

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
АВТОМОБИЛЬ ЙЎЛЛАРИ ДАВЛАТ ҚЎМИТАСИ**

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**ТОШКЕНТ АВТОМОБИЛЬ ЙЎЛЛАРИНИ ЛОЙИХАЛАШ, ҚУРИШ ВА
ЭКСПЛУАТАЦИЯСИ ИНСТИТУТИ**

**ЙЎЛ ҚУРИЛИШ МАШИНАЛАРИ ВА АВТОМОБИЛЬ ТРАНСПОРТИ
ЭКСПЛУАТАЦИЯСИ ФАКУЛЬТЕТИ**

ЙЎЛ ҚУРИЛИШ МАШИНАЛАРИ ВА ЖИҲОЗЛАРИ КАФЕДРАСИ

**“МУҲАНДИСЛИКДА КОМПЬЮТЕР ДАСТУРЛАРИДАН
КОМПЛЕКС ФОЙДАЛАНИШ”**

фанидан

МАЪРУЗАЛАР МАТНИ

**5A313101—Автомобиль транспорти ва йўл қурилиш техникалари
эксплуатацияси (ихтисослаштирилган транспорт воситалари)” таълим
мутахассислиги талабалари учун**

ТОШКЕНТ - 2017

Ушбу маъруза матни “5A313101–Автомобиль транспорти ва йўл қурилиш техникалари эксплуатацияси (ихтисослаштирилган транспорт воситалари)” таълим мутахассислиги бўйича магистрлар тайёрлашдаги “Мухандисликда компьютер дастурларидан комплекс фойдаланиш” фанининг ўқув ва ишчи дастурлари асосида тузилган.

Тузувчи:

Шермухамедов А.А.

ТАЙЛҚЭИ, “Йўл қурилиш машиналари ва жихозларини” кафедраси мудири, профессор, т.ф.д.

Такризчилар:

Маҳкамов Қ.Х.

– Ислон Каримов номидаги ТДТУ, “Хизмат кўрсатиш техникаси” кафедраси профессори, т.ф.д.

Алимухамедов Ш.П.

– ТАЙЛҚЭИ, “Амалий механика” кафедраси профессори, т.ф.д.

Услубий кўрсатма “ЙҚМЖ” кафедрасининг 2017 йил “____” _____ даги (баённома №____) мажлисида муҳокама қилинган ва мақулланган.

Кафедра мудири

А.А.Шермухамедов

“Мухандисликда компьютер дастурларидан комплекс фойдаланиш” фанининг маърузалар матни “Йўл қурилиш машиналари ва автомобиль транспорти эксплуатацияси” факультетининг Услубий ҳайъатида муҳокама этилган ва фойдаланишга тавсия қилинган (2017 йил “____” _____ “____” – сонли баённомаси).

Факультет Услубий
ҳайъат раиси

З.Т.Усманов

Чиқиш маълумотлари:

Формат №____ Буюртма _____ Адади _____

Ҳажми _____ Босма _____ ТАЙЛҚЭИ кўпайтириш бўлими

МУНДАРИЖА

1. Кириш. Муҳандислик масалаларини математик моделлари ва уларнинг классификацияси.....	4
2. Муҳандислик масалаларининг ҳисоб схемасини танлаш.....	12
3. Муҳандисликда оптимизацион моделлаштириш.....	18
4. Муҳандислик масалаларини чизиқли ва чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламалар тизимига келтириш ва уларни санокли ечиш усуллари.....	31
5. Тажриба маълумотларини қайта ишлашда алгоритмик (компьютерда) моделлаштириш.....	47
6. Муҳандислик масалаларини оддий дифференциал тенгламалар ёрдамида ифодалаш.....	61
7. Оддий дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усуллари.....	66
8. Муҳандислик масалаларини хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ёрдамида ифодалаш.....	74
9. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари.	80
10. Жамланган ва тақсимланган параметрли моделлар ёрдамида ҳаракат тенгламаларини тузиш.....	82
11. Муҳандислик масалаларини чекли айирмалар ва чекли элементлар усуллари ёрдамида ечиш.....	92
12. Чекли элементлар усулига асосланган замонавий алгоритм дастурий комплекслар.....	101
Фойдаланилган адабиётлар рўйхати	105

1-Маъруза. Кириш. Мухандислик масалаларини математик моделлари ва уларнинг классификацияси

Режа:

1. Модель ва моделлаштириш таърифи.
2. Модель ва моделлаштиришнинг ривожланиши.
3. Модель турлари.
4. Математик моделлаштириш.
5. Математик моделлар таснифи.

Калит сўзлари: *модель, моделлаштириш, концептуал модель, ахборот модели, математик модель, параметрлари тақсимланган модель, параметрлари жамланган модель, экстремал принцили модель, моделлар таснифи, мегадаража, макродаража, микродаража, детерминланган, эҳтимоллилик, динамик, статик, дискретли, узлуксиз, чизиқли, чизиқли бўлмаган, назарий, омили-тажрибавий, график, аналитик, алгоритмик, инвариантлик.*

Модель – тадқиқот объектининг энг муҳим хусусиятларини акс эттирувчи моддий объект ёки образ (шартли ёки ҳаёлий: гипотеза, ғоя, мавҳум тасвир, тавсиф, схема, формула, чизма, режа, харита, алгоритм блок-схемаси, нўталар ва бошқалар).

Ҳар қандай модель ҳар доим ҳақиқий объектдан содда ва фақат уни энг муҳим томонлари, асосий элементлари ва боғлиқликларини акс эттиради. Шу сабабдан биргина тадқиқот объекти учун бирнечта моделлар мавжуд. Моделлар кўриниши моделлаштиришни танлаган мақсадига боғлиқ бўлади.

Моделлаштириш – янги билимлар олиш, тадқиқот объектлари тавсифини такомиллаштириш ёки уларни бошқариш мақсадида ҳодиса, жараён, қурилма ёки тизимларни (умуман олганда - тадқиқот объектларини) моделларини қуриш ва ўрганишга асосланган илмий тадқиқот усули.

Тарихдаги ҳақиқий объектларни ўрнини босган биринчи моделлар эҳтимол **тилга оид белгилар** бўлган. Улар инсониятнинг ривожланиш йўлида пайдо бўлган ва аста-секинлик билан сўзлашиш тилига айланган. Демак, сўз ҳақиқий объектнинг (ҳодисанинг) биринчи модели бўлган. Қадимги ўғитлар ҳам айнан шу ҳақида сўзлайди шекилли: Бошида (аввал) Сўз бўлган, сўнгра объектлар (нур, сув, қуруқлик, ёруғлик ва бошқалар) пайдо бўлди.

Биринчи хужжатлар асосида қайд этилган график моделлар қояларда акс эттирилган ҳаётий саҳналар, ҳайвонлар ва ов саҳналарини тасвирлари бўлган. Бу тасвирларни ёши 200 минг йил миқдорида баҳоланади.

Сон белгиларини пайдо бўлиши моделлаштириш ривожланишининг кейинги босқичи деб ҳисобласа бўлади. Энг аввалги ҳисоб-китоб натижалари тўғрисидаги маълумотлар **кертма белгилар** кўринишида сақланиб қолган. Бу усулни аста-секинлик билан такомиллаштириш натижасида сонни белгилар

тизими **рақам** кўринишига олиб келган. Айнан кертма белгилар рим рақамларининг тимсоли (прототипи) деб тахмин қилса бўлади.

Машхур математик, диншунос ва файласуф **Пифагор Самосский** сон бу бутун мавжудодни (борликни) асоси деб ҳисоблаган. Пифагор сонларнинг ўзаро муносабатларини коинот мувофиқлик (гармонияси) манбаи деб ҳисоблаган. Қадимги Грецияда моделлаштириш сезиларли даражада ривожланди. Милоддан аввалги V-III асрларда Грецияда Қуёш тизимининг геометрик модели яратилган. Юнон доктори Гипократ инсон кўз тузилишини ўрганиш учун унинг физик модели – бука кўзидан фойдаланган. Кўпчилик реал ходиса ва объектларни тадқиқ қилиш мураккаб ёки қиммат, баъзиларини эса асло иложиси бўлмаганлиги учун моделни яратишга ва ундан фойдаланишга эҳтиёж туғилган. Мисол учун термоядро уришига олиб келувчи синовларни илмий тажрибалар асосида ўрганиш, ҳақиқий атом электростанциялари реакторларидаги жараёнлар билан хавфли синовлар ўтказиш фожиаларга олиб келиши мумкин.

Моделлаштиришнинг ёрқин намуналаридан бирини келтирамиз.

Фанлар академиясининг ҳисоблаш марказида академик Н.Н. Моисеев раҳбарлигида Ер сайёрасидаги ядровий уришининг эҳтимолий оқибатларини математик модели ишлаб чиқилган. Ҳисоб-китоблар шуни кўрсатдики одамларни нафақат зарба тўлқини, нурланиш ва радиоактив нурлар, балки қаттиқ совуқ, “**ядровий қиш**” ҳалок қилади. Атмосферага катта миқдордаги кул ва курум булутларини кўтарилиши натижасида Қуёш нурлари тўсилиб қолади ва Ердаги ҳарорат дарҳол пасаяди.

Модель термини асосида юнонча *modulus* - ўлчов намуна сўзи ётади. Модель – бу реал тадқиқот объектининг ўрнини босувчисидир. Мураккаб объектларни, ходисаларни, жараёнларни ўрганишда уларнинг хусусиятларини аниқловчи барча элементлар ва боғлиқликларни ҳисобга олиб бўлмайди. Лекин яратилаётган объектда ҳамма элементлар ва боғлиқликларни ҳисобга олиш ҳам шарт эмас. Тадқиқот объектининг асосий хусусиятларини кўпроқ даражада ўзида акс этган қисмларни ажратиб олиш керак. Натижада тадқиқот объекти бирмунча соддалаштирилган, лекин асосий хусусиятлари билан тадқиқот объектининг хусусиятларига ўхшаш бўлган объект билан алмашади. Алмаштириш натижасида пайдо бўлган янги объект (ёки образ) тадқиқот объектининг модели деб аталади.

Моделга бирнечта мисол келтирамиз.

Харита – бу худуд ёки юлдузли осмоннинг график моделидир. Харитада **ўхшашлик** принципига риоя қилинади: бунда материкларнинг сиртки кўриниш шакли, кўллар, ўрмон майдонлари, дарё, юлдузлар туркуми, объектларнинг жойлашиш нисбати, объектлар орасидаги масофа нисбати, юлдузлар орасидаги бурчак масофа, уларнинг ёруғлик тарқатиш нисбати ва бошқалар сақланади.

Манекен – инсоннинг ташқи кўринишини акс эттирувчи модели. Манекен одам сингари уни ташқи кўриниш пропорцияси, тери ранги ва сочига эга бўлади.

Автомобиллар, кемалар, ҳарбий техникалар, архитектура иншоотлари ва бошқаларнинг ҳам макетлари мавжуд. Кўпгина спорт ўйинлари (футбол, баскетбол, голф, билиард, теннис, шахмат...), космик кемаларда ўқиш (космик симуляторлар), самолётлар ва вертолётлар, автомобил пойгаларини, фонд биржалардаги ўйинлар, жанговор олишувлар, сув ости сузишларнинг компютор симуляторлари ишлаб чиқилган. Бу симуляторларни баъзида имитатор деб ҳам аташади.

Модель турлари

Моделларнинг мукамал таснифини яратиш мураккабдир, шу боис энг кўп қўлланиладиган моделлар таърифини кўриб чиқамиз.

Моделлаштириш жараёни концептуал моделнинг яратилишидан бошланади.

Концептуал модель – бу тизимнинг таркибини (элементлари ва боғланишларини) аниқловчи абстракт (мавҳум) модель. Одатда концептуал моделда тадқиқот объекти тўғрисидаги асосий элементлар ва элементлар орасидаги энг муҳим боғланишлар оғзаки шаклда келтирилади. Ҳозирги вақтда концептуал моделнинг яратиш жараёни шаклланмаган: унинг аниқ яратилиш қондаси мавжуд эмас. Концептуал моделнинг яратилишидаги асосий муаммо - бу моделнинг ихчамлиги ва унинг аниқлиги орасидаги мurosадир. Бу муаммонинг кўпгина назарий ишланмалари мавжуд, лекин уларни ҳар бир янги объект учун қўллаш қийин. Шу сабабдан модель яратувчи ўз билими, баҳолаш ҳисоб-китоблари, тажрибаси, сезиш қобилияти, экспертлар фикрига таянган ҳолда кўриб чиқиб объектга таъсир қилувчи иккинчи даражали омилларни, қандайдир элементларни ёки боғлиқликларни истисно тариқасида моделдан чиқариб ташлаши керак.

“**Адекват**” термини (лотинча *adaequatos* – тенглаштирмак, тенг) моделда объектив дунёнинг боғланишлар ва муносабатларини аниқ тасвирланишини англатади. Ушбу термин билан яратилган моделнинг сифати баҳоланади.

Концептуал модели яратиш жараёнини эҳтимол ҳечқачон тўлиқ равишда формаллаштириб бўлмас. Концептуал модели яратишда оддий қондалар тўпламидан фойдаланишни ўйлаб топиш жуда ҳам қийин. Айнан шунинг учун баъзида **моделлаштириш бу нафақат илм-фан, балки санъатдир** дейишади.

Тадқиқот объекти ҳақида асосий маълумотларга эга бўлган концептуал модели баъзан ахборот (маълумот) модели деб ҳам аташади. Илмий адабиётларда **математик модель** (ММ) тармини кенг қўлланилади. **ММ – тадқиқот объектини математик белгилар ёрдамида ёритилишидир.** ММ яратиш учун хоҳлаган математик воситаларидан фойдаланса бўлади – дифференциал ва интеграл ҳисоб, регрессион таҳлил, эҳтимоллик назарияси, математик статистика ва бошқалар. ММ формулалар, тенгламалар, тенгсизликлар, мантикий шартлар ва бошқалар йиғиндисидан ташкил топади. ММ да қўлланилган математик боғланишлар тадқиқот объекти ҳолатининг ўзгаришлари жараёнини унинг параметрлари, кйрувчи

сигналлари, бошланғич ҳолати ва вақтига боғлиқ ҳолда аниқлайди. Моҳиятига кўра математика математик моделларни шакллантириш учун яратилган.

Математик моделлаштириш – реал жараён ёки ҳодисани у ёки бу адекват математик аппарат ёрдамида қурилган математик модель орқали жараённи сифат ва (ёки) миқдорий ёритилиши усулидир. Математик моделлаштириш замонавий тадқиқотларнинг ажралмас қисми ҳисобланали.

ММ ҳозирда тез-тез тилга олинаётган бир нечта фан “туташган” жойдаги ўзига хос фандир. ММ “хизмат қилаётган” объект тўғрисида чуқур билимга эга бўлмай туриб адекват математик моделни яратиш мумкин эмас. Баъзан моделлаштириш объектини билмайдиган математик ва математикани билмайдиган “объект” мутахассиси билан ММ ни яратиш мумкин деган хом хаёл пайдо бўлади. ММ соҳасидаги мувофақиятли фаолият учун ҳам математик усулларни, ҳам моделлаштириш объекти тўғрисидаги билимларни пухта эгаллаш зарур. Физикада асосий фаолияти математик моделлаштириш бўлган назарий-физик мутахассислигининг мавжудлиги бунга ёрқин мисол бўла олади.

Математик моделлар таснифи.

Қўлланиладиган математик моделлар ҳар хил бўлгани учун уларнинг умумлашган таснифини тузиш қийин. Одатда адабиётларда келтирилган таснифлар асосида ҳар хил йўллар ётади. Шундай йўллардан бири моделлаштирилаётган жараённинг тавсифи билан боғлиқ бўлиб, унда детерминлашган (аниқ) ва эҳтимоллик моделлари ажратилади. Математик моделларнинг бундай кенг тарқалган таснифи билан бир қаторда бошқалари ҳам мавжуд.

Қўлланиладиган математик аппаратнинг ўзига хослиги асосида математик моделлар таснифи:

Параметрлари жамланган математик моделлар.

Одатда бундай моделлар ёрдамида дискрет элементлардан ташкил топган тизимнинг динамикаси тасвирланади. Математик нуктаи назардан бу –чизиқли ёки чизиқли бўлмаган оддий дифференциал тенгламалар тизимидир. Параметрлари жамланган математик моделлар дискрет объектлардан ёки бир хил объектларнинг йиғиндисидан ташкил топган тизимларни тасвирлашда кенг қўлланилади.

Параметрлари тақсимланган математик моделлар.

Бундай турдаги моделлар диффузия, иссиқлик ўтказувчанлик, турли табиатдаги тўлқинларни тарқалиши каби жараёнларни тасвирлайди. Бу жараёнлар нафақат физик табиатига эга бўлиши мумкин. Параметрлари тақсимланган ММ лар биология, физиология ва бошқа фанларда кенг тарқалган. Одатда математик моделлар асоси сифатида математик физика тенгламалари қўлланилади, жумладан, чизиқли бўлмагани ҳам.

Экстремал принципларга асосланган математик моделлар.

Экстремал принцип эмпирик боғланишларни аналитик ифодалар билан аппроксимациялашда қўлланилади. Бундай боғланишнинг график тасвири ва

ушбу боғланишни тасвирловчи аналитик ифоданинг аниқ кўриниши энг кичик квадратлар усули (Гаус усули) номини олган экстремал принцип ёрдамида аниқланади.

Юқорида санаб ўтилган математик моделлар математик моделлаштиришда қўлланиладиган барча математик аппаратларни қамраб олмайди.

Математик моделларни таснифланишининг асосий принципи

Математик моделлар таснифланишининг асосий принципи сифатида кўпинча уларнинг қўлланилиш соҳалари ишлатилади. Бу ҳолда қуйидаги қўлланилиш соҳалари ажратиб кўрсатилади:

- Физик жараёнлар;
- Техникавий қўлланиш, жумладан, бошқариладиган тизимлар, сунъий интеллект;
- Ҳаётий жараёнлар (биология, физиология, тиббиёт);
- Инсонларнинг ўзаро иуносабати билан боғлиқ катта тизимлар (ижтимоий, иқтисодий, экологик);
- Ижтимоий фанлар (тил, санъат).

(Қўлланиш соҳалари моделарнинг адекватлик даражасини камайишига мос равишда келтирилди)

Математик моделлар турлари (1.1-расм): детерминлашган ва эҳтимолий, назарий ва омилий-тажрибавий; чизиқли ва чизиқли бўлмаган; динамик ва статик; узлуксиз ва дискрет; функционал ва таркибий.

Моделлар таркиби – бу тартибланган элементлар тўплами ва уларнинг алоқалари. Параметр – бу объектнинг хусусияти ва иш тартибини баҳоловчи катталиқ. Чиқиш параметрлари техник объектни хусусиятларини, ички параметрлар эса – унинг элементлари хусусиятларини баҳолайди. Ташқи параметрлар – бу техник объектнинг фаолиятига таъсир этувчи ташқи муҳит параметрлари.

Математик моделларни тақдим этиш шакли бўйича инвариант, алгоритмик, аналитик ва график моделларга бўлинади.

Абстрактлаштириш даражаси бўйича техник тизимнинг физик хусусиятларини тасвирлаш учта асосий иерархик даражага бўлинади:

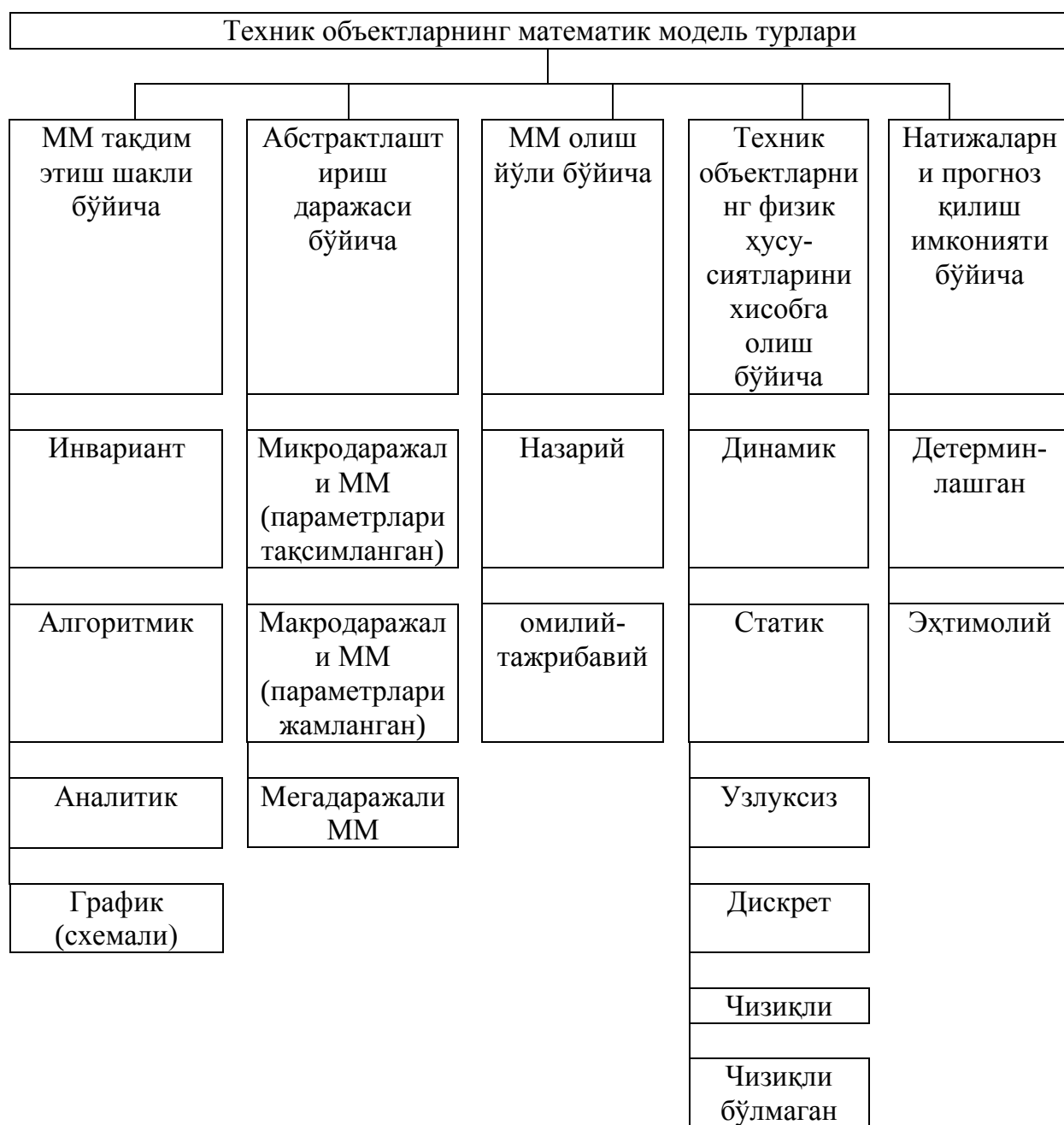
- баланд ёки мегодаража;
- ўрта ёки макродаража;
- паст ёки микродаража;

Мегодаража лойиҳалашнинг бошланғич босқичларига мос келиб, унда илмий техникавий қидирув ва прогнозлаштириш, концепция ва техник ечим ишлаб чиқиш, техник таклифлар ишлаб чиқиш амалга оширилади. Мегодаражанинг математик моделини яратиш учун морфологик синтез, графлар назарияси, математик мантиқ, автоматик бошқарув назарияси, оммавий хизмат кўрсатиш назарияси, чекли автоматлар назариясидан фойдаланишади.

Макродаражада объект жамланган параметрли динамик тизим сифатида кўрилади. Макродаражанинг математик модели оддий

дифференциал тенгламалар тизими кўринишида ифодаланади. Ушбу моделлар техник объектнинг параметрлари ва унинг функционал элементларини аниқлашда фойдаланилади.

Микродаржада объект тақсимланган параметрли яхлит муҳит сифатида ифодаланади. Бундай объектлар ҳаракатланиш жараёнини тасвирлаш учун хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалари қўлланилади. Микродаражада функционал белгиси бўйича бўлинмайдиган базавий элемент деб аталувчи техник тизим элементлари лойиҳаланади. Бунда базавий элемент техник объектнинг бошқа элементлари ва ташқи муҳит таъсири остида бўлган ва ўзи билан ўзаро таъсирлашувчи кўпгина бир турдаги физик табиатли функционал элементлардан ташкил топган тизим сифатида кўрилади.



1.1-расм. Математик моделлар таснифи

Математик моделлар тақдим қилиш шакли бўйича инвариант, алгоритмик, аналитик ва график моделларга бўлинади.

Инвариант шаклида ММ тенгламаларни ечиш усулига боғлиқ бўлмаган тенгламалар тизими сифатида тақдим этилади.

Алгоритмик шаклида моделларнинг ўзаро муносабати танланган сонли ечиш усулига ва алгоритм кўринишида ёзилган – ечиш кетма-кетлигига боғлиқ. Алгоритм моделлари орасидан объектда ташқи таъсир омилларининг ҳар хил таъсирлари остида ишлатилиши натижасида юз берадиган физик ва ахборот жараёнларини имитация қилиш учун мўлжалланган имитацион моделлар ажратишади.

Аналитик модель берилган катталикларга боғлиқ равишда қидирилаётган ўзгарувчиларнинг аниқ боғланишларини ифодалайди (одатда объектнинг чиқиш параметрларини ички ва ташқи параметрлардан боғлиқликлари). Бундай моделлар физикавий қонунлари асосида ёки берилган дифференциал тенгламаларни тўғридан-тўғри интеграллаш натижасида олинади. Аналитик математик моделлар масалаларни оптимал параметрларини оддий ва онсон топишга имкон беради. Шу сабабдан агар моделни шу кўринишда олиш имконияти берилган бўлса, уни ҳар доим амалга ошириш мақсадга мувофиқдир, агар бунинг учун бир қатор кўшимча иш тартибини бажариш керак бўлса ҳам. Бундай моделлар одатда экспериментларни режалаштириш усули билан олинади.

График модель графлар, эквивалент схемалар, динамик моделлар, диаграммалар ва бошқа кўринишларда ифодаланади. График моделлардан фойдаланиш учун инвариант математик моделлар таркибий қисми ва график элементлари шартли тасвирининг аниқ мос келиш қондаси мавжуд бўлиши керак.

Функционал математик моделларни олиш йўли бўйича назарий ва тажрибалига бўлинади. Назарий моделлар объектнинг ишлаш жараёнини тасвирлаш асосида олинади. Тажрибавий моделлар эса объектни “қора қути” сифатида кўриб, ташқи таъсирда ўзини тутиши асосида олинади. Бунда тажрибалар физикавий (техник объектда ёки физик моделида) ёки ҳисобий (назарий математик моделда) бўлиши мумкин.

Назарий моделларни яратишда физикавий ва формал йўллардан фойдаланилади. Физикавий йўл объектни тасвирлашда бевосита физика қонунларини қўллашни назарда тутаяди, масалан, Ньютон, Гук, Кирхгоф қонунлари ва бошқалар.

Формал йўл объектни тасвирлашда умумий математик принциплардан фойдаланади ва ҳам назарий ҳам тажрибавий моделларни қуришда қўлланилади. Тажрибавий моделлар – формалдир. Улар тадқиқ этилаётган техник тизим элементларининг физик хусусиятлари комплексини ҳисобга олмайди, фақатгина тажриба жараёнида ўзгартириш ва (ёки) ўлчаш орқали аниқланадиган тизимнинг айрим параметрлари орасидаги алоқани ўрнатади. Бундай моделлар тадқиқ этилаётган жараёнларнинг адекват тасвирини фақатгина параметрларнинг ўзгартириш амалга ошган экспериментда

параметрларнинг чекланган майдони доирасида беради. Шу сабабдан физика қонунлари ҳам барча техник тизимда, ҳам унинг ҳар бир элементида алоҳида кечувчи ҳодиса ва жараёнларнинг умумий қонуниятларини акс эттираётган вақтда экспериментал математик моделлар алоҳида характер олади. Оқибатда тажрибавий ММ лар физика қонунлари сифатида қабул қилиниши мумкин эмас. Шу билан бирга бу моделларни яратишда қўлланиладиган усуллар илмий фаразларни текширишда кенг қўлланилади.

Функционал ММлар чизиқли ва чизиқли бўлмаган бўлиши мумкин. Чизиқли моделлар фақатгина объектнинг ишлаш ҳолатини ва ҳосиласини тавсифловчи катталиқнинг чизиқли функциясини ўз ичига олади. Реал объектларнинг кўпгина элементларининг тавсифи чизиқли эмас. Бундай объектларнинг ММ лари ўз ичига бу катталиқларнинг чизиқли бўлмаган функциясини ва уларнинг ҳосиласини олади ва чизиқли бўлмаган ММ га киради. Агар моделлаштиришда объектнинг инерцион хусусиятлари ҳисобга олинса ва объектни ёки ташқи муҳитни вақт ичида ўзгариши ҳисобга олинса, унда бундай моделлар динамик моделлар деб аталади. Акс ҳолатда модель – статик деб аталади. Умумий ҳолатда динамик моделларнинг математик кўриниши дифференциал тенгламалар тизимида ифода этилиши мумкин, статик эса – алгебраик тенгламалар тизимида ифодаланади.

Агар объектга ташқи муҳитнинг таъсири тасодифий характерда бўлса ва тасодифий функция билан тасвирланса, у ҳолда эҳтимолий ММ яратиш талаб қилинади. Бироқ бундай модель ниҳоятда мураккаб ва техник объектларнинг лойиҳалашда қўлланилиши катта вақт талаб қилади. Шу сабабдан уни лойиҳалашнинг якуний босқичда қўллашади.

Лойиҳалаш босқичларининг аксарияти детерминлашган моделларда бажарилади. Детерминлашган математик моделлар динамик тизимга ташқи таъсир ва унинг бу таъсирга реакциясининг ўзаро мослиги билан тавсифланади. Лойиҳалашда ҳисоблаш тажрибасида одатда объектга баъзи бир турдаги стандарт таъсирлар берилади: поғонали, импульсли, гармоник, бўлак-чизиқли, экспоненциал ва бошқалар. Уларни тестли таъсирлар деб аташади.

2-Маъруза. Мухандислик масалаларининг ҳисоб схемасини танлаш

Режа:

1. Тузилиш компоновкаси.
2. Қурилиш механикасида статик ва динамик ҳисоб-китоблар.
3. Машиналарнинг динамик ҳисоб схемаси.
4. Ҳисоб схемаларининг ишончлилиқ мезонлари.
5. Атомобилларнинг гидромеханик узатмаси ва вертикал тебранишининг ҳисоб схемалари.

Калит сўзлар: компоновка, статика, динамика, ҳисоб схемаси, қурилма, тузилиш, адекватлик, ишончлилиқ мезонлари, механик узатмалар, гидромеханик узатмалар, тебраниш тизими, уч массали тизим, енгил автомобиль.

Ҳар қандай қурилма лойихаси компоновкадан, яъни рационал конструктив шаклни танлашдан бошланади. Компоновка – лойиҳалашнинг асосий ва кўпроқ ижодга оид қисмидир. У бевосита жараённинг функционал шароитига боғлиқ. Ишлаб чиқариш жараёни шароитида дастгоҳ жиҳозларини жойлаштириш учун уларнинг аниқ технологик ўлчамлар талаб қилинади, бу ўз навбатида бутун бинонинг асосий ўлчамларига ва бу ўлчамлардан ташқарида жойлашиши керак бўлган унинг алоҳида конструкцияларига талаб кўяди. Маъқул компоновкани аниқланиши ва алоҳида конструкцияларни ҳал этилиши мавжуд вариантларга ўхшатиш (таққослаш) асосида техник лойиҳага киритилади.

Қурилманинг конструктив шакли танланганидан сўнг унинг ҳисоб-китобига киришилади. Қурилманинг ҳисоб-китоби унинг барча хусусиятлари, аниқ геометрик ўлчамлар, элементларнинг ўзаро қатий таъсирини ҳисобга олиш назарий жихатдан катта қийинчиликларга ёки мураккаблиги туфайли амалий жихатдан қўллай бўлмайдиган даражага келиши мумкин. Шу сабабдан қурилмани схемалаштириш ва талаб қилинган аниқликга ва тўғрилиқга таъсир қилмайдиган иккинчи даражали омилларни олиб ташлаш керак.

Қурилманинг ҳисоб схемаси деб ҳақиқий унинг юкламалар остида ўзини қандай тутишини аниқловчи энг муҳим хусусиятларини тасвирловчи содда идеаллаштирилган схемага айтилади. Мисол учун, ишлаб чиқариш биносининг кўндаланг рамасини шамол ва кран юкламаларига ҳисоблашда ригелнинг эластик деформацияланишини ҳисобга олиш устунлардаги ҳисоб кучланишларига кам таъсир кўрсатади. Бу ригелни кўп ҳолатларда чексиз қаттиқ деб ҳисоблашга имкон беради. Шунга ўхшаш фараз ўзгартириш усули билан кўрсатилган юкламаларга нисбатан рама ҳисобини сезиларли равишда соддалаштиради: чексиз қаттиқ ригелда бурилиш бурчаклари унинг устунлар билан бирикмасидаги тугунларида нолга тенг ва шундай қилиб номаълум фақатгина ригелни горизонтал кўзғалиши ҳисобланади. Стержен

конструкциясининг ҳисоб схемасида стерженлар бўйлама ўқлар билан алмаштирилади, реал таянч қурилмалар-идеал таянч боғланишлари билан, стержен юзасидаги юкламалар бўлса ўқга ўтказилади.

