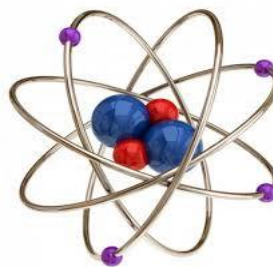


**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**



**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIKA KAFEDRASI**

“MATEMATIKA” fanidan MA‘RUZALAR MATNI

Buxoro-2018

MA'RUZA MATNINING MUALLIFLARI:

Tuzuvchi:

Rashidov Anvarjon Sharipovich

Dilmurodov Elyor Baxtiriyovich

Taqrizchilar:

N.Mamatova -

Matematika kafedrası dotsenti

A.Qalandarov -

Matematika kafedrası o'qituvchisi

SO'Z BOSHI

Mazkur ma'ruza matni “Matematika” fanidan “5112000 Jismoniy madaniyat” ta'lim yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, Fizika-matematika fakultetining “Matematika” kafedra professor-o'qituvchilari tomonidan ishlab chiqilgan. “Matematika” fani o'quv uslubiy majmuasini yaratishda etakchi xorijiy OTMlari o'quv dasturlariga asosiy adabiyotlar ro'yxatiga kiritilgan Timothy M. Hagle. *Basic Math for Social Scientists Concepts*. SAGE Publications, Inc. The University of Iowa, 2005, James Stewart Calculus. (Brooks/Cole Publishing Company, 1999), Will H. Moore, David A. Siegel. *A Mathematics Course for Political and Social Research* (Princeton university press. 2013), Stefan Waner, Steven R. Costenoble. *Finite Mathematics and Applied Calculus* (Brooks/Cole cengage learning. 2011) adabiyotlardan foydalanildi.

“Matematika” fanini o'zlashtirish jarayonida bakalavr- matematik belgilar va amallarni ajrata olish; matematika usullarini idrok eta olish; matematika tushunchalari umumiyligi hakida va matematik modellashtirish haqida tasavvurga ega bo'lishi; geometriya, algebra va boshqa matematik formulalarni bilishi; muayyan tarixiy va arxeologik jarayon uchun qurilgan model doirasida xisoblarni olib borish; ob'ektlar mikdoriy va sifat munosabatlarini ifodalash uchun matematik belgilardan foydalanish; tajriba ma'lumotlarini ishlab chiqishning asosiy statistik usullardan foydalanish; algebrik tenglamalarni analitik usulda echish; tasodifiy hodisalar ehtimolligini hisoblay olish va o'rganilgan nazariy tushunchalarni amaliyotga tadqiq etish ko'nikmalariga ega bo'ladi.

MA'RUZA MATERIALLARI

MA'RUZA 1. MATEMATIKANING DASTLABKI TUSHUNCHALARI

Reja:

1. Matematika faniga kirish. Matematika fanining rivojlanish tarixi va bosqichlari
2. Matematikaning aksiomatik qurilishi va uning usullarini jamiyat taraqqiyotidagi, hususan, tarix, arxivshunoslik va arxeologiyada tutgan o'rni
3. Matematik belgilar va amallar

Tayanch iboralar: *matematika, aksioma, sanoq sistema, Astrolyabiya traktati, Dekart qiyshiqligi, Dekart yaprog'i, Evklid postulati.*

Kirish

Qadim ota-bobolarimiz dastlab bor narsalarni taqsimlash (masalan meros bo'lish) jarayonida, har bir shaxs yoki to'daning haqini ajratib berish hisobini olib borishgan. Turmush va hayotiy sharoitlar bunday hisoblar soni, sifatini oshirib borgan.

Fan sifatida eramizdan oldingi III asrda grek olimi **Evklid** yozgan (to'plagan) 5 tomdan iborat va «Nachalo» (Boshlang'ich) deb atalgan kitoblardan boshlanadi. To eramizning XVI asrigacha bu matematika taraqqiyoti yo'lida bizning bobolarimiz ham sezilarli hissa qo'shishgan.

Al-Xorazmiy (787-850) Abdullo Muhammad ibn Muso al Majusiy

«Hind hisobi» kitobini yozib arifmetika fanining asoschisi bo'lgan. Unda hozirda sizubiz ya'ni butun dunyo foydalanadigan O'NLIK sanoq sistemasi taklif qilingan.

Algebra atamasi Xorazmiyning «Al-kitob al muxtasar fi hisob Al-jabr va-l-muqobala» (Al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob) nomli risolasidagi «Al-jabr» so'zining lotincha yozilishidan olingan.

Bizgacha yetib kelgan nusxasi 1342 yili ko'chirilgan arabcha nusxasidir.

1145 yili **Robert Gester** ingliz tiliga, 1160 yili italiyalik **Gerardo** lotinchaga tarjima qilgan, 1486 yilda Iogan Vidman Leypsig universitetida qilgan dokladida Xorazmiy kitobidan olinganligini keltirgan.

«Men arifmetikaning sodda va murakkab masalalarni o'z ichiga oluvchi al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob yozdim, chunki u odamlarga meros taqsimlashda, vasiyatnoma yozishda, boylik bo'lish va adliya ishlarida, savdo-sotiqda, turli xil munosabatlarda, kanal qazishda va geometrik hisoblashlarda juda ham zarur».

(deb yozadi kitob muqaddimasida Al-Xorazmiy)

«Hind hisobi» kitobi undan keyingi arifmetikadan asar yozuvchi barcha olimlarga qolip bo'lib xizmat qilgan bo'lsa, «Al-jabr va-l-muqobala kitob» asari algebraga asos soldi. Undan oldin hech kim algebra bo'yicha bunday kitob yozmagan.

Abu Rayxon (Beruniy) Muhammad Ibn Ahmad (973-1048)

Evklidning «Nachalo» sini, Ptolomeyning Al'magest asarlarini sanskritdan

zamon tiliga aylantirgan «Astrolyabiya traktati», «Hindiston» asarlari bilan dunyoga mashhur geometr, faylasuf sifatida tanilgan.

$$\begin{aligned} \text{U} \quad \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ \sin 2a, \sin a / 2, \\ \sin \alpha / 4 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos a}} \\ \sin a / 4 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos a}}} \end{aligned}$$

... formulalarning birinchi ijodkoridir.

Umar Xayyom (1048-1131) (Xayyom Abul Fatx Omar Ibn-Ibroxim) Samarqandda (Xurosondan haydalib) yashagan davrida «Algebra va-l-muqobala asarlarining davomi haqida traktat», 1077 yili «Evklid asosiy postulatlari haqida kommentariylar» traktatini yozgan. Bular da egri chiziqli trapetsiya tushunchalariga asos solingan.

Abul-Vafo Al-Buzjoniy (940-998).

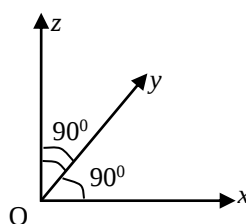
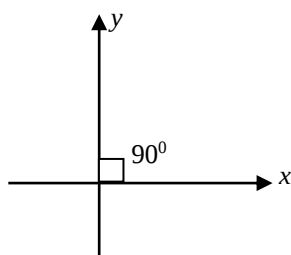
Abu-Ali Ibn Sino al- Xusayn ibn Abdullo (980-1037).

Nasritdin at Tusiy (1201-1274)-100 dan ortiq matematik asarlar avtori.

Al Koshi G'iyosiddin Jamshid ibn Masud (1394-1449) Ulug'bek observatoriyasida ishlagan, 1427 yilda «Arifmetika kaliti» asarini yozgan.

Hurmatli o'quvchilar bu sohada ko'proq ma'lumot olishni istasangiz (1), (2) adabiyotlarga murojaat qilishingiz mumkin.

XV asrlardan boshlab matematikaning yangi amallari vujudga kela boshladi va XVIII asrga kelib biz hozirgi vaqtda «Oliy matematika» deb ataydigan qismi, to'la o'z asosi va isbotiga ega bo'lib, shakllandi. Bunda «Dekart o'zgaruvchi miqdorlari matematikada burilish nuqtasi bo'ldi, keyinchalik u differensial va integral hisob taraqqiyotiga asos bo'ldi» -deb yozadi F.Engels.



Dekartning matematikada olib borgan ishlari uni analitik geometriyaning buyuk asoschilaridan deb atashga imkon beradi. Juda ko'p tadbirlarga ega bo'lgan Dekart spirali ($p=a$), Dekart qiyshiqqligi, Dekart yaprog'i kabi chiziqlar matematikada anchagina bo'lib, uning nomi bilan ataladi.

Davrimiz (XX asr) da oliy matematika shunchalik zo'r taraqqiy etib ketdiki, u kirib bormagan fan, iqtisodiy yoki texnik soha yo'q. Unda ijod qilib, yangi-yangi sohalar ochayotgan olimlar besanoq. Bizning xalqimiz farzandlari ham bu ulkan fan oqimida o'z o'rinlariga ega. Masalan, T.A.Sarimsoqov, S.H.Sirojiddinovlar dunyoga

taniqli , Toshkent ehtimollar nazariyasi maktabini vujudga keltirdilar.

Bugungi kunda biz, matematika zimmasiga tushgan barcha vazifalarga matematika tadbiq etilayotgan barcha sohalarga nazar solib, «U qanday fan ?» degan savolga yaxshigina javob olamiz. «Matematika bu borliqni shakliy ko'rinishda va miqdoriy munosabatlarda o'rganuvchi fan». Ha borliqning **mazmunini** uning **shakli va miqdori** belgilaydi. Shakl va miqdor o'zgarishi **hodisalar** deb ataladi.

