



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA –MATEMATIKA FAKULTETI

AXBOROT TEXNOLOGIYALARI KAFEDRASI

***MATEMATIK VA
KOMPYUTERLI
MODELLASHTIRISH
fanidan***

Ma'ruzalar matni

BUXORO-2018

TUZUVCHI:

O.I.Jalolov -

“Axborot texnologiyalari” kafedrasi dotsenti.

TAQRIZCHILAR:

J.Jumayev -

(BuxDU) «Axborot texnologiyalari» kafedrasi dotsenti.

SH.S .Yo’ldoshev. -

(BuxMTI) «Informatika va AT» kafedra dotsent.

**O‘quv-uslubiy majmua BuxDU kengashining 2018 yil _____dagi ____ -
sonli qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan.**

MA'RUZA MATERIALLARI

MA'RUZA 1. Kirish. Xatoliklar nazariyasi. Funktsiyaning xatoliklari. Algebraik va transstendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari. Algebraik tenglama ildizlarini chegarasini aniqlash, ildizlarini ajratish. Iteratsiya usuli.

Reja:

1. Kirish.

2. Xatoliklar nazariyasi.

3. Funktsiyaning xatoliklari.

4. Algebraik va transstendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari.

5. Algebraik tenglama ildizlarini chegarasini aniqlash, ildizlarini ajratish.

Tayanch iboralar: matematika, metod (usul), model, masala, tenglama, operator, to'g'ri masala, teskari masala.

Kirish.

Inson aqli moddiy dunyoni o'rganishning usullaridan biri bo'lgan matematikani yaratdi. Matematika, jumladan xodisalarning modellarini yaratadi, ularni tadqiq etadi va xodisa to'g'risida xulosalar chiqaradi.

Matematik model - tenglama, tengsizlik, funksiya ko'rinishida bo'ladi. Bu modellar yordamida turli matematik masalalar yyechiladi. Masalani yechish uchun usullar, ulardan esa o'z navbatida algoritmlar yaratiladi.

Yaqingacha algoritmlarni bajarib masala yechimini topish, undagi amallar sonining ko'pligi tufayli, xamma vaqt xam amalga oshirib bo'lmas edi. Shu sababli hisoblash mashinalari yaratildi.

Hisoblash mashinalari ko'pgina algoritmlarni ma'lum vaqt oralig'ida bajarib, masala yechimini topishga imkon yaratdi.

Xatoliklar nazariyasi.

Faraz qilaylik, a - biror miqdorning aniq qiymati bo'lib, a^* uning ma'lum taqribiy qiymati bo'lsa, u vaqtda taqribiy a^* sonining absolyut xatosi deb $\Delta a^* = |a - a^*|$ ga aytiladi.

Absolyut xatoni taqribiy miqdorning absolyut qiymatiga nisbati taqribiy sonning *nisbiy xatosi* δa^* deb aytiladi:

$$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}$$

Absolyut xatodan kichik bo'lmagan, har qanday songa taqribiy a^* sonning *limit absolyut xatoligi deyiladi* va u uchun quyidagi tengsizlik o'rinlidir:

$$\Delta a^* \leq \Delta(a^*).$$

Xuddi shunga o'xshash limit nisbiy xato $\delta(a^*)$ tushunchasini kiritish mumkin:

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}.$$

Bundan $\Delta(a^*) = \delta(a^*)|a^*|$ kelib chiqadi.

Sonning yozilishidagi, chap tomondan birinchi noldan farqli raqam dan boshlab, hamma raqamlari *ma'noli raqamlar deyiladi*.

Agar $\Delta a^* \leq \frac{1}{2}10^{m-n+1}$ tengsizlik bajarilsa, u holda taqribiy

$$a^* = \alpha_m 10^n + \alpha_{m-1} 10^{n-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \dots$$

sonning birinchi n ta ma'noli raqam i *ishonchli raqamlar deyiladi*.

Agar taqribiy a^* soni n ta ishonchli raqam ga ega bo'lsa, u holda

$$\delta a^* \leq \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

tengsizlik o'rinlidir.

Funksiya xatoligi

Faraz qilaylik, differentsiallanuvchi

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Funksiya argumentlari x_i larning absolyut xatoliklari Δx_i ($i = \overline{1, n}$) lar berilgan bo'lsin. Odatda Δx_i lar kichik miqdorlar bo'lgani uchun ularning ko'paytmalari, kvadratlari va yuqori darajalarini e'tiborga olmasak ham bo'ladi. Shuning uchun

$$|\Delta U| \approx \left| \partial f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Demak,

$$|\Delta U| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Funksiya absolyut xatoligi $|\Delta U|$ ni $|U|$ ga bo'lib yozsak, δu uchun ifodaga ega bo'lamiz:

$$\delta u \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{U} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Agar teng ta'sir prinsipi o'rinli bo'lsa, u holda

$$\Delta(x_i) = \frac{\Delta(U)}{n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Bu yerda $\Delta(U)$ ma'lum deb olingan, $\Delta(x_i)$ – limit absolyut xatolik.

Teorema 1. Algebraik

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

tenglamaning barcha koeffisientlari haqiqiy va $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$ bo'lsin. U holda (1) tenglamaning barcha ildizlari

$$r = \frac{1}{1 + A_1} < |x| < 1 + A = R$$

xalqa ichida yotadi. Bu yerda

$$A = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|, \quad A_1 = \max_{0 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|. \quad (2)$$

Shuni eslatish lozimki, (1) tenglamaning barcha musbat ildizlari (r, R) oraliqda, barcha manfiy ildizlari esa $(-R, -r)$ oraliqda yotadi. Lekin, ildizlarning chegarasi uchun bu baholar ancha qo'poldir. Quyidagi teoremlar bunga nisbatan yaxshiroq baholarni beradi.

Lagranj teoremasi. Agar (1) tenglamaning manfiy koeffisientlaridan eng birinchisi (chapdan) a_k bo'lib, B manfiy koeffisientlarning absolyut qiymatlari bo'yicha eng kattasi bo'lsa, u holda musbat ildizlarning yuqori chegarasi

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \quad (3)$$

son bilan ifodalanadi.

Nyuton teoremasi. Agar $x = c$ uchun $f(x)$ ko'phad va uning $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ hosilalari nomanfiy, ya'ni $f^{(k)}(c) \geq 0, \quad k = \overline{0, n}$, bo'lsa u holda $R = c$ ni (1) tenglamaning musbat ildizlari uchun yuqori chegara deb olish mumkin.

Quyidagi ko'phadlarni hosil qilaylik

$$f_1(x) = (-1)^n f(-x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n,$$

$$f_2(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

$$f_3(x) = (-x)^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_0.$$

$f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ larning musbat ildizlarining yuqori chegaralarini mos ravishda R , R_1 , R_2 , R_3 deb belgilaylik, u holda (1) tenglamaning barcha musbat ildizlari $\frac{1}{R_2} \leq x^+ \leq R$, hamma manfiy ildizlari $-R_1 \leq x^- \leq -\frac{1}{R_3}$ tengsizliklarni qanoatlantirishini ko'rish mumkin.

Misol. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari chegarasini toping.

Yechish. Teorema 1 ga asosan $a_0 = 1$, $A = 8$. Demak, $R = 1 + 8 = 9$, ya'ni tenglamaning ildizlari $(-9; 9)$ oraliqda joylashgan.

Lagranj teoremasini qo'llasak, $a_0 = 1$, $k = 2$, $B = 8$. Musbat ildizlar uchun yuqori chegara

$$R = 1 + \sqrt{\frac{8}{1}} = 1 + 2\sqrt{2} < 4$$

bo'ladi. Berilgan tenglamada $x = -x$ almashtirish qilsak $f_1(x) = x^4 - 5x^2 - 8x - 8 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama musbat ildizlari uchun yuqori chegarani Lagranj teoremasiga ko'ra aniqlaymiz: $a_0 = 1$, $k = 2$, $B = 8$ bo'lib, $R_1 < 4$ ligi kelib chiqadi, ya'ni ildizlar $(-4; 4)$ oraliqda yotadi.

Endi Nyuton teoremasini qo'llab ko'ramiz:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 5x^2 + 8x - 8, \\
f'(x) &= 4x^3 - 10x + 8, \\
f''(x) &= 12x^2 - 10, \\
f'''(x) &= 24x, \\
f^{IV}(x) &= 24.
\end{aligned}$$

Bundan ko'rinib turibdiki, $x > 2$ uchun $f^{(k)}(2) > 0$, $k = \overline{0,4}$, demak, $c = 2$ musbat ildizlarning yuqori chegarasi ekan. Endi $f_1(x) = 0$ tenglama uchun ildizlarning yuqori chegarasini topamiz

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^4 - 5x^2 - 8x - 8, \\
f_1'(x) &= 4x^3 - 10x - 8, \\
f_1''(x) &= 12x^2 - 10, \\
f_1'''(x) &= 24x, \\
f_1^{IV}(x) &= 24.
\end{aligned}$$

$f_1^{(k)}(x) > 0$, $k = \overline{0,4}$ shartlarda $x > 3$ uchun bajarilishini aniqlash qiyin emas. Demak, berilgan tenglamaning barcha haqiqiy ildizlari $(-3; 2)$ oraliqda yotar ekan.

MA'RUZA 2. NYUTON USULI. YUQORI TARTIBLI ITERASTION JARAYON QURISHDA CHEBISHEV USULI. CHIZIQLI ALGEBRANING TAQRIBIY USULLARI. YAKOBI, ZEYDEL VA ODDIY ITERASTIYA USULLARI

Reja .

- 1. Kirish .**
- 2. Oddiy iterasiya usuli.**
- 3. Nyuton usuli .**
- 4. O'zgartirilgan Nyuton usuli .**
- 5. Nyuton usulining yaqinlashishi .**

Tayanch iboralar: matematika, metod (usul), model, masala, tenglama, operator, to'g'ri masala, teskari masala.

Kirish.

Haqiqiy o'zgaruvchili uzluksiz $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$$f(x)=0 \quad (1)$$

tenglamaning ildizlari yoki $y=f(x)$ funksiyaning nollarini topish talab qilingan bo'lsin. Algebraik ko'phadlar holida tenglamaning, ildizlari kompleks bo'lishini bilamiz. Shuning uchun masalani yana iam aniqroq qo'yish lozim. (1) - tenglamaning kompleks tekislikning biror-bir sohasidagi ildizlarini toping degan masala qo'yish , yana iam aniqroq bo'ladi. Masalani yechish ikki bosqichdan iboratdir. Birinchi bosqichda ildizlarning joylashish sohasi aniqlanadi va ularni ajratishadi, ya'ni ier birida birta ildizni o'z ichida saqlovchi sohalar aniqlanadi. Bundan tashqari yana karrali ildizlar va ularning karrali soni aniqlanadi. Shuning bilan birga ildizlarga biror-bir boshlang'ich yaqinlashishi topiladi. Ikkinchi bosqichda boshlang'ich berilganlardan foydalanib qidirilayotgan ildizni aniqlashtiruvchi iterasion jarayon quriladi.

Ixtiyoriy tenglamaning ildizlari joylashgan sohani aniqlaydigan biror - bir yaxshi usul yo'q.

Algebraik tenglamalar ildizlarining joylashishini aniqlovchi usullar ancha yaxshi o'rganilgan va bu usullarning bir qanchasi algebra kursidan sizga ma'lum.

Chiziqlimas tenglamalarni yechish usullari asosan iterasion bo'lib, ular qidirilayotgan yechimga (ildizga) yetarlicha yaqin bo'lgan boshlang'ich berilganning ma'lumligini (berilishini) talab qiladilar.

Oddiy iterasiya usuli.

Bu usul (1)- tenglamani ekvivalent bo'lgan

$$x=S(x) \quad (2)$$

tenglamaga almashtirilib iterasiyalar

$$x_{k+1}=S(x_k), k=0,1,\dots \quad (3)$$

qoida bilan tashkil qilinadilar. Bunda x_0 boshlang'ich yaqinlashish beriladi.

Iterasion ketma-ketlikning yaqinlashishi uchun $S(x)$ funksiya katta rol o'ynaydi.

Bu funktsiyani turli usullar bilan aniqlash mumkin.

Odatda bu funksiya

$$S(x) = x + \tau(x)f(x) \quad (4)$$

ko'rinishda aniqlanadi, bunda $\tau(x)$ ildiz qidirilayotgan sohada o'z ishorasini o'zgartirmaydigan funksiya. Bu usulning $|S'(x)| < 1$ bo'lganda yaqinlashishni keyinroq ko'rsatamiz. Xususiy iolda $\tau(x) = \tau = \text{const}$ bo'lganda

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

relaksasiya usuli deb aytiladi.

Optimal τ parametrni tanlash uchun relaksasiya tenglamasida

$$z_k = x_k - x_*$$

almashtirish bajarib

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} = f(x_* + z_k)$$

xatolik tenglamasini hosil qilamiz.

O'rta qiymat haqidagi teorema asosan

$$f(x_* + z_k) = f(x_*) + z_k f'(x_* + \Theta z_k) = z_k f'(x_* + \Theta z_k)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda $\Theta \in (0, 1)$. Shunday qilib relaksasiya usulining xatoligi uchun

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} = f'(x_* + \Theta z_k) z_k$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan

$$|z_{k+1}| \leq |1 + \tau f'(x_* + \Theta z_k)| |z_k| \leq \max |1 + \tau f'(x_* + \Theta z_k)| |z_k|$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Agar ildizning biror bir atrofida

$$f'(x) < 0, \quad 0 < m_1 < |f'(x)| < M_1 \quad (6)$$

munosabatlar bajarilsa

$$|z_{k+1}| \leq \max_x |1 + \tau f'(x_* + \Theta z_k)| |z_k| \leq \max \{1 - \tau m_1, 1 - \tau M_1\} |z_k|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib optimal parametrni aniqlash

$$q(\tau) = \max\{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\}$$

funksiyaning $\square$ bo'yicha minimumini topishga olib kelindi. $q(\square)$

funksiyaning grafigidan uning minimumi

$$\{|1 - \tau M_1| = |1 - \tau m_1|\}$$

shartdan aniqlanishi lozim ekanligi kelib chiqadi va

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{(M_1 + m_1)}$$

bo'ladi. $\square$ - ning bu qiymatida

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{m_1}{M_1},$$

Shu sababli xatolik uchun

$$|z_k| < \rho_0^k |z_0|, \quad k = 0, 1, \dots$$

baho o'rirlidir.

Nyuton usuli.

Faraz qilamiz boshlang'ich yaqinlashish x_0 ma'lum bo'lsin. $f(x)$ funksiyani Teylor qatorining kesmasi bilan almashtiramiz.

$$f(x) \approx H_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

va keyingi yaqinlashish sifatida $H_1(x) = 0$ tenglama ildizini olamiz, ya'ni

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

qilib olamiz.

Umuman, agar x_k yaqinlashish ma'lum bo'lsa, Nyuton usuli bo'yicha x_{k+1} yaqinlashishi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

kabi aniqlanadi.

Nyuton usuli, boshqacha yana urinmalar usuli ham deb aytiladi, chunki x_{k+1} nuqta $f(x)$ funksiya grafigining $(x_k, f(x_k))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning absissa o'qi bilan kesishgan nuqtasining absissa sidi. Bu usulning yaqinlashishi keyinroq ko'rsatiladi. Jozir bu usulning o'ziga xos xususiyatlarini bayon etamiz.

Birinchidan usul kvadratik yaqinlashishga ega, ya'ni keyingi qadamdagi yaqinlashish xatoligi oldingi qadamdagi xatolikning kvadratiga proporsional:

$$x_{k+1} - x_* = O((x_k - x_*)^2).$$

Ikkinchidan usulning bunday yaqinlashishiga, boshlang'ich yaqinlashishning ildizga yetarlicha yaqin bo'lgandagina kafolat bersa bo'ladi. Agar boshlang'ich yaqinlashish noqulay tanlangan bo'lsa, usul yo sekin yaqinlashadi, yo umuman yaqinlashmasligi mumkin.

O'zgartirilgan Nyuton usuli.

Agar $f'(x)$ hosilaning qiymatini ko'p marta hisoblashdan qutilmoqchi bo'lsalar, unda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

formuladan foydalanadilar.

Bu usul boshlang'ich yaqinlashishga uncha ko'p talab qo'ymaydi, lekin u sekin, faqat birinchi tartibli yaqinlashadi. (10) – usul $f'(x) \neq 0$ bo'lganda nolga bo'lish sodir bo'lmasligiga kafolat beradi.

Kesuvchilar usuli

Bu usul Nyuton usulidan $f'(x_k)$ ni

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

chekli ayirma bilan almashtirishdan hosil bo'ladi.

Natijada

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

ikki qadamli iterasion usul hosil bo'ladi. (9) - usulda oldin ikkita boshlang'ich x_0, x_1 yaqinlashishlarni berishga to'g'ri keladi. Bu usulning geometrik talqini quyidagidan iborat: (x_{k-1}, x_k) oraliqda $y = f(x)$ funksiya grafigi $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ va $(x_k, f(x_k))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan almashtirilib uning absissa o'qi bilan kesishgan nuqtasi keyingi yaqinlashish sifatida olinadi.

Oddiy iterasiya usulining yaqinlashishi.

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

tenglamani ekvivalent

$$x = S(x) \quad (2)$$

ko'rinishda yozamiz va x_0 dastlabki yaqinlashishni tanlab olib

$$x_{k+1} = S(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

oddiy iterasiyani qaraymiz. (3)-iterasiya yaqinlashadi deb aytiladi, agar $\{x_k\}$ ketma-ketlik $k \rightarrow \infty$, limitga ega bo'lsa. quyidagi teoremda (2)-tenglamaning yechimi mavjudligi va yagonaligiga kafolat beruvchi shartlar bayon qilinadi.

Agar to'plamning ixtiyoriy x', x'' nuqtalari uchun

$$|S(x') - S(x'')| \leq q|x' - x''| \quad (4)$$

tengsizlik bajarilsa $S(x)$ funksiya to'plamda Lipshits shartini qanoatlantiruvchi deb aytiladi (yoki lipshits uzluksiz) kelajakda x lar to'plami sifatida

$$U_r(a) = \{x : |x - a| \leq r\} \quad (5)$$

markazi a - da bo'lgan uzunligi $2r$ ga teng kesma qaraladi.

Teorema. Agar $S(x)$ $U_r(a)$ kesmada $q \in (0, 1)$ o'zgarmasli lipshits uzluksiz bo'lib,

$$|S(a) - a| \leq (1 - q)r \quad (6)$$

bajarilsa, unda (2)- tenglama $U_r(a)$ da yagona x^* yechimga ega bo'lib, (3)- iterasion ketma-ketlik ixtiyoriy $x_0 \in U_r(a)$ uchun x^* ga yaqinlashadi.

Xatolik uchun

$$|x_k - x^*| \leq q^k |x_0 - x^*|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

(tengsizlik) baho o'rinli bo'ladi.

Isbot. Eng avval $x_k \in U_r(a)$ $k=1, 2, \dots$ ekanligini isbot qilamiz. Faraz qilamiz $x_j \in U_r(a)$ bo'lsin, $x_{j+1} \in U_r(a)$ ekanligini isbot qilamiz.

$$x_{j+1} - a = S(x_j) - a = (S(x_j) - S(a)) + (S(a) - a)$$

tenglikdan

$$|x_{j+1} - a| \leq |S(x_j) - S(a)| + |S(a) - a|$$

ekanligi ma'lum bo'ladi.

Bundan lipuvist - uzluksizlikni, indukstiya farazini va (6)- ni inobatga olib

$$|S(x_j) - S(a)| \leq q|x_j - a| \leq qr, \quad |x_{j+1} - a| \leq qr + (1 - q)r \leq r,$$

ya'ni $x_{j+1} \in U_r(a)$ ekanligini hosil qilamiz.

Endi ikki qo'shni x_{j+1} va x_j yaqinlashishlar orasidagi farqni baholaymiz.

$$x_{j+1} - x_j = S(x_j) - (Sx_{j-1})$$

va barcha x_j lar $U_r(a)$ dan bo'lganligi uchun

$$|x_{j+1} - x_j| \leq q|x_j - x_{j-1}|$$

yoki

$$|x_{j+1} - x_j| \leq q^j |x_1 - x_0|, \quad j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

(8)- baho $\{x_k\}$ ketma-ketlikni fundamental ekanligini ko'rsatishga imkon beradi. Jqiqatdan iam p ixtiyoriy natural son bo'lsin.

Unda

$$x_{k+p} - x_k = (x_{k+1} - x_k) + (x_{k+2} - x_{k+1}) + \dots + (x_{k+p} - x_{k+p-1}) = \sum_{j=1}^p (x_{k+j} - x_{k+j-1}).$$

(8)- ga asosan

$$|x_{k+p} - x_k| \leq |x_1 - x_0| \sum_{j=1}^p q^{k+j-1} = q^k \frac{1-q^p}{1-q} |x_1 - x_0| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|,$$

ya'ni

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|, \quad k, p = 1, 2, \dots \quad (9)$$

bu tengsizlikdan $k \rightarrow \infty$, o'ng tomoni nolga intiladigan bo'lganligi uchun va p - ga bog'liq bo'lmaganligi uchun $\{x_k\}$ ning fundamentalligi kelib chiqadi.

Demak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_* \in U_r(a)$$

(3)- da limitga o'tib va $S(x)$ funksiyaning uzluksizligini hisobga olib

$$x_* = S(x_*)$$

ekanligiga, ya'ni x_* ildiz ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Faraz qilamiz x_*'

(2)- ning $U_r(a)$ - ga tegishli boshqa biror bir ildizi bo'lsin. Unda

$$|x_* - x_*'| = |S(x_*) - S(x_*')|$$

va teoremaning shartiga ko'ra

$$|x_* - x_*'| \leq q |x_* - x_*'|.$$

Bunda $q < 1$ bo'lganligi uchun, oxirgi tengsizlik $x_* = x_*'$ bo'lgandagina bajariladi, ya'ni yechim birdan-bir ekanligi kelib chiqadi.

(7)- tengsizlikni isbot qilamiz.

(3)- munosabatdan

$$x_{k+1} - x_* = S(x_k) - S(x_*)$$

x_k va $x_* \in U_r(a)$ bo'lganligi uchun

$$|x_{k+1} - x_*| \leq q |x_k - x_*|$$

hosil bo'ladi. Bu tengsizlik barcha $k=0,1,2,\dots$ uchun bajariladi.

Shuning uchun

$$|x_{k+1} - x_*| \leq q^k |x_k - x_*| \leq q^2 |x_{k-1} - x_*| \leq \dots \leq q^{k+1} |x_0 - x_*|.$$

1-Izoh. Agar biror bir iterasion usul uchun $|x_k - x_*| \leq M_1 q^k |x_0 - x_*|$ bajarilsa, bunda $q \ll M_1$ k-ga bog'liqmas bo'lsa, unda iterasion usul chiziqli q maxrajli geometrik progressiya tezligida yaqinlashadi deb aytiladi.

2-Izoh. (9) - da k- ni tanlab olib p- ni cheksizga intiltiramiz, unda

$$|x_* - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|$$

hosil bo'ladi. Bu tengsizlikning o'ng tomonida x_1 va x_0 yaqinlashishlar turadi, q-ma'lum son. Shu sababli bu tengsizlikdan iterasiya jarayonini to'xtatish uchun foydalanish qulaydir.

1-Natija: Agar barcha $x \in U_r(a)$ uchun

$$|S'(x)| \leq q < 1 \quad (12)$$

bajarilib, (6) -shart o'rinli bo'lsa va $x_0 \in U_r(a)$ bo'lsa, (2)- tenglama birdan bir $x_* \in U_r(a)$ yechimga ega, (3)- usul yaqinlashadi va (7)- baho o'rinlidir.

Jaqiqatdan iam ,(12)-dan

$$|S(x') - S(x'')| = |S'(\xi)| |x' - x''| \leq |S'(\xi)| |x' - x'| \leq q |x' - x''|$$

2- Natija. Faraz qilamiz (2)- tenglama x_* - yechimga ega bo'lsin, $S(x)$ funksiya

$$U_r(x_*) = \{x : |x - x_*| \leq r\} \quad (13)$$

kesmada uzluksiz differentsiallanuvchi va $|S'(x_*)| < 1$ bo'lsin. Unda shunday $\delta > 0$ mavjudki $U_r(x_*)$ kesmada (2)- tenglama boshqa ildizga ega bo'lmaydi va faqat $x_0 \in U_r(x_*)$ bo'lganda (3)- usul yaqinlashadi.

Nyuton usulining yaqinlashishi.

Oddiy iaqiqiy ildiz. Faraz qilamiz

$$f(x)=0 \quad (1)$$

tenglama oddiy iqiqiy x^* ildizga ega bo'lsin, $f(x^*)=0$ va $f'(x^*) \neq 0$ bo'lsin. Faraz qilamiz $f(x)$ funksiya x^* ildizning yetarlicha yaqin atrofida ikki marta uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,\dots, \quad (2)$$

Nyuton usulini tadqiq etamiz. Eng avval (2)- ni oddiy iterasiya usulining xususiy ioli sifatida qaraymiz:

$$x_{k+1} = S(x_k), \quad k=0,1,\dots \quad (3)$$

$$S(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (4)$$

Oldin, biz (3)- usulning yaqinlashishi uchun ildizning yetarlicha yaqin atrofida

$$|S'(x)| \leq q-1 \quad (5)$$

tengsizlikning bajarilishi etarli ekanligini ko'rsatgan edik.

(4)- funksiya uchun

$$S'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

munosabat o'rinli.

Agar x^* , $f(x)$ ning ildizi bo'lsa, unda $S'(x^*)=0$ bo'ladi. Shu sababli ildizning shunday atrofi borki (5) - tengsizlik bajariladi. Demak x_0 boshlang'ich yaqinlashishni shunday tanlab olish mumkinki Nyuton usuli yaqinlashadi. Bu yaqinlashish oddiy yaqinlashish bo'lmasdan u aslida kvadratik yaqinlashishdir.

Quyidagi teorema Nyuton usulining kvadratik yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.

1-teorema. Faraz qilamiz x^* (1)-tenglamaning oddiy iqiqiy ildizi bo'lib

$$U_r(x^*) = \{x : |x-x^*| < r\}$$

atrofda $f'(x) \neq 0$ bo'lsin. Faraz qilamiz $f''(x)$, $U_r(x^*)$ atrofda uzluksiz va

$$0 < m_1 = \inf_{x \in U_r(x^*)} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in U_r(x^*)} |f''(x)| \quad (6)$$

bo'lib ,

$$\frac{M_2|x_0 - x_*|}{2m_1} < 1 \quad (7)$$

bo'lsin. Unda agar $x_0 \in U_r(x_*)$ bo'lsa, (2)- Nyuton usuli yaqinlashadi va xatolik uchun

$$|x_k - x_*| = q^{2^k - 1} |x_0 - x_*| \quad (8)$$

baho o'rinli , bunda

$$q = \frac{M_2|x_0 - x_*|}{2m_1} < 1.$$

MA'RUZA 3. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTMASINI YECHISHNI TAQIRIBIY USULLARI GAUS METODI. DETERMINANTNI HISOBLASH. ZEYDEL VA ODDIY ITERASTIYA USULLARI.

Reja:

1. Gauss usuli .
2. Hisoblash formulalari .
3. Amallar sonini hisoblash .
4. Gauss usulining qo'llanish sharti .
5. Determinantni hisoblash.
6. Kvadrat ildizlar usuli
7. Zeydel va oddiy iteratsiya usuli

Tayanch iboralar: tenglamalar sistemasi, metod (usul), model, masala, tenglama, operator, to'g'ri masala, teskari masala.

Gauss usuli.

$$Ax=f \quad (1)$$

Chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu yerda A - $n \times n$ -matritsa, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - topilishi lozim bo'lgan, f - berilgan vektorlar.

[illegible]

Bu yerda

(5)- sistemaning matritsasi

ko'rinishga ega.

Bunday ko'rinishli matritsani

kabi belgilash qabul qilingan.

Bu yerda "x" belgi bilan nol bo'lmagan elementlar belgilangan. (5) - sistemada x_1 - noma'lum faqat 1-tenglamada bor bo'lib, boshqa tenglamalardan yo'qotilgan. Bundan so'ng

sistema bilan ishlaymiz.

Shunday qilib Gauss usulining birinchi qadami amalga oshirildi. Agar $a_{22}^{(1)} \neq 0$, bo'lsa, unda (7) - sistemadan xuddi birinchi qadamdagidek x_2 - ni yo'qotib, (2) - sistemaga ekvivalent bo'lgan matritsasi

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{bmatrix}$$

Bunda (5) - sistemaning birinchi tenglamasi o'zgarishsiz qoladi. Xuddi shunday $x_3, x_4, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarni yo'qotib, (2) - sistemaga ekvivalent bo'lgan

$$\begin{aligned} x_1 + s_{12}x_2 + \dots + s_{1n}x_n &= y_1, \\ x_2 + \dots + s_{2n}x_n &= y_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} + s_{n-1,n}x_n &= y_{n-1}, \\ x_n &= y_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Bu sistemasi matritsasi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Bunday matritsalarni yuqori uchburchakli matritsa deb aytish qabul qilingan.

(8)- sistemani hosil qilish Gauss usulining to'g'ri yo'li deb aytiladi. Gauss usulining teskari yo'li $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ -larni ketma-ket topishdan iborat. (8) - sistema matritsasi uchburchakli bo'lganligi uchun $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ noma'lumlarni ketma-ket topish mumkin.

Haqiqatan iam $x_n=y_n$, $x_{n-1}=y_{n-1} - c_{n-1}y_n$ va iokazo.

Teskari yo'lning umumiy formulalari:

$$X_n = Y_n.$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^n C_{ij} x_j, \quad i=n-1, n-2, \dots, 1.$$

(10)

kabi yoziladilar.

Hisoblash formulalari.

EHM yordamida sistemani yechish uchun dastlabki A matritsani (9)-ko'rinishdagi uchburchak matritsaga almashtiradigan va o'ng tomonlarni almashtiradigan algoritmni ko'rsatish yetarli.

Bu formulalarni chiqaramiz.

Faraz qilamiz, to'g'ri yo'lning $k-1$ qadami bajarilgan bo'lsin. Unda sistema quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

[illegible]

Bu sistemaning

$$a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = f_n^{(k-1)}$$

k - tenglamasini qaraymiz va $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ deb faraz qilamiz.

Bu tenglamaning ier ikkala tomonini $a_{kk}^{(k-1)}$ -ga bo'lib

$$X_k S_{k,k+1} X_{k+1} + \dots + S_{kn} X_n = Y_k \quad (12)$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerda

$$c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j=k+1, k+2, \dots, n$$

$$y_k = \frac{f_k^{(k+1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Bundan so'ng (12) - tenglamani navbat bilan $a_{ik}^{(k-1)}$, $i=k+1, k+2, \dots, n$ koefitsientlarga ko'paytirib hosil bo'lgan tenglamani i -tenglamadan ayiramiz. Natijada (11) - sistemaning keyingi tenglamalar guruhi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x_k + s_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + s_{kn}x_n = y_k,$$

$$a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n = f_{k+1}^{(k)},$$

.....

$$a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{n,n}^{(k)}x_n = f_n^{(k)},$$

bu yerda

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - c_{kj}a_{ik}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, \dots, n,$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k, \quad i = k+1, k+2, \dots, n.$$

Shunday qilib Gauss usulining to'g'ri yo'lida koeffitsientlar quyidagicha almashadilar.

$$a_{kj}^{(0)} = a_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = k+1, k+2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - c_{kj}a_{ik}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (14)$$

O'ng tomonlar

$$f_k^{(0)} = f_k, \quad y_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k, \quad i = k+1, k+2, \dots, n, \quad (16)$$

c_{ij} koeffitsientlar va y_i o'ng tomonlar $i = 1, 2, \dots, m, \quad j = i+1, i+2, \dots, n$ (10) - formulalar yordamida teskari harakatni amalga oshirishda foydalanish uchun EHM xotirasida saqlanishlari kerak.

Gauss usulini qo'llanishga qo'yiladigan shart $a_{kk}^{(k-1)}$ - larning nolga teng emasliklaridadir. $a_{kk}^{(k-1)}$ - yetakchi element deyiladi.

Agar biror - bir qadamda yetakchi element nolga teng bo'lmasdan o'nga yaqin bo'lsa ham xatoliklarning yig'ilib borishi natijasida asl yechimdan uzoqlashib borish sodir bo'lishi mumkin. Bu vaziyatdan chiqish uchun $a_{kk}^{(k-1)}$ - elementni $a_{ij}^{(k-1)}, i = k+1, \dots, n$ koeffitsientlarning boshqasi bilan almashtirish lozim.

Amallar sonini hisoblash.

1)(13)- formulalar yordamida c_{kj} - koeffitsientlarni hisoblash $k=1,2,\dots,n$,
 $j=k+1,k+2,\dots,n$

$$\sum_{k=1}^n (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

marta bo'lish amalini bajarishni talab qiladi.