Ҳисоб схемасини танлаш ҳисоб-ситобни мураккаб ва масулиятли қисми ҳисобланади. Ҳисоб-китобнинг сифати биринчи навбатда ҳисоб схемасига боғлиқ. Нотўғри танланган ҳисоб схемаси ҳатто энг аниқ усулларни қўллаганда ҳам ишончли бўлмайди. Айтиб ўтилган кўндаланг рамадаги қўйилган ригелга қўйилган вертикал юкламалар ўрнига, худди шу схема бўйича горизонтал юкламалар қўйилганда хатоликга олиб келган бўлар эди: чексиз каттиқ ригел устунларга уларнинг ишлаши учун қулайроқ бўлган фақат ўқга оид сиқувчи юкламаларни узатган бўлар эди, мадомики устунлар аслида сиқилиш билан эгилишга ишлайди. Бу ҳолатда бошқа ҳисоб ҳолатига олиб келувчи ригелни энг оҳирги яъний ҳақиқий каттиқлиги ҳисобга олиниши керак.

Шу тариқа, қўйилган масалага боғлиқ ҳолда ҳисоб схемаси ўз кўринишини ўзгартириши мумкин. У ёки бу соддалаштиришдан воз кечиб ёки уни аниқроғига алмаштириб аниқроқ ҳисоб схемасини олиш мумкин.

Жумладан, қурилиш механикасида қурилмаларни статик ва динамик юкламалари таъсири остида уларни мустаҳкамликка, каттиқликка ва турғунликка ҳисоблар олиб борилади. Шунга мос равишда қурилиш механикаси икки асосий бўлимга бўлинади: қурилмалар статикаси ва динамикаси. Иккала бўлим ҳам қурилиш механикасида жуда ҳам муҳим.

Қурилмалар статикаси қурилмаларга статик юкламалар, ҳолат, йўналиш ва ҳисоб-китобда вақтга боғлиқ бўлмаган ёки жадаллик шунчалик секин ўзгарувчанки, улар орқали пайдо бўладиган инерция кучи ҳисобга киритилмайдиган статик юкламалар таъсири остида қурилмаларни ишлашини ўрганади. Қурилмалар статикасининг асосий вазифаси бу қурилмаларда ташқи таъсирлар натижасида пайдо бўлувчи зўриқиш ва деформацияни аниқлаш усули шунингдек қурилмани рационал ва иқтисодий жихатдан мақсадга мувофиқ тузилишини яратиш нуқтаи назаридан ўрганиши ҳисобланади.

Қурилмалар динамикасида қурилмалар ҳисоби динамик юкламаларга нисбатан, катталиклари йўналиши ёки ҳолати шунчалик тез ўзгарадики ҳисоблаш пайтида инерция кучларини эътиборга олиш керак бўладиган саволлар ҳал этилади. Ўз табиатига кўра динамик юқлар жуда хилма-хил ва уларнинг қурилмаларга таъсири статик юкламаларга нисбатан анча мураккаб ҳисобланади. Шу сабабдан, қурилмаларни динамик юкламаларга ҳисоблаш статик юкламаларга қараганда қийинроқ ҳисобланади.

Юқ кўтариш машиналарида динамик ҳисоблар, шу ҳисоб-китоблар асосида машинани тузилишини ўзгартириш ва уларнинг параметрларини динамик юкламаларини пасайтириш, ишқаланадиган элементларни ейилишини камайитириш, металконструкциялар ва механизмларни чидамлилигини ошириш учун керак.

Динамик ҳисоб-китоб динамик ҳисоб схемасини ва шу схемага кирувчи масалалар ҳаракат тенгламасини тузишдан бошланади. Ҳақиқий машиналар ташқи юкламалар моҳияти ва таъсир характери бўйича ҳар хил ташқи юкламалар қўйилган масса ва эластикликга эга бўлган бир-бирлари билан кўп сонли аниқ боғланган элементлардан ташкил топган. Динамик ҳисоб-китоб нуктаи назаридан юк кўтарувчи машина механизмлар, метал конструкцияни кўтариб юривчи узатмалар, кран релс йўллари ва машина ишлаётган бинонинг қурилиш қисмидан ташкил топган ягона динамик тузилмага эга. Динамик ҳисобда машиналарнинг ўзаро таъсирланувчи барча элементларини ҳисобга олиш жуда мураккаб, кўп ҳолатларда уларни ҳисобга олиш ҳам шарт эмас, мадомики динамик юкламаларни шаклланишига барча омиллар бир хил таъсир этмайди.

Реал машинадан динамик ҳисоб схемасига конкрет ҳисоб тартибига сезиларли таъсир кўрсатмайдиган физик омилларни ҳисобга олмасдан ўтилади. Умумий ҳолатда динамик ҳисоб схемасини тузишда юк кўтарувчи машиналар хусусиятини ва уларнинг ҳисоб режимларини аниқловчи қуйидаги физик омилларни ҳисобга олиш лозим: жамланган массалар, кучли элементларни узунлиги бўйлаб массани тарқалиши, куч элементларини эгилишга чидамлилиги, двигателнинг ҳаракатлантирувчи ва тормозлантирувчи кучларининг тезликка боғлиқлиги, вақт оралиғида механик тормоз кучланишининг ўзгариши, ишқаланиш кучини тезликка боғлиқлиги ва бошқалар. Динамик ҳисобнинг ҳар бир конкет ҳолатига биргина физик омил асосий аниқловчи ҳисобланади, бошқалари бўлса - иккинчи даражали. Бир томондан бу ҳисоб объектига, бошқа томондан - динамик ҳисоб мақсадига боғлиқ бўлади.

Динамик ҳисоб схемаси, яъни реал тизимнинг модели, икки асосий талабни қониқтириши керак: биринчидан, у реал тизимнинг маълум адекват ўлчамида бўлиши керак ва имкон қадар ҳисобланаётган тизимни асосий физик хусусиятларини катта тафсилот билан акс эттириши керак; иккинчидан, ҳисоб схемаси динамик масалани ечиш сермехнат бўлмаслиги учун мураккаб бўлмаслиги керак. Ҳар қандай ҳисоб схемасининг мураккаблашиши аниқроқ ечим билан тасдиқланган (ўзини оқлаган) бўлиши керак. Бошқа томондан ҳисоб схемасини соддалашиши қабул қилинган ҳисоб схемаси ёрдамида ўрганилаётган реал физик жараёни нотўғри талқин қилинишига олиб келмаслиги керак.

Қабул қилинган ҳисоб схемасининг ишончлилиқ мезони, назарий ҳисобни эксперимент натижалари билан таққослаш тажрибаси ҳисобланади. Шунини таъкидлаб ўтиш керакки эксперимент тўғри қўйилган бўлиши керак, яъни машинанинг ўрганилаётган ва назарий ечим натижалари билан таққосланаётган иш шароитини акс эттирган бўлиши керак. Бу мисол учун юк кўтарувчи машиналарнинг механизмлари билан бошқариш режимига, кран кўтараётган юкнинг физик параметрларига, краннинг релс йўли ҳолатига ва бошқаларга алоқадор.

Ҳисоб схемасини танлаш — амалий динамиканинг асосий вазифаларидан бири. Маъқулроқ ҳисоб схемасини танлашда муҳандиснинг тажрибаси, унинг ҳиссиёти (интуицияси) ва ҳисоб вариантларини таққослай олиш маҳорати ёрдам беради.

У ёки бу ҳисоб схемасини танлаш ҳисоб-китобнинг мақсади билан ҳам аниқланади. Агар, мисол учун, кран механизмини ҳисоблашнинг мақсади ҳаракатнинг умумий қонуниятини уни барқарор бўлмаган вақтдаги ҳаракатини, двигателни қувватини, тезланиш ва тормозланиш вақти, шунингдек валлар орқали узатилаётган динамик кучланишларни ва бошқаларни аниқлаш бўлса, у ҳолда кран механизмини барча ташқи кучлар қўйилган бир массали айланувчи ёки илгарилама қайтма ҳаракат қилувчи тизим деб қабул қилса бўлади. Бундай ҳисоб схемаларида эластик элементларни бир бирига нисбатан ҳаракати ҳисобга олинмайди (двигатель, барабан, муфта, ва х.к.), яъни у механизмнинг масса маркази ҳаракати қонунини аниқлашга ёрдам беради.

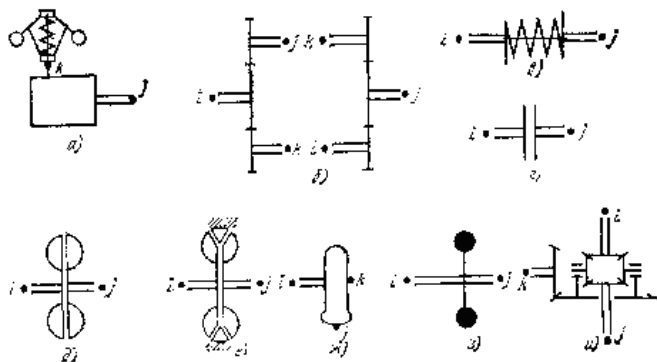
Механизмларнинг алоҳида элементларини эластик деформацияланишини ҳисобга олиб тузилган динамик ҳисоб схемалари, бир бирлари билан эластик боғланишлар билан боғланган бир нечта жамланган массаларга эга. Бу схемалар массаси бир нуқтага жамланмаган, балки унинг узунлиги бўйлаб тарқалган элементларга эга бўлиши мумкин. Алоҳида жамланган масса деб юк, кран тележкаси, двигатель ротори, ҳаракатланувчи ғилдирақлар ва бошқаларни ҳисобласа бўлади, эластик боғлиқликлар бўлса — валлар, пўлат арқон, стерженлар, балкалар.

Динамик ҳисоб схемаларда машиналарнинг реал параметрлари (масса, қаттиқлик коэффициенти, эластиклик, тезликни демферлаш ва бошқалар), шунингдек ташқи таъсирлар ҳисоб тенгламаларни ва ўзаро боғлиқликларни соддалаштириш учун келтирилган катталиклар билан алмаштирилади.

Параметрлар ва юкламаларни келтириш реал механизмни умумий энергияси ва келтирилган тизим энергияси тенглиги асосида ишлаб чиқарилади. Келтирилиш илгарилама ҳаракатга ёки механизм массаларидан бирининг айланма ҳаракатига нисбатан амалга оширилади.

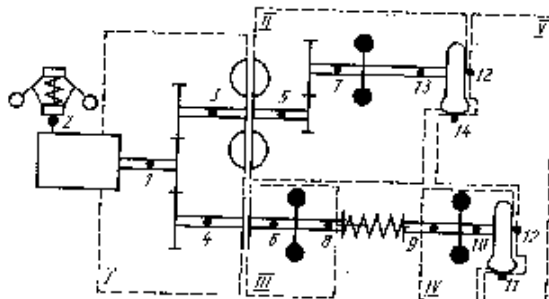
Мисол сифатида гидромеханик узатма, шунингдек автомобиллар тебранишининг ҳисоб схемаларини кўриб чиқамиз.

Гидромеханик ва механик узатмаларнинг таркибий элементларининг таҳлили бу узатмалар ўз ичига асосан 2.1 расмда келтирилган элементларни олишини кўрсатди.



2.1. расм. Механик ва гидравлик узатмаларнинг асосий элементлари.
а—дизель; б—редуктор; в—вал; г—фрикцион; д—гидромуфта; е —
гидротрансформатор; ж — ғилдрак юриткичи; з — маховик; и, —
дифференциал.

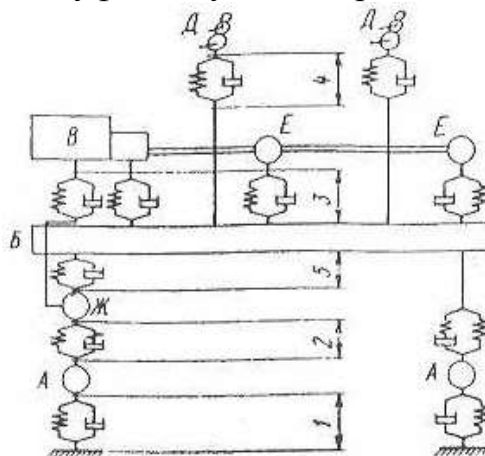
Функционал тугалланган элементлар усулига асосланган ҳисоб
схемаси 2.2. расмда келтирилган.



2.2. расм. Ҳисоб схемаси.

Бу усул ҳар бир элементнинг математик моделини тузишни ва
кейинчалик уларни чегаравий шартлар билан бирлаштиришни кўзда тутди.

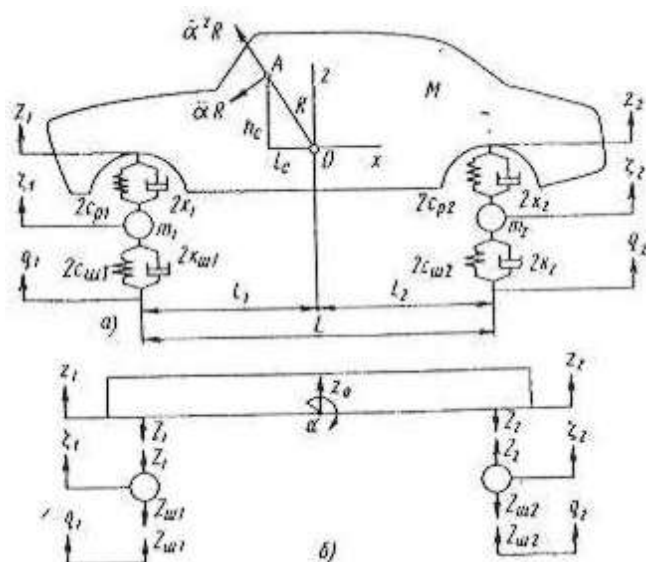
Автомобилга эквивалент бўлган тебраниш тизими бир неча эластик
боғланган массалардан ташкил топади. Унинг кўриниши автомобилнинг
конструктив ўзига хослигига боғлиқ. Енгил автомобил тизимига эквивалент
бўлган тебраниш тизимини кўриб чиқамиз (2.3-расм). Автомобилнинг Б
кузови билан олди томондан кўндаланг Ж эластик боғланган; кузов билан
эластик боғланган орқа ғилдиракнинг мустақил осмаси ва у билан бирга
асосий узатма Е массаси; эластик маҳкамланган амартизаторлар. Бу тизимни
берилган кўринишда кўриб чиқиш мумкин, бироқ уни мураккаблиги ва
таҳлил қилиш қийинлиги туфайли, уни бажариш мақсадга мувофиқ эмас.



2.3. расм. Автомобилга эквивалент тизим.

1- шиналар; 2- осма; 3- двигател, кабина, асосий узатманинг эластик
осмалари; 4-ўриндик; 5-кўндалангларнинг эластик таянчлари.

Берилган тизимни соддалаштириш учун асос автомобил массасининг
хусусий тебранишлар частотасини ҳар хиллиги ҳисобланади: кузов учун 1-3
Гц; ғилдирак учун 7-12 Гц. Автомобилни бошқа массаларининг тебраниш
частоталари баландроқ, шунинг учун уларни вибрацион частотага ўтказамиз.
Тўрт эркинлик даражасига эга бўлган эквивалент тизимга ўтамыз (2.4. расм).



2.4. расм. Автомобилнинг вертикал тебранишини тасвирлашга хизмат қилувчи тизим.

а- уч массали эквивалент тизим, б-рессора таъсирида ва рессора таъсирида бўлмаган массаларга таъсир этувчи кучлар.

Бу ерда учта масса – рессора таъсиридаги M , билан боғланган барча эластик массалар қаттиқ жисм сифатида кўрилади; рессора таъсирида бўлмаган m_1 ва m_2 , $2c_p$ қаттиқлигига эга бўлган эластик элементлар билан бирлашган ва османинг эластик қурилмасига мос келувчи ва $2k$ қаршилик коэффициенти билан османинг сўндирувчи қурилмаси сифатида характерланувчи амортизаторлар. Рессора таъсирида бўлмаган массалар йўл билан $2c_w$ қаттиқлигига эга бўлган пружиналар ва $2k_p$ қаршилик коэффициенти амортизаторлар билан боғланган. Бу катталиклар шинанинг қаттиқлиги ва ундаги ишқаланишни характерлайди.

3-Маъруза. Муҳандисликда оптимизацион моделлаштириш

Режа:

1. Оптималлаштириш усуллари.
2. Мақсадли функция. Оптималлаштириш усуллари.
3. Оптимизацион моделлаштиришнинг асосий босқичлари.
4. Оптимизацион ечимларни шакллантиришнинг умумий математик модели.
5. Оптимизацион масалаларни тузиш ва ечиш (бак тўғрисидаги масала).
6. Чизиқли дастурлаш усулининг умумий ҳолати.
7. Чизиқли дастурлаш масалаларини ифодалаш.
8. Чизиқли дастурлаш масаласини геометрик изоҳлаш.
9. Чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг симплекс усули.

Калит сўзлар: оптимизациялаш, дифференциал ҳисоблаш усуллари, сонли усуллар, шартли ва шартли бўлмаган оптимизациялаш усуллари, вариантларни саралаш усули, чизиқли дастурлаш, стохастик дастурлаш, оммавий хизмат кўрсатиш назарияси, чизиқли бўлмаган дастурлаш, динамик дастурлаш, тармоқли режалаш, ўйинлар назарияси, тажрибаларни режалаштириш назарияси, мақсадли функция, оптималлаш мезонлари, бошқариладиган ўзгарувчилар, бошқарилмайдиган ўзгарувчилар, Лагранж функциялари, функция экстремумлари, чизиқли дастурлаш, вектор шаклидаги тенгламалар, матрица шаклидаги тенгламалар, йигинди белгилари, чизиқли дастурлаш масалалари, чизиқли тенгламалар, таянч нуқталар, таянч ечимлар, геометрик изоҳлар, симплекс усули.

Халқ хўжалигининг барча соҳаларидаги замонавий ишлаб чиқариш оптималлаштириш усуллари кенг қўллашни талаб этади. Ишлаб чиқаришдаги оптималлаш масалаларининг ҳажми одатда катта бўлади, шунинг учун уларни компюторда ечиш мақсадга мувофиқдир. Ҳар хил масалаларни бир усулда ечиш мумкин бўлган бир вақтда, бир турдаги масалани бир вақтнинг ўзида ҳар хил усуллар билан ечиш мумкин. Ҳар қандай ҳолатда ҳам ишлаб чиқариш жараёнининг оптимал кўрсаткичлари аниқланиши керак.

Барча оптималлаштириш усуллари классик ва замонавий турларга ажратиш мумкин.

Классик усуллар:

- **дифференциал ҳисоб усуллари;**
- **сонли усуллар;**
- **шартли ва шартли бўлмаган оптималлаштириш усуллари;**
- **вариантларни саралаш усуллари;**

Замонавий усуллар:

- **чизиқли дастурлаш:** кўп ўзгарувчили чизиқли функцияни ушбу ўзгарувчиларни чизиқли чекловлар мавжудлигидаги экстремал қийматларини топишдан иборат;

- **чизиқли бўлмаган дастурлаш**: мақсадли функция ва чекловлар чизиқли бўлмаган функция бўлиши мумкин;

- чизиқли ва чизиқли бўлмаган дастурлашда ўзига хос ҳолат, яъни оптимал ечимга бутун сон бўлиш шартининг қўйилишидир, бундай масалалар **бутун сонли дастурлашига** киради;

- **динамик дастурлаш**: оптимал ечимни топиш учун режалаштирилаётган операция бир нечта қадамларга (босқичларга) бўлинади ва режалаштириш кетма-кет босқичдан босқичга амалга оширилади. Бироқ ҳар бир босқичда ечиш усулини танлаш операциянинг тўлиқлигича ҳисобга олган ҳолда амалга оширилади.

- **стохастик чизиқли дастурлаш**. Кўпгина амалий ҳолатларда мақсадли функциянинг c_i коэффицентлари, коэффицентлар матричасидаги a_{ij} коэффицентлари, чекловлар коэффицентлари b_i – тасодифий катталиклар бўлади. Бу ҳолатда мақсадли функциянинг ўзи тасодифий катталик бўлиб қолади, ва тенгсизликлардаги чекловлар фақатгина баъзи эҳтимоллик билан бажарилиши мумкин. Ушбу эффектларни ҳисобга олган ҳолда масалани қўйилишини ўзгартириш ва мутлақ янги ечим усулини ишлаб чиқишга тўғри келади. Бунга мос келувчи бўлим стохастик дастурлаш номини олди.

- **оммавий химат қилиш назариясининг** вазифаси – хизмат қилиш тизимида пайдо бўлувчи ҳодисаларни таҳлил ва тадқиқ қилишдир. Назариянинг асосий вазифаларидан бири бу бажарилаётган ишнинг берилган сифатни таъминловчи тизим хусусиятини аниқлаш, мисол учун, минимум кутиш вақти, навбатни ўртача узунлиги минимуми.

- **ўйин назарияси**: томонлар тўқнашган шароитида пайдо бўладиган низо ҳолатларини математик тушунтиришга ҳаракат қилади.

- **графлар назарияси**: графлар назарияси ёрдамида тармоқнинг минимал масофаси, ҳалқасимон маршрут тузиш ва бошқалар билан боғлиқ кўпгина тармоқ масалалари ечилади.

- **геометрик дастурлаш**. Геометрик дастурлаш деганда берилган икки ёки уч ўлчамли ҳудудда бир нечта объектларни зичроқ жойлаштириш масаларига тушунилади. Бундай масалалар ишлаб чиқариш учун қандайдир маҳсулотнинг материални бичиш ва ююшқа шу каби масалаларда учрайди. Бу математик моделлаштиришнинг ҳали етарлича ишлаб чиқилмаган соҳаси бўлиб, бу ердаги алгоритмлар асосан вариантлар танлашни қисқартириш билан маҳаллий минимумлар излашга мўлжалланган.

- **Тажрибаларни режалаштириш назарияси**.

Мақсадли функция. Оптималлаш мезонлари.

Оптимизацион масалани ечишда биринчи навбатда ўрганилаётган жараённинг $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўринишдаги математик моделини (математик боғланишни) аниқлаш керак. Бу модель жараённинг хусусиятларини адекват тасвирлаши керак.

Кейинчалик оптималликга тадқиқ қилиш керак бўлган $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўринишидаги математик боғланишни мақсадли функция деб атаймиз.

Агар мақсадли функциянинг W кўрсаткичига физик маъно қўйилган бўлса, унда уни мақсадли функция билан бирга *оптималлаш мезони* (самарадорлик мезони) деб аташади.

Ишлаб чиқариш жараёнларининг оптимизацион моделлаштиришнинг энг муҳим саволларидан бири – оптималлаштириш мезонини ва уни ифодалайдиган мақсадли функциясини танлаш ҳисобланади.

Оптималлаштириш мезонини танлаш ечилаётган масаланинг кўламига боғлиқ.

Оптималлаштириш мезони хусусий ва умумийларга бўлинади. Умумий мезонлар одатда корхонанинг ҳўжалик самарадорлигини тавсифлайди (фойда, таннарх, ва бошқалар). Хусусий мезонлар эса ишлаб чиқариш жараёнининг алоҳида томонларини тавсифлайди (иш ҳаққи ва бошқаларни).

Оптимизацион моделлаштиришнинг асосий босқичлари.

Оптимизацион моделлаштиришнинг асосий босқичлари қуйидагилардир:

1. Масалани қўйилиши.

У ўз ичига объектни (жараённи) ўрганиш, тадқиқ қилинаётган объектга таъсир қилувчи омилларни ўрганиш, муҳим омилларни аниқлаш, масалани шакллантириш.

2. Математик моделни тузиш.

Умумий кўринишда у қуйидагича ёзилади:

$$W = f(c, X) \rightarrow \max; \quad (3.1)$$

$$\varphi(c, X) \leq b; \quad (3.2)$$

$$X \geq 0. \quad (3.3)$$

бунда W – мақсадли функция (самарадорлик кўрсаткичи);

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – бошқариладиган ўзгарувчанлар вектори;

$c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ – бошқарилмайдиган ўзгарувчанлар вектори;

φ – чеклов функцияси; b – чекловнинг вектор кўрсаткичи.

3. Ечиш усулини топиш.

Оптимизацион ечимларни шакллантиришнинг умумий математик модели.

Бу ҳолатда масаланинг қўйилиши қуйидагича бўлади:

(3.1) максимал (минимал) оптималлик мезонига олиб боровчи ечимни ва шу билан бирга (3.2) ҳамда (3.3) шартларини қондирадиган X векторининг қийматини топиш.

(3.1) – (3.3) математик модели бир мезонли модел ҳисобланади.

Агар оптималлаштириш масаласи m мақсадларни ҳисобга олса, унда уларни оптималлик мезонлари кўринишида шакллантириб қуйидаги кўринишни оламиз:

$$\begin{aligned} W_1 &= f_1(c_1, X) \rightarrow \max; \\ W_2 &= f_2(c_2, X) \rightarrow \min; \\ \\ W_m &= f_m(c_m, X) \rightarrow \text{extr}; \end{aligned} \tag{3.4}$$

бу ерда $c_1, c_2, \dots, c_m$ – бошқарилмайдиган омиллар векторлари.

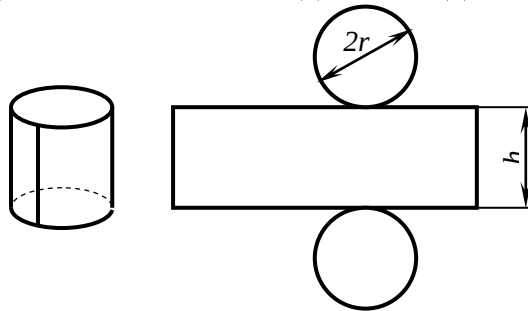
(3.4), (3.2), (3.3) математик модели кўп мезонли модель ҳисобланади.

Реал ечим қабул қилиш масалаларида (3.2) кўринишидаги чекловлар « $\leq$ », « $\geq$ », « $=$ », кўринишидаги тенгсизликларни ҳамда уларнинг ҳар хил бирикмаларини ўз ичига олиши мумкин.

Оптимизацион масалаларни тузиш ва ечиш (бак тўғрисидаги масала).

Таёрланишига минимал материал сарфи шarti билан V ҳажмли цилиндрик бакнинг геометрик ўлчамларини танлаш талаб қилинсин.

Математик моделни тузиш учун лойиҳалаш ечими вектори $X = (r, h)$ ни критамиз, бу ерда $2r, h$ – бакнинг баландлиги ва диаметри (3.1. расм).



3.1. расм.

Агар, бак пайвандлаш усули билан учта деталдан таёрланади деб қабул қилсак, материал сарфи ечим вектори X нинг бакнинг сирти юзасига тенг формуласига тенг бўлади.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow \min_{r,h}. \quad (3.5)$$

Масаланинг шартига мувофиқ (3.5) ифода мақсадли функция ҳисобланади (лойиҳалаш ечимининг оптимал мезони).

Бак берилган V қийматли ҳажмга эга бўлиши шартини қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$\pi r^2 h = V. \quad (3.6)$$

Ечим вектори X таркибий қисмларига қуйидаги қўшимча шарт қўйилиши керак:

$$R > 0, \quad h > 0. \quad (3.7)$$

(3.5) – (3.7) ифодадар $n = 2, m = 1$ даги чизиқли бўлмаган бир мезонли оптимал ечимларни шакллантирадиган моделни тасвирлайди.

Бак таёрланишида минимал меҳнат сарфига эга бўлсин. Агар бакнинг копқоғи, туби ва ён деворларини таёрлашга кетадиган меҳнаи сарфи етарлича

кичкина катталиқ деб ҳисобласак, у ҳолда бакни таёрлашга кетадиган вақт сарфи пайванд қилинадиган чокларга тўғри пропорционал бўлади:

$$T = c(4\pi r + h) \rightarrow \min_{r,h}, \quad (3.8)$$

бу еда c – бирлик узунликни пайвандлашга кетадиган вақт сарфи.

(3.5), (3.6), (3.7), (3.8) ифодалар оптимал ечимларни шакллантирувчи чизиқли бўлмаган икки мезонли моделни тасвирлайди.

Бу масалани математик моделини тузишда маълум геометрик конуниятлардан фойдаланилган.

Агар мос келувчи математик модель ўз ичига тенглик кўринишидаги чекловларни олса масаланинг аналитик ечими бўлиши мумкин, бу модель куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} W &= f(c, X) \rightarrow \text{extr}_X; \\ \varphi(a, X) &= b; \\ -\infty &< X < \infty. \end{aligned}$$

Бундай масалалар одатда Лагранж функцияларини тузишни назарда тутадиган куйидаги кўринишга эга бўлган шартли оптималлаштириш классик усули билан ечилади:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ f(c, x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [\varphi_j(a, x_1, \dots, x_n) - b_j], \end{aligned} \quad (3.9)$$

бу ерда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – Лагранж ноаниқ кўпайтувчилари.

Бу функциянинг экстримум нуқталари куйидаги тенгламалар тизимидан аниқланади:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Бу тизимни ечиб, куйидаги ечимни оламиз:

$$\begin{aligned} x_i^{\text{опт}} &= \psi_i(a, b, c), \quad i = 1, \dots, n; \\ \lambda_j &= \lambda_j(a, b, c), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Бу усулни бир мезонли (3.8), (3.6) масалаларни ечиш учун қўллаимиз ((3.5), (3.7) ҳисобга олмаган ҳолда).

Лагранж функцияси куйидаги кўринишга эга:

$$L(r, h, \lambda) = c(4\pi r + h) + \lambda(\pi r^2 h - V). \quad (3.12)$$

(3.12) дан r, h, λ ларга нисбатан экстремумларини топамиз:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - V = 0.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}; \quad h = \sqrt[3]{4\pi V}; \quad \lambda = -c \sqrt[3]{\frac{4\pi}{V^2}}.$$

Бу усулнинг камчилиги:

2) (3.10) тенгламалар тизими (3.5), (3.6) функцияларнинг оддий ҳоллари учунгина (3.11) кўринишида ечимларни олишга имкон беради.

Чизиқли дастурлаш экстремаллик масалаларини ечиш усули бўлиб, унда:

$$W(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.13)$$
[illegible]

Чизиқли дастурлаш масалалари бир нечта шаклда ёзилиши мумкин:

1) Вектор шаклидаги ёзилиши: $W = \bar{C}\bar{x}$.

Чекловлар: $\bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + \dots + \bar{A}_nx_n \leq \bar{B}$,

бу ерда $\bar{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$; $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;

$\bar{C}\bar{x}$ - скаляр кўпайтма.

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \dots; \bar{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} -$$

мос равишда номаълум ва озод хадлар коэффициентларидан ташкил топади.

2) Матрица шаклида ёзилиши: $W = CX$.

Чекловлар: $AX \leq B$,

бу ерда $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – қатор – матрица;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{устун - матрица}; \quad A = (a_{ij}) - \text{тизим матрицаси} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$CX \text{ и } AX - \text{матрица кўпайтмаси}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{устун - матрица};$$

3) Йиғиш белгилари ёрдамида ёзилиши: $W = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow (\max(\min))$.

Чекловлар: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$.

(3.14) тенгламалар тизими ЧДМ ни ечим соҳасини аниқлайди.

ЧДМ ечим соҳасини текисликда икки ўлчамли ҳолат учун (x_1 ва x_2) тасвирлаймиз (3.2 расмга қаралсин), бу ҳолда:

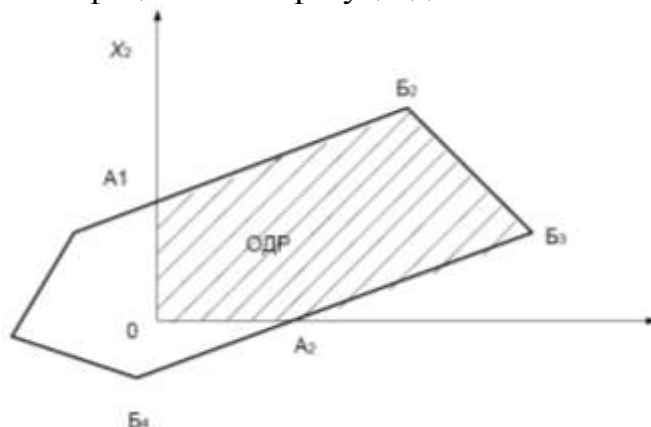
1) $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_1$ – ЧДМнинг ечим соҳаси.

2) $A_1, B_2, B_3, A_2, 0, \Phi_1$ – мумкин бўлган ечимлар соҳаси, $x_j \geq 0$ бўлгани учун.

3) $x_{1,2} \geq 0$ учун кўпбурчак учлари. 0, A_1, B_2, B_3, A_2 таянч нуқталар деб аталади.

4) Таянч нуқталардаги мақсадли функция қийматини таянч ечим деб аталади.

5) Оптимал ечим деб номланувчи $0, A_2, B_2, B_3, A_2 \rightarrow \max(\min)$ учларидан бирида яъни фақатгина бир нуқтада оптимал ечимга эга бўламиз.



3.2. расм. Мумкин бўлган ечимлар соҳаси.

Чизиқли дастурлаш масаласини ифодалаш.

Умумий кўринишда масалани қуйидагича ифодалаш мумкин:

Корхона A_1 ва A_2 маҳсулот турини таёрлаши мумкин. Бу маҳсулотни таёрлаш учун B_1, B_2 ва B_3 турдаги манбаси чекланган хом ашё зарур. Бир маҳсулотни ишлаб чиқариш учун белгиланган миқдордаги хом ашё талаб қилинади, аниқ ҳолат учун уларнинг миқдори 3.1 жадвалда келтирилган. Бу жадвалда, шунингдек, шартли бирликда бир маҳсулотдан келадиган фойда ҳам келтирилган.