Har bir hodisada bir va bir nycha faktor ishtirok etadi. Har bir faktor o'z kattaligiga ega bo'lib, hodisa jarayonida yoki aktiv ishtirok etadi yoki shu hodisada namayon bo'ladi. Aynan bir hodisada ishtirok etayotgan barcha faktorlar o'zaro bog'liqdir. Ana shu bog'liklikni o'rganuvchi fan matematikadir.

O'rganishni osonlashtirish uchun matematika o'z simvol (belgi)lariga ega. Simvollar bu amal belgilari va faktor kattaliklari belgilaridir.

$(+, -, \times, :, \dots, d, (), ', \lim, \dots :)(x, y, z, t, v, w, f, \dots)$

Masalan. $Y=KX$ matematik ifoda bo'lib, hayotdagi ko'pgina hodisalarni ifodalay oladi.

a) X- yer maydoni (o'lchami ar, gektar, KBM,.....)

Y- yerdan olinadigan hosil miqdori, (sentner,tonna)

K- mutanosiblik koeffitsiyenti (bog'liqlik koeffitsiyenti: $\frac{\varphi}{2a}, \frac{T}{2a}, \dots$) deb

belgilaydigan bo'lsak, yerdan olinadigan hosil ekin maydoniga bog'liq ekan. Bu ikki faktor ishtirok etayotgan hodisa ekin ekib hosil olish hodisasidir.

b) Agar (a) bo'limdagi hosil olish protsessini chuqurroq tekshiradigan

bo'lsak, yig'ib (yetishtirib) olinayotgan hosil miqdoriga yer maydonidan (X) tashqari yana bir qadar boshqa faktorlar ta'sir etayotganligini ko'ramiz.

Q- Ekinning o'sish davrida ekin qabul qilayotgan issiqlik (quyosh energiyasi) miqdori;

H- sepilgan o'git miqdori

H – namlik (suv, yomg'ir, qor suvi, ...)

Unda yig'ib olinayotgan hosil miqdorining unga ta'sir ko'rsatuvchi faktorlarga bog'liqligini

$Y = K_1X + K_2Q + K_3N + K_4H + \dots$ deb ifodalash mumkin.

Matematika fani o'zining o'rganish qurollariga-apparatlariga ega. Ana shu apparatlarning xususiyatlarini, ta'sir sohalarini va tadbiq doiralarini o'rganuvchi qismlariga uning xususiy bo'limlari deymiz. Sizga taqdim etilayotgan matematika «Oliy matematika» deyiladi. U quyidagi qismlarni o'z ichiga oladi.

1. Chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari.
2. Matematik analizga kirish.
3. Bir o'zgaruvchi funktsiyaning differensial hisobi.
4. Aniqmas va aniq integral hisob.

5. Oddiy differensial tenglamalar.
6. Sonli va funksional qatorlar nazariyasi.
7. Ko'p argumentli funksialar, ularning differensial hisobi.
8. Karrali va egri chiziqli integrallar.
9. Maydon nazariyasi elementlari.
10. Operatsion hisob, uning tadbiiq elementlari.
11. Matematik fizika tenglamalari.
12. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari

1-Jadval. Matematik belgilar

Belgilar	Ma'nolari
+	Qo'shish
-	Ayirish
*yoki $\times$ yoki $\cdot$	Ko'paytirish
/ yoki $\div$	Bo'lish
$\pm$	Qo'shish yoki ayirish
x^n	n – daraja
∞	Cheksizlik
$\sqrt[n]{x}$	Ildiz yoki n – darajali ildiz
$\sum_{i=k}^l x_i$ yoki $\sum_{i=k}^l x_i$	$i = k$ dan $i = l$ gacha x_i lar yig'indisi
$\in$	Tegishlilik belgisi
$\notin$	Tegishli emaslik belgisi
$\subset$	To'plam qismi
$<$	Kichik
$\leq$	Kichik yoki teng
$>$	Katta
$\geq$	Katta yoki teng
$=$	Teng
$\neq$	Teng emas
$\forall$	Ihtiyoriy, barcha
$\exists$	Mavjudlik belgisi
$\wedge$	Va
$\vee$	Yoki
$\Rightarrow$	Kelib chiqadi
$\Leftrightarrow$	Teng kuchlilik belgisi

2-Jadval. Grek harflari

Katta harflar	Kichik harflar	Ingliz	O'qilishi
A	α	alpha	Alfa
B	β	beta	Beta
Γ	γ	gamma	gamma
Δ	δ	delta	Delta
E	ε	epsilon	epsilon
Z	ζ	zeta	Zeta
H	η	eta	Eta
Θ	θ	theta	teta
I	i	iota	iota
K	κ	kappa	kappa
Λ	λ	lambda	lambda
M	μ	mu	miu
N	ν	nu	niu
Ξ	ξ	xi	ksi
O	o	omicron	omicron
Π	π	pi	Pi
P	ρ	rho	Ro
Σ	σ	sigma	sigma
T	τ	tau	tau
Υ	υ	upsilon	upsilon
Φ	φ	phi	Fi
X	χ	chi	Xi
Ψ	ψ	psi	psi
Ω	ω	omega	omega

MA'RUZA 2. SONLI TO'PLAMLAR

Reja:

1. Sonli to'plamlar: natural, butun, ratsional, irratsional va haqiqiy sonlar.
2. Haqiqiy sonning absolyut qiymati.
3. To'plam va ular ustida amallar.

Tayanch iboralar: *natural son, qarama-qarshi sonlar, teskari son, butun son, to'plam, cheksiz to'plam, bo'sh to'plam, simmetrik ayirma.*

2.1. Sonli to'plamlar: natural, butun, ratsional, irratsional va haqiqiy sonlar.

Ma'lumki, $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ natural sonlar bo'lib, ulardan tashkil topgan to'plam

[2 : 396-bet]:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

shuningdek, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots$ butun sonlar bo'lib, ulardan tashkil topgan to'plam Z :

$$Z = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$$

bo'ladi.

Agar son ushbu

$$\frac{p}{q} \quad (p \in Z, q \in N, \quad (p, q) = 1) \quad (1)$$

kasr ko'rinishda ifodalansa (yoki son chekli o'nli kasr hamda cheksiz o'nli kasr ko'rinishida bo'lsa) u son ratsional son deyiladi. Barcha ratsional sonlardan iborat to'plam Q bilan belgilanadi:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N, (p, q) = 1 \right\}.$$

Ikki ratsional sonlarning yg'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati ya'na ratsional son bo'ladi.

Agar son (1) son ko'rinishda ifodalanmasa (yoki son cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr ko'rinishida bo'lsa) u son irratsional son deyiladi.

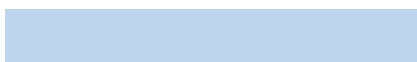
Ravshanki, ratsional son irratsional songa teng bo'lmaydi.

Ratsional hamdairratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy sonlar deyiladi. Barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plam R bilan belgilanadi.

Har birhaqiqiy songa sonlar o'qida bitta nuqta mos keladi va aksincha.

Aytaylik, a va b haqiqiy sonlar bo'lib, $a < b$ bo'lsin. Quyidagi sonlar to'plamlari matematikada juda ko'p ishlatiladi [2 : 2-3-betlar]:

-segment,



- interval,

- yarim interval,

- yarim interval

1-misol. Ushbu

soning irratsional son bo'lishi isbotlansin.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni bu ratsional son bo'lsin:

Bu tenglikni ikki tomonini kvadratga ko'tarib topamiz:

Keyingi tenglikdan

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada irratsional son (bu , qaralsin, [2, 2-bet]) ratsional

songa (bu son) teng bo'lib qoladi. Bu ziddiyat. Uning kelib chiqishiga sabab, ni ratsional son bo'lsin deyilishidir. Demak, irratsional son.

2-misol. Agar ratsional sonlar bo'lib

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$$

bo'lsa, $a = c$, $b = d$ bo'lishi ko'rsatilsin.

Berilgan tenglikni quyidagicha yozib olamiz;

$$a - c = d\sqrt{2} - b\sqrt{2} = (d - b)\sqrt{2}.$$

Ravshanki, $a - c$ ikki ratsional sonning ayirmasi bo'lgani uchun ratsional son bo'ladi. Ayni paytda $(d - b)\sqrt{2}$ esa irratsional son bo'lganligi sababli, qaralayotgan tenglik faqat

$$a - c = 0, \quad d - b = 0 \text{ yani } a = c, \quad d = b$$

bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

3-misol. Agar A to'plam 1 dan 1000 gacha bo'lgan sonlar orasida 3 ga karrali bo'lganlaridan tashkil topgan to'plam bo'lsa, bu to'plamning elementlari soni topilsin.

Ma'lumki, 1 dan 1000 gacha bo'lgan sonlar orasida 3ga karrali bo'lgan sonlar birinchi hadi , ayirmasi hamda oxirgi hadi $a_n = 999$ bo'lgan arifmetik progressiyani tashkil etadi. Unda

fo'rmulagako'ra

bo'lib , bo'lishi kelib chiqadi. Demak, to'plamning elementlari soni 333 ta

bo'ladi.

2.2. Haqiqiy sonning absolyut qiymati[2, 11-bet].

Ixtiyoriy son uchun

deb olinadigan x ga, x sonning absolyut qiymati deyiladi.