2) (14) - formulalar yordamida $a_{ij}^{(k)}$ - larni hisoblash

$$\sum_{k=1}^n (n-k)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

marta ko'paytirishni talab etadi.

Shunday qilib C - matritsaning nolga teng bo'lmagan s_{ij} elementlarini topish

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n^2-1)n}{3}$$

marta ko'paytirish va bo'lish amallarini bajarishni talab etadi. Ko'paytirish va bo'lish, qo'shish va ayirishga nisbatan ko'p vaqtni talab qiladigan bo'lganligi uchun biz bu yerda ko'paytirish va bo'lish amallari sonini hisoblash bilan shuullanamiz. qo'shish va ayirish amallari soni xuddi shuningdek hisoblanadi.

(15) - formulalar yordamida y_k o'ng tomonlarni hisoblash n ta bo'lishni va

(16)- formula orqali $f_i^{(k)}$ -larni hisoblab topish

$$\sum_{k=1}^n (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

ko'paytirishni talab etadi.

Shunday qilib (8) - sistema o'ng tomonini hisoblash

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

bo'lish va ko'paytirishlarni talab etadi.

Gauss usulining to'g'ri yulini amalga oshirish uchun

$$\frac{(n^2-1)n}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ko'paytirish va bo'lish amallarini bajarish zarur. (10) - formulalar yordamida Gauss usulining teskari yo'lini bajarish uchun

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$$

ko'paytirishni bajarish kerak.

Shunday qilib Gauss usulini amalga oshirish uchun

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n^2 + 3n - 1)}{3}$$

ko'paytirish va bo'lishlarni bajarish lozim.

Gauss usulining qo'llanish sharti.

1) Gauss usuli matritsani ko'paytuvchilarga ajratish bilan bo'lliqligi.

Biz yuqorida Gauss usuli

$$Ax=f$$

sistemani ekvivalent bo'lgan

$$Sx=y,$$

sistemaga almashtirishini ko'rsatdik.

f va y vektorlarning bo'llanishini aniqlaymiz. Buning uchun (16) - formulalarga murojaat qilamiz.

Bu formulalardan :

$$f_1 = a_{11}y_1, f_2 = a_{21}y_1 + a_{22}^{(1)}y_2$$

umuman

$$f_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{ij}y_j, i=1,2,\dots,n \quad (17)$$

Bu yerdagi b_{ij} - lar sonli koeffitsientlar bo'lib, $b_{jj} = a_{jj}^{(j-1)}$.

(17)-munosabatni

$$f = By \quad (18)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda V -quyi uchburchakli matritsa bo'lib, bosh diagonal elementlari

$$a_{jj}^{(j-1)}, j=1,2,\dots,n, (a_{11}^{(0)} = a_{11})$$

iborat. Gauss usulidagi farazga ko'ra $a_{jj}^{j-1} \neq 0$. Shu sababli V^{-1} mavjuddir.

(18)-munosabatdan $y=B^{-1}f$ ni topib $x=C^{-1}B^{-1}f$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$BCx=f \quad (19)$$

kelib chiqadi.

Bu tenglamani (1)- tenglama bilan taqqoslab quyidagi xulosaga kelimiz. Gauss usuli qo'llanilganda A matritsani ikkita uchburchakli matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida tasvirlanganligini ko'ramiz:

$$A=VS. \quad (20)$$

Bu yerdagi S bosh diagonalidagi elementlari birga teng bo'lgan yuqori uchburchakli matritsa bo'lib, V- esa bosh diagonalidagi elementlar noldan farqli bo'lgan quyi uchburchakli matritsadir. Endi Gauss usulini quyidagicha talqin qilish mumkin. Faraz qilamiz A matritsa va f vektor berilgan bo'lsinlar. Avval A matritsani ikkita uchburchak matritsalar ko'paytmasi ko'rinishiga keltirib, undan so'ng

$$By=f \quad (21)$$

$$Cx=y \quad (22)$$

sistemalarni echadilar. $A=VS$ ko'paytuvchilarga ajratish Gauss usulining to'g'ri yo'liga, (21), (22)- sistemalarni yechish Gauss usulining teskari yo'liga mos keladi.

Shunday qilib Gauss usuli yordamida qanday shartlar bajarilganda (1)- sistemani yechish mumkin degan savol tutiladi.

Bunga javob quyidagicha bo'ladi.

A matritsani (20) ko'rinishda yozib bo'lganda Gauss usulini qo'llash mumkin degan xulosaga kelimiz. Lekin qaysi shartlar bajarilganda A matritsani (20) ko'rinishida yozish mumkin degan savol tutiladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Agar A matritsaning Δ_j burchak minorlari noldan farqli bo'lsalar; $\Delta_j \neq 0$, $j=1,2,\dots,n$, unda A matritsani birdan-bir $A=LU$ ko'rinishida tasvirlash mumkin.

Bu yerdagi burchak minorlar quyidagilardan iborat:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A$$

L - diagonal elementlari nol bo'lmagan quyi uchburchakli matritsa, U- bosh diagonali elementlari birga teng bo'lgan yuqori uchburchakli matritsadir. Bu teoremaning isbotini, matematik induktsiya usulidan foydalanib isbot qilish o'kuvchiga iavola etiladi.

Natija. A matritsaning xamma burchak minorlari noldan farqli bo'lganda va faqat shundagina Gauss usulini qo'llash mumkin.

Gaussning bosh elementni tanlash usuli

Usulning asosiy g'oyasi.

$$Ax=f \tag{1}$$

sistema yagona yechimga ega bo'lib, burchak minorlari nolga teng bo'lishi mumkin. Undan tashqari, oldindan hamma minorlarning nolga teng emasligi ma'lum emas. Bunday hollarda Gaussning oddiy usuli sistemani yechishga qo'l kelmasligi mumkin. Bu qiyinchiliklarni yengishda Gaussning bosh elementni tanlash usuli qo'l keladi. Bu usulning asosiy g'oyasi, keyingi qadamda oddiy yo'qotish emas, balki koeffitsientning moduli eng katta bo'lgan noma'lumni yo'qotishdan iborat. Shunda $\det A \neq 0$ bo'lganda, hisoblash jarayonida nolga bo'lish sodir bo'lmaydi.

Gaussning bosh elementni tanlash usulining turli xillarini

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= f_2, \end{aligned} \tag{2}$$

ikki noma'lumli sistema misolida namoyish qilamiz.

Faraz qilamiz $|a_{12}| > |a_{11}|$ bo'lsin.

Unda birinchi qadamda x_2 - ni yo'qotamiz.

Bu usul ,(2)-sistemani

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 &= f_1, \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 &= f_2, \end{aligned} \quad (3)$$

sistema ko'rinishida yozishga ekvivalent. Undan so'ng (3) - sistemani yechishga oddiy Gauss usulini qo'llash lozim. Ko'rsatilgan usul Gaussning bosh elementni satr bo'yicha tanlash usuli deb aytiladi. Bu har bir qadamda o'zgaruvchilarni qayta belgilab sistemaga oddiy Gauss usulini qo'llash bilan teng kuchlidir. Yana bosh elementni ustun bo'yicha tanlash usuli ham qo'llaniladi.

Faraz qilamiz, $|a_{21}| > |a_{11}|$ bo'lsin.

(2) - sistemani

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

ko'rinishda qayta yozib birinchi qadamda oddiy Gauss usulini qo'llashdan iborat. Ba'zi hollarda bosh element butun matritsa bo'yicha tanlanadi. Bunda yetakchi element sifatida absolyut qiymat jihatdan eng katta bo'lgan matritsa elementi tanlanadi.

Determinantni hisoblash.

Faraz qilaylik Gauss usulining to'g'iri yo'lida A matritsa $A=LU$ ko'rinishda tasvirlangan bo'lsin. Unda

$$\det A = \det (LU) = \det L \det U = \det L$$

7.Teskari matrtisani topish.

Teskari matrtisani topish

$$AX = E \quad (1)$$

sistemani yechishga ekvivalent. Bu yerda E- birlik Matritsa, X – A matrtisaga teskari bo'lgan matrtisani belgilaydi.

(1) - sistenmani

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{ij} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

bu yerda $\delta_{ij}=1$, agar $i=j$ bo'lsa, aks xolda $\delta_{ij}=0$ ko'rinishida yozish mumkin.

Bu sistema bir xil A matritsali, lekin har xil o'ng tomonli n-ta sistemadan iborat.

Bu sistemalar

$$AX^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T \quad \text{va} \quad \delta^{(j)} \quad (3)$$

j- elementi birga teng bo'lib, qolganlari nollardan iborat vektordir. Teskari matritsani topish uchun n^3 -ta ko'paytirish va bo'lishni bajarish kerak bo'ladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining boshlang'ich shartlarining o'zgarishga nisbatan sezgirligi (shartlanganlik).

1) Chiziqli tenglamalar sistemasining turg'unligi.

Masalalar yechishda sonli usullardan foydalanish uchun masalaning xususiyatlarini va uni yechish uchun mo'ljallangan algoritm xossalarini bir-biridan farq qilish kerak. Xar qanday matematik masalani yechishdan oldin uning korrektiligi bilan qiziqish kerak.

Masala korrekt qo'yilgan deyiladi, agar masala yechimi mavjud, yagona va boshlang'ich berilganlarga uzluksiz bog'liq bo'lsa. Oxirgi xossa turg'unlik xossasi deb aytiladi. Masalaning korrektiligi uning yechish usulining yaxshi bo'lishiga kafolat emas. Shu sababli yechish usulining xossalari alohida tadqiq qilinishi lozim. Ko'p hollarda nokorrekt masalalarni ham yechishga to'g'iri keladi.

Bu yerda masalaning va uni yechish usullarining korrektiligi n-tartibli A Matritsali

$$Ax=f \quad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini yechish misolida ko'rib chiqiladi, $\det A \neq 0$ bo'lganda va faqat shundagina (1) - sitemaning yechimi mavjud va yagonaligi ma'lum. Bunday holda A^{-1} mavjud bo'lib ,yechim

$$x=A^{-1} f \quad (2)$$

kabi topiladi.

(1) - masalaning korrekt bo'lishi uchun yana yechimning boshlang'ich berilganlarga uzluksiz bog'liqligini aniqlash kerak.

Shu munosabat bilan ikkita savol tug'iladi. Birinchisi : (1) - masalaning boshlang'ich berilganlari nimalar va ikkinchisi: uzluksiz bog'lanishni qanday tushunish kerak?

Birinchi savolga javob berish oson: boshlang'ich berilganlar A matrtisaning a_{ij} elementlari va f - o'ng tomondan iborat. Shularga mos o'ng tomonga nisbatan (faqat f- o'ng tomon o'zgarib A o'zgarishsiz qoladi) turg'unlik va koeffistientlarga nisbatan turg'unlik (faqat A Matrtisaning a_{ij} - koeffistientlari o'zgarib f -o'ng tomon o'zgarishsiz qoladi) va umumiy holdagi turg'unlik hollarini qarash mumkin.

Uzluksiz bog'lanish iaqida gapirish uchun n - o'lchovli vektorlar fazosida biror-bir normani kiritish lozim. n - o'lchovli vektor fazoda ko'pincha norma uch xil aniqlanadi.

$$1) \|x\|_I = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (3)$$

$$2) \|x\|_{II} = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (4)$$

$$3) \|x\|_{III} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Shu normalashtirishga mos A matrtisaning normasi aniqlanadi:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (6)$$

(1) - sistema bilan birga o'zgargan, o'ng tomoni bilan farq qiladigan

$$A\tilde{x} = \tilde{f} \quad (7)$$

sistemani qaraymiz.

Biz o'ng tomonning o'zgarishi yechimni qanchalik o'zgartirishi bilan qiziqamiz. Buning uchun

$$\delta x = \tilde{x} - x, \quad \delta f = \tilde{f} - f$$

belgilashlarni kiritamiz.

Agar

$$\|\delta x\| \leq M \|\delta f\| \quad (8)$$

bo'lsa, unda (1) - sistema o'ng tomonga nisbatan turg'un deb aytiladi.

Bu yerda $M > 0$, f va $\tilde{f}$ larga bog'lik bo'lmagan doimiy sonidir. (8) – baho yechimining o'ng tomonga uzluksiz bog'liqligini ifodalaydi, ya'ni $\|\delta f\| \rightarrow 0$ bo'lganda, $\|\delta x\| \rightarrow 0$ bo'lishini ko'rsatadi.

Masalaning turg'unligi uni sonli yechishda muhim hisoblanadi, chunki ko'p hollarda o'ng tomon $\tilde{f}$ taqribiy bo'lib, uni aniq topishga imkoniyat bo'lmaydi.

Masalan: $\delta f = \tilde{f} - f$ xatolik, yaxlitlash xatoligi natijasida paydo bo'lishi mumkin.

Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, unda (1) - sistema o'ng tomonga nisbatan turg'un bo'ladi. Xaqiqatan ham (1) va (7) – dan $A(\delta x) = \delta f$. Bundan

$$\delta x = A^{-1}(\delta f),$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta f\| \quad (9)$$

ya'ni $M = \|A^{-1}\|$, (8) - tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerdan shuni payqaymizki $\det A$ qancha nolga yaqin bo'lsa, o'ng tomonning xatoligi yechim xatoligidan shuncha ko'p farq qiladi.

Sezgirlik soni.(Shartlanganlik soni).

(8) – bahoda yechim xatoligi va o'ng tomon xatoligi qatnashayapti. (1) - sistemani verguli sirpanuvchi EHM lar yordamida yechilayotgan paytda

$$\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

nisbiy xatoliklar, masala turg'unligining xususiyatini ko'rsatib turadilar.

(1) - dan

$$\|f\| \leq \|A\| \|x\| \quad (10)$$

(9) va (10) ko'paytirsak

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M_A \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad (11)$$

bu yerda

$$M_A = \|A^{-1}\| \|A\| \quad (12)$$

iosil bo'ladi.

Bu bahoda qatnashayotgan M_A sezgirlik soni deb aytiladi va yechim nisbiy xatoligining o'ng tomon nisbiy xatoligidan bog'liklik darajasini aniqlaydi. M_A soni katta bo'lgan matritsalar sezgirligi kuchli matritsalar deb yuritiladi. Matritsasi sezgir sistemalarni yechishda xatoliklar yig'iladi.

Sezgirlik sonining xossalarini keltiramiz:

$$1^{\circ}. \quad M_A \geq 1.$$

$$2^{\circ}. \quad M_A \geq \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}, \text{ bu yerda } \lambda_{\max} \text{ va } \lambda_{\min} \text{ A Matritsaning absolyut qiymati}$$

jixatdan eng katta va eng kichik xos qiymatlari .

$$3^{\circ}. \quad M_{AB} \leq M_A \cdot M_B.$$

Bu xossalarning isboti algebra kursidan ma'lum.

To'la nisbiy xatolik bahosi.

(1)- sistemaning ham o'ng tomoni, ham koeffitsientlari o'zgargan bo'lsin.

(1)- sistema bilan birga

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f} \quad (13)$$

sistemani qaraymiz.

$$\delta A = \tilde{A} - A, \quad \delta x = \tilde{x} - x, \quad \delta f = \tilde{f} - f$$

qilib belgilaymiz.

1-teorema. A matritsaga teskari matritsa mavjud bo'lib

$$\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$$

bo'lsin.

Unda $\tilde{A} = A + \delta A$ teskari matritsaga ega bo'lib, nisbiy xatolik quyidagi bahoga ega:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{M_A}{1 - M_A \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \right), \quad (14)$$

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechishda yaxlitlash xatoligining yechimga ta'siri.

Gauss usuli aniq usullarga mansub bo'lib, chekli sondagi amallar bajarish natijasida yechimning aniq qiymatini topishga imkon beradi.. Ammo boshlang'ich informastiyani EHM ga kiritilganda ular yaxlitlanib xatolik bilan kiritiladilar. Shu sababli hisoblashlarni EHM yordamida bajarganda aniq yechimni deyarli topib bo'lmaydi. Matritsa tartibi qancha katta bo'lsa oxirgi xatolik shuncha katta bo'ladi. Undan tashqari xatolik Matritsaning elementlariga ham bog'liq. Masalan, agar uning determinanti nolga yaqin bo'lsa sistema yechimining xatoligi katta bo'ladi.

Ammo, yaxlitlash xatoliklarining yig'ilib borishi Gauss yoki boshqa sonli usullarni ishga yaroqsiz qilib qo'yadi deb o'ylamaslik kerak. Chunki, odatda yechimni aniq topish talab qilinmasdan, uni biror bir aniqlik bilan topish talab qilinadi. Bunda xatolik talab qilingan chegaralardan tashqariga chiqmasligi muhimdir. Buning uchun yaxlitlash xatoliklari yechimning aniqligiga ta'sirini taxlil qilish lozim. Ko'pgina hisoblash algoritmlarida yaxlitlash xatoligi ta'sirini $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{f}$ sistemani qarab hisobga olish kerak. Bunda yaxlitlash xatoliklari ta'siri ostida (1)-sistemaning yechimi $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{f}$ sistemaning aniq yechimi deb hisoblanadi. Boshqacha qilib aytilganda (1) - sistemani yaxlitlash xatoliklarini hisobga olgan holda yechish jarayoni $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{f}$ sistemani aniq yechishga ekvivalentdir.

Faraz qilamiz f o'ng tomon aniq berilgan bo'lsin. Faraz qilamiz, (1) - sistemani yaxlitlashlar xatoliklarini hisobga olib yechish o'rniga

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f} \quad (15)$$

sistemaning aniq yechimi topilgan bo'lsin. Bunday holda $\delta A = \tilde{A} - A$ matritsa ekvivalent qo'zgashlar matrtisasi deb aytiladi. Jar bir hisoblash algoritmi uchun o'zining ekvivalent qo'zgashlar matrtisasi mavjud, agar δA matrtisa normasining bahosi mavjud bo'lsa, unda yaxlitlash xatoliklari natijasida hosil bo'lgan xatolikni (14) – muvofiq baholash mumkin, ya'ni

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{M_A}{1 - M_A \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (16)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bundan ko'rinib turibdiki yechim aniqligiga ikki narsa: F matrtisaning sezgirlik soni va ekvivalent qo'zlash ta'sir kiladilar. Shuni ta'kidlaymizki, sezgirlik soni algoritmgaga bog'liq emas, balki u (1)-sistema xususiyatini aks ettiradi xolos. Ekvivalent qo'zlash kattaligini soli algoritm aniqlaydi. Shuning uchun ma'lum algoritm bilan ish kurganda ekvivalent qo'zlashni baholash lozim. Masalan Gauss usuli yordamida A Matrtisani ko'paytuvchilarga ajratish natijasida (1)- sistemani yechish, ikkita

$$Ly=f, \quad Ux=y$$

Matrtisalari uchburchakli sistemalarni yechishga olib kelinadi.

Yaxlitlash xatoliklari $Ux=y$ sistemani X yechimi o'rniga qo'zg'algan $\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{y}$ sistemaning $\tilde{x}$ yechimini topishga olib keladi. Xuddi shunday $Ly=f$ sistemaning y yechimi urniga $\tilde{L}\tilde{y} = f$ qo'zg'algan sistema yechimi $\tilde{y}$ topiladi. Shunday qilib (1) - sistema o'rniga $\tilde{A}\tilde{x} = f$ ($\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$) qo'zlotilgan sistema aniq yechiladi deb hisoblash mumkin. $\tilde{A}$ Matrtisani topish uchun Gauss usulidagi barcha formulalarga yaxlitlash xatoliklarini kiritib $\tilde{L}$ va $\tilde{U}$ Matrtisalarni topish lozim. Bundan keyin $\delta A = LU - \tilde{L}\tilde{U}$ Matrtisa normasini aniqlash kerak. Biz bu yerda hisoblashlarni bajarmasdan oxirgi natijani keltiramiz.

Faraz qilamiz, sonlarni EHM da ikkilik sanoq sistemasida tasvirlagandagi mantissaning xonalar soni t - ga teng bo'lsin, unda sonning yaxlitlash xatoligining nisbiy xatolik kattaligining tartibi 2^{-t} bo'ladi. Unda Gauss usuli ekvivalent qo'zIalish Matrtisasi uchun

$$\frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} = O(n2^{-t}),$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli yordamida verguli qo'zIaluvchi EHM da echganda, yaxlitlash xatoliklari yig'ilib yechimni

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(M_A n 2^{-t}) \quad (17)$$

nisbiy xatoligi bilan topishga olib keladi.

X vektorning normasi deb quyidagi uch shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy $\|X\|$ songa aytiladi:

1. $\|X\| \geq 0$ va $X = 0$ bo'lgandagina $\|X\| = 0$;
2. har qanday α son uchun $\|\alpha X\| = |\alpha| \cdot \|X\|$;
3. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ - uchburchak tengsizligi.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ vektorning ko'p uchraydigan normalaridan uchtasini keltiramiz.

1. Kubik norma:

$$\|X\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

2. Oktaedrik norma:

$$\|X\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

3. Sferik norma:

$$\|X\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

A kvadrat matrisaning normasi deb quyidagi to'rt shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy songa aytiladi.

1. $\|A\| \geq 0$ va $A = 0$ bo'lgandagina $\|A\| = 0$;
2. Ixtiyoriy α son uchun $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, xususan, $\|A^p\| \leq \|A\|^p$.

Agar har qanday kvadrat A matrisa uchun va o'lchami matrisa tartibiga teng bo'lgan ixtiyoriy x vektor uchun

$$\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$$

tengsizlik bajarilsa, u holda matrisa normasi vektorning berilgan normasi bilan moslashgan deyiladi.

Har qanday A matrisa uchun Ax vektor normasining uzluksizligiga ko'ra

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (1)$$

tenglikda maksimumga erishiladi, ya'ni shunday $x^{(0)}$ vektor topiladiki, $\|x^{(0)}\| = 1$ va $\|Ax^{(0)}\| = \|A\|$ tengliklar bajariladi.

(1) tenglik bilan kiritilgan matrisa normasi vektorning berilgan normasiga bo'ysungan deyiladi.

Endi matrisaning vektorlarning yuqorida kiritilgan normalariga bo'ysungan normasi ko'rinishlarini keltiramiz.

1. Kubik norma:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

2. Oktaedrik norma:

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

3. Sferik norma:

$$\|A\|_3 = \|A\| = \sqrt{\lambda_1}.$$

Bu erda λ_1 $A'A$ matrisaning eng katta xos soni.

Oddiy iteratsiya usuli

Faraz qilaylik,

$$Ax = b \quad (2)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi biror usul bilan

$$x = Bx + c \quad (3)$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lsin. qanday keltirish kerakligini keyinchalik ko'rsatamiz va dastlabki yaqinlashish vektori $x^{(0)}$ topilgan bo'lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

rekurrent formulalar yordamida topilsa, bunday metod oddiy iteratsiya metodi deyiladi. Agar (4) ketma-ketlikning limiti x^* mavjud bo'lsa, bu limit (2) sistemaning echimi bo'ladi. Haqiqatan (4) limitga o'tsak, $x^* = Bx^* + c$ kelib chiqadi.

Oddiy iteratsiya metodining yaqinlashish shartini keltiramiz.

Teorema 1. (4) oddiy iteratsiya jarayoni ixtiyoriy $x^{(0)}$ da yaqinlashuvchi bo'lishi uchun B matrisaning barcha xos sonlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu teorema nazariy jihatdan foydali, lekin amaliy ishlar uchun yaramaydi. Shuning uchun B matrisaning elementlari orqali ifodalanadigan etarli shartlarni keltiramiz.

Teorema 2. (4) oddiy iteratsiya jarayonining yaqinlashuvchi bo'lishi uchun B matrisaning biror normasi birdan kichik bo'lishi etarlidir.

Teorema 2 etarli shartni quyidagicha ifodalashga imkon beradi.

(4) oddiy iteratsiya metodi yaqinlashishi uchun B matrisaning elementlari quyidagi

$$\max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1, \quad (5)$$

$$\max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1, \quad (6)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \leq \mu < 1, \quad (7)$$

tengsizliklarning birortasini qanoatlantirishi etarlidir.

Endi (2) ni (3) ko'rinishga keltirish xususida to'xtalib o'tamiz.

a) Agar $a_{ii} \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$) bo'lib quyidagi tengsizliklarning

$$\max_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (8)$$

$$\max_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{|a_{jj}|^2} \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|^2 < 1 \quad (10)$$

birortasi bajarilsa, B matrisa quyidagicha

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

bo'lib, mos ravishda (5)-(7) tengsizliklar B matrisa uchun bajariladi va (4) oddiy iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi bo'ladi.

b) A matrisa uchun (8)-(10) tengsizliklarning hech qaysisi bajarilmasa, u holda (2) tenglamalar sistemasida shunday chiziqli almashtirishlar bajarish kerakki, hosil bo'lgan yangi tenglamalar sistemasining koeffitsientlari uchun (8)-(10) tengsizliklarning birortasi o'rinli bo'lishi kerak.

Misol 1. $Ax = b$ sistemani oddiy iteratsiya metodini qo'llash uchun kanonik holga keltiring.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 25 & 1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -20 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -19 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu sistema tenglamalarini mos ravishda 10, 25, -20, 10, -20 sonlariga bo'lib, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$x = Bx + c,$$

bu erda

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & 0,3 & 0,2 & -0,1 \\ 0,04 & 0 & -0,04 & 0,2 & 0,08 \\ 0,1 & 0,05 & 0 & 0,1 & -0,15 \\ 0 & -0,1 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,05 & 0,1 & 0,05 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,44 \\ 0,95 \\ 1 \\ 1,6 \end{pmatrix}.$$

Bu misol uchun (5) dagi yilindilar mos ravishda 0,7; 0,36; 0,4; 0,7; 0,3 bo'lib, $\|B\|_1 = 0,7 < 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish $x^{(0)}$ olib

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c, \quad k=1,2,\dots$$

jarayonni tuzsak, u yaqinlashuvchi bo'ladi va echimni berilgan aniqlikda topish mumkin.

Misol 2. quyidagi sistemani oddiy iteratsiya metodini qo'llash uchun kanonik ko'rinishga keltiring.

$$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 10, \quad a)$$

$$x_1 + 2x_2 - 15x_3 + 3x_4 = 17, \quad b)$$

$$-8x_1 - x_2 + 10x_3 + 19x_4 = 10, \quad c)$$

$$11x_1 - 9x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \quad d)$$

Yechish. Berilgan sistemada quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$a) - c) \Rightarrow 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0,$$

$$d) - a) + c) \Rightarrow x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6,$$

$$b) \quad x_1 + 2x_2 - 15x_3 + 3x_4 = 7,$$

$$a) \quad 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 10.$$

Hosil bo'lgan sistema tenglamalarini mos ravishda 10, -7, -15, 20 sonlariga bo'lib, bu sistemani $x = Bx + c$ ko'rinishga keltiramiz, bu erda $\|B\|_1 = 0,7 < 1$ bo'ladi.

Zeydel metodi

Bu metod oddiy iteratsiya metodidan shu bilan farq qiladiki, hisoblashlar quyidagi sxema asosida bajariladi:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Bu sxemani matrisa ko'rinishga keltirish uchun $A = C + D$ deymiz, bu erda

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U holda $Ax = b$ sistemani $Cx = -Dx + b$ ko'rinishda ifodalab olamiz. Zeydel metodi esa

$$Cx^{(k+1)} = -Dx^{(k)} + b$$

ko'rinishdagi iteratsiya dan iborat. Bu tenglikni $x^{(k+1)}$ ga nisbatan echsak,

$$x^{(k+1)} = -C^{-1}Dx^{(k)} + C^{-1}b$$

hosil bo'ladi. Bu – matrisasi $-C^{-1}D$ bo'lgan oddiy iteratsiya metodining o'zginasi. Teorema 1 ga asosan buni yaqinlashishi uchun $-C^{-1}D$ matrisaning barcha xos sonlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va etarlidir. Bu o'z navbatida quyidagi

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning barcha ildizlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va etarligiga ekvivalentdir. Shuni ko'rsatamiz, ya'ni

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = 0 \text{ va } \det(\lambda C + D) = 0$$

tenglamalar bir xil ildizga ega:

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = \det(C^{-1}C(\lambda E + C^{-1}D)) = \det[C^{-1}(\lambda C + D)] = \det C^{-1} \det(\lambda C + D).$$

Bu erda $\det C^{-1} \neq 0$, demak

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = \det(\lambda C + D).$$

Oddiy iteratsiya metodi bilan Zeydel metodining yaqinlashish sohalari umuman farqli degan xulosaga kelamiz. Haqiqatan ham, shunday sistemalar mavjudki, ular uchun oddiy iteratsiya metodi yaqinlashadi, ammo Zeydel metodi uzoqlashadi va aksinchasi ham o'rinalidir.

Lekin, quyidagi

$$\max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad \max_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

shartlarning birortasi bajarilsa, oddiy iteratsiya ham Zeydel metodi ham yaqinlashuvchi bo'lib, bunda birinchi shart o'rinni bo'lsa, Zeydel metodining yaqinlashishi oddiy iteratsiya metodining yaqinlashidan sekin bo'lmaydi.

MA'RUZA 4. MATRISTANI XOS SON VA XOS VEKTORINI HISOBLASH. XOS QIYMATLARNI TO'LIQ MUAMMOSINI HAL QILISHDA KRILOV VA DANILEVSKIY METODLARI

Reja:

- 1. Matritsani xos son va xos vektorini hisoblash.**
- 2. Xos qiymatlarni to'liq muammosini hal qilishda Krilov va Danilevskiy usullari.**

Tayanch iboralar: Xos qiymat, xos vektor, minimal ko'phad, diagonal minor, nol bo'lmagan vektor.

Agar biror noldan farqli x vektor uchun

$$Ax = \lambda x$$

tenglik bajarilsa, u holda λ son A kvadrat matritsaning xos soni deyiladi. Bu tenglikni qanoatlantiradigan noldan farqli x vektor A matritsaning λ xos soniga mos keladigan xos vektori deyiladi.

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

tenglama A matritsaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) \quad (2)$$

A matritsaning xos yoki xarakteristik ko'phadi deyiladi.

Krilov usuli

Ixtiyoriy noldan farqli $y^{(0)}$ vektor olamiz va $y^{(k)} = A^k y^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$ vektorlarni xosil qilamiz.

Keli-Gamilton munosabatini yozamiz:

$$A^n y^{(0)} - p_1 A^{n-1} y^{(0)} - \dots - p_n y^{(0)} = 0$$

yoki

$$p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y^{(0)} = y^{(n)}$$

vektor tenglama hosil qilinadi. Buni ochib yozaylik

rekurrent formula yordamida topiladi.

Agar (3) tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usulini to'g'ri yo'lini m ta qadami bajarilsa, u holda $y^{(0)}, y^{(1)} \dots y^{(m-1)}$ vektorlar chiziqli erklidir. Shuning uchun (3) tenglamalar o'rniga quyidagi

$$\left. \begin{array}{ccccccc} p_1 y_1^{(m-1)} + p_2 y_1^{(m-2)} + \dots + p_m y_1^{(0)} = y_1^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 y_n^{(m-1)} + p_2 y_n^{(m-2)} + \dots + p_m y_n^{(0)} = y_n^{(m)} \end{array} \right\}$$

tenglamalar sistemasini yechib $p_1, p_2, \dots, p_m$ lar topiladi va $\lambda^m - p_1 \lambda^{m-1} - \dots - p_m = 0$ tenglamadan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ larni topamiz.

$\lambda^m - p_1 \lambda^{m-1} - \dots - p_m$ ko'phad A matritsaning minimal ko'phadi deyiladi.

Xos vektor esa quyidagicha topiladi

$$x^{(i)} = \beta_{i1} y^{(0)} + \dots + \beta_{im} y^{(m-1)},$$

bu erda

$$\begin{aligned} \beta_{im} &= 1 \\ \beta_{im-1} &= \lambda_i - p_1 \\ \beta_{im-2} &= \lambda_i^2 - p_1 \lambda_i - p_2 \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \beta_{i1} &= \lambda_i^{m-1} - p_1 \lambda_i^{m-2} - \dots - p_{m-1} \end{aligned}$$

Misol 1.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matritsaning xarakteristik ko'phadi topilsin.

Yechish. $y^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T$, deb olamiz. U xolda

$$\begin{aligned}
y^{(1)} &= Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} -1, & 2, & -2, & 0 \end{pmatrix}^1 \\
y^{(2)} &= Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 9, & 6, & 0, & 6 \end{pmatrix}^1 \\
y^{(3)} &= Ay^{(2)} = \begin{pmatrix} 3, & 36, & 30, & 0 \end{pmatrix}^1 \\
y^{(4)} &= Ay^{(3)} = \begin{pmatrix} 129, & 132, & 30, & 102 \end{pmatrix}^1
\end{aligned}$$

Endi (3) tenglamalarni yozamiz

$$\left. \begin{aligned} 3P_1 + 9P_2 - P_3 + P_4 &= 129 \\ 36P_1 + 6P_2 + 2P_3 &= 132 \\ 30P_1 + 2P_3 &= 30 \\ 6P_2 &= 102 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$P_1 = 0, P_2 = 17, \quad P_3 = 15, \quad P_4 = -9,$$

$$D(x) = \lambda^4 - 17\lambda^2 - 15\lambda + 9.$$

Misol 2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$$

matritsaning xos son sonlari va xos vektorlari topilsin.

