (x + iy) - (x_0 - iy_0) = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$,

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= f(z) - f(z_0) = [u(x, y) + iv(x, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] = \\ &= [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)] = \Delta u + i\Delta v \end{aligned}$$

bo'lib, α esa Δx va Δy larga bog'liq va ular nolga intilganda nolga intiladi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \alpha = 0$$

Endi $f'(z_0)$ hamda α larni

$$f'(z_0) = a + ib, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad \left(\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha_2 = 0 \right)$$

deb, (1.1.1) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(\Delta x + i\Delta y)$$

Bu tenglikdan, haqiqiy va mavhum qismlarini tenglab quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y = \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y, \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y = \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Demak, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi. Ayni paytda $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $\mathbb{R}^2$ ma'noda differensiallanuvchi bo'lad.

Madomiki, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega ekan, unda $\Delta z \rightarrow 0$, jumladan $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta y = 0$), $\Delta z = \Delta y \rightarrow 0$ ($\Delta x = 0$) bo'lganda ham $\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$ nisbatning limiti har doim $f'(z_0)$ ga teng bo'laveradi. (1.1.3) tengliklar

$\Delta z = \Delta x$ ($\Delta y = 0$) bo'lganda

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x + \alpha_1\Delta x \\ \Delta v &= b\Delta x + \alpha_2\Delta x, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$\Delta z = \Delta y$ ($\Delta x = 0$) bo'lganda esa

$$\begin{aligned} \Delta u &= -b\Delta y - \alpha_1\Delta y \\ \Delta v &= a\Delta y + \alpha_2\Delta y \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

tenglikka keladi.

(1.1.4) munosabatdan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \frac{\partial v}{\partial x} = b,$$

(1.1.5) munosabatdan esa

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -b, \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

bo'lishini topamiz. Bu tenglikdan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $\mathbb{R}^2$ ma'noda differensiallanuvchi bo'lib, teoremada keltirilgan ikkinchi shart bajarilsin. $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y.$$

bo'ladi.

Bu yerda $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ larning har biri nolga intiladi. U holda

$$\Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \right]$$

bo'ladi. Teoremaning ikkinchi sharti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

dan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) - i \frac{\partial u}{\partial y} (\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2) \Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta z + \left[(\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Bu tenglik esa

$$\frac{f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{\partial y}{\partial z} \quad (1.1.6)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan

$$(\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{\partial y}{\partial z}$$

ifoda uchun

$$\begin{aligned} \left| (\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{\partial y}{\partial z} \right| &\leq |\alpha_1 + i\beta_1| \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| + |\alpha_2 + i\beta_2| \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| \leq \\ &\leq |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta_1| + |\beta_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi, chunki $\Delta z \rightarrow 0$ da ya'ni $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ da $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \beta_1 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow 0$ shuni e'tiborga olib, $\Delta z \rightarrow 0$ da (1.16) tenglikda limitga o'tib

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

bo'lishini topamiz. Demak $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega va

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Teoremada keltirilgan (1.1.1) shartlar Koshi-Riman shartlari deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya ($f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$) $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ ($D \subset \mathbb{C}$) nuqtada $\mathbb{R}^2$ ma'noda differensiallanuchi bo'lsin. Ushbu

$$du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0)$$

ifoda $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi differensial deyiladi va $df(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(z_0) = du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0).$$

Ravshanki,

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$df = \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right] = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Demak,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1.1.7)$$

Quyidagi

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

o'zgaruvchilarni olaylik. Ravshanki,

$$dz = dx + i dy,$$

$$d\bar{z} = dx - i dy$$

Bu tengliklardan

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \quad (1.1.8)$$

bo'lishini topamiz.

(1.1.7) va (1.1.8) tengliklardan

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Agar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

ko'rinishida belgilansa unda $f(z)$ funksiya differensiali uchun ushbu

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

tenglikka kelamiz.

Aytaylik, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar biror nuqtada Koshi-Riman shartlarini bajarsin:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Unda (1.1.9) tenglikka ko'ra shu nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Aksincha, $f(z)$ funksiya uchun biror nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

bo'lsin. Ravshanki, (1.1.9) tenglikka ko'ra shu nuqtada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

bo'ladi, ya'ni Koshi- Riman shartlari bajariladi.

Demak, nuqtada Koshi-Riman shartlarining bajarilishi shu nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

tenglikning o'rinli bo'lishiga ekvivalent ekan. Bu hol yuqorida keltirilgan 1.1.2.teoremani quyidagicha ifodalash mumkinligini ko'rsatadi.

1.1.3-Teorema.[10] $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun

1) $f(z)$ ning z_0 nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida ($\mathbb{R}^2$ ma'noda) differensialla-nuvchi bo'lishi va

2) shu nuqtada ushbu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

Agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, shu nuqtada

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ bo'lib, funksiyaning hosilasi

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z},$$

differensialli esa

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'(z_0) dz$$

ko'rinishida bo'ladi.

Kompleks analizda hosilaga ega bo'lgan funksiyalar C

-differensiallanuvchi funksiyalar deyiladi.

1.1.4-ta’rif. Agar $f(z)$ funksiya z_0 ($z_0 \in D$) nuqtaning biror

$U(z_0, \varepsilon)$ atrofida ($U(z_0, \varepsilon) \subset D$) differensiallanuvchi bo’lsa, z_0 nuqtada golomorf (yoki analitik) deb ataladi.

1.1.5-ta’rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo’lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi. Odatda D sohada golomorf bo’lgan funksiyalar sinfi $\mathcal{O}(D)$ kabi belgilanadi.

1.1.6-ta’rif. Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z=0$ nuqtada golomorf bo’lsa, $f(z)$ “ ∞ ” nuqtada golomorf deyiladi.

1.1.7-ta’rif. Agar $\overline{f(z)}$ funksiya z_0 ($z_0 \in D$) nuqtada golomorf bo’lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada antigolomorf deyiladi.

1.2-§ . Analitik funksiyalarning asosiy xossalari

Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasida asosan golomorf (analitik) funksiyalar o’rganiladi. Ushbu bo’limda biz golomorf funksiyalarning muhim xossalarini keltirib o’tamiz.

1° **Koshi teoremasi.** Aytaylik $f(z)$ funksiya biror bog’lamli D sohada ($D \subset C_z$) golomorf bo’lsin. U holda $f(z)$ funksiyaning D sohada yotuvchi har qanday silliq (bo’lakli silliq) γ yopiq chiziq (yopiq kontur) bo’yicha integrali nolga teng bo’ladi.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

2° **Koshining integral formulasi.** Agar $f(z)$ funksiya D sohada ($D \subset C_z$) golomorf bo’lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo’lsa, u holda $\forall z \in D$ uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

3° **Golomorf funksiyaning istalgan tartibdagi hosilaga ega bo’lishi.**

Agar $f(z)$ funksiya D sohada ($D \subset C_z$) golomorf bo’lsa u holda $f(z)$

funksiya D da istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lib,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \quad (1.2.1)$$

bo'ladi. Bu yerda γ - D sohada yotuvchi, silliq (bo'lakli silliq) yopiq chiziq bo'lib, z esa γ chiziq bilan chegaralangan sohaga tegishli nuqta.

Isbot. Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

bo'ladi.

z nuqtaga Δ ortirma berib, $f(z)$ funksiyani orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z-\Delta z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) \left(\frac{1}{t-z-\Delta z} - \frac{1}{t-z} \right) dt = \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)} dt \end{aligned}$$

Unda

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)} dt$$

bo'ladi. Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)^2} dt \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Endi quyidagi integralni hisoblaymiz: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)^2} dt$

Ravshanki,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(t)}{(t-z-\Delta z)(t-z)^2} dt \right| < \frac{|\Delta z|}{2\pi} M \int_{\gamma} \frac{|dt|}{|t-z-\Delta z||t-z|^2}$$

bunda

$$M = \max_{\gamma} |f(t)|$$

Agar z nuqtadan γ chiziqqacha bo'lgan masofani d ($d > 0$) desak, unda

$$|t - z| \geq d, |t - z - \Delta z| > d$$

bo'lib,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(t)}{(t - z - \Delta z)(t - z)^2} dt \right| < \frac{|\Delta z| M l}{2\pi d^2} \quad (1.2.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda l - γ chiziqning uzunligi. (1.2.3) munosabatni e'tiborga olib, $\Delta z \rightarrow 0$ da (1.2.2) tenglikda limitga o'tib,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^2} dt$$

bo'lishini topamiz.

Endi $f'(z)$ funksiyani olib, uning uchun

$$\frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z}$$

ni hisoblaymiz:

$$\frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_{\gamma} f(t) \left(\frac{1}{(t - z - \Delta z)^2} - \frac{1}{(t - z)^2} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) \frac{2(t - z) - \Delta z}{(t - z - \Delta z)^2 (t - z)^2} dt$$

Yuqoridagi mulohazaga binoan, avvalo

$$\begin{aligned} \frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} &= \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^3} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) \frac{2(t - z) - \Delta z}{(t - z - \Delta z)^2 (t - z)^2} dt - \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^3} dt = \\ &= \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^3} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) \Delta z \frac{3(t - z) - 2\Delta z}{(t - z - \Delta z)^2 (t - z)^3} dt \end{aligned}$$

bo'lishini, so'ngra

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) \Delta z \frac{3(t - z) - 2\Delta z}{(t - z - \Delta z)^2 (t - z)^3} dt \right| < \frac{1}{2\pi} M |\Delta z| M_1 l \quad \left(\text{bunda } \left| \frac{3(t - z) - 2\Delta z}{(t - z - \Delta z)^2 (t - z)^3} \right| < M_1 \right)$$

ekanini hisobga olib, $\Delta z \rightarrow 0$ da ushbu

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^3} dt \quad (1.2.4)$$

tenglikka kelamiz.

Demak, $f(z)$ fuksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega va bu hosila uchun (1.2.4) formula o'rinli.

Xuddi shu yo'l bilan $f(z)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo

n -tartibdagi hosilalarining mavjudligi ko'rsatiladi.

$f(z)$ funksiyaning n -tartibli ($n=3,4,5,\dots$) hosilasi uchun (1.2.1) formulaning o'rinli bo'lishi matematik induksiya yordamida isbotlanadi.

4° **Funksiyaning Teylor qatoriga yoyish.** Agar $f(z)$ funksiya D sohada ($D \subset C_z$) golomorf bo'lsa, u holda $a \in D$ nuqtada (a nuqtaning

$$U_\rho = \{z \in C_z : |z-a| < \rho, \rho > 0 \subset D$$

atrofida) Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

5° **Liuvill teoremasi.** Agar $f(z)$ funksiya kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da (kompleks tekislikning har bir nuqtasida) golomorf bo'lib, u chegaralangan bo'lsa, $f(z)$ funksiya $\mathbb{C}$ da o'zgarmas bo'ladi.