Masalan, $|7| = 7$, $|-2| = -(-2) = 2$, $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun

$$|x| \geq 0, |x| = |-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rinli,

2) Agar x haqiqiy son

$$|x| \leq a \quad (|x| < a)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u

$$-a \leq x \leq a \quad (-a < x < a)$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

3) Agar x haqiqiy son

$$|x| > a$$

tengsizlik qanoatlantirsa, u

$$x > a, \quad x < -a$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

4) Ikki x va y haqiqiy sonlar uchun

$$\text{a) } |x + y| \leq |x| + |y|, \quad \text{b) } |x - y| \geq |x| - |y|,$$

$$\text{v) } |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \text{g) } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

bo'ladi.

5) Ushbu

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

munosabato'rinli.

4-misol. Agar a, b, c haqiqiy sonlar uchun $a > b > c$ bo'lsa,

$$|a - b| + |c - a| = |b - c|$$

topilsin.

Ravshanki, $a > b$ bo'lgani uchun $a - b > 0$ bo'lib,

$$|a - b| = a - b$$

bo'ladi. $a > c$ bo'lgani uchun $c - a < 0$ bo'lib,

$$|c - a| = -(c - a) = a - c$$

bo'ladi. $b > c$ bo'lgani uchun $b - c > 0$ bo'lib,

$$|b - c| = b - c$$

bo'ladi. Demak,

$$|a - b| + |c - a| - |b - c| = a - b + a - c - (b - c) = 2(a - b).$$

2.3. To'plam va ular ustida amallar.

To'plam matematikaning boshlang'ich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Uni ixtiyoriy tabiiyatli narsalarning (predmetlarning) ma'lum belgilar bo'yicha majmuasi sifatida tushuniladi.

Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan, ularning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, A, B, C – to'plamlar, a, b, c – to'plamlarning elementlari.

Agar «biror A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va «element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Agar «shu to'plamga tegishli bo'lmasa, uni $a \notin A$ kabi yoziladi va «element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi.

Ava B to'plamlar berilgan bo'lib, A to'plamning barcha elementlari B to'plamga tegishli bo'lsa, A to'plam B ning qismi (qisman to'plam) deyiladi va

$$A \subset B \text{ (yoki } B \supset A)$$

kabi yoziladi.

Bitta ham elementga ega bolmagan to'plamga bo'sh to'plam deyiladi. Bo'sh to'plam $\emptyset$ kabi belgilanadi.

Har qanday A to'plam uchun

$$A \subset A, \emptyset \subset A$$

deb qaraladi.

Ava B to'plamlar berilgan bo'lib,

$$A \subset B, B \subset A$$

bo'lsa, A va B bir biriga teng to'plamlar deyiladi va

$$A = B$$

kabi yoziladi.

Demak, $A = B$ tenglik A va B to'plamlarning bir hil elementlardan tashkil topganligini bildiradi.

Ikki A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan C to'plam A va B to'plamlar yig'indisi (birlashmasi) deyiladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi. [2, 400-402-betlar]:

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}.$$

Demak, bu holda $a \in A \cup B$ dan $a \in A$, yoki $a \in B$, yoki bir vaqtda $a \in A, a \in B$ bo'lishi kelib chiqadi.

$A \vee B$ to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan D to'plam $A \vee B$ to'plamlar ko'paytmasi (kesishmasi) deyiladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi:

$$D = A \cap B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Demak, bu holda $a \in A \cap B$ dan bir vaqtda $a \in A, a \in B$ bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, Sva A to'plamlar berilgan bo'lib, $A \subset S$ bo'lsin. Ushbu

$$S \setminus A$$

to'plam A to'plamni S ga to'ldiruvchi to'plam deyiladi va C_A yoki A' kabi belgilanadi:

$$A' = \{x \in S \mid x \in A\}.$$

Misol[2, 400-bet]. Agar $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ va $A = \{a, b, c, d\}$ bo'lsa, u holda $A' = \{e, f, g\}$.

1-Jadval. Asosiy sonli to'plamlar [1, 5-bet]

Belgilanishi	Ma'nolari
N	Natural sonlar to'plami
Z	Butun sonlar to'plami
Q	Ratsional sonlar to'plami
I	Irratsiyonal sonlar to'plami
R	Haqiqiy sonlar to'plami
C	Kompleks sonlar to'plami

MA'RUZA 3. TEKISLIKDA ANALATIK GEOMETRIYA VA UNING SODA MASALALARI

REJA:

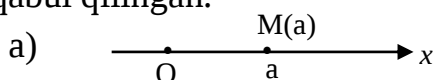
1. Kirish
2. Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa
3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish
4. Tekislik va fazoda to'g'ri chiziq
5. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi masofa
6. Tekislikdagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tayanch iboralar: sonlar o'qi, absissa, ordinata, kesma, tekislik, nuqtaning koordinatalari.

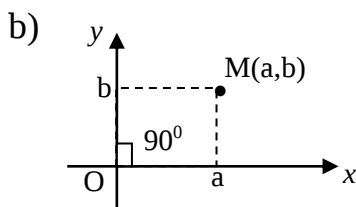
3.1. Kirish

Dekart fransus olimi (1596-1650) bo'lib, birinchi marta o'zaro to'g'ri burchak ostida kesishgan yo'nalishlar va ularning kesishish nuqtasini «orientasiya» sistemasi (koordinatalar sistemasi) sifatida tavsiya etgan.

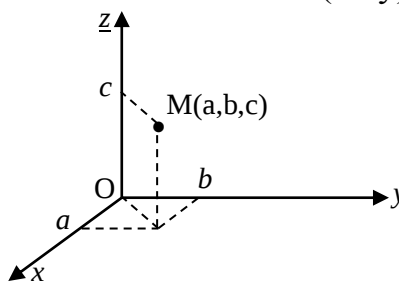
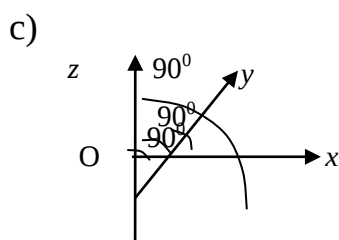
Kesishuv nuqtasi xisobning boshi, yo'nalishi esa koordinat o'qlari sifatida qabul qilingan.



Faqat tug'ri chiziqda bajariladigan ishda bir o'lchovli koordinata o'qi ishlatiladi (Ox).



Tekislikda bajariladigan ishlar uchun ikki o'lchovli (Oxy) - koordinatalar sistemasi ishlatiladi.



Fazoda (bu fazo evklid fazosi ham deyiladi) Oxyz – uch o'lchovli koordinatalar ishlatiladi.

Nuqta koordinatalar sistemasida qo'yidagicha beriladi.

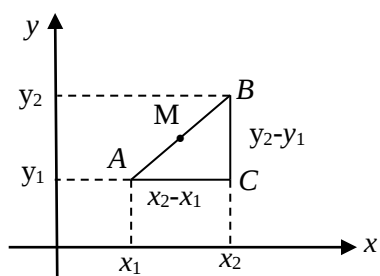
M(a)

b) M(a, b)

s) M(a, b, c)

3.2. Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa

Kesma uchlari koordinatalari bilan beriladi. Masalan, A (a_1, a_2), B (b_1, b_2)



AB- kesma.

Pifagor teoremasiga ko'ra $\triangle ABC$ dan

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad \text{bundan, } AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$$

Shakldan ko'rinib turibdiki $BC = b_1 - a_1$, $AC = a_2 - b_2$.

Demak, $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ Koordinatalar

nomlariga mos belgilashlarni kiritsak, ya'ni $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ desak,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

berilgan ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek uch-o'lchovli fazoda $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish formulasi qo'yidagicha bo'ladi.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2)$$

3.3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Aytaylik, $C(x_3, y_3, z_3)$ nuqta berilgan AB kesmani $\lambda = \frac{AC}{CB}$ nisbatan bo'luvchi

nuqta bo'lsin. AC va CB bir kesmaning ikki qismi bo'lgani uchun

$$\overline{AC} \parallel \overline{CB} \Rightarrow$$

$$\overline{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1), \overline{CB}(x_2 - x_3, y_2 - y_3) \Rightarrow \lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Bu berilgan kesmani $\lambda = \frac{AC}{CB}$ nisbatda bo'luvchi uchinchi C nuqtaning

koordinatalarini topish formulasi bo'ladi. Xususiyl xolda $\lambda = 1$ bolsa, keyingi formula kesmani teng ikkita bo'luvchi nuqta koordinatalarini topish formulasiga aylanadi:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (4)$$

3.4. Tekislik va fazoda to'g'ri chiziq

Ma'lumki, tekislikdagi har qanday nuqtadan bitta va faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi. Nuqtalar $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ bo'lsin. Shu chiziqdagi (ixtiyoriy) uchinchi $M(x, y)$ nuqtani olsak, vektorlarning parallelizm alomatiga ko'ra, quyidagini yoza olamiz:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$M(x, y)$ nuqta ixtiyoriy bo'lganligi uchun u chiziqning xoxlagan bo'lishi mumkin.

$$\text{Shu sababli, } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (5)$$

tenglik berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi. Chunki, undagi $M(x, y)$ nuqta uning xohlagan nuqtasini ko'rsata oladi.