Yechish. $y^{(0)} = (1, 0, 0)^1$ deb

$$y^{(1)} = (5, 3, 3)^1, \quad y^{(2)} = (-29, -15, -15)^1, \quad y^{(3)} = (125, 63, 63)^1$$

larni hosil qilamiz va (3) sistemani yozamiz

$$\begin{aligned}
-29p_1 + 5p_2 + p_3 &= 125 \\
-15p_1 + 3p_2 &= 63 \\
-15p_1 + 3p_2 &= 63
\end{aligned}$$

Bu sistemani yechishda Gauss usulining uchinchi qadami bajarilmaydi, chunki 2

va 3-tenglamalar bir xil, demak $y^{(0)} \quad y^{(1)} \quad y^{(2)} \quad y^{(3)}$ lar chiziqli bo'liq.

$y^{(0)} \quad y^{(1)} \quad y^{(2)}$ larga bo'liq

$$\left. \begin{array}{l} 5p_1 + p_2 = -29 \\ 3p_1 = -15 \end{array} \right\}$$

sistemani tuzamiz. Bundan $p_1 = -5$, $p_2 = -4$ bo'ladi.

$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ deb $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$ ni topamiz. λ_3 ni topish uchun, bizga ma'lum

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

munosabatdan foydalanamiz

$$5 + 14 - 25 = -4 - 1 + \lambda_3$$

$$-6 = -5 + \lambda_3$$

$$\lambda_3 = -1$$

Endi xos vektorlarni topamiz:

$$x^{(i)} = \beta_{i1}y^{(0)} + \beta_{i2}y^{(1)} = (\lambda_i - p_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i - p_1 + 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 - (-5) + 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 - (-5) + 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$x^{(3)}$ ni topish uchun $y^{(0)}$ vektorni boshqacha tanlash kerak.

Danilevskiy usuli

Berilgan matritsa o'xshash almashtirish yordamida Frobenius

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

normal ko'rinishiga keltiriladi. Ma'lumki, P matritsaning xarakteristik ko'phadi $P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \dots - p_n$ bo'ladi [1].

$$A^{(1)} = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11}^{(1)} & a_{n-12}^{(1)} & \cdots & a_{n-1n-1}^{(1)} & a_{n-1n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

hosil qilinadi, so'ng $A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)} = P$ hosil bo'ladi.

Har qadamdagi o'ngdan va chapdan ko'paytiriladigan matritsalarini ko'rinishini yozamiz

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn-1}} & \cdots & -\frac{a_{nn-2}}{a_{nn-1}} & \frac{1}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n-11}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,2}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1n-1}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1n}^{(1)}}{a_{n-1n-1}^{(1)}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

va hokazo. Natijada A matritsa Frobenius normal ko'rinishiga keladi.

$$A^{(n-1)} = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1 = S^{-1} A S = P,$$

$$S = M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_2 \cdot M_1.$$

Danilevskiy usulida xos vektor x quyidagicha topiladi:

$$x = M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_2 \cdot M_1 y$$

bu erda

$$y = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

bo'lib, u P matritsaning xos vektoridir.

Danilevskiy usulidagi noregulyar hol. Danilevskiy usulining $(n-k)$ -qadami bajarilgan bo'lsin va $A^{(n-k)}$ matritsaning $a_{k,k-1}^{(n-k)}$ elementi nolga teng bo'lsin. Navbatdagi $(n-k+1)$ -qadamni odatdagidek bajarib bo'lmaydi. Bunda agar $A^{(n-k)}$ matritsaning $a_{k,k-1}^{(n-k)}$ elementidan hamda, masalan, i -element $(i < k-1)$ $a_{ki}^{(n-k)} \neq 0$ bo'lsa, $(k-1)$ -ustunni i -ustun bilan almashtiramiz va xuddi shu nomerli satrlarni almashtirib yozamiz. Bunday almashtirishdan so'ng odatdagidek Danilevskiy usulini davom etdiramiz. Faraz qilaylik,

$$a_{k1}^{(n-k)} = a_{k2}^{(n-k)} = \cdots = a_{k,k-1}^{(n-k)} = 0$$

bo'lsin. U holda $A^{(n-k)}$ quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi

$$A^{(n-k)} = \begin{bmatrix} B^{(n-k)} & C^{(n-k)} \\ 0 & P^{(n-k)} \end{bmatrix}.$$

Bu erda $P^{(n-k)}$ Frobenius normal formasiga ega bo'lgan $(n-k+1)$ tartibli kvadrat matritsadir. $B^{(n-k)}$ esa $(k-1)$ -tartibli kvadrat matritsa bo'lib, uni odatdagidek Danilevskiy usuli bilan Frobenius normal ko'rinishga keltirish mumkin.

MA'RUZA 5. XOS QIYMATLARNING QISMIY MUAMMOLARINI HAL ETISHDA LEVERE VA BOSHQA METODLAR. MODULI BO'YICHA ENG KATTA XOS SON VA XOS VEKTORNI BERILGAN ANIQLIKDA TOPISH.

Reja:

- 1. Xos qiymatlarning qisman muammolarini hal etishda turli usullar.**
- 2. Moduli bo'yicha eng katta xos son va xos vektorni berilgan aniqlikda topish.**

Tayanch iboralar: Xos qiymat, xos vektor, minimal ko'phad, diagonal minor, nol bo'lmagan vektor.

Xos sonlarni topishning interpolatsiya usuli.

Agar xarakteristik ko'pxad ma'lum bo'lsa uning ildizlarini topish qiyin emas. Masalan uni parabola yoki Nyuton usuli yordamida yechish mumkin. Lekin usullarni qo'llash paytida ko'pxadning qiymatini ko'p marotaba hisoblashga to'g'ri keladi. Shu sababli ko'pxad qiymatini tez hisoblash usullarini qo'llash kerak. Eng soddaga to'g'ri usullardan biri interpolatsiya usuli hisoblanadi. Xarakteristik ko'pxadni tuzish uchun ixtiyoriy $(n+1)$ ta qiymatlarni tanlab Nyutonning interpolatsion ko'pxadini ko'ramiz. Buning uchun $f(\lambda^{(k)}) = \det(A - \lambda^{(k)}E)$ qiymatlarni ya'ni xarakteristik ko'pxad qiymatlarini hisoblash kerak bo'ladi.

Bunda xarakteristik ko'pxad $\frac{2}{3}n^4$ arifmetik amal orqali aniqlanadi. Bu

amallardan yarmi ko'paytirish amalini, yarmi qo'shish amalini tashkil qiladi. Agar ko'pxad tartibi $n \leq 10$ bo'lsa bu xarakteristik ko'pxadni EHM yordamida topish

soniyaning bir nechta bo'lagida bajariladi. Agar xos sonlarning joylashish chegarasi ma'lum bo'lsa, unda $\lambda^{(k)}$ - larni shu oraliqda tekis joylashtirish maqsadga muvofiq. Chunki, Nyuton interpolatsion ko'piadini qurish uchun ayirmali nisbatlarni hisoblashda bu usul turli hisobni ta'minlaydi. Spektral radiusni topish uchun $|\lambda_k| \leq \|A\|$ tengsizlikdan foydalanish mumkin.

Ammo, A matritsa tartibi katta bo'lganda bu usul samarali bo'lmaydi.

Birinchidan: xarakteristik ko'piadni aniqlash uchun bajariladigan amallar soni n^4 kabi oshadi.

Ikkinchidan: Nyuton ko'piadini ko'rishda ayirmali nisbatlarni hisoblash aniqlikni yo'qotadi. Shuning uchun $n \geq 10$ bo'lganda (iamda xos sonlar karrali yoki bir-biriga yaqin bo'lganda) interpolatsiya usuli yomon natija beradi.

Xarakteristik ko'piad koeffitsientlarini deyarli n^3 ta amalda topib bera oladigan usullar mavjud. Masalan, A.N.Kro'lov, A.M.Danilevskiy, Samuelson, Lanstosh kabi to'liq usullar mavjud. Ammo bu usullar xam $n > 10$ bo'lgan iollarda turli emaslar. Shuning uchun bu aniq usullarning tejamliligi interpolatsiya usuliga qaraganda uncha katta emas.

Uch diagonalli matritsalar xarakteristik ko'piadini topish.

Interpolatsion usulda biz xarakteristik ko'piadning yaqqol ko'rinishini, uning qiymatini biror-bir λ da hisoblash uchun topgan edik. Ammo uch diagonalli matritsa uchun $\det(A - \lambda E)$ determinantning qiymatini tez hisoblash usuli bor.

Bu shuning uchun iam muhimki, hatto yuqori tartibli matritsalarini iam o'xshash almashtirishlar yordamida uch diagonalli ko'rinishga keltirishning iloji bor.

Bu usul bilan tanishamiz.

$A - \lambda E$ matritsaning m - tartibli bosh minorini $D_m(\lambda)$ bilan belgilaymiz.

Bu minorni oxirgi satr elementlari bo'yicha yoyamiz, unda ikkita noldan farqli element bor. (1-shaklga qarang).

$D_{m-2}(\lambda)$	0	0
	$a_{m-2,m-1}$	
0	$a_{m-1,m-2}$	$a_{m-1,m}$
0	$a_{m,m-1}$	$a_{m,m} - \lambda$

1- шакл

$$(13) \quad D_m(\lambda) = (a_{m,m} - \lambda)D_{m-1}(\lambda) - a_{m,m-1} \cdot B_{m,m-1}(\lambda)$$

bu erda $B_{m,m-1}(\lambda)$ orqali $a_{m,m-1}$ elementni to'ldiruvchi minopi belgilangan. Bu minorni oxirgi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz. Unda birta $a_{m-1,m}$ element bor, shuning uchun

$$B_{m,m-1}(\lambda) = a_{m-1,m} D_{m-2}(\lambda) \quad (14)$$

buni yuqoridagi tenglikka qo'yib

$$D_m(\lambda) = (a_{m,m} - \lambda)D_{m-1}(\lambda) - a_{m,m-1}a_{m-1,m}D_{m-2}(\lambda) \quad (15)$$

rekurrent tenglikni iosil qilamiz. Hisoblashni boshlashdan oldin, dastlabki ikkita minorni berish lozim.

Masalan:

$$D_{-1}(\lambda) = 0, \quad D_0(\lambda) = 1 \quad (16)$$

qilib olish mumkin.

Bulardan foydalanib $D_1(\lambda)$ va $D_2(\lambda)$ larni hisoblab, tanlovni to'iriligiga ishonch iosil kilish mumkin. Demak hisoblashni shunday boshlash qo'l keladi.

Determinant qiymatini bu rekurrent formula yordamida hisoblash uchun 5n-ta amal bajarish kerak, bundan tashqari amallar orasida bo'lish amali yo'q bo'lib, hisoblash tez va turIundir. Shunday qilib xarakteristik ko'piad qiymatini tez hisoblash usuli mavjud. $D_n(\lambda)$ ko'piad ildizlarini parabola usuli bilan topish mumkin. Bu usul tartibi uncha katta bo'lmagan ($n \leq 50$) ko'piadlar ildizlarini jumladan karrali ildizlarini, hisoblash uchun etarlicha turIun bo'lib, ildizlarni 5-7 ta ishonchli xonalarigacha topishga imkon beradi. EHMlarning programma ta'minotida (bibliotekasida) ko'piadning barcha ildizlarini parabola usuli bilan hisoblash programmasi mavjud.

Teskari iteratsiya usuli.

Agar matritsaning xos soni ma'lum bo'lsa, unda

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

sistemani trivial bo'lmagan yechimlarini topish mumkin. Bu yechimlar matritsaning xos vektorlari bo'ladilar. Ammo, odatda taqribiy usullar xos sonlarni taqribiy topishga imkon beradilar. Shu sababli

$$\det(A - \tilde{\lambda}_i E) \neq 0,$$

lekin bu determinant nolga yaqin. Shuning uchun

$$(A - \tilde{\lambda}_i E)x = 0$$

sistema faqat x=0 trivial yechimga ega bo'ladi.

Shu sababli sonli hisoblashda $(A - \tilde{\lambda}_i E)x = 0$ sistemadan xos vektorni topib bo'lmaydi. Xos vektorlarni topish uchun qulay bo'lgan teskari iteratsiya usuli mavjud. Bu usul quyidagidan iborat. Ixtiyoriy ravishda b vektorni tanlaymiz va

$$(A - \tilde{\lambda}_i E)x = b \quad (17)$$

sistemani qaraymiz.

Bu tenglama yagona yechimga ega. Bu sistemadan aniqlangan xos vektor λ_i xos qiymatga deyarli yaqin bo'lishini ko'rsatamiz. Soddalik uchun n-tartibli A matritsa n ta x^i chiziqli bolliqmas xos vektorlarga ega bo'lgan iolni qaraymiz, masalan normal matritsa uchun. Bunda x^i vektorlar bazis tashkil qiladilar. Shuning uchun x va b - ni bu vektorlar orqali yoyamiz:

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j x^j, b = \sum_{j=1}^n b_j x^j \quad (18)$$

Bularni sistemaga quyib

$$\sum_{j=1}^n [\xi_j (\lambda_j - \tilde{\lambda}_i) - b_j] x^j = 0$$

ega bulamiz. x^i xos vektorlar chiziqli bolliqmas bo'lganliklari uchun bu tenglik $\xi_j (\lambda_j - \tilde{\lambda}_i) - b_j = 0$ bo'lgandagina bajariladi.

Bundan

$$\xi_j = \frac{b_j}{\lambda_j - \tilde{\lambda}_i} \quad (19)$$

Agar $\lambda_j \approx \tilde{\lambda}_i$ bo'lsa ξ_j juda katta bo'ladi, aks iolda u katta emas. Bundan kelib chiqadigan natijalarning uch iolini qaraymiz.

Birinchi iol. λ_i -xos sonlar sodda bo'lgan iol. Unda barcha ξ_j koefhistientlaridan birtasi ξ_i eng katta bo'ladi. Bu topilgan x vektor x_i xos vektorga deyarli teng demakdir. Topilgan vektor juda katta bo'lganligi uchun uni odatda normallashtirishadi. Agar xos qiymatlar qo'pol topilgan bo'lsalar, yoki b vektor yomon tanlangan bo'lsa, b_i kichik bo'ladi. Bunda x_j bilan x orasidagi farq sezilarli bo'lishi mumkin. Bunda topilgan x vektorni (17) tenglamaga b o'rniga qo'yib iteration jarayon tashkil qiladilar.

$$(A - \lambda_i E)x^{(s)} = x^{(s-1)}, \quad x^{(0)} = b \quad (20)$$

Bu jarayon odatda juda tez yaqinlashadi va ikkita iteratsiya etarli bo'ladi.

1-IZOX. B vektorni tanlashning bir samarali usuli mavjud. Uning komponentalari sifatida γ_k psevdoto tasodifiy sonlarni oladilar. Bunda b_j ning juda kichik bo'lish eitimoli kam bo'ladi.

Ikkinchi iol. λ_i karrali bo'lsin. Masalan, $\lambda_i = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$ $1 < p \leq n$ Bunda $x_1, x_2, \dots, x_p$ xos vektorlar ko'p qiymatli aniqlanadilar. Bularning ixtiyoriy chiziqli kombinastiyasi yana xos vektor bo'ladilar, ya'ni ular r o'lchovli fazo tashkil qiladilar va uning istalgan bazisini xos vektorlar sistemasi sifatida olish mumkin. Endi (19) –dan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ koefhistientlarning katta bo'lishi, boshqa koefhistientlarning esa kichik bo'lishi kelib chiqadi. Bularning kuchayish koefhistientlari bir xil (17)-dan topilgan x vektor $x_{\xi}^1, x_{\xi}^2, \dots, x_{\xi}^p$ vektorlarning chiziqli kombinastiyasidan iborat bo'ladi, shu bilan u qidirilayotgan vektor bo'ladi. Agar yaqinlashish aniqligi etarli bo'lmasa (20)- iteratsiyani davom ettirish lozim. Karrali xos qiymatlarning barcha xos vektorlarini topish uchun karrali soniga shuncha $b^{(k)}$ chiziqli bo'liqmas vektorni olish lozim. $b^{(k)}$ komponentalarini psevdoto

tasodifiy sonlarni tanlash yo'li bilan aniqlash qulay. Bunda $b^{(k)}$ vektorlar o'z-o'zidan chiziqli bo'liqmas bo'ladilar.

Uchinchi iol. Xos qiymatlar karrali bo'lib, xos vektorlar soni n -dan kam. Bu iolda xam teskari iteratsiya usulini ishlatish mumkin. R karrali xos qiymatga mos $x^{(k)}$ vektorlar soni $-q < p$ bo'ladi. Bu $x^{(k)}$ larni ortogonallashtirishda ma'lum bo'ladi. Birinchi q -ta vektor ie ch qanday ortogonallashtiriladilar, ammo undan keyingi vektorlarning komponentalari nolga juda yaqin bo'ladilar.

Teskari iteratsiyani birta xos vektorni topish uchun bir marta amalga oshirilganda $\frac{2}{3}n^3$ amal bajariladi, barcha xos vektorlarni topish uchun n_4 -ga yaqin amal bajarish lozim. Shuning uchun bu usulni $n < 10$ bo'lganda qo'llash yaxshi natija beradi. Bu usulning soddaligi va turliunligi uchun iam unda foydalanish qulay. Xususiyl iollarda bu usulni qo'llash yana iam qulaydir. Xususan matritsa uch diagonalli bo'lganda (15)- sistemani progonka usuli bilan hisoblash kerak bo'ladi. Bunda iar bir xos vektorni topish uchun $10n$ - ta amal, barchasini topish uchun esa $10n^2$ arifmetik amallarni bajarish kerak.

Muiim bir narsani ta'kidlab o'tamiz. $\det(A - \lambda_i E) \approx 0$ bo'lganligi uchun progonka usuli bilan xos vektorlarni topish jarayonida bosh diagonalda eng kamida birta nolga yaqin element paydo bo'ladi. Hisoblashlarni olib borish uchun bosh diagonal elementlari noldan farqli bo'lishlari kerak, buning uchun xos sonlar xatoligi uncha kichik bo'lmasliklari kerak, ya'ni EHM ning 10-15 razryadlarini tashkil qilishlari kerak. Agar xos qiymatlar kesuvchilar yoki parabola usullari yordamida hisoblanayotgan bo'lsalar bunday xatolik paydo bo'ladi, chunki bu usullarda yaqinlashish sekin bo'ladi. Agar xos son Nyuton usuli yordamida topilayotgan bo'lsa xatolik nolga juda yaqin bo'lishi mumkin. Bunday iolda λ_i larga sun'iy ravishda xatolik qo'yish kerak bo'ladi.

MISOL.. (3)-dagi S matritsasini va $\tilde{\lambda} = a - \varepsilon$ taqribiy xos qiymatni olamiz. B vektor sifatida dekart koordinatalari birga teng vektorni olamiz. Unda (17)- tenglama

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon x_1 + x_2 \\ \varepsilon x_2 + x_3 \\ \varepsilon x_3 + x_4 \\ \varepsilon x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi. x vektorning komponentalarini ketma-ket aniqlaymiz.

$$x_4 = \varepsilon^{-1}, \quad x_3 = -\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1},$$

$$x_2 = \varepsilon^{-3} - \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1},$$

$$x_1 = -\varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-3} \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1}.$$

Undan so'ng normallashtiramiz. ε^{-4} -ga ko'paytiramiz.

$$x_1 = 1 + O(\varepsilon), \quad x_2 = O(\varepsilon), \quad x_3 = O(\varepsilon^2), \quad x_4 = O(\varepsilon^3)$$

iosil qilingan $x = l_1 + O(\varepsilon)$ vektor Jordan matritsasining xos vektoriga taqribiy teng, shuni topish talab qilingan edi. Bu misol shuni ko'rsatadiki yuqori tartibli Jordan qismli matritsalarida EHMda xos vektorlarni hisoblash qiyin, chunki unda to'lib ketish sodir bo'ladi.

Moduli bo'yicha eng katta xos sonni va unga mos xos vektorni topish.

1-hol. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ bo'lsin.

$$\lambda_1 \approx \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

bu erda $y^{(k)} = A^k y^{(0)}$, $y^{(0)} \neq (0, 0, \dots, 0)^1$, $y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})^1$

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)} = \sum_{j=1}^n b_j A^k x^{(j)} = \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j^k x^{(j)};$$

Agar (1) taqribiy tenglik barcha $i = \overline{1, n}$ uchun berilgan aniqlikda bajarilsa, λ_1 ning qiymati topilgan bo'ladi.

Xos vektorini $y^{(k)} \approx b_1 \lambda_1^k x^{(1)}$

deb olish mumkin, chunki $y^{(k)} \quad x^{(1)}$ dan sonli ko'paytuvchi bilan farq qiladi.

2-hol.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s$$

bo'lsin

$$|\lambda_1| > |\lambda_{s+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

$$\lambda_1 \cong \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}, \quad i = \overline{1, n}$$

Xos vektor $x^{(1)}$ 1-holdagidek topiladi.

3-hol.

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = -\lambda_{r+1} = \dots = -\lambda_{r+p}$$

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_{r+p}| > |\lambda_{r+p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

$$\lambda_1^2 \cong \frac{y_i^{(2k+2)}}{y_i^{(2k)}}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\lambda_1^2 \cong \frac{y_i^{(2k+1)}}{y_i^{(2k-1)}}, \quad i = \overline{1, n}$$

taqribiy tengliklardan $\lambda_1, -\lambda_1$ topiladi. $\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$ nisbat esa $k \rightarrow \infty$ da limitga ega

bo'lmaydi. λ_1 ga mos kelgan xos vektor sifatida $y^{(k+1)} + \lambda_1 y^{(k)}$ ni olamiz. Agar r va p yoki bularning birortasi birdan katta bo'lsa, u holda boshqa dastlabki vektor tanlab jarayonni bajarish kerak.

**MA'RUZA 6. FUNKSTIYALARNI INTERPOLYASTIYALASH
MASALASI. LAGRANJ VA NYUTON INTERPOLYASTION
FORMULASI. AYIRMALAR NISBATI ISHTIROKIDA TUZILGAN
INTERPOLYASTION KO'PHAD. CHEKLI AYIRMALAR. TENG
ORALIQLAR UCHUN NYUTON KO'PHADLARI. KARRALI TUGUN
NUQTALI INTERPOLYASTION KO'PHADLAR**

Reja .

1. Lagranjning interpolyatsion formulasi .

2. Nyutonning interpolatsion formulasi .
3. Interpolyatsiya xatoligi .
4. Interpolyatsiya tugun nuqtalarini optimal joylashtirish .
5. Interpolyatsiya jarayonining yaqinlashishi .

Tayanch iboralar: Chekli ayirmalar, ayirmalar, tugun nuqtalar, qoldiq had, gorizontal va diognal tablisalar.

Ko'p hollarda berilgan funksiyani amal bajarish uchun qulay bo'lgan boshqa funksiya bilan almashtirishga to'g'ri keladi.

Masalan, funksiyaning qiymatlar jadvali berilgan bo'lib, uning jadvalda bo'lmagan qiymatlarini topish kerak bo'lsa, yoki funksiyaning ifodasi murakkab bo'lgan holda uni soddaroq bo'lgan funksiya bilan almashtirishga to'g'ri keladi.

Algebraik ko'phadlar bilan yaqinlashtirish.

Lagranjning interpolatsion formulasi.

Faraz qilamiz $a \leq x \leq b$ kesmada x_k , $k=0,1,...,n$ (tugun nuqtalar) berilgan nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari ma'lum bo'lsin. Funksiyani ko'phad bilan Interpolyatsiyalash masalasi, berilgan x_k , $k=0,1,...,n$ tugun nuqtalarda qiymati $f(x)$ funksiya qiymatiga teng bo'lgan n - tartibli

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

ko'phadni topishdan iborat.

Bu masala har qanday uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun yagona yechimga ega. Haqiqatdan ham, $a_0, a_1, \dots, a_n$ koefisientlarni aniqlash uchun

$$a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n = f(x_i), \quad i=0,1,2,...,n \quad (2)$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga egamiz.

Bu sistemaning determinanti x_i , $i=0,1,2,...,n$ nuqtalar turlicha bo'lganda noldan farqlidir.

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1, \dots, n \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantiradigan $L_n(x)$ ko'phad x_i , $i=0,1,...,n$ nuqtalar bo'yicha qurilgan $f(x)$ funksiyaning interpolatsion ko'phadi deb aytiladi.

Lagranjning interpolatsion formulasi, $L_n(x)$ interpolatsion ko'phadni $f(x)$ funksiyaning Interpolatsiyalash tugun nuqtalaridagi qiymatlari chiziqli kombinatsiyasi shaklida yo'zishga imkon beradi:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n C_k(x) f(x_k) \quad (4)$$

$S_k(x)$ koeffisientlarning oshkor ifodasini topamiz. Interpolatsiyalashning (3)-shartidan

$$\sum_{k=0}^n C_k(x_i) f(x_k) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Bu munosabatlar $S_k(x)$ funksiyalarga

$$C_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{arap } i \neq k \\ 1, & \text{arap } i = k, i = 0, 1, \dots, n, \end{cases}$$

shartlar qo'yilganda bajariladi. Bu shartlar, har bir $S_k(x)$, $k=0, 1, \dots, n$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada eng kamida n -ta nolga ega demakdir.

$L_n(x)$, n -tartibli ko'phad bo'lganligi uchun, $S_k(x)$ koeffisientlarni n - tartibli ko'phad ko'rinishida, ya'ni

$$C_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

ko'rinishda qidirish tabiiydir.

$S_k(x_k) = 1$ shartdan

$$\lambda_k^{-1} = (x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib (4)- interpolatsion ko'phadning koeffisientlari

$$C_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

formula bilan aniqlanadilar. Shunday qilib, Lagranjning interpolatsion ko'phadi

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} f(x_k) \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Nyutonning interpolatsion formulasi.

Interpolyatsion ko'phadning Nyuton formulasi ko'rinishi interpolatsion ko'phadni birta tugun nuqta va $f(x)$ funksiyaning ayirmali bo'linmalari orqali ifodalaydi. Bu ko'rinish

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

Taylor formulasining ayirmali o'xshatmasidan iboratdir. Eng avval ayirmali bo'linmalar to'irisidagi ma'lumotlarni keltiramiz. Faraz qilamiz $x_k \in [a, b]$, $k=0, 1, \dots, n$ tugun nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari ma'lum bo'lsin. Birinchi tartibli ayirmali bo'linmalar deb,

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq j$$

nisbatlarga aytiladi.

µo'shni nuqtalar bo'yicha tuzilgan birinchi tartibli ayirmali bo'linmalardan foydalanib, ikkinchi tartibli ayirmali bo'linmalarni tuzish mumkin:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \\ f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) &= \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \end{aligned}$$

Shunga o'xshash yuqori tartibli ayirmali bo'linmalar tuziladilar. Masalan, agar $f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k})$, $f(x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1})$ k - tartibli ayirmali bo'linmalar ma'lum bo'lsa, $k+1$ - tartibli ayirmali bo'linmalar

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) - f(x_j, \dots, x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}$$

kabi aniqlanadilar.

k - tartibli ayirmali bo'linmalar $f(x)$ funksiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari orqali quyidagicha ifodalanadilar:

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{l \neq i \\ l=j}}^{j+k} (x_i - x_l)} \quad (9)$$

Nyutonning interpolatsion ko'phadi deb

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (10)$$

ko'phadga aytiladi. Bu ko'phadning Logranj ko'phadi bilan bir xil ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun Logranj ko'phadini

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{j=1}^n (L_j(x) - L_{j-1}(x)) \quad (11)$$

ko'rinishda yozamiz. (3)-Interpolyatsiya shartidan $k=0, 1, \dots, j-1$, $j=0, 1, \dots, n$ uchun

$$L_{j-1}(x_k) = L_j(x_k) = f(x_k)$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Bundan $L_j(x) - L_{j-1}(x)$, $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ nuqtalarda nolga aylanadigan algebraik

ko'phad ekanligi ma'lum bo'ladi, ya'ni

$$L_j(x) - L_{j-1}(x) = A_j(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1}). \quad (12)$$

Bundagi A_j son koeffisientni

$$L_j(x) - L_{j-1}(x) = A_j(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1}).$$

Tenglikdan, $L_j(x_j) = f(x_j)$ ekanligini inobatga olib topsak

$$A_j = \frac{f(x_j) - L_{j-1}(x_j)}{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})} \quad (13)$$

bo'ladi.

(13) - tenglikdagi $L_{j-1}(x_j)$ - ning (7)- ko'rinishdagi qiymatini, ya'ni

$$L_{j-1}(x_j) = \sum_{k=0}^{j-1} f(x_k) \frac{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{k-1})(x_j - x_{k+1})\dots(x_j - x_{j-1})}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_{j-1})}$$

ekanligini inobatga olib,

$$A_j = \sum_{k=0}^j \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_j)}$$

tenglikni iosil qilamiz.

Buni (9)- tenglik bilan taqqoslasak A_j koeffisientning j - tartibli ayirmali bo'linma ekanligini ko'ramiz. Bundan va (11),(12) - dan Nyutonning (10) interpolatsion ko'phadi iosil bo'lishini ko'ramiz. Lagranjning (7) va Nyutonning (10)- ko'phadlari aslida birta ko'phad ekanliklarini ta'kidlaymiz.

Interpolyatsiya xatoligi. Interpolyatsion formula xatoligi.

$f(x)$ funksiyani $L_n(x)$ interpolatsion ko'phad bilan almashtirilganda

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

xatolikka yo'l qo'yamiz. Bu Interpolyatsiya xatoligi deb aytiladi. Xatolikni baiolash uchun

$$g(s) = f(s) - L_n(s) - K \omega(s)$$

funksiyani qaraymiz. Bunda $s \in [a, b]$, K - doimiy son va

$$\omega(s) = (s - x_0)(s - x_1) \cdots (s - x_n)$$

faraz qilamiz $r_n(x)$ ni xatolikni tugun nuqtadan iborat bo'lmagan biron $x \in [a, b]$ nuqtada baiolash talab qilingan bo'lsin. K konstantani $g(x)=0$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Buning uchun

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

qilib olish etarli.

Faraz qilamiz, $f(s)$ $a \leq s \leq b$ kesmada $n+1$ ta uzluksiz iosilalarga ega bo'lsin. $g(s)$ funksiyasi $[a, b]$ kesmada $n+2$ tadan kam bo'lmagan nuqtalarda nolga aylanadi. Shuning uchun Roll teoremasiga asosan $g'(s)$ $[a, b]$ da kamida $n+1$ ta nuqtada nolga aylanadi. $g''(s)$ n tadan kam bo'lmagan nuqtalarda va i.k., $g^{(n+1)}(s)$ eng kamida birta nuqtada nolga aylanadi.

Demak, shunday $\xi \in [a, b]$ nuqta mavjudki $g^{(n+1)}(\xi)=0$ bo'ladi.

$$g^{(n+1)}(s) = f^{(n+1)}(s) - (n+1)! K = 0$$

bo'lganligi uchun

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)} (n+1)!$$

tenglik o'rinlidir.

Shunday qilib Interpolyatsiya xatoligining

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

ko'rinishida tasvirlanishi isbot bo'ldi.

Bundan

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|,$$

$$\text{Bunda } M_{n+1} = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Interpolyatsiya tugun nuqtalarini optimal joylashtirish.

Interpolyatsiya xatoligi ba'osidagi $\omega(x)$ kattalikni tugun nuqtalarni ma'lum tartibda joylashtirish orqali minimallashtirish mumkin. Masala, $x_k \in [a, b]$, $k=0, 1, 2, \dots, n$ tugun nuqtalarni

$$\max_{x \in [a, b]} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$$

kattalikni minimallashtiradigan qilib joylashtirishdan iborat. Ma'lumki, agar tugun nuqtalar sifatida Chebishev ko'phadining ildizlari olinsa $\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|$ kattalik eng kichkina bo'ladi.

Interpolyatsiya jarayonining yaqinlashishi.

Bu erda tugun nuqtalar sonini cheksiz oshirganda $f(x) - L_n(x)$

Interpolyatsiya xatoligi nolga intiladimi? - degan savol qo'yiladi.

Interpolyatsiya jarayonining yaqinlashishini tasvirlaymiz.

x_k , $k=0, 1, \dots, n$ nuqtalar

$$\Omega_n = \{x_k, k=0, 1, \dots, n \mid a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b\}$$

to'plamini to'r deb ataymiz.

