ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSC.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ДЖАЙКОВ ГАФУР МУРАТБАЕВИЧ

ОБЪЕКТЛАРНИНГ ИЧКИ СТРУКТУРАЛАРИНИ ИНТЕГРАЛ БЕРИЛГАНЛАР БЎЙИЧА ТИКЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ МАХСУС ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР ОИЛАСИДА МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07- Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ -2019

УДК: 517.9

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSC.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ДЖАЙКОВ ГАФУР МУРАТБАЕВИЧ

ОБЪЕКТЛАРНИНГ ИЧКИ СТРУКТУРАЛАРИНИ ИНТЕГРАЛ БЕРИЛГАНЛАР БЎЙИЧА ТИКЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ МАХСУС ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР ОИЛАСИДА МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07- Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ -2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.1.PhD/FM300 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Утеулиев Ниетбай Утеулиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Абдурахимов Бахтиёр Файзиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Фаязов Кудратилло Садридинович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Термиз давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил __ ________ соат __ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz.)

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил ___ _________ куни тарқатилди.
(2018 йил 28 декабрдаги 8 рақамли реестр баённомаси).

А.Р.Марахимов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р.Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

М.Арипов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий – амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда, объектларни локализация қилиш, уларнинг геометрик характеристикаларини ўрганиш учун тасвир кўринишида тиклаш масалаларига келтирилади. Функцияларни берилган интеграл характеристикалари асосида тиклаш ва уларнинг математик моделлари амалий математика, ҳисоблаш математикаси, математик моделлаштириш ва объектга йўналтирилган дастурлаш каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Объектларнинг ички структураларини қайта тиклаш усуллари оралиқдан туриб унга зиён етказмаган ҳолда объект ички структураси ҳақидаги яширин маълумотларни олишга хизмат қилади. Шу сабабли тиббиётда томографик берилганларга асосланиб бемор органларининг ички структураларини махсус эгри чизиқлар оиласида тиклаш алгоритмлари ва амалий дастурлар мажмуасини яратиш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда бир қатор амалий масалаларни ечишда учрайдиган объектларнинг ички структураларини тасвир кўринишида тиклашнинг интеграл геометрия усулларини ишлаб чиқиш амалий математиканинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Бунда Фурье анализ усуларига асосланиб олинган аналитик формулалар асосида қайта тиклаш жараёнини амалга ошириш муҳим аҳамият касб этмоқда. Шу сабабли интеграл берилганларга асосланиб махсус эгри чизиқлар оиласида турғунлиги юқори бўлган объектларнинг ички структураларини тасвир кўринишида қайта тиклаш алгоритмларини қуриш, кенг доирадаги фойдаланувчиларга мўлжалланган қулай интерфейсга эга дастурлар мажмуасини яратиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган амалий математиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, тиббиёт ва геофизика соҳаларида қўлланиладиган интеграл геометрия масалаларини тадқиқ қилиш, Фурье анализ ва ҳисоблаш математикаси усулларини ҳисобга олган ҳолда, объектларнинг ички структураларини интеграл характеристикалари бўйича тасвир кўринишида қайта тиклаш жараёнларини автоматик равишда бошқариш бўйича муҳим натижалар олинди. «Математик физика, математик статистика, амалий математика ва математик моделлаштириш» каби фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Ушбу қарор ижросини таъминлашда объектнинг ички структураларини тиклашда интеграл геометрия усулларига асосланган математик моделлаштириш назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологияларни ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Функцияларни берилган интеграл характеристикалари бўйича тиклаш бу интеграл геометрия масалаларининг бир бўлими бўлиб ҳисобланади. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин интеграл геометрия асосларини ёритиш ва муаммоларини ҳал этишга йўналтирилган биринчи монографияларнинг муаллифлари бўлган. Умумий кўринишда Вольтерра типидаги интеграл геометриянинг корректмас масалалари М.М. Лаврентьев А.Л. Бухгейм ишларида қаралган. Кейинчалик интеграл геометрия масалалари ва уларнинг аналитик ечимларини топиш бўйича В.К. Иванов, Ю.Е. Аниконов, Г.И. Плаксин, С.В. Успенский, А.А. Хачатуров, С.И. Кабанихин, В.Г. Романов, Ю.Г. Решетняк, И.О. Костелянец, В.Г. Яхно, Ф. Йон, А.Х. Бегматов, S. Helgason ва бошқалар ишларида ёритилган.

Фотоакустик, термоакустик, сейсмик, ультратовушли томографияда, нуклидли диагностика ва тиббиётнинг бошқа соҳаларида вужудга келадиган масалаларни математик моделлаштиришда юзага келадиган интеграл геометрия масалаларини аналитик ечимларини топиш бўйича Natterer F., Quinto E. T., Radon J., Funk P., Agranovsky M.L., Louis A.K., Rim Gouia-Zarrad, Gaik Ambartsoumian ва бошқа қатор олимлар ўз ишларида келтирган. Радон алмаштириши компьютер томографияси ва бошқа масалан тасвирни қайта ишлаш, уларни идентификация қилиш соҳаларида тадбиқ қилинди.

Ўзбекистонда интеграл геометрия ва объектларнинг ички структураларини қайта тиклаш масалалари буйича А.Х. Бегматов, З.Х. Очилов, К.С. Фаёзов, Н.У. Утеулиев ва бошқалар шуғулланган. Жуфт ўлчамли фазода конуслар оиласида интеграл берилганлар бўйича функцияларни тиклаш бўйича бир қатор илмий ишлар А.Х. Бегматов ва унинг шогирдлари томонидан амалга оширилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг илмий-тадқиқот ишлари режалари асосида «Амалий математика масалаларини ечишнинг алгоритмлари ва дастурий таъминоти»га мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади. Объектларнинг ички структурасини тиклаш алгоритмларини такомиллашттириш, сонли ечиш алгоритмларини қуриш ва дастурий таъминотини яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан ташкил топган:

синиқ чизиқлар оиласида объектларнинг ички структурасини интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг математик моделини такомиллаштириш ва ҳисоблаш алгоритмини қуриш;

ярим айланалар оиласида функцияни интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг математик моделини қуриш;

кесмалар оиласида объектларнинг ички структурасини аниқлашнинг математик моделини такомиллаштириш;

Тихонов регуляризацияси ёрдамида шовқинга турғунли объектларнинг ички структурасини тикловчи ҳисоблаш алгоритмини қуриш;

фойдаланувчига қулай интерфейсга эга кенг доирадаги фойдаланувчилар учун мўлжалланган объектларнинг ички структураларини интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг дастурий таъминотини яратиш.

Тадқиқотнинг объекти интеграл берилганлар, белгили математик фантомлар, алгоритмик ва дастурий таъминотлардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети объектнинг ички структурасини тиклаш жараёнидаги математик моделлар ҳамда мос алгоритмик ва дастурий таъминотни яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда корректмас масалалар назарияси, интеграл тенгламалар, функционал анализ, ҳисоблаш усуллари, математик моделлаштириш ва объектга йўналтирилган дастурлаш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

синиқ чизиқлар оиласида объектларнинг ички структурасини интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг математик модели такомиллаштирилган ва ҳисоблаш алгоритми қурилган;

ярим айланалар оиласида функцияни интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг математик модели қурилган. А.Н. Тихоновнинг корректмас масалаларнинг регуляризацияси назариясига асосланиб масаланинг аниқ ечимига яқинлашувчи ечимлар кетма-кетлиги қурилган;

кесмалар оиласида объектларнинг ички структурасини аниқлашнинг математик модели такомиллаштирилган. Қўйилган интеграл геометрия масалаласининг кесмалар оиласида Соболев фазосида турғунлик баҳоси олинган;

шовқинли интеграл берилганларга турғунли Тихонов регуляризацияси асосида ҳисоблаш алгоритми қурилган;

фойдаланувчига қулай интерфейсга эга кенг доирадаги фойдаланувчилар учун мўлжалланган объектларнинг ички структурасини интеграл берилганлар бўйича тиклаш масаласини ечишнинг дастурий таъминоти яратилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари синиқ чизиқлар ва кесмалар оилаларида қурилган объектларнинг ички структураларини интеграл берилганлар бўйича тиклаш алгоритмлари тиббиёт соҳасида томографик берилганларга асосланиб беморларнинг ички органлари структурасини тиклашда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Натижалар ва хулосаларнинг ишончлилиги математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги, ишлаб чиқилган алгоритмларнинг таҳлили ва сонли эксперимент ўтказилиши билан тасдиқланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти интеграл геометрия усулларидан фойдаланиб, интеграл берилганлар бўйича функцияларни тиклаш теоремалари исботланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти тиббиёт ва геофизика соҳаларида юзага келадиган интеграл берилганлар бўйича қайта тиклаш масалаларини сонли ечиш учун хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Объектларнинг ички структураларини интеграл берилганлар бўйича тиклаш усулларига оид олинган илмий натижалар асосида:

интеграл берилганлар бўйича объектларнинг ички структурасини тиклашнинг дастурий таъминоти Республика кўп тармоқли тиббиёт марказида томографик берилганлар асосида таҳлилий эксперимент ўтказишда фойдаланилган (Қорақалпоғистон Республикаси Соғлиқни сақлаш вазирлигининг 2018 йил 23 ноябрдаги 01/5280-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши тасвирларни қайта тиклаш орқали касалликнинг бошланғич босқичида оптимал даволаш усулларини аниқлашга имкон берган;