Корхонанинг фойдаси максимал бўлиши учун қайси маҳсулотдан ва қанча ишлаб чиқариш керак эканлигини топиш талаб этилади.

3.1 жадвал

Хом ашё тури	Маҳсулот тури		Хом ашё миқдори (B_i)
	A_1	A_2	
B_1	$a_{11}=1$	$a_{12}=4$	28
B_2	$a_{21}=1$	$a_{22}=1$	10
B_3	$a_{31}=3$	$a_{32}=1$	24
Битта маҳсулотдан олинадиган фойда	$C_1=3$	$C_2=2$	
Маҳсулот бирлиги миқдори	X_1	X_2	

Берилган 3.1 жадвалдан фойдаланиб масаланинг мақсадли функциясини ёзамиз:

$$\max W = C_1x_1 + C_2x_2 = 3x_1 + 2x_2, \quad (3.15)$$

бу ерда C_1, C_2 – маҳсулот нархи; x_1, x_2 – маҳсулот сони.

Чекловлар тизими қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq B_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq B_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq B_3 \end{aligned} \right\}$$

ёки

$$x_{1,2} \geq 0 \text{ да}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 28 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 24 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

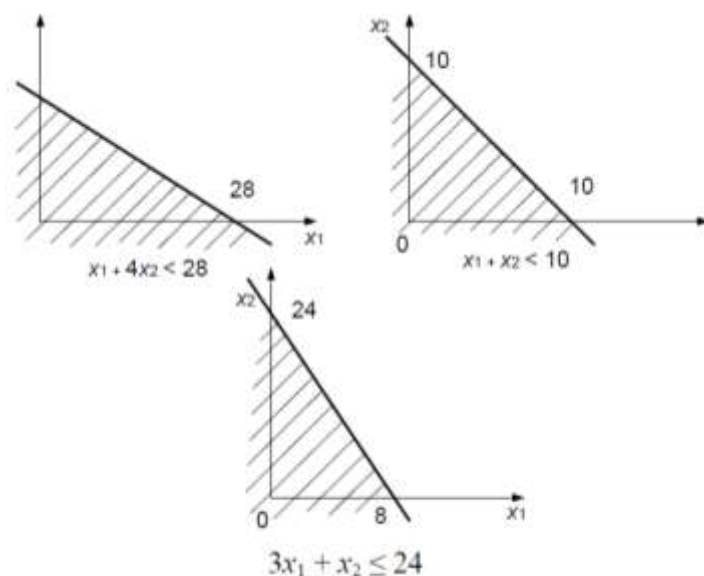
Шундай қилиб чизикли дастурлаш масаласи сўз ва математик кўринишларда шакллантирилди.

ЧДМ бир нечта ечиш усулига эга. Биз график ва симплексли жадваллар усуллари кўриб чиқамиз.

Чизикли дастурлаш масалаларини геометрик изохлаш.

Масалада иккита ўзгарувчи ва уларга қўйилган шарт биринчи даражали тенгсизлик кўринишида ёзилган экан, бу масалани x_1 , x_2 координата текислигида геометрик талқинини кўриш мумкин.

Ўзгарувчи x_1 , x_2 га қўйиладиган (3.16) шартлар x_1 , x_2 қийматларига мумкин бўлган соҳа ҳар бир шарт учун штрихланган ярим соҳада ётишини билдиради (3.3. расм).



3.3. расм.

Барча шартларни координатлаштирувчи x_1 , x_2 ўзгариш соҳаси $O(0; 0)$, $A_1(0; 7)$, $A_2(6; 4)$, $A_3(7; 3)$, $A_4(8; 0)$ учлар билан $O A_1 A_2 A_3 A_4$ кўпбурчакда ётади (3.4. расм).

Энди $W(x_1, x_2)$ функциясининг чизиклари даражасидаги $3x_1 + 2x_2 = C$ параллел тўғри чизиклар оиласини кўриб чиқамиз.

бу ерда $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ – қўшимча (сохта) деб номланувчи баъзи янги манфий бўлмаган ўзгарувчилар.

2) Қўшимча ўзгарувчиларни нол коэффициенти билан мақсадли функцияга ҳам киритса бўлади. У ҳолда:

$$W(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} \quad (3.18)$$

Эслатма:

1. 3.17 ва 3.18 тенгламалар кўринишида ёзилган ЧДМ каноник деб аталади;
2. Қўшимча ўзгарувчилар x_{n+1} ва ҳ. к. $x_1, \dots, x_n$ лар каби мусбатдир;
3. Ўзгарувчиларнинг умумий сони $n_1 = n + m$ бўлади, бу ерда n – бошланғич, m – қўшимча (тенгламалар сонига тенг);
4. Ҳар доим тескари ўтишни амалга ошириш мумкин.

Бир қарашда ЧДМ ни каноник кўринишга ўтиши вазифани мураккаблаштиргандак, лекин маълум бўлишича бу масалани оптималликка тадқиқ қилишни самаралироқ ўтказишга ёрдам берар экан.

Симплекс усулининг асосий ҳолатлари.

(3.15), (3.16) тенгламаларини каноник шаклга келтираемиз. Бунинг учун қўшимча x_3, x_4, x_5 ўзгарувчиларни киритаемиз ва қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 28, \\ x_1 + x_2 + x_4 &\leq 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &\leq 24, \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

бу ерда $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$.

$$W = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5. \quad (3.20)$$

$W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ мақсадли функцияни максимумини таъминловчи ва (3.19) шартларни қаноатлантирувчи x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ларни топиш керак.

Оптимал ечимни топишни (3.19) шартларини қониктирувчи қийматларни топишдан бошлаймиз. Ҳаммасидан ҳам буни $x_1 = x_2 = 0$ учун қилган осон, у ҳолда $x_3 = 28, x_4 = 10, x_5 = 24$. Оптимал ечимнинг бундай бошланғич яқинлашишини таянч ечим деб атаймиз: $x_1^{(1)} = 0, x_2^{(1)} = 0, x_3^{(1)} = 28, x_4^{(1)} = 10, x_5^{(1)} = 24$. Унга мақсадли функциянинг $W^{(1)} = 0$ қиймати мос келади.

(3.19) шартдан x_1, x_2 (уларни озод ўзгарувчилар деб атаймиз) орқали нол бўлмаган x_3, x_4, x_5 ўзгарувчиларни ифодалаймиз:

$$\begin{aligned} x_3 &= 28 - x_1 - 4x_2, \\ x_4 &= 10 - x_1 - x_2, \\ x_5 &= 24 - 3x_1 - x_2. \end{aligned}$$

x_1, x_2 ўзгарувчиларда мақсадли функция қуйидагича бўлади: $W(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$.

Кўриниб турибдики x_1, x_2 ни катталаштириб мақсадли функцияни қийматини оширса бўлади. Мисол учун $x_2=0$ бўлсин. У ҳолда x_1 нинг максимал рухсат этиладиган қиймат 8 бўлади (3.4 расмга қаралсин). Янги

таянч ечимни $x_1^{(2)} = 8, x_2^{(2)} = 0, x_3^{(2)} = 20, x_4^{(2)} = 2, x_5^{(2)} = 0$ оламиз. Унга мақсадли функциянинг $W^{(2)} = 24 > W^{(1)}$ қиймати мос келади.

Кўриниб турибдики иккинчи таянч ечим яхшироқ.

Энди эркин ўзгарувчилар сифатида нолли ўзгарувчиларни (x_2 и x_5), қолганларини эса таянч - (x_1, x_3, x_4) деб қабул қиламиз. (3.19) тизимдан қуйидагини оламиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 - (1/3)x_2 - (1/3)x_5, \\ x_3 &= 20 - (10/3)x_2 + (1/3)x_5, \\ x_4 &= 2 - (2/3)x_2 + (1/3)x_5. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Янги эркин ўзгарувчиларда мақсадли функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$W = 24 + x_2 - x_5.$$

Шу тариқа W мақсадли функцияни ошириш учун $x_5=0$ қолдирган ҳолда эркин ўзгарувчи x_2 нинг қийматини ошириш керак. (3.21) формуладан кўриниб турибдики, x_2 нинг энг катта қиймати 3 га тенг. Унда янги таянч ечим: $x_1^{(3)} = 7, x_2^{(3)} = 3, x_3^{(3)} = 10, x_4^{(3)} = 0, x_5^{(3)} = 0$, мақсадли функциянинг қиймати эса $W^{(3)} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27 > W^{(2)}$ бўлади..

Ўтган галгидак эркин ўзгарувчига x_4 ва x_5 ларни, таянч сифатида эса x_1, x_2 ва x_3 ларни оламиз. (3.19) тизимдан қуйидагини оламиз:

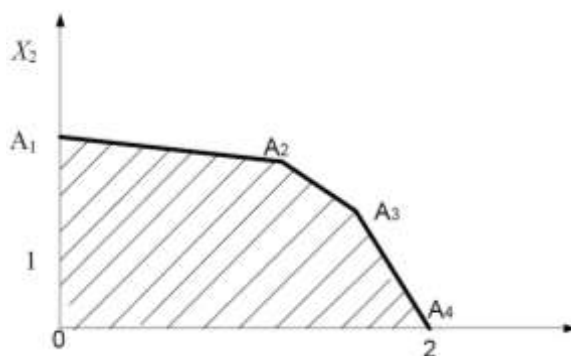
$$\begin{aligned} x_1 &= 7 + x_4/2 - x_5/2, \\ x_2 &= 3 - 3x_4/2 + x_5/2, \\ x_3 &= 9 - 11x_4/2 - 3x_5/2. \end{aligned}$$

Мақсадли функция $W = 27 - (3/2)x_4 - (1/5)x_5$ кўринишига эга бўлади. Кўриниб турибдики, мақсадли функциянинг қийматини ўзгартирмасдан, x_4 ва x_5 ларни қийматларини ўзгартириб бўлмайди. Шундай экан охирги таянч ечим оптималдир. Масалани геометрик усул билан ечгандагидек W функцияга максимал қиймат берувчи оптимал ечим $x_1=7, x_2=3$ олинди.

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 &= 7, x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Келтирилган ечим усули – симплекс усул – мақсадли функцияни оширувчи таянч ечимлар кетма-кетлигини қуришдан иборат.

x_1, x_2 текислигида таянч ечим сонига мос келувчи нуқталарни рақам билан белгилаб таянч ечимни тасвирлаймиз (3.5 расм).



3.5. расм

Шундай қилиб, биз симплекс усул билан координата бошидан масалани геометрик усул билан ечиш орқали олинган $O A_1 A_2 A_3 A_4$ кўпбурчак периметри бўйлаб оптимал ечим сари таянч ечимларни қурамыз.

Келтирилган мисолдан кўриниб турибдики, симплекс усули алгоритми итерацион характерга эга. Усулнинг ҳар бир қадами навбатдаги таянч ечимни қуришга асос бўлади.

4-Маъруза. Муҳандислик масалаларини чизиқли ва чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламалар тизимига келтириш ва уларни санокли ечиш усуллари

Режа:

1. Чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини тўғридан тўғри ечиш усуллари. Крамер, тескари матрица ва Гаусс усуллари.
2. Чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечишнинг итерацион усуллари. Оддий итерация усули ёки Якоби усули. Гаусс – Зейдел усули.
3. Чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламаларни тақрибий ечими. Кесмани иккига бўлиш (дихотом), оддий итерация, Ньютон (урунмалар усули), хорд усуллари.

Калит сўзлар: алгебраик тенгламалар, тизим, чизиқли, чизиқли бўлмаган, тўғридан-тўғри усуллар, Крамер усули, тескари матрица усули, Гаусс усули, итерацион усуллар, оддий итерация усули, Якоби усули, Гаусс-Зейдел усули, кесмани иккига бўлиш усули, Ньютон усули, урунмалар усули, хорд усули.

Кўплаб амалий масалалар чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини (ЧАТТ) ечишга келтирилади (баъзи баҳолар бўйича барча масалаларни 75 % дан ортиқроғи). Чизиқли тизимларни ечиш ҳисоблаш математикасининг энг кенг тарқалган ва муҳим масалалардан бири эканлигини тўлиқ асос билан тасдиқлаш мумкин.

Албатта, ЧАТТ ни ечиш учун кўпгина усуллар ва амаклий дастурларнинг замонавий пакетлари мавжуд, лекин уларни муваффақиятли ишлата билиш учун усуллар ва алгоритмлар тизими асосларини тушиниш, қўлланаётган усулларнинг афзалликлари ва камчиликлари тўғрисида тасаввурга эга бўлиши керак.

Масалани қўйилиши.

Умумий кўриниши қуйидагича ёзиладиган m та чизиқли тенгламалар тизимининг ечимини топиш талаб қилинсин

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = f_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = f_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = f_m \end{cases}$$

Ушбу тенгламалар тизимини матрица кўринишида ҳам ёзиш мумкин:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{f}$$

бу ерда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}.$$

A – тизим матрицаси, $\vec{f}$ - ўнг томон вектори, $\vec{x}$ - номаълумлар вектори.

Маълум A ва $\vec{f}$ лар учун шундай $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ларни топиш талаб этиладики, улар тенгламалар тизимига қўйилганда, тенгламалар тизими айнантига айлانسин.

ЧАТТ нинг ягона ечими мавжуд бўлишининг зарурий ва етарли шarti - бу $\det A \neq 0$, яъни A матрица аниқловчиси нолга тенг эмас. Матрица аниқловчиси нолга тенг бўлган ҳолда у айниган (выраженной) деб аталади ва бунда ЧАТТ ёки ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Бундан буён тенгламалар тизими ягона ечимга эга деб ҳисоблаймиз.

Барча чизиқли алгебраик масалаларни ечиш усуллари икки синфга бўлиш мумкин: **тўғридан-тўғри** (аниқ) ва **итерацион** (тақрибий).

ЧАТТ ни тўғридан-тўғри ечиш усуллари.

Крамер усули.

Амалиётда унчалик катта бўлмаган ўлчовли тизимларда m ($m = 2, \dots, 5$) ЧАТТ ни ечиш учун Крамер формулаларидан кенг фойдаланилади:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ушбу формулалар номаълумларни каср кўринишидаги ифодадан аниқлаш имкониятини беради, бунда каср махражида тизим матрицасининг аниқловчиси, суратида эса озод ҳадларни ноаниқ устунлари билан алмаштиришдан ҳосил бўлган A_i матрицалар аниқловчиси аниқланади. Жумладан, A_1 матрица A матрицанинг биринчи устунини озод ҳадлар устуни вектори f билан алмаштирилади.

Масалан, икки чизиқли тенгламалар тизими учун

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3, \quad x_1 = (-1)/(-3) = 1/3, \quad x_2 = (-2)/(-3) = 2/3$$

Крамер формулаларини юқори ўлчамли ЧАТТни сонли ечиш учун қўллаб бўлмаслигининг асосий омили унинг ўлчами (яъни, m сони) ҳисобланади. Мисол учун, $m=100$ ўлчовли тенгламалар тизимини ечиш учун 10^{158} та ҳисоблаш операцияларини бажариш талаб қилинади (жараён тахминан 10^{19} йилни олади), бунга ҳаттоки энг қудратли замонавий ЭХМларнинг ҳам қучи етмайди.

Тескари матрица усули.

Агар $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда A^{-1} тескари матрица мавжуд бўлади. У ҳолда ЧАТТ ечими $\vec{x} = A^{-1} \vec{f}$ кўринишида ёзилди. Шундай қилиб, ЧАТТ ни ечиш масаласи маълум тескари матрицани ўнг томонлар векторига кўпайтиришга келтирилади. Шундай қилиб, ЧАТТ ни ечиш масаласи ва тескари матрицани аниқлаш масаласи бир-бирига боғлиқдир, Шунинг учун ЧАТТ ечимини топмшни кўпинча матрицани ўзгартириш масаласи деб юритишади. Ушбу усулни қўллаш моуммоси, Крамер усулини қўллаш моуммоси билан бир хил: тескари матрицани аниқлаш – катта иш ҳажмли операциядир.

Гаусс усули.

ЧАТТнинг энг машхур ва кенг тарқалган тўғридан-тўғри ечиш усули - бу Гаусс усули ҳисобланади. Бу усул номаълумларни бирин-кетин чиқариб ташлашни ўз ичига олади.

Қуйидаги тенгламалар тизими берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)} \cdot x_1 + a_{12}^{(0)} \cdot x_2 + \dots + a_{1n}^{(0)} \cdot x_n = f_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} \cdot x_1 + a_{22}^{(0)} \cdot x_2 + \dots + a_{2n}^{(0)} \cdot x_n = f_2^{(0)} \\ \dots \\ a_{n1}^{(0)} \cdot x_1 + a_{n2}^{(0)} \cdot x_2 + \dots + a_{nn}^{(0)} \cdot x_n = f_n^{(0)} \end{cases}$$

Тенгламалар тизимида биринчи элемент $a_{11}^{(0)} \neq 0$ бўлсин. Уни биринчи қаторни етакчи элементи деб номлаймиз. Ушбу қаторнинг барча элементларини $a_{11}^{(0)}$ га бўламиз ва кейинги қаторларнинг барчасидан x_1 ни чиқариб ташлаймиз, буни иккинчи қатордан бошлаб биринчи қатор ҳадларини мос келувчи қатордаги x_1 олдидаги коэффициентга кўпайтириб, кейин айириш йўли билан амалга оширамиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = f_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = f_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n2}^{(1)} \cdot x_2 + a_{n3}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)} \cdot x_n = f_n^{(1)} \end{cases}$$

Агар $a_{22}^{(1)} \neq 0$, у ҳолда юқоридагига ўхшаш ҳолда чиқариб ташлашни давом эттирамиз ва қуйидаги учбурчак матрицали тенгламалар тизимига келамиз.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{1m}^{(1)} \cdot x_m = f_1^{(1)} \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{2m}^{(2)} \cdot x_m = f_2^{(2)} \\ \quad \quad x_3 + \dots + a_{3m}^{(3)} \cdot x_m = f_3^{(3)} \\ \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_m = f_m^{(m)} \end{array} \right.$$

Ундан тескари тартибда x_i барча қийматларини аниқлаймиз:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = f_m^{(m)} \\ x_{m-1} = f_{m-1}^{(m-1)} - a_{m-1m}^{(m-1)} \cdot x_m \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1 = f_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot x_2 - a_{13}^{(1)} \cdot x_3 - \dots - a_{1m}^{(1)} \cdot x_m \end{array} \right.$$

Учбурчакли матрицага олиб келиш жараёни **тўғри йўл**, номаълумларни аниқлаш эса – **тескари** йўл деб аталади. Агар етакчи элементлардан бири нолга тенг бўлса, келтирилган Гаусс алгоритмини қўллаб бўлмайди. Бундан ташқари, агар қайсидир етакчи элемент қиймати кичик бўлса, уни яхлитлаш чоғида ҳатоликнинг ошишига ва ҳисоб аниқлигини пасайишига олиб келади. Шунинг учун одатда Гаусс усулининг бошқа варианты – бош элементни танлашга асосланган Гаусс схемаси қўлланилади. Қаторларнинг жойини, шунингдек коэффицентлари ва номаълумлари қайтадан рақамланган устунларни жойини ўзгартириш йўли билан қуйидаги шарт бажарилишига эришилади:

$$|a_{ii}^{(0)}| \geq |a_{ij}^{(0)}|, j = i+1, i+2, \dots, m;$$

яъни биринчи бош элементни танлаш амалга оширилади. Тенгламаларни жойини ўзгартириш орқали биринчи тенгламадаги a_{11} коэффицентининг модули бўйича максимал бўлиши таъминланади. Аввалгидек биринчи қаторнинг бош элементга бўлиб, x_1 ни қолган тенгламалардан чиқариб ташланади. Сўнгра қолган устунлар ва қаторлар учун иккинчи бош элемент танланади ва ҳоказо.

Чизикли алгебраик тизимларни итерацион ечиш усуллари.

Оддий итерация усули ёки Якоби усули.

Эслатиб ўтамиз, биздан матрица кўринишида қуйидагича ёзилган чизикли тенгламалар тизимини ечиш талаб қилинади:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{f}$$

Бу ерда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Дастлабки тизимнинг A матричасини диаганал элементлари нолга тенг эмас деб фараз қиламиз ($a_{ii} \neq 0, i=1,2, \dots, n$). Тизимниг биринчи тенгламасини x_1 га нисбатан ечамиз, иккинчисини x_2 га нисбатан ва ҳ.к. Скаляр кўринишида ёзилган қуйидаги эквивалент тизимни оламиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (f_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m)) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (f_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m)) \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= \frac{1}{a_{mm}} (f_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{m,m-1}x_{m-1})) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Энди, (4.1) рекуррент ифодага, нолли яқинлашишни $x_i^{(0)}$ бериб итерацион жараёни бажарсак бўлади:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} (f_1 - a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \dots + a_{1m}x_m^{(0)}) \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} (f_2 - a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} + \dots + a_{2m}x_m^{(0)}) \\ &\dots \dots \dots \\ x_m^{(1)} &= \frac{1}{a_{mm}} (f_m - a_{m1}x_1^{(0)} + a_{m2}x_2^{(0)} + \dots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{(0)}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Худди шундай кейинги яқинлашиш $x_i^{(2)}$ аниқланади, бунда (4.2) да $x_i^{(0)}$ ўрнига $x_i^{(1)}$ қўйиш керак.

Умумий ҳолат учун:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} (f_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1m}x_m^{(k)})) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} (f_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2m}x_m^{(k)})) \\ &\dots \dots \dots \\ x_m^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{mm}} (f_m - (a_{m1}x_1^{(k)} + a_{m2}x_2^{(k)} + \dots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{(k)})) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ёки

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Итерацион жараёни тугатиш шarti $\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$

Яқинлашишнинг етарли шarti: агар диаганал устунликлари шarti

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

бажарилган бўлса, яъни , унда ҳар қандай бошланғич яқинлашиш танланганда ҳам (4.3) итерацион жараёни яқинлашувчи бўлади. Агар берилган тенгламанинг тизими яқинлашиш шартини қониқтирмаса, у ҳолда уни диаганал устунлик кўринишига олиб келинади.

Бошланғич яқинлашишни танлаш тақрибий ечимини олиш учун зарур бўладиган итерациялар сонига таъсир қилади. Кўпинча бошланғич яқинлашиш сифатида $x_i^{(0)} = \beta_i = f_i / a_{ii}$ ёки $x_i^{(0)} = 0$ олинади.

Мулоҳаза. Юқорида келтирилган яқинлашиш шarti етарли ҳисобланади, яъни агар ушбу шарт бажарилса, унда жараён яқинлашувчи бўлади. Бироқ, жараён диаганал устунлик бўлмаганида ҳам яқинлашувчи бўлиши мумкин, шунингдек, яқинлашувчи бўлмаслиги ҳам бўлиши мумкин.

Мисол.

Чизиқли тенгламалар тизимини $\varepsilon = 0.01$ аниқлик билан ечинг:

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$$

	8	4	2		10		x_1
A =	3	5	1	$\vec{f}$ =	5	$\vec{x}$ =	x_2
	3	-2	10		4		x_3

Тўғридан тўғри усул билан ечиш, мисол учун тескари матрица усули билан ечиш қуйидаги ечимни беради:

$$x_1 = 1.308, \quad x_2 = 0.346, \quad x_3 = 0.158$$

Ечимни оддий итерация усули билан аниқлаймиз. Диаганал устунлик шартини текшираемиз:

$$|8| > |4| + |2|, \quad |5| > |3| + |1|, \quad |10| > |3| + |-2| + |3|.$$

Тенгламалар тизимини (4.1) кўринишига олиб келамиз:

$$\begin{cases} x_1 = -0.5x_2 - 0.25x_3 + 1.25 \\ x_2 = -0.6x_1 - 0.2x_3 + 1 \\ x_3 = -0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} + 1.25 \\ x_2^{(k+1)} = -0.6x_1^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -0.3x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 0.4 \end{cases}$$

Бошланғич яқинлашиш $x_i^{(0)} = 0$. Кейинги ҳисобларни жадвал кўринишида келтирамиз:

k	x ₁	x ₂	x ₃	точность
0	0	0	0	
1	1.250	1.000	0.400	1.2500
2	0.650	0.170	0.225	0.8300
3	1.109	0.565	0.239	0.4588
				
4	0.908	0.287	0.180	0.2781
5	1.061	0.419	0.185	0.1537
6	0.994	0.326	0.165	0.0931
7	1.046	0.370	0.167	0.0515
8	1.023	0.594	0.160	0.2235
9	0.913	0.582	0.212	0.1101
10	0.906	0.505	0.242	0.0764
11	0.937	0.495	0.229	0.0305
12	0.945	0.516	0.218	0.0210
				
13	0.937	0.523	0.220	0.0077

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1.25, \\ x_2^{(1)} &= 1, \\ x_3^{(1)} &= 0.4, \end{aligned} \quad \max \begin{pmatrix} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1 \\ 0.4 \end{pmatrix} = 1.25 > \varepsilon = 0.01,$$

Бу ерда

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= -0.5 \cdot 1 - 0.25 \cdot 0.4 + 1.25 = 0.65, \\ x_2^{(2)} &= -0.6 \cdot 1.25 - 0.2 \cdot 0.4 + 1 = 0.17, \\ x_3^{(2)} &= -0.3 \cdot 1.25 + 0.2 \cdot 1 + 0.4 = 0.225, \end{aligned} \quad \max \begin{pmatrix} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.83 \\ 0.175 \end{pmatrix} > \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= -0.5 \cdot 0.17 - 0.25 \cdot 0.225 + 1.25 = 1.109 \\ x_2^{(3)} &= -0.6 \cdot 0.65 - 0.2 \cdot 0.225 + 1 = 0.565 \\ x_3^{(3)} &= -0.3 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.17 + 0.4 = 0.239 \end{aligned} \quad \max \begin{pmatrix} |x_1^{(2)} - x_1^{(3)}| \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(3)}| \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(3)}| \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 0.459 \\ 0.395 \\ 0.014 \end{pmatrix} > \varepsilon,$$

ва ҳ.к., охириги устунда 0.01 дан кичкина катталики олмагунча давом эттирилади, бу 13-итерацияда содир бўлади.

Шундай қилиб яқинлашган ечим қуйидагича кўринишга эга бўлади:
 $x_1 = 0.937$, $x_2 = 0.523$, $x_3 = 0.22$

Гаусс – Зейдель усули

Ҳисоб формулалари қуйидаги кўринишга эга:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

яъни изланаётган векторнинг $(k+1)$ яқинлашишини i -компонентини ҳисоблаш учун, $(k+1)$ кадамда ҳисоблаб бўлинган биринчи $i-1$ компонентларнинг қийматларидан фойдаланилади.

Батафсил формулалар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(f_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - \dots - a_{1m} x_m^{(k)} \right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(f_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} - a_{24} x_4^{(k)} - \dots - a_{2m} x_m^{(k)} \right)$$

.....

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - a_{i1} x_1^{(k+1)} - a_{i2} x_2^{(k+1)} - \dots - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{im} x_m^{(k)} \right)$$

.....

$$x_m^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(f_1 - a_{11} x_1^{(k+1)} - a_{12} x_2^{(k+1)} - \dots - a_{1,m-1} x_{m-1}^{(k+1)} \right)$$

Бу усулнинг яқинлашишини етарлича шарти, оддий итерация усулидагидек, яъни диаганал устунликдир.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Бошланғич яқинлашиш: $x_i^{(0)} = 0$

Аввалда келтирилган тенгламалар тизими ечимини Гаусс – Зейдел усули билан аниқлаймиз.

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$$

Ҳисоб формулалари:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} + 1.25 \\ x_2^{(k+1)} = -0.6x_1^{(k+1)} - 0.2x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -0.3x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.4 \end{cases}$$

k	x1	x2	x3	точность
0	0	0	0	
1	1.250	0.250	0.075	1.2500
2	1.106	0.321	0.132	0.1438

3	1.056	0.340	0.151	0.0500
4	1.042	0.344	0.156	0.0139
5	1.039	0.346	0.157	0.0036

$$\begin{aligned}
 x_1^{(1)} &= -0.5 \cdot 0 - 0.25 \cdot 0 + 1.25 = 1.25, \\
 x_2^{(1)} &= -0.6 \cdot 1.25 - 0.2 \cdot 0 + 1 = 0.25, \\
 x_3^{(1)} &= -0.3 \cdot 1.25 + 0.2 \cdot 0.25 + 0.4 = 0.075, \\
 \max \begin{pmatrix} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| \end{pmatrix} &= \max \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.25 \\ 0.075 \end{pmatrix} = 1.25 > \varepsilon = 0.01, \\
 x_1^{(2)} &= -0.5 \cdot 0.25 - 0.25 \cdot 0.075 + 1.25 = 1.106, \\
 x_2^{(2)} &= -0.6 \cdot 1.106 - 0.2 \cdot 0.075 + 1 = 0.321, \\
 x_3^{(2)} &= -0.3 \cdot 1.106 + 0.2 \cdot 0.321 + 0.4 = 0.132, \\
 \max \begin{pmatrix} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| \end{pmatrix} &= \max \begin{pmatrix} 0.144 \\ 0.071 \\ 0.057 \end{pmatrix} = 0.144 > \varepsilon,
 \end{aligned}$$

Жадвалдан кўриниб турибдики, керакли аниқликга оддий итерация усулидаги каби 13-да эмас балки 5-итерацияда эришилди ва илдиз қийматлари ҳам тескари матрица усулида олинган қийматларга яқинроқ:

$$x_1 = 1.039, x_2 = 0.346, x_3 = 0.157$$

Чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламаларни тақрибий ечиш.

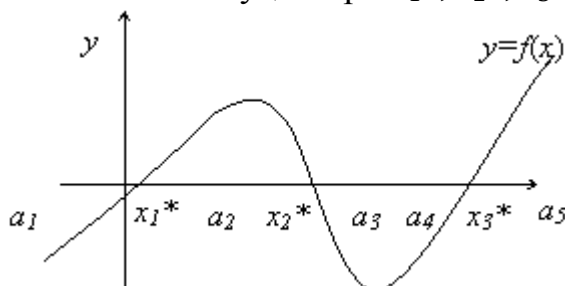
Масалани қўйилиши.

Чизиқли бўлмаган алгебраик тенглама берилган

$$f(x) = 0 \quad (4.4)$$

Тенгламанинг чизиқли эмаслиги, функция графиги тўғри чизиқ эмаслигини, яъни $f(x)$ га даражали ёки белги остидаги x нинг киришини англатади.

Тенгламани ечиш – бу $R: f(x^*) = 0$ бўладиган x^* ни топиш демакдир. x^* қиймати *тенгламани илдизи* деб аталади. Чизиқли бўлмаган тенглама бир нечта илдизга эга бўлиши мумкин. Тенглама илдизини геометрик интерпретацияси 4.1 расмда келтирилган. (4.4) тенгламанинг илдизлари $f(x)$ функцияси x ўқи билан кесишаётган нуқталари x_1^*, x_2^*, x_3^* ҳисобланади.



4.1 расм. Тенглама илдизларининг геометрик интерпретацияси.

(4.4) тенгламасининг ечиш усуллари **аниқ** (аналитик) ва **тақрибий** (итерацион)ларга ажратиш мумкин. Аниқ усулларда илдиз баъзи алгебраик формулалар кўринишида бўлади. Мисол учун, квадрат тенгламалар ечими, баъзи тригонометрик тенгламалар ечими ва ҳ.к.

Тақрибий усулларда ечимни аниқлаш жараёни, умуман айтганда чексиздир. Ечим $\{x_n\}$ чексиз кетма-кетликда олинади. Ҳар қандай ε учун чегарани аниқлаш бўйича шундай N топиладики $n > N, |x_n - x^*| < \varepsilon$ бўлиши

керак. Бу кетма-кетликнинг x_n хадлари ечимга кетма-кет яқинлашувчилар ёки итерациялар деб аталади. Берилган ε сони усул аниқлиги деб аталади, N – бу ечимни ε аниқлигида олиниши учун бажарилиши керак бўлган итерациялар сонини билдиради.

Такрибий (итерацион) усуллар.

Илдизларнинг ажратилган оралиқлари маълум бўлсин. $[a, b]$ оралиқда илдизни топишга имкон берувчи бир нечта итерацион усуллар билан танишамиз.

Кесмани иккига бўлиш усули (дихотомия).

Усулнинг ғояси.

$[a, b]$ кесимни ўртасини топамиз: $c=(a+b)/2$. Илдиз икки қисмнинг бирида қолди: $[a, c]$ ёки $[c, b]$. Агар $f(a) \cdot f(c) < 0$ бўлса, у ҳолда илдиз $[a, c]$ кесмасига тушган, унда c ни янги охириги ўнг нуқта сифатида қабул қилиб кесмани бўлишни қайтарса бўлади, унда $b=c$. Акс ҳолда илдиз $[c, b]$ ярмига тушади ва чап томон охириги қийматини ўзгартириш керак бўлади: $a=c$. Илдиз ҳар доим ажратилаётган кесма ичида жойлашганлиги сабабли, кесма узунлиги берилган аниқликдан кичик бўлса, итерация жараёнини тўхтатса бўлади: $|b - a| < \varepsilon$.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ тенгламасини $\varepsilon=0,05$ аниқлигида топамиз.