Uch o'ldovli fazo uchun bu formula quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (6)$$

Aytaylik, $\vec{P}(m, n, p)$ –vektor AB –vektorga parallel bo'lsin. Unda (6) formulani quyidagicha yoza olamiz va $\vec{P}(m, n, p)$ ni yo'naltiruvchi vektor deb ataymiz:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \quad (7)$$

Bu berilgan $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tib, $\vec{P}(m, n, p)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli tenglamasi deyiladi.

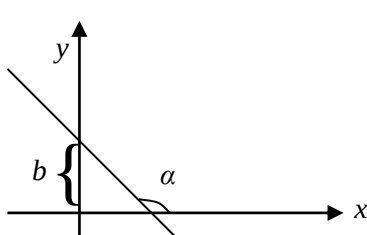
Endi (5) tenglamaning boshqa xususiy ko'rinishlarini o'rganamiz.

a) (5) ni y -ga nisbatan yyechsak, $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ kelib chiqadi.

Agar tenglamani chizma bilan taqqoslasak, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tan \alpha, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = b$

ekanligini ko'ramiz.

Demak, chiziqli tenglamasi quyidagicha bo'lar ekan:



$$y = kx + b \quad (8)$$

Bunda α -to'g'ri chiziqli tenglama bilan Ox o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchak, b esa chiziqli tenglamaning Oy o'qidan kesgan kesmasi bo'lganligi uchun, chiziqli tenglamasini (8) to'g'ri chiziqli tenglamaning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi.

Shuningdek:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

to'g'ri chiziqli tenglamaning kesmalar bilan ifodalangan tenglamasi deyiladi.

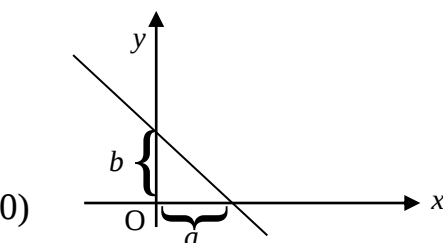
$$Ax + By + C = 0$$

to'g'ri chiziqli tenglamaning umumiy tenglamasi deyiladi.

Shakldan va barcha tenglama ko'rinishlaridan kelib chiqadiki, har qanday ikki noma'lumli birinchi darajali bitta tenglama tekislikdagi to'g'ri chiziqli tenglamani berar ekan va uning grafigi to'g'ri chiziqli tenglamani berar ekan.

To'g'ri chiziqli tenglamaning normal tenglamasi.

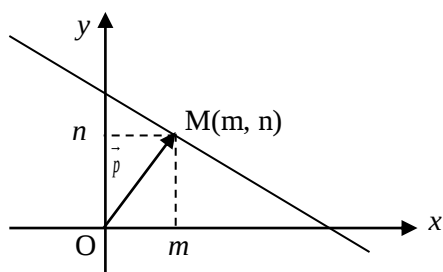
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (11)$$



tekislikda berilgan $\vec{P}(m, n)$ vektorning uchidan unga perpendikulyar bo'lgan bitta va faqat bitta chiziqli

(1) o'tkazish mumkin. Vektorni yasaymiz va uning uchinchisi $M(m, n)$

nuqta bilan belgilaymiz. $N(x, y)$ esa o'sha o'tuvchi chiziqli tenglamaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin deyimiz. Shartga ko'ra $\vec{P} \perp \vec{I} \cdot \vec{I} \Rightarrow M\vec{N} \Rightarrow m(x - m) + n(y - n) = 0$



$\Rightarrow mx + ny - (m^2 + n^2) = 0$. Agar $p = |\vec{P}| = \sqrt{m^2 + n^2}$ ekanligin hisobga olsak va tenglamani p ga bo'lsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}x + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}y - \sqrt{m^2 + n^2} = 0$$

Ko'rinib turibdiki: bunda

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \sin \alpha$$

Demak, chiziq tenglamasi qo'yidagi ko'rinishga ega bo'lar ekan:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

Bunda α berilgan vektorning yo'naltiruvchi burchagi, p esa koordinata boshidan chiziqqa tushirilgan perpendikulyar (normal)ning uzunligi bo'lganligi uchun tenglamaning nomi to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb atalgan.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasini normal shaklga keltirish.

$$Ax + By + C = 0$$

berilgan chiziq tenglamasi bo'lsin. Normal ko'paytuvchi $\mu = \sqrt{A^2 + B^2}$ ni topib, tenglamani unga bo'lamiz:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (12)$$

Agar x va y larning koeffitsientlarini kvadrlarga ko'tarib qo'shsak, birga tengligi chiqadi. VI banddagi koeffitsiyentlar bilan solishtirsak,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \alpha, \quad p = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ekanligiga iqror bo'lamiz.

3.5. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi masofa

Aytaylik, ikki parallel to'g'ri chiziq normal tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_2 = 0$$

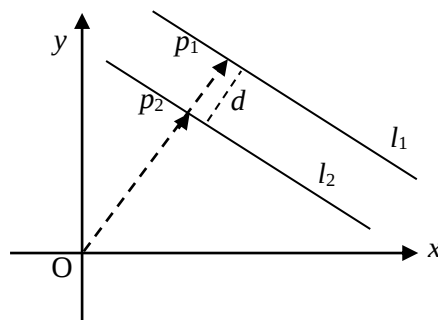
Demak, ular orasidagi masofa

$$H = |p_1 - p_2| \quad (13)$$

bo'ladi. $M(x_0, y_0)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ chiziqqacha masofa quyidagicha topiladi:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (14)$$

Haqiqatdan ham, shunday ekanligini isbotlash uchun M nuqtadan $Ax + By + C = 0$ chiziqqa parallel chiziq o'tkazamiz. Uning tenglamasi:

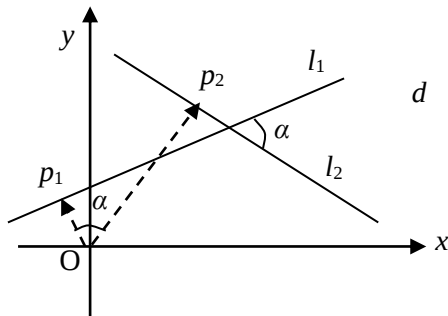


$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + by - (Ax_0 - By_0) = 0$$

$$d = |p_1 - p_2| = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{-Ax_0 - By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{C + Ax_0 + By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

3.6. Tekislikdagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikdagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak quyidagicha topiladi:



$$\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (15)$$

Haqiqatdan ham, agar $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ (l_1) va $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ (l_2) berilgan ikki chiziq tenglamalari bo'lsa, $\vec{P}_1(A_1, B_1)$ va $\vec{P}_2(A_2, B_2)$ vektorlar shu ikki to'g'ri chiziq normallariga parallel vektorlardir.

Bundan $\angle(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \angle(l_1, l_2)$ kelib chiqadi. Bu burchakni α deb belgilasak, ikki vektor orasidagi burchak formulasiga ko'ra yo'qoridagi formulaga ega bo'lamiz.

$$\text{Xususiyl holda } l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (16)$$

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (17)$$

O'z navbatida (16) va (17) formulalar berilgan ikki to'g'ri chiziqning mos ravishda parallel va perpendikulyarlik shartlari deb aytiladi.

MA'RUZA 4. R^3 -FAZODA TO'G'RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

Reja:

1. Fazoda tekislik va uning umumiy tenglamasi
2. Fazoda to'g'ri chiziq va uning umumiy tenglamasi

Tayanch iboralar: *Tekislik, fazo, tenglama, chiziq, to'g'ri chiziq tenglamasi, tekislik tenglamasi.*

4.1. Fazoda tekislik va uning umumiy tenglamasi

Fazodagi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tuvchi, $\vec{n}(A, B, C)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini topaylik. Buning uchun shu tekislikda yotuvchi istalgan $B(x, y, z)$ nuqtani olsak, $\overrightarrow{MB}$ va $\vec{n}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar, ya'ni ularning skalyar ko'paytmasi $\overrightarrow{MB} \cdot \vec{n} = 0$ bo'lishi kerak. Demak, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lar ekan [1, 849-bet] :

$$\overrightarrow{MB} \cdot \vec{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Agar qavslarni ochib ifodani ixchamlasak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

(1) tenglama tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. Endi (1) tenglamaning ayrim maxsus ko'rinishlarini keltiramiz.

Agar $D = 0$ bo'lsa, u holda

$$Ax + By + Cz = 0$$

tekislik koordinata boshidan o'tadi.

Agar $A = 0$ bo'lsa, u holda

$$By + Cz + D = 0$$

tekislik OX o'qiga parallel bo'ladi.

Agar $A = 0, D = 0$ bo'lsa, u holda

$$By + Cz = 0$$

tekislik OX o'qidan o'tadi.

Agar $A = 0, B = 0$ bo'lsa, u holda

$$Cx + D = 0$$

tekislik OXY tekisligiga parallel bo'ladi.

Agar $A = 0, B = 0, D = 0$ bo'lsa, u holda

$$Cz = 0 \quad (\text{yoki } z = 0)$$

tekislik OXY tekislik bilan ustma-ust tushadi.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

(2)

tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari ularni aniqlaydigan $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ vektorlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari bilan bir xil bo'ladi, shuning uchun ular quyidagicha bo'ladi.