синиқ чизиқлар ва кесмалар оилаларида қурилган объектларнинг ички структураларини интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг ҳисоблаш алгоритмлари Республика кўп тармоқли тиббиёт марказида беморларнинг қорин бўшлиғи тасвирини тиклашда фойдаланилган (Қорақалпоғистон Республикаси Соғлиқни сақлаш вазирлигининг 2018 йил 23 ноябрдаги 01/5280-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши касалликларни эрта аниқлаш, ташхислаш аниқлигини ошириш ва аҳолига кўрсатиладиган тиббий ёрдам сифатини яхшилаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 15 та, жумладан 13 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича 21 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан 3 таси хорижий, 3 таси республика журналларида нашр этилган, 1 та дастурий маҳсулотга гувоҳнома олинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 92 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати, тадқиқотнинг республика фан ва технологияларини ривожлантиришнинг устувор йўналишларига мос келиши асосланган. Диссертация мавзуси бўйича чет элдаги илмий тадқиқотларнинг қисқача маълумоти ва муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсад, вазифалари шакллантирилган, унинг объекти ва предмети кўрсатилган, тадқиқотнинг амалий натижалари ва илмий янгиликлари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг қўлланилиши, диссертация тузилиши ва нашр қилинган илмий ишлар тўғрисида маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи «**Тадқиқот олиб борилаётган объект ички структураси ҳақида маълумот олишнинг тамойиллари**» бобида интеграл геометрия масаласининг қўйилиши, мавзу бўйича тадқиқот ва адабиётларнинг қисқача таҳлили, шунингдек ўрганиш натижаларини муҳокама қилиш учун зарур бўлган асосий тушунчалар келтирилган.

Умумий ҳолда интеграл геометрия масаласи қуйидагича қўйилиши мумкин. Фараз қилайлик, $n-$ўлчовли $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)$ фазода $D-$ соҳаси берилган, $L\left(x\right)-x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ параметрга боғлик бўлган эгри чизиқлар оиласи. $p\left(x,\xi\right)$ вазн функцияси ва $L\left(x\right)$ эгри чизиқлар оиласи бўйича D соҳа ичида $u\left(\xi\right)$ функциясини топиш талаб қилинади.

$$\int\limits_{L(x)} p(x,\xi)u(\xi)ds=\upsilon(x) \tag{1}$$

Ушбу масалани ўрганишда юзага келадиган асосий саволлар қуйидагилар. Биринчи ва асосий савол: берилган $\upsilon(x)$ функцияси $u\left(\xi\right)$ функциясини бир маъноли аниқлайдими? $\upsilon(x)$ функцияси бўйича $u\left(\xi\right)$ функциясини қандай топиш мумкин? Бунинг билан албатта, $p\left(x,\xi\right)$ ва $\upsilon(x)$ функциялари орқали ифода этиладиган $u\left(\xi\right)$ функциясини топиш мақсадга мувофиқ. Ниҳоят масала ечимининг мавжудлик теоремасини исботлаш учун $\upsilon(x)$ функция тегишли синфга қандай зарур ва етарли шартлар қўйилиши керак?

(1) тенгламадан кўриниб турганидек интеграл геометрия масаласи биринчи турдаги махсус интеграл тенгламани ечиш масаласи ҳисобланади. Интеграл геометрия масалалари ичида юқори даражада турғун бўлмаган масалалар мавжуд. Шу муносабат билан масаланинг турғунлик баҳосини олиш катта аҳамият касб этади. Бошқа томондан $p\left(x,\xi\right)$ ва $\upsilon(x)$ функциялари бўйича $u\left(\xi\right)$ функциясини тиклаш масаласи умумий назарияга асосланган махсус ҳисоблаш алгоритмларини яратишни талаб этади.

Шу муносабат билан интеграл геометрия масалалари учун регуляризатор алгоритмларни қуриш мақсадга мувофиқ.

Диссертациянинг «**Махсус эгри чизиқлар оиласида объектларнинг ички структураларини интеграл берилганлар бўйича тиклаш масалаларини математик моделлаштириш**» деб номланган иккинчи бобида берилган вазн функцияси билан ярим айланалар, синиқ чизиқлар ва кесмалар оилаларида функцияни интеграл берилганлар бўйича тиклаш усулларини ишлаб чиқиш қаралган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$(x,y)\in R^2,\quad (\xi,\eta)\in R^2,\quad \lambda\in R^1,\quad \mu\in R^1,$$

$$L_H=\left\{(x,y):\ x\in R^1,\ y\in[0,H],\ H<\infty\right\}.$$

$u(x,y)$ функцияга боғлиқ бўлган қуйидаги оператор тенгламани қараймиз:

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} g(x,\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)ds=f(x,y). \qquad (2)$$

бунда $g(x,\xi,y,\eta)-$берилган вазн функцияси, $\Upsilon(x,y)-$эгри чизиқлар оиласи.

Теорема 1. $f(x,y)$ функцияси барча $(x,y)\in L_H$ учун маълум, вазн функцияси $g(x,\xi,y,\eta)=e^{-k(y-\eta)}$ ва $\Upsilon(x,y)$ қуйидаги муносабатлар орқали аниқланади

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):|x-\xi|=(y-\eta)tg\omega,\ 0\le y\le H,\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Унда (2) тенглама ечими $C_0^2(L_H)$ синфида ягона бўлиб $f(x,y)$ орқали қуйидагича ифодаланади

$$u(x,y)=\frac{\cos\omega}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)+k\cdot f(x,y)-tg^2\omega\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y e^{-k(y-\eta)}f(x,\eta)d\eta\right),$$

ва

$$\left\|u(x,y)\right\|_{W_2^{0,1}}\le C_1\left\|f(x,y)\right\|_{W_2^{2,1}}.$$

тенгсизлигини қаноатлантиради. Бунда C_1- доимий.

Теорема 2. $f(x,y)$ функцияси барча $(x,y)\in L_H$ учун маълум, вазн функцияси $g(x,\xi,y,\eta)=sign(x-\xi)e^{-k(y-\eta)}$ ва $\Upsilon(x,y)$ қуйидаги муносабатлар орқали аниқланади

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):|x-\xi|=(y-\eta)tg\omega,\ 0\le y\le H,\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Унда (2) тенглама ечими $C_0^2(L_H)$ синфида ягона бўлиб $f(x,y)$ орқали қуйидагича ифодаланади

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\cos\omega}{2}\left(tg^2\omega\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)-2k\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)-k^2f(x,y)\right),$$

ва

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{1,0}}\le C_2\|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}}.$$

турғунлик тенгсизлигини қаноатлантиради. Бунда C_2- доимий.

Теорема 3. $f(x,y)$ функцияси барча L_H да аниқланган, $g(x,\xi)=1$ ва эгри чизиқлар оиласи қуйидаги ифода орқали берилган

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):(x-\xi)^2+\eta^2=y^2, 0\le\eta\le y\le H\right\}.$$

Унда (2) тенглама ечими $C_0^\infty(L_H)$ синфида ягона ва қуйидаги ечимга эга

$$u_\alpha(x,y)=\frac{1}{2\alpha y\sqrt{\pi^3}}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2-y^2+\eta^2}{4\alpha^2}}\cos\frac{(x-\xi)\sqrt{y^2-\eta^2}}{2\alpha^2}\frac{\eta f(\xi,\eta)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}d\xi d\eta,$$

ва

$$\|u_\alpha(x,y)-u(x,y)\|_{L_2}\le\frac{C_3}{(1+y^2)}\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

тенгсизлигини қаноатлантиради. Бунда C_3- доимий, $\alpha>0-$регуляризация параметри.

Теорема 4. $f(x,y)$ функцияси барча $(x,y)\in L_H$ учун маълум, вазн функцияси $g(x,\xi)=e^{-k(y-\eta)}$ ва $\Upsilon(x,y)$ қуйидаги мунособатлар орқали аниқланади

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta): x-\xi=y-\eta,\ 0\le y\le H\right\}.$$

Унда (2) тенглама ечими узлуксиз дифференциалланувчи финит функциялар синфида ягона бўлиб $f(x,y)$ орқали қуйидагича ифодаланади

$$u(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+k\cdot f(x,y)\right),$$

ва

$$\|u(x,y)\|_{L_2}\le C_4\|f(x,y)\|_{W_2^{1,1}}.$$

тенгсизлигини қаноатлантиради. Бунда C_4- доимий.

Теорема 5. $f(x,y)$ функцияси барча $(x,y)\in L_H$ учун маълум, вазн функцияси $g(x,\xi)=x-\xi$ ва $\Upsilon(x,y)$ қуйидаги мунособатлар орқали аниқланади

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta): x-\xi=y-\eta,\ 0\le y\le H\right\}.$$

Унда (2) тенглама ечими 2 марта узлуксиз дифференциалланувчи финит функциялар синфида ягона бўлиб $f(x,y)$ орқали қуйидагича ифодаланади

$$u(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y),$$

ва

$$\left\|u(x,y)\right\|_{L_2}\leq C_5\left\|f(x,y)\right\|_{W_2^{2,2}}.$$

тенгсизлигини қаноатлантиради. Бунда C_5- доимий.

Диссертациянинг «**Объектларнинг ички структурасини интеграл берилганлар бўйича тиклаш масаласинининг ҳисоблаш алгоритми ва дастурий таъминоти**» бобида тасвирларни интеграл берилганлар бўйича тиклаш ва юқоридаги формулалар орқали моделли мисоллар ечилган.