Ҳисоб натижаларини жадвал кўринишида расмийлаштирамиз.

k	a	b	c	f(a)	f(c)	b-a
0	-2	-1	-1.5	-27	-10.375	1
1	-1.5	-1	-1.25	-10.375	-4.07813	0.5
2	-1.25	-1	-1.125	-4.07813	-1.39258	0.25
3	-1.125	-1	-1.0625	-1.39258	-0.1604	0.125
4	-1.0625	-1	-1.03125	-0.1604	0.42868	0.0625
5	-1.0625	-1.03125	-1.04688	-0.1604	0.136372	0.03125
6						
7						
8						
9						
10	-1.05469	-1.05371	-1.0542	-0.01146	-0.00218	0.000977

бу ерда a_0, b_0 – илдиз жойлашган оралиғининг бошланғич чегаралари;

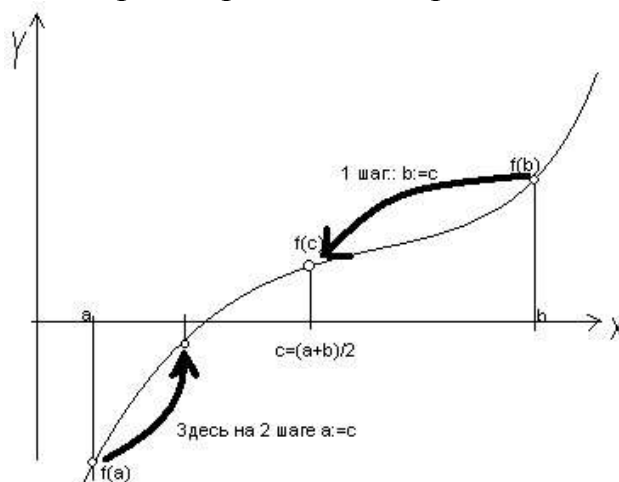
$$c_i = (a_i + b_i) / 2, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$a_i = \begin{cases} c_{i-1}, & \text{если } f(a_{i-1}) \cdot f(c_{i-1}) > 0; \\ a_{i-1}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} b_{i-1}, & \text{если } f(a_{i-1}) \cdot f(c_{i-1}) > 0; \\ c_{i-1}, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Ҳисоб натижасида биринчи илдизнинг тахминий қиймати: $\varepsilon=0,05$ аниқлигида $x=-1.047$ $x = -1.047$ ва $x=-1.0542$ аниқлигида $\varepsilon=0,001$.

Усулнинг график тасвири 4.2 расмда келтирилган:



4.2 расм. Кесмани тенг иккига бўлиш усулининг график тасвири.

Оддий итерация усули.

Эквивалент ўзгартириш ёрдамида дастлабки $f(x)$ тенгламасини оддий итерация усулида қўллашга қулай кўринишга олиб келамиз: $x = \varphi(x)$. Бошланғич яқинлашиш $x_0 \in [a, b]$ ни танлаймиз. Навбатдаги итерацияни қуйидаги формула орқали аниқлаймиз: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, яъни $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$ ва ҳ.к. Итерация жараёни $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ бўлганда тугайди. Дастлабки тенгламани $x = \varphi(x)$ эквивалент кўринишини чексиз кўп услубларда ифодалаш мумкин. Хилма-хил бундай ифодаланишлардан ҳисоб кетма-кетлигининг илдизга яқинлашадигани танланади. Аниқки, $x^* = \varphi(x^*)$.

Оддий итерация усулини геометрик маъноси 4.3 расмда келтирилган.

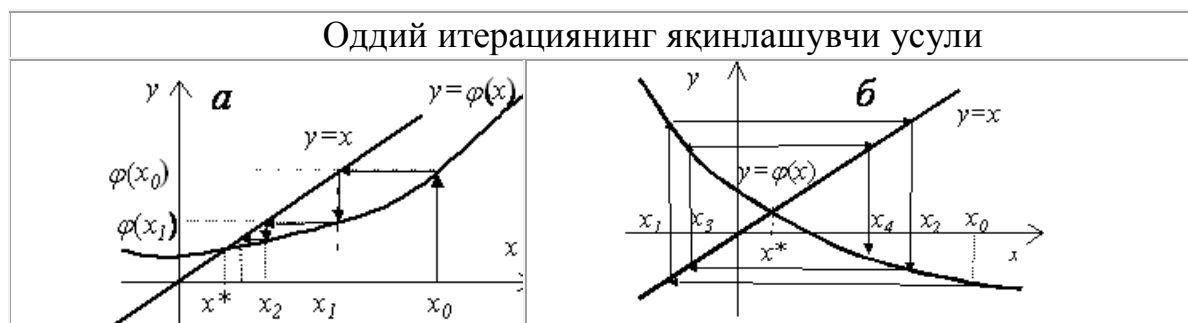
Бошланғич яқинлашиш сифатида одатда $[a, b]$ кесмани ўртаси олинади: $x_0 = (a+b)/2$.

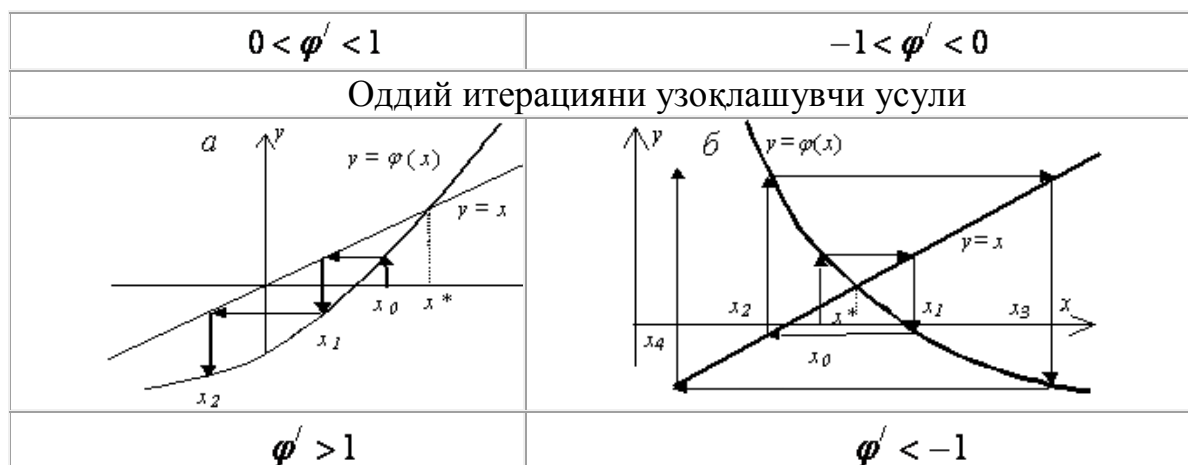
Амалиётда $f(x)$ сифатида кўпинча $\varphi(x) = x - cf(x)$ функцияси олинади, бу ерда c – ўзгармас. c ўзгармас барча $x \in [a, b]$ учун $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ бўлишини таъминлайдиган шарт асосида танланади.

$\varphi(x)$ функциясининг бундай танланишида оддий итерация усули **релаксация усули** деб аталади.

c ни танлаш шартига эга бўламиз:

$$|\varphi'(x)| = |1 - cf'(x)| < 1, \Rightarrow -1 < 1 - cf'(x) < 1, \Rightarrow -2 < -cf'(x) < 0,$$





4.3 расм. Оддий итерациянинг геометрик маъноси.

Шунлай қилиб, агар $f'(x) < 0$ бўлса, $2/f'(x) < c < 0$ бўлади. Агар $f'(x) > 0$ бўлса, $2/f'(x) > c > 0$ бўлади. Кўриниб турибдики, c нинг ишораси $f'(x)$ ишорасига мос келмоқда. Кўпинча c қуйидаги кўринишда олинади:

$$c = 2 / (M + m), \text{ бу ерда } M = \max(f'(x)), m = \min(f'(x))$$

Бундай c яқинлашиш шартини қониктиришига ишонч ҳосил қиламиз.

$f'(x) > 0$ бўлсин. У ҳолда $M > 0$ ва $m > 0 \rightarrow c > 0$ ва

$$\frac{2}{f'(x)} - \frac{2}{M+m} = \frac{2(M+m-f'(x))}{f'(x)(M+m)} > 0, \text{ т.к. } M > f'(x)$$

Шундай экан, $2/f'(x) > c > 0$.

[1,3] ораллиғида ётган дастлабки $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ тенгламамизни иккинчи илдизини $\varepsilon = 0,001$ аниқлиги билан топамиз.

Энг аввало $\varphi(x) = x - cf'(x)$ функциясини топамиз. Бизнинг ҳолатда $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 11$.

c топиш учун [1,3] кесмасида $f(x)$ нинг максимал ва минимал қийматларини аниқлаш керак.

Бунинг учун ораллиқ учларидаги $f'(x)$ ва $f''(x) = 0$ бўлган нуқталардаги қийматларини аниқлаш керак, яъни экстримум нуқталарида, агар шундай нуқталар мавжуд бўлса. $f'(x)$ нинг шундай қийматлари орасидан максимал ва минимал қийматлар танланади.

$$x=2 \quad x \in [1,3], \quad f'(2) = -8 \quad \text{да} \quad f'(1) = 3x^2 - 12x + 3 = -6, \quad f'(3) = -6, \quad f''(x) = 6x - 12 = 0.$$

Шундай экан,

$$M = \max(-6, -6, -8) = -6, m = \min(-6, -6, -8) = -8, c = 2 / (M + m) = 2 / (-14) = -1/7$$

Шу тариқа,

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{7} f'(x) = x + \frac{1}{7} (x^3 - 6x^2 + 3x + 11)$$

Ҳисобни жадвал кўринишида расмийлаштирамиз:

k	x	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_k) $
0	2	-	1
1	2.14285	0.14285	0.28279
	7	7	9

2	2.10245 7	0.0404	0.07896
3	2.11373 7	0.01128	0.02216 4
4	2.11057 1	0.00316 6	0.00621 3
5	2.11145 9	0.00088 8	0.00174 2
6	2.11121	0.00024 9	0.00048 9

Бу

ерда

$$x_0 = (1+3)/2 = 2, \quad x_1 = x_0 + \frac{1}{7}(x_0^3 - 6x_0^2 + 3x_0 + 11), \quad x_2 = x_1 + \frac{1}{7}(x_1^3 - 6x_1^2 + 3x_1 + 11)$$

ва х.к.

Итерация жараёнининг тўхташ шarti: $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ ёки $|f(x_k)| < \varepsilon$.

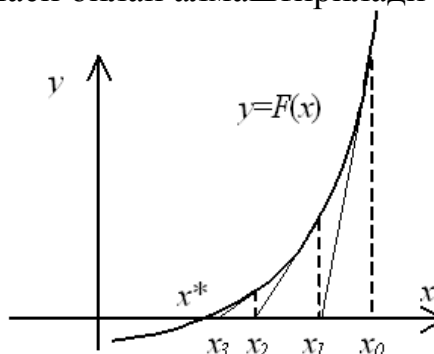
Ньютон усули (урунмалар усули).

Биз $f(x)=0$ тенгламасини ечаётганимизни эслатамиз.

Усул қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Усулнинг геометрик интерпретацияси қуйидагича: агар $x_k < x_{k+1}$ бўлса $x \in [x_k, x_{k+1}]$ да ёки $x_{k+1} < x_k$ бўлса $x \in [x_{k+1}, x_k]$ да $y=f(x)$ эгри чизиқнинг бўлаги x_k нуқтадан ўтган уринма кесмаси билан алмаштирилади (4.4 расм).



4.4-расм. Ньютон усулини геометрик интерпретацияси.

Уринма тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$y = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)$. $y=0$ ўқига тегишли кесишиш нуқтасини аниқлаймиз ва уни x_{k+1} билан белгилаймиз.

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f'(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Бундан:

$|x_{k+1} - x^*| < q * |x_k - x^*|^2$ эканлигини, яъни усул иккинчи тартибда яқинлашишини кўрсатиш мумкин.

$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ бўлганда Ньютон усулини оддий итерация усули сифатида талқин қилса бўлади.

Эслатма. Агар $f''(x)$ нинг ишораси ўзгармайдиган тенглама илдизининг жойлашган оралиғи маълум бўлса, унда бошланғич яқинлашиш сифатида $f'(x)$ ва $f''(x)$ ларнинг ишоралари мос тушадиган ечим жойлашган оралиқнинг чегараси олинади.

Ньютон усули билан бошланғич $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ тенгламамизни [4,5] оралиғида ётган учинчи илдизини $\varepsilon = 0,001$ аниқлигида топамиз. Дастлаб $f''(x)$ ушбу оралиқда ишорасини ўзгартирмаслигига ишонч ҳосил қиламиз.

$f''(x) = 6x - 12$. $x > 2$ да $f''(x) > 0$, яъни [4,5] интервалида $f''(x) > 0$. $f(5) = 1 > 0$ бўлгани учун $x_0 = 5$.

Ҳисобни жадвал кўринишида расмийлаштирамиз:

k	x_k	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	5	-	1	18
1	4.944444	0.055556	0.027606	17.00926
2	4.942821	0.001623	2.33E-05	16.98059
3	4.94282	1.37E-06	1.66E-11	16.98057

Бу ерда $f(x_k) = x_k^3 - 6x_k^2 + 3x_k + 11$, $f'(x_k) = 3x_k^2 - 12x_k + 3$, $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Илдиз сифатида $x = 4.943$ қийматини олса бўлади. Кўриниб турибдики, иккинчи итерацияда жараён яқинлашди.

Солиштириш учун Ньютон усули билан $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ тенгламанинг [-2,-1] оралиғида биринчи илдизини топамиз:

$f''(x) = 6x - 12$ бўлгани учун [-2,-1] оралиғида $f''(x) < 0$, $f(-2) = -27 < 0$ бўлгани учун $x_0 = -2$.

k	x_k	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	-2		-27	39
1	-1.30769	0.692308	-5.41966	23.82249
2	-1.08019	0.227502	-0.50182	19.46272
3	-1.05441	0.025783	-0.00613	18.9882
4	-1.05408	0.000323	-9.5E-07	18.98229
5	-1.05408	5.02E-08	-2.3E-14	18.98229

Эслатиб ўтамиз, дихотомия усули билан 0.001 аниқлигига 10-итерацияда эришилган эди.

Тенгламани иккинчи илдизини [1,3] оралиғида ҳисоблаймиз. $x = 2$ бўлганида $f''(x) = 6x - 12$ ўз ишорасини ўзгартиради. Ечим жойлашган оралиқни $f''(x)$ белгисини ўзгартирмайдиган даражада камайтирамиз. [2.1; 3] оралиқни кўриб чиқамиз. $f''(2.1) = 6 \cdot 2.1 - 12 = 0.6 > 0$ б $f(2.1) = 0.101 > 0$. Шундай экан, $x_0 = 2.1$.

k	x_k	$ x_{k+1}-x_k $	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	2.1		0.101	-8.97
1	2.11126	0.01126	3.95E-05	-8.96286
2	2.111264	4.4E-06	6.47E-12	-8.96286
3	2.111264	7.22E-13	0	-8.96286

Агар оддий итерация усули билан солиштирсак бу илдизни қийматини биз 6 та итерация ўрнига 2 та итерацияда олдик.

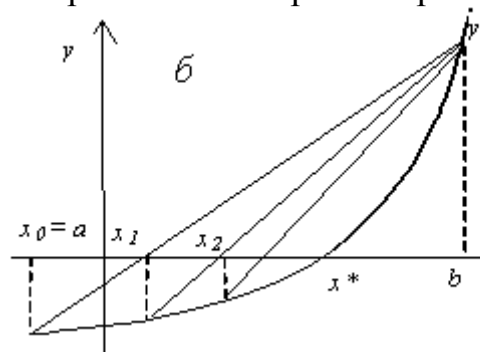
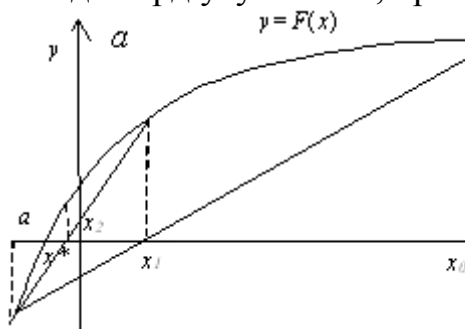
Бу мисоллар Ньютон усулини тезроқ яқинлашувчи эканлигини кўрсатиб турибди. Лекин уни қўллаш учун бошланғич яқинлашишни илдизга яқинроқ олиш зарур.

Ньютоннинг соддалаштирилган усули. Бу Ньютон усулининг модификация қилинган усули бўлиб, $f'(x)$ ҳосила мураккаб функцияга эга бўлса қўлланилади, ва унинг ҳисоби учун ҳар бир итерацияда кўп вақт сарфланади.

Бошланғич яқинлашиш x_0 ни берамиз ва $z=f'(x_0)$ ҳосилани ҳисоблаймиз. Кейинги итерацияларда ҳосиланинг ҳисобланган $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{z}$ қиймати қўлланилади. Бу соддалаштириш ечимга яқинлашиш жараёнини секинлаштиради, бироқ ҳар бир итерация цикли учун вақтни қисқартиради.

Хорд усули.

Ушбу усулда $f(x)$ эгри чизиги $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталарини боғловчи тўғри чизик - хорд билан алмаштирилади. $f(a)$ $f''(a)$ ифодалари ишорасига боғлиқ равишда хорд усули 4.5 а,б расмда келтирилган 2 та вариантларга эга.



4.5 расм. $f(a)f''(a) > 0$ (а) ва $f(a)f''(a) < 0$ (б) лар учун хорд усули.

$f(a)f''(a) > 0$ бўлсин (4.5 а. расм). У ҳолда $x_0=b$, a нуқта эса қўзғалмас бўлиб қолади. Навбатдаги x_1 яқинлашиш $(a, f(a))$ и $(x_0, f(x_0))$ нуқталарини x ўқи билан бирлаштирувчи хордни кесишиш нуқтаси сифатида аниқлаймиз. Хорд

тенгламаси: $y = f(a) + \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}(x - a)$. У ҳолда хордни x ўқи билан кесишиши:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(x_0 - a)}{f(x_0) - f(a)}$$

Энди $f(a)f''(a) < 0$ бўлсин (4.5. б. расм). У ҳолда $x_0=a$, b нуқта эса қўзғалмас. $(b, f(b))$ и $(x_0, f(x_0))$ нуқталарини бирлаштирувчи хордни

ўтказамиз: $y = f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0)$. Хордни x ўқи билан кесишиш нуқтасини ҳисоблаймиз: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)}$

Кейинги итерацияда x_0 сифатида x_1 ни ҳисобланган қийматини олиш керак. Шу тариқа, кейинги ҳисоблаш кетма-кетлигига эга бўламиз:

Агар $f(a) f''(a) > 0$ бўлса, унда $x_0 = b$ ва $x_{k+1} = a - \frac{f(a)(x_k - a)}{f(x_k) - f(a)}$.

Агар $f(a) f''(a) < 0$ бўлса, унда $x_0 = a$ ва $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)}$.

Бу усулда итерацион циклни тугатиш $|f(x_k)| < \varepsilon$ ёки $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ шартидан келиб чиқади.

Мисол. Хорд усули билан $x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$ тенгламасини биринчи ва учинчи илдизларини топинг.

Биринчи илдиз учун $a = -2$, $b = -1$. $f''(-2) * f(-2) = (-24) * (-27) > 0$, у ҳолда ҳисоб биринчи формула бўйича олиб борилади: $x_0 = b$ ва $x_{k+1} = a - \frac{f(a)(x_k - a)}{f(x_k) - f(a)}$.

k	x_k	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$
0	-1		1
1	-1.03571	0.035714	0.345618
2	-1.0479	0.012187	0.117007
3	-1.05201	0.004108	0.039334
4	-1.05339	0.001379	0.013192
5	-1.05385	0.000462	0.004421

Охирги илдиз учун $a = 4$, $b = 5$, $f''(4) * f(4) = 12 * (-9) < 0$, у ҳолда ҳисоб иккинчи формула бўйича олиб борилади: $x_0 = a$ ва $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)}$.

k	x_k	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_k)$
0	4		-9
1	4.9	0.9	-0.711
2	4.941555	0.041555	-0.02147
3	4.942783	0.001229	-0.00062
4	4.942819	3.57E-05	-1.8E-05

5-Маъруза. Тажриба маълумотларини қайта ишлашда алгоритмик (компьютерда) моделлаштириш

Режа:

1. Функцияларни интерполяциялаш.
2. Интерполяция кўпҳадини аниқ кўринишда куриш.
3. Лагранж интерполяцияси.
4. Ньютон интерполяцияси.
5. Ажратилган фарқлар.
6. Ньютон интерполяциясига мисол.
7. Сплайн-интерполяцияси.
8. Тажриба маълумотларини аппроксимациялаш.
9. Энг кичик квадратлар усули билан тажриба маълумотларини текислаш.

Калит сўзлар: *интерполяциялаш, аппроксимациялаш, тугун нуқталар, экстраполяциялаш, прогноз, интерполяция кўпҳади, Лагранж функцияси, Ньютон функцияси, аниқ кўринишдаги кўпҳад, ажратилган фарқлар, сплайн-интерполяцияси, энг кичик квадратлар усули, ечим алгоритми.*

Ҳар қандай мутахассисга ўзининг амалий фаолияти давомида ўрганилаётган объект, жараён ва тизимларнинг ҳар хил параметрлари орасидаги муносабатларни ўрганишига тўғри келади.

Мисол учун: двигател айланишлар сонини юкланишга боғлиқлиги, яъни $n=f(M_{кр.})$; деталга металл кесувчи дастгоҳда ишлов беришидаги кесиш кучини кесиш чуқурлигига боғлиқлиги, яъни $P=f(t)$ ва х. к.

Боғланишларни тақдим этиш усулларида энг қулай $n=f(M_{кр.})$, $P=f(t)$, $y=f(t)$ функция кўринишидаги аналитик боғланишлар усули ҳисобланади.

Бироқ амалиётда мутахассис ҳаммасидан ҳам кўпроқ параметрлар орасидаги боғланишларни тажриба йўли билан олади. Бунда табиий тажриба қўйилади, параметрларни тизимга киришдаги ва чиқишдаги қийматлари ўлчанади. Ўлчаш натижалари жадвалга киритилади.

Шу тариқа, табиий тажриба ўтказиш натижасида ўрганилаётган параметрлар орасидаги боғланишларни жадвал кўринишида оламиз, яъни жадвалли функцияни оламиз.

Кейинчалик бу жадвалли функция билан тадқиқот ишларини олиб бориш керак бўлади. Мисол учун, жадвалли функцияни интеграллаш ёки дифференциаллаш керак ва х.к.

Тажриба маълумотларини қайта ишлаш бўйича иккита масалани кўриб чиқамиз:

1. Интерполяциялаш масаласи.
2. Аппроксимациялаш масаласи.

Функцияларни интерполяциялаш.

Ўсиш тартибида жойлашган x_i аргументининг бир нечта дискрет қийматлари учун y_i функциясининг мос келувчи қийматлари берилган жадвалли функция ёки жадвал берилган:

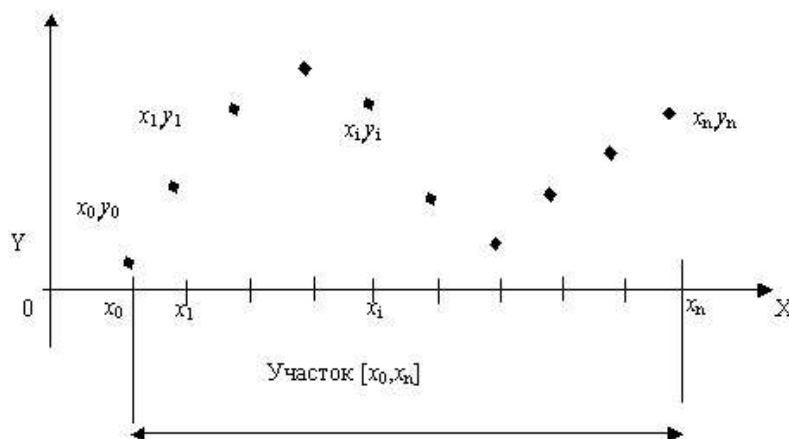
i	x	y
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
i	x_i	y_i
...	...	...
n	x_n	y_n

$$y_i = f(x_i), i = 0 \dots n \quad (5.1)$$

(x_i, y_i) координатали нукталар тугун нукталар ёки тугун деб аталади.

Жадвалли функцияда тугунлар сони $N=n+1$ га тенг.

Графикда жадвалли функция тугун нукталар кўринишида берилган (5.1 расм.)



5.1 расм.

$[x_0, x_n]$ кесма узунлиги $(x_n - x_0)$ га тенг.

Муҳандиснинг ҳисоб амалиётида жадвалда йўқ бўлган аргументлар учун функциянинг қийматини топиш масаласи тез-тез пайдо бўлади. Бундай масалалар интерполяциялаш ёки экстраполяциялаш деб аталади.

Функцияларни интерполяциялаш масаласи, $[x_0, x_n]$ интервали ичида жойлашган ҳар қандай x_k оралик нуқтасининг жадвалли функцияси y_k топишдан иборат, яъни

$$x_1 < x_k < x_{i+1} \text{ ва } x_k \in [x_0, x_n].$$

Функцияларни экстраполяциялаш масаласи $[x_0, x_n]$ интервалига кирмайдиган x_l нуқтасида жадвалли функциянинг y_l қийматини топишдан иборат, яъни

$$x_l < x_0; x_l > x_n.$$

Бундай масалани кўпинча олдиндан айтиш (прогноз) масаласи деб аталади.

Бу иккала масалалар ҳам тугун нуқталарда жадвалли функциянинг қийматларини қабул қиладиган қандайдир ёрдамчи $F(x)$ функцияни аналитик ифодасини топиш ёрдамида ечилади.

$$F(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Изланаётган $F(x)$ функцияни алгебраик кўпхадлар синфидан излаймиз:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0. \quad (5.2)$$

Бу кўпхад барча тугун нуқталардан ўтиши керак, яъни

$$P_n(x_i) = y_i. \quad (5.3)$$

Шунинг учун кўпхад даражаси n , тугун нуқталар сони N га боғлиқ бўлиб, тугун нуқталар сони минус бирга тенг бўлади, яъни $n=N-1$.

Жадвалли функциянинг барча тугунлари орқали ўтувчи (5.1) кўринишидаги кўпхад интерполяция кўпхади ҳисобланади.

Алгебраик кўпхадлар ёрдамида интерполяциялаш параболали интерполяциялаш деб аталади.

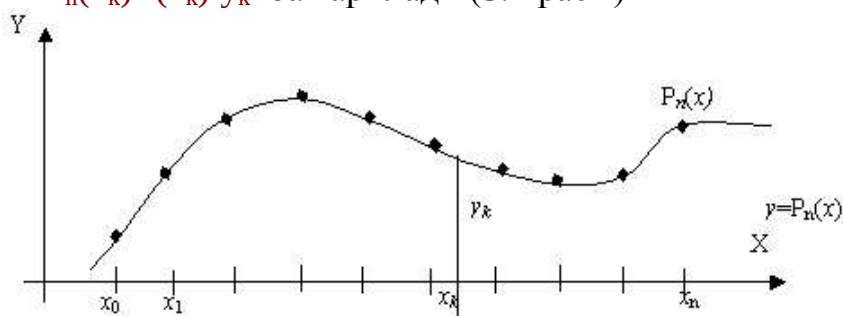
Шундай қилиб, интерполяциялаш масаласини ечиш учун аввало куйидаги кўринишда шакллантириш мумкин бўлган масалани ечиш керак:

Жадвал кўринишида берилган $F(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ функцияси учун, жадвалнинг барча тугун нуқталари орқали ўтадиган n даражали интерполяция кўпхадини қуринг:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0 + a_n,$$

бу ерда n тугун нуқталари N минус бирга тенг бўлган кўпхад даражаси, яъни $n=N-1$.

Натижада, $[x_0, x_n]$ кесма ичида жойлашган, ҳар қандай x_k нуқтасида тақрибий тенглик $P_n(x_k) \approx f(x_k) \approx y_k$ бажарилади (5.2 расм)



5.2. расм.

Интерполяция кўпҳадини аниқ кўринишда тузиш.

(5.2) кўринишидаги интерполяция кўпҳадини тузиш учун унинг $a_0, a_1, \dots, a_n$, коэффициентларини аниқлаш керак, яъни $a_i, i=0,1,2,\dots,n$. Ноаниқ коэффициентлар сони $n+1=N$, га тенг, бу ерда n - (5.2) кўпҳад даражаси, N – (5.1) жадвалли функциянинг тугун нуқталари сони.

Коэффициентларни топиш учун (5.2) интерполяция кўпхадига (5.3) хоссасини қўлаймиз.

Бу хосса асосида интерполяция кўпҳади (5.1) жадвалнинг ҳар бир (x_i, y_i) тугун нуқтаси орқали ўтиши керак, яъни

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n+1} + \dots + a_{n-1} x_i + a_n = y_i, i = 0, 1, \dots \quad (5.4)$$

(5.1) жадвалнинг ҳар бир тугун нуқтасини (5.4) га қўйиб чизиқли тенгламалар тизимини оламиз:

[illegible]

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ (5.5) тизимининг номаълумлари, (5.2) кўпҳадининг коэффицентлари ҳисобланади. (5.5) тизимининг номаълум коэффицентларини берилган (5.1) жадвалдаги қийматларни қўйган ҳолда осонлик билан аниқкланиши мумкин.

Лагранж интерполяцияси.

Интерполяция кўпхадларини Лагранж, Ньютон, Стерлинг, Бессел ва бошқаларнинг махсус итерацион формулалари ёрдамида куриш мумкин. Лагранж формуласи бўйича итерацион кўпхад куйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned}
 L_n(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 + \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \cdot y_2 + \dots \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Лагранж кўпҳадини барча тугун нуқталаридан ўтувчи интерполяция кўпҳади эканлигини исботлаймиз, яъни x_i интерполяциялаш тугунларида. $L_n(x_i) = y_i$ шарти бажарилиши зарур. Бунинг учун (5.6) кўпҳади (5.1) жадвалидаги тугун нуқталарининг координата қийматларини кетма-кет қўямиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

агар $x=x_0$ бўлса, у ҳолда $L_n(x_0) = y_0$ бўлади,

агар $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1$ бўлса, у ҳолда $L_n(\mathbf{x}_1) = y_1$ бўлади,

• • • • •

агар $x=x_n$ бўлса, у ҳолда $L_n(x_n) = y_n$ бўлади.

Бунга $y_j, j=0,1,2,...,n$ мос келувчи қийматининг ҳар бир каср суратида $i=j$ га мос келувчи $(x-x_i)$ кўпайтувчи бўлмагани, маҳраж қиймати эса ўзгарувчан x қиймати ўрнига мос келувчи x_j қиймати қўйилиши ҳисобига эришилади.

Шу тарика, Лагранж интерполяция кўпҳади берилган жадвалли функцияни яқинлаштиради, яъни $L_n(x_i) = y_i$ ва биз уни интерполяциялаш масалаларини ечиш учун ёрдамчи функция сифатида қўллашимиз мумкин, яъни $L_n(x_k) \approx y_k$

$[x_0, x_n]$ кесмада интерполяциялаш тугунлари қанчалик кўп бўлса, интерполяция кўпҳади ҳам берилган (5.1.) жадвалли функцияга шунчалик аниқроқ яқинлашади, яъни $f(x_k) \approx L_n(x_k)$ шунчалик аниқроқ бўлади.

Однако с увеличением числа узлов интерполирования возрастает степень интерполяционного многочлена n и в результате значительно возрастает объем вычислительной работы. Поэтому при большом числе узлов необходимо применять компьютер. В этом случае удобно находить значения функции в промежуточных точках, не получая многочлен в явном виде.

При решении задачи экстраполирования функции с помощью интерполяционного многочлена вычисление значения функции за пределами отрезка $[x_0, x_n]$ обычно производят не далее, чем на один шаг h , равный наименьшей величине $|x_{i+1} - x_i|$, так как за пределами отрезка $[x_0, x_n]$ погрешности, как правило, увеличиваются.

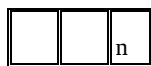
Бироқ, интерполяциялашнинг тугунлар сони ошиши билан интерполяция кўпҳади даражаси n ҳам ошади ва натижада ҳисоблаш ишлари ҳажми сезиларли равишда ошади. Шунинг учун тугун нуқталари кўп бўлганда компьютерни қўллаш зарур. Бу ҳолатда кўпҳадни аниқ кўринишда олмасдан функциянинг оралик нуқта қийматини топиш қулайроқ.

Экстраполяциялаш масаласини интерполяция кўпҳади ёрдамида ечишда функциянинг қийматини $[x_0, x_n]$ кесма ташқарисида, бир қадам h дан узоқ бўлмаган $|x_{i+1} - x_i|$ нинг энг кичик қийматида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки $[x_0, x_n]$ кесма ташқарисида хатолик одатда ошиб кетади.

Ньютон интерполяцияси.

Жадвалли функция берилган бўлсин:

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
..	..	..
.	.	.
n	x_n	y_n



ёки

$$y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}.$$

Оралиқ нуқтада шу функциянинг қийматини топиш керак, мисол учун, $x=D$, шу билан бирга $D \in [x_0, x_n]$.

Масалани ечиш учун интерполяция кўпхадини тузамиз.

Ньютон формуласи бўйича интерполяция кўпхади қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + \\ & + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots \\ & + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (5.7)$$

бу ерда n – кўпхад даражаси. $f(x_0), f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – мос равишда 0-, 1-, 2-, ..., n - тартибли ажратилган фарқлар,.

Ажратилган фарқлар.