6° **Morera teoremasi.** Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya biror bog'lamli D sohada ($D \subset C_z$) aniqlangan va uzluksiz bo'lib, γ esa shu D sohada yotuvchi ixtiyoriy silliq (bo'lakli silliq) yopiq chiziq bo'lsin. Agar

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

7° **Yagonalik teoremasi.** Faraz qilaylik $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar D sohada ($D \subset C_z$) golomorf bo'lsin. Agar bu funksiyalar D sohaga tegishli va hech bo'lmaganda bitta limit nuqta z_0 ($z_0 \in D$) ga ega bo'lgan E to'plamda ($E \subset D$) bir-biriga teng

$$f(z) = g(z), (z \in E)$$

bo'lsa, u holda $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar D sohada aynan bir-biriga teng bo'ladi:

$$f(z) \equiv g(z), (z \in D)$$

8° **Veyershtrass teoremasi.** Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

funksional qatorning har bir $f_n(z)$ ($n=1,2,\dots$) hadi D sohada ($D \subset C_z$) golomorf bo'lib, bu D sohada yotuvchi ixtiyoriy F yopiq to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator yig'indisi $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

9° **Golomorf funksiyaning nollari haqidagi teorema.** Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf bo'lib, shu $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin: $f(a)=0$. U holda yoki $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida nolga teng: $f(z) \equiv 0$, yoki a nuqta shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqtadan boshqa noli bo'lmaydi.

1.3-§ . Analitik funksiyalar uchun ba'zi geometrik prinsiplar

Aytaylik $f(z)$ funksiya $D = \{z \in C : 0 < |z-a| < r\}$ sohada golomorf bo'lsin. Ushbu

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} f(z) \quad (1.3.1)$$

munosabatni quraylik. Odatda, bu munosabatdagi $\frac{f'(z)}{f(z)}$ nisbat $f(z)$ funksiyaning **logarifmik hosilasi** deyiladi.

Faraz qilaylik, $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning n tartibli (karrali) noli bo'lsin. Unda $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$ bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf va $\varphi(a) \neq 0$ bo'ladi. Natijada (1) tenglikning chap tomoni ushbu ko'rinishga keladi:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{[(z-a)^n \varphi(z)]'}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1} \varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{1}{z-a} \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

Bu tenglikdagi

$$\frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

funksiya a nuqtada golomorf va $z=a$ da uning qiymati n ga teng bo'ladi.

Shuning uchun bu funksiya a nuqtaning biror atrofida U_a da Teylor qatoriga yoyiladi (bunda ozod had $c_0 = n$ bo'ladi):

$$\frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = n + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

Shunday qilib,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + c_1 + c_2(z-a) + \dots$$

Temglik o'rinli bo'ladi. Demak, $f(z)$ funksiyaning n tartibli noli bo'lgan $z = a$ nuqta, uning logorifmik hosilasi $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ning birinchi tartibli qutb nuqtasi bo'lar ekan. Demak,

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = n \quad (1.3.2)$$

Odatda $\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)}$ ni $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadagi **logotrifmik chegirmasi** deyiladi. Shunday qilib, $f(z)$ funksiyaning n tartibli noli bo'lgan $z = a$ nuqtada logorifmik chegirma n ga teng bo'lar ekan. Aytaylik, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksdiyaning p - tartibli qutb nuqtasi bo'lsin. Unda

$$f(z) = (z-a)^{-p} \varphi(z)$$

bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf va $\varphi(a) \neq 0$ bo'ladi. Bu holda

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

bo'lib,

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p \quad (1.3.3)$$

bo'ladi. Demak, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning p tartibli qutb nuqtasi bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ qutb nuqtasidagi logorifmik chegirmasi, qutb tartibining teskari ishora bilan olingan qiymatiga teng bo'ladi.

Eslatma. Funksiyaning nollari hamda qutb nuqtalari sonini hisoblashda har bir nol va qutb nuqta nechanchi tartibli bo'lsa shuncha marta hisoblanadi. Faraz qilaylik, D ($D \subset \mathbb{C}$) soha berilgan bo'lib, G soha esa D da kompakt

joylashgan bo'lsin: $G \subset\subset D$

Teorema 1.3.1 [10] $f(z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $f(z)$ funksiyaning D sohada qutb nuqtalaridan boshqa maxsus nuqtalari bo'lmasin;
- 2) G - bir bog'lamli soha;
- 3) G sohaning chegarasi ∂G da $f(z)$ funksiyaning nollari hamda qutb nuqtalari bo'lmasin.

U holda

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (1.3.4)$$

bo'ladi, bunda N soni $f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollari soni, P esa G dagi barcha qutb nuqtalarining soni; ∂G oriyentirlangan chegara.

Isbot: $f(z)$ funksiya G sohadagi chekli $a_1, a_2, \dots, a_n$ nollarga ega bo'lsin. Aks holda, ya'ni funksiyaning nollari cheksiz ko'p bo'lsa, unda ular limit nuqta a_0 ga ($a_0 \in G$) ega bo'ladi, $f(a_0) = 0$ bo'ladi va yagonalik teoremasiga ko'ra G sohada $f(z) \equiv 0$ bo'lib qoladi.

Shuningdek, $f(z)$ funksiya G sohada chekli sondagi $b_1, b_2, \dots, b_m$ qutb nuqtalarga ega bo'ladi. Aks holda, ya'ni funksiyaning G sohadagi qutb nuqtalarining soni cheksiz bo'lsa, unda ular ham limit nuqta b_0 ga ($b_0 \in G$) ega bo'lib, bu nuqta yakkalangangan maxsus nuqta bo'lmaydi.

(1.3.4) integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalari $f(z)$ funksiyaning G sohadagi nollari hamda qutb nuqtalaridan iborat. Bu nuqtalar teoremaning shartiga ko'ra ∂G ga tegishli emas. Chegirmalar haqida Koshi teoremasiga binoan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{b_k} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

bo'ladi.

(1.3.2) va (1.3.3) munosabatlardan foydalanib

$$\operatorname{res}_{a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = n_k, \operatorname{res}_{b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p_k,$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n n_k - \sum_{k=1}^m p_k = N - P$$

Isbot tugadi.

(1.3.4) munosabatdagi integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{d}{dz} [Ln f(z)] dz \quad (1.3.5)$$

∂G egri chiziqda ixtiyoriy z_0 nuqtani olib, uni integrallash egri chizig'idagi boshlang'ich va oxirgi nuqta deb qaraymiz. z_0 nuqtadan boshlab, musbat yo'nalish bo'yicha harakatlanib z_0 nuqtaga qaytib kelganda $Ln f(z)$ funksiyaning qiymati uzluksiz o'zgara borib, uning z_0 nuqtadagi dastlabki qiymati va shu nuqtadagi keyingi qiymati, umuman aytganda, turlicha bo'ladi. Bu holda $f(z_0)$ bir xil bo'lganda ham $Arg f(z_0)$ ning qiymatlari har xil bo'ladi.

Aytaylik, $Arg f(z_0)$ ning z_0 dagi dastlabki qiymati φ_0 , keyingi qiymati φ_1 bo'lsin. Yuqoridagi (1.3.5) tenglikni hamda

$$Ln f(z) = \ln |f(z)| + i Arg f(z)$$

ekanini e'tiborga olib, topamiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} [(\ln |f(z_0)| + i\varphi_1) - (\ln |f(z_0)| + i\varphi_0)] = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi} \quad (1.3.6)$$

Odatda, $(\varphi_1 - \varphi_0)$ ayirma argument orttirmasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\Delta_{\partial G} arg f(z)$;

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \Delta_{\partial G} arg f(z) \quad (1.3.7)$$

(1.3.4), (1.3.6) va (1.3.7) munosabatlardan

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} arg f(z) \quad (1.3.8)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa quyidagini bildiradi: $f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollari soni N dan, barcha qutb nuqtalari soni P ning ayirmasi orientirlangan ∂G chegarani aylanib chiqishdagi argument orttirmasining 2π ga bo'linganiga teng. Bu tasdiq **argument prinsipi** deyiladi.

Ravshanki, $f(z)$ funksiya G sohada qutb nuqtalariga ega bo'lmasa, unda

(1.3.8) formula ushbu

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z) \quad (1.3.9)$$

ko'rinishga keladi.

(1.3.8) tenglikdagi $\Delta_{\partial G} \arg f(z)$ miqdor oddiy geometrik ma'noga ega.

Aytaylik $\omega = f(z)$ funksiya C_z tekislikdagi ∂G ni $f(\partial G)$ chiziqqa akslantirsin.

z nuqta ∂G bo'ylab, uni to'liq aylanib chiqsa, boshi $\omega = 0$ nuqtada, oxiri $\omega = f(z)$ da bo'lgan vektorning uchi $f(\partial G)$ bo'ylab o'zgarib boradi. Unda $\Delta_{\partial G} \arg f(z)$ orttirma $f(z)$ funksiya argumentining o'zgarishi ω vektorining $\omega = 0$ nuqta atrofida $f(\partial G)$ bo'ylab uni to'liq aylanib chiqishlar sonini aniqlaydi. (agar ω vektor $f(\partial G)$ ni $\omega = 0$ atrofida biror marta to'liq aylanib chiqmasa, unda $\Delta_{\partial G} \arg f(z) = 0$ bo'ladi).

Argument prinsipini qo'yidagicha ham ifodalash mumkin: $f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollari soni N dan barcha qutb nuqtalari soni P ning ayirmasi z nuqta ∂G ni musbat yo'nalish bo'yicha bir marta to'liq aylanib chiqqanda $f(z)$ vektorning $\omega = 0$ nuqta atrofda to'liq aylanib chiqishlar soniga teng.

Argument prinsipidan foydalanib quyidagi teorema isbotlanadi.

Teorema 1.3.2 (Rushe teoremasi [10]). *Faraz qilaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar chegaralangan bir bog'lamli G sohaning yopig'i $\bar{G}$ da golomorf bo'lsin. Agar*

$$\forall z \in \partial G \text{ da } |f(z)| > |g(z)| \quad (1.3.10)$$

bo'lsa, u holda G sohada $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalarning nollari soni bir biriga teng bo'ladi.

Isbot: $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalar G sohaning chegarasi ∂G da nollarga ega bo'lmaydi. Haqiqatdan ham, (1.3.10) munosabatga ko'ra, $\forall z \in \partial G$ da

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0$$

$$|f(z)| + |g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

bo'lib, ulardan

$$f(z) \neq 0, f(z) + g(z) \neq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalarning G sohadagi nollarining soni mos ravishda N_f va N_{f+g} bolsin. (1.3.9) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} N_f &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z) \\ N_{f+g} &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg [f(z) + g(z)] \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

bo'ladi. Ravshanki, $z \in \partial G$ da $f(z) + g(z) = f(z) \cdot [1 + \frac{g(z)}{f(z)}]$ bo'lib, undan

$$\Delta_{\partial G} \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_{\partial G} \arg f(z) + \Delta_{\partial G} \arg [1 + \frac{g(z)}{f(z)}] \quad (1.3.12)$$

ekanligi kelib chiqadi

Ushbu $\omega = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ funksiyani qaraylik. (1.3.10) munosabatdan

foydalanib, $z \in \partial G$ da

$$|\omega - 1| = |\frac{g(z)}{f(z)}| < 1$$

bo'lishini topamiz.

z nuqta yopiq kontur ∂G bo'ylab aylanib chiqqanda ω vektorning uchi $|\omega - 1| < 1$ doirada joylashgan yopiq kontir $\omega(\partial G)$ buyicha harakatlanib, $\omega = 0$ nuqtaning atrofini biror marta ham aylana olmaydi.