$u(x,y)$ функциясига нисбатан қуйидаги интеграл тенгламани қараймиз:

$$f(x,y)=\int\limits_{\Upsilon(x,y)}u(\xi,\eta)ds. \qquad (3)$$

бунда $\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):|x-\xi|=y-\eta,\,0\leq y\leq H\right\}$.

(3) тенглама ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y f(x,\eta)d\eta\right).$$

Тўғри бурчакли $D=[a,b]\times[c,d]$ соҳасида тенг ўлчовли тўрни киритамиз. Ушбу соҳада қўйилган масаланинг тақрибий ечимини излаймиз. $[a,b]$ ва $[c,d]$ кесмаларини n_x-1 ва n_y-1 бўлакларга бўламиз (олдимизда $N=n_x=n_y$ белгилашини киритамиз).

$$x_i=a+(i-1)h_x,\; y_j=b+(j-1)h_y,\; i=\overline{1,n_x-1},\; y=\overline{1,n_y-1}.$$

$u(x_i,y_j)$ функцияси тақрибий ечимини u_{ij}^A деб белгилаймиз:

$$u_{ij}^A=\frac{f_{ij+1}-f_{ij-1}}{4\sqrt{2}h_y}-\frac{q_{i+1j}-2q_{ij}+q_{i-1j}}{2\sqrt{2}h_x^2}.$$

бунда $q_{ij}=\int\limits_0^{y_j}f(x_i,\eta)d\eta$. Ушбу интеграл трапеция формуласи орқали сонли ҳисобланди.

Хатоликни

$$err_2=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=2}^{n_x-1}\sum\limits_{j=2}^{n_y-1}\left|u^A(i,j)-u^E(i,j)\right|^2}{\sum\limits_{i=2}^{n_x-1}\sum\limits_{j=2}^{n_y-1}\left|u^E(i,j)\right|^2}}.$$

формуласи орқали ҳисоблаймиз. Бунда u_{ij}^E-аниқ ечим, u_{ij}^A-тақрибий ечим.

Қурилган алгоритмларни тестлаш тиббиёт соҳасида кенг қўлланиладиган «Шепп-Логан» фантомида ўтказилди. Бу виртуал объект бўлиб, бунда $u(x,y)$ функцияси -1 дан 1 гача ўзгариб туради. Ушбу фантом инсон бош суяги модели ҳисобланади. Тарихий жиҳатдан тиббий томография усулларини тестлаш учун хизмат қилган. Шепп-Логан фантоми тиклаш учун жуда мураккаб объект бўлиб, ёпиқ қобиқ ичида жойлашган кесишувчи бир нечта соҳалардан туради.

Ҳисоблашлар натижаларини қуйидаги расмда келтирамиз.

а) б) в)

1-Расм. Синиқ чизиқлар оиласида тасвирни тиклаш а) оригинал фантом б) $N=128$ бўлганда тиклаш в) $N=512$ бўлганда тиклаш

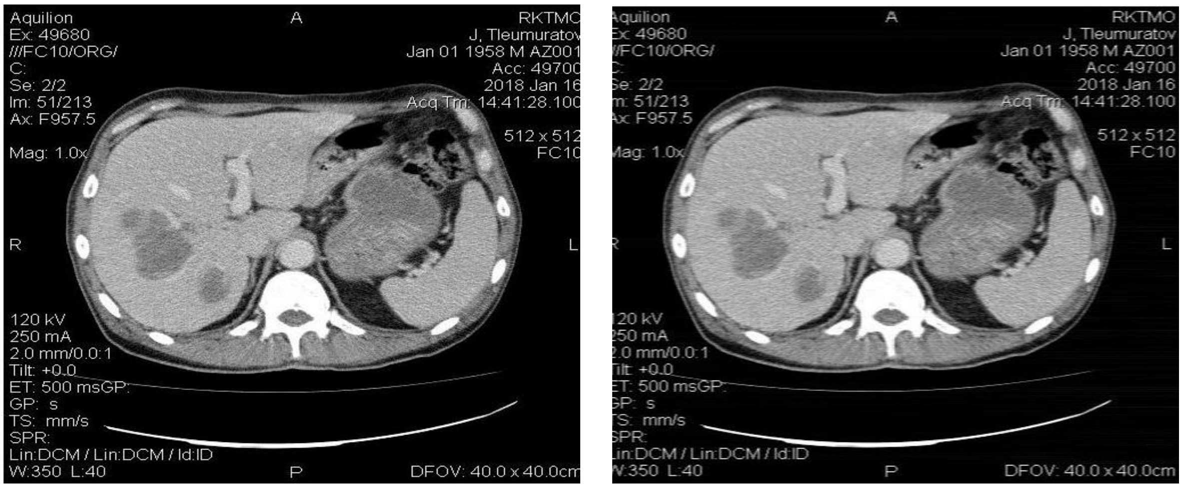
Шепп-Логан фантомини тиклаш, ишлаб чиқилган алгоритм мураккаб объектларни тиклаш учун қўлланилиши мумкинлигини кўрсатди. 1-жадвалдан кўриниб турганидек $N=64$ бўлганда нисбий хатолик err_2 тескари проекциялаш усулига солиштирганда икки марта, $N=128,\ 256,\ 512$ да уч марта кичик.

1-жадвал

Тескари проекциялаш усули билан солиштириш

$N,\ err_2$	64	128	256	512
Синиқ чизиқлар оиласи	0,3233	0,2447	0,2027	0,1800
Тескари проекциялаш методи Бурчаклар сони $N_\varphi=90,$ Проекциялар сони $N=90$	0,6981	0,6441	0,5973	0,5829

У. Халмуратов номидаги (Қорақалпоғистон Республикаси) кўп тармоқли тиббиёт марказининг томографик тизимидан олинган маълумотлар асосида сонли экспериментлар ўтказилди. Эксперимент натижаси қуйидаги расмларда келтирилган:



а) б)

2-Расм. Қорин бўшлиғини тиклаш а) беморнинг қорин бўшлиғининг оригинал тасвири б) синиқ чизиқлар оиласида тасвирни тиклаш $err_2 = 0{,}1928$

Кесмалар оиласида $u(x,y)$ функциясига нисбатан қуйидаги интеграл тенгламани қараймиз:

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} u(\xi,\eta)\,d\xi = f(x,y). \qquad (4)$$

бунда $\Upsilon(x,y) = \{(\xi,\eta) : x-\xi = y-\eta,\ 0 \le y \le H\}$.

(4) тенглама ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y). \qquad (5)$$

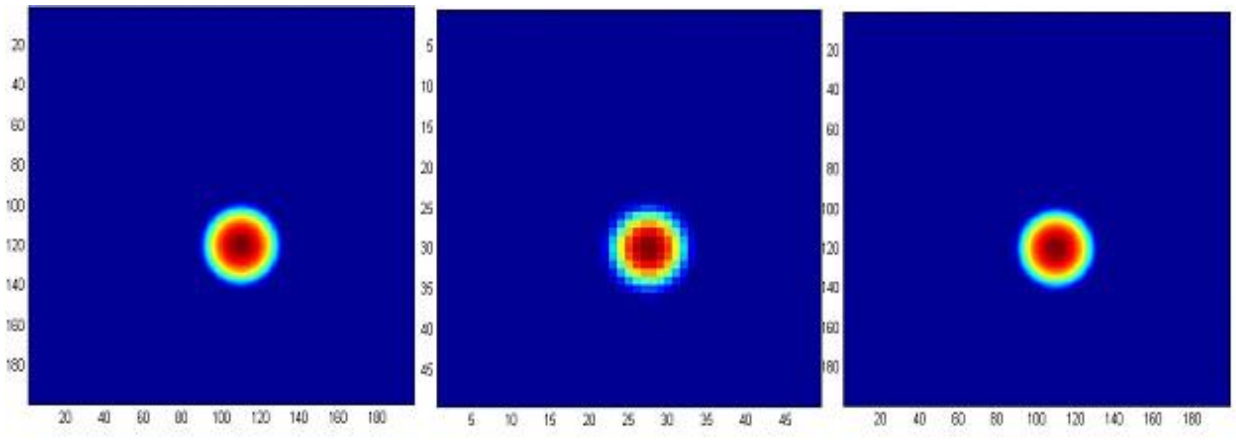
Тўғри бурчакли $D = [a,b] \times [c,d]$ соҳасида тенг ўлчовли тўрни киритамиз. Ушбу соҳада қўйилган масаланинг тақрибий ечимини излаймиз. $[a,b]$ ва $[c,d]$ кесмаларини $n_x - 1$ ва $n_y - 1$ бўлакларга бўламиз (олдимизда $N = n_x = n_y$ белгилашини киритамиз). $x_i = a + (i-1)h_x,\ y_j = b + (j-1)h_y$, $i = \overline{1, n_x - 1},\ y = \overline{1, n_y - 1}$. $u(x_i, y_j)$ функцияси тақрибий ечимини u_{ij}^A деб белгилаймиз:

$$u_{ij}^A = \frac{f_{ij+1} - f_{ij-1}}{2h_y} + \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2h_x}.$$

Сонли тажриба

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{r^2}{r^2 - \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)}}, & (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2, \\ 0, & (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > r^2. \end{cases}$$

математик фантомда ўтказилди. $r_0 = 0{,}25,\ (x_0, y_0) = (0{,}2;\ 0{,}1)$ бўлганда натижалар 3-расмда келтирилган.



а) б) в)

3-Расм. а) Оригинал фантом, б) $N=51$ бўлганда тиклаш, в) $N=201$ бўлганда тиклаш

Фараз қилайлик, бизга (4) интеграл тенгламада $f^T(x,y)$ аниқ функцияси ўрнига $\left\| f^\delta - f^T \right\|_{L_2} \le \delta$ шартини қаноатлантирувчи f^δ тақрибий функцияси маълум бўлсин.