Жадвалли функциянинг тугунларидаги $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ қийматлар, 0-тартибли ($k=0$) ажратилган фарқлар деб аталади.

$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ муносабати $[x_0, x_1]$ кесмадаги биринчи тартибли ($k=1$) ажратилган фарқ деб аталади ва нолинчи тартибли ажратилган фарқларнинг $[x_0, x_1]$ кесма охиридаги фарқини шу кесма узунлигининг нисбатига тенг бўлади.

Ихтиёрий $[x_i, x_{i+1}]$ кесма учун биринчи тартибли ($k=1$) ажратилган фарқ қуйидагига тенг

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

муносабати $[x_0, x_1]$ кесмада иккинчи даражали ($k=2$) ажратилган фарқ деб аталади ва биринчи даражали ажратилган фарқларнинг фарқини $[x_0, x_2]$ кесма узунлигининг нисбатига тенг бўлади.

Ихтиёрий $[x_i, x_{i+k}]$ кесма учун ($k=2$) иккинчи даражали ажратилган фарқ қуйидагига тенг:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Шундай қилиб, $[x_i, x_{i+k}]$ оралиғидаги k тартибли ажратилган фарқ рекуррентли формула бўйича ($k-1$) даражали ажратилган фарқ орқали аниқланиши мумкин.

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

бу ерда $k = \overline{1, n}, i = \overline{0, n-k}, n$ - кўпхад даражаси.

k нинг энг катта қиймати n га тенг. Унда $i = 0$ ва n даражали ажратилган фарқ $[x_0, x_n]$ кесмада

$f(x_0, x_i, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$ га тенг, яъни $[x_0, x_n]$ кесма узунлигига бўлинган $(n-1)$ тартибли ажратилган фарқларнинг фарқига тенг.

$f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), \dots, f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ажратилган фарқлар аниқ сонлар ҳисобланади, шунинг учун (5.7) ифодаси чиндан ҳам n даражали алгебраик кўпхад ҳисобланади. Шу билан бирга (5.7) кўпхадида барча ажратилган фарқлар $[x_0, x_{0+k}]$, $k = \overline{1, n}$ кесма учун аниқлангандир.

Лемма: Ньютон формуласи бўйича тузилган (5.7) алгебраик кўпхад ҳақиқатдан ҳам интерполяция кўпхади ҳисобланади, яъни тугун нуқталаридаги кўпхад қиймати жадвал функциянинг қийматига тенг

$$L_n(x_i) = f(x_i) = y_i; i = \overline{0, 1, \dots, n}.$$

Буни исботлаймиз. $x=x_0$ бўлсин, у ҳолда (5.7) кўпхади $L_n(x_0) = f(x_0) = y_0$ га тенг.

$x=x_1$ бўлсин, у ҳолда (5.7) кўпхади қуйидагига тенг:

$$L_n(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot f(x_0, x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1) = y_1$$

$x=x_2$ бўлсин, у ҳолда (5.7) кўпхади қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} L_n(x_2) &= f(x_0) + (x_2 - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) = \\ &= f(x_0) + (x_2 - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_2) = y_2 \end{aligned}$$

Кўрамизки, Ньютон бўйича интерполяция масалаларини ечиш Лагранж бўйича интерполяция масалаларини ечишга қараганда бир қанча афзалликларга эга.

Лагранж интерполяция кўпхадининг ҳар бир таркибий қисми y_i жадвалли функциянинг барча қийматларига боғлиқ $i=0, 1, \dots, n$. Шунинг учун тугун нуқталари N ва кўпхад даражаси n ($n=N-1$) ўзгарганида Лагранж интерполяция кўпхадини бошидан қуриш талаб этилади. Ньютон кўпхадида тугун нуқталари сони N ва кўпхад даражаси n ўзгарганида фақатгина (5.7) Ньютон стандарт формуласидаги мос келувчи қийматни олиб ташлаш ёки қўшиш талаб этилади. Бу амалиётда қулай ва ҳисоблаш жараёнини тезлаштиради.

Ньютон интерполяцияси бўйича мисол:

Қуйида жадвалли функция берилган:

i	x_i	y_i
0	2	0,693147
1	3	1,098613
2	4	1,386295
3	5	1,609438

1-, 2-, 3- тартибли ($n=3$) ажратилган фарқларни ҳисоблаш ва уларни диагональ жадвалга киритиш талаб қилинади.

Биринчи тартибли ажратилган фарқлар:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1,098613 - 0,693147}{3 - 2} = 0,405466.$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1,386295 - 1,098613}{4 - 3} = 0,287682.$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1,609438 - 1,386295}{5 - 4} = 0,223143.$$

Иккинчи даражали ажратилган фарқлар:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{0,287682 - 0,405466}{4 - 2} = -0,058892.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{0,223143 - 0,287682}{5 - 3} = -0,0322695.$$

Учинчи даражали ажратилган фарқлар:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{-0,0322695 - (-0,058892)}{5 - 2} =$$

$$0,00887416$$

5.1 жадвал. Ажратилган фарқларнинг диагонал жадвали.

i	x _i	Разделенная разность			
		0-го пор.	1-го пор.	2-го пор.	3-го пор.
0	2	0,693147			
			0,405466		
1	3	1,098613		-0,058892	
			0,287682		0,00887416
2	4	1,386295		-0,0322695	
			0,223143		
3	5	1,60943			

Берилган жадвалли функция учун Ньютон интерполяция кўпҳади куйидагича кўриниш олади:

$$L_3(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,693147 + (x - 2) \cdot 0,405466 + (x - 2)(x - 3) \cdot (-0,058892) + (x - 2)(x - 3)(x - 4) \cdot 0,00887416.$$

Олинган интерполяция кўпҳадини нормал кўринишга келтириш мумкин:

$$L_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

ва уни интерполяциялаш ёки прогноз (олдиндан айтиш) масалаларини ечиш учун қўлласса бўлади.

Сплайн-интерполяцияси.

Сплайнлар ҳисоблаш математикасида нисбатан яқинда кенг қўлланила бошланди. Машинасозлик чизмачилигида улар анчадан бери қўлланилади, чунки сплайнлар – бу лекала ёки деформацияси берилган (x_i, y_i) нуқталари орқали эгри чизиқ ўтказишга имкон берадиган эгилувчан линейкалардир.

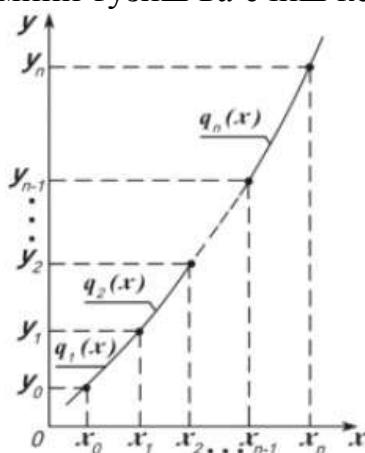
Кичик деформацияларда брус эгилиши назариясини қўллаган ҳолда, сплайн - бу кубик кўпхадлар гуруҳи бўлиб, туташиб жойида уларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари узлуксиз эканлигини кўрсатиш мумкин. Бундай функциялар кубли сплайнлар деб аталади. Уларни қуриш учун берилган нуқталар орасидаги кўпхадни ягона ҳолда аниқлайдиган коэффициентларни бериш керак.

Мисол учун, баъзи функциялар учун (5.3. расм) барча кубли функцияларни $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_n(x)$ бериш керак.

Кўп ҳолатларда бу кўпхадлар қуйидагича кўринишда бўлади:

$$q_i(x) = k_{1i} + k_{2i}x + k_{3i}x^2 + k_{4i}x^3, i = \overline{1, n},$$

Бу ерда k_{ij} – миқдори $4n$ га тенг бўлган аввалда келтирилган шартлар билан аниқланадиган коэффициентлар. k_{ij} коэффициентни аниқлаш учун $4n$ тартибли тенгламалар тизимини тузиш ва ечиш керак.



5.3. расм

Биринчи $2n$ шартлари сплайнларни берилган нуқталарда туташиб қилади:

$$\begin{aligned} q_i(x_i) &= y_i, i = \overline{1, n}; \\ q_{i+1}(x_i) &= y_i, i = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

Кейинги $(2n-2)$ шартлар сплайнлар туташган жойларда биринчи ва иккинчи ҳосилалари тенг бўлишини талаб қилади:

$$\begin{aligned} q'_{i+1}(x_i) &= q'_i(x_i), i = \overline{1, n-1}; \\ q''_{i+1}(x_i) &= q''_i(x_i), i = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

Агар тенгламалар сони номалумлар сонига тенг бўлса, у ҳолда алгебраик тенгламалар тизимининг ечими мавжуд бўлади. Бунинг учун яна иккита тенглама киритиш керак. Одатда қуйидаги шартлар қўлланилади:

$$q''_1(x_0) = 0, \dots, q''_n(x_n) = 0.$$

При построении алгоритма метода первые и вторые производные удобно аппроксимировать разделенными разностями соответствующих порядков.

Полученный таким образом сплайн называется естественным кубическим сплайном. Найдя коэффициенты сплайна, используют эту кусочно-гладкую полиномиальную функцию для представления данных при интерполяции.

Келтирилган услубнинг алгоритмини тузишда биринчи ва иккинчи ҳосилаларни мос келувчи даражаси билан ажратилган фарқлар орқали аппроксимациялаш қулайдир.

Ушбу кўринишда олинган сплайн - табиий кубли сплайн деб аталади. Сплайн коэффицентларини аниқлангандан сўнг, бу силлиқ бўлакли полиноминал функцияни интерполяциялашда маълумотларни тақдим этиш учун ишлатилади.

Тажриба маълумотларини аппроксимациялаш.

Ҳақиқий тажриба ўтказилиши натижасида жадвалли функция олинган:

i X Y

0 x_0 y_0

1 x_1 y_1

2 x_2 y_2

3 x_3 y_3

: : :

n x_n y_n

бу ерда $n=N-1$, N – жадвалдаги тугун нуқталар сони.

Аппроксимациялаш вазифаси олинган жадвалли функцияни $y=f(x)$ аналитик боғланиш кўринишида излашдан иборат.

Ҳозирги вақтда тажриба маълумотларини аппроксимациялашнинг иккита усули мавжуд:

Биринчи усул. Бу усул аналитик кўринишини аниқлаш керак бўлган аппроксимацияланаётган $F(x)$ эгри чизикни тугун нуқталаридан ўтишини талаб қилади. Бу масалани n даражали интерполяцион кўпхадни тузиш билан ечса бўлади:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n.$$

Бироқ аппроксимациялашнинг бу усули камчиликларга эга:

1. Аппроксимациялаш аниқлиги унча катта бўлмаган $[x_0, x_n]$ интервалда тугун нуқталарни 7-8 тадан ошиқ бўлмаганда кафолатланади.

2. Тугун нуқталарда жадвалли функциялар қийматлари катта аниқликда берилган бўлиши керак.

Маълумки тажриба қанчалик аниқ ўтказилмасин, тажриба натижаларида хатоликлар бўлади. Гап шундаки тадқиқ этилаётган катталики айтиш вақтда нафақат биргина x аргументига балки тажрибадан тажрибага ўзининг хусусий қонунияти бўйича ўзгарадиган бошқа эҳтимолий омилларга

ҳам боғлиқдир. Шунинг ўзи билан тадқиқ этилаётган функциянинг эҳтимолий ўзгариши тушунтирилади.

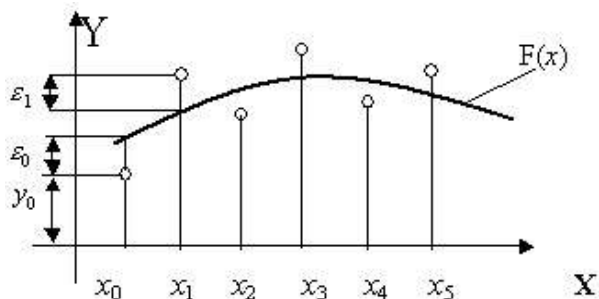
Натижада тажриба натижаларини жадвалнинг барча тугун нуқталаридан ўтадиган интерполяцион кўҳад ёрдамида аппроксимациялаш ҳар доим ҳам мумкин бўлмайди. Ундан ташқари, жадвалнинг барча тугун нуқталаридан ўтишга интилиб ва кўпҳад тартибини ошириб, олинаётган функцияни нафақат ўзгаришини балки унинг тасодифий таъсирларини акс эттира бошлаймиз.

Иккинчи усул. Тажриба маълумотларини аппроксимациялаш амалётида бошқа усул ҳам қўлланилади – тажриба маълумотларини текислаш. Бу усулнинг моҳияти шундаки, жадвал маълумотлари аппроксимациялайдиган $F(x)$ эгри чизиғи барча тугун нуқталардан ўтиши шарт эмас, у жадвалли функциянинг барча эҳтимолий таъсирларини текислаши (силлиқлаши) керак бўлади.

Энг кичик квадратлар усули билан тажриба маълумотларини текислаш (мослаш).

Бу усулда аппроксимацияланаётган $F(x)$ эгри чизиғи тажриба маълумотларини текислаётганда унинг жадвал маълумотларидан четлашиши барча тугун нуқталарда минимал бўлишига ҳаракат қилинади (5.4. расм), яъни

$$\varepsilon_i = |F(x_i) - y_i| \rightarrow \min. \quad (5.8)$$



5.4. расм.

Четлашиш белгисидан ҳалос бўламиз. Унда (5.8) шarti қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\varepsilon_i^2 = |(F(x_i) - y_i)| \rightarrow \min.$$

Энг кичик квадратлар усулининг моҳияти қуйидагича: тажриба натижасида олинган жадвал маълумотлари учун квадратлар четлашиши йиғиндиси жадвал маълумотларини барча тугун нуқталарда минимал бўлиши мумкин бўлган $F(x)$ аналитик боғланиш аниқлансин, яъни

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (F(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (5.9)$$

Масалани аниқлаштириш учун изланаётган $F(x)$ функцияни m даражали алгебраик кўпҳадлар синифидан танлаймиз:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x^1 + a_m \quad (5.10)$$

[illegible]

$$c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, k = \overline{0, 2m} \quad - \quad (5.12) \quad \text{чизикли тенгламалар тизимининг}$$

$$d_j = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k, j = \overline{0, m} \quad - (5.12) \text{ чизикли тенгламалар тизимининг озод}$$

Тизимнинг тартиби $m+1$ га тенг.

Жадвал 5.2.

i	$\mathbf{x}_i^0$	$\mathbf{x}_i^1$	$\mathbf{x}_i^2$	...	$\mathbf{x}_i^{2m}$	$\mathbf{x}_i^0 y_i$	$\mathbf{x}_i^1 y_i$	...	$\mathbf{x}_i^m$
0	1								
1	1								
2	1								
...	...								
N	1								
$\sum_{i=0}^n$	c_0	c_1	c_2	...	c_{2m}	d_0	d_1	...	d_m

(5.12) тизимидаги индексларни ўзгартирамиз. Натижада қуйидагиларни оламиз:

[illegible]

$$c_{k,j} = \sum_{i=1}^N x_i^{k+j-2}, k = \overline{1, (m+1)}, j = \overline{1, (m+1)} \quad - (5.13) \text{ чизикли тенгламалар}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^N y_i x_i^{j-1}, j = \overline{1, (m+1)}$$
 - (5.13) чизиқли тенгламалар тизимининг озод хадлари,

(x_i, y_i) – жадвалли функция тугун нуқталарининг координаталари, $i = \overline{1, N}$, N – тугун нуқталар сони, m – қуйидаги кўринишдаги аппроксимациялайдиган кўпхад даражаси:

$$P_m(x) = a_1 x^0 + a_2 x^1 + a_3 x^2 + \dots + a_{m+1} x^m \quad (5.14)$$

Масала алгоритми:

1. (5.13) чизиқли тенгламалар тизимини кураимиз. $c_{k,j}$ коэффицентлари ва d_k озод хадларини аниқлаймиз. (5.13) тизими асосий диагоналарга нисбатан симметрик бўлгани учун фақатгина диагонал устидаги элементларни аниқлашни ўзи kifоя қилади.

2. (5.13) тизимини Гаусс усули билан ечамиз. (5.14) кўпхадини a_j коэффицентларини аниқлаймиз.

3. Аппроксимациялаш кўпхадини (5.14) тузамиз ва унинг ҳар бир қийматини $P_i = P_m(x_i)$ тугун нуқтасида аниқлаймиз.

4. $\varepsilon_i = P_i - y_i$ тугун нуқтасининг четлашишини аниқлаймиз.

5. $S = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$ барча тугун нуқталар бўйлаб четлашиш квадратлар йиғиндисини аниқлаймиз.

6. Қолган $D = \frac{S}{N-(m+1)}$ дисперсияни аниқлаймиз.

Аппроксимацияланаётган (5.11) кўпхадини қуриш ва унинг қийматини ҳар бир тугун нуқтада ҳисоблаш учун кўпхадни рационал шаклини қўллаймиз:

$$P_m(x) = a_1 + x \cdot (a_2 + x \cdot (a_3 + \dots + x \cdot (a_m + x \cdot a_{m+1}))) \quad (5.15)$$

У ҳолда (5.15) кўпхадининг қийматини ҳисоблаш учун Горнер схемасидан фойдаланиш қулайдир. Горнер схемаси бўйича рекуррент формула қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} P &= a_{m+1}, \\ P &= a_j + x_i P, j = \overline{m, 1, -1}, i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

6-Маъруза. Мухандислик масалаларини оддий дифференциал тенгламалар ёрдамида ифодалаш

Режа:

1. Оддий дифференциал тенгламаларнинг таърифи.
2. Оддий дифференциал тенгламаларни пайдо бўлиш тарихи.
3. Биринчи даражали дифференциал тенгламалар.
4. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келтириладиган физикавий масалаларга мисоллар.
5. Бир жинсли тенгламалар. Квази бир жинсли тенгламалар. Чизиқли тенгламалар.
6. Интегралладиган кўпайтувчи усули. Ўзгармасни вариациялаш усули (Лагранж усули).
7. Бернулли тенгламаси. Биномиал дифференциал тенглама.

Калит сўзлар: оддий дифференциал тенгламалар, нормал дифференциал тенгламалар, Коши масаласи, ўзгарувчилари ажраладиган, бир жинсли ва квази бир жинсли тенгламалар, чизиқли тенглама, интегралладиган кўпайтувчи усули, ўзгармасни вариациялаш усули, Бернулли тенгламаси, Рикатти тенгламаси.

Оддий дифференциал тенгламалар (О.Д.Т.) – бу қуйидаги кўринишдаги дифференциал тенгламадир:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6.1)$$

бу ерда $y(x)$ – боғлиқмас ўзгарувчи x га боғлиқ номаълум функция (y вектор-функция бўлиши ҳам мумкин, y ҳолда F ҳам одатда вектор-функция бўлади ва (6.1) дифференциал тенгламалар тизимини пайдо қилади). n сони (берилган тенгламага кирувчи энг катта ҳосила тартиби) (6.1) дифференциал тенгламанинг тартиби деб аталади. Боғлиқмас ўзгарувчи x кўпинча вақт сифатида интерпретацияланади (айниқса физик ва бошқа табиий фанлар

масалаларида пайдо бўладиган дифференциал тенгламаларда), шунинг учун y кўпинча t ҳарфи билан белгиланади. y ўзгарувчи – вақтга боғлиқ равишда ўзгарадиган кандайдир катталар (ёки катталиклар жамланмаси, агар y вектор функция бўлса). Мисол учун y нуқтанинг фаъзодаги координаталари тўпламини англатиши мумкин; бу ҳолатда (6.1) тенглама нуқтанинг фаъзодаги ҳаракатини, яъни унинг координатиларини вақт ўтиши билан ўзгартиришини тасвирлайди. Боғлиқмас ўзгарувчи x одатда ҳақиқий қийматларни қабул қилади, лекин x ўзгарувчи комплекс бўлган дифференциал тенгламалар ҳам кўрилади.

Кўпинча энг катта ҳосила $y^{(n)}$ нинг x , y ўзгарувчилар ва n даражадан кам бўлган $y^{(i)}$ ҳосилаларнинг функцияси кўринишида ифодаланадиган куйидаги кўринишдаги дифференциал тенгламалар учрайди:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (6.2)$$

Бундай дифференциал тенгламалар *нормал* ёки *ҳосилага нисбатан ечилган* тенгламалар деб аталади.

(6.2) кўринишидаги тенгламаларга қарама-қарши ўлароқ (6.1) кўринишидаги дифференциал тенгламаларни *ҳосилага нисбатан ечилмаган* ёки *аниқмас* дифференциал тенгламалар деб аталади.

(6.2) дифференциал тенгламасининг ечими деб ўзининг аниқланиш соҳасидаги барча нуқталарда тенгламани қониқтирадиган n марта дифференциалланувчи $y(x)$ функциясига айтилади. Одатда бундай функцияларнинг тўплами мавжуд бўлади ва улардан бирини танлаш учун унга қўшимча шарт қўйилиши керак.

(6.2) тенгламаси учун бошланғич шарт деб куйидагига айтилади:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \quad y''(x_0) = y_0^{(2)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (6.3)$$

бу ерда x_0 – боғлиқмас ўзгарувчининг берилган қиймати (берилган вақтда). y_0 ва $y_0^{(i)}$ – мос равишда y функцияси ва унинг $n-1$ гача бўлган ҳосилаларининг берилган қийматлари. (6.2) дифференциал тенгламаси (6.3) бошланғич шарти билан биргаликда бошланғич масала ёки Коши масаласи деб аталади:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \quad y''(x_0) = y_0^{(2)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Коши масаласи, (6.2) тенгламанинг ўнг томонида турган f функциясига етарлича умумий чекловларда, x_0 бошланғич қийматига эга бўлган x вақт ўқининг баъзи оралиқларида аниқланган ягона ечимга эга бўлади (умуман айтганда бу оралиқ бутун ўқ билан мос келмаслиги мумкин).

Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масалалари ва натижалари: ҳар хил масалаларнинг ОДТ учун ечимнинг мавжудлиги ва ягона бўлиши, энг оддий ОДТни ечиш усуллари, ОДТ ечимининг аниқ кўринишини топмасдан туриб уларни сифатли тадқиқ қилиш.

Тарих.

Энг оддий дифференциал тенгламалар И.Ньютон ва Г.Лейбницларнинг ишларида учраган; “дифференциал тенгламалар” атамаси Лейбницга тегишли. Ньютон “флюкс” ва “флюент”лар ҳисобини яратишда иккита масала қўйган: флюентлар орасидаги берилган муносабатлар бўйича флюкслар орасидаги муносабатларни аниқлаш; ўз ичига флюксларни олувчи берилган тенглама бўйича флюентлар орасидаги муносабатларни аниқлаш. Замонавий нуқтаи назардан ушбу масалалардан биринчиси (функция бўйича уларнинг ҳосиласини ҳисоблаш) дифференциал ҳисобга тегишлидир, иккинчиси эса оддий дифференциал тенгламалар назарияси мазмунини беради. $f(x)$ функциясининг ноаниқ интегралини $F(x)$ топиш масаласини Ньютон иккинчи масаланинг хусусий ҳолати сифатида кўриб чиққан. Бундай ёндашув математик табиатшунослик асосларини яратувчиси Ньютон учун табиий эди, чунки жуда кўп ҳолларда у ёки бу жараёнларни бошқарувчи табиат қонунлари дифференциал тенгламалар шаклида ифодаланади, бу жараёнларнинг қандай кечишини ҳисоблаш дифференциал тенгламаларни ечишга олиб келинади.

Ньютон махфийлаштириш керак деб ҳисоблаган ва фақатгина анаграмма кўринишида эълон қилган асосий кашфиёти қуйидагидан иборат: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa». Замонавий математик тилга ўтирганда бу қуйидагиларни англатади: “дифференциал тенгламаларни ечиш фойдали”. Ҳозирги вақтда дифференциал тенгламалар назарияси математиканинг барча бўлимларидаги назарий тадқиқотларни доимий рағбатлантириш учун юқори даражада фойдали бўлган катта ҳажмдаги ҳар хил конгломерат ғоя ва усуллардан иборат.

Мисоллар:

- Дифференциал тенгламаларни энг содда қўлланишларидан бири – тезланишнинг маълум проекцияси бўйлаб жисмнинг траекториясини аниқлаш каби тривиал бўлмаган масалани ечиш. Мисол учун, Ньютоннинг иккинчи қонунига мувофиқ, жисмнинг тезланиши унга таъсир қилаётган кучлар йиғиндисига тўғри пропорционалдир; мос келувчи дифференциал тенглама $m\ddot{x} = F(x, t)$ кўринишига эга. Таъсир қилувчи (ўнг томон) кучларни била туриб, бу тенгламани ечиш ва бошланғич шартни ҳисобга олиб (бошланғич вақтдаги координата ва тезлик) нуқталарни ҳаракатланиш траекторияси аниқлаш мумкин.

- Дифференциал тенглама $y' = y$, бошланғич шарт $y(0) = 1$ билан қуйидаги экспонентани беради: $y(x) = e^x$. Агар x вақтни белгиласа, бу функция мисол учун манбалар чекланмаган шароитда аҳолини ўсишини ва бошқа кўпгина мисолларни тасвирлайди.

- Ўнг томони номаълум функцияга боғлиқ бўлмаган $y' = f(x)$ дифференциал тенгламанинг ечими аниқ бўлмаган интеграл ҳисобланади, бу ерда C – ихтиёрий константа.

$$y(x) = \int f(x) dx + C$$

Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар.

Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.

$\dot{y} = f(x, y)$ дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама деб аталади, агар унинг ўнг қисми $y' = f_1(x)f_2(y)$ кўринишида берилса, у ҳолда $f_2(y) \neq 0$ ҳолат бўлганда тенгламанинг умумий ечими $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx$ бўлади.

Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга олиб келувчи физик масалаларга мисоллар

Жисм танасининг совуши

T – тана ҳарорати, T_0 – атроф муҳит ҳарорати ($T > T_0$), Q – иссиқлик миқдори, c – солиштирма иссиқлик сиғими бўлсин. У ҳолда ҳарорат тенглашгунча атроф муҳитга узатиладиган иссиқликлар миқдори қуйидаги кўринишда ифодаланади $Q = mc(T - T_0)$, ёки дифференциал кўринишида $dQ = mc dT$. Бошқа томондан, иссиқлик берилиш тезлигини $dQ = -k(T - T_0) dt$ кўринишида ифодалаш мумкин, бу ерда k - кандайдир пропорционаллик коэффиценти. Ушбу тенгламалардан dQ ни чиқариб ташлаб, ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани оламиз:

$$mc dT = -k(T - T_0) dt$$

Ушбу тенгламанинг умумий ечими қуйидаги функциялар оиласи ҳисобланади $T = T_0 + Ce^{-\frac{kt}{mc}}$.

Бир жинсли тенгламалар.

Агар $f(x, y)$ - нолинчи даражали бир жинсли функция бўлса $\dot{y} = f(x, y)$ дифференциал тенглама **бир жинсли** деб аталади. Агар ҳар қандай $\lambda > 0$ учун $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$ тенглик бажарилса, $f(x, y)$ функция k даражали бир жинсли деб аталади.

$x > 0$ бўлганда $y(x) = xz(x)$ алмаштириш бир жинсли тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага олиб келади:

$$f(x, xz) = x^0 f(1, z) = f(1, z)$$

$$\dot{y} = x\dot{z} + z$$

Бошланғич тенгламага қўйиб қуйидагини оламиз:

$$\dot{z} = \frac{1}{x}(f(1, z) - z)$$

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳисобланади.

Квази бир жинсли тенгламалар.

$\dot{y} = f(x, y)$ дифференциал тенгламалар **квази бир жинсли** деб аталади, агар ҳар қандай $\lambda > 0$ учун $f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta-\alpha} f(x, y)$ муносабат бажарилса.

Берилган тенглама $y = z^{\frac{\beta}{\alpha}}$ алмаштириш билан ечилади:
 $\dot{z} = \frac{\alpha}{\beta} \left(z^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\beta-\alpha} f\left(x, z^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

Квази бир жинсли бўлгани учун $\lambda = z^{-\frac{1}{\alpha}}$ қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$\left(z^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\beta-\alpha} f\left(x, z^{\frac{\beta}{\alpha}}\right) = f\left(\frac{x}{z}, 1\right)$$

$$\dot{z} = \frac{\alpha}{\beta} f\left(\frac{x}{z}, 1\right),$$

Аниқки бу бир жинсли тенглама ҳисобланади.

Чизиқли тенгламалар

$\dot{y} + a(x)y = b(x)$ тенглама чизиқли деб аталади ва иккита усул билан ечилиши мумкин: интеграллайдиган кўпайтувчи усули ва ўзгармасларни вариация қилиш усули.

Интеграллайдиган кўпайтувчи усули

Интеграллайдиган кўпайтувчи - $\mu(x)$ функция қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\mu(x) = e^{\int a(x) dx}$$

Бошланғич тенгламанинг иккала томонини $\mu(x)$ га кўпайтириб қуйидагини оламиз:

$$\dot{y}e^{\int a(x) dx} + ya(x)e^{\int a(x) dx} = b(x)\mu(x)$$

Аниқлаш мумкинки чап томон $\mu(x)y(x)$ функциянинг x бўйича ҳосиласи ҳисобланади. Шунинг учун тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$(\mu(x)y(x))' = b(x)\mu(x)$$

Интеграллаймиз:

$$y(x)\mu(x) = \int b(x)\mu(x) dx + C$$

Шундай қилиб, чизиқли тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left(\int b(x)\mu(x) dx + C \right)$$

Ўзгармасларни вариация қилиш усули (Лагранж усули)

$\dot{y} + a(x)y = 0$ бир жинсли тенгламани кўриб чиқамиз. Аниқки, бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама, унинг ечими:

$$y(x) = ce^{-\int a(x) dx}$$

Бошланғич тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$y(x) = c(x)e^{-\int a(x) dx}$$

Олинган ечимни бошланғич тенгламага қўйиб:

$$\dot{c} = b(x)e^{\int a(x) dx},$$

қуйидагини оламиз:

$$c(x) = c_1 + \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx$$

бу ерда c_1 ихтиёрий константа.

Шу тариқа, бошланғич тенгламанинг ечимини бир жинсли тенглама ечимига $c(x)$ ни қўйиш йўли билан олса бўлади:

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left(c_1 + \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx \right)$$

Бернулли тенгламаси

$\dot{y} + a(x)y = b(x)y^n$ дифференциал тенглама **Бернулли тенгламаси** деб аталади ($n=0$ ёки $n=1$ да бир жинсли ёки бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани оламиз). $n=2$ бўлганида Риккати тенгламасининг хусусий ҳолати ҳисобланади. Ушбу тенглама уни 1695 йил эълон қилган Якоб Бернулли шарафига қўйилган. Ушбу тенгламани алмаштириш йўли билан чизиқли тенгламага келтирувчи усулни унинг акаси Иоганн Бернулли 1697-йилда топган.

Биномал дифференциал тенглама

Биномал дифференциал тенглама деб, $(y')^m = f(x, y)$ кўринишидаги тенгламага айтилади, бу ерда m – натурал сон, $f(x, y)$ - икки ўзгарувчанли кўпхад.

7-Маъруза. Оддий дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усуллари

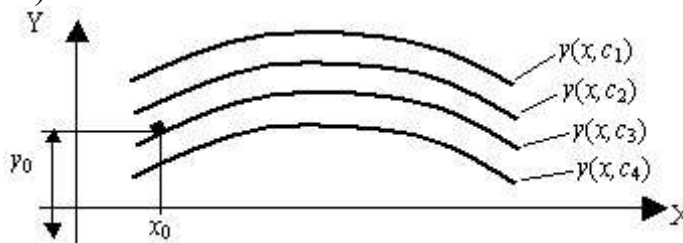
Режа:

1. Биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усуллари.
2. Рунге-Кутта усуллари.
3. Биринчи тартибли Рунге-Кутта усули (Эйлер усули).
4. Иккинчи тартибли Рунге-Кутта усули (модификацияланган Эйлер усули).
5. Тўртинчи тартибли Рунге-Кутта усули.
6. Юқори тартибли тенгламаларни ечиш. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш.

Калит сўзлар: *оддий дифференциал тенгламалар, нормал дифференциал тенгламалар, Коши масаласи, Рунге-Кутта усуллари, Эйлер усули, модификацияланган Эйлер усули, юқори тартибли тенгламалар, Тейлор қатори, интеграллаш, интеграллаш қадами, усул аниқлиги, геометрик маъноси.*

$$y' = f(x, y), \quad (7.1)$$

оддий дифференциал тенгламасининг ечими $y=y(x, c)$ функция оиласи ҳисобланади (7.1 расм)



7.1расм.

Амалий масалаларни ечишда дифференциал тенгламаларни хусусий ечимлари изланади. Хусусий ечимни умумий ечимлар оиласидан ажратилиши бошланғич шартларни бериш ёрдамида амалга оширилади:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad (7.2)$$

яъни (x_0, y_0) координатали бошланғич нуқталар.

(7.2) бошланғич шартларини қониқтирувчи (7.1) дифференциал тенгламасини хусусий ечимини топилиши Коши масаласи деб аталади.