Shuning uchun

$$\Delta_{\partial G} \arg [1 + \frac{g(z)}{f(z)}] = 0$$

bo'ladi.

(1.3.11) va (1.3.12) munosabatlardan

$$N_{f+g} = N_f$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema 1.3.3 (Gurvis teoremasi [10]) $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf bo'lgan $F_n(z)$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, bu ketma-ketlik shu sohada $F(z)$

funksiyaga tekis yaqinlashsin. Aytaylik, Γ chiziq o'zi chegaralagan soha bilan birga D sohada yotuvchi yopiq to'g'irlanuvchi Jardon chizig'i bo'lib, $\forall z \in \Gamma$ uchun $F(z) \neq 0$ shart bajarilsin. U holda shunday natural $n_0 = n_0(\Gamma)$ son topiladiki, $\forall n \geq n_0$ uchun barcha $F_n(z)$ va $F(z)$ funksiyalar Γ bilan chegaralangan soha ichida bir xil sondagi nollarga ega bo'ladi.

Isbot: $F(z)$ funksiya Γ da uzluksiz va $\forall z \in \Gamma$ uchun $F(z) \neq 0$ shart bajarilgani uchun

$$\inf_{\Gamma} |F(z)| = m > 0$$

bo'ladi. Γ da $F_n(z) \Rightarrow F(z)$ bo'lganligi sababli shunday $n_0 = n_0(\Gamma)$ topiladiki, $\forall n \geq n_0$ va $\forall z \in \Gamma$ lar uchun

$$|F_n(z) - F(z)| < \frac{m}{2}$$

tengsizlik bajariladi. Agar

$$F_n(z) = F(z) + [F_n(z) - F(z)]$$

deb yozib olib,

$$f(z) = F(z) \text{ va } g(z) = F_n(z) - F(z)$$

deb belgilasak, bu funksiyalar Γ chiziq bilan chegaralangan sohaning yopig'ida golomorf bo'lib, $\forall z \in \Gamma$ va barcha $n > n_0$ lar uchun $|f(z)| \geq m > \frac{m}{2} > |g(z)|$ bo'ladi.

U holda $n > n_0$ lar uchun Rushe teoremasini qo'llab, Γ chiziq bilan chegaralangan sohaning ichida $F(z)$ va $F_n(z) = g(z) + F(z)$ funksiyalarning nollari soni tengligini topamiz.

Sohaning saqlanish prinsipi.

Faraz qilaylik, $\omega = f(z)$ funksiya D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan bo'lsin.

Teorema 1.3.4 [10] Agar $\omega = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, $f(z) \neq \text{const}$ bo'lsa u holda D sohaning aksi D^* ($D^* = f(D)$) ham soha bo'ladi.

Isbot: Aytaylik $\omega = f(z)$ funksiya D ($D \subset \mathbb{C}$) sohada golomorf bo'lib, u D sohadani D^* to'plamga ($D^* \subset \mathbb{C}_\omega$) akslintirsin: $D^* = f(D)$.

1) D^* ochiq to'plam bo'lishini isbotlaymiz.

Aytaylik ω_0 nuqta D^* to'plamning ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, z_0 nuqta ($z_0 \in D$) esa uning asllaridan (proobrazlaridan) biri bo'lsin: $f(z_0) = \omega_0$.

D soha bo'lgani uchun nuqtaning shunday

$$U_\xi(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \xi\}$$

atrofi topiladiki, u D sohaning ichida joylashgan bo'ladi va $U_\xi(z_0)$ da $\omega_0 (\omega_0 \in D^*)$ nuqtaning biror atrofida, aksi ω_0 bo'lgan boshqa nuqtalar cheksiz ko'p bo'lsa, bu nuqtalarda $f(z)$ funksiyaning qiymatlari ω_0 ga teng bo'lib, yagonalik teoremasiga ko'ra, $f(z) \neq \text{const}$ bo'lishiga zid bo'lib, qoladi.

Yopiq doira $\overline{U_\xi(z_0)}$ ning chegarasi $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ da $f(z) - \omega_0$ funksiya uzluksiz bo'ladi. Binobarin, γ da bu funksiyaning moduli $|f(z) - \omega_0|$ o'zining minimum qiymatiga erishadi. Uni μ bilan belgilaylik:

$$\mu = \min_{x \in \gamma} |f(z) - \omega_0| \quad (1.3.13)$$

Bunda μ musbat son bo'ladi: $\mu > 0$. Chunki, $\mu = 0$ bo'lsa, u holda γ da shunday z^* nuqta topiladiki, $f(z^*) = \omega_0$ bo'ladi. Bu esa $U_\xi(z_0)$ da z_0 dan boshqa asli bo'lmasligiga ziddir.

μ miqdordan foydalanib, ushbu $K = \{\omega \mid |\omega - \omega_0| < \mu\}$ doirani olamiz.

Endi $K \subset D^*$ bo'lishini ko'rsatamiz. Ravshanki

$$f(z) - \omega_0 = 0 \quad (1.3.14)$$

tenglama $U_\xi(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ doirada kamida bitta ildizga ega. Albatta, $z = z_0$ (14) tenglamaning ildizi bo'ladi. (Malumki, z_0 nuqta (1.3.14) tenglamaning n tartibli ildizi bo'lsa, unda (1.3.14) tenglamaning ildizlari soni n ta hisoblanadi).

Ixtiyoriy $\omega_1 \in K$, $\omega_1 \neq \omega_0$ olib, ushbu

$$f(z) - \omega_1 = (f(z) - \omega_0) + (\omega_0 - \omega_1) = 0$$

tenglamani qaraymiz. (1.3.13) munosabatga ko'ra $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = r\}$ aylanaga $|f(z) - \omega_0| \geq \mu$ va $|\omega_0 - \omega_1| < \mu$ bo'lishini e'tiborga olib, Rushe teoremasidan foydalanib quyidagi xulosaga kelamiz:

Ushbu $f(z) - \omega_0 = 0$ tenglamaning $\gamma = |z - z_0| = r$ aylana ichida qancha ildizlari bo'lsa, $f(z) - \omega_1 = 0$ tenglamaning ham shu aylana ichida shuncha ildizlari bo'ladi.

Binobarin $f(z) - \omega_1 = 0$ tenglama hech bo'lmaganda bitta ildizga ega. Uni z_1 deylik. Demak, $f(z_1) = \omega_1$. Bundan esa, $K = |\omega - \omega_0| < \mu$ doiraning har bir nuqtasi $f(z)$ funksiyaning $U_\xi(z_0) = |z - z_0| < \xi$ ning biror nuqtasidagi qiymatidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, D^* to'plamdagi har bir nuqta o'zining biror atrofi bilan shu D^* ga tegishli bo'lishini topdik: $K \subset D^*$. Bu esa D^* ning ochiq to'plam ekanini bildiradi.

2) D^* bog'lamli to'plam bo'lishini isbotlaymiz.

D^* to'plamga tegishli ω_1 va ω_2 ixtiyoriy nuqtalarni olaylik. Bu nuqtalarning D sohadagi asllaridan biri mos ravishda z_1 va z_2 bo'lsin:

$$z_1 \in D, \quad z_2 \in D$$

$$\omega_1 = f(z_1) \in D^* \quad \omega_2 = f(z_2) \in D^*$$

Shartga ko'ra D sohadan iborat. Demak, z_1 va z_2 nuqtalarni birlashtiruvchi va D ga tegishli bo'lgan uzluksiz $z = z(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ egri chiziq mavjud bo'ladi.

$\omega = f(z)$ funksiya uzluksiz bo'lganligi sababli, uning yordamida bajariladigan akslantirish $z = z(t)$ funksiya egri chiziqni ω_1 va ω_2 nuqtalarni birlashtiruvchi va D^* ga tegishli bo'lgan $\omega = f(z)$ uzluksiz egri chiziqqa o'tkazadi. Bu esa D^* ning bog'lamli to'plam bo'lishini bildiradi.

Shunday qilib, D^* ning ochiq hamda bog'lamli to'plam ekanligini ko'rsatdik. Demak, D^* -soha.

Bu teorema sohaning saqlanish prinsipi deb yuritiladi.

Modulning maksimum prinsipi.

Aytaylik, $\omega = f(z)$ funksiya D ($D \subset \mathbb{C}$) sohada berilgan bo'lsin.

Teorema 1.3.5 [10] *Agar $\omega = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, uning moduli $|f(z)|$ biror z_0 ($z_0 \in D$) nuqtada maksimumga (lokal*

maksimumga) erishsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada o'zgarmas bo'ladi.

Isbot: Faraz qilaylik, D sohada $f(z_0) \neq \text{const}$ bo'lib, u D sohani D^* ga akslantirsin: $D^* = f(D)$. Sohaning saqlanish prinsipiga ko'ra D^* soha bo'ladi. Unda $z_0 \in D$ nuqtaning aksi $\omega_0 = f(z_0)$ nuqta o'zining biror atrofi $K = \{\omega - \omega_0 | < \xi\}$ bilan D^* sohaga tegishli bo'ladi. Bu K atrofda shunday ω_1 nuqta olamizki, $|\omega_1| > |\omega_0|$ bo'lsin, u holda ω_1 nuqtaning asli z_1 nuqta ($f(z_1) = \omega_1$) biror $U = \{z - z_0 | < r\}$ doira ichida joylashgan bo'lib, $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $f(z)$ funksiyaning moduli $|f(z)|$ ning z_0 nuqtada maksimumga erishishiga ziddir. Demak, D sohada $f(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi.

Bu teorema **modulning maksimum prinsipi** deyiladi. Uni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

Teorema 1.3.6 [10] Agar $f(z)$ funksiya D sohada ($D \subset C_z$) golomorf bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $|f(z)|$ funksiya o'zining maksimum qiymatiga D sohaning chegarasi ∂D da erishadi.

Isbot: Ravshanki, $|f(z)|$ funksiya yopiq $\bar{D}$ to'plamda uzluksiz. Binobarin, u $\bar{D}$ da o'zining maksimum qiymatiga erishadi.

Agar $f(z) \neq \text{const}$ bo'lsa, unda $|f(z)|$ funksiya D sohada maksimumga erisha olmaydi. Shuning uchun $|f(z)|$ o'zining maksimum qiymatiga ∂D da erishadi.