1. Tekisliklarning parallellik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

2. Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

(1)-tenglamadan $D \neq 0$ bo'lganda tekislikning quyidagi kesmalar bo'yicha deb ataluvchi tenglamasini keltirib chiqarish mumkin.

$$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

yoki

$$-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$$

deb belgilashlar kiritsak, u holda

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

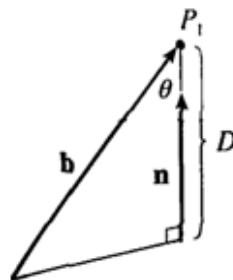
tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi hosil bo'ladi.

(2)-tengliklar bilan berilgan ikki tekislik orasidagi burchak ularga perpendikulyar bo'lgan $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Shuning uchun shu burchakni ϕ orqali belgilasak, u quyidagi tenglikdan topiladi

$$\cos \phi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan $ax + by + cz + d = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa quyidagi formula orqali topiladi [1, 851-bet]

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Bu formulaning isboti, tekislikda avval ko'rilgan nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasining isboti kabi bo'ladi.

4.2. Fazoda to'g'ri chiziq va uning umumiy tenglamasi

Endi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, $\vec{p}(m, n, k)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. Agar $B(x, y, z)$ nuqta qidirilayotgan to'g'ri chiziqda yotsa, u holda $\overrightarrow{MB}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektor $\vec{p}$ vektorga parallel bo'lishi kerak, ya'ni quyidagi tenglama hosil bo'ladi [1, 847-bet]

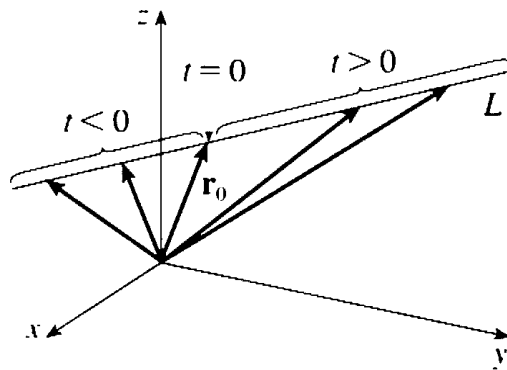
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k} \quad (3)$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishidagi tenglamasi deb ataladi. Agar (3) da $\frac{z - z_0}{k} = t$ deb olsak, u holda to'g'ri chiziqning quyidagi parametrik tenglamasini hosil qilamiz [1, 846-bet]

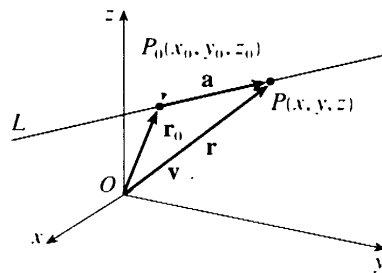
$$x = mt + x_0$$

$$y = nt + y_0$$

$$z = kt + z_0$$



$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct$$



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

Agar (2) tengliklardagi tekisliklar parallel bo'lmasa ular to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, bu to'g'ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi orqali topiladi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(4)–tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Agar tenglamadan x va y ni z orqali topsak, u holda quyidagi to‘g‘ri chiziqning proeksiyadagi tenglamasi deb ataluvchi tenglamasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$$

Endi $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{k}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik orasidagi φ burchakni topaylik. $\frac{\pi}{2} - \varphi$ burchak $\vec{p}(m, n, k)$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo‘ladi, u holda $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$ bo‘lgani uchun, quyidagini hosil qilamiz

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}$$

Berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallel bo‘lishligi uchun $\vec{p}$ va $\vec{n}$ vektorlar perpendikulyar bo‘lishi kerak, shuning uchun, quyidagi parallellik shartini hosil qilamiz

$$Am + Bn + Ck = 0.$$

Berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislik o‘zaro perpendikulyar bo‘lishi uchun $\vec{p}$ va $\vec{n}$ vektorlar parallel bo‘lishi kerak, natijada quyidagi perpendikulyarlik shartini hosil qilamiz

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{k}.$$

To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishgan nuqtasini koordinatalari, to‘g‘ri chiziqni parametrik ko‘rinishdagi tenglamasi va tekislikning umumiy tenglamasi orqali hosil qilgan sistemani yechish natijasida topiladi, ya’ni

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = kt + c \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak.

Berilgan ikkita nuqta $M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topaylik. Bu to‘g‘ri chiziq $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o‘tganligi uchun u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{k} \quad (5)$$

Endi bu to'g'ri chiziqni $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtadan o'tishini e'tiborga olsak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{k}$$

bu yerda (5) tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Bu tenglama berilgan ikki $M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidan iborat bo'ladi.

MA'RUZA 5-6. MATRITSA VA ULAR USTIDA AMALLAR. DETERMINANT TUSHUNCHASI VA UNI HISOBLASH

Reja:

1. Matritsa tushunchasi va birlik matritsa
2. Matritsa ustida amallar
3. Determinant tushunchasi va uni hisoblash
4. Teskari matritsa

Tayanch iboralar: *Matritsa, birlik matritsa, Teskari matritsa, minor, determinant.*

5.1. Matritsa tushunchasi va birlik matritsa

Ko'p hollarda amaliy masalalarni hal etishda maxsus matematik ifodalardan foydalaniladi. Bunday matematik ifodalardan biri matritsalaridir.

m ta ($m \in N$) yo'l va n ta ($n \in N$) ustun da joylashgan a_{ik} sonlardan ($i = 1, 2, 3, \dots, m; k = 1, 2, 3, \dots, n$) tuzilgan ushbu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

to'rtburchak shakldagi jadval $m \times n$ o'lchovli matritsa deyiladi. Odatda matritsalar katta harflar A, B, C, ... bilan belgilanadi **[1, 182-183-betlar]**. Masalan,

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 33 & -22 & 0 \end{bmatrix}$ 2×3 matritsa, chunki u 2 ta satr va 3 ta ustunga ega.

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 44 \\ -1 & 3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ 4×2 matritsa, chunki u 4 ta satr va 2 ta ustunga ega.

A matritsaning elementlari 2, 0, 1, 33, -22, va 0 lardan iborat. B matritsaning elementlari 2, 3, 10, 44, -1, 3, 8 va 3 lardan iborat.

Matritsani tashkil etgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matritsaning elementlari ikki indeks bilan yozilib, birinchi indeks shu element turgan yo'lni, ikkinchi indeks esa ustunni bildiradi.

Agar matritsa bitta ustundan iborat bo'lsa,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

u ustun matritsa, bitta yo'ldan iborat bo'lsa,

$$C = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$$

u yo'l matritsa deyiladi.

Agar matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lsa [1, 187-bet],

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

u nol matritsa deyiladi.

Agar matritsaning yo'llar soni ustunlar soniga teng, ya'ni $m = n$ bo'lsa,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

n - tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Bu matritsada $a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}$ elementlar bosh diagonal elementlar deyiladi.

Agar (1) matritsada bosh diagonal elementlardan boshqa barcha elementlar nol bo'lsa,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

u diagonal matritsa deyiladi. Xususan bu matritsada

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$$

bo'lsa,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

u birlik matritsa deyiladi.

5.2. Matritsalar ustida amallar

A va B bir hil o'lchovli matritsalar bo'lsin.

Agar A va B matritsalarining

mos elementlari teng bo'lsa, A va B teng deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

A va B matritsalarining mos elementlarining yig'indisidan tashkil topgan matritsa A va B matritsalar yig'indisi deyiladi va $A+B$ kabi yoziladi. **[1, 184-bet]**

$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ yigindining ij -elementi = ij -elementlar yigindisiga

A va B matritsalarining mos elementlarining ayirmasidan tashkil topgan matritsa A va B matritsalar ayirmasi deyiladi va $A-B$ kabi yoziladi.

$(A-B)_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$ ayirmaning ij -elementi = ij -elementlar ayirmasiga Masalan, **[1,**

184-bet]

$$1. \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 13 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ 1 & 13 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 13 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -13 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aytaylik, A matritsa hamda c son berilgan bo'lsin. Bu matritsaning har bir elementini c songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan matritsa c son bilan A matritsa ko'paytmasi deyiladi va $c \cdot A$ kabi belgilanadi **[1, 186-187-betlar] :**

$$(c \cdot A)_{ij} = cA_{ij}.$$

Masalan, $6 \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ 1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -18 \\ 6 & 0 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}.$

Ikki A va B matritsalarining ko'paytmasi tushunchasi birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning yo'llar soniga teng bo'lgandagina kiritiladi.

Aytaylik, $m \times n$ o'lchovli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matritsa hamda $n \times k$ o'lchovli

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lsin.

A matritsaning i -yo'lda joylashgan

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$$

elementlarini mos ravishda B matritsaning j -ustunida joylashgan.

$$b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$$

ko'paytirib [1, 195-bet]

$$C_{ij} = (AB)_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

yig'indini hosil qilamiz. Bu sonlardan tuzilgan ushbu

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$m \times k$ o'lchovli matritsa A va B matritsalar ko'paytmasi deyiladi va $A \cdot B$ kabi belgilanadi.

Agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ o'lchovli kvadrat matritsa bo'lib,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$ o'lchovli birlik matritsa bo'lsa, u holda

$$A \cdot E = EA = A$$

bo'ladi.

5.3. Determinant tushunchasi va uni hisoblash

Ixtiyoriy $n \times n$ o'lchovli kvadrat matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ning elementlaridan tuzilgan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ifoda (matritsa kabi n -ta yo'l va n -ta ustunga ega bo'lgan ifoda) n -matritsaning n -tartibli determinanti deyiladi va $\det A$ (yoki $|A|$, yoki Δ kabi belgilanadi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Matritsa elementi determinantning ham elementi deyiladi.