Коши масаласи сонли усулларда қуйидаги кўринишда қўйилади: $[a, b]$ кесмада h қадам билан берилган (7.1) дифференциал тенгламаси ва (7.2) бошланғич шартларини қониқтирувчи $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n}$ жадвалли функцияни, яъни ыуйидаги жадвални топиш:

i	x	y
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
...	...	...
n	x_n	y_n

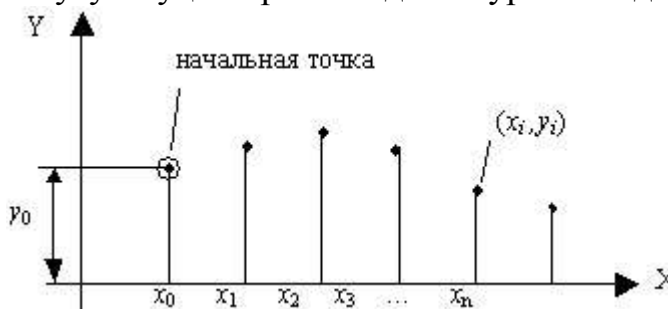
Бу ерда: h – тенгламанинг интеграллаш қадами,

$a=x_0$ – тенгламанинг интегралланиш оралиғини бошланиши,

$b=x_n$ – оралиқ охири,

$n=(b-a)/h$ – тенгламанинг интеграллаш қадамлари сони.

Графикда (7.2 расм) сонли усулларда Коши масаласининг ечими (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$ координатали тугун нуқталар йиғиндиси кўринишида берилган.



7.2 расм.

Рунге-Кутта усуллари

Коши масалаларини энг самарали ва тез-тез учрайдиган ечиш усуллари бу Рунге-Кутта усуллари ҳисобланади. Улар изланаётган $y(x)$ функциясини ҳар бир қадам чегарасида кўпхад билан аппроксимациялашга асосланган, бу кўпхад $y(x)$ функциясининг ҳар бир i - нуқтасини h қадам атрофида Тейлор каторига ёйиш ёрдамида олинади:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x_i) + \dots \quad (7.3)$$

Тейлор қаторини ҳар хил нуқталарда қирқиб ва қаторни ўнг томонидаги ҳадларни ташлаб юбориб, Рунге ва Кутта $y(x)$ функциясини ҳар бир тугун нуқтада қийматини аниқлаш учун ҳар хил усуллар олишган. Ҳар бир усулнинг аниқлиги қатордан олиб ташланган ҳадлар билан аниқланади.

Биринчи тартибли Рунге-Кутта усули (Эйлер усули).

(7.3) дан h^2, h^3, h^4 га эга бўлган қатор аъзоларини олиб ташлаймиз:

Унда $y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i)$.

$y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ бўлгани учун

Эйлер формуласига эга бўламиз:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (7.4)$$

Рунге-Кутта усулларини аниқлиги (7.3) қаторнинг олиб ташланган ҳадлари бўйича аниқланса, унда Эйлер усулининг аниқлиги ҳар бир қадамда h^2 ташкил этади.

Эйлер усулининг геометрик маъносини кўриб чиқамиз.

Эйлер формуласи куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

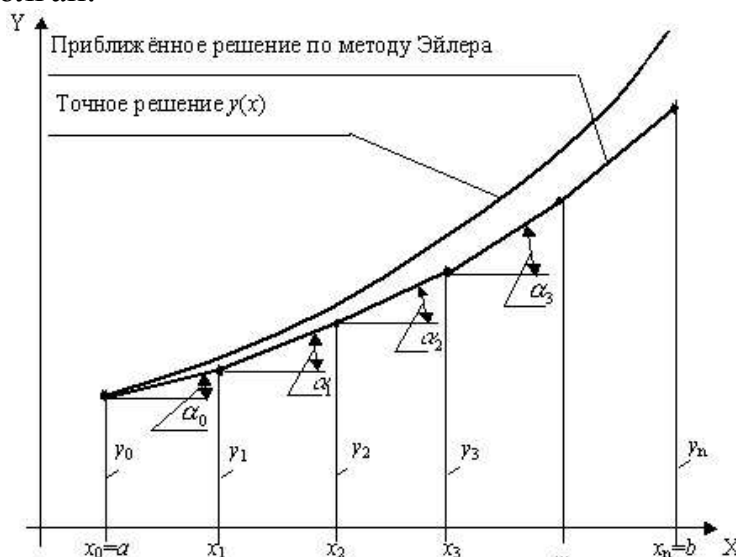
бу ерда $f(x_i, y_i) = y'(x_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$.

Эйлер формуласини куйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \operatorname{tg} \alpha_i,$$

бу ерда $\operatorname{tg} \alpha_i$ - ҳар бир қадамнинг бошланғич нуқтасидаги изланаётган $y(x)$ функцияга урунма оғиш бурчаги тангенсини.

Натижада Эйлер усулида графикда (7.3. расм) $[a, b]$ ораликдаги изланаётган барча $y(x)$ функциялар синиқ чизиклар билан аппроксимацияланади, h қадамдаги ҳар бир кесма изланаётган функцияни чизикли аппроксимациялайди. Шунинг учун Эйлер усули яна *синиқ чизиклар усули* номини ҳам олган.



7.3 расм.

Эйлер усулида ҳар бир қадам чегарасида урунманинг оғиши ўзгармас бўлади ва қадамнинг бошланғич x_i нуқтасидаги ҳосила қийматига тенг бўлади. Аслида ҳосила, демакки, $y(x)$ чизиғига урунманинг тангенс оғиш бурчаги ҳам ҳар бир қадам оралиғида ўзгариб боради. Шунунинг учун $x_i + h$ нуқтадаги урунманинг оғиши x_i нуқтадаги оғишга тенг бўлмаслиги керак. Шундай экан ҳар бир қадамда хато пайдо бўлади.

Биринчи синик чизик ҳақиқатдан ҳам изланаётган интеграл эгри чизик $y(x)$ га (x_0, y_0) нуқтасида уринади. Кейинги қадамларда урунмалар хатолик билан ҳисобланган (x_i, y_i) нуқтадан ўтказилади. Натижада ҳар бир қадам билан хатолар ҳам йиғилиб бораверади.

Эйлер усулининг асосий камчилиги – хатоларни мунтазам равишда йиғилиб боришидир. Шунинг учун Эйлер усули интегралланадиган h қадами кичкина қийматли дифференциал тенгламаларни ечиш учун қўллаш тавсия қилинади.

Иккинчи тартибли Рунге-Кутта усули (модификацияланган Эйлер усули).

(7.3) дан h_3, h_4, h_5 ларга эга бўлган ҳадларни ташлаб юборамиз.

Унда

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x_i). \quad (7.5)$$

Қаторда h^2 га эга бўлган аъзони сақлаш учун иккинчи $y''(x_i)$ ҳосилани аниқлаш керак. Уни иккинчи тартибли ажратилган фарқ билан аппроксимациялаш мумкин.

$$y''(x_i) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h}$$

Ушбу ифодани (7.5) га қўйиб қуйидагини оламиз:

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h}{2} \cdot \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h} = \\ &= y(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i + h). \end{aligned}$$

Узул кесил аниқлаштирилган Эйлер формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1}). \quad (7.6)$$

Кўриниб турибдики $i+1$ нуқтада $y(x)$ функциясини аниқлаш учун шу нуқтадаги $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ дифференциал тенгламасини ўнг томон қийматини билиш керак, ўз навбатида уни аниқлаш учун y_{i+1} қийматини олдиндан аниқлаш керак бўлади.

y_{i+1} қийматни аниқлаш учун Эйлер формуласидан фойдаланамиз. Бу ҳолда ҳар бир қадамдаги барча ҳисоб-китобни модификацияланган ёки аниқлаштирилган Эйлер формуласи бўйича икки босқичда бажарамиз:

Биринчи босқичда модификацияланган ёки аниқлаштирилган Эйлер формуласи бўйича $y_{i+1}^{\exists}$ ни дастлабки қийматни ҳисоблаймиз

$$y_{i+1}^{\exists} = y_i + h f(x_i, y_i).$$

Иккинчи босқичда модификацияланган ёки аниқлаштирилган Эйлер формуласи бўйича $y = y_{i+1}$ қийматини аниқлаштирамиз.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1}^{\exists}).$$

Усулнинг аниқлиги (7.3) Тейлор қаторининг олиб ташланган ҳадлари билан аниқланишини ҳисобга олсак модификацияланган ёки аниқлаштирилган Эйлер усулининг аниқлиги ҳар бир қадамда $\approx h^3$ бўлади.

Модификацияланган Эйлер усулининг геометрик маъносини кўриб чиқамиз.

$$f(x_i, y_i) = y'(x) = \operatorname{tg} \alpha_i,$$

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = y'(x_{i+1}) = \operatorname{tg} \alpha_{i+1},$$
 эканлигини ҳисобга олиб,

модификацияланган Эйлер формуласини қуйидаги кўринишда тасвирласа бўлади:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha_i + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha_{i+1},$$

бу ерда $\operatorname{tg} \alpha_i$ - ҳар бир қадамнинг бошланғич нуқтасида изланаётган $y(x)$ функциясига урунма оғиш бурчаги тангенс, $\operatorname{tg} \alpha_{i+1}$ ҳар бир қадамнинг охириги нуқтасидаги изланаётган $y(x)$ функциясига урунма оғиш бурчаги тангенс (7.4. расмга қаралсин).

7.4 расмдан кўриниб турибдики, ҳар бир қадамнинг биринчи ярмида, яъни $[x_i, x_i + h/2]$ орлиғида, изланаётган $y(x)$ функцияси (x_i, y_i) нуқтасидан тангенс $\operatorname{tg} \alpha_i = f(x_i, y_i)$ бурчак остида чиқувчи тўғри чизик билан аппроксимацияланади.

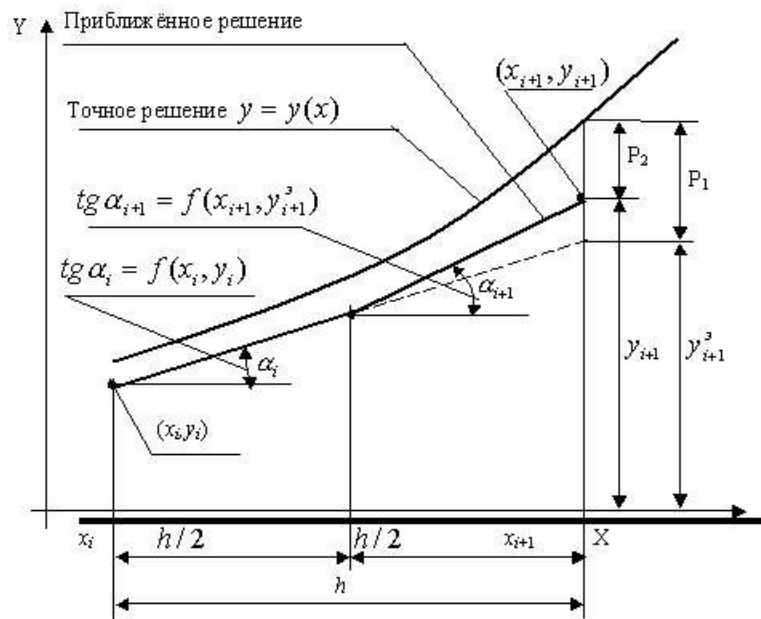
Худди шу қадамнинг иккинчи ярмида, яъни $[x_i + h/2, x_i + h]$ ораликда, изланаётган $y(x)$ функцияси

$$x = x_i + h/2,$$

$$y = y_i = \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i),$$

координатали нуқтадан тангенс $\operatorname{tg} \alpha_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{\exists})$ бурчак остида чиқувчи тўғри чизик билан аппроксимацияланади.

Натижада модификацияланган Эйлер усулида $y(x)$ функцияси ҳар бир қадамда битта тўғри чизик билан эмас, иккита тўғри чизик билан аппроксимацияланади.



7.4. расм. Модификацияланган Эйлер усулининг геометрик маъноси
 P_1 – Эйлер усули бўйича $(i+1)$ -нуқтада йиғилган хатолик, P_2 –
 модификацияланган Эйлер усули бўйича $(i+1)$ -нуқтада йиғилган хатолик.

Тўртинчи тартибли Рунге-Кутта усули

Компьютор ёрдамида оддий дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усуллари орасида энг кўп тарқалгани бу тўртинчи тартибли Рунге-Кутта усулидир. Адабиётларда у Рунге-Кутта усули номи билан машхур.

Бу усулда дифференциал тенгламанинг ҳар бир интегралладиган қадамида изланаётган $y(x)$ функция қаторнинг h^4 ҳадларигача бўлган (7.3) Тейлор қатори билан аппроксимацияланади:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) \dots$$

Натижада хатолик ҳар бир қадамда h^5 тартибга эга бўлади. Қаторнинг h^2 , h^3 , h^4 лар мавжуд ҳадларини саклаш учун $y(x)$ функциянинг иккинчи y'' , учинчи y''' , тўртинчи $y^{(4)}$ ҳосилаларини аниқлаш керак. Бу ҳосилаларни ажратилган фарқларнинг иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартиблилари билан аппроксимацияланади.

Натижада Рунге-Кутта усули билан y_{i+1} функциясининг қийматини олиш учун қуйидаги ҳисоб операцияларининг кетма-кетлиги бажарилади:

$$\begin{aligned} T_1 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ T_2 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_1/2), \\ T_3 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_2/2), \\ T_4 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_3), \\ y_{i+1} &= y_i + (T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 + T_4)/6. \end{aligned}$$

Олинган формула келтириб чиқилмаган. Бу ишни мустақил қилиш тавсия этилади.

Юқори тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш.

Рунге-Кутта усуллари нафақат биринчи тартибли $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламаларни ечиш учун, балки юқори тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш учун ҳам қўлласса бўлади

$$y'' = f(x, y, y'),$$

$$y''' = f(x, y, y', y''),$$

...

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}).$$

Ҳар қандай m тартибли тенгламани

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \quad (7.7)$$

ўрин алмаштириш йўли билан биринчи тартибли m та тенгламадан ташкил топган тизимга келтирса бўлади.

Алмаштириш киритамиз:

$$y_1 = y',$$

$$y_2 = y'' = y_1',$$

$$y_3 = y''' = y_2',$$

...

$$y_m = y^{(m)} = y_{(m-1)}'.$$

Натижада m тартибли (7.7) дифференциал тенглама биринчи тартибли m та дифференциал тенгламалардан ташкил топган тизимга келади:

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{m-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}). \end{cases}$$

Шундай қилиб, m тартибли (7.7) дифференциал тенгламанинг ечими m та жадвалли функциялар $y, y_1 = y', y_2 = y_1'', \dots, y_m = y_{(m-1)}$ бўлади.

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш.

Динамик тизимларни моделлаштириш масалаларида кўпинча иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечишга тўғри келади.

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни умумий кўриниши:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (7.9)$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни нормал шакли:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (7.10)$$

Мисол.

Тенгламанинг умумий кўриниши:

$$x^2 y x y' + (x^2 - 1) y = 0.$$

Унинг нормал шакли:

$$y'' = \frac{1}{x} y' - \frac{x^2 - 1}{x^2} y. \quad (7.11)$$

Иккинчи тартибли (7.10) дифференциал тенгламани алмаштириш йўли билан иккита биринчи тартибли дифференциал тенгламалар тизими олиб келса бўлади.

Алмаштирамиз $y_1=y'$, унда $y'_1=y''$.

Натижада (7.10) тенглама иккита биринчи тартибли тенгламалардан ташкил топувчи тизимга олиб келинади:

$$\begin{cases} y_1 = y' \\ y'_1 = f(x, y, y_1). \end{cases}$$

Мисол учун (7.11) тизим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y'_1 = \frac{1}{x} y_1 - \frac{x^2-1}{x^2} y \end{cases} \quad (7.12)$$

Ушбу тизимнинг ечими иккита функция $y(x)$ ва $y_1(x)$ ҳисобланади, бу ерда $y_1(x) = y'(x)$.

Тизим учун иккита иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардан ташкил топган Коши масаласини шакллантирамиз.

Қуйидаги дифференциал тенгламалар тизими берилган:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, y_1), \\ y'_1 = f_2(x, y, y_1). \end{cases} \quad (7.13)$$

Иккита бошланғич шарт берилган

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y_1(x_0) = (y_1)_0.$$

Тизимни $[a, b]$ соҳада h қадам билан интеграллаш керак.

Сонли усулларда Коши масаласи (7.13) тизими учун қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$y_i(x_i)$ ва $(y_1)_i(x_i), i = \overline{1, n}$, жадвалли функцияни, яъни жадвални топиш керак

i	x	y	y ₁
0	x ₀	y ₀	(y ₁) ₀
1	x ₁	y ₁	(y ₁) ₁
2	x ₂	y ₂	(y ₁) ₂
3	x ₃	y ₃	(y ₁) ₃
...	...	...	...
n	x _n	y _n	(y ₁) _n

Бу ерда h – тенгламанинг интеграллаш қадами,

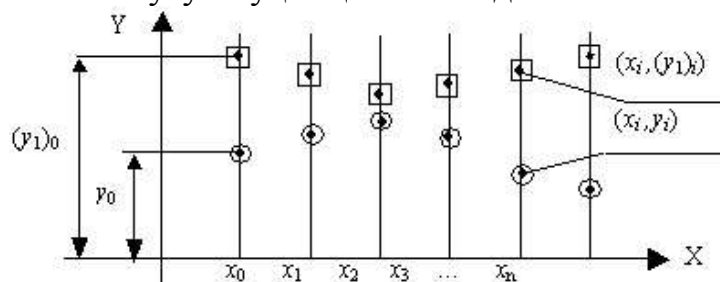
$a=x_0$ – тенгламанинг интегралланиш соҳасининг бошланиши,

$b=x_n$ – соҳа охири,

$n=(b-a)/h$ – тенгламанинг интеграллаш қадамлари сони.

График кўринишида иккита биринчи тартибли дифференциал тенгламадан ташкил топган тизим учун Коши масаласи ечими тугун нуқталар йиғиндиси ҳисобланади (7.5. расм).

Бунда ҳар бир қадамда, яъни ҳар бир x_i қиймати учун ечим (x_i, y_i) , $(x_i, (y_1)_i)$ координатали иккита тугун нуқта ҳисобланади.



7.5 расм.

Дифференциал тенгламалар тизимини ечиш учун битта биринчи тартибли дифференциал тенгламани ечиш учун қўлланилган усуллардан фойдаланилади. Бунда қуйидаги шартни сақлаш керак: интегралланадиган ҳар бир қадамда, яъни $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ координатали нуқталарда тизимнинг барча тенгламаларини параллел равишда ечиш керак.

8-Маъруза. Муҳандислик масалаларини хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ёрдамида ифодалаш

Режа:

1. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг таърифи.
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни пайдо бўлиш тарихи.
3. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни таснифланиши.
4. Ечимни мавжудлиги ва ягоналиги.
5. Иссиқлик ўтказувчанликни бир ўлчовли тенгламаси. Тор тебраниш тенгламаси. Икки ўлчовли Лаплас тенгламаси.

Калит сўзлар: Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, параболик, эллиптик, гиперболик, аралаш, каноник, Коши – Ковалевская теоремаси, айниш чизиги, Лаплас тенгламаси, иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси, ечимнинг мавжудлиги, ягона ечим, тор тебраниш тенгламаси, чегаравий масалалар, Дирихле масаласи, Нейман масаласи.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама – бир нечта ўзгарувчили номаълум функциялар ва уларниг хусусий ҳосилаларига эга дифференциал тенгламалардир.

Нисбатан оддийроқ бўлган хусусий ҳосилали тенгламани кўриб чиқамиз:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = 0.$$

Ушбу ифодадан $u(x, y)$ функциянинг қиймати y га боғлиқ эмаслиги келиб чиқади. Биз уни x га боғлиқ ихтиёрий функцияга тенг деб олишимиз мумкин. Шундай экан, тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$u(x, y) = f(x),$$

бу ерда f – x ўзгарувчига боғлиқ ихтиёрий функция. Шунга мос оддий дифференциал тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0,$$

ва унинг ечими:

$$f(x) = c,$$

бу ерда c – (y га боғлиқ бўлмаган) ихтиёрий константа. Бу иккала мисоллар оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечими ихтиёрий константаларга эгаллигини, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий ечими эса ихтиёрий функцияларга эгаллигини кўрсатмоқда. Умуман айтганда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечими ягона эмас. Умумий ҳолатда кўриб чиқиладиган соҳа чегарасида қўшимча шартлар берилади. Мисол учун, юқорида кўрилган тенгламанинг ($f(x)$ функцияси) ечими ягона кўринишда аниқланади, агар u функцияси $y=0$ чизиғида аниқланган бўлса.

Тарих.

Тарихшунослар биринчи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани 1734-1735 йилларга тегишли (1740-йилда чоп этилган) юзалар назарияси бўйича Эйлер мақолаларида аниқлашган. Замонавий белгилашларда u қуйидагича кўринишга эга:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)$$

1743-йилдан бошлаб Эйлер ишларига тор тебраниши учун тўлқин тенгламасининг умумий ечимини олган Даламбер қўшилади. Кейинги йилларда Эйлер ва Даламбер айрим хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тадқиқот қилиш ва ечиш учун бир қатор усулларни эълон қилдилар. Бу ишлар озми-кўпми яқунланган назария яратишга етарли эмас эди.

Ушбу мавзуни ривожланишидаги иккинчи босқични 1770-1850 йиллар деб белгиласак бўлади. Бу даврга Лагранж, Коши ва Якобиларни чуқур тадқиқотлари киради. Хусусий ҳосилали тенгламаларни дастлабки тизимли тадқиқотларини Фурье ўтказишни бошлаган. У тор тенгламаси ечимига янги

усулни – кейинроқ унинг ўзини номини олган ўзгарувчиларни ажратиш усулини қўлади. Мавзуга узлуксиз ўзгартиришлар гурухлари назариясига асосланган янги умумий ёндашувни 1870-йилларда Софус Ли таклиф қилди.

Таснифланиши.

Ўлчами.

Ихтиёрий ўзгарувчилар сонига тенг. Иккитадан кам бўлмаслиги керак (битта бўлганда оддий дифференциал тенглама бўлиб қолади).

Чизиқлилиқ.

Чизиқли ва чизиқли бўлмаган тенгламалар мавжуд. Чизиқли тенглама номаълум функция ҳосилаларини чизиқли комбинациялари кўринишида бўлади. Бунда коэффицентлар ёки ўзгармас ёки маълум функция бўлиши мумкин.

Чизиқли тенгламалар яхши тадқиқ қилинган, айрим турдаги чизиқли бўлмаган тенгламаларнинг ечими учун миллионлаб мукофотлар тайинланган (минг йиллик масалалари).

Бир жинслилик.

Агар тенглама номаълум функцияларга боғлиқ бўлмаган ҳадларга эга бўлса у бир жинслимас ҳисобланади.

Даражаси.

Тенгламанинг даражаси ҳосиланинг максимал даражаси билан аниқланади.

Иккинчи тартибли тенгламаларнинг таснифи.

Хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизиқли тенгламалар параболик, эллиптик ва гиперболикларга бўлинади.

Иккита боғлиқмас ўзгарувчиларга эга бўлган иккинчи тартибли чизиқли тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots = 0,$$

бу ерда A, B, C – x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ коэффицентлар, кўп нуқталар эса x, y, u ва биринчи тартибли ҳосилаларга боғлиқ бўлган ҳадларни билдиради: $\partial u / \partial x$ ва $\partial u / \partial y$. Бу тенглама конус кесимининг тенгласига ўхшайди: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0$.

Худди конус кесими эллипс, парабола ва гиперболаларга бўлингани сингари, иккинчи тартибли тенглама берилган нуқтада $D = B^2 - AC$ дискриминант ишорасига боғлиқ ҳолда қуйидагича таснифланади:

1. $D = B^2 - AC > 0$ - Гиперболик тенглама.

2. $D = B^2 - AC < 0$ - Эллиптик тенглама.

3. $D = B^2 - AC = 0$ - Параболик тенглама (бу ерда берилган

нуқтада A, B, C коэффицентлар бир вақтнинг ўзида нолга тенг бўлмаслиги кўзда тутилган).

Барча A, B, C коэффицентлар ўзгармас бўлган ҳолатда, тенглама x ва y ўзгарувчилар текислигининг барча нуқталарида бир хил типда бўлади. Барча

A, B, C коэффициентлар x ва y ўзгарувчиларга узлуксиз боғлиқ бўлса ва берилган нуқталар тўпламида тенгламалар гиперболик (эллиптик) типга тегишли бўлса, улар текисликда гиперболик (эллиптик) деб аталувчи очиқ ораликни ҳосил қилади, агар нуқталар тўпламида тенглама параболик типга оид бўлса – ёпиқ ораликни ҳосил қилади. Агар тенглама текисликнинг баъзи жойларида гиперболик, баъзи жойларида эллиптик бўлса, у ҳолда тенглама *аралаш (аралаш тип)* деб аталади. Бу ҳолатда параболик нуқталар одатда *типни алмаштириш чизиги* ёки *айниш чизиги* деб аталувчи чизикни ҳосил қилади.

Умумий ҳолатда иккинчи даражали тенглама кўпгина боғлиқмас ўзгарувчиларга боғлиқ бўлганда, қуйидагича ифодаланади:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

Буни берилган $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ нуқтада мос келувчи квадратик шаклга мос ҳолда қуйидагича таснифланиши^[1] мумкин:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j.$$

Айнимаган чизикли алмаштириш билан

$$s_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} t_j, i = 1, 2 \dots n, \det \|A_{ij}\| \neq 0$$

Квадратик шаклни ҳар доим кононик кўринишга келтирилиши мумкин:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^2.$$

Бунда инерция теоремасига мувофиқ квадратик шаклнинг кононик кўринишидаги мусбат, манфий ва нолга тенг λ_i коэффициентлар сони инвариант ҳисобланади ва чизикли алмаштиришга боғлиқ бўлмайди. Шунинг асосида кўрилатган тенглама (M_0 нуқтада) қуйидагича таснифланади:

1. Агар M_0 нуқтада кононик кўринишидаги квадратик шаклнинг барча коэффициентлари бир хил ишорага эга бўлса, унда бу нуқтадаги тенглама эллиптик типдаги тенглама деб аталади.

2. Агар M_0 нуқтада кононик кўринишидаги квадратик шакл коэффициентларининг ишоралари ҳар хил, лекин шу билан бирга нолдан фарқли бўлса, унда бу нуқтадаги тенглама гиперболик типдаги тенглама деб аталади.

3. Агар M_0 нуқтада кононик кўринишидаги квадратик шаклнинг коэффициентларидан бири нолга тенг бўлса ҳам, у ҳолда бу нуқтадаги тенглама параболик типдаги тенглама деб аталади.

Агар зарур бўлса боғлиқмас ўзгарувчи кўп бўлган ҳолатдаги батафсилроқ бўлган таснифни келтириш ҳам мумкин:

1. *Гиперболик тип* кўшимча равишда қуйидагича таснифланиши мумкин:

- *нормал гиперболик тип*, агар битта коэффициент бир ишорали, қолганлари эса бошқа ишорали бўлса.

- *ультрагиперболик тип*, агар бир хил ишорали коэффициентлар биттадан кўп бўлса.

2. *Параболик тип* қўшимча равишда қуйидагича таснифланиши мумкин:

- *эллиптик-параболик тип*, агар фақат битта коэффициент нолга тенг, қолганлари эса бир хил ишорали бўлса.

- *гиперболик-параболик тип*, агар фақат битта коэффициент нолга тенг, қолганлари бўлса ҳар хил ишорали бўлса. Худди гиперболик типга ўхшаш у ҳам қуйидагича бўлиниши мумкин:

- *нормал гиперболик-параболик тип*;

- *ультрагиперболик-параболик тип*;

- *ультрапараболик тип*, агар нолга тенг коэффициентлар биттадан ортиқ бўлса.

Ечимни мавжудлиги ва ягоналиги.

Гарчи оддий дифференциал тенгламанинг ечими мавжудлиги ва ягоналиги тўғрисидаги саволга тамоман тугалланган жавобга эга бўлсак ҳам (Пикар-Линделёф тенгламаси), хусусий ҳосилали тенгламаларда ушбу савол учун аниқ жавоб йўқ. Номалум функцияларга ва уларнинг ҳосилаларига нисбатан аналитик бўлган ҳар қандай хусусий ҳосилали тенгламанинг Коши масаласи учун ягона аналитик ечимга эгалигини тасдиқловчи умумий теорема мавжуд (Коши-Ковалевская теоремаси). Шунга қарамасдан, коэффициентлари барча ҳосиллага эга ва шунга қарамасдан ечимга эга бўлмаган хусусий ҳосилали чизикли тенгламаларга мисоллар мавжуд. Ҳаттоки ечим мавжуд ва ягона бўлса ҳам, бу ечимлар мақсадга мувофиқ бўлмаган хусусиятларга эга бўлиши мумкин.

Лаплас тенгламаси учун Коши масаласининг (n га боғлиқ бўлган) кетма-кетлигини кўриб чиқамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

тенглама учун бошланғич шартлар қуйидагича:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= \frac{\sin nx}{n}, \end{aligned}$$

бу ерда n – бутун сон. Ўзгарувчи y бўйича u функциянинг ҳосиласи n ошгани сари x бўйича бир маромда 0 га интилади, бироқ тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$u(x, y) = \frac{(\operatorname{sh} ny)(\sin nx)}{n^2}.$$

Агар nx y нинг ҳар қандай нол бўлмаган қиймати учун π га қаррали бўлмаса ечим чексизликка қараб интилади. Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ечимни бошланғич шартлардан узлуксиз боғлиқлиги йўқ бўлганлиги сабаби ёмон қўйилган ёки коррект бўлмаган масала деб аталади.

Мисоллар.

Бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси

Бир жинсли стерженда иссиқликни тарқалишини тасвирловчи тенглама куйидаги кўринишга эга:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

бу ерда $u(t,x)$ – ҳарорат, α – иссиқлик тарқалишини тасвирловчи мусбат константа.

Коши масаласи куйидаги кўринишда қўйилади:

$$u(0, x) = f(x)$$

бу ерда $f(x)$ – ихтиёрий функция.

Тор тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

бу ерда $u(t,x)$ – торни мувозанат ҳолатидан силжиши ёки қувурдаги ортиқча ҳаво босими ёки қувурдаги электромагнит майдоннинг магнитудаси, c – тўлқин тарқалиш тезлиги. Коши масаласини вақтнинг дастлабки лаҳзасида шакллантириш учун дастлабки лаҳзада торни қўзғалиши ва тезлигини бериш керак:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= f(x), \\ u_t(0, x) &= g(x), \end{aligned}$$

Икки ўлчовли лаплас тенгламаси

Икки ўзгарувчили номаълум функция учун Лаплас тенгламаси куйидаги кўринишга эга:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Унинг ечими гармоник функция деб аталади.

Аналитик функциялар билан боғлиқлиги

$z = x + iy$ комплекс ўзгарувчили ҳар қандай f голоморф функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари гармоник-боғланган функция ҳисобланади: уларнинг иккаласи ҳам Лаплас тенгламасини қониқтиради ва уларнинг градиентлари ортогоналдир.

Агар $f = u + iv$ бўлса, у ҳолда Коши-Риман шартлари куйидагиларни тасдиқлайди:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

Тенгламаларни бир-бирига қўшиб ва айириб, куйидагиларни оламиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Шунингдек, ихтиёрий гармоник функция айрим аналитик функцияларнинг ҳақиқий қисми эканлигини кўрсатиш мумкин.

Чегарали масалалар

Чегарали масалалар куйидаги кўринишда ифодаланади: S соҳанинг ички нуқталарида Лаплас тенгламасини ΔS соҳа чегарасида эса – баъзи

шартларни қониқтирувчи u функцияни топинг. Шартнинг кўринишига кўра куйидаги чегаравий масалаларни ажратиш мумкин:

- $u|_{\partial S} = \psi(x, y), \quad x, y \in \partial S$ - Дирихле масаласи

- $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial S} = \psi(x, y), \quad x, y \in \partial S$ - Нейман масаласи

Математик физика тенгламасини ечиш.

Берилган типдаги тенгламаларни ечишнинг иккита усули мавжуд:

- аналитик, бунда натижа ҳар хил математик алмаштиришлар билан чиқарилади.

- санокли, бунда олинган натижа ҳақиқийсига берилган аниқлик билан мос келади, лекин кўп оғир ҳисоб-китоб ишларини бажаришни талаб қилади, шунинг учун уни фақатгина ҳисоблаш техникаси ёрдамида бажариш мумкин.

9-Маъруза. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари

Режа:

1. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни аналитик ечиш.
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни санокли ечиш.

Калит сўзлар: аналитик ечим, тор тебраниш тенгламаси, ўзгарувчиларни ажратиш усули, Фурье қатори, ёйиш коэффициентлари, чекли дифференциаллар усули, чегаравий элементлар усули, чекли элементлар усули.

Тебраниш тенгламасининг аналитик ечими

L узунликдаги тор тебраниш масаласини кўриб чиқамиз. Тор охирида $u(x, t)$ функция нолга айланади деб ҳисоблаймиз:

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0$$

Бошланғич вақтдаги бошланғич шартларни берамиз:

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|_{t=0} = g(x)$$

Ечимни қуйидаги кўринишда ифодаalayмиз:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Ечимни тебраниш тенгламасига қўйиб, $X(x)T(t)$ кўпайтмага бўламиз ва қуйидагини оламиз:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Ушбу тенгламанинг ўнг томони x га боғлиқ, чап томони $-t$ га, шундай экан бу тенглама фақатгина унинг иккала томони ўзгармас катталиқга тенг бўлсагина бажарилиши мумкин, бу катталиқни $-\lambda^2$ орқали белгилаймиз:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

Бу ердан $X(x)$ учун қуйидаги тенгламани ёзиб оламиз:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Бу тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартлардаги нотривиал ечими фақатгина $\lambda = \frac{\pi n}{L}$ бўлганидагина мумкин бўлади ва қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

$T(t)$ ни аниқлаш тенгламасини кўриб чиқамиз:

$$T''(t) + a^2 \lambda_n^2 T(t) = 0$$

Унинг ечими:

$$T(t) = A_n \cos\left(\frac{a\pi n}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{a\pi n}{L}t\right)$$

Шундай

қилиб

$u(x, t) = \left[A_n \cos\left(\frac{a\pi n}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{a\pi n}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ кўринишидаги функция тўлқин тенгламасининг ечими ҳисобланади.