Interpolyatsiya jarayonining yaqinlashishini o'rganish uchun

$$\Omega_0 = \{x_0^{(0)}\}, \Omega_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\}, \dots, \Omega_N = \{x_0^{(N)}, x_1^{(N)}, \dots, x_N^{(N)}\}, \dots,$$

nuqtalar soni ko'payib boruvchichi to'rlar ketma-ketligini qarash zarur. Faraz qilamiz $f(x)$ $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz

bo'lsin. Unda $f(x)$ funksiyaning Ω_N nuqtalaridagi qiymatlari bo'yicha uni Interpolyatsiyalaydigan ko'phadlar ketma-ketligini tuzish mumkin. Interpolyaston jarayon $x^* \in [a,b]$ nuqtada yaqinlashadi deb aytiladi, agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n[f(x)] = f(x^*)$$

mavjud bo'lsa, nuqtaviy yaqinlashishdan tashqari yana turli normalarda yaqinlashishlar ham qaraladi.

Masalan, $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashishi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n[f(x)]| \rightarrow 0$$

iborat.

Interpolyatsiya jarayonining yaqinlashishi $f(x)$ funksiyaning silliqqligi hamda to'rlar ketma-ketligining tanlanishiga bo'liqdir. Shunday funksiya misollari borki Interpolyatsiya jarayoni uzoqlashadi.

Masalan, $|x|$ funksiya uchun tugun nuqtalari tekis joylashgan to'rlar ketma-ketligi uchun tuzilgan Interpolyatsiya jarayoni $[-1,1]$ kesmaning $-1,0,1$ nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarda uzoqlashadi.

To'rlarning har qanday ketma-ketligi uchun $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz $f(x)$ funksiya mavjudki Interpolyatsiya jarayoni $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashmaydi. Berilgan uzluksiz funksiya uchun tugun nuqtalarni joylashtirish evaziga yaqinlashishga erishish mumkin.

Marstinkevich teoremasi.

Agar $f(x)$, $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, unda shunday to'rlar ketma-ketligi mavjudki, unga mos interpolyatsion ko'phadlar ketma-ketligi $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Bunday to'rlar ketma-ketligini qurish qiyin ekanligini qayd etamiz. Shu sababli, amalda yuqori tartibli interpolyatsion ko'phadlar qurishdan voz kechadilar.

1. Chekli ayirmalar.

2. Teng oraliqlar uchun Nyuton ko'phadlari.

Chekli ayirmali interpolatsion ko'phadlar bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ - birinchi tartibli, $\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$ - ikkinchi tartibli, $\dots \Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$ - k tartibli chekli ayirmalardan foydalanamiz.

Bo'lingan ayirmalar bilan chekli ayirmalar orasida quyidagi bog'lanish mavjuddir:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k},$$

bu yerda $h = x_{i+1} - x_i$.

Interpolyatsiyalashga tugun nuqtalarni jalb etish tartibiga qarab interpolatsion ko'phadning turli ko'rinishi kelib chiqadi.

quyida interpolatsiyalashga tugun nuqtalarni jalb etish tartibi, ko'phadning ko'rinishi, nomi va interpolatsiyalash qoldiq hadining ko'rinishini keltiramiz.

1.

1	2	...	$n+1$
x_0	x_1	...	x_n

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1! h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Agar $\frac{x - x_0}{h} = t$ deb belgilasak,

$$P_n(x_0 + ht) = f_0 + \Delta f_0 \cdot t + \Delta^2 f_0 \frac{t(t-1)}{2!} + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1)$$

hosil bo'ladi. Bu esa Nyutonning birinchi interpolatsion formulasi bo'lib,

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot t(t-1) \dots (t-n).$$

2.

1	2	...	$n+1$
---	---	-----	-------

x_n	x_{n-1}	$\dots$	x_0
-------	-----------	---------	-------

$$P_n(x) = f_n + \frac{\Delta f_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 f_{n-1}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1).$$

Bu yerda $\frac{x-x_n}{h} = t$ deb belgilash kiritsak,

$$P_n(x_n + ht) = f_n + \frac{\Delta f_{n-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!}t(t+1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}t(t+1)\dots(t+n-1)$$

hosil bo'ladi. Bu esa Nyutonning ikkinchi interpolatsion formulasi bo'lib, uning qoldiq hadi

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot t(t+1)\dots(t+n).$$

3.

$2n+1$	$\dots$	3	1	2	$\dots$	$2n$
$x_0 - nh$	$\dots$	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	$\dots$	$x_0 + nh$

Bu yerda $x - x_0 = ht$ deb belgilasak ,

$$P_{2n}(x_0 + ht) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!}t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^3 f_{-1}}{3!}(t+1)t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^4 f_{-2}}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2) + \dots \quad (3)$$

$$+ \frac{\Delta^{2n} f_{-n}}{(2n)!}(t+n-1)(t+n-2)\dots(t+1)t(t-1)(t-2)\dots(t-n)$$

hosil buladi. Bu Gaussning 1-interpolyatsion formulasi bo'lib,

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)h^{2n+1}}{(2n+1)!}t(t^2-1)\dots(t^2-n^2).$$

4.

$2n$	$\dots$	2	1	3	$\dots$	$2n+1$
$x_0 - nh$	$\dots$	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	$\dots$	$x_0 + nh$

$$\begin{aligned}
P_{2n}(x_0 + ht) = f_0 + \frac{\Delta f_{-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!}t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^3 f_{-2}}{3!}(t+1)t(t-1) + \\
+ \frac{\Delta^4 f_{-2}}{4!}(t+2)(t+1)t(t-1) + \dots + \\
+ \frac{\Delta^{2n} f_{-n}}{(2n)!}(t+n)(t+n-1)\dots(t+1)t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1).
\end{aligned} \quad (4)$$

Bu esa Gaussning 2 interpolatsion formulasi bo'lib,

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)h^{2n+1}}{(2n+1)!}t(t^2-1)\dots(t^2-n^2).$$

5. (3), (4) formulalarni qo'shib ikkiga bo'lsak,

$$\begin{aligned}
P_{2n}(x_0 + ht) = f_0 + t \frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{t^2}{2} \Delta^2 f_{-1} + \frac{t(t^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \\
+ \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \Delta^4 f_{-2} + \dots + \frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!} \Delta^{2n} f_{-n}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Stirling formulasi hosil bo'ladi.

Misol 1. Jadval bilan berilgan funkstiyani Lagranj ko'phadi bilan almashtiring.

x	0	1	2	5
f	2	3	12	147

Echish:

$$\begin{aligned}
P_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\omega_4(x)}{(x-x_i)\omega_4'(x_i)} \cdot f(x_i) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-5)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-5)}{1 \cdot (-1) \cdot (-4)} \cdot 3 + \\
+ \frac{x(x-1)(x-5)}{2 \cdot 1 \cdot (-3)} \cdot 2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 149 = x^3 + x^2 - x + 2.
\end{aligned}$$

Misol 2. $\sin x$ ning $x=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ dagi qiymatlari berilgan bo'lsa, $\sin \frac{\pi}{12}$ ni hisoblagandagi xatolikni baholang.

Echish. $n=4$ bo'lib,

$$R_4 \leq \frac{M_5}{5!} \max \left| x \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right|,$$

$$M_5 = \max_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \left| (\sin x)^{(v)} \right| = \max_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} | -\cos x | \leq 1.$$

$$R_4 \leq \frac{1}{5!} \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^5}{12^5} \leq \frac{10 \cdot 10 \cdot 3}{4 \cdot 12^5} = \frac{300}{4 \cdot 12^5} = \frac{75}{12^5} = \frac{25}{4 \cdot 12^4} =$$

$$= \frac{6,25}{12^4} = \frac{6,25}{20736} = 0,0003 = 0,3 \cdot 10^{-3}$$

$$R_4 \leq 0,3 \cdot 10^{-3}.$$

Misol 3. $S(n)=1^2+2^2+\dots+n^2$ ni hisoblash uchun formula chiqaring.

Echish. Agar $S(n)$ n ga nisbatan k tartibli algebraik ko'phad bo'lsa, $k+1$ tartibli chekli ayirmalar nolga teng bo'ladi.

n	$S(n)$	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^3 S$	$\Delta^4 S$
1	1				
2	5	4			
3	14	9	5		
4	30	16	7	2	
		25	9	2	0

5	55				
---	----	--	--	--	--

Jadvaldan ko'rinib turibdiki $S(n) = P_3(n)$ ekan, ya'ni

$$\begin{aligned}
 S(n) = P_3(n) &= 1 + 4 \frac{(n-1)}{1!} + \frac{5(n-1)(n-2)}{2!} + \frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \\
 &= \frac{6 + 24n - 24 + 15n^2 - 45n + 30 + 2n^3 - 12n^2 + 22n - 12}{6} = \\
 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

Misol 4. $h = 0,001$ qadam bilan $[1,10]$ oraliqdagi sonlarning natural logarifmlari berilgan. Chiziqli interpolatsiyalashning xatoligini baholang.

Echish. Nyutonning 1-interpolyatsion formulasini xatoligidan foydalanamiz:

$$R_1(x) = \frac{(\ln x)''}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1});$$

$$R_1 \leq \frac{1}{2} \max \left| -\frac{1}{x^2} \right| (x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{10^{-6}}{8};$$

$$R_1 = 0,125 \cdot 10^{-6}.$$

Misol 5. $y = e^x$ funkstiyani jadvali berilgan. $e^{1,13}$ va $e^{1,17}$ ni qiymatini toping.

i	x_i	y_i
-3	1,00	2,7183
-2	1,05	2,8577
-1	1,10	3,0042
0	1,15	3,1582
1	1,20	3,3201
2	1,25	3,4903
3	1,30	3,6693

Echish. Ayirmalar jadvalini tuzamiz.

Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0,1394	-	-
0,1465	0,0071	-
0,1540	0,0075	0,0004
0,1619	0,0079	0,0004
0,1702	0,0083	0,0004
0,1790	0,0088	0,0005

Gaussning 2-interpolyatsion formulasida $n=3$ deb quyidagiga ega bo'lamiz:

$$e^{1,13} \approx \left[f_0 + t \cdot \Delta f_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!} \Delta^3 f_{-2} \right]_{t=-0,4} =$$

$$= 3,1582 - 0,4 \cdot 0,1540 - \frac{0,6 \cdot 0,4}{2} 0,0079 + \frac{0,6(-0,4) \cdot (-1,4)}{6} 0,0004 = 3,0957.$$

MA'RUZA 7. SONLI DIFFERENSIAL LASH. SONLI DIFFERENSIAL LASH XATOLIGI. UCH TUGUN NUQTALI FORMULA

Reja:

- 1. Sonli differensiallashtirish.**
- 2. Sonli differensiallashtirish xatoligi.**
- 3. Uch tugun nuqtali formula.**

Tayanch iboralar: Chekli ayirmalar, ayirmalar, tugun nuqtalar, qoldiq had, gorizontal va diognal tablisalar.

Ko'p amaliy masalalarda funksiya xosilalarini ayrim nuqtalarda taqribiy xisoblashga to'g'ri keladi. Bu masala sonli differensiallashtirish masalasi deyiladi. Funktsiyalarning analitik ko'rinishi noma'lum bo'lib uning ayrim nuqtalardagi qiymatlari ma'lum bo'lsa, masalan, tajribadan topilgan bo'lsa, u xolda uning

xosilasi sonli differensiallash yo'li bilan topladi. Umuman aytganda, funktsiyani sonli differensiallash masalasi doimo bir qiymatli ravishda yechilavermaydi. Masalan, $f(x)$ funktsiyaning $x = x_0$ nuqtadagi xosilasini topish uchun $h > 0$ ni olib,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}, \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

kabi olishimiz mumkin. Ko'pincha () ga o'ng xosila, () chap xosila va () markaziy xosila deyiladi.

Sonli differensiallash usullari odatda interpolatsion formulalarga asoslangan. Faraz qilaylik, $[a,b]$ oraliqda $(n+1)$ - tartibgacha xosilalari uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Uni

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$$

ko'rinishda tasvirlaymiz. Bu yerda $L(x)$ $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlar buyicha tuzilgan qandaydir interpolatsion ko'pxad bo'lib, uning qoldiq hadi quyidagiga teng:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (a < \xi < b),$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Odatda () tenglikni differensiallab, taqribiy ravishda

$$f'(x) \approx L'_n(x), \quad f''(x) \approx L''_n(x), \dots, \quad f^{(n)}(x) \approx L^{(n)}_n(x)$$

deb olinadi. Bu taqribiy tengliklarning absolyut xatolari mos ravishda

$$R'_n(x), \quad R''_n(x), \dots, R^{(n)}_n(x)$$

ifodalarning absolyut qiymatlariga teng buladi. Lekin absolyut xatoni amalda xar doim xam aniqlash oson ish emas.

Ko'pgina amaliy masalalarni xal etishda jadval shaklida yoki murakkab analitik ifoda shaklida berilgan $u=f(x)$ funktsiyaning turli tartibli xosilalarining qiymatlarini xisoblashga to'g'ri keladi. Bunday xollarda differensial xisob

usullarini bevosita tatbik etishning yo iloji bulmaydi yoki bu juda kiyin buladi, shuning uchun ularga taqribiy sonli differensiallash usullari kulaniladi.

Sonli differensiallash formulalarini keltirib chikarish uchun avval berilgan $f(x)$ funksiyani biror $[a,b]$ kesmada $P_n(x)$ ko'pxad bilan interpoliyatsiyalanadi, keyin esa

$$F'(x) \approx P'_n(x)$$

deb olinadi.

Agar $P'_n(x)$ interpoliyatsiya ko'phadi uchun

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

bo'lsa, u xolda $P'_n(x)$ xosilaning $r_n(x)$ xatoligi

$$r_n(x) = f'(x) - P'_n(x) = R'_n(x)$$

formula bilan topiladi (yahni interpoliyatsiya ko'phadi xosilasining xatoligi bu ko'pxad xatoligining xosilasiga teng)

Sonli differensiallash interpoliyatsiyalashdan kura kamrok aniklikka ega bo'lgan amaldir, yahni $[a,b]$ kesmada $u=f(x)$ va $u=R_n(x)$ egri chiziklar ordinatalarining bir-biriga yakin bulishligiga kafolat bula olmaydi.

$y=f(x)$ funksiyaning qiymatlari $[a,b]$ kesmada teng uzaklikdagi $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlarda berilgan bo'lsin:

$$u_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \dots, u_n=f(x_n)$$

$[a,b]$ kesmada $u'=f'(x)$, $y''=f''(x)$ va xokazo xosilalarni topish uchun u funksiyani shu tugun nuqtalar sistemasi uchun tuzilgan N'yutonning 1-interpoliyatsion ko'phadi bilan almashtiramiz.

$$y \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots,$$

bu yerda $q=(x-x_0)/h$ va $h=x_{i+1}-x_i$, $i=0, 1, 2, \dots$

(q-i) ko'rinishdagi binomlarni kupaytirib quyidagini xosil kilamiz:

$$y \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24} \Delta^4 y_0 + \dots$$

Sungra

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq}$$

bo'lganligi uchun

$$y \approx \frac{1}{h} [\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+23}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 + \dots] (1)$$

shunga o'xshash

$$y'' = \frac{dy}{dx} (y') = \frac{dy'}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy'}{dq}$$

bo'lganligi uchun

$$y'' = \frac{1}{h} [\Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-8q+11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots] \quad (2)$$

$u=f(x)$ funksiyaning istalgan tartibli xosilalarini ham shunga o'xshash xisoblash mumkin.

Tayin x nuqtadagi xosillarini topishda x_0 sifatida argumentning jadvaldagi x ga eng yaqin qiymatini tanlash lozim.

Jadvaldagi x nuqtalardagi xosilalarni topishda sonli differensiallash usullari soddalashadi, chunki jadvaldagi xar bir qiymatni boshlangich qiymat sifatida olish mumkin bo'lganligi uchun $x=x_0$, $q=0$ deymiz, u xolda (1) va (2) dan quyidagini xosil kilamiz:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots), \quad (3)$$

$$y''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11\Delta^4 y_0}{12} - \frac{5\Delta^5 y_0}{6} - \dots). \quad (4)$$

Shunga o'xshash, uchinchi, to'rtinchi va xokazo tartibli xosilalar uchun tegishli formulalarni xosil qilish mumkin:

$$y'''(x_0) \approx \frac{1}{h^3} (\Delta^3 y_0 - + \frac{3\Delta^4 y_0}{2} + \dots). \quad (5)$$

$$y^{iv}(x_0) \approx \frac{1}{h^4} (\Delta^4 y_0 - \dots). \quad (6)$$

h kichik bo'lganda ushbu taqribiy formulalarni xosil kilamiz:

$$y'(x_0) \approx \frac{\Delta y_0}{h}, \quad y''(x_0) \approx \frac{\Delta^2 y_0}{h^2}, \quad y'''(x_0) \approx \frac{\Delta^3 y_0}{h^3}, \dots,$$

bu formulalar xosilalarni tegishli tartibli chekli ayirmalar bilan boglaydi.

Birinchi xosila uchun xatolik ushbu formula buyicha xisoblanishini aytib o'tamiz:

$$R'_n(x_0) \approx \frac{(-1)^n \Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}.$$

MA'RUZA 8. FUNKSTIYALARNI YAQINLASHTIRISH. SPLAYNLAR BILAN YAQINLASHISH (CHIZIQLI VA KUBIK). O'RTACHA KVADRATIK YAQINLASHISH. YAQINLASHISH MASALASI. JADVAL KO'RINISHIDA BERILGAN FUNKSTIYALARNI O'RTACHA KVADRATIK MA'NODA YAQINLASHTIRISH VA ALGORITMINI TUZISH.

Reja:

- 1. Kasr – ratsional yaqinlashtirish .**
- 2. Eng kichik kvadratlar usul .**
- 3. Kubik splayn qurish.**

4. Kubik splayn bilan interpolyatsiyalash jarayonining yaqinlashishi.

Tayanch iboralar: Chekli ayirmalar, ayirmalar, tugun nuqtalar, qoldiq had,splaynlar.

Kasr ratsional yaqinlashtirish.

Faraz qilamiz, $f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlari berilgan bo'lsin.

$$\varphi_{kl}(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

shartlarni qanoatlantiradigan

$$\varphi_{kl}(x) = \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0}{x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_0} \quad (2)$$

(k, l - butun berilgan), funksiyaning qurish talab qilinadi. (1) - tenglamalar $k+l+1$ ta noma'umli $n+1$ tenglamadan iborat sistemadir.

Tenglamalar sonining noma'lumlar soniga teng bo'lishini talab qilamiz, ya'ni $k+l=n$.

Unda $a_i, i=0, 1, \dots, k$ va $b_j, j=0, 1, \dots, l-1$ noma'lumlarga nisbatan

$$\sum_{i=0}^k a_i x_j^i - f_j \sum_{i=0}^{l-1} b_i x_j^i = f_j x_j^l, \quad j = 0, 1, \dots, l-1 \quad (3)$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

Eng kichik kvadratlar usul.

Faraz qilamiz, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada chekli sondagi nuqtalardagi qiymatlari orqali berilgan bo'lsin. U yoki bu maqsadlar uchun bu funksiya biron bir ma'noda yaqin bo'lgan, $[a, b]$ kesmaning barcha nuqtalarida aniqlangan, qo'llash uchun qulay bo'lgan funksiya ifodasini topish zarur bo'ladi.

Bunday ifodalarni topishning bir usuli interpolyatsiya usulidir. Lekin ko'p sabablarga ko'ra interpolyatsion formula qo'llash uchun qulay emas. Masalan, agar funksiya qiymatlarini aniqlashda xatoga yo'l qo'yilgan bo'lsa, bu xatolik interpolyatsion formulaga ta'sir qiladi va natijada asl funksiya xususiyatini o'zgartirib yuboradi.

Bu yerda biz jadval ko'rinishida berilgan funksiya uchun analitik formula topishning yangi usuli bilan tanishamiz.

Faraz qilamiz, $[a,b]$ da aniqlangan $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ biron bir chiziqli bog'liq bo'lmagan funksiyalar sistemasi bo'lsin.

Shunday umumlashtirilgan

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m \varphi_k(x) c_k, \quad m \leq n$$

ko'piadni qidiramizki

$$\sum_{k=0}^n |f(x_k) - \varphi(x_k)|^2 \quad (1)$$

kattalik mumkin bo'lgan eng kichik qiymatga erishsin.

$f(x_k)$ qiymatlar aniqligi turlicha bo'lgan iollarda $p_k > 0$, $\sum_{k=0}^n p_k = 1$ vaznlarni kiritib

$$\sum_{k=0}^n p_k |f(x_k) - \varphi(x_k)|^2$$

yig'indini minimallashtirish mumkin.

Keyingi yig'indi $c_0, c_1, \dots, c_n$ koefitsientlarning funksiyasidir. Bu funksiya xususiy hosilalarini nolga tenglashtirib $c_0, c_1, \dots, c_n$ noma'lum koefitsientlarni aniqlash uchun

$$\sum_{k=0}^m c_k (\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad i, j = 0, 1, \dots, m \quad (3)$$

sistemani hosil qilamiz.

$$\text{Bu yerda. } (\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{k=0}^m p_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k)$$

Agar

$$s_{ij} = \sum_{k=0}^m p_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k)$$

$$r_j = (f, \varphi_j) = \sum_{k=0}^m p_k f(x_k) \varphi_j(x_k)$$

belgilashlarni qabul qilsak (3)- sistema

$$S_{00}C_0 + S_{10}C_1 + \dots + S_{m0}C_m = r_0$$

$$S_{01}C_0 + S_{11}C_1 + \dots + S_{m1}C_m = r_1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$S_{0m}C_0 + S_{1m}C_1 + \dots + S_{mm}C_m = r_m$$

ko'rinishida yoziladi.

Bu sistemaning aniqlovchisi Gramm aniqlovchisi bo'lib u musbatdir. Shuning uchun $c_0, c_1, \dots, c_n$ koefitsientlar birdan bir aniqlanadilar.

Kubik splaynni qurish.

Faraz qilamiz $[a, b]$ da aniqlangan $f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

to'rni aniqlab, $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N$ kabi belgilaymiz. $f(x)$ funksiya va $\{x_i\}_{i=0}^N$

tugun nuqtalarga mos $S(x)$ splayn deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya aytiladi:

1) iar bir $[x_{i-1}, x_i]$ segmentda $i = 1, 2, \dots, N, S(x)$ funksiya uchinchi darajali ko'pxad;

2) $S(x)$ funksiya va uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari $[a, b]$ da uzluksiz;

3) $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, N$.

Oxirgi shart interpolatsiyalash shartlari deb aytiladi, splayn esa interpolatsiyalaydigan splayn deb aytiladi. Yuqorida qayd etilgan splayn mavjud

va yagonaligini isbot qilamiz. quyida keltiriladigan isbot splaynni qurish usulini ham aniqlaydi.

Jar bir $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, N$ kesmada, $S(x) = S_i(x)$ -ni

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \quad (1)$$

ko'rinishda qidiramiz.

Bu yerdagi a_i, b_i, c_i, d_i – koeffistientlar aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum koeffistientlar ma'nosini aniqlaymiz.

$$S'_i(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2$$

$$S''_i(x) = c_i + d_i(x - x_i), \quad S'''(x) = d_i$$

tengliklarga egamiz, shuning uchun

$$a_i = S_i(x_i), \quad b_i = S'_i(x_i), \quad c_i = S''_i(x_i), \quad d_i = S'''_i(x_i) \\ S(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

interpolyatsiya shartlaridan

$$a_i = S_i(x_i), i = 1, 2, \dots, N$$

larni hosil qilamiz. $a_0 = f(x_0)$ deb aniqlaymiz. $S(x)$ ning uzluksizlik shartidan

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Bundan, $S(x)$ ifodasini inobatga olib $i = 1, 2, \dots, N - 1$ uchun

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3$$

tengliklarni hosil qilamiz.

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

deb belgilab, bu tenglamalarni

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

ko'rinishlarda yozib olamiz.

Birinchi tartibli hosilaning uzluksizligi

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1, c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

tenglamalarga olib keladi.

Ikkinchi tartibli hosilaning uzluksizligidan

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

tengliklar hosil bo'ladi. (2)-(4) tengliklarni birlashtirib

$$b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N$$

noma'lumlarga nisbatan $3N - 2$ ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Ikkita etmaydigan tenglamani hosil qilish uchun $S(x)$ ga u yoki bu chegaraviy shartlar

qo'yadilar. Masalan $f''(a) = f''(b) = 0$ deb olish mumkin. Unda $S''(a) = S''(b) = 0$

bo'lishini talab qilish tabiiydir. Bundan $S_1''(a) = 0, S_N''(x_N) = 0$, ya'ni $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$

tenglamalar hosil bo'ladi. $c_1 - d_1 h_1 = 0$ shartdan $i = 1$, $c_0 = 0$ bo'lganda (4)- bilan

bir xil bo'ladi. Shunday qilib, kubik splaynning koeffitsientlarini aniqlash uchun

quyidagi yopiq sistemaga kelimiz:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N, c_0 = c_N = 0 \quad (5)$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N \quad (6)$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

Bu sistemaning yagona yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilamiz. (5)-(7) sistemadan $b_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N - 1$ noma'lumlarni yo'qotib, faqat c_i - noma'lumlar qatnashadigan sistemani hosil qilamiz. Buning uchun (7)- tenglamalardan ikki qo'shnilarini qaraymiz:

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

Birinchi tenglamadan ikkinchini ayirib

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

tenglikni hosil qilamiz.

$b_i - b_{i-1}$ ayirma uchun topilgan ifodani (6)- ning o'ng tomoniga qo'yib,

$$h_i \cdot c_i - \frac{h_i^2}{2} \cdot d_i = \frac{1}{2} \cdot (h_i \cdot c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6} (h_i^2 \cdot d_i - h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-2}}{h_{i-1}} \text{ yoki}$$

$$h_i \cdot c_i + h_{i-1} \cdot c_{i-1} - \frac{2}{3} \cdot h_i^2 \cdot d_i - \frac{1}{3} h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = 2 \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right) \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(5)- tenglikdan

$$h_i^2 \cdot d_i = h_i(c_i - c_{i-1}), h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$$

tengliklarni hosil qilib, bularni (8)- ga qo'ysak

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_{i-1} + h_i \cdot c_i = 6 \cdot \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right)$$

tenglik hosil bo'ladi. s_i koefitsientlarni aniqlash uchun

$$h_i \cdot c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \cdot c_i + h_{i+1} \cdot c_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), i = 1, 2, \dots, N-1$$

$c_0 = c_N = 0$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema matristasining diagonal elementlari boshqa elementlarga nisbatan ancha katta bo'lganligi uchun uning yechimi mavjud va yagonadir. Bu sistema uch diagonalli bo'lganligi uchun progonka usulida echish mumkin. Bu iolda progonka usul turliundir. Aniqlangan c_i bo'yicha b_i va d_i koefitsientlarni oshkor formulalar ko'rinishida yozish mumkin

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{h_i}{2} \cdot c_i - \frac{h_i^2}{6} \cdot d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

Shunday qilib, (1) - (3) va $S''(a) = S''(b) = 0$ chegaraviy shartlar bilan aniqlanadigan yagona splayn mavjudligi ko'rsatildi.

Boshqa chegaraviy shartlar bilan ham masalani qarash mumkin ekanligini ta'kidlaymiz.

Kubik splayn bilan interpolyastilash jarayonining yaqinlashishi.

Bu yerda kubik interpolyastion splaynlarning tugun nuktalar soni N cheksizga intilganda interpolyatsiyalanuvchi funksiyaga intilishini ko'rsatamiz.

Interpolyastion splayn bilan $f(x)$ orasidagi farq $U(x) = f(x) - S(x)$ funksiya silliqlik tartibiga va tugun nuqtalarning joylashishiga bog'liq. Soddalik uchun nuqtalari tekis joylashgan to'rlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$\omega_h = \{x_i = a + i \cdot h, i = 0, 1, \dots, N\},$$

bu yerda

$$h = \frac{b-a}{N}$$

Bu iolda (9)- sistema ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6f_{\bar{x},i}, i = 1, 2, \dots, N-1, \quad c_0 = c_N = 0, \quad (11)$$

bunda

$$f_{\bar{x},i} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}.$$

$f(x)$ funksiya dan $[a,b]$ oraliqda to'rtinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin deb talab qilamiz:

$$f(x) \in S^{(4)}[a,b]$$

Bundan tashqari

$$f''(a) = f''(b) = 0$$

chegaraviy shartlari bajarilsin, xuddi shunday shartlar splayn uchun ham bajarilsin deb shart qo'yamiz.

$$\|g(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|, \quad M_4 = \|f^{(4)}(x)\|_{C[a,b]}$$

deb belgilaymiz.

Faraz qilamiz $S_h(x)$, $f(x)$ funksiya ni $[a,b]$ oraliqda ω_h to'rida interpolatsiyalaydigan splayn bo'lsin. quyidagi teoremda $f(x)$ funksiya va uning $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarining interpolatsiya xatolari baosi keltirilgan.

1-teorema. Agar

$$f(x) \in S^{(4)}[a,b]$$

bo'lsa,

$$\|f(x) - S_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 \cdot h^4 \quad (12)$$

$$\|f'(x) - S_h'(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 \cdot h^3 \quad (13)$$

$$\|f''(x) - S_h''(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 \cdot h^2 \quad (14)$$

baiolar o'rinli bo'ladi.

Bu tengsizliklardan, $h \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) $S_h^{(i)}(x)$ larning $f^{(i)}(x)$ -larga $i=0,1,2$ intilishi kelib chiqadi.

Bu teoremani isbot qilish uchun $f''(x_i) - S_h''(x_i)$ xatolikni baiolovchi lemmani keltiramiz.

$$\|\varphi(x)\|_{C(\omega_h)} \leq \max_{x_i \in \omega_h} |\varphi(x_i)|$$

deb belgilaymiz.

1-lemma. $f(x) \in C^{(4)}[a,b]$ ychun

$$\|f''(x) - S_h''(x)\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{3}{4} \cdot M_4 \cdot h^2. \quad (15)$$

Isbot. $S_h''(x_i) = c_i$ bo'lganligi uchun, bu yerda c_i (11)- sistemaning yechimi, $z_i = c_i - f''(x_i)$ xatolikning baiosini topish kifoya. $c_i = z_i - f''_i$ ni (11)-ga qo'yib

$$z_{i-1} + 4 \cdot z_i + z_{i+1} = \psi_i, \quad i=1,2,\dots,N-1, \quad z_0 = z_N = 0 \quad (16)$$

tenglamalarni hosil qilamiz, bu yerda

$$\psi_i = 6 \cdot f_{\bar{x},i} - (f_{i+1}'' + 4f_i'' + f_{i-1}''). \quad (17)$$

(16)- sistema yechimini ψ_i - o'ng tomonlar orqali baiolaymiz. Buning uchun (16)- tenglamani $4z_i = -z_{i-1} - z_{i+1} + \psi_i$ ko'rinishida yozamiz. Bundan

$$\begin{aligned} 4|z_i| &= |-z_{i-1} - z_{i+1} + \psi_i| \leq |z_{i-1}| + |z_{i+1}| + |\psi_i| \leq \\ &\leq \max_{x_{i-1} \in \omega_h} |z_{i-1}| + \max_{x_{i+1} \in \omega_h} |z_{i+1}| + \max_{x_i \in \omega_h} |\psi_i| = 2\|z\|_{C(\omega_h)} + \|\psi_i\|_{C(\omega_h)} \end{aligned}$$

kelib chiqadi.

Bu tengsizlik barcha i -lar uchun o'rinli bo'lanligi uchun, u $|z_i|$ maksimumga erishadigan $i=i_0$ uchun ham, ya'ni $x_i = x_{i_0}$ uchun ham o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun

$$4\|z\|_{C(\omega_h)} \leq 2\|z\|_{C(\omega_h)} + \|\psi\|_{C(\omega_h)}$$

ya'ni

$$\|f''(x) - S_h''(x)\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{1}{2}\|\psi\|_{C(\omega_h)} \quad (18)$$

bajariladi.