Agar $f(z) = \text{const}$ bo'lsa, unda $|f(z)|$ funksiya $\bar{D}$ to'plamning har bir nuqtasida maksimumga, jumladan ∂D da ham maksimumga erishadi.

Xuddi yuqoridagidik tasdiq $|f(z)|$ ning minimumi uchun, umuman olganda, to'g'ri emas. Masalan, $f(z) = z$ funksiya $|z| < 1$ doirada golomorf va $f(z) \neq \text{const}$, lekin $|f(z)|$ doiraning ichki $z = 0$ nuqtasida minimumga erishadi. Ammo bu hol uchun quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema 1.3.7 [10] Agar $f(z)$ funksiya $D (D \subset \mathbb{C})$ sohada golomorf bo'lib, $\forall z \in D$ uchun $f(z) \neq 0$ bo'lsa va $|f(z)|$ biror $z_0 (z_0 \in D)$ nuqtada minimumga erishsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada o'zgarmas bo'ladi.

Isbot: Agar $g(x) = \frac{1}{f(z)}$ deb belgilasak, unda $g(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, $|g(z)|$ funksiya z_0 nuqtada maksimumga erishadi. Unda maksimumlik prinsipiga ko'ra $g(z) \equiv \text{const} \Rightarrow f(z) \equiv \text{const}$

1.4-§ Analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi uning bir necha umumiy ko'rinishlari

Shvars lemmasi. [10] Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $U = \{z : |z| < 1\}$ doirada golomorf bo'lib, $f(0) = 0$ va $\forall z \in U$ da $|f(z)| \leq 1$ bo'lsin.

U holda $\forall z \in U$ da ushbu

$$|f(z)| \leq |z|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar U doiraning biror $z \neq 0$ nuqtasida $|f(z)| = |z|$ tenglik o'rinli bo'lsa, funksiya quyidagi $f(z) = e^{i\alpha} z$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) ko'rinishiga ega bo'ladi.

Isbot: Berilgan $f(z)$ funksiya yordamida ushbu

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

funksiyani hosil qilamiz. Shunga ko'ra $f(0) = 0$ ekanligidan $g(x)$ funksiya $U = \{z : |z| < 1\}$ da golomorf bo'ladi.

Endi ixtiyariy $U_r = \{z : |z| < r, r < 1\}$ doirani qaraymiz. Ravshanki, $U_r \subset U$ Yuqorida isbot etilgan maksimumlik prinsipiga ko'ra $|g(z)|$ bu U_r doirada chegarasi $\partial U_r = \{z : |z| = r, (r < 1)\}$ da o'zining maksimum qiymatiga erishadi.

Ayni paytda ∂U_r da

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

bo'ladi. Demak, $\forall z \in U_r$ da

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

bo'ldi. Keyingi tengsizlikda z ni tayinlab, $r \rightarrow 1$ da limitga o'tib topamiz.

$$|g(z)| \leq 1$$

Bundan esa $\forall z \in U_r$ uchun $|f(z)| \leq |z|$ bo'lishi kelib chiqadi. $\forall z \in U$ uchun uni o'z ichiga oluvchi U_r ($r < 1$) doira har doim mavjud bo'lganligi sababli $|f(z)| \leq |z|$ tengsizlik barcha $z \in U$ lar uchun bajariladi.

Agar biror $z_0 \in U$ nuqtada $|f(z_0)| = |z_0|$ bo'lsa, u holda $|g(z)|$ funksiya shu nuqtada maksimum qiymati $g(z_0) = 1$ ga erishib, $g(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi. Bundan esa, $g(z) = e^{i\alpha}$, ($\alpha \in R$), ya'ni $f(z) = e^{i\alpha}z$, ($\alpha \in R$) bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema 1.4.1 (Shvars lemmasining umumlashmasi [10]). *Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $U_r = \{z : |z| < r\}$ doirada holomorfl bo'lib, biror $z_0 \in U_r$ nuqtada $f(z_0) = 0$ bo'lsin. Agar $\forall z \in U_r$ da $|f(z)| \leq M$ bo'lsa, unda $\forall z \in U_r$ da ushbu*

$$|f(z)| \leq Mr \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \overline{z_0}z|}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot: U_r doirani birlik U doiraga konform akslantiruvchi kasr chiziqli akslantirish topamiz:

$$\lambda_1 = \frac{z}{r}, \lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_1^0}{1 - \overline{\lambda_1^0} \lambda_1} = \frac{\frac{z}{r} - \frac{z_0}{r}}{1 - \frac{\overline{z_0}}{r} \frac{z}{r}} = r \frac{z - z_0}{r^2 - \overline{z_0}z}$$

Demak,

$$\lambda = r \frac{z - z_0}{r^2 - \overline{z_0}z} : U_r \rightarrow U$$

Bu akslantirishga teskari bo'lgan $\lambda^{-1} : U \rightarrow U_r$ akslantirishni olamiz va

$$\varphi = \frac{1}{M} f \circ \lambda^{-1}$$

deb belgilaymiz. Bu funksiya birlik doira U da oddiy Shvars lemmasining shartlarini qanoatlantiradi. $\forall z \in U$ $|\varphi(z)| \leq |z|$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikda z ni $\lambda(z)$ bilan almashtiramiz.

$$|\varphi(\lambda(z))| \leq |\lambda(z)| \Rightarrow \frac{1}{M} |f(z)| \leq |\lambda(z)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z)| \leq M |\lambda(x)| \Rightarrow |f(z)| \leq Mr \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \overline{z_0}z|}$$

Bundan esa

$$|f(z)| \leq Mr \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \overline{z_0}z|}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 1.4.2 [10] Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $U = \{z | |z| < 1\}$ doirada golomorf bo'lib, biror $z_0 \in U$ nuqtada $f(z_0) = \omega_0$ bo'lsin. Agar $\forall z \in U$ da $|f(z)| \leq 1$ bo'lsa, unda $\forall z \in U$ da ushbu

$$\frac{|\omega - \omega_0|}{|1 - \overline{\omega_0}\omega|} \leq \frac{|z - z_0|}{|1 - \overline{z_0}z|}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (Bu yerda $\omega = f(z)$)

Isbot: Bu teoremani isbotlash uchun ham konform akslantiruvchi kasr chiziqli akslantirishlar topamiz:

$$g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} = \tau, \quad \psi(\omega) = \frac{\omega - \omega_0}{1 - \overline{\omega_0}\omega}$$

Bu akslantirishlar o'z navbatida golomorf va birlik doirani birlik doiraga akslantiruvchi bo'lganligi uchun

$$\varphi = \psi \circ f \circ g^{-1}$$

birlik doirani birlik doiraga akslantiradi. Bundan tashqari $\varphi(\tau)$ funksiya $V = \{\tau | |\tau| \leq 1\}$ da golomorf, $\varphi(0) = 0$ va $\forall \tau \in \{\tau | |\tau| \leq 1\}$ uchun $|\varphi(\tau)| \leq 1$ bo'lganligi uchun Shvars lemmasi shartlarini qanoatlantiradi. Demak

$$\begin{aligned} |\varphi(\tau)| \leq |\tau| &\Rightarrow |(\psi \circ f \circ g^{-1})(\tau)| \leq |\tau| \Rightarrow \\ \Rightarrow |(\psi \circ f)(z)| &\leq |g(z)| \Rightarrow |\psi(\omega)| \leq |g(z)| \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{|\omega - \omega_0|}{|1 - \overline{\omega_0}\omega|} &\leq \frac{|z - z_0|}{|1 - \overline{z_0}z|} \end{aligned}$$

II Bob. $A(z)$ -ANALITIK FUNKSIYALAR.

2.1-§. $A(z)$ -ANALITIK FUNKSIYALAR VA ULARNING BA'ZI XOSSALARI.

Ushbu bobda biz $A(z)$ -analitik funksiyalar va ularning ba'zi xossalarini keltiramiz.

Aytaylik Ω – soha kompleks tekislikda berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $z = x + iy$ bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$A(z) \in C(\Omega)$ funksiya uchun

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \overline{A(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\overline{D_A} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

deb belgilaylik.

2.1.1-ta'rif. *Differensiallanuvchi $f(z)$ funksiya Ω sohada $A(z)$ -analitik deyiladi, agar $\forall z \in \Omega$ nuqta uchun*

$$\overline{D_A} f(z) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa va $A(z)$ -analitik funksiyalar quyidagicha belgilanadi: $\mathcal{O}_A(\Omega)$

2.1.2-ta'rif. *Differensiallanuvchi $f(z)$ funksiya Ω sohada $A(z)$ -antianalitik deyiladi, agar $\forall z \in \Omega$ nuqta uchun*

$$D_A f(z) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Ta'kidlash lozimki, $A(z) \equiv 0$ bo'lganda biz mos ravishda analitik va antianalitik funksiyalarning ta'riflarini hosil qilamiz.

Endi $A(z)$ -analitik funksiyalarning ba'zi xossalarini keltiramiz.

2.1.1-xossa. Chekli sondagi $A(z)$ -analitik funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi yana A -analitik bo'ladi, ya'ni agar $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z) - A(z)$ -analitik funksiyalar va $\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n$ bo'lsa, u holda $f(z) = \alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z) + \dots + \alpha_n f_n(z)$ funksiya ham $A(z)$ -analitik bo'ladi.

Ushbu xossaning isboti bevosita ta'rifdan va $\overline{D}_A$ operatorning chiziqliligidan kelib chiqadi.

2.1.2-xossa. Ikkita $A(z)$ -analitik funksiyalar ko'paytmasidan iborat funksiya ham $A(z)$ -analitik funksiya bo'ladi, ya'ni agar $f_1(z), f_2(z) - A(z)$ -analitik funksiyalar bo'lsa unda ularning ko'paytmasi $f_1(z) \cdot f_2(z)$ ham $A(z)$ -analitik funksiya bo'ladi.

Isbot. $f_1(z), f_2(z) - A(z)$ -analitik funksiyalar bo'lsin. Unda $\overline{D}_A f_1(z) = 0$ va $\overline{D}_A f_2(z) = 0$, ya'ni $\frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \frac{\partial f_1(z)}{\partial z}$ va $\frac{\partial f_2(z)}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \frac{\partial f_2(z)}{\partial z}$ bo'ladi.

Bu tengliklardan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [f_1(z) \cdot f_2(z)] &= \frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar{z}} \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot \frac{\partial f_2(z)}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot A(z) \cdot \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = \\ &= A(z) \cdot \left(\frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \right) = A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} [f_1(z) \cdot f_2(z)] \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. Bundan esa bizga zarur tasdiq kelib chiqadi.

2.1.3-xossa. Ikkita $A(z)$ -analitik funksiyalarning nisbati ham $A(z)$ -analitik funksiya bo'ladi, ya'ni $f_1(z), f_2(z) - A(z)$ -analitik funksiyalar ($f_2(z) \neq 0$) bo'lsa unda $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ funksiya ham $A(z)$ -analitik funksiya bo'ladi.