Ечимни бошланғич шартларга қониктириш учун, қуйидаги қаторни тузамиз:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{a\pi n}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{a\pi n}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Бошланғич шартларга қўйиш қуйидагини беради:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = f(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\pi n}{L} B_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = g(x)$$

Охирги формулалар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни $[0, L]$ ораликда Фурье қаторига ёйилишини намоён қилади. Ёйилиш коэффициентлари қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Тор тебраниш тенгламасини санокли ечиш усули

Мухандислик масалаларини ечининг санокли усулларини урта асосий кўринишга бўлиш мумкин: чекли айирмалар усули, чекли элементлар усули ва чегаравий элементлар усули (умумийроқ номи – *чегаравий интеграл тенгламалари усули*).

Бу усулларнинг биринчиси бошланғич дифференциал тенгламага мос келувчи айирмалар операторини бевосита қўллаш орқали амалга ошириш билан боғлиқ. Ушбу йўл битта муҳим хусусиятга эга: уни чизиқли бўлмаган масалаларнинг ечишга ҳам осонлик билан қўллаш мумкин ва у мураккаб математик алмаштиришларни талаб қилмайди. Аммо олинадиган натижа аниқлиги унчалик юқори эмас.

Чекли элементлар усули тадқиқ қилинаётган жисмни чекли элементлар деб аталувчи оддий кўринишдаги бир қанча бўлақларга бўлишга асосланади. Санокли моделнинг асосида механиканинг вариацион принциплари, кўпгина ҳолларда потенциал энергиянинг минимуми принципи ётади. Усулнинг физикавий тушунарлилиги ва кенг амалий имкониятлари унинг тадқиқотчилар орасида оммабоп бўлишига сабаб бўлмоқда.

Бироқ шундай масалалар синфлари мавжудки, уларни чекли элементлар усули қониқтирмайди. Шу сабабли олимлар интеграл тенгламаларга асосланадиган альтернатив усулларга мурожаат қилишга мажбур бўлганлар. Шундай усуллардан бири – чегаравий элементлар усулидир.

10-Маъруза. Жамланган ва тақсимланган параметрли моделлар ёрдамида ҳаракат тенгламаларини тузиш

Режа:

1. Механик тизимларнинг эркинлик даражаси.
2. Умумлашган координаталар. Умумлашган кучлар.
3. Жамланган параметрли моделлар учун Лагранж тенгламаси.
4. Параметрлари жамланган ва тақсимланган моделлар асосида гидравлик тизим параметрларини аниқлаш ва жараёнларни тасвирлаш.

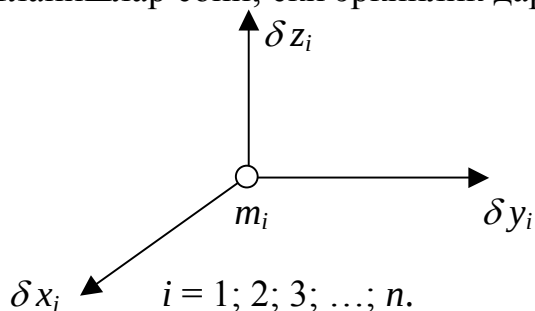
Калит сўзлар: умумлашган координаталар, умумлашган кучлар, оқимлар, кучланиш, эркинлик даражаси, параметрлари жамланган моделлар, параметрлари тақсимланган моделлар, жараёнлар, параметрлар, гидравлик тизим, аниқлик мезонлари.

Механик тизимларнинг эркинлик даражаси деб мумкин бўлган эркин ҳаракатлар сонига айтилади.

Механик тизим “ k ” боғланишлар қўйилган “ n ” нуқталардан ташкил топган бўлсин. Эркинлик даражаси куйидаги тасаввурдан аниқланади: ҳар бир эркин нуқта учта эркин ҳаракатланишларга эга: δx_i , δy_i , δz_i (10.1. расм). Аввалдан барча n нуқталар эркин $3n$ ҳаракатланишларга эга бўлар эди. $3n$ ҳаракатланишлар k боғлиқлик шартлари билан ўзаро боғлиқ бўлгани учун, эркин ҳаракатланишлар куйидагича қолади:

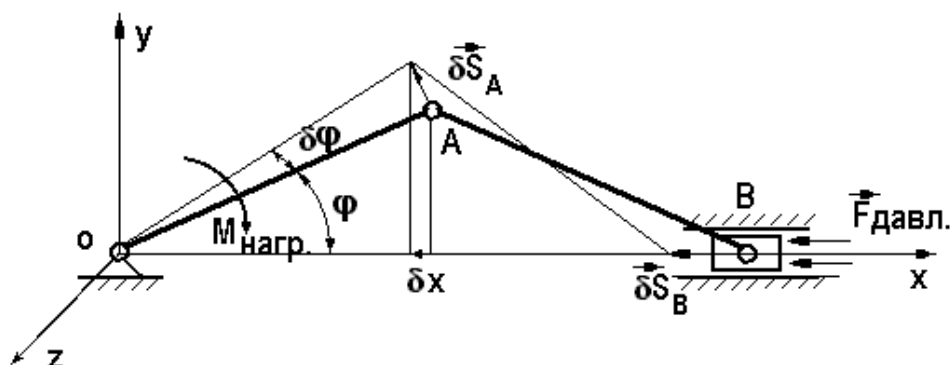
$$S = 3 \cdot n - k, \quad (10.1)$$

бу ерда S – эркин ҳаракатланишлар сони, ёки эркинлик даражаси сони.



10.1. расм.

(10.1) формулани кривошип шатунли механизмнинг эркинлик даражаси сонини аниқлаш учун қўлланилишини кўриб чиқамиз (10.2. расм).



10.2. расм.

Тизим ўзаро боғланган учта жисмдан иборат: кривошип OA , шатун AB ва ползун B (поршен). Механизмга куйидаги боғланишлар қўйилган: кривошипнинг қўзғалмас ўқи ва ползун учун йўналтирич. Агар учта нуқтани ҳолати маълум бўлса механизмнинг барча жисмлари ҳолати аниқланади: O , A и B . Агар бу нуқталар боғлиқ бўлмаганида улар $3 \cdot 3 = 9$ эркинлик даражасига эга бўлар эди. Бироқ, нуқталарнинг ҳаракатланиши чекланган; бу чекловлар куйидаги тенгламалар билан математик ифодаланади (“боғланишлар тенгламаси”):

“ O ” шарнир координата бошини тарк этмайди: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$.

A нуқта фақатгина расмдаги юзада ҳаракатланади (механизм текисликда кўрилади): $z_A = 0$.

Ползун “ B ” фақатгина йўналтирувчи бўлиб ҳаракатланади: $y_B = 0$; $z_B = 0$.

Кривошип ва шатуннинг узунлиги ўзгармас:

$$(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2 = OA^2;$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = AB^2.$$

Демак, механизмга қўйилган боғланишлар саккизта тенгламаларни ифодалайди. (10.1) формула бўйича қуйидагига эга бўламиз:

$$S = 3 \cdot 3 - 8 = 1.$$

Шундай экан, кривошип шатунли механизм – бу бир эркинлик даражасига эга тизимдир.

Ҳар сафар қандайдир характерли нукта билан механизмнинг ҳолатини аниқлашга ва кейин боғланишларни қайта санашга ҳожат йўқ. Эркинлик даражаси сонини кўрсатиш учун мумкин бўлган эркин ҳаракатлар сонини аниқлашнинг ўзи кифоя.

Кривошип шатунли механизмнинг барча жисмларини ҳаракатланишини биргина эркин ҳаракат – кривошипнинг бурилиш бурчаги билан аниқласа бўлар экан.

Мумкин бўлган эркин ҳаракатларни бериб, қаттиқ жисм қуйидаги эркинлик даражалари сонига эга бўлиши мумкинлигини аниқлаш онсон: кўзгалмас ўқ атрофида айланганда – битта, илгарилама ҳаракатда – учта, текис параллел ҳаракатда – учта, сферик ҳаракатда учта; эркин қаттиқ жисм олти эркинлик даражасига эга.

Умумлашган координата деб бутун тизим ҳолатини бир хилда аниқловчи ўзаро боғлиқ бўлмаган параметрларга айтилади.

Тизимда эркин ҳаракатлар сони эркинлик даражаси сонига тенг бўлганлиги учун тизимнинг умумлашган координаталари ҳар доим эркинлик даражаси нечта бўлса шунга тенг бўлади. Белгиланиши: $q_1; q_2; \dots; q_S$, яъни q_j ; $j = 1, 2, \dots, S$,

бу ерда j – эркинлик даражаси рақами.

Умумлашган координаталар ўлчам бирликлари ҳар хил бўлиши мумкин. Механикада ҳаммасидан ҳам кўпроқ умумлашган координаталар сифатида масофалар ва бурилиш бурчаклари қабул қилинади.

Механик тизимнинг барча нукталарини декарт координаталари қуйидаги умумлашган координаталар орқали аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \dots, q_S) \\ y_1 &= f_2(q_1, \dots, q_S) \\ z_1 &= f_3(q_1, \dots, q_S) \\ x_2 &= f_4(q_1, \dots, q_S) \\ &\dots\dots\dots \\ z_n &= f_{3n}(q_1, \dots, q_S) \end{aligned} \right\} \text{ёки: } \bar{r}_i = \bar{r}_i(q_j), \quad (10.2)$$

бу ерда n – тизимдаги нукталар сони, $j = 1, 2, \dots, S$ – умумлашган координаталар сони.

(10.2) тенгламалар тизими чап томонда координата шаклида ёзилган бўлса, ўнг томонда ўзининг қулай ихчамлиги билан ажралиб турган ҳудди шу боғлиқликнинг вектор кўринишидаги ёзилишидир.

Бундан буён муҳокамаларни узунлиги тенг бўлган кривошип ва шатунли КШМ мисолида олиб борамиз.

10.2 расмда қуйидаги белгиланишлар киритилган: $OA = AB = l$, $F_{\text{дав.}}$ - поршенга ёнувчи маҳсулот томонидан босим кучи, $M_{\text{нагр}}$ - кривошипга таъсир қилувчи юкланиш момент (мисол учун, тирсакли вал томонидан).

Аввал маълум бўлганидек, ушбу механизм битта эркинлик даражасига эга. Умумлашган координата сифатида кривошипнинг бурилиш φ бурчагини олиш қулайдир. А ва В нуқталарнинг декарт координаталари умумлашган координата орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= l \cos \varphi \\ y_A &= l \sin \varphi \\ x_B &= 2l \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (10.3)$$

Бу ифодалар – (10.2) кўринишидаги тенгликларнинг аниқ мисолидир.

Тизим “S” эркинлик даражасига эга ва ҳар бирига $\vec{F}_i$ куч таъсир қиладиган “n” нуқтадан ташкил топган бўлсин. Тизимга қандайдир бир умумлашган координата бўйлаб мумкин бўлган ҳаракат берамиз. Бунда тизимнинг баъзи нуқталари (барчаси шарт эмас) ҳаракат олади, уларга таъсир қилувчи кучлар эса мумкин бўлган ишни бажаради.

Умумлашган координаталарга мос келувчи умумлашган куч деб тизим мумкин бўлган кучлар йиғиндисини ҳудди шу умумлашган координата бўйлаб мумкин бўлган ҳаракати нисбатига айтилади.

$$Q_j = \frac{\sum_{i=1}^n \delta A_i}{\delta q_j}, \quad (10.4)$$

бу ерда δq_j – j - умумлашган координата томонидан берилган мумкин бўлган ҳаракат; $\sum_{i=1}^n \delta A_i$ - берилган умумлашган координатанинг мумкин бўлган ҳаракатидан ҳаракат олган кучларнинг мумкин бўлган ишлари йиғиндисини; Q_j – мумкин бўлган ҳаракат берилган координатага мос келувчи умумлашган куч.

(10.4) формуладан кўриниб турибдики умумлашган кучларнинг ўлчов бирлиги умумлашган координаталар ўлчов бирлигига боғлиқ. Агар умумлашган координата ўрнига чизиқли масофа қабул қилинган бўлса, унда умумлашган куч оддий куч бирлигида ўлчанади. Агар умумлашган координата бурилиш бурчаги бўлса, у ҳолда умумлашган куч куч моменти бирлигида ифодаланади.

Мисол. Кривошипнинг соат стрелкасига қарши кичик бурчакга бурилишини - мумкин бўлган ҳаракатини берамиз. Бунда поршен чапга ҳаракатланади (10.2. расм). Юкловчи момент ва поршенга босим кучлари мумкин бўлган ишни бажаради. Кривошип бурилиш бурчагига мос умумлашган куч поршен ҳаракати ифодасини ҳисобга олган ҳолда (10.4) формуласи бўйича аниқланади:

$$Q_{\varphi} = \frac{F_{\text{давл}} \cdot \delta S_B - M_{\text{негр}} \cdot \delta \varphi}{\delta \varphi} = \frac{F_{\text{давл}} \cdot 2l \sin \varphi \cdot \delta \varphi - M_{\text{негр}} \cdot \delta \varphi}{\delta \varphi},$$

$$\text{яъни } Q_{\varphi} = F_{\text{давл}} \cdot 2l \cdot \sin \varphi - M_{\text{негр}}.$$

(10.4) ифода нафақат умумлашган кучларнинг мазмуний таърифи, балки уларни ҳисоблаш учун формула ҳам ҳисобланади. Бироқ, кейинги назарий хулосалар учун умумлашган кучларнинг бошқа ифодаси талаб этилади. У қуйидаги ифода ёрдамида олиниши мумкин:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta A_i &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \left[\bar{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \delta q_s \right) \right] = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) \cdot \delta q_1 + \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right) \cdot \delta q_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \right) \cdot \delta q_s. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Бошқа томондан, умумлашган координаталардаги мумкин бўлган ишлар йиғиндисини энг элементар ишнинг оддий талқини бўйича қандайдир умумлаштирилган кучларни уларнинг мумкин бўлган ҳаракатлари кўпайтмалари йиғиндисини сифатида ифодалаш мумкин:

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s. \quad (10.6)$$

Агар тизимга фақатгина потенциал кучлар таъсир қилса, у куч функциясининг вариациясига тенг бўлади:

$$\sum \delta A_k = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Бу ифодаларни таққослаб ва U куч функциясини қарама-қарши ишора билан олинган потенциал энергия Π га тенглигини ҳисобга олиб қуйидагиларни оламиз:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s},$$

яъни тизимга фақат потенциал кучлар таъсир қилган ҳолатда умумлашган кучлар қарама-қарши ишора билан олинган мос келувчи умумлашган координаталар бўйича потенциал энергиянинг хусусий ҳосилаларига тенг.

(10.5) ва (10.6) ифодаларини таққослашдан қуйидаги келиб чиқади:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \quad \text{где } j = 1; 2; 3; \dots; S. \quad (10.7)$$

(10.4) (10.6) ва (10.7) ифодалар умумлашган актив кучлар учун олинган. Худди шундай мулоҳаза қилиб, умумлашган инерция кучлари учун қуйидаги ифодаларни олиш мумкин.

$$Q_j^{un} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta A_i^{un}}{\delta q_j}; \quad (10.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i^{un} = Q_1^{un} \cdot \delta q_1 + Q_2^{un} \cdot \delta q_2 + \dots + Q_S^{un} \cdot \delta q_S; \quad (10.9)$$

$$Q_j^{un} = \sum_{i=1}^n \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n (-m_i \bar{a}_i) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}. \quad (10.10)$$

Ушбу ифодаларда:

Q_j^{un} - j -координатага мос келувчи умумлашган инерция кучи;

$\sum_{i=1}^n \delta A_i^{un}$ - инерция кучларининг мумкин бўлган ишлар йиғиндиси;

$\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_i$ - тизим i -нуқтасининг инерция кучи;

Жамланган параметрли моделлар учун Лагранж тенгламаси

Динамиканинг умумий тенгламасидан келиб чиқиб Лагранж тенгламасини келтириб чиқарамиз:

$$Q_j + Q_j^{un} = 0.$$

Унга (10.10) кўринишидаги умумлашган инерция кучини қўямиз:

$$Q_j + \sum_{i=1}^n (-m_i \bar{a}_i) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad \text{ёки}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = Q_j. \quad (10.11)$$

(11,11) тенгламани чап томонини ўзгартириш учун қуйидаги тенгликни кўриб чиқамиз:

$$\bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) - \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (10.12)$$

(10.12) тенглигининг тўғрилиги камаювчи турган кўпайтмани дифференциаллаш йўли билан осон текширилади:

$$\frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial g_j} \right) = \underbrace{\frac{d\bar{v}_i}{dt}}_{\bar{a}_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial g_j} - \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial g_j} \right).$$

Иккита ёрдамчи тенгликни киритамиз:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial g_j} \right) = \frac{\partial}{\partial g_j} \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial g_j}, \quad (10.13)$$

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial g_j} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial g_j}. \quad (10.14)$$

(10.13) тенгликнинг тўғрилиги ҳам умумлашган координаталарга ҳам вақтга боғлиқ радиус-векторнинг дифференциалланиш операцияларини кўчиришлилиги билан тушунтирилади.

(10.14) тенглигининг тўғрилигини тезлик боғланишларини қўллаш орқали кўрсатамиз:

$$\bar{v}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s,$$

бу ерда умумлашган тезликлар олдидаги коэффициентлар тезликга боғлиқ эмас, умумлашган тезликларнинг ўзи эса ўзаро боғлиқмас. Шунини ҳисобга олган ҳолда, охириги тенгликни дифференциаллаймиз, масалан, биринчи умумлашган тезлик бўйича:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_1}}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_1}}_0 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_1}}_0 = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}.$$

Худди шундай текширишни ҳар қандай эркинлик даражаси бўйича қилса бўлади ва шу билан (10.14) тенглигининг тўғрилиги исботланади. (10.14) тенглиги қуйидаги маънога эга: нуктанинг вектор координатасини қандайдир умумлашган координата бўйича ҳусусий ҳосиласи мос келувчи нуктанинг вектор тезлигидан умумлашган тезлик бўйича олинган ҳусусий ҳосиласига тенг.

(10.13) ва (10.14) тенгликларини ҳисобга олган ҳолда (10.12) тенглиги қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

тезликни ҳосила ичига киритгандан кейин:

$$\bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{v_i^2}{2} \right). \quad (10.15)$$

Бу ерда шунингдек вектор тезлигининг скаляр квадрати тезлик катталигининг квадратага тенг эканлиги ҳисобга олинган.

(10.15) тенгликдан фойдаланиб, дастлабки (10.11) тенгламани қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) \right\} = Q_j.$$

Ушбу тенгламанинг чап томонини иккита йиғинди фарқи кўринишида ифодалаш мумкин; нуқтанинг ўзгармас массасини ҳосилалар белгиси ичига киргазамиз, ҳосилалар йиғиндисини эса ўша йиғиндилар ҳосиласи билан алмаштираемиз:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \right) = Q_j.$$

Қавслар ичидаги ифодалар механик тизимнинг кинематик энергиясини билдиради:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = T.$$

Узил кесил тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

бу ерда $j = 1, 2, \dots, S$.

Ушбу тенглама Лагранж тенгламаси ҳисобланади.

Параметрлари жамланган ва тақсимланган моделлар асосида гидравлик тизимни жараёнларини тасвирлаш ва параметрларини аниқлаш

Автомобиллар тормоз юритмаларини тадқиқ қилиш бўйича бажарилган ишлар таҳлили асосида гидравлик тормоз юритмасининг динамик ҳисоби учун параметрлари жамланган моделни қўллаш мумкин (магистрал узунлиги 10 м дан ошмайди). Шу моделга мувофиқ тизимга келадиган суюқлик сарфи Q_1 етакланувчи элементларни Q_2 ҳаракат бажаришига ва юритгич ишчи суюқлигини ва элементларини $Q_{сж}$ деформацияланишга сарфланади:

$$Q_1 = Q_2 + Q_{сж}; \quad Q_{сж} = \psi(P) \cdot V_{ж} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \quad (10.16)$$

бу ерда $V_{ж}$ - тизимдаги суюқликнинг бошланғич ҳажми.

Умумий ҳолатда гидравлик юритманинг динамикасини ифодаловчи тенгламалар тизими ушбу юритмадаги физик жараёнларига мос келувчи уч турдаги тенгламаларни ўз ичига олади:

- Даламбер принципага мувофиқ тузилган тизимнинг ҳаракатланувчи деталлари ҳаракатининг дифференциал тенгламалари (уларни кўпинча куч ва моментлар тенгламаси деб аташади);

- Гидравлик юритма элементларидаги ишчи суюқлик оқими тенгламаси;

- оний массавий сарфнинг мувозанат тенгламаси (сарфлар тенгламаси).

Бундан ташқари бошланғич ва чегаравий шартлар берилган бўлиши керак.

Ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси қўйилган кучлар (моментлар) таъсирида ҳаракатланаётган элемент мувозанатини акс эттиради.

Илгарилама ҳаракатланадиган элементлар учун:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum P_a - \sum P_c \quad (10.17)$$

бу ерда m – ҳаракатдаги элементга келтирилган масса;

x – элементнинг ҳаракати;

$\sum P_a$ – актив кучлар йиғиндиси;

$\sum P_c$ – қаршилик кучлари йиғиндиси.

Ишчи суюқликнинг оқими дифференциал тенгламаларини ва сарфлар тенгламаси кўриб чиқишда қуйидаги тахминларни қиламиз: гидравлик магистраллардаги тўлқин жараёнлари, уларнинг узунлигини кичкина бўлганлиги сабабли, ўтиш жараёнинг таъсир қилмайди; ишчи суюқликнинг қовушқоқлиги, зичлиги, ҳарорати ва ундаги эримаган ҳаво миқдори ўтиш жараёни давомида ўзгармайди; ишчи суюқликнинг сиркиб чиқиши йўқ.

Дифференциал тенгламаларни тузиш учун тугунлар қонуни ҳамда контурлар қонунидан фойдаланамиз. Ушбу қонунлар асосида занжирнинг ҳар бир i -қисми учун кейинчалик суюқлик ҳаракатининг дифференциал тенгламасини акс эттирувчи босим мувозанати тенгламаси ҳамда оний сарфларнинг мувозанат тенгламаси тузилади. Гидравлик занжирнинг i -қисми учун босим мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$p_{вх} = p_{вых} + p_j + p_l + p_m \quad (10.18)$$

бу ерда $p_{вх}$ ва $p_{вых}$ – занжир қисмининг кириши ва чиқишидаги суюқлик босими;

p_j – суюқлик босимини инерцион йўқотишлари қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$p_j = \rho \cdot l \cdot \frac{dV}{dt} \quad (10.19)$$

бу ерда ρ – суюқлик зичлиги, l – қисм узунлиги; V – суюқликнинг ҳаракатланиш тезлиги;

p_l – магистрал узунлиги бўйлаб босимнинг йўқотилиши, қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$p_l = 27,5 \cdot \frac{\rho \cdot v \cdot l \cdot V}{f} + 0,443 \cdot \frac{k_e \cdot \rho \cdot l \cdot V^2}{\sqrt{f}} \quad (10.20)$$

p_m – суюқлик босимининг маҳаллий қаршиликлардаги йўқотишлари, қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$p_m = \xi \cdot \rho \cdot V^2 / 2 = \frac{\xi \cdot \rho \cdot Q^2}{2 \cdot f^2} \quad (10.21)$$

Бу ерда ξ – маҳаллий қаршилик коэффиценти, тажриба йўли билан аниқланади.

(10.18) тенгламага (10.19)-(10.21) қўйиб ва оқим тезлигини $V=dx/dt$ (x – суюқликнинг магистралдаги ҳаракати) ҳисобга олиб, магистралнинг i -қисмидаги суюқлик ҳаракатини ифодаловчи тенгламани оламиз:

$$p_{\text{ex}} = \rho \cdot l \frac{d^2 x}{dt^2} + 27,5 \cdot \frac{\rho \cdot l \cdot v}{f} \cdot \frac{dx}{dt} + \left(0,443 \frac{k_{\varepsilon} \cdot \rho \cdot l}{\sqrt{f}} + 0,5 \cdot \xi \cdot \rho \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \operatorname{sgn} \frac{dx}{dt} + p_{\text{блх}} \quad (10.22)$$

Бу тенгламада учинчи ҳади ўтиш жараёнида dx/dt суюқлик оқим тезлик ишораси ўзгаришидан қатъий назар ҳар доим мусбат бўлган чизиқли бўлмаган жуфт функцияни билдиради. $dx/dt < 0$ бўлганда квадратли боғлиқлик тизимга қўшимча тўлқинланишни киритади, бу ўз навбатида қайта ростлаш тартибида ишлайдиган гидравлик юритмалардаги ўтиш жараёнини реал характерини бузиб кўрсатишга олиб келади. Шу сабабдан қайта ростлаш тартибида ишлайдиган гидравлик юритманинг реал ўтиш жараёнларини тадқиқ қилишда (10.22) тенгламанинг қўлланиш соҳасини кенгайтириш мақсадида суюқлик оқиш тезлиги ишорасини автоматик равишда ҳисобга оладиган $\operatorname{sign}(dx/dt)$ функциясини киритиш керак.

Шуни ҳисобга олган ҳолда (10.22) тенглама қуйидаги кўринишни қабул қилади:

$$\rho \cdot l \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + 27,5 \cdot \frac{\rho \cdot l \cdot v}{f} \cdot \frac{dx}{dt} + \left(0,443 \frac{k_{\varepsilon} \cdot \rho \cdot l}{\sqrt{f}} + 0,5 \cdot \xi \cdot \rho \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + p_{\text{блх}} = p_{\text{ex}} \quad (10.23)$$

i -тугун учун оний ҳажмий суюқлик сарфининг мувозанат тенграмаси кириш Q_i ва чиқиш Q_{i+1} сарфларининг алгебраик йиғиндисини ва тугунда жамланган суюқлик ҳажмини деформациясига сарфланадиган $Q_{i\partial}$ сарфни акс эттиради, яъни

$$Q_i - Q_{i+1} - Q_{i\partial} = 0 \quad (10.24)$$

$$Q_{i\partial} = V_{\text{ж}} \cdot \psi(P) \cdot \frac{dp}{dt}$$

бу ерда $V_{\text{ж}}$ – тугундаги суюқликнинг бошланғич ҳажми;

$\psi(p)$ – эластиклик коэффиценти.

Шундай қилиб (10.23) ва (10.24) тенграмалар куврларнинг кичик ҳажмида жамланган суюқлик ҳаракати тенграмасини акс эттиради.

Параметрлари тақсимланган моделларни қўллаганда суюқлик ҳаракатини қуйидаги тенграмалар билан тасвирлаш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{mp}}{\partial t} &= -\frac{f}{\rho} \frac{\partial p_{mp}}{\partial x} - 27,5 \frac{\mu \cdot 1}{\rho \cdot f} Q_{mp} - 0,443 \frac{k_{\varepsilon}}{f^{3/2}} Q_{mp}^2, \\ \frac{\partial p_{mp}}{\partial t} &= -\left(\frac{E_{\text{ж}} \cdot \delta_T \cdot E_T}{E_T \cdot \delta_T + d_T \cdot E_{\text{ж}}} \right) \frac{I}{f} \frac{\partial Q_{mp}}{\partial x}; \end{aligned}$$

бу ерда $p_{\text{тр}}$ ва $Q_{\text{тр}}$ – суюқлик босими ва сарфи; t – вақт; x – магистрал ўқи координатаси; p ва $E_{\text{ж}}$ – суюқликнинг зичлиги, ҳажмий эластиклик модули; d_T , δ_T , E_T – мос равишда кувр диаметри, деворлар қалинлиги ва материалнинг эластиклик модули; k_{ε} – қиймати гидравлик магистралнинг

нисбий ғадир-будирлиги ϵ га боғлиқ аппроксимация коэффициенти; f ва l куврнинг узунлиги ва юзаси; μ - суюқликнинг динамик қовушқоқлиги.

11-маъруза. Муҳандислик масалаларини чекли айирмалар ва чекли элементлар усуллари ёрдамида ечиш

Режа:

1. Ўнг, чап дифференциаллар ва марказий нуқтадаги дифференциал.
2. Иккинчи тартибли дифференциаллар.
3. Функция қиймати тўри.
4. Эластиклик назариясининг икки ўлчовли чегаравий масаласининг умумий қўйилиши.
5. Изланаётган функциянинг бошланғич маълумотларини шакиллантириш.
6. Тенгламалар тизимини шакллантириш.
7. Чегаравий шартлар.

Калит сўзлар: чекли элементлар усули, юза масаласи, эластиклик назарияси, бошланғич маълумотлар, соҳа геометрияси, соҳавий кучлар, юзавий кучлар, изланаётган функциялар, ҳаракатланиш, деформациялар, кучланишлар, Тонти диаграммаси, кинематик муносабатлар, аниқловчи тенглама, мувозанат тенгламаси, кинематик чегаравий шартлар, кучлар

чегаравий шартлари, чекли дифференциаллар усули, ўнг дифференциаллар, чап дифференциаллар, марказий нуқтадаги дифференциал, тор тебраниш тенгламаси, бошланғич шартлар, чегаравий шартлар, ҳисоб схемаси, қийматлар тўри, аниқлик даражаси.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни **чекли дифференциаллар усули** билан ечиш компьютерда дастурлаш ёрдамида осон амалга ошириш мумкин.

Усул $y = y(x)$ функциянинг ҳосиласини аниқлашга асосланган.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Агар $u = u(x, t)$ функция мавжуд бўлса, унда хусусий ҳосила куйидагича бўлади:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}$$

Биз етарлича кичкина Δx дан фойдаланганлигимиз сабабли лимит белгиларини ташлаб юборса бўлади. Унда куйидаги ифодани оламиз:

$$u'_x \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}$$

$$u'_t \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

Қулайлик учун кейинчалик куйидаги белгилашларни киритамиз:

$$u(x, t) = u_i^j$$

$$u(x + \Delta x, t) = u_{i+1}^j$$

$$u(x, t + \Delta t) = u_i^{j+1}$$

$$\Delta x = h,$$

$$\Delta t = \tau$$

Унда олдинги ифодани куйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$u'_x \approx \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}, \quad u'_t \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}$$

Бу ифодалар **ўнг** дифференциаллар дейилади. Уларни бошқача ёзиш

ҳам мумкин дейилади.

$$u'_x \approx \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}, \quad u'_t \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} \quad \text{— бу } \textbf{чап} \text{ дифференциаллар}$$

Иккала ифодани кўшиб куйидагини оламиз:

$$2u'_x \approx \frac{u_i^j - u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - u_i^j}{h}$$

$$2u'_t \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1} + u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}$$

Булардан куйидаги келиб чиқади:

$$u'_x \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}$$

$$u'_t \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\tau}$$

Иккала ифода марказий нуктадаги дифференциал деб аталади. Улар ҳосилага юқорироқ аниқда яқинлашади.

Худди шундай иккинчи тартибли дифференциалларни олиш мумкин:

$$u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}$$

$$u''_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тор тебраниш тенгламасини ёзиб оламиз:

Қўшимча шартлар қуйидаги қўринишда берилади:

$$u|_{x=0} = f_1(t), u|_{x=l} = f_2(t), u|_{t=0} = g_1(x), u_t|_{t=0} = g_2(x),$$

бу ерда $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - торнинг чегаралардаги (қотириш нукталаридаги) вақтга боғлиқ ҳолати; $g_1(x)$ ва $g_2(x)$ - торнинг бошланғич вақтдаги ҳолати ва тезлиги, ундан қуйидаги формулани қўллаган ҳолда (Эйлер усулига қаранг) торнинг кейинги вақтдаги ҳолатини аниқлашимиз мумкин бўлади:

Функция қийматлари тўри

$$u_i^{j+1} = \tau \cdot g_2(x) + u_i^j.$$

Ҳисобда торни дискретизацияси қўлланилади (у узунлиги h бўлган бир хил ораликларга бўлинади) (расмга қаранг).

Функциянинг қолган x ва t қийматларини тор тебраниш тенгламасидан ҳисоблаш мумкин:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

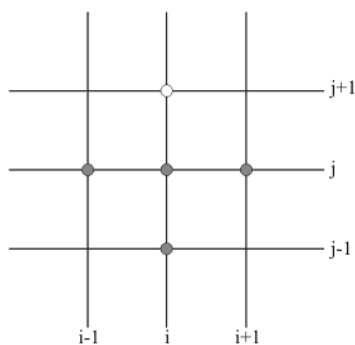
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} = \frac{\tau^2 a^2}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + 2u_i^j - u_i^{j-1}$$

Шундай қилиб, функциянинг аввалги x ва t даги қийматларидан фойдаланиб, ихтиёрий x ва t учун қийматини олиш мумкин бўлган схемага эга бўлдик. Бу схемани 11.1 расмдаги ҳисоб тўри орқали тасаввур қилса бўлади:



11.1. расм. Ҳисоб тўри.