(5) формулани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f^\delta(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f^\delta(x,y). \tag{6}$$

(4) интеграл тенглама ўнг томони хатолик билан берилган бўлса, (6) формулани тўғридан-тўғри ишлатиш катта хатоликларга олиб келади. Шунинг учун Тихонов регуляризациясидан фойдаланамиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f^\delta(x,y),\ \varphi(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f^\delta(x,y).$$

У ҳолда умумий ечим

$$u^A(x,y) = \psi(x,y) + \varphi(x,y).$$

формуласи ёрдамида ифодаланади.

Дифференцияллаш масаласини биринчи турдаги Вольтерра интеграл тенгламаси кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int_a^b K(x,s)\psi(s,\cdot)ds = \tilde{f}^\delta(x,\cdot),\ \ \tilde{f}^\delta(x,\cdot) = f^\delta(x,\cdot) - f^\delta(a,\cdot), \tag{7}$$

$$\begin{cases} K(x,s) = 1, \ \ агар \ \ a \le s \le x \le b, \\ K(x,s) = 0, \ \ агар \ \ s > x. \end{cases}$$

$$\int_c^d K(y,\tau)\varphi(\cdot,\tau)d\tau = f^\delta(\cdot,y), \tag{8}$$

$$\begin{cases} K(y,\tau) = 1, \ \ агар \ \ c \le \tau \le y \le d, \\ K(y,\tau) = 0, \ \ агар \ \ \tau > y. \end{cases}$$

(7) тенгламанинг турғунлигини таъминлаш учун

$$\Phi_{\alpha}[\psi, \tilde{f}^{\delta}] = \left\| A\psi - \tilde{f}^{\delta}(x) \right\|_{L_2} + \alpha \left\| \psi \right\|_{L_2}, \ \alpha > 0. \tag{9}$$

функционалини киритамиз. Бир нечта соддалаштиришлардан сўнг

$$\alpha\psi(t,\cdot) + \int_a^b \bar{K}(t,s)\psi(s,\cdot)ds = \int_t^b \tilde{f}^{\delta}(x,\cdot)dx. \tag{10}$$

кўринишдаги иккинчи тур интеграл тенгламага келамиз.
Бунда $\bar{K}(t,s) = b - \max\{t,s\}$.

Шундай қилиб масала чизиқли алгебраик тенгламалар системасини (ЧАТС) ечишга олиб келинади ва бу тенглама матрицаси симметрик кўринишга эга.

Регуляризация параметри α ни танлаш учун

$$\alpha_i = \theta \cdot \alpha_{i-1}, \ 0 < \theta < 1, \ \ i = 1,2,3,...,m. \tag{11}$$

қийматлари берилади. α_x қийматлари учун (10) ЧАТС ечилади.

$$\varepsilon(\alpha_x) = \frac{\left\| \psi_{ij}^{\alpha} - \psi_{ij}^{T} \right\|_{L_2}}{\left\| \psi_{ij}^{T} \right\|_{L_2}} \to \min \tag{12}$$

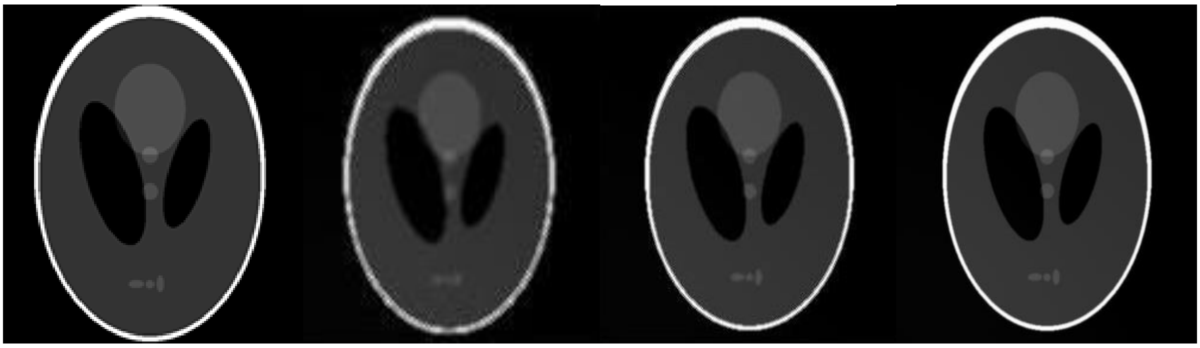
(12) шартни қаноатлантирувчи $\psi_{\alpha_{opt,x}}$ ечими (10) тенгламадан топилади.

Шу тарзда (8) интеграл тенглама учун юқоридаги амалларни бажарамиз. Натижада

$$u^A(x,y) = \psi(x,y) + \varphi(x,y).$$

формуласи билан қўйилган масала ечими топилади.

Қайта тиклаш алгоритмини текшириш учун тасвирни ва унга мос келадиган интеграл берилганларни моделлаштириш керак бўлади. Шу маънода Шепп-Логан фантомини тиклашни қараб чиқамиз.



а) б) с) д)

4-Расм. а) Оригинал Шепп-Логан фантоми б) N=128 бўлганда сонли дифференциаллаш ёрдамида тиклаш с) N=128 учун Тихонов регуляризацияси ёрдамида тиклаш д) N=512 учун Тихонов регуляризацияси ёрдамида тиклаш

4-Расмда Шепп-Логан фантомига 5% ли Гаусс шовқини қўшиб тикланган тасвири келтирилган. Шовқинсиз тиклашда Тихонов регуляризациясини фойдаланганда ҳам фойдаланмаганда ҳам бир хил натижа беради. Шовқин қўшилганда расмдан кўриниб турганидек сонли дифференциаллаш усули хира тасвирни тиклайди, Тихонов регуляризацияси билан тиклаш натижаси аниқ тасвирга яқин тасвирни олишга имкон беради.

2-жадвал

Интеграл берилганлардан фойдаланиб тасвирни тиклашни баҳолаш

N, шовқин	Сонли дифференциаллаш	Тихонов регуляризацияси
N=128X128, шовқинсиз	$err_2 = 0,395194$	$err_2 = 0,395194$
N=128X128, шовқин 5%	$err_2 = 1,36138$	$err_2 = 0,398891$
N=256X256, шовқин 5%	$err_2 = 1,79241$	$err_2 = 0,301003$
N=512X5126, шовқин 5%	$err_2 = 2,45577$	$err_2 = 0,242184$

ХУЛОСА

«Объектларнинг ички структураларини интеграл берилганлар бўйича тиклаш масалаларини махсус эгри чизиқлар оиласида моделлаштириш» мавзуси бўйича олиб борилган диссертация ишининг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Қўйилган интеграл геометрия масаласинининг синиқ чизиқлар оиласида берилган вазн функцияси учун ягоналик ва мавжудлик теоремаси исботланган. Соболев фазосида масала ечимининг турғунлик баҳоси олинган бўлиб, бундан унинг кучсиз корректмас эканлиги кўрсатилган. Синиқ чизиқлар оиласида объектларнинг ички структурасини интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг математик модели такомиллаштирилган ва ҳисоблаш алгоритми қурилган.
2. Ярим айланалар оиласида функцияни интеграл берилганлар бўйича тиклашнинг математик модели ишлаб чиқилган. Қўйилган интеграл геометрия масаласини ечишнинг силлиқ функциялар синфида ягоналик теоремаси исботланган ва биринчи параметр бўйича Фурье образи топилган. А.Н. Тихоновнинг корректмас масалаларнинг регуляризацияси назариясига асосланиб масаланинг аниқ ечимига яқинлашувчи ечимлар кетма-кетлиги қурилган.
3. Кесмалар оиласида қўйилган интеграл геометрия масаласи ечимининг силлиқ функциялар синфида ягоналик ва мавжудлик теоремалари исботланган. Соболев фазосида қўйилган интеграл геометрия масаласининг турғунлик баҳоси олинган. Объектларнинг ички структурасини интеграл берилганларга асосланиб тиклашнинг математик модели такомиллаштирилган ва ҳисоблаш алгоритми ишлаб чиқилган.
4. Шовқинли интеграл берилганларга турғунли Тихонов регуляризацияси асосида объектларнинг ички структурасини тиклашнинг ҳисоблаш алгоритми

ишлаб чиқилган.

5. Фойдаланувчига қулай интерфейсга эга кенг доирадаги фойдаланувчилар учун мўлжалланган объектларнинг ички структурасини интеграл берилганлар билан тиклаш масаласини ечишнинг дастурий таъминоти яратилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ДЖАЙКОВ ГАФУР МУРАТБАЕВИЧ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СТРУКТУР ОБЪЕКТОВ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДАННЫМ НА СЕМЕЙСТВЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ КРИВЫХ

05.01.07- Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2019.1.PhD/FM300.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Утеулиев Ниетбай Утеулиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Абдурахимов Бахтияр Файзиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Фаязов Кудратилло Садридинович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Термезский государственный университет**

Защита диссертации состоится ___ __________ в _____ на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан ___ __________ 2019 года.
(протокол рассылки № 8 от 28 декабря 2018 года).