Masalan, $n=1$ bo'lganda

$$A = (a_{11}) \text{ bo'lib, } \det A = a_{11};$$

$n=2$ bo'lganda [2, 290-bet]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

bo'lib,

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21}); \quad (1)$$

$n=3$ bo'lganda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bo'lib, [2, 292-293-betlar]

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (2)$$

bo'ladi.

Odatda (1) va (2) mos ravishda ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar deyiladi.

Demak, determinantlar sonlarni ifodalydi.

Determinantlar quyidagi xossalarga ega:

- Determinantning biror yo‘li (ustuni) faqat nollardan iborat bo‘lsa, determinantning qiymati nolga teng bo‘ladi;
- Agar determinantning ikki yo‘li (ikki ustuni) dagi elementlari proporsional bo‘lsa, determinantning qiymati 0 ga teng bo‘ladi;
- Agar determinantning biror yo‘li (ustuni) biror o‘zgarmas songa ko‘paytirilsa, determinantning qiymati ham k ga ko‘payadi:
- Agar determinantning ikki yo‘li (ikki ustuni) o‘rinlarini almashtirilsa, determinant ishorasini o‘zgartiradi.
- Agar determinantning bir yo‘lini (ustunini) o‘zgarmas songa ko‘paytirib, uni boshqa yo‘liga (ustuniga) qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi:

Faraz qilaylik, biror

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinant berilgan bo‘lsin. Bu determinantning biror a_{ik} ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$) elementini olib, shu element joylashgan yo‘lni hamda ustunni o‘chiramiz. Ravshanki, qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Bu determinantga a_{ik} elementning minori deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Ushbu

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

miqdor a_{ik} elementning algebraik to‘ldiruvchisi deyiladi.

Teorema. Determinantning biror yo‘lida joylashgan barcha elementlarning ularga mos algebraik to‘ldiruvchilari bilan ko‘paytmasidan tashkil topgan yig‘indi shu determinantning qiymatiga teng bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli determinant, ta’rifga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bo‘ladi.

Uchinchi tartibli determinant, ta’rifga ko‘ra

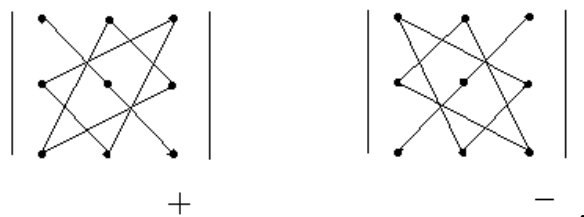
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

bo‘ladi. Bu tenglikda qatnashgan ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblab topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + \\ + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ularning uchta musbat ishorali, uchta manfiy ishorali bo'ladi.

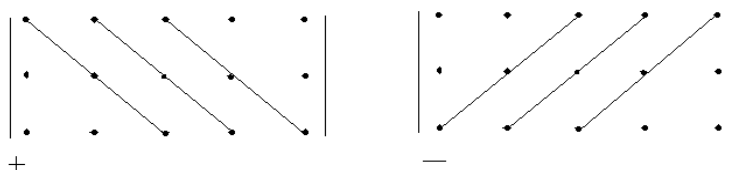
Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo'ladi,



Agar uchinchi tartibli determinantni quyidagi ko'rinishda yozib olsak

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{12}a_{13}a_{11}a_{12} \\ & a_{21}a_{22}a_{23}a_{21}a_{22} \\ & a_{31}a_{32}a_{33}a_{31}a_{32} \end{aligned}$$

determinantning qiymatini Sarryus usuli deb ataluvchi usul bilan xam xisoblash mumkin;



5.4. Teskari matritsa

Matritsada yo'l va ustunlar o'rinlarini almashtirish transponirlash deyiladi va A^T ko'rinishda belgilanishi mumkin. Agar $m \times n$ o'lchovli bo'lsa, A^T $n \times m$ o'lchovli bo'ladi.

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

$$(A^T)^T = A, \quad 2) (\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad 3) (A + B)^T = A^T + B^T, \quad 4) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Ikki $n \times n$ o'lchamli A , V kvadrat matritsalar uchun $A \cdot B = B \cdot A = E$ bo'lsa, V matritsa A matritsaga teskari deyiladi va A^{-1} ko'rinishida belgilanadi.

Dastlab, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsa teskari $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ matritsani topamiz. $A \cdot B = E$ shartga ko'ra, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Demak, $a_{11}x + a_{12}z = 1$, $a_{11}y + a_{12}u = 0$,

$$a_{21}x + a_{22}z = 0, \quad a_{21}y + a_{22}u = 1$$

Bu sistemalarni echib, $x = \frac{a_{22}}{\Delta}$, $y = \frac{-a_{12}}{\Delta}$, $z = \frac{-a_{21}}{\Delta}$, $u = \frac{a_{11}}{\Delta}$ ekanligini topamiz. Bunda,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_{ij} \text{ lar esa } a_{ij} \text{ -algebraik to'ldiruvchilari. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ matritsaga teskari}$$

$$\text{matritsa } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix} \text{ ko'rinishida bo'lar ekan.}$$

Misol. 1). $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ga teskari matrissa toping.

$|A| = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ekanligidan teskari matritsa mavjud va yagona.

$A_{11} = \cos \alpha$, $A_{21} = \sin \alpha$, $A_{12} = -\sin \alpha$, $A_{22} = \cos \alpha$ bo'lganligi uchun

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

2). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ga teskari matritsa toping.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

$$A_{11} = -4, \quad A_{21} = -4, \quad A_{31} = -4, \quad A_{41} = -4$$

$$A_{12} = -4, \quad A_{22} = -4, \quad A_{32} = 4, \quad A_{42} = 4$$

$$A_{13} = -4, \quad A_{23} = 4, \quad A_{33} = -4, \quad A_{43} = 4$$

$$A_{14} = -4, \quad A_{24} = 4, \quad A_{34} = 4, \quad A_{44} = -4$$

$$\text{Demak, } A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MA'RUZA 7. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usul
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Matrisaviy usul
3. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish (Gauss) usuli
4. Uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer va Gauss usuli

Tayanch iboralar: *chiziqli tenglamalar, tenglamalar sistemasi, Kramer usul, Gauss usuli.*

6.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usul

n ta $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nomalumli chiziqli n ta

[illegible]

tenglamalar sistemasini echish usullari, yechimi qanday bo'lishi masalalarini qaraymiz.

1. Kramer formulasi.

Nomlarni ko'efficientlaridan tuzilgan $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ determinant

tenglamalar sisremasining asosiy determinanti, undagi j -ustun o'rniga ozod b_j hadlardan iborat ustun qo'yilgan determinant esa j -yordamchi determinant deyiladi va Δ_j ko'rinishida belgilanadi.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} \dots \mathbf{a}_{1j-1} \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{1j+1} \dots \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} \dots \mathbf{a}_{2j-1} \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_{2j+1} \dots \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} \dots \mathbf{a}_{nj-1} \mathbf{b}_n & \mathbf{a}_{nj+1} \dots \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

Dastlab, berilgan tenglamalar sistemasidan har bir i -tenglamani A_{i1} ga ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + ((a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \cdots + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$$

Determinantni yoyish haqidagi teoremaga ko'ra: $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$. Endi sistamadagi har bir i-tenglama A_{i2} ga ko'paytirilib qo'shilsa, $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \dots, A_{in}$ ga ko'paytirib qo'shilsa, $\Delta x_n = \Delta_n$ tenglik hosil bo'ladi.

Demak, sistemadagi nomalumni $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ formula yordamida hisoblanar ekan. Bu Kramer formulasidir [2, 319-bet].

$\Delta \cdot x_j = \Delta_j$ tenglikdan quyidagilar kelib chiqadi:

1. $\Delta \neq 0$ da sistema yagona echimga ega, uni birgalikda deyiladi.
2. $\Delta = 0, \Delta_j = 0$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p echimga ega.

$\Delta = 0, \Delta_j$ lardan birortasi noldan farqli bo'lsa, sistema echimga ega emas.

6.2. Matrisaviy usulda echish

Berilgan tenglamalar sistemasini matrisaviy [2, 319-bet]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ yoki } A \cdot X = B \text{ ko'rinishida yozish mumkin.}$$

Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, A^{-1} matrisa mavjud va yagona bo'lishidan $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ yoki $X = A^{-1} \cdot B$.

Nomalumlardan iborat X-ustun matrisani bunday topish matrisaviy usul deyiladi.

Misol. Yuqoridagi sistemani shu usulda qayta echamiz.

$|A| = \Delta = 3$ ekanligini hisoblaganmiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ matrisaga teskari } A^{-1} \text{ ni topamiz.}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 5; A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -3; A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -6; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6; A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3; A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \\ A_{14} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5; A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0; A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Demak, } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 6 & -3 \\ 9 & -3 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 6 & -3 \\ 9 & -3 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ ya'ni } x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4.$$

6.3. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish (Gauss) usuli

Berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi koeffisientlari orqali quyidagi jadvalni tuzib olamiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Bu jadval berilgan sistema kengaytirilgan matrisasi deyiladi.

Tushunarliki, har bir satrda bittadan tenglama turibdi, faqat tenglik o'rniga chiziqcha

tortilgan.