Ушбу усул тақрибий ечимни беради, унинг аниқлик даражаси $\Theta(\tau^2 + h^2)$. Етарлича аниқ натижалар олиш учун қуйидаги оралиқларни қўллаш керак:

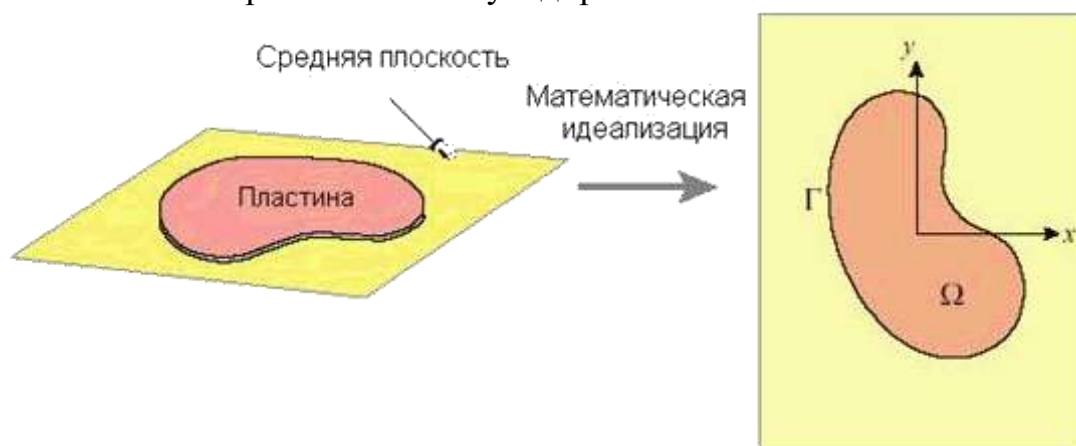
$$h < 0.1 \text{ ва } \tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Чекли элементлар усули.

Эластиклик назариясининг юза масаласи туташ муҳит механикасининг кўпўлчовли масалаларини ечиш учун қўллаш қулай бўлган ЧЭУ алгоритмини намоиш этиш учун кўпроқ мос келувчи мисол ҳисобланади.

11.2-расмда кўрсатилган Γ билан чегараланган Ω соҳасида берилган эластиклик назариясининг икки ўлчовли чегаравий масаласи бўлган пластинининг кучланганлик ҳолатини математик моделини кўриб чиқамиз.

Бошланғич тенгламага кирувчи барча асосий ўзгарувчилар икки x ва y ўзгарувчиларнинг функцияларини акс эттиради ва пластина қалинлиги бўйича ўртачалаштирилган деб ҳисобланади. Масалан, Ω соҳасида таъсир этадиган ва туташ муҳит нуқталарини ҳаракат тенгламасини ўнг томонига кирган ташқи кучлар, берилган ҳажмий кучларнинг пластина қалинлиги бўйича олинган интегралнинг айнан ўзидир.



11.2 расм. Пластинани текис кучланган ҳолатдаги математик модели.

Бошланғич маълумотлар ўз ичига қуйидаги объектларни олади:

Соҳа геометрияси. Жисмнинг геометрияси 11.2- расмда кўрсатилганидек Γ чегарали Ω соҳага эга.

Пластина қалинлиги. Кўп холларда конструктив элемент сифатида қўлланиладиган пластиналар ўзгармас қалинликга эга бўлади. Агар пластинанинг қалинлиги ўзгарса, унда қалинлик иккита фазовий координаталар $h=h(x,y)$ функцияси бўлади, бунда текис-кучланиш ҳолати сақланиши учун қалинлик ўзгариши етарлича секин бўлиши керак

Пластина материали. Материал хусусиятлари ўзаро аниқланадиган муносабат ёрдамида берилади. Айни маърузада биз чизиқли эластик, лекин изотроп бўлиши шарт бўлмаган материални кўриб чиқамиз,.

Ω соҳасига таъсир қилувчи кучлар. “Соҳавий” кучлар Ω соҳасининг ички нуқталарига таъсир кўрсатади. Умумий ҳолатда улар икки типда бўлиши мумкин. Биринчидан, пластинанинг бирлик ҳажмига таъсир қилувчи кучлар сифатида аниқланадиган стандарт ҳажмий кучлар, масалан, жисм оғирлиги. Иккинчидан, пластинанинг тепа ва пастки юзаларига уринма орқали таъсир қилувчи специфик соҳавий кучлар, масалан, пластинанинг бошқа жисмга нисбатан таъсири натижасида пайдо бўлиши мумкин бўлган ишқаланиш кучлари. Бу кучлар пластинанинг ўрта юзасига келтирилган бўлиши керак.

Берилган юза кучлари. Юза кучлари – бу Γ чегара нуқталарига таъсир қилувчи маълум кучлардир. Кўпинча улар юза кучланиши деб аталади. Техник масалаларни ечишда бу кучларнинг ўлчов бирлигига эътибор бериш керак, чунки улар юза бирлигидаги куч сифатида ёки узунлик бирлигидаги куч сифатида берилган бўлиши мумкин.

Кинематик чегаравий шартлар. Кинематик чегаравий шартлар пластинани мустаҳкамлаш йўллари беради. Соҳа чегарасидаги нуқталар бир ёки икки йўналишларда мустаҳкамланган бўлиши мумкин. Қўшимча тарзда симметрия ёки антисимметрия шартлари берилган бўлиши мумкин. Агар кинематик чегаравий шартлар берилмаган бўлса, унда бундай чегаравий шартлар эркин чегаравий шартлар деб аталади.

Изланаётган функциялар. Механика масалаларида асосий ноаниқ ўзгарувчилар ҳаракатланиш, деформация ва кучланиш майдонлари ҳисобланади. Олдин қилинган тахминларга мувофиқ барча изланаётган физик ўзгарувчилар нормал z координатасига боғлиқ эмас ва фақатгина x ва y координаталари функцияси ҳисобланади.

Ҳаракатланиш. Ҳаракатланиш вектори иккита компоненталардан ташкил топади:

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Ҳаракатланишнинг $u_z(x,y,z)$ нормал компоненти умумий ҳолатда Пуассон коэффициенти эффекти туфайли нолдан фарқли бўлади ва z га боғлиқ бўлади. Бироқ бу ҳаракатланиш масаланинг ташкил этувчи тенгламаларига кирмайди ва алоҳида аниқланган асосий компоненталар бўйича ҳисобланиши мумкин.

Деформациялар. Текисликда ётувчи деформациялар учта бир бирига боғлиқ бўлмаган компоненталар e_{xx}, e_{yy} ва e_{xy} билан аниқланадиган тензорни шакллантиради. Матрица кўринишидаги чекли элементлар тенгламаларини ифодалаш қулай бўлиши учун деформация тензори компоненталарини уч компонентли “деформациялар вектори” кўринишида такдим этилади:

$$\mathbf{e}(x, y) = \begin{bmatrix} e_{xx}(x, y) \\ e_{yy}(x, y) \\ 2e_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

Икки баробар кўпайган e_{xy} компонентаси $\gamma_{xy} = 2e_{xy}$ силжиш деформациясини акс эттиради ва деформация энергияси ифодаси ёзилишини қисқартириш учун ишлатилади. Қолган силжиш e_{xz} ва e_{yz} компоненталари дастлабки фаразларга мувофиқ нолга тенг. Пуассон эффекти туфайли e_{zz} нормал компонента одатда нолга тенг эмас. Бироқ, u_z ҳаракатланиш сингари деформациянинг нормал компонентаси ташкил этувчи тенгламага номаълум сифатида кирмайди. Нормал кучланиш $\sigma_{zz}e_{zz}$ дастлабки фаразлар бўйича нолга тенг бўлмаганлиги учун деформация энергияси ифодасида σ_{zz} кўпайтма нолга айланади.

Кучланиш. Кучланиш тензори ҳам пластина юзасида ётувчи учта σ_{xx}, σ_{yy} ва σ_{xy} компоненталардан орқали аниқланади. Деформациялар ҳолати каби чекли элементлар тенгламасини матрица кўринишида такдим этиш қулай бўлиши учун уч компонентали “кучланиш векторини” шакллантирамиз:

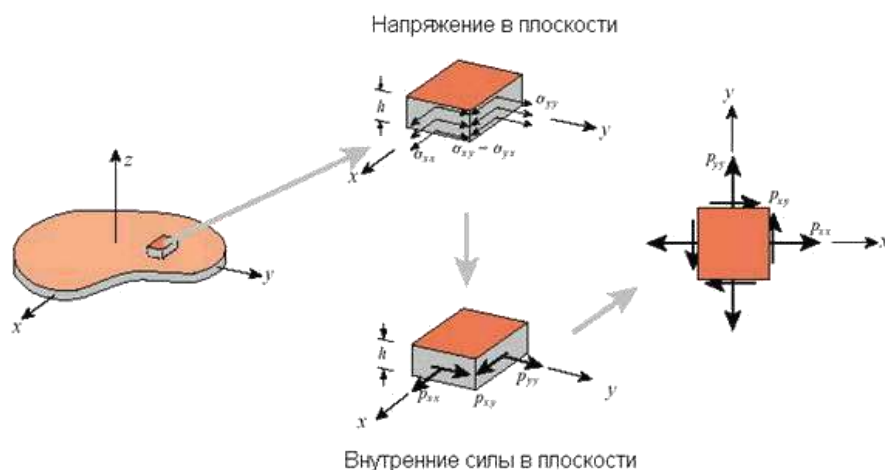
$$\mathbf{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Кучланиш тензорини қолган уч компонентаси σ_{zz}, σ_{xz} ва σ_{yz} текис кучланиш ҳолати тарифига мувофиқ нолга тенг.

Ҳажмий ички кучлар. Пластинанинг қалинлиги бўйича кучланишни интеграллаш йўли билан олиниши мумкин. z координатаси бўйича кучланишларни бир жинсли тақсимланиш ҳолатида тензор ҳосил қилувчи ушбу кучлар қуйидаги формула бўйича осон ҳисобланиши мумкин:

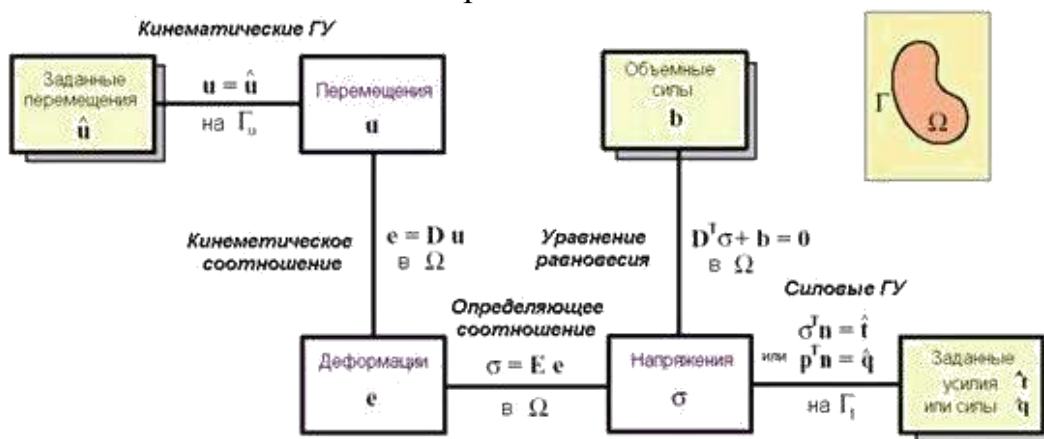
$$p_{xx} = \sigma_{xx}h, \quad p_{yy} = \sigma_{yy}h, \quad p_{xy} = \sigma_{xy}h. \quad (11.4)$$

Адабиётларда бундай кучлар кўпинча мембрана кучлари деб аталади (11.3 расм.)



11.3. расм. Мембрананинг ихтиёрий элементиға таъсир этувчи ички кучлар ва кучланишлар.

Классик чизиқли эластиклик назариясининг ташкил этувчи тенгламалар тизими 11.4 расмда Тонти диаграммаси деб аталувчи кўринишдаги схема шаклида келтирилган.



11.4 расм. Эластиклик назариясининг Тонти диаграммаси кўринишдаги чизиқли классик тенгламаларга рухсат этувчи тизими.

Эластиклик назариясининг ташкил этувчи тенгламалар тизими учта номаълум ҳаракатланиш, деформация ва кучланиш физик майдонларига нисбатан уч гуруҳ тенгламалардан ташкил топади: кинематик боғланишлар, аниқловчи тенгламалар ва жисм соҳасидаги мувозанат тенгламалари. Жисмда бошланғич кучланишлар бўлмаганида ушбу тенгламалар тизими куйидаги символли-матрица кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad (11.5a)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} \quad (11.56)$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.5b)$$

Ҳаракатланиш, деформацияланиш ва кучланишларнинг киритилган матрицали векторлардан ташқари мувозанат тенгламасига кирувчи b_x , b_y компонентаи ҳажмий кучлар векторини, жисм нуқтасида кучланиш ва деформацияларни боғловчи E_{ij} компонентаи эластик модулар матрицасини ва фазовий координаталар бўйича хусусий ҳосилалардан ташкил топган иккита символли матрицани ўз таркибига олади. Кинематик боғланишлар ва мувозанат тенгламасига кирувчи символли матрицалар ўтказиш (транспонировлаш) операциясигача мос келишини таъкидлаб ўтамыз.

(11.5) тизимни матрица кўринишда қуйидагича тақдим этиш мумкин:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e}, \quad \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (11.6)$$

бу ерда $\mathbf{E}$ – эластик модуларнинг симметрик матрицаси, $\mathbf{D}$ – хусусий ҳосилалардан ташкил топган символли матрица, $\mathbf{b}$ – ҳажмий кучларнинг матрицали вектори.

Келтирилган (11.6) тенгламалар тизими адабиётларда тез-тез қўлланиладиган эластиклик назариясининг тўлиқ тенгламалар тизимини координатаи ёки тензорли ёзилиш шаклидан бир канча фарқ қилишини айтиб ўтамыз. Ушбу ифоданинг афзаллиги шундан иборатки барча тенгламалар чекли элементлар усули муносабатларини келтириб чиқариш учун қулай бўлган матрица кўринишида ёзиб бўлинган ҳисобланади.

Агар пластина материали изотроп бўлса, эластиклик назариясига асосан эластиклик модулар матрицаси $\mathbf{E}$ компонентаи материалнинг техник константлари: эластиклик модули E , Пуассон коэффиценти ν ва силжиш модули G орқали ифодаланиши мумкин:

$$E_{11} = E_{22} = E / (1 - \nu^2),$$

$$E_{33} = \frac{1}{2} E / (1 + \nu) = G,$$

$$E_{12} = \nu E_{11},$$

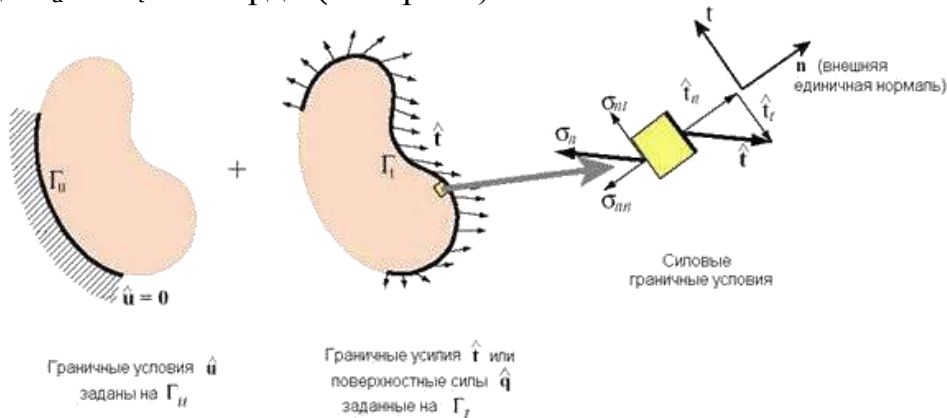
$$E_{13} = E_{23} = 0.$$

Бунда санаб ўтилган константлардан фақатгина икkitаси боғлиқмас эканлигини эслатиб ўтамыз. Эластиклик модули E , Пуассон коэффиценти ν ва силжиш модулини G ўзаро боғловчи формула қуйидагича кўринишга эга:

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Чегаравий шартлар.

Эластиклик назариясининг классик масалаларида Γ юзада берилган чегаравий шартлар иккита турда бўлиши мумкин: кинематик чегаравий шартлар ва кучли чегаравий шартлар. Ҳар бир турдаги чегаравий шартлар юзанинг ўзига тегишли қисмида берилган деб фараз қилинади, яъни мос равишда Γ_u ва Γ_t юзаларди (11.5 расм).



11.5 расм. Эластиклик назариясининг юзавий масаласидаги кинематик ва кучли чегаравий шартлар.

Γ_u юза қисмида кинематик чегаравий шартлар берилади ва улар қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}. \quad (11.7)$$

(11.7) ифодани ўнг қисми юза нуқталарини берилган ҳаракатларини акс эттиради. Кўп ҳолларда ушбу ҳаракатлар нолга тенг. Масалан, агар юзанинг қисми 13.4 расмда кўрсатилгандек қандайдир ҳолда маҳкамланган бўлса.

Кучли чегаравий шартлар Γ_t юза қисмида берилади ва қуйидаги шаклда ёзилиши мумкин:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{t}}. \quad (11.8)$$

(11.8) формуланинг ўнг қисми берилган юза кучлари ёки юза кучланишларини, чап қисми бўлса – n нормалли юзада кучланиш векторини акс эттиради.

Кучли чегаравий шартларни боўқача ёзилиш шакли қуйидагича бўлиши мумкин:

$$\mathbf{p}_n = \hat{\mathbf{q}}. \quad (11.9)$$

бу ерда $\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{h}$ ва $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{t}} \mathbf{h}$.

n нормалли юзада кучланишлар вектори Коши формуласига мувофиқ юза нуқтасидаги эластиклик тензори ва юзага ташқи нормал компоненталари орқали аниқланади:

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x & + & \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy}n_x & + & \sigma_{yy}n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (11.10)$$

бу ерда n_x ва n_y - $\mathbf{n}^{(e)}$ юзадаги бирлик нормални декарт координаталарини билдиради (йўналтирувчи косинуслар). Шундай қилиб (11.8) қуйидаги қуйидаги иккита скаляр муносабатлар кўринишида ёзилиши мумкин: $\hat{t}_x = \sigma_{nx}$ ва $\hat{t}_y = \sigma_{ny}$.

Баъзи ҳолларда (11.8) шартни нормал $\mathbf{n} < \mathbf{B} < \mathbf{i} >$ ва $\mathbf{t}$ га ортогоналлардан ташкил қилинган локал координаталар тизимида ёзиш қулай бўлади:

$$\sigma_{nn} = \hat{t}_n, \quad \sigma_{nt} = \hat{t}_t \quad (11.11)$$

бу ерда локал координаталар тизимига мос келувчи кучланиш компоненталари қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{nx}n_x + \sigma_{ny}n_y \quad \sigma_{nt} = -\sigma_{nx}n_y + \sigma_{ny}n_x$$

12-мәғруза. Чекли элементлар усулига асосланган замонавий алгоритм дастурий комплекслар

Режа:

1. CAD/CAM/CAE-тизимлари.
2. Автоматлаштирилган лойиҳалаш тизими (АЛТ) дастурий таъминотининг тузилиши ва унинг функционал имкониятлари.
3. Unigraphics тизими.

4. Ўрта даражали АЛТ.
5. Autodesk компаниясининг машинасозлик АЛТнинг дастурий таъминоти.
6. Компас ва T-Flex CAD тизимлари.

Калим сўзлар: юқори даражали тизимлар, CAD, CAE, CAM, Unigraphics тизими, CATIA, Pro/Engineer, I-DEAS, CADD5, EUCLID3, конструкторлик лойиҳалаш, саноат дизайни, функционал моделлаштириш, технологик лойиҳалаш, маълумотлар алмашиш, ўрта даражали тизимлар, AutoCAD, Mechanical Desktop, Inventor, Cosmos/DesignSTAR, Dynamic Designer Motion, Inventor Solid Edge, Cosmos/Works, Solid Works, Компас, T-Flex

CAD/CAM/CAE-юқори даражали тизимлар соҳасида *Unigraphics (EDS компанияси), CATIA (Dessault Systems), Pro/Engineer (PTC)* лар етакчилик қилади. Шунингдек, *I-DEAS (EDS), CADD5 (PTC) и EUCLID3 (Matra Datavision)* тизимлар қўлланилишда давом этмоқда.

Дастлаб АЛТ дастурий таъминоти тузилишини ва уни Pro/Engineer дастурий комплекс мисолида функционал имкониятларини кўриб чиқамиз. Комплексида саноат дизайни, функционал моделлаштириш, технологик лойиҳалаш, маълумотлар алмашиш, механик объектларни конструкторлик лойиҳалаш дастурлар гуруҳларига бўлинган ўнлаб дастурлар (моделлар) ўзида мужассам этади.

Конструкторлик лойиҳалашнинг асосий модуллари (CAD тизим ости) каттик жисм ва юзаларни моделлаштириш, шаклларнинг асосий элементларидан (ШАЭ) конструкцияларни синтезлаш, параметрлаш ва асоциативликни қўллаб-қувватлаш, проекцияли чизмачилик ва ўлчам ҳамда қўнимлар қўйилган чизмаларни яратиш учун мўлжалланган. Фойдаланувчи ШАЭ кутубхонасини оригинал моделлар билан тўлдириб бориши мумкин. Мураккаб шаклларнинг уч ўлчовли модулларини юза контурни нормал бўйлаб тортиш (чизиш) билан, уни фазовий эгри чизик бўйлаб тортиш билан, контурни берилган ўқ атрофида айлантириш билан, берилган бир нечта кесимлар ўртасида боғлаш билан синтезлаш мумкин. Йиғмаларни синтезлаш уларни чақириш ёки кутубхона элементларига мурожаат қилиш, уларни модификациялаш, янги деталларни ишлаб чиқиш орқали бажарилади. Йиғма деталларни фазода керакли кўринишга мослаш мумкин. Кейин ассоциатив алоқаларни (бириктиришни) киритиш керак. Конструкторлик лойиҳалашнинг қўшимча моделлари кенкретроқ, шу билан бирга ихтисослашган бўлади. Бундай модулларга қуйидагилар мисол бўла олади: композицион материалли панелларни конструкциялаш модуллари, штамп ва куйма пресс-шаклларни, қувурлар тизимини, пайванд конструкцияларини, электр кабеллари тармоқлашни ишлаб чиқиш.

Функционал моделлаштириш модуллари (CAE тизим ости) чекли элементлар таҳлили (чекли элементлар сеткасини киритиш, натижа таҳлилини кўриш) дастурида конструкцияларнинг иссиқлик ҳолатини таҳлил

килиш, тебранишга бардошлиликни баҳолаш ва бошқалар учун ҳам препроцессорлар ва ҳам постпроцессорлар сифатида ишлатилади.

Технологик лойиҳалашнинг асосий модуллари (САМ тизим ости) фрезор, токар, электроэрозияли ишловларнинг технологик жараёнларини моделлаштириш ва ЧПУли қурилмаларнинг бошқарув тизими учун постпроцессорлар ишлаб чиқиш учун хизмат қилади.

Маълумотлар алмашинув модули (маълумотлар форматини конвертациялаш) бошқа CAD/CAM/CAE - тизимларга маълумотларни импорт ва экспорт қилиш имкониятларини таъминлашлари керак.

Unigraphics тизими – геометрик моделлаштириш ва конструкторлик-технологик лойиҳалашнинг, шу билан бирга катта йиғмаларни яратиш, мустахкамликга ҳисоблаш ва конструкторлик ҳужжатларни тайёрлашнинг универсал тизими. Тизим кўп модулли. Конструкторлик қисмида (CAD тизим ости) қаттиқ жисмларни конструкторлаш, юзаларнинг сплайн моделлари асосида геометрик моделлаштириш, 3D модел бўйича чизмалар яратиш, ассоциативликни ҳисобга олган ҳолда йиғмаларни лойиҳалаш (шунингдек, юзлаб ва минглаб компонентлар билан бирга), қўйимларни таҳлил қилиш ва бошқалар учун воситалар мавжуд. Технологик қисмида (САМ тизим ости) токарлик ва электроэрозияли ишлов бериш, уч ва беш координатали фрезорли ишлов бериш учун инструмент траекториясини анализ ва синтез қилиш, пресс-шакллари ва штампларни лойиҳалаш ва бошқалар учун бошқарув дастурларини ишлаб чиқиш кўзда тутилган. Инженерлик таҳлил учун (CAE тизим ости) тизимда мос келувчи пре ва постпроцессорли ЧЭУдан фойдаланган ҳолда мустахкамлик таҳлили, куч, тезлик ва тезланишларни аниқлаш билан механизмларни кинематик ва динамик таҳлили, пластик массаларни қуйиш жараёнини таҳлили моделлари киритилган.

Юқори даражали САТІА тизими буюртмачига тўлиқ лойиҳалашнинг хусусий АЛТ вариантыни, яъни маҳсулотни концепциясини яратишдан бошлаб, ишлаб чиқаришни технологик қўллаб-қувватлаш ва ишлаб чиқариш ресурсини режалаштиришгача бўлган жараёнларни ишлаб чиқишга имкон беради. Тизимда маҳсулотларнинг тавсифларини юзавий ва қаттиқ жисм сифатидаги 3D моделлаштириш ва оптималлаштиришни амалга ошириш мумкин. Фотореалистик визуализация, моддий макетдан математик моделни тиклаш имкониятлари мавжуд. Тизим масштаблаштирилади. Намунали канфигурациялар, жумладан, мураккаб маҳсулотларни тўлиқ функционал лойиҳалаш учун ва катта бўлмаган ҳамда ўртача корхоналарда бутловчи қисмларни лойиҳалаш учун вариантлар таклиф этилади. Худди шундай имкониятлар бошқа мураккаб АЛТ ларда ҳам амалга оширилган.

Ўрта даражадаги АЛТ ни сотиб олиш сезиларли равишда арзонроққа тушади. *Autodesk, Solid Works Corporation, Ton Системалар, Аскон, Интермех, Bee-Pitron* ва бошқа компанияларнинг АЛТлари кенг тарқалган. Ушбу тизимларнинг барчаси биринчи навбатда Wintel платформасига мўлжалланган ва одатда қуйидаги тизим остиларга эга: чизма

канструкторлик 2D, қаттиқ жисмли 3D моделлаштириш, технологик лойихалаш, лойихалаш маълумотларини бошқариш, инженерлик тахлили, машинасозлик маҳсулотларининг айрим турлари ҳисоблаш, ҳамда намунали конструктив ечимлар кутубхонаси. Бизнинг юртимизда *Autodesk* компаниясининг машинасозлик АЛТ дастурий таминоти кенг тарқалган. *Autodesk* фирмаси конструкторлик лойихалашнинг замонавий дастурий тизимларнинг бир қаторини таклиф этади, улар орасида кўпроқ ривожланган деб *AutoCAD*, *Mechanical Desktop* u *Inventor* каби тизимларни ҳисобланади. *Mechanical Desktop* тизими 3D – моделлаштириш, ассоциатив конструкторлаш, интернет тармоғида тақсимланган лойихалаш, 2D – ҳужжатларни расмийлаштириш учун мўлжалланган. У ACIS графикли ядрога қурилган. Ишчи гуруҳларни созлаш, конфигурациялаш ва бошқариш воситаларига эга CAD–менеджер бошқарув дастури мавжуд.

Inventor тизими қаттиқ жисмли параметрик лойихалашга, юзлаб ва минглаб деталли катта йиғмаларни яратишга мўлжалланган, ривожланган стандарт элементлар кутубхонаси эга. Тизим асосида ACIS график ядро ётади. 3D – моделларни сиқиб чиқариш, айлантириш, қирқим бўйича, траектория бўйича қуриш мумкин. 3D моделдан 2D чизма ва материаллар спецификациясини олиш мумкин. Лойиҳа устида коллектив билан ишлаш қўллаб-қувватланади, жумладан, бир йиғма чегарасида ҳам. Йиғмадаги қўшни деталларнинг ҳолатини ҳисобга олган ҳолда деталлар ўлчамларини, кинематикасини автоматик тарзда текшириш кўзда тутилган.

Конструкторлар ишининг сезиларли даражадаги яхшиланиши ассоциатив боғланишлар операцияларнинг параметрлар ва тенгламалар билан ифодаланиши билан эмас, балки компоненталарнинг ҳолати ва шаклини бевосита аниқлаш билан берилиши орқали таъминланади.

Autodesk маҳсулотлари қаторига автоматлаштирилган лойихалашнинг бошқа бир қатор дастурлари киради, жумладан, *Autodesk Data Exchange* – маълумотларни DXF ва SAT форматларидан *STEP*, *IGES*, *VDA-FS* каби форматларга ўзаро ўтказишни таъминлайдиган конверторлар тўплами.

Амалий дастурий таъминотни ишлаб чиқарувчи *Mechanical Applications Initiative* ассоциациясига қирувчи компаниялар томонидан *Autodesk* компанияси дастурлари билан интеграллашган бир қатор маҳсулотлар яратилган. Уларнинг орасида механизмларни динамикаси ва кинематикаси ҳисоби учун мўлжалланган *Dynamic Designer Motion* (*Mechanical Dynamic* компанияси) дастурий таъминотини алоҳида такидлаш керак. Элементлар таркибига – шарнирлар, пружиналар, қуруқ ишқаланиш, зарбали юкламалар моделлари киради. *Dynamic Designer Motion* дастури *Cosmos* чекли элемент тахлили дастурлар гуруҳи билан алоқаларга эга. Масалан, *Cosmos/DesignSTAR* дастурини ҳам автоном шаклда, ҳам *Inventor Solid Edge* дастурлари билан, *Cosmos/Works* дастурини бўлса – *Solid Works* дастури билан биргаликда ишлатиш мумкин. Ушбу дастурлар ёрдамида деталларни деформацияланиш ҳолати, стационар ва стационар бўлмаган иссиқлик жараёнлари, газ ва суюқлик динамикаси, паст частотали

электромагнит майдонлари, конструкцияни шахсий тебранишлар частотасини аниқлаш бўйича таҳлиллар олиб борилади. Механик конструкцияларни қаттиқ жисмли параметрик моделлаштирувчи Solid Works (*Solid Works Corporation* компанияси) тизими Unigraphics Solutionда ишлаб чиқилган Parasolid график ядросида қурилган. Конструкциянинг синтези таянч жисмнинг контурини сиқиб чиқариш, тортиш ёки айлантириш туридаги операция ёрдамида, кейинчалик у ёки бу жисмни қўшиш ва (ёки) олиб ташлаб қуриш билан бошланади. Юзаларни аналитик ёки сплайн кўринишидаги ёритилиши билан чегаравий моделлаштириш (B-representation) қўлланилади. Йиғмаларни ШАЭ асосида лойиҳалашда деталларни ҳар хил ўзаро жойлашиш шартларини, тирқишларни автоматик назорат қилиш ва деталларни ўзаро кесишмаслигини бериш мумкин. Бошқа тизимлар билан боғланиш учун IGES, DXF, DWG интерфейслар кўзда тутилган. Ўрта даражали АЛТ орасида россиялик ишлаб чиқарувчилар маҳсулотлари ҳам республикамизда кенг тарқалган – булар авваламбор *Компас* тизими (Аскон компанияси) ва *T-flex CAD* (Топ системалар). Компас тизимида уч ўлчовли қаттиқ жисмли моделлаштириш учун оригинал график ядро ишлатилади. Конструкция синтези ҳажмий примитивлар асосида мантикий операциялар ёрдамида амалга оширилади, деталлар моделлари сиқиб чиқариш ёки белгиланган қирқимларни бўйича қурилган контурларни айлантириш билан шакллантирилади. Унда конструкция параметрлари орасидаги боғланишларни бериш, масса-инерция тавсифларини ҳисоблаш мумкин. Компас-График тизим ости ёрдамида лойиҳа-конструкторлик ҳужжатларини, жумладан, ҳар хил спецификациялашни ишлаб чиқиш бажарилади. Намуна деталлар ва уларнинг график кўриниши тўғрисидаги маълумотлар кутубхонаси ҳамда махсус мўлжалланган дастурлар мавжуд (айланувчи жисмлар, пружиналар, метал конструкциялари, қувурлар, штамп ускуналарини лойиҳалаш, чайқалиш подшипникларини танлаш ва бошқалар). Технологик жараёнларни лойиҳалаш *Компас-Автопроект* тизим ости ёрдамида бажарилади. Ҳажмли ишловларни дастурлаш ЧПУли дастгоҳларда – *ГЕММА-3D* тизим ости ёрдамида бажарилади. Лойиҳалаш маълумотларини бошқариш билан боғлиқ бир қатор керакли функциялар *Компас-менеджер* тизим остига юкланган.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Бабаков И.М. Теория колебания: учеб. пособие. – Н.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. -М.: Физматлит. 2004. –400 с.
3. Моделирование производственных процессов автомобильного транспорта. Учебное пособие / Владим. гос. ун-т; Сост. С.И. Коновалов, С.А. Максимов, В.В. Савин. Владимир, 2005. - 244 с.

4. Поршнев В.С. MATLAB 7. Основы работы и программирования. Учебник. –М.: ООО «Бином-Пресс», 2011. -320 с.
5. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
6. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.; *Приложения*: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова. — М.: МФТИ, 2010. — 362 с.
7. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с.
8. Митягин Н.П., Пирогов С.П. Метод обобщенных координат: Учебное пособие.-Тюмень: ТюмГНГУ, 2003.-47 с.
9. Шермухамедов А.А. «Динамика и прочность автомобиля». Ташкент, ТАДИ, 2009. -164с.