А.Р.Марахимов
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.т.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

М.Арипов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире во многих областях науки и техники, научные и практические исследования часто сводятся к задачам восстановления внутренних структур объектов в виде изображения для изучения локализации объектов их геометрических характеристик. Восстановление функции по интегральным характеристикам и их математические модели являются объектом прикладной математики, вычислительной математики, математического моделирования и объектно-ориентированного программирования. Во многих случаях для получения информации о структуре объекта неприемлемы прямые методы исследования и поэтому для использования методов восстановления функции создаются специальные удаленные системы сбора данных, которые содержат информацию об интересных структурах, скрытых от органов чувств. Поэтому разработка устойчивых методов восстановления внутренних структур пациентов по интегральным данным и создание комплексов прикладных программ является одним из важнейших задач в медицине.

Мировой опыт показывает, что при решении ряда практических задач для получения информации о внутренней структуре объекта разработка методов интегральной геометрии является актуальной задачей прикладной математики. В этом случае особое значение приобретают процесс восстановления и получения аналитических формул, основанных на методах анализа Фурье. В этой связи актуальной является разработка устойчивых алгоритмов для восстановления внутренних структур объектов на основе интегральных данных, а также создания соответствующего комплекса программ, ориентированного на широкий круг пользователей, имеющего удобный интерфейс.

В нашей стране усилено внимание к научным направлениям прикладной математики, которые имеют важное научное и прикладное значение для фундаментальных наук. Широкое применение методы восстановления функции по интегральным характеристикам нашли в области медицины, геофизики, получены важные результаты для автоматического управления процессов восстановления внутренних структур объектов в виде изображений, основанных на методах анализа Фурье и вычислительной математики. Проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям «Математическая физика, математическая статистика, прикладная математика и математическое моделирование» выделено как основная задача фундаментальных исследований[2]. Важное значение для обеспечения исполнения данного постановления имеет развитие теории математического моделирования и развитие методов решения задач интегральной геометрии.

Данная диссертация в определенной степени нацелена на решение задач,

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, №УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года, а также в других нормативно – правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Восстановление функций по заданным интегральным характеристикам является частью интегральной геометрии. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин были авторами первой монографии, направленной на освещение основ интегральной геометрии. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа общего вида рассматривались в работах М.М. Лаврентьева и А.Л. Бухгейма. Позже областью интегральной геометрии занимались такие учёные, как В.К. Иванов, Ю.Е. Аниконов, Г.И. Плаксин, С.В. Успенский, А.А. Хачатуров, С.И. Кабанихин, В.Г. Романов, Ю.Г. Решетняк, И.О. Костелянец, В.Г. Яхно, Ф. Йон, А.Х. Бегматов, S. Helgason и другие.

Natterer F., Quinto E. T., Radon J., Funk P., Agranovsky M.L., Louis A.K., Rim Gouia-Zarrad, Gaik Ambartsoumian и другие ученые занимались исследованиями по аналитическим решениям задачи интегральной геометрии возникающих в области фотоакустической и термоакустической томографии, нуклидной диагностике и других областях медицины. Преобразование Радона нашло широкое применение в области компьютерной томографии и в других областях, таких, как обработка изображений и идентификации.

В Узбекистане задачами интегральной геометрии и восстановлением внутренних структур объектов занимались А.Х. Бегматов, З.Х. Очилов, К.С. Фаязов, Н.У. Утеулиев и некоторые другие ученые. Ряд научных работ по задаче восстановления функции по известным интегралам от неё на семействе конусов в случае пространства четной размерности принадлежит А.Х. Бегматову и его ученикам.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнялась диссертация. Работа выполнена в соответствии с плановой тематикой «Алгоритмы и программное обеспечение решения задач прикладной математики» Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является усовершенствование алгоритмов восстановления внутренних структур объектов, построение численных методов и создание соответствующего программного обеспечения.

Задачи исследования состоят в следующем:

усовершенствование математической модели восстановления внутренних структур объектов по интегральным данным на семействе ломаных и построение вычислительного алгоритма;

разработка алгоритма восстановления функции по интегральным данным на семействе полуокружностей;

усовершенствование математической модели реконструкции внутренней структуры объектов в виде изображения на семействе отрезков прямых;

построение вычислительного алгоритма на основе регуляризации Тихонова для восстановления внутренних структур объектов с зашумленными интегральными данными;

создание программного обеспечения, с помощью которого можно моделировать интегральные данные и восстановить внутреннюю структуру объектов.

Объект исследования – интегральные данные при определении внутренних структур объектов, известные математические фантомы, алгоритмическое и объектно-ориентированное программное обеспечение.

Предмет исследования составляют математические модели процесса восстановления внутренних структур объектов, создание алгоритмов и адекватного программного обеспечения.

Методы исследования базируются на основных положениях теории решения некорректных задач, интегральных уравнений, функционального анализа, численных методов и математического моделирования, а также объектно-ориентированного программирования.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

усовершенствована математическая модель восстановления внутренних структур объектов по интегральным данным на семействе ломаных и построен вычислительный алгоритм решения поставленной задачи;

разработана математическая модель восстановления функции по интегральным данным на семействе полуокружностей. Исходя из идеи А.Н. Тихонова о регуляризации некорректных задач, построена последовательность приближенных решений к точному решению задачи;

усовершенствована математическая модель реконструкции внутренней структуры объектов в виде изображения на семействе отрезков прямых. Получена оценка устойчивости решения задачи в пространствах Соболева;

построен вычислительный алгоритм на основе регуляризации Тихонова для восстановления внутренних структур объектов с зашумленными интегральными данными;

создано программное обеспечение, с помощью которого можно моделировать интегральные данные и восстановить внутреннюю структуру объектов.

Практические результаты исследования заключаются в том, что разработанные вычислительные алгоритмы для процессов определения внутренних структур объектов по интегральным данным на семействе ломаных и отрезков прямых использованы для восстановления внутренних структур органов пациентов в области медицины.

Достоверность исследования полученных результатов и выводов подтверждается доказательствами теоретических утверждений, анализом разработанных алгоритмов и проведением численных экспериментов.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования подтверждается доказательствами теоремы восстановления функции по интегральным данным.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы при численном решении задач определения внутренней структуры объектов, возникающих в области медицины и геофизики.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов при исследовании методов восстановления внутренних структур объектов:

программное обеспечение восстановления внутренних структур объектов по интегральным данным использовано при проведении аналитической экспериментальной работы в Республиканском многопрофильном медицинском центре (Справка № 01/5280 от 23 ноября 2018 года Министерства Здравоохранения Республики Каракалпакстан). Применение научных результатов позволило определить оптимальные методы лечения на начальной стадии заболевания;

вычислительные алгоритмы для восстановления внутренних структур объектов, построенные на семействах ломаных и отрезков прямых использованы для определения брюшной полости пациентов в виде изображения в Республиканском многопрофильном медицинском центре (Справка № 01/5280 от 23 ноября 2018 года Министерства Здравоохранения Республики Каракалпакстан). Применение научных результатов позволило провести раннюю диагностику заболеваний, повысить точность и улучшить качество медицинской помощи населению.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 15 научно-практических конференциях, в том числе на 13 международных и 2 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме исследования опубликована 21 научная работа, из них – 6 статей в журнальных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан, в том числе, 3 – в иностранных и 3 – в республиканских журналах. Получено 1 свидетельство о регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объём диссертации составляет 92 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан. Сформулированы цель и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования. Обоснована достоверность полученных результатов, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Приведены перечень внедрений в практику результатов исследования, сведения об опубликованных работах и структура диссертации.

В первой главе диссертации **«Принципы получения информации о внутренней структуре исследуемого объекта»** проведена постановка задачи, краткий обзор исследований и литературы, посвященных по теме диссертации, а также даны основные определения и вспомогательные утверждения, необходимые для дальнейшего обсуждения результатов исследования.

В общем виде задача интегральной геометрии может быть сформулирована следующим образом. Пусть $D-$ область $n-$ мерного пространства $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)$ а $L\left(x\right)-$ семейство кривых, зависящее от n параметров $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ причем каждая из кривых семейства целиком принадлежит области D и соединяет пару точек границы D. Требуется найти внутри области D функцию $u\left(\xi\right)$, если относительно ее известны интегралы по семейству кривых $L\left(x\right)$ с заданной весовой функцией $p\left(x,\xi\right)$:

$$\int\limits_{L(x)} p(x,\xi)u(\xi)ds=\upsilon(x). \qquad (1)$$

здесь $ds-$ элемент длины дуги кривой $L\left(x\right)$.

Основные вопросы, которые возникают при исследовании этой задачи, следующие. Первый и наиболее принципиальный вопрос: определяет ли однозначно задание функции $\upsilon(x)$ функцию $u\left(\xi\right)$?

Следующий вопрос: как найти по функции $\upsilon(x)$ функцию $u\left(\xi\right)$? При этом желательно, конечно, получить аналитическую формулу, выражающую $u\left(\xi\right)$ через $\upsilon(x)$ и $p\left(x,\xi\right)$. И наконец, вопрос, естественным образом связанный с теоремой существования решения задачи: каковы необходимые и достаточные условия принадлежности $\upsilon(x)$ к классу функций, представимых в виде (1)?

Как видно из формулы (1), задача интегральной геометрии есть задача решения специального интегрального уравнения первого рода. Среди задач интегральной геометрии есть задачи сильно неустойчивые. В связи с этим приобретает большое значение оценка условной устойчивости задачи. С другой стороны, вопрос о построении по функции $p\left(x,\xi\right)$ и $\upsilon(x)$ функции $u\left(\xi\right)$ в общем случае требует создания специальных вычислительных алгоритмов, базирующихся на общей теории некорректных задач. В связи с этим целесообразна, например, постановка вопроса о построении регуляризаторов для задачи интегральной геометрии.