Bu matrisa ustida o'tkaziladigan har bir elementar almashtirish berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil qiladi. Shu sababli, elementar almashtirishlar yordamida kengaytirilgan matritsani uchburchak ko'rinishiga keltirib olamiz, buning uchun $a_{11} \neq 0$ bo'lishi kifoya agar $a_{11} = 0$ bo'lsa, birinchi tenglamani boshqa yo'ldagi tenglama bilan almashtirish orqali bunga erishish mumkin.

Faraz qilaylik, elementar almashtirishlar yordamida kengaytirilgan matritsa $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & c_n \end{array} \right)$ ko'rinishga kelsin.

Unga mos sistema

$$\left(\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = c_2 \\ c_{32}x_2 + \dots + c_{3n}x_n = c_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c_{nn}x_n = c_n \end{array} \right) \text{ ko'rinishida bo'ladi.}$$

Bu sistemadan dastlab x_n , so'ngra $x_{n-1}, \dots$, va nihoyat x_1 topiladi.

Bu usulda 2-tenglamadan x_1 , ni 3-tenglamadan x_1 ba $x_2, \dots, n$ - tenglamadan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ketma - ket yo'qotilayotganligi uchun noma'lumlarni ketma - ket yo'qotish usuli deyiladi. Bu usul Gauss nomi bilan bog'liq bo'lib, talabalarga elementar matematikadan ma'lum [1, 143-146-betlar].

Misol. Avvalgi usullarda yechilgan sistemani qaraylik. Uning kengaytirilgan

matritsasi $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right)$ ko'rinishda bo'ladi. 1- yo'l elementlarini (-1) ga

ko'paytirib 2-yo'lga (-2) ga ko'paytirib 3-yo'lga, (-4) ga ko'paytirib 4- yo'lga qo'shamiz, natijada, kengaytirilgan matritsa.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -8 \end{array} \right)$ ko'rinishiga keladi. 2 yo'lni 3, 4 -yo'l elementlariga qo'shamiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ -x_3 = -3 \\ -3x_4 = -12 \end{array}$$

Bu matritsaga mos sistema.

Ko'rinishida bo'ladi. Ketma-ket $x_4 = 4; x_3 = 3$ larni topib 2-tenglamaga qo'yamiz.

$$x_2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -4.$$

Bu erdan $x_2 = 2$ ekanligini topib, 1-tenglamaga o'tamiz.

$x_1 + 2 + 3 - 4 = 2$. Demak, $x_1 = 1$.

6.4. Uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer va Gauss usuli

Soddalik uchun uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamadan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

sistemani qaraymiz. Sistema uchta x, y va z noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsientlari, b_1, b_2 va b_3 sonlar ozod hadlar deyiladi. Bu sistemaning koeffitsientlaridan quyidagi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni hosil qilamiz. So'ng bu determinantning birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quyidagi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Demak, (8) sistema berilgan holda har doim $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarga ega bo'lamiz.

1-teorema. Agar

1) $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (4) sistema yagona (x, y, z) yechimga ega bo'lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (2)$$

bo'ladi;

2) $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$ bo'lsa, u holda (4) sistema yechimga ega bo'lmaydi;

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsa, u holda (4) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ x + y + 2z = 7, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechilsin.

Avvalo sistema koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 1 - (-2) - (-4) - 3 = 18.$$

Demak, berilgan sistema yagona yechim ega. Endi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarni xisoblaymiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 + 7 - (-1) - (-10) - 21 = 8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 20 - 1 - (-14) - 4 - 5 = 38,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 42 - 5 - 10 - (-14) - 3 = 40.$$

Unda

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{18} = \frac{19}{9}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}$$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasining yechimini topish usuli **Kramer usuli** deyiladi.

Gauss usulining mohiyati noma'lumlarni ikkinchi tenglamadan boshlab, ketma-ket yo'qotib oxirgi tenglamada bitta no'malum qolguncha davom ettiriladi va oxirgi tenglamadan yuqoriga qarab no'mallarni ketma-ket topib, yechim hosil qilinadi.

2-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasi yechilsin .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Yechish. Birinchi tenglamaning barcha xadlarini $a_{11}=2$ ga bulib,

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

sistemani xosil kilamiz. Birinchi tenglamani 3ga kupaytirib ikkinchi tenglamadan, so'ngra uchinchi tenglamadan birinchi tenglamani ayiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ 0,5x_2 - 0,5x_3 = -0,5 \\ -1,5x_2 + 2,5x_3 = 4,5 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamani 0.5 ga bulib ,so'ngra uni -1.5 ga kupaytirib , uni uchinchi tenglamadan ayiramiz.

$$\text{Natijada } \begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{xosil bo'ladi. Bundan ketma-ket } x_3=3, x_2=-1+3=2,$$

$x_1=0.5-0.5x_2+0.5x_3=1$ larni topamiz. Shunday kilib, berilgan sistemani yechimi $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ dan iborat ekan.

MA'RUZA 8. FUNKSIYA TUSHUNCHASI VA UNING XOSSALARI

Reja:

1. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish sohasi
2. Funksiyaning o'zgarish sohasi
3. Monoton funksiyalar
4. Juft, toq va davriy funksiyalar
5. Murakkab va teskari funksiyalar

Tayanch iboralar: *funksiya, funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning o'zgarish sohasi, monoton funksiya, juft funksiya, toq funksiya, davriy funksiya, murakkab funksiya, teskari funksiyalar.*

7.1. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish sohasi

Aytaylik, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda $E(E \subset R)$ hamda $F(F \subset R)$ to'plamlarda o'zgarsin. Agar E to'plamdan olingan har bir x songa biror f qoidaga ko'ra F to'plamning bitta tayin y soni mos qo'yilsa, E to'plamda funksiya aniqlangan (berilgan) deyiladi. Uni $y = f(x)$ kabi yoziladi. Odatda x ga funksiya argumenti, y ga esa x ning funksiyasi deyiladi. Bunda E to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plami) deyiladi. Ko'pincha, amaliyotda, funksiyaning aniqlanish sohasi, x va y orasidagi bog'lanishning xarakteriga ko'ra topiladi. [2, 11-12-betlar]

7.2. Funksiyaning o'zgarish sohasi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lsin, $x_0 \in E$ songa mos keluvchi y_0 son $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va u $f(x) = y_0$ kabi belgilanadi. Ushbu

$$F_f = \{y = f(x) : x \in E\}$$

to'plam funksiya qiymatlari to'plami deyiladi. Ravshanki, $F_f \subset F$ bo'ladi.

1-Misol. Agar

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } |x| > 1 \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } |x| < 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = \pm 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

$f(1,1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-0,9)$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ lar topilsin.

Ma'lumki,

$$|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1, \quad x > 1$$

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Unda $f(1,1)=1$, $f(\sqrt{2})=1$, $f(-0,9)=-1$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-1$ bo'ladi.

2-Misol. Ushbu

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Ma'lumki, $\sqrt{1-x^2}$ ifoda $1-x^2 \geq 0$ bo'lgandagina ma'noga ega. Keyingi tengsizlikni yechib topamiz:

$$x^2 - 1 \leq 0, \quad (x-1)(x+1) \leq 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Kasr mahrajidagi $x \neq 0$ bo'lishi lozim. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D = [-1; 0) \cup (1; 1].$$

3-Misol. Ushbu

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Ma'lumki, $\sqrt{x-1}$ kvadrat ildiz $x-1 \geq 0$, ya'ni $x \geq 1$ bo'lganda, $\sqrt{1-x}$ kvadrat ildiz esa $1-x \geq 0$, ya'ni $x \leq 1$ bo'lganda ma'noga ega bo'lib, ikkala kvadrat ildiz $x=1$ bo'lganda ma'noga ega bo'ladi. Demak, berilgan funksiya bitta $x=1$ da aniqlangan: $E = \{1\}$.

4-Misol. Ushbu

$$y = \frac{2x-1}{x+1}$$

funksiyaning qiymatlar to'plami (sohasi) topilsin.

Berilgan

$$y = \frac{2x-1}{x+1}$$

tenglamani x ga nisbatan yechib topamiz:

$$yx + y = 2x - 1, \quad yx - 2x = -1 - y, \quad x = \frac{y+1}{2-y}$$

keyingi tenglikda $y \neq 2$ bo'lishi ko'rinadi. Demak, berilgan funksiyaning qiymatlari sohasi

$$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

bo'ladi.

5-Misol. Ushbu

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

funksiyaning o'zgarish sohasi topilsin.

Berilgan tenglikni quyidagicha

$$y \cdot x^2 + y = x^2 - 2x + 1,$$

ya'ni

$$(y-1)x^2 + 2x + y - 1 = 0$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Agar $y=1$ bo'lsa, unda $2x=0$, ya'ni $x=0$ bo'ladi.

Agar $y \neq 1$ bo'lsa, unda keyingi tenglamani x ga nisbatan yechamiz.

Natijada

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-(y-1)^2}}{y-1}$$

bo'ladi. Demak, $(y-1)^2 \leq 1$, $y \neq 1$ bo'lishi kerak. Keyingi munosabatlardan

$$0 \leq y < 1, \quad 1 < y \leq 2$$

bo'lishi kelib chiqadi. YUqorida aytilganga ko'ra $y=1$ ga teng bo'lishi mumkinligini e'tiborga olib berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi

$0 \leq y \leq 2$, ya'ni $F_f = [0, 2]$ bo'lishini topamiz.