Isbot. $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar va $f_2(z) \neq 0$ bo'lganligi uchun $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ funksiya ham differensiallanuvchi.

Ular $A(z)$ -analitik funksiyalar, ya'ni $\frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \frac{\partial f_1(z)}{\partial z}$ va $\frac{\partial f_2(z)}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot \frac{\partial f_2(z)}{\partial z}$

tengliklar o'rinli bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right] &= \frac{\frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar{z}} \cdot f_2(z) - \frac{\partial f_2(z)}{\partial \bar{z}} \cdot f_1(z)}{[f_2(z)]^2} = \frac{A(z) \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \cdot f_2(z) - A(z) \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \cdot f_1(z)}{[f_2(z)]^2} = \\ &= A(z) \frac{\frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \cdot f_2(z) - \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \cdot f_1(z)}{[f_2(z)]^2} = A(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right]\end{aligned}$$

bo'ladi va bu aytilgan tasdiqni isbotlaydi.

2.1.4-xossa. Agar $f(z)$ funksiya $A(z)$ -analitik funksiya bo'lsa, u holda $\overline{f(z)}$ funksiya $A(z)$ -antianalitik funksiya bo'ladi.

Ushbu xossaning isboti bevosita ta'rifdan kelib chiqadi.

$A(z)$ funksiya biror bir bog'lamli D ($D \subset \mathbb{C}$) sohada antianalitik funksiya bo'lsin: $\frac{\partial A(z)}{\partial z} = 0$ va $\forall z \in D$ uchun $|A(z)| \leq c < 1$ shartni qanoatlantirsin.

Teorema 2.1.1 (Koshi teoremasining analogi [6]) Agar $f(z) \in \mathcal{O}_A(D)$ bo'lib, D bir bog'lamli soha va $\gamma \subset \subset D$ yopiq, silliq (bo'lakli silliq) egri chiziq bo'lsin. U holda

$$\int_{\gamma} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0$$

tenglik o'rinli.

Teorema 2.1.2 (Umumlashgan Koshi teoremasining analogi [5]) Agar $f(z) \in \mathcal{O}_A(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsa. U holda

$$\int_{\partial D} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0$$

tenglik o'rinli. Bu yerda ∂D - bir bog'lamli D ($D \subset \mathbb{C}$) sohaning chegarasi.

$A(z)$ - antianalitik funksiya bo'lganda, $A(z)$ -analitik funksiylarni o'rganishda quyidagi Koshi tipidagi yadroning ahamiyati katta:

$$K(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \xi + \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}$$

Bu yerda $\gamma(\xi, z)$ — $\xi, z \in D$ nuqtalarga bog'liq bo'lgan, silliq egri chiziq.

$I(z) = \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau$ integralning qiymati bir bog'lamli D sohada integrallash yo'liga bog'liq bo'lmagan va $I'(z) = \bar{A}(z)$ ko'rinishda bir qiymatli aniqlangan. Bundan tashqari D ($D \subset \mathbb{C}$) qavariq soha.

Teorema 2.1.3 [5] $K(z, \xi)$ yadro $z = \xi$ nuqtadan tashqari nuqtalarda A -analitik funksiya: $K \in O_A(D \setminus \{\xi\})$. Bundan tashqari, $z = \xi$ nuqta $K(z, \xi)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi.

Teorema 2.1.4 (Koshi formulasi [6]) Agar D ($D \subset \mathbb{C}$) qavariq soha berilgan bo'lib, G ($G \subset D$) to'plam esa ∂G chegarasi to'g'irlanuvchi ixtiyoriy qism soha bo'lsin. U holda ixtiyoriy $f(z) \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$ funksiya quyidagicha ifodalanadi:

$$f(z) = \int_{\partial G} K(\xi, z) f(\xi) (d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}), \quad z \in G$$

$A(z)$ - analitik funksiyalar sinfi uchun darajali qator tushinchasiga to'xtalamiz. Buning uchun quyidagi funksiyanı kiritamiz:

$$\psi(z, \xi) = z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau} \in O_A(D)$$

Endi esa quyidagi to'plamni kiritamiz:

$$L(\xi, r) = \left\{ z \in D : \left| \psi(z, \xi) \right| = \left| z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau} \right| < r \right\}, \quad r > 0$$

Bu to'plam yetarlicha kichik r larda bir bog'lamli soha bo'lib, D sohada kompakt yotadi va ξ nuqtani o'z ichiga oladi. Bu to'plam markazi ξ nuqta bo'lgan A -lemniskata deyiladi va $L(\xi, r)$ kabi belgilanadi.

$A(z)$ - analitik funksiyalar uchun darajali qatorlarning ko'rinishi quyidagicha :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi^n(z, a), \quad a \in D, \quad c_n \equiv \text{const} \quad (2.1.1)$$

(2.1.1) qatorning yaqinlashish sohasi $L(a, R) = \{ \psi(z, a) \mid |\psi(z, a)| < R \}$ bo'lib, bu yerda R

Koshi-Adamar formulasi orqali topiladigan yaqinlashish radiusi:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Teorema 2.1.5 [8] Agar $f(z) \in O_A(L(a, r))$ bo'lib, bu yerda $L(a, r) = \{\xi \in D : |\psi(\xi, a)| < r\} \subset \subset D$ -lemniskata bo'lsin. U holda, $f(z)$ funksiya $L(a, r)$ da Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi^n(z, a)$$

Qatorning koeffitsientlari quyidagi ko'rinishda topiladi:

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n} \Big|_{z=a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L(a, \rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi, a)]^{n+1}} (d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}), 0 < \rho < r, \quad n = 0, 1, \dots$$

Teorema 2.1.6 [8] Agar $f(z)$ funksiya lemniskata halqasida $A(z)$ – analitik bo'lsa: $f(z) \in O_A(L(a, R) \setminus L(a, r)), r < R$. U holda $f(z)$ funksiya bu halqada Loran qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi^n(z, a)$$

Bu yerda qator ko'ffisienti quyidagicha aniqlanadi

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L(a, \rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi, a)]^{n+1}} (d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}), r < \rho < R, n = 0, \pm 1, \dots$$

Bundan tashqari qator quyidagi

$$L(a, R) \setminus L(a, r) = \{z \in D : r < |\psi(z, a)| < R\}$$

halqada tekis va absolyut yaqinlashadi.

Koshi tengsizligi. Teylor va Loran qatorlari koeffitsientlari uchun quyidagi tengsizlik o'rinli.

$$|c_n| \leq \frac{\max_{z \in \partial L(a, r)} |f(z)|}{\rho^n}, r < \rho < R, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$A(z)$ – **analitik funksiyalar uchun chegirmalar nazariyasi.**

Aytaylik $f(z)$ – $A(z)$ – analitik funksiya $D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sohada golomorf va ∂D da uzluksiz bo'lsin. Bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ – nuqtalar D sohaning ichida yotuvchi chekli yoki sanoqli yakkalangan maxsus nuqtalar.

Mavjudki shunday $r > 0$: $L(a_k, r) \cap L(a_l, r) = \emptyset \quad k \neq l$ bo'ladi. Aytaylik

$G_r = \{z \in D : |z - \xi| > r, \forall \xi \in \partial D\}$ va $\bigcup_{k=1}^n L(a_k, r) \subset G_r$ bo'lsin. ∂G_r – ixtiyoriy bo'lakli

silliqlik yopiq egri chiziqli bo'lib, $a_1, a_2, \dots, a_n$ nuqtalarni o'z ichiga oladi va butunligicha D da yotadi. $f(z)$ funksiya $\partial G_r \cup \bigcup_{k=1}^n \partial L(a_k, r)$ yopiq chiziqli bilan chegaralangan sohaning har bir nuqtasida $A(z)$ – analitik bo'lganligi uchun Koshi teoremasiga ko'ra quyidagi tenglik o'rinli:

$$\oint_{\partial G_r} f(\xi) \omega(\xi) = \sum_{k=1}^n \oint_{\partial L(a_k, r)} f(\xi) \omega(\xi) \quad (2.1.2)$$

bu yerda $\omega(z) = dz + A(z)d\bar{z}$

2.1.3-ta'rif. $A(z)$ – analitik $f(z)$ funksiyaning a nuqtadagi chegirmasi deb

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial L(a, r)} f(\xi) \omega(\xi).$$

ning qiymatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial L(a, r)} f(\xi) \omega(\xi). \quad (2.1.3)$$

Bu yerda $\omega(z) = dz + A(z)d\bar{z}$

Teorema 2.1.7 [9] Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $G \subset\subset D$ to'plamning maxsus nuqtalaridan boshqa nuqtalarida $A(z)$ – analitik funksiya bo'lsin va ∂G chegarasi maxsus nuqtalarni o'zida saqlamasin. U holda

$$\oint_{\partial G} f(\xi) \omega(\xi) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z). \quad (2.1.4)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Masala. Fiksirlangan $\xi \in D$ nuqtada quyidagi yadroni qaraymiz:

$$K_n(\xi, z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\psi(\xi, z)^{n+1}}$$

Unda

$$\operatorname{res}_{z=a} K_n(\xi, z) = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Aytaylik $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada Loran qatoriga yoyilgan bo'lsin:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z - a + \int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n$$

Teorema 2.1.8 [9] $A(z)$ – analitik $f(z)$ funksiyasining $a \in D$ yakkalangan maxsus nuqtasidagi chegirmasi Loran qatorining c_{-1} koeffisientining manfiy ishora bilan olingan qiymatiga teng: $\operatorname{res}_A f(z) = c_{-1}$

Isbot: (2.1.3), (2.1.4), va (2.1.5) larga ko'ra:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_A f(z) &:= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\partial L(a,r)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z - a + \int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n \omega(\xi) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \oint_{\partial L(a,r)} \left(z - a + \int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n \omega(\xi) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i c_{-1} = c_{-1} \end{aligned}$$

ekanligi kelib chiqadi.

2.1.4-ta'rif. $z = a$ nuqta $f(z)$ $A(z)$ – analitik funksiyaning n tartibli qutb nuqtasi bo'lsin, u holda $z = a$ nuqta $\frac{1}{f(z)}$ funksiyaning n tartibli noli deyiladi.