Вторая глава диссертации «**Математическое моделирование задачи восстановления внутренних структур объектов по заданным интегральным данным»** посвящена разработке методов задачи восстановления функции по интегральным данным с заданной весовой функцией на семействе специальных кривых.

Введем обозначения, которые будем использовать далее:

$$(x,y)\in R^2,\quad (\xi,\eta)\in R^2,\quad \lambda\in R^1,\quad \mu\in R^1,$$

$$L_H=\{(x,y):\ x\in R^1,\ y\in[0,H],\ H<\infty\}.$$

Рассмотрим операторные уравнения относительно функции $u(x,y)$:

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} g(x,\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)ds=f(x,y). \qquad (2)$$

где $g(x,\xi,y,\eta)-$заданная весовая функция, $\Upsilon(x,y)-$семейство кривых.

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y)\in L_H$, весовая функция имеет вид $g(x,\xi,y,\eta)=e^{-k(y-\eta)}$ и $\Upsilon(x,y)$ определяются следующими соотношениями

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):|x-\xi|=(y-\eta)tg\omega,\ 0\le y\le H,\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Тогда решение уравнения (2) в классе $C_0^2(L_H)$ единственно и выражается через функцию $f(x,y)$ по формуле

$$u(x,y)=\frac{\cos\omega}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)+k\cdot f(x,y)-tg^2\omega\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y e^{-k(y-\eta)}f(x,\eta)d\eta\right),$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{0,1}}\le C_1\|f(x,y)\|_{W_2^{2,1}}.$$

здесь C_1- некоторая константа.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y)\in L_H$, весовая функция имеет вид $g(x,\xi,y,\eta)=\operatorname{sgn}(x-\xi)e^{-k(y-\eta)}$ и $\Upsilon(x,y)$ определяются следующими соотношениями

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):|x-\xi|=(y-\eta)tg\omega,\ 0\le y\le H,\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Тогда решение уравнения (2) в классе $C_0^2(L_H)$ единственно и выражается через функцию $f(x,y)$ по формуле

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\cos\omega}{2}\left(tg^2\omega\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)-2k\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)-k^2f(x,y)\right),$$

и удовлетворяет неравенству

$$\left\| u(x,y) \right\|_{W_2^{1,0}} \le C_2 \left\| f(x,y) \right\|_{W_2^{2,2}}.$$

где $C_2 -$ некоторая константа.

Теорема 3. Пусть функция $f(x,y)$ известна в полосе L_H, $g(x,\xi)=1$ и произвольная кривая семейства представлена выражением

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta):(x-\xi)^2+\eta^2=y^2, 0\le\eta\le y\le H\right\}.$$

Тогда решение уравнения (2) в классе $C_0^\infty(L_H)$ единственно и имеет место представление

$$u_\alpha(x,y)=\frac{1}{2\alpha y\sqrt{\pi^3}}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2-y^2+\eta^2}{4\alpha^2}}\cos\frac{(x-\xi)\sqrt{y^2-\eta^2}}{2\alpha^2}\frac{\eta f(\xi,\eta)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}d\xi d\eta,$$

и удовлетворяет оценку

$$\left\| u_\alpha(x,y)-u(x,y) \right\|_{L_2} \le \frac{C_3}{\left(1+y^2\right)}\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

где $\alpha>0-$параметр регуляризации, $C_3 -$ некоторая константа.

Теорема 4. Пусть функция $f(x,y)$ известна в полосе L_H, весовая функция имеет вид $g(x,\xi)=e^{-k(x-\xi)}$, семейство отрезков прямых определяется соотношениями

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta): x-\xi=y-\eta, 0\le y\le H\right\}.$$

Тогда решение уравнения (2) в классе непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе L_H функций единственно, выражается через функцию $f(x,y)$ по формуле

$$u(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+k\cdot f(x,y)\right),$$

и удовлетворяет неравенству

$$\left\| u(x,y) \right\|_{L_2} \le C_4 \left\| f(x,y) \right\|_{W_2^{1,1}}.$$

здесь $C_3 -$ некоторая константа.

Теорема 5. Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y)\in L_H$, весовая функция имеет вид $g(x,\xi)=(x-\xi)$, семейство отрезков прямых определяется соотношениями

$$\Upsilon(x,y)=\left\{(\xi,\eta): x-\xi=y-\eta, 0\le y\le H\right\}.$$

Тогда решение уравнения (2) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе L_H функций единственно, выражается через функцию $f(x,y)$ по формуле

$$u(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y),$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u(x,y)\|_{L_2}\le C_5\|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}}.$$

здесь C_5- некоторая константа.

В третьей главе диссертации «**Численные алгоритмы и программное обеспечение для моделирования и восстановления внутренних структур объектов по интегральным данным на семействе специальных кривых»** рассматривается восстановление изображений по интегральным данным и модельные примеры с помощью вышеуказанных формул обращения.

Рассмотрим уравнение относительно функции $u(x,y)$:

$$f(x,y)=\int\limits_{\Upsilon(x,y)}u(\xi,\eta)ds. \qquad (3)$$

где $\Upsilon(x,y)=\{(\xi,\eta):|x-\xi|=y-\eta,\, 0\le y\le H\}$.

Решение уравнения (3) имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y f(x,\eta)d\eta\right).$$

Введем равномерную сетку в прямоугольной области $D=[a,b]\times[c,d]$. Отыскиваем приближенные решения задачи на этом прямоугольнике. Разобьем отрезок $[a,b]$ на оси Ox и $[c,d]$ на оси Oy на n_x-1 и n_y-1 частей соответственно (введем обозначения $N=n_x=n_y$).

$$x_i=a+(i-1)h_x,\ y_j=b+(j-1)h_y,\ i=\overline{1,n_x-1},\ \ y=\overline{1,n_y-1}.$$

Приближения функций $u(x_i,y_j)$ будем обозначать u_{ij}^A:

$$u_{ij}^A=\frac{f_{ij+1}-f_{ij-1}}{4\sqrt{2}h_y}-\frac{q_{i+1j}-2q_{ij}+q_{i-1j}}{2\sqrt{2}h_x^2},$$

где $q_{ij}=\int\limits_0^{y_j}f(x_i,\eta)d\eta$. Этот интеграл вычисляется по формуле трапеции. Будем вычислять значение погрешности err_2 следующим образом:

Обозначим: i - номер строки, j - номер столбца.

$$err_2=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=2}^{n_x-1}\sum\limits_{j=2}^{n_y-1}\left|u^A(i,j)-u^E(i,j)\right|^2}{\sum\limits_{i=2}^{n_x-1}\sum\limits_{j=2}^{n_y-1}\left|u^E(i,j)\right|^2}}.$$

где u_{ij}^E- точное решение, u_{ij}^A-приближенное решение.

Тестирование алгоритмов происходило на широко применяемой модели

– “фантом Шеппа-Логана”. Это виртуальный объект и в этой области функция $u(x, y)$ изменяется в диапазоне от -1 до 1. Данный фантом является моделью черепа человека. Исторически он был использован для тестирования методов медицинской томографии. Модель Шеппа-Логана является чрезвычайно трудным объектом для восстановления, т.к. содержит множество пересекающихся областей, находящихся внутри замкнутой оболочки.

Результаты вычислений представим на следующих рисунках:

а) б) в)

Рис.1. Восстановление тестового изображения на семействе ломаных а) оригинал фантом, б) восстановление при $N = 128$, в) восстановление при $N = 512$

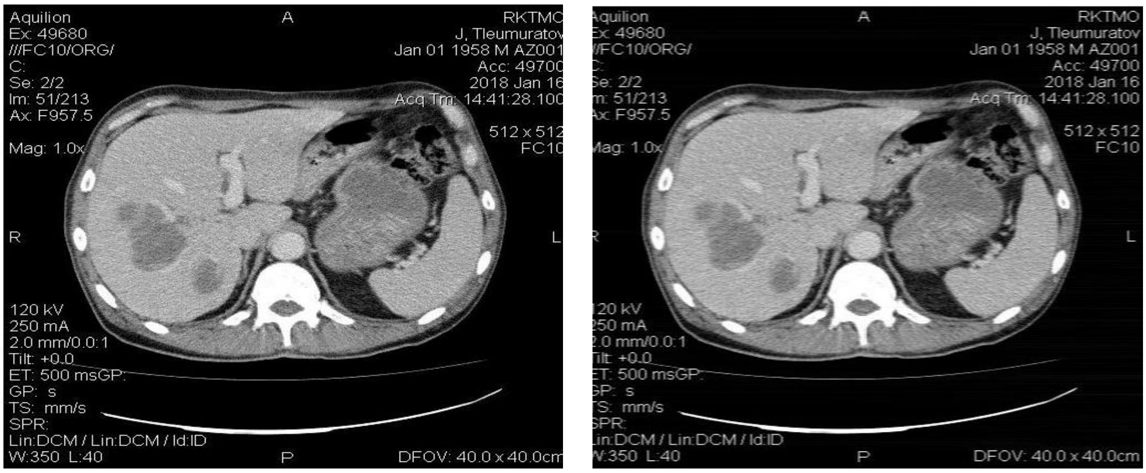
Восстановление этого объекта показывает, что разработанный метод применим для реконструкции сложных объектов. Из Таблицы 1 видно, что когда $N = 64$ err_2 в методе ломаных два раза меньше, чем в методе обратного проецирования, а когда $N = 128,\ 256,\ 512$, то меньше в три раза.