Bundan (15)- baioni hosil qilish uchun $\|\psi\|_{C(\omega_h)}$ baiolash lozim. Bunda

$\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N-1})$, φ_i -lar (17)- tenglik yordamida aniqlangan. $\mathbb{N}^1$ -ni

$$\begin{aligned} \psi_i &= 6f_{\bar{x}x,i} - (f_{i+1}'' + 4f_i'' + f_{i-1}'') = 6(f_{\bar{x}x,i} - f_i'') - (f_{i+1}'' - 2f_i'' + f_{i-1}'') = \\ &= 6(f_{\bar{x}x,i} - f_i'') - h^2 f_{\bar{x}x,i}'' \end{aligned} \quad (19)$$

ko'rinishda yozamiz va Teylor formulalaridan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} f_{\bar{x}x,i} &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{h^2} f''(x_i) \cdot h^2 + \frac{1}{12h^2} \left[\frac{f^{(4)}(\xi_i) + f^{(4)}(\zeta_i)}{2} \right] \cdot h^4 = \\ &= f''(x_i) + \frac{1}{12} f^{(4)}(\eta_i) \cdot h^2, \quad x_{i-1} < \eta_i < x_{i+1} \end{aligned}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Xuddi shunday usul bilan

$$f_{\bar{x}x,i}'' = \frac{f_{i+1}'' - 2f_i'' + f_{i-1}''}{h^2} = \frac{f_{\xi_i}^{(4)} + f_{\zeta_i}^{(4)}}{2} = f^{(4)}(\zeta_i), \zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

tenglikni hosil qilish mumkin.

(19)- dan

$$\begin{aligned} \psi_i &= 6(f_{\bar{x}x,i} - f_i'') - h^2 \cdot f_{\bar{x}x,i}'' = 6\left[f_i'' + \frac{1}{12} f_{\eta_i}^{(4)} \cdot h^2 - f_i''\right] - \\ &- h^2 f^{(4)}(\eta_i') = \frac{1}{2} f^{(4)}(\eta_i) h^2 - h^2 f^{(4)}(\zeta_i), i = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Bundan $i=1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} |\psi_i| &\leq \frac{h^2}{2} |f^{(4)}(\eta_i)| + h^2 |f^{(4)}(\zeta_i)| \leq \\ &\leq \frac{h^2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| + h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = \frac{3}{2} M_4 h^2. \end{aligned}$$

bunda $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ kelib chiqadi.

(18)- dan

$$\|\psi\|_{C(\omega_h)} = \frac{3}{4} M_4 \cdot h^2$$

ekanligi ma'lum bo'ladi. 1- lemma isbot bo'ldi.

Endi 1-teoremani isbot qilishga o'tamiz. Eng avval (14)- baioni ko'rsatamiz. $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,2,...,N$ kesmani qaraymiz. Bu kesmada $f''(x) - S''(x)$ ga shunday birinchi darajali $P_1(x)$ ko'piadni qo'shib ayiramizki, $S''(x) - P_1(x)$ birinchi darajali ko'pxad $f''(x)$ ni x_{i-1} va x_i nuqtalarda interpolyatsiyalasinsin.

Unda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|f''(x) - S''_h(x) + P_1(x) - P_1(x)| \leq |f''(x) - S''_h(x) + P_1(x)| + |P_1(x)|. \quad (20)$$

ring tomondagi iadlarni aloiida – aloiida baiolaymiz. $S''_h(x) - P_1(x)$ birinchi darajali ko'pxad $f''(x)$ ni interpolyatsiyalovchi ekanligi uchun, interpolyatsiya xatoligini baiolash formulasidan :

$$\begin{aligned} |f''(x) - S''_h(x) + P_1(x)| &\leq \frac{1}{2} \cdot \max_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} |f^{(4)}(\xi)| \cdot |x - x_{i-1}| \cdot |x - x_i| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \cdot \max_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} |x - x_{i-1}| \cdot |x - x_i| = \frac{1}{4} \cdot M_4 h^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$P_1(x) = (f''(x_{i-1}) - S''(x_{i-1})) \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + (f''(x_i) - S''(x_i)) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shuning uchun

$$|P_1(x)| \leq \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |P_1(x)| = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left\{ |f''(x_{i-1}) - S''_h(x_{i-1})|, |f''(x_i) - S''_h(x_i)| \right\}$$

bundan lemmaga asosan

$$|P_1(x)| \leq \frac{3}{4} \cdot M_4 h^2 \quad (22)$$

baio hosil bo'ladi.

(20)- dan (21)- va (22)- larga asosan ixtieriy $x \in [x_{i-1}, x_i]$ uchun

$$|f''(x) - S''_k(x)| \leq M_4 h^2 \quad (23)$$

hosil bo'ladi. $i=1,2,...,N$ ixtieriy bo'lgani uchun (14)- baio o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi (13)- baioni o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. $[x_{i-1}, x_i]$ kesmada $r(x)=f(x)-S_h(x)$ funksiyani qaraymiz. $r(x_{i-1})=r(x_i)=0$ bo'lgani uchun shunday $x_{i-1} < \xi < x_i$ nuqta topiladiki $r'(\xi) = 0$.

Shu sababli

$$|r'(x)| = |r'(x) - r'(\xi)| = |r''(\xi) \cdot (x - \xi)| \leq |r''(\xi)| \cdot h$$

bo'ladi. Shunday qilib

$$|f'(x) - S'_h(x)| \leq |f''(\xi) - S'_h(\xi)| \cdot h$$

bo'ladi.

Agar (14)- ni inobatga olsak

$$|f'(x) - S'_h(x)| \leq M_4 \cdot h^3$$

bundan (13)- kelib chiqadi.

(12)- baioni isbot qilish kerak.

$$g(t) = f(t)S_h(x) - K(t - x_{i-1}) \cdot (t - x_i) \quad (24)$$

K doimiy son, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, K ni $g(x) = 0$ shartdan aniqlaymiz, ya'ni

$$K = \frac{f(x) - S_h(x)}{(x - x_{i-1})(x - x_i)}$$

$g(x)=g(x_{i-1})=g(x_i)=0$ ga egamiz. Shuning uchun $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ topiladiki

$$g''(x) = 0$$

$$g''(t) = f''(t) - S''_h(t) - 2K$$

bo'lgani uchun

$$f''(\xi) - S''_h(\xi) = 2K$$

ya'ni

$$f(x) - S_h(x) = \frac{f''(\xi) - S''_h(\xi)}{2} \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)$$

bo'ladi.

Bundan va (14)- dan

$$|f(x) - S_h(x)| \leq \frac{1}{2} \|f''(x) - S''_h(x)\|_{C(\omega_h)} \cdot \frac{h^2}{4} \leq \frac{M_4 \cdot h^4}{8}$$

baio hosil bo'ladi.

Bundan (12)- baio kelib chiqadi.

MA'RUZA 9. TAQRIBIY INTEGRALLASH. ALGEBRAIK ANIQLIGI ENG YUQORI KVADRATUR FORMULA. GAUSS, CHEBISHEV, ERMIT KVADRATUR FORMULALARI.

Reja:

- 1. Kvadratur formula hosil qilish.**
- 2. Xatolik bahosi.**
- 3. Nyuton-Kottes formulalari.**
- 4. Interpolyatsion kvadratur formulalar misollari.**

Kvadratur formula hosil qilish.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \quad (1)$$

Integrallarni taqribiy hisoblash fomulalari bilan tanishamiz. Bu ifodada $p(x) > 0$ integrallanuvchi funksiya (vazn funksiyasi) va $f(x)$ – silliq funksiya.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n C_k f(x_k) \quad (2)$$

ko'rinishidagi formulalarni qaraymiz. Bunda $x_k \in [a, b]$ va S_k , $k=0, 1, \dots, n$ sonlar.

$x_k \in [a, b]$ nuqtalar kvadratur formulaning tugun nuqtalari, C_k - sonlar kvadratur formulaning koeffisientlari deb aytiladi.

$$I_{n+1} = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=0}^n C_k f(x_k)$$

kvadratur formula xatoligi deb aytiladi.

Integral ostidagi funksiyani $[a, b]$ oraliqida interpolyatsion ko'piad bilan almashtiramiz. Bunday usul bilan ko'rilgan formulalar interpolyatsion kvadratur formulalar deb aytiladi.

Faraz qilamiz, $[a, b]$ oraliqida x_k , $k=0, 1, \dots, n$ tugun nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orasida ustma-ust tushadigani yo'q deb faraz qilinadi.

(1)- integralda $f(x)$ funksiyani

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} f(x_k) \quad (3)$$

Lagranjning interpolatsion ko'piadi bilan almashtirib (2) – ko'rinishdagi taqribiy formulani hosil qilamiz.

(3) - formulada

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad \omega'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j).$$

Unda kvadratur formula koeffisientlari

$$C_k = \int_a^b \frac{p(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

kabi aniqlanadilar.

Shunday qilib (2) - formula uning koeffisientlari (4) - formula orqali aniqlanganda va faqat shundagina interpolatsion kvadratur formula bo'ladi.

Xatolik bahosi.

Interpolatsion kvadratur formula xatoligi ifodasini aniqlaymiz. Buning uchun $f(x)$ funksiyani

$$f(x) = L_n(x) + R_{n+1}(x)$$

ko'rinishda tasvirlaymiz. Bunda $L_n(x)$, $f(x)$ funksiya uchun $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugun nuqtalar bo'yicha qurilgan interpolatsion ko'piad, R_{n+1} - interpolatsiya xatoligi.

Integral ostidagi $f(x)$ funksiya o'rniga uning interpolatsion ko'piadi yordamida yozilgan ifodasini qo'ysak

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) L_n(x) dx + \int_a^b p(x) R_{n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n C_k f(x_k) + \int_a^b p(x) R_{n+1}(x) dx$$

tenglik hosil bo'ladi.

Bu tenglikdan (2)- formula xatoligi

$$l_{n+1} = \int_a^b p(x) R_{n+1}(x) dx \quad (5)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bunda $R_{n+1}(x)$ - interpolyatsiya xatoligi. Interpolyatsiya xatoligi ifodasidan foydalanib

$$l_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b p(x) \omega(x) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx \quad (6)$$

formulani hosil qilamiz.

Agar

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

qilib belgilasak

$$|l_{n+1}| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b p(x) |\omega(x)| dx \quad (7)$$

baho hosil bo'ladi.

(7) – bahodan quyidagi fikrning to'g'riligi kelib chiqadi. $n+1$ ta $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugun nuqtalar uchun qurilgan interpolyatsion kvadratur formula n -chi tartibli iar qanday ko'piadni aniq integrallaydi, ya'ni agar $f(x)$ n -chi darajali ixtieriy ko'pxad bo'lib, C_k - koeffisientlar (4) -formulaga muvofiq hisoblangan bo'lsalar, unda

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n C_k f(x_k)$$

aniq tenglik bajariladi. Bunday kvadratur formulaning algebraik tartibi n ga teng deb aytiladi. Bunga teskari tasdiq ham o'rinli.

Teorema. Agar

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n d_k f(x_k) \quad (8)$$

n-chi tartibli barcha ko'piadlar uchun aniq bo'lsa, unda u interpolatsion kvadratur formuladir.

Isbot.

$$d_k = C_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx \quad k=0,1,\dots,n$$

ekanligini ko'rsatish etarli.

$$\varphi_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)} \omega'(x_k), \quad k=0,1,\dots,n$$

ko'piadlarni qaraymiz.

$$I_k = \int_a^b p(x) \varphi_k(x) dx$$

integralni hisoblaymiz.

Teorema shartiga ko'ra

$$I_k = \sum_{l=0}^n d_l \varphi_k(x_l)$$

tengliklar o'rinli.

$$\varphi_k(x_l) = \begin{cases} 0, & \text{agar } k \neq l, \\ 1, & \text{agar } k = l, \end{cases}$$

bo'lganligi uchun $I_k = d_k$, $k=0,1,\dots,n$ bo'ladi. Lekin $I_k = C_k$, $k=0,1,\dots,n$ ekanligi ma'lum.

Shunday qilib, $d_k = C_k$, $k=0,1,\dots,n$ ekanligi ma'lum bo'ldi.

Nyuton–Kottes formulalari. Kvadratur formulaning sonli turg'unligi.

Tekis to'rtli interpolatsion turdagi kvadratur formulalar Nyuton-Kottes formulalari deb ataladi. Agar shu tugun nuqtalar $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k=0,1,\dots,n$,

kabi aniqlangan bo'lsalar, unda kvadratur formulalar yopiq turdagi kvadratur

formula deb ataladi. Agar $x=a+th$, $0 \leq t \leq n$, $h = \frac{(b-a)}{n}$ almashtirish bajarsak, $C_k =$

$(b-a)b_k^{(n)}$, $k=0,1,\dots,n$ bunda

$$b_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n} \int_0^n p(a+th) \frac{t(t-1)\dots(-1-n)}{t-k} dt \right),$$

ko'rinishda ifodalanadilar.

Nyuton-Kottes formulalari $n \geq 10$ bo'lganda aiyon-aiyonda ishlatiladilar, chunki bu iolda ular hisoblash uchun turg'unmas bo'ladilar. Bunga sabab, C_k koeffisientlarning turli ishorali bo'lishlaridadir. Hisoblash uchun koeffisientlar ishorasining bir xil ekanligini muhimligiga alohida to'xtaymiz.

$$I_k = \sum_{k=0}^n C_k f(x_k)$$

kvadratur yig'indini qaraymiz. $f(x)$ funksiyaning qiymatlari biror xil xatolik bilan hisoblanadi, ya'ni aniq qiymat o'rnida $\bar{f}(x_k) = f(x_k) + \delta_k$ taqribiy qiymat topiladi deb faraz qilamiz. Unda I_n o'rnida

$$\tilde{I}_n = \sum_{k=0}^n C_k (f(x_k) + \delta_k) = I_n + \delta I_n$$

qiymat hosil bo'ladi, bunda

$$\delta I_n = \sum_{k=0}^n C_k \delta_k.$$

interpolyatsion kvadratur formula $f(x) \equiv 1$ funksiyaning aniq integrallaydigan bo'lgani uchun

$$\sum_{k=0}^n C_k = \int_a^b p(x) dx$$

bo'ladi.

Bundan $p(x) > 0$ bo'lganda

$$\sum_{k=0}^n C_k = M$$

bo'ladi va yig'indining n -ga bog'liq bo'lmagan $M > 0$, bilan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Faraz qilamiz bizga S_k koeffisientlar manfiy emas bo'lsinlar. Unda

$$|\delta I_n| \leq \sum_{k=0}^n |C_k| |\delta_k| = \sum_{k=0}^n C_k |\delta_k| \leq (\max_{0 \leq k \leq n} |\delta_k|) M$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bu tengsizlik kvadratur yig'indining xatoligi tartibi funksiya qiymatini hisoblashdagi xatolik tartibi bilan bir xil ekanligini ko'rsatadi.

Agar C_k koeffisientlarning ishoralari turlicha bo'lsa,

$$\sum_{k=0}^n |C_k|$$

yig'indi n bo'yicha tekis chegaralangan bo'lmashligi mumkin va natijada n ning oshishi bilan I_n ni hisoblash xatoligi o'sib borishi mumkin. Bunday iolda Nyuton-Kottes formulalari bo'yicha hisoblash turg'un bo'lmaydi, natijada bunday formulalardan n -ning katta qiymatlarida foydalanib bo'lmaydi. Shunday qilib (1)-integralni istalgan aniqlikda hisoblash uchun ikkita imkoniyat mavjud:

Birinchidan: $[a, b]$ kesmani bir-nechta qismlarga ajratib, iar bir qism kesmada tugun nuqtalari soni katta bo'lmagan, Nyuton-Kottes formulasini qo'llash mumkin.

Bunday usul bilan hosil qilingan formula murakkab kvadratur formula deb aytiladi.

$f(x)$ funksiya qiymatlarining ko'p marotaba hisoblanadigan bo'lganligi tufayli, bunday formulalarning tejamli emasligiga qaramasdan ulardan tez-tez foydalaniladi. Xuddi shunday tugun nuqtali Nyuton-Kottes kvadratur formulasining aniqligidan yuqori bo'ladi.

Ikkinchidan: tugun nuqtalarini maxsus tanlash yo'li bilan tugun nuqtalar soni Nyuton-Kottes kvadratur formulasining tugun nuqtalar soniga teng bo'lgan, lekin aniqlik tartibi yuqori bo'lgan kvadratur formula qurish mumkin.

Interpolyatsion kvadratur formulalar misollari.

muqadim zamonlardan buyon quyidagi intarpolyastion kvadratur formulalar ma'lum:

1. To'g'riturtburchaklar formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(x_0), \quad x_0 \in [a,b]$$

2. Trapetsiya formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

3. Simpson formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

4. Murakkablashtirilgan to'g'rito'rtburchak formulasi.

(To'g'rito'rtburchaklar formulasi).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)$$

bunda $\square_k \square [x_{k-1}, x_k]$, $x_k - x_{k-1} = h$, $h = \frac{b-a}{n}$

5. Murakkablashtirilgan trapetsiya formulasi.

(Trapetsiyalar formulasi).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

bunda $x_k - x_{k-1} = h$, $k=1,2,\dots,n$, $h = \frac{b-a}{n}$

6. Simpsonning murakkablashtirilgan formulasi.

(Parabolalar formulasi).

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} [& f(x_0) + f(x_{2n}) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + \\ & + f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))] \end{aligned}$$

bunda $x_k = a + 0.5hk$, $k=0,1,\dots,2n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

MA'RUZA 10. NOREGULYAR HOLDA INTEGRALNI HISOBLASH. KARRALI INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH USULLARI.

Reja:

1. Noregulyar integrallarni taqribiy hisoblash.
2. Karrali integrallarni taqribiy hisoblash usullari.

Noregulyar integrallarni taqribiy hisoblash.

Singular integral tushunchasi. $f(x) = \frac{\varphi(x)}{|x-c|^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) ko'rinishidagi maxsuslikka

ega bo'lgan integralni hisoblash masalasini ko'rgan edik.

Ko'p tatbiqiy masalalarda, jumladan aerodinamikada, shunday integrallar uchraydiki, ularda $\alpha = 1$ bo'ladi. Bunday xolda integralni Koshi bo'yicha bosh qiymat ma'nosida tushunish kerak.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning c nuqtasi atrofida chegaralmagan bo'lib,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t) dt \right]$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $[a, b]$ oraliq bo'yicha $f(x)$ fuksiyadan olingan xosmas integralning Koshi bo'yicha bosh qiymati deyiladi va

$$V.p. \int_a^b f(x) dx \text{ yoki } \int_a^{*b} f(x) dx$$

kabi belgilanadi. Bu yerda (V.p. «valeur principale» so'zlarning bosh xarflari bo'lib, fransuzcha «bosh qiymat» ni bildiradi).

Bosh qiymat ma'nosiagi integrallarni ko'pincha maxsus yoki singulyar integrallar deb atashadi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ nuqtalar uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|^\alpha$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda *Gelider shartini qanoatlantiradi* deyiladi, bu yerda L va α qandaydir musbat miqdorlar. Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u xolda $f(x)$ Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi. Biz doim $0 < \alpha \leq 1$ deb olamiz. Kurinib turibdiki, $[a,b]$ da Gelder shartini qanoatlantiradigan funksiya shu oraliqda uzluksizdir.

Faraz kilaylik, $y \in (a,b)$ ixtiyoriy nuqta bulsin, $\int_a^b \frac{f(x)}{x-y} dx$ integralda

$K(x,y) = \frac{1}{x-y}$ *koshi yadrosi* deyiladi va integralning uzi *Koshining singulyar integrali* deyiladi.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda Gelder shartini qanoatlantirsa, u xolda Koshining singulyar integrali bosh qiymati ma'nosida mavjuddir.

Isbot. Xakikatdan xam,

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-y} dx = \int_a^b \frac{f(x) - f(y)}{x-y} dx + f(y) \int_a^b \frac{dx}{x-y} \quad (1)$$

Gilbert yadroli singulyar integrallarni taqribiy hisoblash. Kulaylik uchun Gilbert integralini almashtirish yordamida kuyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$If(y) = \int_0^{*1} f(x) \operatorname{ctg} \pi(x-y) dx. \quad (2)$$

Odatda Gilbert integralida $f(x)$ funksiyaning Gyolder shartini qanoatlantirishda tashkari, u davriy funksiya deb karaladi. Biz bu yerda $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad (3)$$

kuyidagi

$$|C_n| \leq \frac{c}{|n|^\alpha} \quad (n \neq 0) \quad (4)$$

shartni qanoatlantiradi va $\alpha < 1$ deb faraz kilib, (2) integral uchun kvadratur formula tuzamiz.

Buning uchun $P_N(x)$ trigonometrik ko'pxadni quyidagicha kiritamiz:

$$P_N(x) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{C}_m e^{2\pi i m x} \quad (5)$$

$$\tilde{C}_m = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) e^{-2\pi i \frac{km}{2N}} \quad (6)$$

Endi (5)ni (6)ga kuysak,

$$P_N(x) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) \psi_k(x)$$

ga ega bulamiz, bu yerda

$$\psi_k(x) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} e^{2\pi i m(x - \frac{k}{2N})} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \cos 2\pi m(x - \frac{k}{2N}).$$

() formula yordamida

$$I\psi_k(k) = -2 \sum_{m=1}^{N-1} \sin 2\pi m \left(y - \frac{k}{2N}\right) = \varphi_k(y)$$

ni xosil kilamiz. Endi

$$f(x) = P_N(x) + r_N(x) \quad (7)$$

deb olib, buni (2) integralga kuysak,

$$If(y) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) \varphi_k(y) + R_N(y) \quad (8)$$

kvadratur formulani xosil kilamiz..

Karrali integrallarni taqribiy hisoblash.

$$\int \int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1, dx_2, \cdots, dx_n \quad (1)$$

Karrali integrallarni hisoblashni $\int_a^b f(x)dx$ ko'rinishidagi integrallarni

kvadratur formulalar yordamida hisoblashga olib kelish mumkin. Ammo integralni $\varepsilon > 0$ aniqlikda hisoblash uchun qo'llaniladigan algoritmlarning murakkabligi arifmetik amallarning soni n -o'lchovning oshishi bilan o'sib boradi. Bu yerda karrali integrallarni hisoblashning turli usullari bilan tanishamiz.

Karrali integraldan takroriy integrallashga o'tish va kvadratur formulalardan foydalanish.

Bu usulning asosiy g'oyasini tushunish uchun $n = 2$ teng deb faraz qilamiz.

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (2)$$

integralni qaraymiz.

Bu yerda D

$$y = \varphi_1(x) \quad \text{va} \quad y = \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

chiziqlar bilan chegaralangan soha.

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx \quad (4)$$

ekanligi ayon. Bu yerda

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (5)$$

(5)- integralni kvadratur yig'indi bilan taqribiy almashtirish mumkin.

Masalan: trapetsiyalar formulasidan foydalanish mumkin:

$$J = \int_a^b F(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{F(x_0)}{2} + F(x_1) + \dots + F(x_{n-1}) + \frac{F(x_n)}{2} \right) \quad (6)$$

$$k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

(6) - formulada qatnashayotgan

$$F(x_k) = \int_{\varphi_1(x_k)}^{\varphi_2(x_k)} f(x_k, y) dy$$

ifodani o'z navbatida, yana trapetsiyalar kvadratur formulasi bilan almashtirish mumkin:

$$F(x_k) = \frac{\varphi_2(x_k) - \varphi_1(x_k)}{n} \left(\frac{f(x_k, y_0)}{2} + f(x_k, y_1) + \dots + f(x_k, y_{n-1}) + \frac{f(x_k, y_n)}{2} \right) \quad (7)$$

bu yerda

$$y_k = \varphi(x_k) + \frac{\varphi_2(x_k) - \varphi_1(x_k)}{n} k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

J integralni (6) va (7) - formulalar yordamida hisoblaganda $l=l(n)$ xatolik n -ning oshishi bilan kamayadi, $V(n)$ amallar soni oshib boradi. $V(n)=O(n^2)$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Agar $f(x, y)$ ikkinchi tartibli chekli hosilalarga ega bo'lib, $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ etarlicha silliq bo'lsalar, unda $l(n)=O(n^2)$ bo'ladi. Bu usulni karrali integraldan takroriy integrallashga o'tib, oxirgi integralni kvadratur formulani ko'p marta takroriy qo'llash bilan hisoblashni umumiy iolda iam amalga oshirish mumkin. n ta tugun nuqtali kvadratur formulani qo'llaganda arifmetik amallar soni $V(n)=O(n)$ kabi bo'ladi. Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ D sohada ikkinchi tartibli chekli hosilaga ega bo'lib, D sohaning G chegarasi istalgancha silliq bo'lsa va integral trapetsiya formulasini takroriy qo'llash bilan hisoblansa $l(n)=O(n^2)$ bo'ladi.

Katakchalar usuli.

$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ to'rtburchak bo'yicha olingan integralni qaraymiz. Tugun nuqtasi integrallash kesmasining o'rtasida olingan to'g'ri to'rtburchak kvadratur formulasiga o'xshash, integrallanuvchi funksiyani uning to'rtburchak markazidagi qiymatiga almashtirish mumkin. Unda integral yengil hisoblanadi:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx S f(\bar{x}, \bar{y}) \quad (8)$$

$$S = (b-a)(d-c) \quad \bar{x} = \frac{1}{2}(a+b), \quad \bar{y} = \frac{1}{2}(c+d)$$

Aniqlikni oshirish uchun D integrallash sohasini to'g'ri to'rtburchakli katakchalarga ajratish mumkin. Har bir katakchada integralni o'rta qiymat formulasi bo'yicha hisoblab, barcha katakchalar bo'yicha hisoblangan qiymatlarni qo'shib chiqsak

$$J = \iint_D f(x,y) dx dy \approx \sum_k S_k f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \quad (9)$$

formulalarni hosil qilamiz.

Bunda S_k , k - katakchanning yuzi, $\bar{x}_k, \bar{y}_k$ sonlar k katakcha og'irlik markazining koordinatalari. (9)- formulaning o'ng tomonida integral yig'indi turibdi, shu sababli har qanday $f(x,y)$ uzluksiz funksiya uchun bu yig'indining qiymati, katakchalarning perimetri nolga intilganda, integral qiymatiga intiladi. Bu integrallash formulasining xatoligini baholaymiz. Avvalo shuni qayd etamizki bu formula har qanday birinchi darajali ko'piadni aniq integrallaydi. Bu xossani inobatga olib,

$$f(x,y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \xi f'_x + \eta f'_y + \frac{1}{2} \xi^2 f''_{xx} + \frac{1}{2} \eta^2 f''_{yy} + \xi \eta f''_{xy} + \dots$$

Teylorning formulasidan foydalansak, bunda $\xi = x - \bar{x}, \eta = y - \bar{y}$, barcha hosilalar kataklarning o'rtasida hisoblangan, xatolik uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$l = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy - S f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \frac{1}{24} S \left[(b-a)^2 f''_{xx} + (d-c)^2 f''_{yy} \right]_{x=\bar{x}}^{x=b} \Big|_{y=\bar{y}}^{y=d} \quad (10)$$

Faraz qilamiz, (9)-murakkablashtirilgan formulada D cohaning tomonlari N va M bo'lakka bo'lingan bo'lsin. Unda har bir katakcha uchun (10) - integrallash xatoligi

$$l_k \approx \frac{1}{24} S_k \left[\left(\frac{b-a}{N} \right)^2 \cdot f''_{xx} + \left(\frac{d-c}{M} \right)^2 \cdot f''_{yy} \right]_{x=\bar{x}_k}^{x=b} \Big|_{y=\bar{y}_k}^{y=d}$$

ko'rinishida bo'ladi.

Bunday xatoliklarning barcha katakchalar bo'yicha yig'indisi:

$$l = \sum_k l_k \approx \frac{1}{24} \left[\left(\frac{b-a}{N} \right)^2 \iint_D f''_{xx} dx dy + \left(\frac{d-c}{M} \right)^2 \iint_D f''_{yy} dx dy \right] = O(N^{-2} + M^{-2}), \quad (11)$$

ya'ni umumiy xatolik ikkinchi tartibli kichik miqdor bo'ladi. Katakchalar usulini murakkabroq sohalar uchun umumlashtiramiz. Agar, S, D – sohaning yuzi va $\bar{x}, \bar{y}$ og'irlik markazi deb tushunilsa

(8) - formulaning ixtiyoriy D bo'yicha chiziqli funksiya uchun aniq ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Ma'lumki D sohaning og'irlik markazi oddiy

$$S = \iint_D dx dy, \quad \bar{x} = \frac{1}{S} \iint_D x dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \iint_D y dx dy \quad (12)$$

formulalar yordamida topiladilar. Shu sababli (8) - formula D - sohaning yuzi va og'irlik markazi oson topiladigan sohalar uchun amaliy ahamiyatga ega. Bunday sohalar uchburchak, to'rtburchak va muntazam ko'pburchakdan iborat bo'lishi mumkin.

Bu, (9)- umumiy formulani D -sohaning chegarasi siniq chiziqdan iborat bo'lganda qo'llash mumkin demakdir, chunki bunday sohani uchburchak, to'rtburchaklarga ajratish mumkin.

Chegarasi egri chiziqdan iborat bo'lgan iolda (9) - umumiy formulani boshqacha usulda qo'llashadi. Sohani to'g'ri to'rtburchakli to'r bilan qoplaydilar. Sohada to'la joylashgan katakchalarni ichki katakcha deb ataymiz; agar katakchada sohaning nuqtalari iamda sohaga tegishli bo'lmagan nuqtalar tegishli bo'lsa, bunday katakchani chegaraviy katakcha deb ataymiz. Ichki katakchanning yuzi uning tomonlari ko'paytmasiga teng. Chegaraviy katakchanning yuzi

D - sohaning katakchaga tegishli bo'lgan qismining yuziga teng. Lekin uni iamma vaqt iam aniqlab bo'lmaydi. Bu katakchanning yuzini topish uchun unga tegishli D – soha qismining egri chiziqli chegara qismini vatar bilan almashtiramiz va uning yuzini hisoblaymiz. Bu qiymat chegaraviy katakcha yuzining taqribiy qiymati bo'ladi. Topilgan qiymatlarni (9) - formulaga quyib integralni hisoblaymiz. Har bir ichki katakchada xatolik $O(N^{-2})$. Chegaraviy katakchalarda xatolik $O(N^{-1})$. Ammo chegaraviy katakchalarning soni $O(N^{-1})$. Shu sababli umumiy xato $O(N^{-2})$ bo'ladi.

Monte - Karlo usuli.

D–soha murakkab bo'lganda karrali integralni takroriy integrallashga keltirib , undan so'ng kvadratur formula yordamida oddiy integralni hisoblash ancha qiyin hisoblanadi. Shu sababli hisoblash uchun sodda va samarali formulalar qurish muammosi hozir ham echilgani yo'q. Sodda formulalardan biri **Monte - Karlo** yoki statistik deb aytiladigan usuldir. Faraz qilamiz D – soha birlik kvadrat ichida joylashgan bo'lsin. D dan tashqarida $f(x,y)$ funksiyani nol bilan davom ettiramiz. Faraz qilamiz eitimlik taqsimoti birga teng bo'lgan $[0,1]$ kesmada tasodifiy sonlarni hosil qiluvchi hisoblagich mavjud bo'lsin. Bu hisoblagich yordamida $x_k, y_k, k=1,2,\dots$ juftlarni hosil qilib $P_k = (x_k, y_k)$ nuqtalar ketma - ketligini hosil qilamiz.

Buning yordamida

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k)$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Sinovlar soni N- ning oshishi bilan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$|J - J_N| < \varepsilon$$

bo'lishining eitimligi birga intilishini ko'rish oson.

Bu usulning afzalligi uning hisoblash algoritmining soddaligida, hamda D – sohaning shakli bilan u joylashgan fazo o'lchamining oshishiga bo'liq emasligidadir.

Sonli integrallash masalasini yechishga funksional yondashish.

Taqribiy integrallash formulalarini qurishning yana bir usuli funksional yondashish deb aytiladi. Bu usul quyidagidan iborat.

$$I_N(f) = \int_D p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k f(x_k)$$

xatolik $f \in B$ Banax fazosi ustidagi chiziqli uzluksiz funksional sifatida qaraladi.

Agar uning normasi

$$\|I_N(f)B^*\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|I_N(f)|}{\|f(B)\|}$$

ma'lum bo'lsa, unda formulaning xatoligini

$$|l_N(f)| \leq \|l_N(f)\|_{B^*} \|f(x)\|_B$$

kabi baholash mumkin.

Undan so'ng $\|l_N(f)\|_{B^*}$ norma C_k -koeffitsientlar va x_k - tugun nuqtalarning funksiyasi sifatida qaralib, funksional normasiga turli shartlar quyilib C_k va x_k $k=1,2,\dots,n$ o'zgaruvchilar aniqlanadi.

Masalan, $L_2^{(m)}(0,1)$ -S.L. Sobolevning davri 1-ga teng bo'lgan funksiyalar fazosida to'g'ri to'rtburchaklar formulasining eng yaxshi formula ekanligi, ya'ni

$$\inf_{c,x} \|l_N(f)\|_{L_2^{m*}} = \|l_N^T(f)\|_{L_2^{m*}} = N^{-m} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}},$$

ekanligi ma'lum, bunda $l_N^T(f)$ – to'g'ri to'rtburchaklar formulasi xatolik funksionalini belgilaydi.