Teorema 2.1.9 [9] $a \in \mathbb{C}$ yakkalangan maxsus nuqta $A(z)$ – analitik $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaning a nuqtadagi $A(z)$ – lemniskata atrofida Loran qatoriga yoyilmasinig manfiy darajali hadlaridan chekli sonligi bo'lishi zarur va yetarli:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k \left(z - a + \int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^k, n \geq 1.$$

Isbot: Zarurligi. a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi bo'lsin. Unda $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ bo'ladi. U holda a nuqtaning $L(a,r) \setminus \{a\}$ o'yilgan lemniskata atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ funksiya $A(z)$ – analitik bo'lib, $f(z) \neq 0$ bo'ladi. U holda $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiyaning qaraymiz va bu funksiya shu atrofda $A(z)$ – analitik bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$$

bo'ladi. Demak, $z=a$ nuqta $g(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi ekan. Agar

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0 = g(a)$$

deyilsa, unda $g(z)$ funksiya a nuqtaning atrofida $A(z)$ – analitik bo'ladi. a nuqta $g(z)$ funksiyaning noli bo'lgani uchun

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} A(\tau) d\tau} \right)^k$$

Shunday qilib qaralayotgan o'yilgan atrofda

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} A(\tau) d\tau} \right)^n} \cdot \frac{1}{b_n + b_{n+1} \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} A(\tau) d\tau} \right) + \dots}$$

Ushbu tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning ikkinchi kupaytuvchisi a nuqtada $A(z)$ – analitik bo'lgani uchun uni Teylor qatoriga yoyishimiz mumkin:

$$\frac{1}{b_n + b_{n+1} \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} A(\tau) d\tau} \right) + \dots} = c_0 + c_1 \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} A(\tau) d\tau} \right) + \dots$$

Bu tenglikdan quyidagiga kelimiz:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} A(\tau) d\tau} \right)^k, n \geq 1$$

Demak a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lganda $L(a,r) \setminus \{a\}$ o'yilgan atrofda funksiyaning Loran qatoridagi yoyilmasining manfiy darajali hadlari chekli bo'lar ekan

Yetarliligi. Aytaylik, biror $L(a,r) \setminus \{a\}$ o'yilgan atrofda $f(z)$ funksiyaning Loran qatoridagi yoyilmasining manfiy darajali hadlari cheklita bo'lsin. Ma'lumki $f(z)$ va $g(z) = \psi^n(z,a) \cdot f(z)$ funksiyalar $L(a,r) \setminus \{a\}$ o'yilgan atrofda $A(z)$ – analitik.

(Bu yerda $\psi(z,a) = z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} A(\tau) d\tau}$)

Demak

$$g(z) = c_{-n} + c_{-n+1}\psi(z, a) + c_{-n+2}\psi^2(z, a) + \dots$$

qatorga yoyiladi. Bundan esa

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = c_n \neq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\psi^n(z, a)} = \infty$$

bo'lishini topamiz. Bu esa a nuqtaning $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi ekanligini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Teorema 2.1.10 [9] *Faraz qilaylik $z = a$ nuqta $f(z)$ $A(z)$ – analitik funksiyaning n karrali qutb nuqtasi bo'lsin. U holda quyidagi formula o'rinli*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[f(z) \left(z - a + \int_{\gamma(a, z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n \right]$$

Isbot: 2.1.9-teoremaga ko'ra $A(z)$ – analitik $f(z)$ funksiyaning quyidagi ko'rinishda ifodalay olamiz

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k \left(z - a + \int_{\gamma(a, z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^k$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $\left(z - a + \int_{\gamma(a, z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n$ ga ko'paytiramiz.

$$f(z) \left(z - a + \int_{\gamma(a, z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n = c_{-n} + c_{-n+1}\psi(z, a) + \dots + c_{-1}\psi^{n-1}(z, a) + \psi^n(z, a) h(z)$$

Bu yerda $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(z, a)$. Endi $\psi(z, a)$ funksiya xususiy hosila olamiz:

$$\frac{\partial \psi^k}{\partial z} = k \psi^{k-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = k \psi^{k-1}$$

Bundan quyidagi natijaga kelamiz:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[f(z) \left(z - a + \int_{\gamma(a, z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n \right] = (n-1)! c_{-1} + \psi(z, a) h_1(z)$$

Bu yerda $h_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} c_k \psi^k(z, a)$. Oxirgi tenglikda $z \rightarrow a$ bo'lganda

$$\operatorname{res}_A f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[f(z) \left(z - a + \int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau \right)^n \right]$$

tenglikka kelamiz.

$A(z)$ – **analitik funksiyalar uchun argument prinsipi.**

2.1.5-ta’rif. Agar $f(z)$ funksiyaning D sohada faqat qutb maxsus nuqtalari bo’lib, qolgan nuqtalarda $A(z)$ – analitik bo’lsa, bu funksiya D sohada $A(z)$ – meromorf funksiya deyiladi.

Aytaylik $f \in O_A(0 < |\psi(z, a)| < R), 0 < R$, bo’lsin va a nuqtaning o’yilgan atrofi nol nuqtani o’z ichiga olmasin. $A(z)$ – analitik $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtasidagi $A(z)$ – logarifmik chegirmasi deb shu nuqtadagi logarifmik differensialini shu nuqtadagi chegirmasiga aytiladi.

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} (dz + A(z) d\bar{z}) = d \operatorname{Ln} f(z) \quad (2.1.6)$$

Shuni ko’rsatish mumkinki

$$d(\operatorname{Ln} f(z)) = \frac{1}{f(z)} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = \frac{1}{f(z)} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + A \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z})$$

Aytaylik $a \in \mathbb{C}$ nuqta $A(z)$ – analitik $f(z)$ funksiyaning n tartibli noli bo’lsin.

U holda shunday $A(z)$ – lemniskata $L(a, z)$ atrof mavjudki, quyidagi bajariladi:

$$f(z) = \psi(z, a)^n h(z).$$

Bu yerda $h(z) \in O_A(D), h(a) \neq 0$. Shuning uchun $A(z)$ – lemniskata $L(a, r)$ da

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f(z)} = \frac{n}{\psi(z, a)} + \frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h(z)}$$

bo’ladi.

Aytaylik $b \in \mathbb{C}$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m tartibli qutb nuqtasi bo’lsin.

U holda

$$f(z) = \frac{g(z)}{\psi^n(z, b)}$$

bo'ladi. Bu yerda $g(z) \in O_A(D), g(b) \neq \infty$. Bundan esa $A(z)$ – lemniskata $L(b, r)$ da

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} = \frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z}}{g(z)} - \frac{m}{\psi(z, b)}$$

ekanini topamiz.

Teorema 2.1.11 [9] Aytaylik $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ va $G \subset\subset D$ sohalarda meromorf bo'lsin, ∂G chegara esa uzluksiz va bu chegarada $A(z)$ – meromorf $f(z)$ funksiyaning hech bir nol nuqtasi va hech bir qutb nuqtasini yotmasin. U holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z})$$

Bu yerda N va P lar $f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollar va qutb nuqtalar soni va ∂G – orintirlangan chegara.

Isbot: $g(z) = \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}$ funksiya ∂G da $A(z)$ – analitik funksiya bo'lganligi

uchun, yuqoridagi tasdiqlarga foydalanib $z = a$ va $z = b$ nuqtalardagi logarifmik chegirmalarini hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} \psi(z, a) = n \quad (2.1.7)$$

va

$$\operatorname{res}_{z=b} \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow b} \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} \psi(z, b) = -m. \quad (2.1.8)$$

Aytaylik $a_1, a_2, \dots, a_s$ va $b_1, b_2, \dots, b_l$ nuqtalar $f(z)$ funksiyaning G sohadagi tartiblari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_s$ va $p_1, p_2, \dots, p_l$ bo'lgan nollari va qutb nuqtalari bo'lsin. U holda Koshi teoremasi va (2.1.7), (2.1.8) tengliklardan foydalansak

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \frac{\overline{\partial f(z)}}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z}) &= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^s \operatorname{res}_{A_k} g(z) + \sum_{k=1}^l \operatorname{res}_{B_k} g(z) \right] = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^s n_k + \sum_{k=1}^l (-m_k) \right] = \\ &= 2\pi i (N - P) \end{aligned}$$

Bu yerda $N = \sum_{k=1}^s n_k$ va $P = \sum_{k=1}^l m_k$. Teorema isbotlandi.

Teorema 2.1.12 (Argument prinsipining analogi [9]) $f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ va $G \subset\subset D$ sohalarda $A(z)$ – meromorf funksiya bo'lsin. ∂G chegarasi uzluksiz bo'lib, $A(z)$ – meromorf $f(z)$ funksiyaning hech bir nol nuqtasi va hech bir qutb nuqtasi ∂G chegaraga tegishli bo'lmasin. U holda

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z),$$

(Bu yerda ∂G orintirlangan chegara)

Isbot: Aytaylik $\partial G : z = z(t), a \leq t \leq b$ bo'lsin. (2.16) dan foydalanib

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \frac{\overline{\partial f(z)}}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z}) &= \int_{\partial G} d(Lnf(z)) = Lnf(z(t)) \Big|_a^b = \\ &= \ln |z(t)| \Big|_a^b + i \arg f(z) \Big|_a^b = 0 + i \Delta_{\partial G} \arg f(z) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

tenglikka kelamiz.

(2.1.9) tenglikdan va 2.1.11- teoremadan ushbu tenglik kelib chiqadi:

$$i \Delta_{\partial G} \arg f(z) = 2\pi i (N - P)$$

Teorema isbotlandi.

Bu prinsipdan foydalanib quyidagi Rushe teoremasining analogini isbotlaymiz.

Teorema 2.1.13 (Rushe teoremasining analogi [9]) Faraz qilaylik $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar ∂G chegarasi uzluksiz bo'lgan G sohaning yopig'i $\bar{G}$ da $A(z)$ – analitik bo'lsin va barcha $z \in \partial G$ da quyidagi

$$|f(z)| > |g(z)|$$

tengsizlik bajarilsin. U holda G sohada $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalarning nollari soni bir-biriga teng bo'ladi.

Isbot: $f(z)$ va $f(z)+g(z)$ funksiyalar G sohaning ∂G chegarasida nollarga ega bo'lmaydi. Haqiqatdan ham, shartga ko'ra $\forall z \in \partial G$ da

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0$$

$$|f(z)| + |g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

bo'lib, Bundan ∂G chegarada

$$f(z) \neq 0, \quad f(z)+g(z) \neq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

∂G da $f(z) \neq 0$ bo'lganligi uchun $f(z)+g(z) = f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$ tenglik

o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\arg \Delta_{\partial G}(f(z)+g(z)) = \arg \Delta_{\partial G} f(z) + \arg \Delta_{\partial G} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

munosabat o'rinli. ∂G da $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ bo'lganligi uchun, ixtiyoriy fiksirlangan

$z \in \partial G$ uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$\frac{g(z)}{f(z)} = re^{i\theta}, \quad r < 1.$$

Quyidagicha baholash kiritamiz

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 1 + \operatorname{Re} \left(\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 1 + r \cos \theta > 1 - r > 0.$$

bundan foydalanib esa

$$\left\{1 + \frac{f(z)}{g(z)} : z \in \partial G\right\} \subset \{\operatorname{Re} z > 0\} = \left\{-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

munosabatga kelaymiz. Bundan esa ushbu:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg \Delta_{\partial G} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

tengsizlik o'rinli.