Таблица 1

Сравнение с методом обратного проецирования

$N,\ err_2$	64	128	256	512
Метод ломаных	0,3233	0,2447	0,2027	0,1800
Метод обратного проецирования Число углов $N_\varphi = 90$, Число проекций $N = 90$	0,6981	0,6441	0,5973	0,5829

Были проведены численные эксперименты по данным, полученным из томографической системы Республиканского многофункционального медицинского центра имени У. Халмуратова (Каракалпакстан). Результаты эксперимента представлены на Рис.2.



а) **б)**

Рис.2. Восстановление органов брюшной полости а) оригинальное изображение пациента, б) восстановленное изображение пациента с методом ломаных, $err_2 = 0{,}1928$

На семействе отрезков прямых рассмотрим следующее уравнение относительно $u(x,y)$:

$$\int_{\Upsilon(x,y)} u(\xi,\eta)\,d\xi = f(x,y), \qquad (4)$$

где $\Upsilon(x,y)=\{(\xi,\eta): x-\xi=y-\eta,\ 0\le y\le H\}$.

Перепишем решение уравнения (4) в виде

$$u(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y). \qquad (5)$$

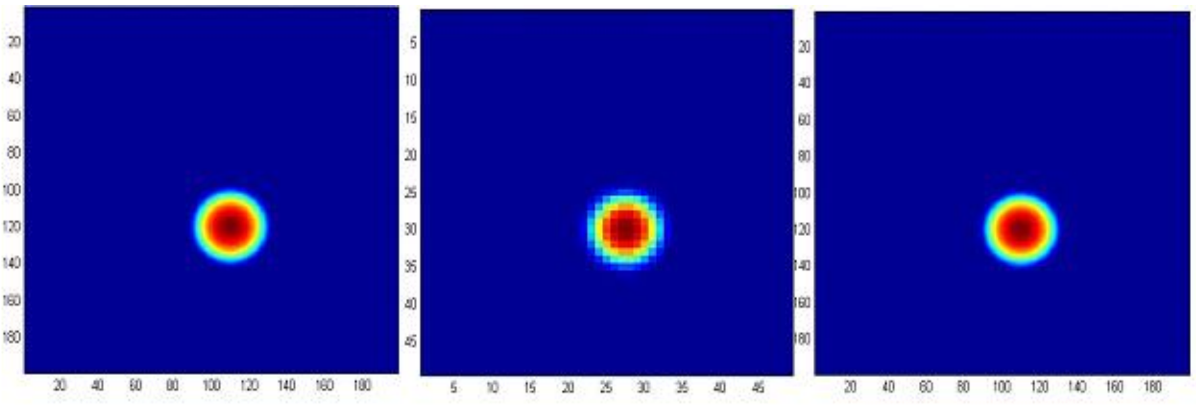
Введем равномерную сетку в прямоугольной области $D=[a,b]\times[c,d]$. Отыскиваем приближенные решения задачи на этом прямоугольнике. Разобьем отрезок $[a,b]$ на оси Ox и $[c,d]$ на оси Oy на n_x-1 и n_y-1 частей соответственно. $x_i=a+(i-1)h_x,\ y_j=b+(j-1)h_y,\quad i=\overline{1,n_x-1},\ y=\overline{1,n_y-1}$. Приближения функций $u(x_i,y_j)$ будем обозначать u_{ij}^A:

$$u_{ij}^A=\frac{f_{ij+1}-f_{ij-1}}{2h_y}+\frac{f_{i+1j}-f_{i-1j}}{2h_x}.$$

Численный эксперимент проводим на математическом фантоме:

$$u(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{r^2}{r^2-\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)}}, & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2,\\ 0, & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2>r^2.\end{cases}$$

Пусть $r_0=0{,}25,\ (x_0,y_0)=(0{,}2;\,0{,}1)$. Чтобы проиллюстрировать вычисления, а также достигаемую при этом точность, применим этот процесс на Рис. 3. при $N=51,101,201$.



а) **б)** **в)**

Рис. 3. а) Оригинал фантом, б) восстановление при $N = 51$, в) восстановление при $N = 201$

Пусть вместо точной правой части $f^T(x,y)$ нам известно такое ее приближенное значение f^δ такое, что $\left\| f^\delta - f^T \right\|_{L_2} \le \delta$, где $\delta -$верхняя граница правой части. Перепишем уравнение (5) в виде

$$u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f^\delta(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f^\delta(x,y). \tag{6}$$

Если правая часть в уравнении (4) задана с ошибкой, тогда прямое использование формулы (6) приводит к грубой ошибке. Поэтому используем регуляризацию Тихонова.

Обозначим

$$\psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f^\delta(x,y),\ \varphi(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f^\delta(x,y).$$

Тогда $u^A(x,y) = \psi(x,y) + \varphi(x,y)$.

Задачу дифференцирования можно записать в виде уравнения Вольтерра первого рода:

$$\int_a^b K(x,s)\psi(s,\cdot)ds = \tilde{f}^\delta(x,\cdot),\quad \tilde{f}^\delta(x,\cdot) = f^\delta(x,\cdot) - f^\delta(a,\cdot), \tag{7}$$

$$\begin{cases} K(x,s) = 1, & при\quad a \le s \le x \le b, \\ K(x,s) = 0, & при\quad s > x. \end{cases}$$

$$\int_c^d K(y,\tau)\varphi(\cdot,\tau)d\tau = f^\delta(\cdot,y), \tag{8}$$

$$\begin{cases} K(y,\tau) = 1, & при\quad c \le \tau \le y \le d, \\ K(y,\tau) = 0, & при\quad \tau > y. \end{cases}$$

Для обеспечения устойчивости решения в уравнение (7) вводится условие минимума сглаживающего функционала

$$\Phi_\alpha[\psi, \tilde{f}^\delta] = \left\| A\psi - \tilde{f}^\delta(x) \right\|_{L_2} + \alpha \left\| \psi \right\|_{L_2}, \ \alpha > 0. \qquad (9)$$

Раскрытие (6) приводит к следующему уравнению второго рода:

$$\alpha\psi(t,\cdot) + \int_a^b \bar{K}(t,s)\psi(s,\cdot)ds = \int_t^b \tilde{f}^\delta(x,\cdot)dx. \qquad (10)$$

где $\bar{K}(t,s) = b - \max\{t,s\}$.

Таким образом, задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Матрица этой системы симметрична.

Для выбора параметра регуляризации вначале задается некоторый набор значений α:

$$\alpha_i = \theta \cdot \alpha_{i-1}, \ 0 < \theta < 1, \ i = 1,2,3,...,m. \qquad (11)$$

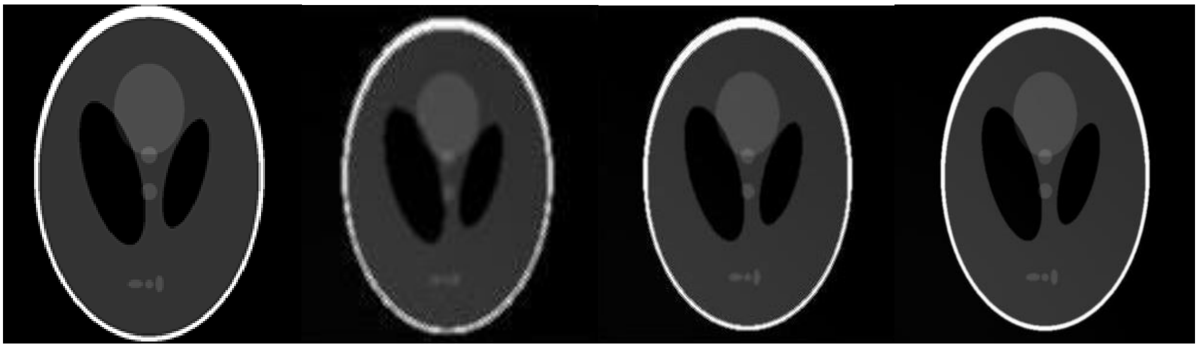
Для ряда значений α_x (11) решается СЛАУ (10). Находим решения ψ^{α_i}, относительно погрешности решения получаем:

$$\varepsilon(\alpha_x) = \frac{\left\| \psi_{ij}^{\alpha} - \psi_{ij}^{T} \right\|_{L_2}}{\left\| \psi_{ij}^{T} \right\|_{L_2}} \to \min \qquad (12).$$

Затем находится $\psi_{\alpha_{opt,x}}$ по формуле (10).

Аналогично, для интегрального уравнения (8) задействуем такие операции. В итоге получаем решение уравнения (4) по формуле $u^A(x,y) = \psi(x,y) + \varphi(x,y)$.

Для отработки алгоритма реконструкции необходимо смоделировать тестовое изображение и соответствующие им интегральные данные. Рассмотрим восстановление фантома Шепп-Логана.



а) б) с) д)

Рис. 4 а) Оригинал фантом Шепп - Логана, б) восстановление с помощью конечно – разностных схем при N=128, с) восстановление с помощью регуляризации Тихонова при N=128, д) восстановление с помощью регуляризации Тихонова при N=512

На Рис. 4 приведено восстановление фантома Шеппа-Логана размером 512 пикселей с внесённым 5% гауссовским шумом. При восстановлении без шума как с использованием, так и без использования регуляризации результат получается хорошим. При регулярном шуме из рисунка видно, что простое восстановление уже не подходит. Видно, что метод численного дифференцирования дает искажённое изображение, а метод регуляризации Тихонова даёт изображение хорошим разрешением.