MA'RUZA 11. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN KOSHI MASALASINI YECHISHNING SONLI USULLARI. BIR QADAMLI USULLAR: EYLER VA RUNGE-KUTTA USULLARI. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHDA KO'P QADAMLI CHEKLI AYIRMALI USULLAR, ULARNING YAQINLASHISH VA TURG'UNLIGI. ADAMS EKSTRAPOLYASTION VA INTERPOLYASTION FORMULALARI.

Reja:

- 1. Masalaning qo'yilishi .**
- 2. Sonli usullar misollari .**
- 3. Runge – Kutt usullari .**
- 4. Runge – Kutt usullarning yaqinlashishi .**

Masalaning qo'yilishi.

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u^0 \tag{1}$$

sistema uchun yoki batafsilroq

$$\frac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad t \succ 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$u_i(0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Koshi masalasini qaraymiz. Agar

$$f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n), D = \{t \mid |t| \leq a, |u_i - u_i^{(0)}| \leq b, i = 1, 2, \dots, n\}$$

yopiq sohada uzluksiz bo'lsalar, unda

$$|f_i| \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

shart o'rinli bo'ladi.

Bundan tashqari agar f_i lar, D - soxada istalgan $(t, u_1', u_2', \dots, u_n')$,
 $(t, u_1'', u_2'', \dots, u_n'')$ nuqtalar uchun u_i argumentlar bo'yicha, istalgan u' va u'' uchun
 Lipshist shartini kanoatlantirsa, ya'ni

$$|f_i(t, u_1', u_2', \dots, u_n') - f_i(t, u_1'', u_2'', \dots, u_n'')| \leq L \{ |u_1' - u_1''| + |u_2' - u_2''| + \dots + |u_n' - u_n''| \}$$

bo'lsa, unda (2) sistemaning $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \dots, u_n = u_n(t)$

$$|t| \leq t_0 = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad \text{va (3) - shartalarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud}$$

bo'lib birdan - birdir.

Koshi masalasini sonli yechish va uni tadqiq etishda Koshi masalasining yechimi mavjud va birdan-bir va keraklicha silliq deb faraz qilamiz.

Sonli usullar misollari.

Koshi masalasini yechishning ikki gurui sonli usullari mavjud:

Ko'p qadamli ayirmali usullar va Runge-Kutt usullari. Quyida sonli usullarning bir qancha misollarini qarab chiqamiz va bayon qilamiz.

Soddalik uchun birta

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad t \succ 0, \quad u(0) = u_0 \quad (4)$$

tenglamani qaraymiz.

$$\omega_\tau = \{t_i = i\tau, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

nuqtalar to'plamini qaraymiz. Buni to'r deb ataymiz.

$u(t)$ (4) - tenglamaning aniq yechimi bo'lsin. $y_i = y(t_i)$ (4) - masalaning taqribiy yechimi bo'lsin. y_i takribiy yechim to'rt funksiya deb aytiladi, ya'ni faqat ω_τ to'rt da aniqlangan funksiyadir.

1- misol. Eyler usuli.

(4) - tenglama

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} - f(t_i, y_i) = 0, i = 0, 1, \dots, y_0 = u_0 \quad (5)$$

ayirmali tenglama bilan almashtiriladi. Bu tenglamaning yechimi

$$y_{i+1} = y_i + \tau f(t_i, y_i) = 0, i = 0, 1, \dots, y_0 = u_0$$

rekurrent formula yordamida oshkor tarzda topiladi.

Taqribiy usullar qaralganda yaqinlashish ularning asosiy xossasi iisoblanadi. Taqribiy usullar yaqinlashishini turlicha ta'riflash mumkin. Chekli ayirmalar usulida $\tau \rightarrow 0$ dagi yaqinlashish tushunchasi ko'p tarqalgan. Bu quyidagilardan iborat. t - nuktani tanlab olib shunday ω_τ turlar ketma-ketligini qaraymizki

$$\tau \rightarrow 0, t_i = i\tau = t(i \rightarrow \infty)$$

bo'lsin.

(5) usul t - nuqtada yaqinlashadi deb aytiladi, agar $\tau \rightarrow 0$

$|y_i - u(t_i)| \rightarrow 0$. (5)-usul $(0, T]$ kesmada yaqinlashadi deb aytiladi agar bu usul kesmaning iar bir nuqtasida yaqinlashsa.

Usulning tartibi r -ga teng deb aytiladi, agar $p > 0$ uchun $\tau \rightarrow 0$

$|y_i - u(t_i)| = O(\tau^p)$ bo'lsa. Usul xatoligi $z_i = y_i - u(t_i)$ ni qanoatlantiradigan tenglamani xosil qilamiz. $y_i = z_i + u_i$ ni (5) - ga qo'yib

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\tau} = f(t_i, u_i + z_i) - \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \quad (6)$$

tenglamani xosil qilamiz. (6) - ning o'ng tomonini

$$\psi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)}$$

yiilindi ko'rinishda yozish mumkin.

Bunda

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + f(t_i, u_i) \quad , \quad \psi_i^{(2)} = f(t_i, u_i + z_i) - f(t_i, u_i)$$

$\psi_i^{(1)}$ funksiya (5) - ayirmali tenglamaning (4) – dastlabki tenglama yechimidagi approksimatsiya xatoligi deb aytiladi. Approksimatsiya xatoligi (5) - ayirmali tenglama chap tomoniga (4) - dastlabki tenglama aniq yechimi $u(t)$ qo'yilganda xosil bo'lgan farqdan iborat ekanligi ko'rinib turibdi. y_i taqribiy yechim $u(t_i)$ - aniq yechimga teng bo'lganda xatolik nolga teng bo'ladi.

Agar $\tau \rightarrow 0$, $\psi_i^{(1)} \rightarrow 0$ ayirmali usul dastlabki differentsial tenglamani approksimatsiyalaydi deb aytiladi. Agar $\psi_i^{(1)} = O(\tau^p)$ bulsa ayirmali usul dastlabki tenglamani r - tartib bilan approksimatsiyalaydi deb aytiladi. Keyinroq juda katta umumiy farazlarda aniqlik tartibining approksimatsiya tartibiga tengligi ko'rsatiladi.

$$\psi_i^{(2)} = f(t_i, u_i + z_i) - f(t_i, u_i)$$

Agar dastlabki tenglamaning o'ng tomoni $u(t)$ ga bolliq bo'lmasa bu funksiya aynan nolga teng bo'ladi. Umumiy xolda $\psi_i^{(2)}, z_i$ xatolikka proporsionaldir, chunki

$$\psi_i^{(2)} = \frac{df}{du}(t_i, u_i + \theta \cdot z_i) \cdot z_i, |\theta| \leq 1.$$

Eyler usulining approksimatsiya tartibini Teylor formulasini qullab topish qiyin emas.

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = u'(t_i) + O(\tau)$$

bo'lganligi uchun (4) ga asosan

$$\psi_i^{(1)} = -u'(t_i) + f(t_i, u_i) + O(\tau) = O(\tau) \quad ,$$

ya'ni , Eyler usuli birinchi tartibli approksimatsiyaga ega. Buni xosil qilishda $u''(t)$ ning chegaralanganligini faraz qilindi.

2- misol. Simmetrik sxema.

(4) - tenglama

$$\frac{u_{i+1} - y_i}{\tau} - \frac{1}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] = 0, i = 0, 1, \dots, y_0 = u_0 \quad (7)$$

ayirmali sxema bilan almashtiriladi.

Bu usul Eyler usuliga qaraganda ancha murakkabdir, chunki y_{t+1} qiymat oldin aniqlangan y_i qiymat orqali

$$y_{i+1} - \frac{1}{2} \tau \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) = F,$$

bunda

$$F_i = y_i + \frac{1}{2} \tau \cdot f(t_i, y_i)$$

tenglamani yechish bilan aniqlanadi. Shu sababli usul oshkormas deb aytiladi. (7) - usulning (5)- ga nisbatan afzalligi uning yuqori tartibli aniqligidir.

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \frac{1}{2} [f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$$

funksiya uchun

$$\psi_i^{(1)} = -u_i' - \frac{\tau}{2} u_i'' + 0(\tau^2) + \frac{1}{2} (u_i' + u_{i+2}') = -u_i' - \frac{\tau}{2} u_i'' + \frac{1}{2} [u_i' + u_i' + \tau u_i'' + 0(\tau^2)]$$

o'rinlidir, ya'ni $\psi_i^{(1)} = 0(\tau^2)$

Shunday qilib, (7) - usul ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega. Keltirilgan misollar ayirmali usullar deb ataluvchi usullardan eng soddalaridirlar, ular yana ayirmali sxemalar iam deb aytiladilar.

Runge- Kutt usulining ayirmali usullardan farqi shundaki, tenglamalarning o'ng tomoni $f(t,u)$ qiymatlari nafaqat tur nuqtalarida , balki oralik nuqtalarda iam iiisoblanib topiladi

3- misol. Ikkinchi tartibli Runge-Kutt usullari.

Faraz qilamiz, dastlabki y_i yechim $t=t_i$ laxzada aniqlangan bo'lsin. $y_{i+1} = y(t_{i+1})$ qiymatni topish uchun eng avval

$$\frac{y_{i+\frac{1}{2}} - y_i}{0,5\tau} = f(t_i, u_i) \quad (8)$$

Eyler sxemasi buyicha $y_{i+\frac{1}{2}}$ oralik qiymatni topib, undan so'ng

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = f(t_i + 0,5\tau, y_{i+\frac{1}{2}}) \quad (9)$$

sxemadan y_{i+1} ni oshkor tarzda topamiz.

Boglanishsizlikni tadqiq etish uchun $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + 0,5\tau f(t_i, u_i)$ - ni (9)-ga quyib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} - f(t_i + 0,5\tau, y_i + 0,5\tau, f(t_i, u_i)) = 0 \quad (10)$$

ayirmali tenglamani xosil qilamiz. Bu tenglamaning bo'lanishsizligi

$$\psi_i^1 = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - f(t_i + 0,5\tau, u_i + 0,5\tau, f(t_i, u_i)) \quad (11)$$

ko'rinishda yoziladi.

Taylor formulasiga asosan

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = \frac{u_i + u_i' \tau + \frac{1}{2} u_i'' \tau^2 + O(\tau^3) - u_i}{\tau} = u_i' + \frac{1}{2} u_i'' \tau + O(\tau^2)$$

va

$$\begin{aligned} f(t_i + 0,5\tau, u_i + 0,5\tau f(t_i, u_i)) &= f(t_i, u_i) + 0,5\tau \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, u_i) + 0,5\tau f(t_i, u_i) \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} + O(\tau^2) = \\ &= f(t_i, u_i) + 0,5\tau \left[\frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} + f(t_i, u_i) \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} \right] + O(\tau^2) = f(t_i, u_i) + 0,5\tau u_i'' + O(\tau^2), \end{aligned}$$

chunki, (4) ga asosan

$$u_i'' = \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} + f(t_i, u_i) \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u}.$$

Bulardan (10) - ning ikkinchi tartibli approksimatsiya xatoligiga ega ekanligi kelib chiqadi, $\psi_i^{(1)} = O(\tau^2)$ va (7) - dan farqli oshkor usuldir. (10) - usulni qo'llash ikki

bosqichdan iborat, shuning uchun bu usul predikator-korrektor deb aytiladi. (10) - usul boshqacha amalga oshirilishi mumkin.

Eng avval ketma-ket

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f(t_i + 0,5\tau, y_i + 0,5\tau k_1)$$

hisoblanadilar, undan keyin y_{i+1} , $(y_{i+1} - y_i) / \tau = k_2$ tenglamadan topiladi. (10)- usulning bunday qo'llanilishi Runge-Kutt usuli deb aytiladi.

Runge - Kutt usullari.

Usullarning tavsifi.

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

Koshi masalasini qaraymiz.

Runge-Kuttning m-bosqichli oshkor usuli quyidagidan iborat. $y_i = y(t_i)$ qiymat bo'lsin. a_j, b_{ij} , $i=2,3,...,m$, $j=1,2,...,m-1$, σ_i , $i=1,2,...,m$ koefitsientlar beriladi va

$$k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f(t_i + a_2\tau, y_i + b_{21}\tau \cdot k_1),$$

$$k_3 = f(t_i + a_3\tau, y_i + b_{31}\tau \cdot k_1 + b_{32}\tau \cdot k_2),$$

.....

$$k_m = f(t_i + a_m\tau, y_i + b_{m1}\tau \cdot k_1 + b_{m2}\tau \cdot k_2 + \dots + b_{m,m-1} \cdot \tau \cdot k_{m-1})$$

fugkstiylalar ketma-ket hisoblanadilar.

Undan so'ng

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \sum_{l=1}^m \sigma_l k_l \quad (2)$$

formuladan $y_{i+1} = y(t_{i+1})$ topiladi. a_j, b_{ij}, σ_i , koefitsientlar aniklik shartlaridan topiladilar. Masalan, (2) - dastlabki (1) - tenglamani approksimatsiya qilishi uchun

$\sum_{l=1}^m \sigma_l = 1$ bo'lishi zarur. Ba'zi bir usullarga alohida to'xtalamiz. $m=1$ bulsa 1 -

misolda karalgan Eyler sxemasi hosil bo'ladi. $m=2$ bo'lganda

$$k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f(t_i + a_2 \tau, y_i + b_{21} \tau \cdot k_1), y_{i+1} = y_i + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2) \quad (3)$$

usullar majmuasini hosil qilamiz. (3) - usullar approksimatsiyaning parametrlarini tadqiq etamiz.

Oxirgi tengliklardan k_1 va k_2 - larni f orqali ifodasini almashtirib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \sigma_1 f(t_i, y_i) + \sigma_2 f(t_i + a_2 \tau, y_i + b_{21} \tau \cdot f(t_i, y_i)) \quad (4)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Approksimatsiya xatoligi ta'rifiga kura (3) - usulning approksimatsiyasi (4)- dan y_i -ni u_i - anik yechimi bilan almashtirishdan xosil bo'lgan

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \sigma_1 f(t_i, u_i) + \sigma_2 f(t_i + a_2 \tau, u_i + b_{21} \tau \cdot f(t_i, u_i)) \quad (5)$$

ifodaga aytiladi.

$u(t)$ va $f(t, y)$ funksiyalarni etarlicha silliq deb qarab approksimatsiya tartibini aniqlaymiz. Buning uchun (5) - dagi barcha qiymatlarni Teylor formulasi buyicha t_i - nuqtada yoyib chiqamiz. quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = u'(t_i) + \frac{\tau}{2} u''(t_i) + O(\tau^2)$$

$$f(t_i + a_2 \tau, u_i + b_{21} \tau f(t_i, u_i)) = f(t_i, u_i) + a_2 \tau \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} + b_{21} \tau \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} + O(\tau^2),$$

(1) - ga asosan

$$u'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial u} u' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial u} f.$$

shuning uchun

$$\psi_i^1 = -u'(t_i) - \frac{\tau}{2} u''(t_i) + O(\tau^2) + \sigma_1 f(t_i, u_i) + \sigma_2 f(t_i, u_i) + \sigma_2 a_2 \tau \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} + \sigma_2 b_{21} \tau \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} + O(\tau^2)$$

$$= -f(t_i, u_i) + (\sigma_1 + \sigma_2) f(t_i, u_i) + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial f(t_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} f(t_i, u_i) \right) + O(\tau^2) + \sigma_2 a_2 \tau \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_2 b_{21} \tau \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} + O(\tau^2) = -f(t_i, u_i) + (\sigma_1 + \sigma_2) f(t_i, u_i) + \tau [(\sigma_2 a_2 - 0,5) \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} + (\sigma_2 b_{21} - 0,5) \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} +] O(\tau^2) \\
& = -f(t_i, u_i) [1 - \sigma_1 + \sigma_2] + \tau [(\sigma_2 a_2 - 0,5) \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial t} + (\sigma_2 b_{21} - 0,5) \frac{\partial f(t_i, u_i)}{\partial u} +] O(\tau^2)
\end{aligned}$$

Bundan ko'rinib turibdiki, agar $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ qilib olinsa, approksimatsiya tartibi birga teng bo'ladi. Agar bunga qo'shimcha ravishda $\sigma_2 a_2 = \sigma_2 b_{21} = 0,5$ talab qilsak, approksimatsiya tartibi ikkiga teng bo'ladi. Shunday qilib, ikki bosqichli approksimatsiya tartibi ikkiga teng bo'lgan bir parametrli Runge-Kutt usuli borligi aniqlandi.

Bu usullar oilasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = (1 - \sigma) f(t_i, u_i) + \sigma f(t_i + a\tau, y_i + a\tau \cdot f(t_i, u_i)) \quad (7)$$

Bundan $\sigma \cdot a = 0,5$

Xususiyl xolda, $\sigma = 1, a = 0,5$ bo'lganda 3-misol kelib chiqadi. $\sigma = \frac{1}{2}, a = 1$

bo'lganda ikkinchi tartibli

$$k_1 = f(t_i, u_i), k_2 = f(t_i + \tau, y_i + \tau k_1), y_{i+1} = y_i + 0,5(k_1 + k_2)$$

usul hosil bo'ladi.

Uchinchi tartibli ikki bosqichli usul mavjud emas. Bunga ishonch xosil qilish uchun $u' = u$ tenglamani qarash kifoya.

Approksimatsiya tartibi yuqori bo'lgan Runge-Kutt usullari misollari bor.

Uchinchi tartibli usul:

$$k_1 = f(t_i, u_i), k_2 = f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, y_i + \frac{\tau}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f(t_i + \tau, y_i - \tau k_1 + 2\tau k_2)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Uchinchi tartibli usul:

$$k_1 = f(t_i, u_i), k_2 = f\left(t_i + \frac{\tau}{3}, y_i + \frac{\tau}{3} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{2\tau}{3}, y_i + \frac{2\tau}{3}k_2\right),$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3).$$

To'rtinchi tartibli usul

$$k_1 = f(t_i, u_i), k_2 = f\left(t_i + \frac{\tau}{4}, y_i + \frac{\tau}{4}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, y_i + \frac{\tau}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_i + \tau, y_i + \tau k_1 - 2\tau k_2 + 2\tau k_3),$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4).$$

To'rtinchi tartibli usul

Runge - Kutt usullardan ikkinchisi:

$$k_1 = f(t_i, u_i), k_2 = f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, y_i + \frac{\tau}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = f(t_i + \tau, y_i + k_3),$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Keltirilgan usullar Runge - Kutt usullarining xususiy xollaridir.

Runge - Kutt usullarining yaqinlashishi.

Runge - Kutt usullari yaqinlashishi tartibi approksimatsiya tartibi bilan bir xilligini ko'ramiz. $z_1 = y_1 - u(t_1)$ xatolikni qanoatlantiradigan tenglamani yozamiz.

Runge - Kutt usulining tenglamasi

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \sum_{l=1}^m \sigma_l k_l(y) \quad (8)$$

bunda

$$k_l(y) = f(t_i + a_l \tau, y_i + \sum_{j=1}^{l-1} \tau b_{lj} \cdot k_j(y)), \quad i = 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$k_1(y) = f(t_i, y_i)$$

(8) - tenglamaning chap tomoniga y_i - ning $u_i + z_i$ ifodasini quyib o'ng tomonga

$$\sum_{l=1}^m \sigma_l k_l(u)$$

yiilindini qo'shib ayiramiz.

Bu yerda

$$k_l(u) = f(t_i + a_l \tau, u_i + \sum_{j=1}^{l-1} \tau b_{lj} \cdot k_j(u)), \quad l = 2, 3, \dots, m,$$

$$k_1(u) = f(t_i, u_i). \quad (10)$$

Unda (8) - tenglama

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\tau} = \psi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)}, \quad (11)$$

bunda

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \sum_{l=1}^m \sigma_l k_l(u), \quad (12)$$

ta'rifga ko'ra (8), (9) -larni (1) - yechimi u-dagi approksimatsiya xatoligi bo'lib,

$$\psi_i^{(2)} = \sum_{l=1}^m \sigma_l [k_l(y) - k_l(u)] \quad (13)$$

(11) - tenglamani usulning xatolik tenglamasi sifatida qaraymiz. U, $i=0,1,\dots$, uchun bajariladi. $z_0 = 0$, chunki $y_0 = u_0 = u(0)$ aniq beriladi. (1) - tenglama chegaralangan $0 \leq t \leq T$ vaqt oraligida yechiladi deb faraz qilamiz, shu sababli ixtiyoriy i va τ uchun $t_i = i\tau \leq T$ bajariladi.

Faraz qilamiz, $f(t,u)$ karalaetgan soiada u buyicha L konstantali Lipshist shartini qanoatlantirsin. Shu faraz bilan avval $\psi_i^{(2)}$ ni, undan so'ng z_i - ni baholaymiz. (9) va (10) - ifodalardan va farazdan

$$\begin{aligned}
& \left| k_l(y) - k_l(u) \right| = \left| f(t_l + a_l \tau, y_l + \sum_{j=1}^{l-1} \tau b_{lj} \cdot k_j(y)) - f(t_l + a_l \tau, u_l + \sum_{j=1}^{l-1} \tau b_{lj} k_j(u)) \right| \leq \\
& \leq L(|y_l - u_l| + \sum_{j=1}^{l-1} \tau b_{lj} |k_j(y) - k_j(u)|), l = 2, 3, \dots, m, \\
& |k_1(y) - k_1(u)| \leq L \cdot |y_1 - u_1| \\
& r_j = |k_j(y) - k_j(u)|, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\
& b = \max_{2 \leq l \leq m, 1 \leq j \leq l-1} |b_{lj}|, \quad q = L|y_1 - u_1|
\end{aligned} \tag{14}$$

belgilashdan so'ng oldingi tengsizlikka asosan

$$r_l \leq Lb \sum_{j=1}^{l-1} \tau r_j + q, l = 2, 3, \dots, m, r_1 \leq q,$$

yoki

$$r_{l+1} \leq Lb \sum_{j=1}^l \tau r_j + q, l = 0, 1, \dots, m-1, r_0 = 0. \tag{15}$$

1 - lemma

(15) - tengsizlikdan $L \cdot b \cdot \tau \succ 0$ bo'lganda

$$r_i \leq \rho^{i-1} q, i = 1, 2, \dots, m, \tag{16}$$

tengsizlik hosil bo'ladi, bunda $\rho = 1 + Lb\tau$

Isbot.

i = 1 dagi (16) - baxo i = 0 dagi (15) - baxo bilan bir xildir. Faraz qilamiz (16) - tengsizlik i=1,2,...,k uchun bajarilgan bo'lsin. Uning i=k+1 uchun o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

(15) dan i=k uchun

$$r_{k+1} \leq b \sum_{j=1}^k \tau r_j + q$$

tengsizlikka egamiz. Induksiyaning faraziga ko'ra

$$r_j \leq \rho^{j-1} q, j = 1, 2, \dots, k,$$

bundan

$$r_{k+1} \leq (Lb \sum_{j=1}^k \tau \rho^{j-1} + 1)q = (Lb\tau \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} + 1)q = \rho^k q.$$

Shuni isbot qilish talab qilingan edi.

Endi $\psi_i^{(2)}$ funksiyani baholaymiz. (14) va (16) dan

$$|\psi_i^{(2)}| \leq \sum_{i=1}^m |\sigma_i| |r_i| \leq \sigma q \sum_{i=1}^m \rho^{i-1} \leq \sigma \cdot q \cdot m \cdot \rho^{m-1},$$

bunda

$$\sigma = \max_{1 \leq i \leq m} |\sigma_i|, \rho = 1 + Lb\tau b\tau = L|z_i| \quad (17)$$

Shunday qilib $|z_i|$ xatolikning o'sishi bilan $|\psi_i^{(2)}|$ kattalik xatolikning birinchi darajasidan tez o'smasligi ma'lum bo'ldi. Endi $z_i = y_i - u_i$ xatolikni baholaymiz. (11) - tenglamadan

$$z_{i+1} = z_i + \tau \psi_i^{(2)} + \tau \psi_i^{(1)},$$

tenglikka egamiz. Bundan (17) - ni inobatga olib

$$|z_{i+1}| \leq (1 + \alpha\tau) |z_i| + \tau |\psi_i^{(1)}|, i = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

bunda

$$\alpha = \alpha(\tau) = \sigma L m (1 + Lb\tau b)^{m-1} \quad (19)$$

$\tau \rightarrow 0, \alpha(\tau) \rightarrow \sigma L m$ ekanligi ko'rinib turibdi. Agar $\tau \leq \tau_0$ bo'lsa, unda

$\alpha(\tau) \leq \sigma L m e^{Lb(m-1)\tau_0}$, ya'ni $\alpha(\tau)$ ning τ buyicha tekis chegaralanganligi ko'rinib turibdi. τ_0 sifatida qo'pol ravishda T ni olish mumkin.

(18) - tengsizlikdan

$$|z_{i+1}| \leq (1 + \alpha\tau)^{i+1} |z_0| + \sum_{j=0}^i \tau (1 + \alpha\tau)^{i-j} |\psi_j^{(1)}| \quad (20)$$

kelib chiqadi. Buni Induksiya usuli bilan ko'rsatish mumkin. (20) – bahoni qo'polroq baholab $z_0 = 0$ ekanligini hisobga olib

$$|z_{i+1}| \leq (i+1)\tau(1 + \alpha\tau)^i \max_{0 \leq j \leq i} |\psi_j^{(1)}| \leq t_{i+1} e^{\alpha t_i} \max_{0 \leq j \leq i} |\psi_j^{(1)}|,$$

bunda $t_i = i\tau \leq T$ bahoni hosil qilamiz.

Shunday qilib quyidagi teoremani isbot qildik.

Teorema. Faraz qilamiz (1) - tenglamaning o'ng tomonini $f(t, u)$ u buyicha Lipschist shartini qanoatlantirsin. $\psi_j^{(1)}$ (12)-ga muvofiq aniqlangan (2) - Runge-

Kutt usulining approksiastiya xatoligi bo'lsin. Unda Runge-Kutt usulining $i \cdot \tau \leq T$ bo'lgandagi xatoligi uchun

$$|y_i - u(t_i)| \leq T e^{\alpha T} \max_{0 \leq j \leq i-1} |\psi_j^{(1)}|, \quad (21)$$

bunda

$$\alpha = \sigma L m (1 + L b \tau b^{m-1}), \sigma = \max_{1 \leq k \leq m} |\sigma_k|,$$

$$b = \max_{2 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq k-1} |b_{kj}|$$

baho o'rinlidir.

Natija. Agar Runge-Kutt usuli (1)- tenglamani approksimatsiya qilsa unda u , $\tau \rightarrow 0$ da yaqinlashadi, undan tashkari usul xatoligi tartibi approksimatsiya tartibi bilan bir xil bo'ladi.

Isboti. (21) - dan va $\alpha(\tau)$ - ning tekis chegaralanganligidan kelib chiqadi.

MA'RUZA 12. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALARNI YECHISHNING SONLI USULLARI. REDUKSTIYA USULI. DIFFERENSIAL HAYDASH USULI. TO'R USULI

Reja:

5. Ko'p qadamli ayirmali usullar .

6. Ko'p qadamli ayirmali usullarning aproksimatsiya xatoligi .

Usullar tavsifi

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), t > 0, u(0) = u^0 \quad (1)$$

Koshi masalasini yechish uchun doimiy $\tau > 0$, τ qadamli

$$\varpi_\tau = \{t_i = i \cdot \tau, i = 0, 1, \dots\}$$

to'rti aniqlaymiz.

$$y_i = y(t_i), f_i = f(t_i, y_i)$$

orqali ϖ_τ to'rti aniqlangan funksiyalarni belgilaymiz.

Chiziqli m- qadamli ayirmali usul deb,

$$\frac{a_0 \cdot y_i + \dots + a_m \cdot y_{i-m}}{\tau} = b_0 \cdot f_i + b_1 \cdot f_{i-1} + \dots + b_m \cdot f_{i-m}, i = m, m+1, \dots \quad (2)$$

ayirmali tenglamalar sistemasiga aytiladi.

(2) - tenglamani $y_i = y(t_i)$ yangi qiymatni oldin aniqlangan $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots$

qiymatlar orqali ifodalangan rekkurent munosabat sifatida qarash kerak.

Hisoblash $i=m$, ya'ni

$$\frac{a_0 \cdot y_m + a_1 y_{m-1} + \dots + a_m y_0}{\tau} = b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + \dots + b_m f_0,$$

tenglamadan boshlanadi.

Bundan ko'rinadiki, hisoblashni boshlash uchun m -ta $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$

boshlang'ich qiymatlarni berish lozim. $y_0 = u_0$ ya'ni Koshi masalasidan aniqlanadi.

$y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ qiymatlar berilgan deb faraz qilamiz. (2) - tenglamadan ko'rinib

turibdiki, ko'p qadamli ayirmali usullarda Runge-Kutt usullaridan o'ng tomoni

faqat ω_τ to'ring nuqtalarida hisoblanishi bilan farq qiladi.

(2) - usul $b_0 = 0$ bo'lganda oshkor deb aytiladi. Bunda y_i dastlabki

$y_0, y_1, \dots, y_{i-1}$ qiymatlar orqali oshkor ifodalanadi. $b_0 \neq 0$ bo'lgan usul oshkormas deb

aytiladi. Bunday xolda y_i - topish uchun

$$\frac{a_0}{\tau} y_i - b_0 f(t_i, y_i) = F[y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}],$$

bunda

$$F[y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}] = \sum_{k=0}^m (b_k y_{i-k} - \frac{a_k}{\tau} y_{i-k}),$$

chiziqsiz tenglamani yechish kerak.

Odatda bu tenglamani Nyuton usuli yordamida yechadilar. Bunda

boshlang'ich yaqinlashish y_i^0 sifatida y_{i-1} qiymat olinadi. (2) - tenglamaning

koeffisientlari umumiy ko'paytuvchi bilan farq qiladi. Bu erkinlikdan qutilish

uchun

$$\sum_{k=0}^m b_k = 1, \quad (3)$$

deb talab qilamiz. Bu (2) - ayirmali sxemaning o'ng tomoni (1) - differensial tenglamaning o'ng tomonini appoksimatsiyalaydi demakdir.

Hisoblash amalyotida (2) - usulning xususiy holi bo'lgan Adams usuli ko'p tarqalgan. Bunda $u'(t)$ hosila ikkita t_i va t_{i-1} nuqtalar orqali approksimatsiya qilinadi, ya'ni

$$a_0 = -a_1 = 1, a_k = 0, k = 2, 3, \dots, m,$$

shunday qilib Adams usuli

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^m b_k f_{i-k} \quad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi. $b_0 = 0$ bo'lganda Adams usuli oshkor, aks holda oshkormas deb aytiladi. (2) - ayirmali sxemalarni o'rganishda eng avval a_k, b_k koefhistientlarning approksimatsiya xatoligiga ta'sirini tekshiramiz, undan so'ng bir biriga bog'liq bo'lgan to'rg'unlik va yaqinlashishi masalalarini tadqiq etamiz.

Ko'p qadamli ayirmali usullarning approksimatsiya xatoligi.

(2) - ayirmali sxemaning approksimatsiya xatoligi yoki bo'llanishsizligi deb,

$$\psi_i = -\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} u_{i-k} + \sum_{k=0}^m b_k f(t_{i-k}, u_{i-k}) \quad (5)$$

funksiyaga aytiladi. Bu (2) - tenglamaga (1) - tenglamaning aniq yechimi $u(t)$ ni quyganda hosil bo'ladi. Approksimatsiya xatoligi tartibining $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots, m$ koefhistientlarni tanlashga bog'liqligi masasasini o'rganamiz.

Bunda barcha funksiyalar kerakli tartibli hosilaga ega deb hisoblaymiz $u_{i-k} = u(t_i - k\tau)$ funksiyalarni $t = t_i$ nuqtalar atrofida Teylor qatoriga yoyib

$$u_{i-k} = \sum_{l=0}^p \frac{(-k)^l \tau^l u^{(l)}(t_i)}{l!} + O(\tau^{p+1})$$

$$f(t_{i-k}, u_{i-k}) = u'(t_i - k\tau) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-k\tau)^l u^{(l+1)}(t_i)}{l!} + O(\tau^p), k = 1, 2, \dots, m$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

Bu yoyilmalarni (5) - ga quyib,

$$\begin{aligned} \psi_i = & -\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} \left(\sum_{l=0}^p \frac{(-k\tau)^l u^{(l)}(t_i)}{l!} \right) + \sum_{k=0}^m b_k \left(\sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-k\tau)^l u^{(l+1)}(t_i)}{l!} \right) + O(\tau^p) = -\sum_{l=0}^m \left(\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} \frac{(-k\tau)^l}{l!} \right) u^{(l)}(t_i) \\ & + \sum_{l=0}^p \left(\sum_{k=0}^m b_k \frac{(-k\tau)^{l-1}}{(l-1)!} \right) u^{(l)}(t_i) + O(\tau^p) \end{aligned}$$

Oddiy shakl o'zgartirilganidan so'ng

$$\Psi_i = - \left(\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} \right) \cdot u(t_i) + \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^m \left[(-k\tau)^{l-1} \cdot \left(a_k \cdot \frac{k}{l} + b_k \right) \cdot \frac{u^{(l)}(t_i)}{(l-1)!} + O(\tau^p) \right] \quad (6)$$

yoyilmaga kelamiz. Bundan ko'rinadiki , agar

$$\sum_{k=0}^m a_k = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{k=0}^m k^{l-1} (ka_k + lb_k) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

shartlar bajarilsa, approksimatsiya tartibi p-ga teng bo'ladi.