Bu tengsizlikdan va yuqoridagi formuladan keyingi bog'liqlik hosil bo'ladi:

$$N_{f(z)+g(z)} = N_{f(z)} + \frac{1}{2\pi} \arg \Delta_{\partial G} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right),$$

$$N_{f(z)} - \frac{1}{2} \leq N_{f(z)+g(z)} \leq N_{f(z)} + \frac{1}{2}$$

Bu yerda N_f va N_{f+g} lar mos ravishda $f(z)$ va $f(z)+g(z)$ funksiyalarning G sohadagi nollarining soni. Demak N_f va N_{f+g} lar butun sonlar, bundan esa

$$N_f = N_{f+g}$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

$A(z)$ – analitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasi

Teorema 2.1.14 Faraz qilaylik $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar qavariq D ($D \subset \mathbb{C}$) sohada $A(z)$ – analitik bo'lsin. Agar bu funksiyalar D sohaga tegishli va hech bo'lmaganda bitta limit nuqta z_0 ($z_0 \in D$) ga ega bo'lgan E to'plamda ($E \subset D$) bir-biriga teng bo'lsa:

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in E$$

U holda $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar D sohada aynan bir-biriga teng bo'ladi:

$$f(z) \equiv g(z) \quad (z \in D).$$

Isbot:

1) Avvaliga biz $\forall r > 0$ va $a \in \mathbb{C}$ uchun $\exists R_1, R_2 > 0$ topilib

$$U_{R_1}(a) \subset L(a, r) \subset U_{R_2}(a)$$

ekanligini ko'rsatamiz. Bu yerda $U_R(a) = \{z : |z - a| < R\}$ va

$$L(a, r) = \left\{ z \in D : \left| \psi(z, a) \right| = \left| z - a + \overline{\int_{\gamma(a, z)} \bar{A}(\tau) d\tau} \right| < r \right\}, \quad r > 0$$

Haqiqatdan ham

$$R_1 \leq \min\{|z_1 - a| : z_1 \in \partial L(a, r)\}$$

$$R_2 \geq \max\{|z_2 - a| : z_2 \in \partial L(a, r)\}$$

ko'rinishda R_1 va R_2 larni tanlab olsak

$$U_{R_1}(a) \subset L(a, r) \subset U_{R_2}(a)$$

munosabat o'rinli ekanligini ko'rishimiz mumkin.

2) E to'plamdan a ga intiluvchi $\{z_n\}$ ketma-ketlik olamiz va

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

funksiyani qaraymiz.

Ma'lumki $\forall z \in E$ da $h(z) = 0$. Xususan $h(z_n) = 0$.

$$f(z), g(z) \in O_A(D) \Rightarrow h(z) \in O_A(D) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = h(a) = 0$$

Endi shunday yetarlicha kichik r uchun a nuqtaning $L(a, r) \subset\subset D$ atrofini olamiz. Ma'lumki $h(z) \in O_A(L(a, r))$ bo'lganligi uchun bu atrofda Teylor qatoriga yoyiladi:

$$h(z) = c_0 + c_1\psi(z, a) + c_2\psi^2(z, a) + \dots + c_n\psi^n(z, a) + \dots$$

Bu yerda $\psi(z, a) = z - a + \overline{\int_{\gamma(a, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}$

Demak $h(a) = 0$ bo'lganligi uchun $c_0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik $\forall z \in L(a, r)$ da $h(z) \neq 0$ va $\exists n \in \mathbb{N}$ topilib, $c_n \neq 0$ bo'lsin. U holda

$$h(z) = \psi^n(z, a)(c_n + c_{n+1}\psi(z, a) + c_{n+2}\psi^2(z, a) + \dots)$$

Bu yerda $\phi(z) = c_n + c_{n+1}\psi(z, a) + c_{n+2}\psi^2(z, a) + \dots$ deb belgilasak, $h(z) = \psi^n(z, a)\phi(z)$ ko'rinishda yozamiz va bu yerda $\phi(z) \in O_A(D)$ ekanligi ma'lum.

Endi ixtiyoriy $z' \neq a$ uchun $\psi(z', a) \neq 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Bunda D sohaning qavariqligidan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} |\psi(z', a)| &= \left| z' - a + \overline{\int_{\gamma(a, z')} \bar{A}(\tau) d\tau} \right| \geq |z' - a| - \left| \int_{\gamma(a, z')} \bar{A}(\tau) d\tau \right| > \\ &> |z' - a| - c \left| \int_{\gamma(a, z')} d\tau \right| = |z' - a| - c |z' - a| = |z' - a| (1 - c) > 0 \end{aligned}$$

Demak $|\psi(z', a)| > 0 \Rightarrow \psi(z', a) \neq 0$ ekanligini ko'rsatdik.

Yuqorida olgan ketma-ketligimiz uchun

$$\phi(z_n) = \frac{h(z_n)}{\psi(z_n, a)} = c_n + c_{n+1}\psi(z_n, a) + c_{n+2}\psi^2(z_n, a) + \dots$$

tenglikni qaraymiz. Keltirib o'tilgan tasdiqlarga ko'ra $h(z_n) = 0$ va $\psi(z_n, a) \neq 0$.

Bundan kelib chiqadiki

$$\phi(z_n) = (c_n + c_{n+1}\psi(z_n, a) + c_{n+2}\psi^2(z_n, a) + \dots) = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

ekan. Bu esa $c_n \neq 0$ degan farazimizga zid. Demak $\forall z \in L(a, r)$ uchun $h(z) = 0$ ekan.

3) $\forall z^* \in D$ va a nuqtalarni $[a; z^*] \subset\subset D$ kesma bilan tutashtiramiz.

1) dan ma'lumki ixtiyoriy lemniskata uchun uni ichida yotuvchi $\exists R$ radiusli ochiq doira mavjud:

$$U_R(z) \subset L(z, r)$$

$[a; z^*]$ kesma kompakt bo'lganligi uchun uni cheklita $U_R(a_i)$ doiralar bilan qoplash mumkin. Bu yerda $a_i \in [a; z^*]$ $i = \overline{0, n}$

$\forall z \in U_R(a) \subset L(a, r)$ uchun $h(z) = 0$ ekanligini 2) da ko'rsatgan edik.

Ma'lumki

$$U_R(a) \cap U_R(a_1) \neq \emptyset \Rightarrow \forall z \in U_R(a) \cap U_R(a_1): h(z) = 0$$

Demak avvalgi mulohazalar orqali $\forall z \in U_R(a_1)$ uchun $h(z) = 0$ ekanligini hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib $U_R(a_2), U_R(a_3), \dots, U_R(a_n)$ lar uchun ham $h(z) = 0$ ekanligini topishimiz mumkin. $a_n = z^*$ desak, $z^* \in U_R(a_n)$ bo'lgani uchun $h(z^*) = 0$ ekanligini hosil qilamiz. z^* nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lganligi uchun $\forall z \in D$ uchun $h(z) \equiv 0$. Demak $\forall z \in D$ da

$$f(z) \equiv g(z)$$

Teorema isbotlandi.

Teorema 2.1.15 (Sohani saqlash prinsipi) Agar $f(z) \in O_A(D)$ bo'lib, $f(z) \neq \text{const}$ bo'lsa, u holda D qavariq sohaning aksi D^* ($D^* = f(D)$) ham soha bo'ladi.

Isbot: 1) D^* ni bog'lamli ekanini ko'rsatamiz.

$\forall \omega_1, \omega_2 \in D^*$ olaylik. Bu nuqtalarning D sohadagi asllaridan biri mos ravishda z_1

va z_2 bo'lsin:

$$z_1 \in D, \omega_1 = f(z_1) \in D^*$$

$$z_2 \in D, \omega_2 = f(z_2) \in D^*$$

Shartga ko'ra D sohadan iborat. Demak z_1 va z_2 nuqtalarni birlashtiruvchi va D ga tegishli bo'lgan uzluksiz $\gamma = \gamma(t) = \{\gamma(t) : t \in [\alpha; \beta], \gamma(\alpha) = z_1, \gamma(\beta) = z_2\}$ egri chiziq mavjud bo'ladi.

$\omega = f(z)$ funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun uning yordamida bajariladigan akslantirish $\gamma = \gamma(t)$ egri chiziqni ω_1 va ω_2 nuqtalarni birlashtiruvchi va D^* ga tegishli bo'lgan $\omega = f(\gamma(t))$ uzluksiz egri chiziqqa o'tkazadi. Bu esa D^* ni bog'lamli ekanligini bildiradi

2) D^* ni ochiq ekanligini isbotlaymiz.

$\forall \omega_0$ olamiz uning asllaridan biri z_0 bo'lsin. D soha bo'lganligi uchun $\exists \xi : L(z_0, \xi) \subset\subset D$ bo'ladi. $\overline{L(z_0, \xi)}$ da ω_0 ning boshqa asllari bo'lmaydigan qilib tanlay olamiz. Chunki bunday ξ mavjud bo'lmasa z_0 nuqtaning ixtiyoriy ω_0 asllari bo'lib, yagonalik teoremasidan $f(z) \equiv \text{const}$ bo'lib qoladi. Bu esa teorema shartiga zid.

$\overline{L(z_0, \xi)}$ yopiq $A(z)$ -lemniskataning chegarasi $\partial L(z_0, \xi)$ da $f(z) - \omega_0$ funksiya uzluksiz. Chunki $f(z) \in O_A(D)$. Demakki $|f(z) - \omega_0|$ minimumga erishadi va

$$\mu = \min_{z \in \partial L(z_0, \xi)} |f(z) - \omega_0|$$

bo'lsin. $\mu \neq 0$, aks holda ya'ni $\mu = 0$ bo'lsa $\partial L(z_0, \xi)$ da $\exists z^* \in \partial L(z_0, \xi)$ topiladi va $f(z^*) = \omega_0$ bo'ladi. Bu esa $\overline{L(z_0, \xi)}$ da ω_0 ning z_0 dan boshqa asli bo'lmasligiga ziddir. Demak $\mu > 0$ ekan.

Endi esa $K = \{\omega - \omega_0 : |\omega - \omega_0| < \mu\}$ ochiq doirani olamiz va $K \subset D^*$ ekanligini ko'rsatamiz.

Ma'lumki $f(z) - \omega_0 = 0$ tenglamaning $L(z_0, \xi)$ sohada kamida bitta ildizga ega: $z = z_0 \quad \forall \omega_1 \in K (\omega_1 \neq \omega_0)$ nuqtani olamiz.

$$f(z) - \omega = (f(z) - \omega_0) + (\omega_0 - \omega_1)$$

tenglikni qaraymiz $\partial L(z_0, \xi)$ da $|f(z) - \omega_0| \geq \mu$ va $|\omega - \omega_0| < \mu$ bo'ladi.