Таблица 2

Оценка восстановления изображения по интегральным данным

N, шум	С помощью ЧД	Регуляризация Тихонова
128X128, без шума	$err_2 = 0,395194$	$err_2 = 0,395194$
128X128, шум 5%	$err_2 = 1,36138$	$err_2 = 0,398891$
256X256, шум 5%	$err_2 = 1,79241$	$err_2 = 0,301003$
512X5126, шум 5%	$err_2 = 2,45577$	$err_2 = 0,242184$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенного диссертационного исследования по теме «Моделирование задачи восстановления внутренних структур объектов по интегральным данным на семействе специальных кривых» сводятся к следующим основным выводам:

1. Доказаны теорема единственности и теорема существования решения задачи интегральной геометрии в полосе на семействе ломаных с заданной весовой функцией. Представлены оценки решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность. Усовершенствована математическая модель процесса для реконструкции внутренней структуры объектов с интегральными данными на семействе ломаных и построен вычислительный алгоритм решения задачи.
2. Разработана математическая модель процесса восстановления функции по интегральным данным на семействе полуокружностей. Доказана теорема единственности и получена явная формула для образа Фурье решения рассмотренной задачи интегральной геометрии в классе гладких финитных функций. Исходя из идеи А. Н. Тихонова о регуляризации некорректных задач, построена последовательность решений, приближенных к точному решению задачи.
3. Доказаны теорема единственности, теорема существования решения задачи интегральной геометрии на семействе отрезков прямых с весовой функцией экспоненциального вида. Получена оценка устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность задачи. Разработана математическая модель для определения внутренних структур объектов по интегральным данным на семействе отрезков прямых и разработан вычислительный алгоритм решения данной задачи.
4. Построен численный алгоритм для восстановления внутренних структур объектов с зашумленными интегральными данными на основе регуляризации Тихонова.

5. Создано программное обеспечение решения задачи восстановления внутренних структур объектов по их интегральным данным для широкого круга пользователей с удобным интерфейсом.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.27.06.2017.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

DJAYKOV GAFUR MURATBAEVICH

MODELING OF RECONSTRUCTION INTERNAL STRUCTURE OF OBJECTS BY ITS INTEGRAL DATA ON A FAMILY OF SPECIAL CURVES

05.01.07-Mathematical simulation. Numerical methods and software

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.1.PhD/FM300.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Uteuliev Nietbay Uteulievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Abdurakhimov Bakhtiyor Fayzievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Fayazov Qudratillo Sadridinovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Termez State University**

Defense will take place ___ ________ 2019 at ___ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on ___ _________ 2019 year
(Mailing report No. 8 on 28 december 2019 year)

A.R. Marakhimov
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of scientific
council on award of
scientific degrees, D.F.-M.S.

M. Aripov
Chairman of scientific seminar
under scientific council on award
of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is the improve the algorithms for the restoration of internal structures of objects, the construction of numerical methods and the creation of appropriate software program.

The object of the research work are integral data in determining the internal structures of objects, well known mathematical phantoms.

Scientific novelty of research work is as follows:

the mathematical model of the reconstruction of the internal structures of the objects by integral data on a family of polygonal lines was improved and a computational algorithm for solving the problem was constructed;

an algorithm for recovering a function from integral data on a family of semicircles is developed. Based on the idea of Tikhonov regularization of ill-posed problems, a sequence of approximate solutions to the exact solution of the problem are constructed;

the mathematical model of the reconstruction of the internal structure of objects in the form of an image on a family of straight-line segments has been improved;

the computational algorithm based on Tikhonov regularization to restore the internal structures of objects with noisy integrated data is constructed;

software program which can model the integral data and restore the internal structure of objects in the form an image is created.

Implementation of the research results. The obtained scientific results in the study of methods for the restoration of internal structures of objects are introduced into practice in the following areas:

the software program for restoring the internal structures of objects by integral data was used during the analytical experimental work in Republican Multidisciplinary Medical Center (Reference No. 01/5280 of November 23, 2018, of the Ministry of Health of the Republic of Karakalpakstan). The application of scientific results allowed to determine the optimal treatment methods at the initial stage of the disease;

computational algorithms for restoring the internal structures of objects constructing on families of polygonal lines and straight lines are used to determine the abdominal cavity of patients in the form of an image in Republican Multidisciplinary Medical Center (Reference No. 01/5280 of November 23, 2018, of the Ministry of Health of the Republic of Karakalpakstan). The application of scientific results allowed to conduct early diagnosis of diseases, improve the accuracy and improve the quality of medical care to the population.

The structure and volume of the thesis: The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion, a list of used literature and applications. The volume of the thesis is 92 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Бегматов А. Х., Джайков Г. М. О восстановлении функции по сферическим средним // Доклады АН ВШ РФ. – Нововсибирск, 2013. – № 20. – С. 6-16. (01.00.00 (18) Ulrich's Periodicals Directory, (35) CrossRef)
2. Бегматов А.Х., Джайков Г.М. Линейная задача интегральной геометрии в полосе с гладкими весовыми функциями и возмущением // Владикавказский математический журнал. – Владикавказ, 2015. – № 3. – С.14-22. DOI:10.23671/VNC.2017.3.7259 (01.00.00 (11) Springer)
3. A. X. Begmatov, G. M. Djaykov. Numerical Recovery of Function in a Strip from Given Integral Data on Linear Manifolds. International forum on strategic technology, IFOST 2016, Novosibirsk, Russia, 1–3 june 2016: Conference proceedings. Part 1. – Novosibirsk, 2016. – Pp. 478–483. DOI:10.1109/IFOST.2016.7884159. (01.00.00 (3) Scopus)
4. Djaykov G.M., Pirimbetov A.O. Inversion of the plane singular Radon transform // Science and education in Karakalpakstan. – Nukus, 2017. Number 1, – Pp. 22-26. (01.00.00 № 11)
5. Aytmuratov B., Djaykov G. Reconstructing function from its integrals over polygonal lines. Science and education in Karakalpakstan. – Nukus, 2017. Number 4, – Pp. 7-13. (01.00.00 № 11)
6. Утеулиев Н.У., Джайков Г. М. Моделирование задачи определения внутренней структуры объекта по интегральным данным на семействе отрезков прямых // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент 2018. – №2. – С.47-61. (01.00.00 № 9)

II бўлим (Часть II; Part II)

1. N.U. Uteuliev, G. M. Djaykov. Numerical reconstructing function from its integral data on a family of special curves // Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий -Аль-Хорезми 2018» – Ташкент 2018. – С. 32.
2. N.U. Uteuliev, G. M. Djaykov. Analytical reconstruction a function by the meaning of its integral data with fixed angle // Республиканская конференция «Актуальные проблемы математического моделирования, алгоритмизации и программирования» – Ташкент 2018. -С.
3. G.M. Djaykov, Sh.A. Yadgarov. Modeling the function restoration problem by the meaning of its integrals on polygonal lines // Tenth World Conference “Intelligent Systems for Industrial Automation”, – Tashkent 2018. - P.327-329.
4. Джайков Г.М. Задача интегральной геометрии в полосе с разрывной весовой функцией // Математика и Информатика: Современные исследования

в области естественных и технических наук. Материалы III научно-практической всероссийской конференции молодых ученых, – Тольятти 24-25 апреля 2017. – С. 147 – 149.

5. A. X. Begmatov, G. M. Djaykov. Numerical investigation of the problem of determining the internal structure of an object by means of integral data over line segments // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач: сб. тез. 9 междунар. молодежной шк.-конф., посвящ. 85-летию со дня рождения акад. М. М. Лаврентьева. – Новосибирск 2017. – С. 15.

6. Джайков Г.М. Численное решение одной задачи радионуклидной диагностики методом регуляризации Тихонова // Материалы всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации». – Новосибирск 2016. – С. 24-25.

7. A. X. Begmatov, G. M. Djaykov. Numerical recovery of function in a strip from given integral data on a family of segments // Восьмая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск 2016. – С. 28.

8. A. X. Begmatov, G. M. Djaykov. Numerical reconstructing of function given by their integrals over semicircles // V Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск 2013. – С. 17.

9. Бегматов А.Х., Джайков Г.М. Задача интегральной геометрии на семействе полуокружностей // Международная научно-практическая конференция «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», посвященная 90-летию со дня рождения профессора Т.И. Аманова. – Семей 2013. – С. 266-270.

10. Пиримбетов А.О., Джайков Г.М. Численное решение задачи интегральной геометрии на семействе ломаных в полосе // Материалы всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации». Часть 3. – Новосибирск 2013. –С. 142-145.

11. Джайков Г. Задача интегральной геометрии на одном семействе полуокружностей // 51-й Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибирск 2013. – С.32.

12. A. X. Begmatov, G. M. Djaykov. Inversion of the plane circular Radon transform // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики информационных технологий – Аль-Хорезмий 2012» – Ташкент 2012. – С.73.

13. Бегматов А.Х., Джайков Г.М. Восстановление функции по сферическим средним на плоскости и в трехмерном пространстве // IV Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск 2012. – С.31.

14. Бегматов А.Х., Джайков Г.М. Восстановление функции по сферическим средним // Некорректные и неклассические задачи

математической физики и анализа: тезисы научно-практического семинара. – Самарканд 2012. – С.15.

15. Джайков Г.М. О восстановлении функции по ее сферическим средним // 50-й юбилейная Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибирск 2012. – С.100.

16. Утеулиев Н.У., Джайков Г.М., Нуримов П. Программное обеспечение для решения задачи восстановления внутренних структур объектов по интегральным данным // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Свидетельство № DGU 05218. 16.04.2018.