(7) va (8) - shartlar (3) - bilan birgalikda $2(m+1)$ ta $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$

noma'lumlarga nisbatan $p+2$ ta tenglamadan iborat. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tashqil etadi. Agar (3) - shartni inobatga olsak

$$\sum_{k=1}^m ka_k = -1$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\sum_{k=1}^m k^{l-1} (ka_k + lb_k) = 0, \quad l = 2, 3, \dots, p \quad (9)$$

sistemani hosil qilamiz.

Bu sistema $2m$ noma'lumli p -ta tenglamadan ibrat, a_0, b_0 koeffisientlar

$$a_0 = -\sum_{k=1}^m a_k, b_0 = 1 - \sum_{k=1}^m b_k \quad (10)$$

formulalar orqali hisoblanadi. (9) sistema yechimga ega bo'lishi uchun $p \leq 2m$ bo'lishi kerak. Bu approksimatsiya tartibi $p \leq 2m$ olib keladi. Shunday qilib ko'p qadamli ayirmali usulning xatolik tartibi p -ning eng yuqori si $2m$ ga teng. (4) - Adams usullari uchun p -tartibli (9)- approksimatsiya shartlari

$$l \sum_{k=1}^m k^{l-1} b_k = 1, l = 2, 3, \dots, p, b_0 = 1 - \sum_{k=1}^m b_k \quad (11)$$

Bundan ko'rinib to'ribdiki Adamsning oshkor usullarining eng yuqori approksimatsiya tartibi m -ga teng. Oshkormas usullarning eng yuqori approksimatsiya tartibi $m+1$ ga teng.

Ayirmali usullar to'rg'unligi va yaqinlashishi.

2-Teorema

Faraz qilamiz

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + \dots + a_{m-1} q^{m-1} = 0$$

xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari birlik doiraning ichida yoki chegarasida joylashgan bo'lib, chegarada karrali ildizlari bo'lmasin. Faraz qilamiz

$$|f_u(t, u)| \leq L, t \in [0, T]$$

bo'lsin. Unda

$$\tau \leq \tau_0 \frac{a_0}{2|b_0|L}$$

bo'lganda

$$\frac{a_0 z_i + a_1 z_{i-1} + \dots + a_m z_{i-m}}{\tau} = \psi_{i-m} + \varphi_{i-m}, i = m, m+1, \dots,$$

bu erda

$$\psi_{i-m} = \frac{a_0 u_i + \dots + a_m u_{i-m}}{\tau} + b_0 f(t_i, u_i) + \dots + b_m f(t_{i-m}, u_{i-m})$$

va

$$\varphi_{i-m} = b_0(t_i, y_i) - f(t_i, u_i) + b_1(f(t_{i-1}, y_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_{i-1})) + \dots + b_m(f(t_{i-m}, y_{i-m}) - f(t_{i-m}, u_{i-m}))$$

tenglama yechimlari uchun

$$|z_i| \leq M_1 e^{c_1 T} \max_{0 \leq j \leq m-1} |z_j| + M_2 \sum_{k=0}^{i-m} \tau |\psi_k|, i = m, m+1, \dots,$$

bunda

$$M_1 = \|Q\|_C \|Q^{-1}\|_C, M_2 = \frac{2M_1}{|a_0|}, c_1 = M_1 gL,$$

$$\mathcal{G} = \frac{2}{a_0^2} \sum_{k=1}^m (|a_0| |b_k| + |a_k| |b_0|)$$

baho o'rinli.

Adamas usuli misollari.

$F(x)=f(x,u(x))$ qilib belgilaymiz. Faraz qilamiz $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$ qiymatlar allaqachon ma'lum bo'lsinlar. Unda $F(x_k) = f(x_k, y_k)$ funksiya qiymatlari ham ma'lum bo'ladilar. Bu nuqtalar oralig'ida $F(x)$ funksiyani Nyuton interpolatsion ko'piadi bilan almashtirib tenglamani (x_n, x_{n+1}) oralig'ida bo'yicha integrallaymiz. Natijada Adams usuli hosil bo'ladi.

MA'RUZA 13. XUSUSIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALANI YECHISHNING SONLI USULLARI. ELLIPTIK TURDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI AYIRMALI TENGLAMALAR BILAN APROKSIMASTIYA QILISH. APPROKSIMASTIYA VA YAQINLASHISH MASALASI VA ULARNING BOG'LIQLIGI. CHEGARAVIY SHARTLARNI APPROKSIMASTIYA ETISH

Reja

1. Chegaraviy masalalarni yechish usullari .
2. Otishma usul .
3. Ayirmali usullar .

Chegaraviy masalalar

Masalaning qo'yilishi.

Chegaraviy masala - bu

$$\frac{d}{dx}u_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), 1 \leq k \leq p, \quad (1)$$

sistemaning $[a, b]$ kesmada birtadan ko'p nuqtasida qo'shimcha shartlar qo'yilgan xususiy yechimini topishdan iborat. . Chegaraviy masalalarning turli bo'lishlariga qaramasdan ular asosan birta sonli usul yordamida echiladilar.

Chegaraviy masalalarni sonli yechish ga otishma va ayirmali usullarni qullaydilar. Otishma usuli, bu chegaraviy masalani shu sistema uchun Koshi masalasiga olib kelishdan iborat.

Ayirmali usulda esa chegaraviy masala, tartibi juda katta bo'lgan algebraik tenglamalar sistemasiga olib kelinadi (noma'lumlar to'r nuqtalaridagi yechimning qiymatlaridan iborat).

Masala chiziqlimas bo'lgan holda har ikkala usul ham iteratsion usuldan iborat.

2. Otishma usuli. Bu chegaraviy masalani xuddi o'sha sistema uchun Koshi masalasiga keltirishdan iborat.

Bu usulni chegaraviy shartlari yetarlicha umumiy bo'lgan ikkita

$$u'(x) = f(x, u, \vartheta), \vartheta'(x) = q(x, u, \vartheta), a \leq x \leq b$$
$$\varphi(u(a), \vartheta(a)) = 0, \psi(u(b), \vartheta(b)) = 0$$

differentensial tenglamalar sistemasi misolida qaraymiz. $u(a) = \eta$ ixtiyoriy qiymatni tanlab olib $\varphi(\eta, \vartheta(a)) = 0$ chap shartni algebravik tenglama sifatida qarab uni qanoatlantiradigan $\vartheta(a) = \xi(\eta)$ qiymatni topamiz.

$u(a) = \eta, \vartheta(a) = \xi$ qiymatlarni (2) sistemaga Koshi masalasining boshlang'ich shartlari sifatida qarab, Koshi masalasini istalgan sonli usul yordamida yechamiz. ξ qiymat shunday tanlanganki topilgan yechim chap chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Ammo bu yechim o'ng chegaraviy shartni

qanoatlantirmaydi, uni o'ng chegaraviy shartning chap tomonini η -ning funksiyasi sifatida qarasak:

$$\overline{\psi(\eta)} = \psi(u(b; \eta), g(b; \eta))$$

umuman aytganda nolga aylanmaydi. Lekin , agar $\overline{\psi(\eta)} = 0$ tenglamani yechsak, unda η qiymat aniqlanadi. Bu algebraik tenglamani istalgan sonli usul yordamida yechish mumkin. Lekin $\overline{\psi(\eta)}$ funksiyaning har bir yangi qiymatini topish (2)-sistemani sonli yechishni talab qiladi. Shu sababli, $\overline{\psi(\eta)} = 0$ tenglama ildizini tez topadigan usulni qo'llash maqsadga muvofiq.

Ayirmali usul; chiziqli masala

Ayirmali usulni, eng sodda ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masala misolida qaraymiz:

$$u''(x) - p(x) \cdot u(x) = f(x), a \leq x \leq b \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta. \quad (2)$$

$[a, b]$ kesamada $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ to'rni qaraymiz. Soddalik uchun bu to'rni tekis deb hisoblaymiz. Ikkinchi tartibli hosilani yechimning to'r nuqtalaridagi $u_n = u(x_n)$ qiymatlari orqali ifodalaymiz; eng sodda

$$u''(x_n) \cong \frac{1}{h^2} \cdot (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

approksimatsiyadan foydalanamiz:

Bunday approksimatsiyani har bir x_n ; $n=1, 2, \dots, N-1$, ichki nuqta uchun yozish mumkin. Agar buni (1)-tenglamadagi ikkinchi tartibli hosila o'rniga quysak unda tenglama taqribiy bo'lib, uni qidirilayotgan $u(x)$ yechim emas, balki taqribiy $y_n \approx u(x_n)$ yechim qanoatlantiradi. Bu almashtirishni bajarib , $p_n = p(x_n)$, $f_n = f(x_n)$ belgilashlarni qabul qilsak

$$y_{n-1} - (2 + h^2 \cdot p_n) \cdot y_n + y_{n+1} = h^2 \cdot f_n, 1 \leq n \leq N-1 \quad (3)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu $N-1$ ta algebraik tenglamadan iborat bo'lgan sistemadir. Noma'lumlar soni $N+1$ ta, ya'ni noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'pdir. Ikkita yetmaydigan tenglamani (2) chegaraviy shartlardan hosil qilamiz.

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta \quad (4)$$

(3) - algebraik sistemani yechib, taqribiy yechimni topamiz.

Bunda uchta savol tug'iladi:

- 1) (3) – ko'rinishli sistemaning yechimi mavjudmi?
- 2) agar yechim mavjud bo'lsa, uni qanday topish kerak?
- 3) $u(x)$ yechimga istalgancha yaqin bo'lgan $y(x)$ taqribiy yechimni topish iloji bormi?

Eng avval ayirmali yechimning mavjudligini tekshiramiz.

$p(x) > 0$ deb talab qilamiz. (1)-masala chiziqli bo'lganligi uchun, ayirmali approksimatsiya ham chiziqli bo'ldi. Shuning uchun (3)- sistema chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat bo'ldi. $p_N > 0$ bo'lganligi uchun, bu sistemaning matrisasi diagonal elementlari absolyut qiymati shu element turgan satrdagi boshqa elementlar absolyut qiymatlari yig'indisidan katta bo'ladi. Bunday sistemaning yechimi mavjud va yagona bo'lishi ma'lum.

Sistemaning matrisasi uch diagonalli bo'lganligi uchun uni progonka usuli bilan yechish samarali.

quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Agar $p(x)$ va $f(x)$ ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsalar unda ayirmali yechim, aniq yechimga intiladi va xatolik $O(h^2)$ kabi bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartlaridan $u(x)$ to'rtinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi.

Unda

$$\frac{1}{h^2} \cdot (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - u''(x_n) = \frac{1}{12} \cdot h^2 \cdot u^{(4)}(\xi_n), x_{n-1} < \xi_n < x_{n+1}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bundan, aniq yechim

$$u_{n-1} - (2 + h^2 \cdot p_n) \cdot u_n + u_{n+1} = h^2 \cdot f_n + \frac{h^4}{12} \cdot u^{(4)}(\xi_n), 1 \leq n \leq N-1$$

ayirmali tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi..

Bu tenglamadan (3) -tenglamani ayirib, $z_n = u_n - y_n$ xatolikni qanoatlantiradigan

$$(2 + h^2 \cdot p_n) \cdot z_n = z_{n-1} + z_{n+1} + \frac{h^4}{12} \cdot u^{(4)}(\xi_n) \quad , \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (5)$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0, \quad (6)$$

tenglamalarni hosil qilamiz.

$|z_n|$ maksimumga erishadigan x_{n_0} nuqtani tanlab olamiz; buning chegaraviy nuqta emasligi ma'lum. $p_n > 0$ shartni inobatga olib bu nuqtada (5) - tenglikning chap va o'ng tomonlarining absolyut qiymatlarini taqqoslab,

$$(2 + h^2 \cdot p_{n_0}) |z_{(n_0)}| \leq |z_{n_0-1}| + |z_{n_0+1}| + \frac{h^4}{12} \cdot |u^{(4)}(\xi_{n_0})|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Buning o'ng tomonidagi $|z_{n_0-1}|$ va $|z_{n_0+1}|$ larni $|z_{n_0}|$ ga almashtirsak

$$\max \cdot |z_n| \leq \frac{h^2}{12} \cdot \frac{|u^{(4)} \xi_{n_0}|}{|p_{n_0}|} \leq \frac{h^2}{12} \cdot \max \cdot \left| \frac{u^{(4)} \cdot (x)}{p(x)} \right|$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlik teorema tasdig'ini isbot qiladi.

Ayirmali usul; chiziqlimas masala

Endi umumiyroq xolni qaraymiz. Chiziqlimas masalalar anchagina qiyinchiliklarni tug'diradi.

$$u''(x) = f(x, u) \quad , \quad u(a) = \alpha \quad , \quad u(b) = \beta \quad (1)$$

birinchi jins chegaraviy shartlar bilan berilgan chiziqlimas, ikkinchi tartibli differensial tenglamani qaraymiz. $f(x, u)$ ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega

$$u''(x_n) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\xi_n)$$

bo'lsin degan talabni qo'yamiz. Unda $u(x)$ funksiyaning to'rtinchi tartibli hosilasi uzluksiz bo'ladi.

$$M_1 = \max |f_u|, \quad M_2 = \max |u^{(4)}(x)|$$

qilib belgilaymiz.

Yuqoridagidek $[a, b]$ kesmada tekis to'rni aniqlab ikkinchi tartibli hosilani chekli ayirma bilan almashtiramiz.

Unda

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = h^2 \cdot f(x_n, y_n), 1 \leq n \leq N-1 \quad (2)$$

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta$$

chiziqlimas algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ayirmali yechimning aniq yechimga yaqinlashishini isbot qilamiz, buning uchun $f_u > m_1 > 0$ deb faraz qilamiz. Ikkinchi hosilaning approksimatsiyasi uchun

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = h^2 \cdot u''(x_n) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\xi_n) \quad \xi_n \in (x_{n-1}, x_{n+1})$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun, aniq yechim

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = h^2 f(x_n, y_n) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\xi_n), \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$$u_0 = \alpha, u_N = \beta$$

ayirmali tenglamalarni qanoatlantiradi.

Bu tenglamalarni (2) - teglamalardan mos ravishda ayirib $z_n = y_n - u_n$ xatolik uchun

$$z_{n-1} - (2 + h^2 \cdot f_n) \cdot z_n + z_{n+1} = \frac{h^4}{12} \cdot u^{(4)}(\xi_n), \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (3)$$

$$z_0 = 0, z_N = 0$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu erda $(f_u)_n = \frac{f(x_n, y_n) - f(x_n, u_n)}{z_n} \cdot x_{n_0}, |z_n|$ maksimumga erishadigan

nuqta bo'lsin. Bu nuqtada (3) munosabatni

$$(2 + h^2 \cdot f_u)_{n_0} |z_{n_0}| \leq |z_{n_0-1}| + |z_{n_0+1}| + \frac{h^4}{12} \cdot |u^{(4)}(\xi_n)|$$

tengsizlik shaklida yozamiz. ring tomondagi $|z_{n_0-1}|$ va $|z_{n_0+1}|$ ni $|z_{n_0}|$ ga almashtirib

bu tengsizlikni yana ham kuchaytirib

$$|z_{n_0}| = \|z_n\|_C \leq \frac{h^2 \cdot |u^{(4)}(\xi_{n_0})|}{12(f_u)_{n_0}} \leq \frac{h^2 \cdot M_2}{12m_1} \quad (4)$$

bahoni hosil qilamiz.

Bu baho, $h \rightarrow 0$ ayirmali yechimning aniq yechimga ikkinchi tartib bilan tekis yaqinlashishini bildiradi.

Ayirmali yechimni topish bilan shug'ullanamiz.

(2) - sistemani iteratsiya usuli yordamida yechish mumkin. Masalan

$$y_{n-1}^{(s)} - 2y_n^{(s)} + y_{n+1}^{(s)} = h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}) \quad , \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (5)$$

$$y_0^{(s)} = \alpha, y_N^{(s)} = \beta$$

bu erda s - iteratsiya nomerini belgilaydi. Iteratsion usulni qo'llasak iteratsiyaning har bir qadamida uch diagonalli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemani progonka usuli yordamida yechish mumkin. (5) - iteratsiya usulining yaqinlashishini tekshiramiz.

$\eta_n^{(s)} = y_n^{(s)} - y_n$ - iteratsiya xatoligi, (2) -ni (5)-dan ayirishdan hosil bo'ladigan

$$\eta_{n-1}^{(s)} - 2\eta_n^{(s)} + \eta_{n+1}^{(s)} = d_n^{(s)}, 1 \leq n \leq N-1 \quad (6)$$

$$\eta_0^{(s)} = 0, \eta_N^{(s)} = 0$$

$$d_n^{(s)} = h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}) - h^2 f(x_n, y_n) \approx h^2 f_u(x_n, y_n) \eta_n^{(s-1)}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Bu sistemani progonka usuli yordamida yechamiz. Bu sistema uchun progonka koeffitsientlarini topish rekkurent formulalarini

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2 - \alpha_n} = \frac{n}{n+1}, 0 \leq n \leq N-2, \alpha_N = 0$$

$$\beta_{n+1} = \alpha_{n+1}(\beta_n - (d_n)^{(s)}) = -\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot (d_k)^{(s)}, 1 \leq n \leq N-1$$

shaklda yozish mumkin.

Progonkaning teskari harakat formulalari

$$(\eta_n)^{(s)} = \alpha_{n+1} \eta_{n+1}^{(s)} + \beta_{n+1} = -n \cdot \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k \cdot (k-1)} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p \cdot (d_p)^{(s)} \quad (7)$$

shaklda yoziladi.

Bular izlanayotgan yechim bo'ladilar. (6)-sistemaning tenglamalarini o'ng tomonlari uchun

$$|(d_n)^{(s)}| \leq q^{(s)}, q^{(s)} = h^2 \cdot M_1 \cdot \|(\eta_n)^{(s-1)}\|_C$$

tengsizliklar bajariladi.

Bularni (7)-ga quyib

$$|\eta_n^{(s)}| \leq q^{(s)} \cdot n \cdot \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k \cdot (k-1)} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p = \frac{1}{2} \cdot q^{(s)} \cdot (N-n) \cdot n \leq \frac{1}{8} \cdot q^{(s)} \cdot N^2$$

bahoga ega bo'lamiz.

Bundan

$$\|\eta_n^{(s)}\|_C \leq \bar{q} \cdot \|\eta_n^{(s-1)}\|_C, \quad (8)$$

bunda

$$\bar{q} = \frac{1}{8} N^2 \cdot h^2 \cdot M_1 = \frac{1}{8} (b-a)^2 \cdot M_1$$

hosil bo'ladi.

Bu baho iteratsiya usulining

$$\frac{1}{8}(b-a)^2 \cdot M_1 \prec 1, M_1 = \max \left| \frac{dt}{du} \right| \quad (9)$$

shart bajarilganda yaqinlashishini ko'rsatadi. Yaqinlashish chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi ($\bar{q}$ ning birinchi darajasi kabi).

(2) sistemani Nyuton usuli yordamida yechish maqsadga muvofiqdir. Tenglamalarning o'ng tomonlarini chiziqli funktsiyaga almashtirib quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$\begin{aligned} y_n^{(s+1)} &= y_n^{(s)} + \Delta_n^{(s)}, 0 \leq n \leq N, \\ \Delta_{n-1}^{(s)} - (2 + h^2 f_u)_n \cdot \Delta_n^{(s)} + \Delta_{n+1}^{(s)} &= h^2 f_n^{(s)} - y_{n-1}^{(s)} + 2 \cdot y_n^{(s)} - y_{n+1}^{(s)}, \\ 1 \leq n \leq N-1, \Delta_0^{(s)} &= \Delta_N^{(s)} = 0. \end{aligned}$$

Bu sistemani ham progonka usuli yordamida yechish mumkin.

MA'RUZA 14. TO'R TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH. MAKSIMUM PRINSTIPI. TO'R TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHDA ITERASTION USULLAR. GIPERBOLIK VA PARABOLIK TURDAGI TENGLAMALARNI TO'R USULI BILAN YECHISH

Reja

- 4. Chegaraviy masalalarni yechish usullari .**
- 5. Otishma usul .**
- 6. Ayirmali usullar .**

Chegaraviy masalalar

Masalaning qo'yilishi.

Chegaraviy masala - bu

$$\frac{d}{dx} u_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), 1 \leq k \leq p, \quad (1)$$

sistemaning $[a,b]$ kesmada birtadan ko'p nuqtasida qo'shimcha shartlar qo'yilgan xususiy yechimini topishdan iborat. . Chegaraviy masalalarning turli bo'lishlariga qaramasdan ular asosan birta sonli usul yordamida echiladilar.

Chegaraviy masalalarni sonli yechish ga otishma va ayirmali usullarni qullaydilar. Otishma usuli, bu chegaraviy masalani shu sistema uchun Koshi masalasiga olib kelishdan iborat.

Ayirmali usulda esa chegaraviy masala, tartibi juda katta bo'lgan algebraik tenglamalar sistemasiga olib kelinadi (noma'lumlar to'r nuqtalaridagi yechimning qiymatlaridan iborat).

Masala chiziqlimas bo'lgan holda har ikkala usul ham iteratsion usuldan iborat.

2. Otishma usuli. Bu chegaraviy masalani xuddi o'sha sistema uchun Koshi masalasiga keltirishdan iborat.

Bu usulni chegaraviy shartlari yetarlicha umumiy bo'lgan ikkita

$$u'(x) = f(x, u, \vartheta), \vartheta'(x) = q(x, u, \vartheta), a \leq x \leq b$$

$$\varphi(u(a), \vartheta(a)) = 0, \psi(u(b), \vartheta(b)) = 0$$

differensial tenglamalar sistemasi misolida qaraymiz. $u(a) = \eta$ ixtiyoriy qiymatni tanlab olib $\varphi(\eta, \vartheta(a)) = 0$ chap shartni algebravik tenglama sifatida qarab uni qanoatlantiradigan $\vartheta(a) = \xi(\eta)$ qiymatni topamiz.

$u(a) = \eta, \vartheta(a) = \xi$ qiymatlarni (2) sistemaga Koshi masalasining boshlang'ich shartlari sifatida qarab, Koshi masalasini istalgan sonli usul yordamida yechamiz. ξ qiymat shunday tanlanganki topilgan yechim chap chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Ammo bu yechim o'ng chegaraviy shartni qanoatlantirmaydi, uni o'ng chegaraviy shartning chap tomonini η -ning funksiyasi sifatida qarasak:

$$\overline{\psi(\eta)} = \psi(u(b; \eta), \vartheta(b; \eta))$$

umuman aytganda nolga aylanmaydi. Lekin , agar $\overline{\psi(\eta)} = 0$ tenglamani yechsak, unda η qiymat aniqlanadi. Bu algebraik tenglamani istalgan sonli usul yordamida yechish mumkin. Lekin $\overline{\psi(\eta)}$ funksiyaning har bir yangi qiymatini topish (2)-

sistemani sonli yechishni talab qiladi. Shu sababli, $\bar{\psi}(\eta) = 0$ tenglama ildizini tez topadigan usulni qo'llash maqsadga muvofiq.

Ayirmali usul; chiziqli masala

Ayirmali usulni, eng sodda ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masala misolida qaraymiz:

$$u''(x) - p(x) \cdot u(x) = f(x), a \leq x \leq b \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta. \quad (2)$$

$[a, b]$ kesamada $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ to'ri qaraymiz. Soddalik uchun bu to'ri tekis deb hisoblaymiz. Ikkinchi tartibli hosilani yechimning to'ri nuqtalaridagi $u_N = u(x_N)$ qiymatlari orqali ifodalaymiz; eng sodda

$$u''(x_n) \cong \frac{1}{h^2} \cdot (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

aproksimatsiyadan foydalanamiz:

Bunday aproksimatsiyani har bir x_n ; $n=1, 2, \dots, N-1$, ichki nuqta uchun yozish mumkin. Agar buni (1)-tenglamadagi ikkinchi tartibli hosila o'rniga quysak unda tenglama taqribiy bo'lib, uni qidirilayotgan $u(x)$ yechim emas, balki taqribiy $y_n \approx u(x_n)$ yechim qanoatlantiradi. Bu almashtirishni bajarib, $p_n = p(x_n)$, $f_n = f(x_n)$ belgilashlarni qabul qilsak

$$y_{n-1} - (2 + h^2 \cdot p_n) \cdot y_n + y_{n+1} = h^2 \cdot f_n, 1 \leq n \leq N-1 \quad (3)$$

tenglilarga ega bo'lamiz. Bu $N-1$ ta algebraik tenglamadan iborat bo'lgan sistemadir. Noma'lumlar soni $N+1$ ta, ya'ni noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'pdir. Ikkita yetmaydigan tenglamani (2) chegaraviy shartlardan hosil qilamiz.

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta \quad (4)$$

(3) - algebraik sistemani yechib, taqribiy yechimni topamiz.

Bunda uchta savol tug'iladi:

1) (3) – ko'rinishli sistemaning yechimi mavjudmi?

2) agar yechim mavjud bo'lsa, uni qanday topish kerak?

3) $u(x)$ yechimga istalgancha yaqin bo'lgan $y(x)$ taqribiy yechimni topish iloji bormi?

Eng avval ayirmali yechimning mavjudligini tekshiramiz.

$p(x) > 0$ deb talab qilamiz. (1)-masala chiziqli bo'lganligi uchun, ayirmali approksimatsiya ham chiziqli bo'ldi. Shuning uchun (3)- sistema chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat bo'ldi. $p_n > 0$ bo'lganligi uchun, bu sistemaning matrisasi diagonal elementlari absolyut qiymati shu element turgan satrdagi boshqa elementlar absolyut qiymatlari yig'indisidan katta bo'ladi. Bunday sistemaning yechimi mavjud va yagona bo'lishi ma'lum.

Sistemaning matrisasi uch diagonalli bo'lganligi uchun uni progonka usuli bilan yechish samarali.

quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Agar $p(x)$ va $f(x)$ ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsalar unda ayirmali yechim, aniq yechimga intiladi va xatolik $O(h^2)$ kabi bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartlaridan $u(x)$ to'rtinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi.

Unda

$$\frac{1}{h^2} \cdot (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - u''(x_n) = \frac{1}{12} \cdot h^2 \cdot u^{(4)}(\xi_n), x_{n-1} < \xi_n < x_{n+1}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bundan, aniq yechim

$$u_{n-1} - (2 + h^2 \cdot p_n) \cdot u_n + u_{n+1} = h^2 \cdot f_n + \frac{h^4}{12} \cdot u^{(4)}(\xi_n), 1 \leq n \leq N-1$$

ayirmali tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi..

Bu tenglamadan (3) -tenglamani ayirib, $z_n = u_n - y_n$ xatolikni qanoatlantiradigan

$$(2 + h^2 \cdot p_n) \cdot z_n = z_{n-1} + z_{n+1} = + \frac{h^4}{12} \cdot u^{(4)}(\xi_n) \quad , \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (5)$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0, \quad (6)$$

tenglamalarni hosil qilamiz.

$|z_n|$ maksimumga erishadigan x_{n_0} nuqtani tanlab olamiz; buning chegaraviy nuqta emasligi ma'lum. $p_n > 0$ shartni inobatga olib bu nuqtada (5) - tenglikning chap va o'ng tomonlarining absolyut qiymatlarini taqqoslab,

$$(2 + h^2 \cdot p_{n_0}) |z_{(n_0)}| \leq |z_{n_0-1}| + |z_{n_0+1}| + \frac{h^4}{12} \cdot |u^{(4)}(\xi_{n_0})|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Buning o'ng tomonidagi $|z_{n_0-1}|$ va $|z_{n_0+1}|$ larni $|z_{n_0}|$ ga almashtirsak

$$\max \cdot |z_n| \leq \frac{h^2}{12} \cdot \frac{|u^{(4)} \xi_{n_0}|}{|p_{n_0}|} \leq \frac{h^2}{12} \cdot \max \cdot \left| \frac{u^{(4)} \cdot (x)}{p(x)} \right|$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlik teorema tasdig'ini isbot qiladi.

Ayirmali usul; chiziqlimas masala

Endi umumiyroq xolni qaraymiz. Chiziqlimas masalalar anchagina qiyinchiliklarni tug'diradi.

$$u''(x) = f(x, u) \quad , \quad u(a) = \alpha \quad , \quad u(b) = \beta \quad (1)$$

birinchi jins chegaraviy shartlar bilan berilgan chiziqlimas, ikkinchi tartibli differensial tenglamani qaraymiz. $f(x, u)$ ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin degan talabni qo'yamiz. Unda $u(x)$ funksiyaning to'rtinchi tartibli hosilasi uzluksiz bo'ladi.

$$M_1 = \max \cdot |f_u| \quad , \quad M_2 = \max |u^{(4)}(x)|$$

qilib belgilaymiz.

Yuqoridagidek $[a, b]$ kesmada tekis to'rni aniqlab ikkinchi tartibli hosilani chekli ayirma bilan almashtiramiz.

Unda

$$u''(x_n) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\xi_n)$$

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = h^2 \cdot f(x_n, y_n), 1 \leq n \leq N-1 \quad (2)$$

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta$$

chiziqlimas algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ayirmali yechimning aniq yechimga yaqinlashishini isbot qilamiz, buning uchun $f_u > m_1 > 0$ deb faraz qilamiz. Ikkinchi hosilaning approksimatsiyasi uchun

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = h^2 \cdot u''(x_n) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\xi_n) \quad \xi_n \in (x_{n-1}, x_{n+1})$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun, aniq yechim

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = h^2 f(x_n, y_n) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\xi_n), \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$$u_0 = \alpha, u_N = \beta$$

ayirmali tenglamalarni qanoatlantiradi.

Bu tenglamalarni (2) - teglamalardan mos ravishda ayirib $z_n = y_n - u_n$ xatolik uchun

$$z_{n-1} - (2 + h^2 \cdot f_n) \cdot z_n + z_{n+1} = \frac{h^4}{12} \cdot u^{(4)}(\xi_n), \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (3)$$

$$z_0 = 0, z_N = 0$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu erda $(f_u)_n = \frac{f(x_n, y_n) - f(x_n, u_n)}{z_n} \cdot x_{n_0}, |z_n|$ maksimumga erishadigan

nuqta bo'lsin. Bu nuqtada (3) munosabatni

$$(2 + h^2 \cdot f_u)_{n_0} |z_{n_0}| \leq |z_{n_0-1}| + |z_{n_0+1}| + \frac{h^4}{12} \cdot |u^{(4)}(\xi_n)|$$

tengsizlik shaklida yozamiz. rng tomondagi $|z_{n_0-1}|$ va $|z_{n_0+1}|$ ni $|z_{n_0}|$ ga almashtirib bu tengsizlikni yana ham kuchaytirib

$$|z_{n0}| = \|z_n\|_C \leq \frac{h^2 \cdot |u^{(4)}(\xi_{n0})|}{12(f_u)_{n_0}} \leq \frac{h^2 \cdot M_2}{12m_1} \quad (4)$$

bahoni hosil qilamiz.

Bu baho, $h \rightarrow 0$ ayirmali yechimning aniq yechimga ikkinchi tartib bilan tekis yaqinlashishini bildiradi.

Ayirmali yechimni topish bilan shug'ullanamiz.

(2) - sistemani iteratsiya usuli yordamida yechish mumkin. Masalan

$$y_{n-1}^{(s)} - 2y_n^{(s)} + y_{n+1}^{(s)} = h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}) \quad , \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (5)$$

$$y_0^{(s)} = \alpha, y_N^{(s)} = \beta$$

bu erda s - iteratsiya nomerini belgilaydi. Iteratsion usulni qo'llasak iteratsiyaning har bir qadamida uch diagonalli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemani progonka usuli yordamida yechish mumkin. (5) - iteratsiya usulining yaqinlashishini tekshiramiz.

$\eta_n^{(s)} = y_n^{(s)} - y_n$ - iteratsiya xatoligi, (2) -ni (5)-dan ayirishdan hosil bo'ladigan

$$\eta_{n-1}^{(s)} - 2\eta_n^{(s)} + \eta_{n+1}^{(s)} = d_n^{(s)}, 1 \leq n \leq N-1 \quad (6)$$

$$\eta_0^{(s)} = 0, \eta_N^{(s)} = 0$$

$$d_n^{(s)} = h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}) - h^2 f(x_n, y_n) \approx h^2 f_u(x_n, y_n) \eta_n^{(s-1)}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Bu sistemani progonka usuli yordamida yechamiz. Bu sistema uchun progonka koeffitsientlarini topish rekkurent formulalarini

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2 - \alpha_n} = \frac{n}{n+1}, 0 \leq n \leq N-2, \alpha_N = 0$$

$$\beta_{n+1} = \alpha_{n+1}(\beta_n - (d_n)^{(s)}) = -\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot (d_k)^{(s)}, 1 \leq n \leq N-1$$

shaklda yozish mumkin.