Demak $|f(z) - \omega_0| > |\omega - \omega_0|$

Rushe teoremasiga ko'ra $L(z_0, \xi)$ da $f(z) - \omega_1 = 0$ tenglamaning ildizlari soni

$f(z) - \omega_0 = 0$ tenglamaning ildizlari soniga teng bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki

$\exists z_1 \in D$ mavjudki $f(z_1) = \omega_1$ bo'ladi. Ya'ni $\forall \omega_1 \in K$ uchun $z_1 \in D$ topiladiki

$f(z_1) = \omega_1$ bo'larkan. Demak $K \subset D^*$, bu esa D^* ni ochiq ekanligini bildiradi.

D^* to'plam ochiq va bog'lamli ekan. Demak D^* soha bo'larkan. *Teorema isbotlandi.*

Teorema 2.1.16 (Maksimumlik prinsipi) *Bizga D qavariq soha berilgan bo'lsin. Agar $f(z) \in O_A(D)$ bo'lib, $|f(z)|$ $z_0 \in D$ nuqtada maksimumga erishsa, u holda $f(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi.*

Isbot: Faraz qilaylik $f(z) \neq \text{const}$ bo'lib, u D sohani D^* ga akslantirsin: $D^* = f(D)$. Sohaning saqlanish prinsipiga ko'ra D^* soha bo'ladi. Unda $z_0 \in D$ nuqtaning aksi $\omega_0 = f(z_0)$ nuqta o'zining biror atrofi $K = \{|\omega - \omega_0| < \xi\}$ bilan D^* ga tegishli bo'ladi. Bu K atrofda shunday ω_1 nuqta olamizki, $|\omega_1| > |\omega_0|$ bo'lsin, u holda ω_1 nuqtaning asli z_1 nuqta ($f(z_1) = \omega_1$) biror $L(z_0, r)$ $A(z)$ -lemniskata ichida joylashgan bo'lib, $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $f(z)$ funksiyaning moduli $|f(z)|$ ning z_0 nuqtada maksimumga erishishigaziddir. Demak, D sohada $f(z) \equiv \text{const}$ bo'ladi.

2.2-§ A(z)-analitik funksiyalar uchun Shvars lemmasi va uning bir necha umumiy ko'rinishlari.

Ma'lumki, Shvars lemmasi analitik funksiyalarni geometrik nazariyasida, ya'ni komform izomorfizimlar nazariyasi, uzluksiz modullarni boholashda, variatsion hisoblarda, aproksimatsiya nazariyasi va boshqa ko'plab sohalarda tadbiq qilinadi.

Lemma. (Shvars lemmasining analogi [11]) *Faraz qilaylik D - qavariq soha va $L(a, R) = \{z \in D : |\psi(z, a)| < R\}$ berilgan bo'lsin. Agar $f \in O_A(L(a, R))$, $|f(z)| \leq M$ va $f(a) = 0$ bo'lsa. U holda $\forall z \in L(a, R)$ uchun*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} |\psi(z, a)|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Avvaliga $f(z)$ funksiya yordamida ushbu

$$g(z) = \frac{f(z)}{\psi(z, a)}$$

funksiyani hosil qilamiz. Shartga ko'ra $f(a) = 0$ bo'lganligi uchun $g(z) \in O_A(D)$. Chunki $z = a$ nuqta $\psi(z, a)$ funksiyaning yagona nol nuqtasi.

$r < R$ fiksirlaymiz, maksimumlik prinsipiga ko'ra, $g(z)$ funksiyaning moduli o'zining maksimumiga $\partial L(a, r) = \{|\psi(z, a)| = r\}$ da erishadi. U holda

$$|g(z)| \leq \frac{\max\{|f(z)| : z \in L(a, r)\}}{r} \leq \frac{M}{r}$$

munosabat o'rinli ekanini ko'rish qiyin emas. Endi xosil bo'lgan tengsizlikda $r \rightarrow R$ da limitga o'tsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|g(z)| \leq \frac{M}{R}$$

Demak $\forall z \in L(a, R)$ uchun $|f(z)| \leq \frac{M}{R} |\psi(z, a)|$ ekan.

Natija 2.2.1 [11] *Faraz qilaylik $f \in O_A(L(a, R))$, $|f(z)| \leq M$ va*

$$f(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) = \dots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(a) = 0$$

shartlar bajarilsin. U holda $\forall z \in L(a, R)$ uchun

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^n} |\psi(z, a)|^n$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot: Bu natijani analog tarzida isbotlaymiz. Shartga ko'ra

$$f(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) = \dots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}(a) = 0 \quad \text{tengliklar} \quad \text{o'rinli.} \quad \text{Demak}$$

$$h(z) = \psi^n(z, a)g(z) \text{ ko'rinishida bo'ladi va } g(z) = \frac{f(z)}{\psi^n(z, a)} \text{ bo'lib,}$$

$g(z) \in O_A(D)$. Chunki $z = a$ nuqta $\psi(z, a)$ funksiyaning yagona nol nuqtasi. $r < R$ fiksirlaymiz, maksimumlik prinsipiga ko'ra, $g(z)$ funksiyaning moduli O 'zining maksimumiga $\partial L(a, r) = \{|\psi(z, a)| = r\}$ da erishadi. U holda

$$|g(z)| \leq \frac{\max\{|f(z)| : z \in L(a, r)\}}{r^n} \leq \frac{M}{r^n}$$

munosabat o'rinli ekanini ko'rish qiyin emas. Endi hosil bo'lgan tengsizlikda $r \rightarrow R$ da limitga o'tsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|g(z)| \leq \frac{M}{R^n}$$

Demak $\forall z \in L(a, R)$ uchun $|f(z)| \leq \frac{M}{R^n} |\psi(z, a)|^n$ ekan.

Natija 2.2.2 [11] Faraz qilaylik $f \in O_A(L(a, R))$, $|f(z)| \leq M$ va $b \in L(a, R)$ uchun $f(b) = 0$ bo'lsin. U holda $\forall z \in L(a, R)$ uchun

$$|f(z)| \leq MR \left| \frac{\psi(z, a) - \psi(b, a)}{R^2 - \bar{\psi}(b, a)\psi(z, a)} \right|$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot: $w = R^2 \frac{\psi(z, a) - \psi(b, a)}{R^2 - \bar{\psi}(b, a)\psi(z, a)}$ akslantirish har bir $L(a, R)$ lemniskata va

$U(0, R)$ doira uchun izomorfizm bo'ladi. Chunki agar $z \in L(a, R)$ bo'lsa, Ushbu

$$|w|^2 = R^4 \frac{|\psi(z, a)|^2 + |\psi(b, a)|^2 - \psi(z, a)\bar{\psi}(b, a) - \bar{\psi}(z, a)\psi(b, a)}{R^4 + |\bar{a}|^2 |\psi(z, a)|^2 - R^2(\psi(z, a)\bar{\psi}(b, a) + \bar{\psi}(z, a)\psi(b, a))} \leq R^2.$$

$$\frac{R^2 \left(|\psi(z, a)|^2 + |\psi(b, a)|^2 - \psi(z, a)\bar{\psi}(b, a) - \bar{\psi}(z, a)\psi(b, a) \right)}{R^4 + |\bar{a}|^2 |\psi(z, a)|^2 - R^2(\psi(z, a)\bar{\psi}(b, a) + \bar{\psi}(z, a)\psi(b, a))} +$$

$$+ \frac{(|a|^2 - R^2)(|\psi(z, a)|^2 - R^2)}{R^4 + |\bar{a}|^2 |\psi(z, a)|^2 - R^2(\psi(z, a)\bar{\psi}(b, a) + \bar{\psi}(z, a)\psi(b, a))} = R^2$$

munosabat o'rinli. Bundan kelib chiqadiki $|\omega| < R$. Quyidagi akslantirishni

qaraymiz: $g(z) := \frac{1}{M} f(w^{-1}(\psi(z, a))) \in O_A(L(a, R))$.

Bu yerda $w^{-1}(\psi(z, a)): L(a, R) \rightarrow L(a, R)$ – avtomorfizm. $g(z)$ funksiya Shvars

lemmasi shartlarini qanoatlantiradi va shuning uchun $|g(z)| \leq \frac{M}{R} |\psi(z, a)|$

tengsizlik bajariladi. Bundan esa

$$|g(\psi(w(z), a))| = |f(z)| \leq \frac{M}{R} \left| R^2 \frac{\psi(z, a) - \psi(b, a)}{R^2 - \bar{\psi}(b, a)\psi(z, a)} \right| = MR \left| \frac{\psi(z, a) - \psi(b, a)}{R^2 - \bar{\psi}(b, a)\psi(z, a)} \right|$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xulosa

Mazkur bitiruv malakaviy ishi $A(z)$ -analiyik funksiyalar uchun Shvars lemmasiga bagishlangan. Ma'lumki $A(z)$ -analitik funksiyalar Beltrami tengla-masini yechimi bo'lib, kvazikonforim akslantirishlar bilan uzviy bog'liq. Xozirgi kunda tomografiya masalalarini (rengen, seysmik va boshqalar) yechishda $A(z)$ -analitik funksiyalar nazariyasidan keng qo'llanilmoqda.

Bitiruv malakaviy ishida qavariq sohalarda $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasi isbotlangan va bu teoremadan Sohaning saqlanish prinsipini isbotlashda foydalanilgan. Yagonalik teoremasi orqali yaqinlashuvchi ketma-ketlikda berilgan $A(z)$ -analitik funksiyani butun qavariq sohada aniqlash mumkin bo'ladi. Bitiruv malakaviy ishining natijalari Samarqand davlat universitetida o'tkazilgan konferensiya materiallarida chop etilgan. [12]

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Арбузов Э.В.** Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости, СМЖ, 2003, Т.44, №1, стр. 3-20
2. **Арбузов Э.В., Бухгейм А.Л.** Задача Коши для A -гармонических функций, Доклады Академии Наук, 1996. Т. 349, №5, стр. 586-587,
3. **Берс Л.** Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, М., ИЛ, 1961.
4. **Бухгейм А.Л., Казанцев С.Г.** Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии, Докл. АН СССР, 1990. Т.Ю 315, №1, стр. 15-19.
5. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.** Теорема Коши для $A(z)$ - аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2014, №1, стр. 15-18.
6. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.** Аналог интегральной формулы Коши для $A(z)$ - аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2016, №4, стр. 50-59.
7. **Ahlfors L.** Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York-London, 1996, 133pp.
8. **Sadullayev A.S., Jabborov N.M.** On a class of A -analytic functions, Siberian Federal University, Math&Physics, 2016 y 9(3), c. 374-383.
9. **Tishaboyev J.K., Otaboyev T.U., Xursanov Sh.Y.** Вычет и принцип аргумента для $A(z)$ -аналитических функций, ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ, 2018, № 144, стр.56-64.
10. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ, Москва. 1969.
11. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У., Хурсанов Ш.Я.** Неравенство Шварца и Формула Шварца для $A(z)$ – аналитических функций.
12. **Tirkasheva G.D.**, The uniqueness theorem for $A(z)$ -analytic functions, Новые результаты математики и их приложения II, Самарканд 2018, стр. 14-15.