Progonkaning teskari harakat formulalari

$$(\eta_n)^{(s)} = \alpha_{n+1} \eta_{n+1}^{(s)} + \beta_{n+1} = -n \cdot \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k \cdot (k-1)} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p \cdot (d_p)^{(s)} \quad (7)$$

shaklda yoziladi.

Bular izlanayotgan yechim bo'ladilar. (6)-sistemaning tenglamalarini o'ng tomonlari uchun

$$|(d_n)^{(s)}| \leq q^{(s)}, q^{(s)} = h^2 \cdot M_1 \cdot \|(\eta_n)^{(s-1)}\|_C$$

tengsizliklar bajariladi.

Bularni (7)-ga quyib

$$|\eta_n^{(s)}| \leq q^{(s)} \cdot n \cdot \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k \cdot (k-1)} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p = \frac{1}{2} \cdot q^{(s)} \cdot (N-n) \cdot n \leq \frac{1}{8} \cdot q^{(s)} \cdot N^2$$

bahoga ega bo'lamiz.

Bundan

$$\|\eta_n^{(s)}\|_C \leq \bar{q} \cdot \|\eta_n^{(s-1)}\|_C, \quad (8)$$

bunda

$$\bar{q} = \frac{1}{8} N^2 \cdot h^2 \cdot M_1 = \frac{1}{8} (b-a)^2 \cdot M_1$$

hosil bo'ladi.

Bu baho iteratsiya usulining

$$\frac{1}{8} (b-a)^2 \cdot M_1 < 1, M_1 = \max \left| \frac{dt}{du} \right| \quad (9)$$

shart bajarilganda yaqinlashishini ko'rsatadi. Yaqinlashish chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi ($\bar{q}$ ning birinchi darajasi kabi).

(2) sistemani Nyuton usuli yordamida yechish maqsadga muvofiqdir. Tenglamalarning o'ng tomonlarini chiziqli funksiyaga almashtirib quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$y_n^{(s+1)} = y_n^{(s)} + \Delta_n^{(s)}, 0 \leq n \leq N,$$

$$\Delta_{n-1}^{(s)} - (2 + h^2 f_u)_n \cdot \Delta_n^{(s)} + \Delta_{n+1}^{(s)} = h^2 f_n^{(s)} - y_{n-1}^{(s)} + 2 \cdot y_n^{(s)} - y_{n+1}^{(s)},$$

$$1 \leq n \leq N-1, \Delta_0^{(s)} = \Delta_N^{(s)} = 0.$$

Bu sistemani ham progonka usuli yordamida yechish mumkin.

MA'RUZA 15. OSHKOR VA OSHKOR EMAS AYIRMALI SXEMALAR. OSHKORMAS SXEMALARNING TURG'UNLIGI. ABSOLYUT VA SHARTLI TURG'UN AYIRMALI SXEMALAR. VARIATION VA PROEKSTION USULLAR.

Kollokatsiya usuli

Faraz qilaylik, bizga $a \leq x \leq b$ da

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

differensial tenglama uchun

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \quad (2)$$

chegaraviy shartlar berilgan bo'lsin, bu yerda $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$.

(1), (2) chegaraviy masala yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (3)$$

bu yerda $\varphi_0(x)$

$$\begin{aligned} l_a(\varphi_0) &\equiv \alpha_1 \varphi_0'(a) + \alpha_0 \varphi_0(a) = A, \\ l_b(\varphi_0) &\equiv \beta_1 \varphi_0'(b) + \beta_0 \varphi_0(b) = B \end{aligned}$$

shartni, $\varphi_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) esa

$$l_a(\varphi_k) = l_b(\varphi_k) = 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalardir. Bundan tashqari $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ funksiyalar sistemasi quyidagi shartlarni bajarishini ta'minlash kerak:

1. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ - chiziqli bog'liqsiz;

2. $\varphi_k(x) \in C_2[a, b]$, $k = \overline{0, n}$;

3. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ funksiyalar sistemasi ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfida to'liq bo'lishi kerak, ya'ni

$$|y^{(s)}(x) - y_n^{(s)}(x)| < \varepsilon, \quad s = 0, 1, 2; \quad x \in [a, b], \quad \forall y(x) \in C_2[a, b], \quad \varepsilon > 0.$$

$\varphi_k(x)$ larni tanlanishiga ko'ra ixtiyoriy c_k ($k = \overline{1, n}$) lar uchun (3) (2) shartlarni qanoatlantiradi. (3) ni (1) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L(y_n) - f(x) = L(\varphi_0) - f(x) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k). \quad (4)$$

Endi $[a, b]$ ga tegishli kollokatsiya nuqtalari deb ataluvchi turli $x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalarni olib, $c_1, c_2, \dots, c_n$ koefitsientlarni topish uchun

$$\begin{aligned} R(x_1, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ R(x_2, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \\ R(x_n, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (5) dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ larni topib, yechimning taqribiy analitik ko'rinishi (3) ni hosil qilamiz.

Misol.

$$\begin{aligned} y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) &= 2, \\ y'(0) &= -2, \\ y(1) + y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

chegaraviy masalani yechish talab etilsin.

Yechish . $\varphi_0(x)$ ni $\varphi_0(x) = b + cx$ ko'rinishida izlaymiz.

$$\varphi'_0(x) = c \text{ va } \varphi'_0(0) = -2 \Rightarrow c = -2.$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow b - 2 - 2 = 0 \Rightarrow b = 4. \text{ Demak, } \varphi_0(x) = 4 - 2x.$$

$\varphi_k(x)$ ($k=1,2,\dots$) funksiyalar

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'_k(0) = 0, \\ \varphi_k(1) + \varphi'_k(1) = 0 \end{array} \right\}$$

shartlarni qanoatlantirishi kerak.

$\varphi_k(x) = b_k + x^{k+1}$ desak, b_k koefitsientlarni ikkinchi tenglamadan topamiz.

Demak,

$$b_k = -(k+2) \Rightarrow \varphi_k(x) = x^{k+1} - (k+2).$$

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x) = x^2 - 3, \\ \varphi_2(x) = x^3 - 4, \\ \dots \\ \varphi_n(x) = x^{n+1} - (n+2). \end{array}$$

(3) da $n=2$ deb olaylik, unda

$$y_2(x) = 4 - 2x + c_1(x^2 - 3) + c_2(x^3 - 4).$$

$L(\varphi_0)$, $L(\varphi_1)$, $L(\varphi_2)$ larni topib, $R(x, c_1, c_2)$ ni hosil qilamiz

$$\varphi_0(x) = 4 - 2x, \quad \varphi'_0(x) = -2, \quad \varphi''_0(x) = 0,$$

$$L(\varphi_0) = \varphi''_0(x) + 2x\varphi'_0(x) - 2\varphi_0(x) = 2x \cdot (-2) - 2(4 - 2x) = -4x - 8 + 4x = -8,$$

$$\varphi_1(x) = x^2 - 3, \quad \varphi'_1(x) = 2x, \quad \varphi''_1(x) = 2,$$

$$L(\varphi_1) = \varphi''_1(x) + 2x\varphi'_1(x) - 2\varphi_1(x) = 2 + 2x \cdot 2x - 2(x^2 - 3) = 2x^2 + 8,$$

$$\varphi_2(x) = x^3 - 4, \quad \varphi'_2(x) = 3x^2, \quad \varphi''_2(x) = 6x,$$

$$L(\varphi_2) = \varphi_2''(x) + 2x\varphi_2'(x) - 2\varphi_2(x) = 6x + 2x \cdot 3x^2 - 2(x^3 - 4) =$$

$$= 6x + 6x^3 - 2x^3 + 8 = 4x^3 + 6x + 8.$$

$$R(x, c_1, c_2) = L(\varphi_0(x)) - f(x) + c_1 L(\varphi_1(x)) + c_2 L(\varphi_2(x)).$$

Kollokatsiya nuqtalarini $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$ deb olaylik, u holda quyidagilar hosil bo'ladi:

$$L(\varphi_0(x_1)) = -8, \quad L(\varphi_0(x_2)) = -8,$$

$$L(\varphi_1(x_1)) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 8 = \frac{1}{8} + 8 = 8\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_1(x_2)) = 2 \cdot \frac{9}{16} + 8 = \frac{9}{8} + 8 = 9\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_2(x_1)) = 4 \cdot \frac{1}{64} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} + 8 = 9\frac{9}{16},$$

$$L(\varphi_2(x_2)) = 4 \cdot \frac{27}{64} + 6 \cdot \frac{3}{4} + 8 = \frac{27}{16} + \frac{9}{2} + 8 = 14\frac{3}{16}.$$

Natijada quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{65}{8}c_1 + \frac{153}{16}c_2 &= 10 \\ \frac{73}{8}c_1 + \frac{227}{16}c_2 &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = 1,6510; \quad c_2 = -0,3570.$$

U holda $y_2(x) = 4 - 2x + 1,6510(x^2 - 3) - 0,3570(x^3 - 4).$

Haydash usuli

Faraz qilaylik, $a \leq x \leq b$ kesmada

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

differenceial tenglamani

$$\begin{aligned}\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B\end{aligned}\tag{2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etilsin. Bu yerda $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$. Bu chegaraviy masalani yechishning sodda usullaridan biri uni chekli ayirmali tenglamalar sistemasiga keltirishdir. Shu maqsadda $[a, b]$ kesmani h qadam bilan N ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari $(\{x_k\}$ to'ring tugun nuqtalari) ning absstissalari $x_k = a + kh$ $\left(h = \frac{b-a}{N}, k = \overline{0, N}\right)$ formula bilan ifodalanadi.

Noma'lum funksiya $y = y(x)$ va uning hosilalari $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ ni $\{x_k\}$ to'rdagi qiymatlarini mos holda

$$y_k = y(x_k), \quad y'_k = y'(x_k), \quad y''_k = y''(x_k)$$

deb belgilaymiz. Shuningdek,

$$p_k = p(x_k), \quad q_k = q(x_k), \quad f_k = f(x_k)$$

belgilashlardan ham foydalanamiz.

(1) differenceial tenglamani to'ring ichki nuqtalarida bir tomonlama o'ng ayirmali hosilalar yordamida

$$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + q_k y_k = f_k \quad (k = \overline{1, N-1})\tag{3}$$

ko'rinishdagi yoki simmetrik ayirmali hosilalar bilan

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k \quad (k = \overline{1, N-1})\tag{4}$$

ko'rinishdagi $N - 1$ ta tenglamadan iborat bo'lgan ayirmali tenglamalar sistemasi bilan approksimatsiya qilish mumkin.

Chegaraviy shartlarni esa

$$\begin{aligned}\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \beta_0 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} &= B\end{aligned}\quad (*)$$

ayirmali tengliklar bilan approksimatsiya qilish mumkin. $N + 1$ ta noma'lumni aniqlash uchun hosil bo'lgan $N + 1$ ta ayirmali tenglamalardan iborat bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini umumiy ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$A_k y_{k+1} - B_k y_k + C_k y_{k-1} = -F_k \quad (k = \overline{1, N-1}), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}y_0 &= \chi_1 y_1 + \mu_1, \\ y_N &= \chi_2 y_{N-1} + \mu_2.\end{aligned}\quad (6)$$

(5)-(6) – uch diagonalli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidir (bunda barcha $i = \overline{1, N-1}$ lar uchun $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$ deb faraz qilinadi). Shunday qilib, (1)-(2) chegaraviy masalani yechish masalasi (5)-(6) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish ga keltirildi. Bu tenglamalar sistemasini yechish usuli - **haydash usuli nomi bilan yuritiladi**. Haydash usulida yechim to'ring ichki nuqtalarida

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (i = \overline{N-1, 1}) \quad (7)$$

rekurrent formula orqali izlanadi. Bu yerdagi α_i , β_i koefhistientlar quyidagi tenglamadan aniqlanadi (bunda $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ deb faraz qilamiz):

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (8)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

α_i, β_i larni (8)-(9) bo'yicha aniqlash va hisoblashlarni boshlash uchun α_1, β_1 larni qiymatini bilish kerak bo'ladi. Bu qiymatlarni quyidagi mulohazadan aniqlaymiz. (7) da $i = 0$ deb faraz qilsak,

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$$

tenglik (chap chegaraviy shart)ga ega bo'lamiz va shu sababli bu tenglikni (6) dagi birinchi chegaraviy shart bilan qiyoslasak,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \chi_1, \\ \beta_1 &= \mu_1\end{aligned}\tag{10}$$

ekanligini topamiz.

Endi aniqlangan α_i, β_i ($i = \overline{1, N-1}$) larga ko'ra yechimni (7) rekurrent formula orqali aniqlash va hisoblashni boshlash uchun y_N ni qiymati ma'lum bo'lishi kerak. (7) da $i = N - 1$ deb hisoblasak,

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

tenglikka ega bo'lish mumkin. Bu tenglikni (6) dagi ikkinchi chegaraviy shartga qo'yib va $1 - \alpha_N \chi_2 \neq 0$ deb hisoblab,

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}\tag{11}$$

tenglikka ega bo'lish mumkin. y_N ning bu qiymatini bilgan holda qolgan $i = N - 1, N - 2, \dots, 3, 2, 1, 0$ lar uchun barcha yechimlar (7) rekurrent formula bo'yicha aniqlanadi.

Endi haydash usulining (5)-(6) masala uchun tur'unlik shartini keltiramiz:

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$|\chi_\alpha| \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\chi_1| + |\chi_2| < 2.$$

Bu shartlarning bajarilishi esa barcha $i = 1, 2, \dots, N$ lar uchun

$$|\alpha_i| \leq 1$$

shartni bajarilishi bilan ekvivalentdir.

Kichik kvadratlar usuli

Faraz qilaylik, H - haqiqiy Gilbert fazosi bo'lsin. H da zich $D(A)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari H ga tegishli chiziqli operatorni A deb belgilaylik va

$$Ay = f$$

tenglamani ko'raylik. Bu yerda $f \in H$ va yechim $y \in D(A)$. (1) tenglama yechimga ega bo'lsin deylik.

(1) tenglamaga quyidagi

$$J(y) = \|Ay - f\|^2 \quad (2)$$

funksionalni mos qo'yamiz va (1) ni yechish masalasini shu funksionalni $D(A)$ da minimumga erishtiruvchi elementni aniqlash masalasiga almashtiramiz.

$$\min_{y \in D(A)} J(y) = J(y^*) = 0$$

tenglikdan ayonki, y^* $Ay = f$ tenglamaning yechimi bo'ladi. $Ay = f$ tenglamani yechish o'rniga (2) funksionalni minimumini topishga asoslanib, $Ay = f$ tenglamani yechish usuli *kichik kvadratlar usuli deyiladi*.

$J(y)$ funksionalni quyidagicha minimumga erishtiramiz. $D(A)$ ga tegishli chiziqli erkli $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalar sistemasini tanlaymiz va (1) tenglamaning yechimiga n - chi yaqinlashishni

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \quad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda noma'lum c_k koeffitsientlar

$$J(y_n) = \|Ay_n - f\|^2$$

funksional minimumga erishsin deb topiladi.

Biz quyidagi

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \quad (5)$$

chiziqli chegaraviy masalani kichik kvadratlar usuli bilan yechish sxemasini keltiramiz.

quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) funksiyalar sistemasini tanlaymiz:

1. $\varphi_k(x) \in C_2[a, b]$;
2. $l_a(\varphi_0(x)) = A$, $l_b(\varphi_0(x)) = B$, $l_a(\varphi_k(x)) = l_b(\varphi_k(x)) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$);
3. Ixtiyoriy chekli n uchun $\varphi_k(x)$ funksiyalar chiziqli bog'liqsiz;
4. $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) $C_2[a, b]$ da to'liq sistemani tashkil etadi.

(4)-(5) chegaraviy masalani taqribiy yechimini (3) ko'rinishda olamiz.

(3) funksiya (5) chegaraviy shartlarni ixtiyoriy n va $c_1, c_2, \dots, c_n$ lar uchun qanoatlantiradi. $c_1, c_2, \dots, c_n$ larni shunday tanlaylikki,

$$J(y_n) = \|L(y_n) - f\|^2$$

minimal qiymatga ega bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\begin{aligned}\|L(y_n) - f\|^2 &= (L(y_n) - f, L(y_n) - f) = \\ &= \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k) - f \right]^2 dx = J(c_1, c_2, \dots, c_n).\end{aligned}$$

Bundan barcha $i = 1, 2, \dots, n$ lar uchun

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial c_i} = \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k) - f \right] \cdot L(\varphi_i) dx = 0.$$

Buni quyidagicha yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} c_k = -B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

bu yerda

$$A_{ik} = A_{ki} = \int_a^b L(\varphi_k) L(\varphi_i) dx, \quad B_i = \int_a^b (L(\varphi_0) - f) L(\varphi_i) dx \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

(6) tenglamalar sistemasining matristasi $\{L(\varphi_k)\}_{k=1}^n$ funksiyalar sistemasi uchun tuzilgan Gramm matristasidir.

Ma'lumki [1], agar

$$L(y) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

chegaraviy masala nol yechimga ega bo'lsa, (6) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi.

Galerkin usuli

Bu usulda ham kichik kvadratlar usulidagi (4)-(5) masalani yechish dagi shartlar o'rinli deb hisoblaymiz. (3) ko'rinishdagi taqribiy yechimning $c_1, c_2, \dots, c_n$ parametrlari bu usulda quyidagi shartlardan topiladi:

$$(L(y_n(x)) - f(x), \varphi_i(x)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Buni quyidagicha yozamiz

$$\sum_{k=1}^n c_k (L(\varphi_k(x)), \varphi_i(x)) = (f - L(\varphi_0(x)), \varphi_i(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

MA'RUZA 16. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN QO'YILGAN CHEGARAVIY MASALALARNI YECHISHDA RITST, KOLLOKASTIYA, GALERKIN, KICHIK KVADRATLAR VA CHEKLI ELEMENTLAR USULI.

Kollokatsiya usuli

Faraz qilaylik, bizga $a \leq x \leq b$ da

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

differensial tenglama uchun

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \quad (2)$$

chegaraviy shartlar berilgan bo'lsin, bu yerda $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$.

(1), (2) chegaraviy masala yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (3)$$

bu yerda $\varphi_0(x)$

$$\begin{aligned} l_a(\varphi_0) &\equiv \alpha_1 \varphi_0'(a) + \alpha_0 \varphi_0(a) = A, \\ l_b(\varphi_0) &\equiv \beta_1 \varphi_0'(b) + \beta_0 \varphi_0(b) = B \end{aligned}$$

shartni, $\varphi_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) esa

$$l_a(\varphi_k) = l_b(\varphi_k) = 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalardir. Bundan tashqari $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ funksiyalar sistemasi quyidagi shartlarni bajarishini ta'minlash kerak:

1. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ - chiziqli bog'liqsiz;

2. $\varphi_k(x) \in C_2[a, b]$, $k = \overline{0, n}$;

3. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ funksiyalar sistemasi ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfida to'liq bo'lishi kerak, ya'ni

$$|y^{(s)}(x) - y_n^{(s)}(x)| < \varepsilon, \quad s = 0, 1, 2; \quad x \in [a, b], \quad \forall y(x) \in C_2[a, b], \quad \varepsilon > 0.$$

$\varphi_k(x)$ larni tanlanishiga ko'ra ixtiyoriy c_k ($k = \overline{1, n}$) lar uchun (3) (2) shartlarni qanoatlantiradi. (3) ni (1) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L(y_n) - f(x) = L(\varphi_0) - f(x) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k). \quad (4)$$

Endi $[a, b]$ ga tegishli kollokatsiya nuqtalari deb ataluvchi turli $x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalarni olib, $c_1, c_2, \dots, c_n$ koefitsientlarni topish uchun

$$\begin{aligned} R(x_1, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ R(x_2, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \\ R(x_n, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (5) dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ larni topib, yechimning taqribiy analitik ko'rinishi (3) ni hosil qilamiz.

Misol.

$$\begin{aligned} y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) &= 2, \\ y'(0) &= -2, \\ y(1) + y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

chegaraviy masalani yechish talab etilsin.

Yechish . $\varphi_0(x)$ ni $\varphi_0(x) = b + cx$ ko'rinishida izlaymiz.

$$\varphi'_0(x) = c \text{ va } \varphi'_0(0) = -2 \Rightarrow c = -2.$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow b - 2 - 2 = 0 \Rightarrow b = 4. \text{ Demak, } \varphi_0(x) = 4 - 2x.$$

$\varphi_k(x)$ ($k=1,2,\dots$) funksiyalar

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'_k(0) = 0, \\ \varphi_k(1) + \varphi'_k(1) = 0 \end{array} \right\}$$

shartlarni qanoatlantirishi kerak.

$\varphi_k(x) = b_k + x^{k+1}$ desak, b_k koefitsientlarni ikkinchi tenglamadan topamiz.

Demak,

$$b_k = -(k+2) \Rightarrow \varphi_k(x) = x^{k+1} - (k+2).$$

$$\varphi_1(x) = x^2 - 3,$$

$$\varphi_2(x) = x^3 - 4,$$

...

$$\varphi_n(x) = x^{n+1} - (n+2).$$

(3) da $n=2$ deb olaylik, unda

$$y_2(x) = 4 - 2x + c_1(x^2 - 3) + c_2(x^3 - 4).$$

$L(\varphi_0)$, $L(\varphi_1)$, $L(\varphi_2)$ larni topib, $R(x, c_1, c_2)$ ni hosil qilamiz

$$\varphi_0(x) = 4 - 2x, \quad \varphi'_0(x) = -2, \quad \varphi''_0(x) = 0,$$

$$L(\varphi_0) = \varphi''_0(x) + 2x\varphi'_0(x) - 2\varphi_0(x) = 2x \cdot (-2) - 2(4 - 2x) = -4x - 8 + 4x = -8,$$

$$\varphi_1(x) = x^2 - 3, \quad \varphi'_1(x) = 2x, \quad \varphi''_1(x) = 2,$$

$$L(\varphi_1) = \varphi''_1(x) + 2x\varphi'_1(x) - 2\varphi_1(x) = 2 + 2x \cdot 2x - 2(x^2 - 3) = 2x^2 + 8,$$

$$\varphi_2(x) = x^3 - 4, \quad \varphi'_2(x) = 3x^2, \quad \varphi''_2(x) = 6x,$$

$$L(\varphi_2) = \varphi_2''(x) + 2x\varphi_2'(x) - 2\varphi_2(x) = 6x + 2x \cdot 3x^2 - 2(x^3 - 4) =$$

$$= 6x + 6x^3 - 2x^3 + 8 = 4x^3 + 6x + 8.$$

$$R(x, c_1, c_2) = L(\varphi_0(x)) - f(x) + c_1 L(\varphi_1(x)) + c_2 L(\varphi_2(x)).$$

Kollokatsiya nuqtalarini $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$ deb olaylik, u holda quyidagilar hosil bo'ladi:

$$L(\varphi_0(x_1)) = -8, \quad L(\varphi_0(x_2)) = -8,$$

$$L(\varphi_1(x_1)) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 8 = \frac{1}{8} + 8 = 8\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_1(x_2)) = 2 \cdot \frac{9}{16} + 8 = \frac{9}{8} + 8 = 9\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_2(x_1)) = 4 \cdot \frac{1}{64} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} + 8 = 9\frac{9}{16},$$

$$L(\varphi_2(x_2)) = 4 \cdot \frac{27}{64} + 6 \cdot \frac{3}{4} + 8 = \frac{27}{16} + \frac{9}{2} + 8 = 14\frac{3}{16}.$$

Natijada quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{65}{8}c_1 + \frac{153}{16}c_2 &= 10 \\ \frac{73}{8}c_1 + \frac{227}{16}c_2 &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = 1,6510; \quad c_2 = -0,3570.$$

U holda $y_2(x) = 4 - 2x + 1,6510(x^2 - 3) - 0,3570(x^3 - 4).$

Haydash usuli

Faraz qilaylik, $a \leq x \leq b$ kesmada

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

differenceial tenglamani

$$\begin{aligned}\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B\end{aligned}\tag{2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etilsin. Bu yerda $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$. Bu chegaraviy masalani yechishning sodda usullaridan biri uni chekli ayirmali tenglamalar sistemasiga keltirishdir. Shu maqsadda $[a, b]$ kesmani h qadam bilan N ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari $(\{x_k\}$ to'ring tugun nuqtalari) ning absstissalari $x_k = a + kh$ $\left(h = \frac{b-a}{N}, k = \overline{0, N}\right)$ formula bilan ifodalanadi.

Noma'lum funksiya $y = y(x)$ va uning hosilalari $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ ni $\{x_k\}$ to'rdagi qiymatlarini mos holda

$$y_k = y(x_k), \quad y'_k = y'(x_k), \quad y''_k = y''(x_k)$$

deb belgilaymiz. Shuningdek,

$$p_k = p(x_k), \quad q_k = q(x_k), \quad f_k = f(x_k)$$

belgilashlardan ham foydalanamiz.

(1) differenceial tenglamani to'ring ichki nuqtalarida bir tomonlama o'ng ayirmali hosilalar yordamida

$$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + q_k y_k = f_k \quad (k = \overline{1, N-1})\tag{3}$$

ko'rinishdagi yoki simmetrik ayirmali hosilalar bilan

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k \quad (k = \overline{1, N-1})\tag{4}$$

ko'rinishdagi $N - 1$ ta tenglamadan iborat bo'lgan ayirmali tenglamalar sistemasi bilan approksimatsiya qilish mumkin.

Chegaraviy shartlarni esa

$$\begin{aligned}\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \beta_0 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} &= B\end{aligned}\quad (*)$$

ayirmali tengliklar bilan approksimatsiya qilish mumkin. $N + 1$ ta noma'lumni aniqlash uchun hosil bo'lgan $N + 1$ ta ayirmali tenglamalardan iborat bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini umumiy ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$A_k y_{k+1} - B_k y_k + C_k y_{k-1} = -F_k \quad (k = \overline{1, N-1}), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}y_0 &= \chi_1 y_1 + \mu_1, \\ y_N &= \chi_2 y_{N-1} + \mu_2.\end{aligned}\quad (6)$$

(5)-(6) – uch diagonalli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidir (bunda barcha $i = \overline{1, N-1}$ lar uchun $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$ deb faraz qilinadi). Shunday qilib, (1)-(2) chegaraviy masalani yechish masalasi (5)-(6) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish ga keltirildi. Bu tenglamalar sistemasini yechish usuli - **haydash usuli nomi bilan yuritiladi**. Haydash usulida yechim to'ring ichki nuqtalarida

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (i = \overline{N-1, 1}) \quad (7)$$

rekurrent formula orqali izlanadi. Bu yerdagi α_i , β_i koefhistientlar quyidagi tenglamadan aniqlanadi (bunda $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ deb faraz qilamiz):

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (8)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

α_i, β_i larni (8)-(9) bo'yicha aniqlash va hisoblashlarni boshlash uchun α_1, β_1 larni qiymatini bilish kerak bo'ladi. Bu qiymatlarni quyidagi mulohazadan aniqlaymiz. (7) da $i = 0$ deb faraz qilsak,

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$$

tenglik (chap chegaraviy shart)ga ega bo'lamiz va shu sababli bu tenglikni (6) dagi birinchi chegaraviy shart bilan qiyoslasak,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \chi_1, \\ \beta_1 &= \mu_1\end{aligned}\tag{10}$$

ekanligini topamiz.

Endi aniqlangan α_i, β_i ($i = \overline{1, N-1}$) larga ko'ra yechimni (7) rekurrent formula orqali aniqlash va hisoblashni boshlash uchun y_N ni qiymati ma'lum bo'lishi kerak. (7) da $i = N-1$ deb hisoblasak,

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

tenglikka ega bo'lish mumkin. Bu tenglikni (6) dagi ikkinchi chegaraviy shartga qo'yib va $1 - \alpha_N \chi_2 \neq 0$ deb hisoblab,

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}\tag{11}$$

tenglikka ega bo'lish mumkin. y_N ning bu qiymatini bilgan holda qolgan $i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1, 0$ lar uchun barcha yechimlar (7) rekurrent formula bo'yicha aniqlanadi.

Endi haydash usulining (5)-(6) masala uchun tur'unlik shartini keltiramiz:

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$|\chi_\alpha| \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\chi_1| + |\chi_2| < 2.$$

Bu shartlarning bajarilishi esa barcha $i = 1, 2, \dots, N$ lar uchun

$$|\alpha_i| \leq 1$$

shartni bajarilishi bilan ekvivalentdir.

Kichik kvadratlar usuli

Faraz qilaylik, H - haqiqiy Gilbert fazosi bo'lsin. H da zich $D(A)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari H ga tegishli chiziqli operatorni A deb belgilaylik va

$$Ay = f$$

tenglamani ko'raylik. Bu yerda $f \in H$ va yechim $y \in D(A)$. (1) tenglama yechimga ega bo'lsin deylik.

(2) tenglamaga quyidagi

$$J(y) = \|Ay - f\|^2 \quad (2)$$

funksionalni mos qo'yamiz va (1) ni yechish masalasini shu funksionalni $D(A)$ da minimumga erishtiruvchi elementni aniqlash masalasiga almashtiramiz.

$$\min_{y \in D(A)} J(y) = J(y^*) = 0$$

tenglikdan ayonki, y^* $Ay = f$ tenglamaning yechimi bo'ladi. $Ay = f$ tenglamani yechish o'rniga (2) funksionalni minimumini topishga asoslanib, $Ay = f$ tenglamani yechish usuli *kichik kvadratlar usuli deyiladi*.

$J(y)$ funksionalni quyidagicha minimumga erishtiramiz. $D(A)$ ga tegishli chiziqli erkli $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalar sistemasini tanlaymiz va (1) tenglamaning yechimiga n - chi yaqinlashishni

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \quad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda noma'lum c_k koeffitsientlar

$$J(y_n) = \|Ay_n - f\|^2$$

funksional minimumga erishsin deb topiladi.

Biz quyidagi

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \quad (5)$$

chiziqli chegaraviy masalani kichik kvadratlar usuli bilan yechish sxemasini keltiramiz.

quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) funksiyalar sistemasini tanlaymiz:

1. $\varphi_k(x) \in C_2[a, b]$;
2. $l_a(\varphi_0(x)) = A$, $l_b(\varphi_0(x)) = B$, $l_a(\varphi_k(x)) = l_b(\varphi_k(x)) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$);
3. Ixtiyoriy chekli n uchun $\varphi_k(x)$ funksiyalar chiziqli bog'liqsiz;
4. $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) $C_2[a, b]$ da to'liq sistemani tashkil etadi.

(4)-(5) chegaraviy masalani taqribiy yechimini (3) ko'rinishda olamiz.

(3) funksiya (5) chegaraviy shartlarni ixtiyoriy n va $c_1, c_2, \dots, c_n$ lar uchun qanoatlantiradi. $c_1, c_2, \dots, c_n$ larni shunday tanlaylikki,

$$J(y_n) = \|L(y_n) - f\|^2$$

minimal qiymatga ega bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\begin{aligned}\|L(y_n) - f\|^2 &= (L(y_n) - f, L(y_n) - f) = \\ &= \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k) - f \right]^2 dx = J(c_1, c_2, \dots, c_n).\end{aligned}$$

Bundan barcha $i = 1, 2, \dots, n$ lar uchun

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial c_i} = \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k) - f \right] \cdot L(\varphi_i) dx = 0.$$

Buni quyidagicha yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} c_k = -B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

bu yerda

$$A_{ik} = A_{ki} = \int_a^b L(\varphi_k) L(\varphi_i) dx, \quad B_i = \int_a^b (L(\varphi_0) - f) L(\varphi_i) dx \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

(6) tenglamalar sistemasining matristasi $\{L(\varphi_k)\}_{k=1}^n$ funksiyalar sistemasi uchun tuzilgan Gramm matristasidir.

Ma'lumki [1], agar

$$L(y) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

chegaraviy masala nol yechimga ega bo'lsa, (6) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi.

Galerkin usuli

Bu usulda ham kichik kvadratlar usulidagi (4)-(5) masalani yechish dagi shartlar o'rinli deb hisoblaymiz. (3) ko'rinishdagi taqribiy yechimning $c_1, c_2, \dots, c_n$ parametrlari bu usulda quyidagi shartlardan topiladi:

$$(L(y_n(x)) - f(x), \varphi_i(x)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Buni quyidagicha yozamiz

$$\sum_{k=1}^n c_k (L(\varphi_k(x)), \varphi_i(x)) = (f - L(\varphi_0(x)), \varphi_i(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$