7.3. Monoton funksiyalar

Agar funksiya argumenti x ning ixtiyoriy $x_1 \in E$ va $x_2 \in E$ qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

7-Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

funksiya monotonlikka tekshirilsin.

Ma'lumki, berilgan funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ aniqlangan. E to'plamdan ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib,

$$x_1 < x_2$$

bo'lsin deylik. So'ng ushbu

$$f(x_2) - f(x_1)$$

ayirmani qaraymiz. Uni quyidagicha yozamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2^2} - \frac{x_1}{1+x_1^2} = \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Agar $0 < x_1 < x_2 < 1$ yoki $-1 < x_1 < x_2 < 0$ bo'lsa, unda $1 - x_1 x_2 > 0$ bo'lib

$$f(x_2) - f(x_1) > 0, \text{ ya'ni } f(x_2) > f(x_1)$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $(-1, 1)$ da o'suvchi bo'ladi.

Agar $x_1 < x_2 < -1$ yoki $1 < x_1 < x_2$ bo'lsa, unda $1 - x_1 x_2 < 0$ bo'lib

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ ya'ni } f(x_1) > f(x_2)$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $(-\infty, -1)$ va $(1, +\infty)$ da kamayuvchi bo'ladi.

7.4. Juft, toq va davriy funksiyalar

Aytaylik, E koordinata boshi O nuqtaga nisbatan simmetrik to'plam, ya'ni $\forall x \in E$ uchun, $-x \in E$ bo'lsin. Bu E to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

Agar ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$f(-x) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E da juft funksiya,

$$f(-x) = -f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E da toq funksiya deyiladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $E (E \subset R)$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar shunday o'zgarma T son ($T \neq 0$) topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$1) x - T \in E, \quad x + T \in E,$$

$$2) f(x) = f(x + T) = f(x - T)$$

shartlar bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, T son esa uning davri deyiladi.

Agar T son ($T \neq 0$) $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda

$$n \cdot T \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sonlar ham funksiyaning davri bo'ladi.

8-Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2 |x-1|}{\sqrt{(x-1)^2}}$$

funksiya juft funksiya bo'ladimi?

Berilgan funksiyaning quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x) = \frac{x^2 |x-1|}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{x^2 |x-1|}{|x-1|} = x^2.$$

Bu funksiya uchun $f(-x) = f(x)$ shart bajariladi. Biroq, qarayotgan funksiyaning

aniqlanish sohasi

$$x \leq 0, \quad x \geq 0, \quad x \neq 1$$

bo'lib, u O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lmagani uchun, berilgan funksiya juft funksiya bula olmaydi.

9-Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2(|x|-1)}{\sqrt{(|x|-1)^2}}$$

funksiyani juft yoki toq funksiya bo'lishiga tekshiring?

Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $X = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ dan iborat. Aniqlanish sohasiga tegishli ixtiyoriy $x \in X$ uchun $-x \in X$ bo'ladi. Va quyidagi bu funksiya uchun

$$f(-x) = f(x)$$

shart bajariladi. Demak, Yuqorida berilgan funksiya juft funksiya.

7.5. Murakkab va teskari funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin. Har bir $x \in E$ uchun berilgan funksiyaning qiymati y ni topib, bunday qiymatlardan

$$F_f = \{y = f(x) : x \in E\}$$

to'plamni hosil qilamiz. Ravshanki, bu funksiya qiymatlari to'plami bo'ladi.

Shu F_f to'plamda o'z navbatida $u = \varphi(y)$ funksiya berilgan deylik. Natijada E to'plamdan olingan har bir x ga bitta y son (f -qoidaga ko'ra) va $F(f)$ to'plamdagi bunday y songa bitta u son (φ -qoidaga ko'ra) mos qo'yilib, E to'plamda funksiya aniqlanadi. Uni murakkab funksiya deyilib

$$u = (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) \quad (3)$$

kabi belgilanadi. Masalan, agar $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x - 3$ bo'lsa, $f(\varphi(x)) = (x - 3)^2$ bo'ladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, ixtiyoriy $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ va $x_1 \neq x_2$ uchun $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsin. U holda berilgan funksiyaning qiymatlari to'plami F_f dan olingan har bir y ga E to'plamda shunday $x \in E$ nuqta topiladiki, $f(x) = y$ bo'ladi. Natijada F_f to'plamda aniqlangan funksiya hosil bo'ladi. Uni $y = f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyiladi va $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

10-Misol. Ushbu

$$y = x^2 - 4x + 7$$

funksiyaga $(-\infty, 2]$ oraliqda teskari bo'lgan funksiya topilsin.

Berilgan funksiyaning quyidagicha yozib olamiz:

$$y = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3.$$

Bilamizki,

$$(x - 2)^2 = y - 3, \text{ ya'ni}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{y - 3}$$

bo'ladi. Madomiki, $x \in (-\infty, 2)$ bo'lar ekan, unda $x = 2 - \sqrt{y - 3}$ bo'lib, berilgan funksiyaga nisbatan teskari funksiya $y = 2 - \sqrt{x - 3}$ bo'ladi.

11-Misol. Agar $f(x) = 2x^2$, $\varphi(x) = x + 1$ bo'lsa, ushbu

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$$

tenglikni qanoatlantiruvchi x ning qiymati topilsin.

Ma'lumki,

$$f(\varphi(x)) = 2 \cdot \varphi^2(x) = 2 \cdot (x + 1)^2,$$

$$\varphi(f(x)) = f(x) + 1 = 2x^2 + 1.$$

Unda $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$ tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$2 \cdot (x + 1)^2 = 2x^2 + 1.$$

Bu tenglikdan

$$2x^2 + 4x + 2 = 2x^2 + 1,$$

ya'ni $x - \frac{1}{4}$ bo'lishini topamiz.

MA'RUZA 9. SONLI KEMA-KETLIK VA FUNKSIYA LIMITI

Reja:

1. Sonlarketma-ketligi tushunchasi
2. Ketma-ketliklarning xossalari
3. Funksiya limiti

Tayanch iboralar: sonli ketma-ketliklar, sonli kema-ketlik limiti, funksiya limiti

8.1. Sonlarketma-ketligi tushunchasi

Aytaylik, har bir natural n songa bitta x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin: $(f : n \rightarrow x_n)$. Bu holda natural argumentli funksiya $(x_n = f(n))$ berilgan deyilib, uning qiymatlari

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

sonlar ketma-ketligi deyiladi. Bu sonlar ketma-ketligini $\{x_n\}$ kabi belgilanadi. x_n ga (1) ketma-ketlikning umumiy yoki n – hadi deyiladi.

1-Misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n+1}{n^2} \quad (2)$$

ketma-ketlikning dastlabki to'rtta hadi yozilsin.

(2) tenglikda $n=1, n=2, n=3, n=4$ bo'lsin deb topamiz:

$$x_1 = \frac{1+1}{1^2} = 2, x_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}, x_3 = \frac{3+1}{3^2} = \frac{4}{9}, x_4 = \frac{4+1}{4^2} = \frac{5}{16}.$$

$$\text{Demak, } x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = \frac{4}{9}, x_4 = \frac{5}{16}.$$

Faraz qilaylik, ikkita

$$\{x_n\} : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

$$\{y_n\} : y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n, \dots,$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n, \dots,$$

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_n \neq 0, n=1, 2, \dots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, hamda nisbati deyiladi va

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$$

kabi belgilanadi.

8.2. Ketma-ketliklarning xossalari

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$) bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi;

agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

Agar shunday $M(m)$ son topilsaki, $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan deyiladi.

2-Misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

ketma-ketlikning qat'iy o'suvchi bo'lishi isbotlansin.

Berilgan ketma-ketlikning

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

hadlarini olamiz. Bu hadlari uchun

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

bo'ladi. Ravshanki, $\forall n \in N$ uchun

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Demak,

$$x_{n+1} - x_n > 0$$

bo'lib, undan $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$ bo'lishi kelib chiqadi. Berilgan ketma-ketlik qat'iy o'suvchi.

3-Misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + 4}$$

ketma-ketlikning chegaralanganligi isbotlansin.

$$\text{Ma'lumki, } \forall n \in N \text{ uchun } x_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + 4} > 0.$$

Demak, ketma-ketlik quyidan chegaralangan.

Ayni paytda $\frac{n^3+1}{n^3+4} = \frac{n^3+4-3}{n^3+4} = 1 - \frac{3}{n^3+4}$. Demak, $x_n = \frac{n^3+1}{n^3+4} < 1$ bo'lib, u ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik hamda a soni berilgan bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizligi bajarilsa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

kabi yoziladi.

Agar $\{\alpha_n\}$ sonlar ketma-ketligining limiti 0 ga teng,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

bo'lsa, α_n cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketliklar yaqinlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lishi uchun

$$x_n = a + \alpha_n$$

bo'lishi zarur va etarli, bunda α_n cheksiz kichik miqdor.

Aytaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

bo'lsin. Unda

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot a$, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $c = const$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$ ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$

bo'ladi.

Biror $\{\beta_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n_0 son topilsinki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|\beta_n| > M$$

tengsizlik bajarilsa, β_n cheksiz katta miqdor deyiladi. Cheksiz katta miqdorning limiti cheksiz deb olinadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty.$$

Ravshanki, β_n cheksiz katta miqdor bo'lsa, $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n}$ cheksiz kichik miqdor, shuningdek α_n cheksiz kichik miqdor ($\alpha_n \neq 0$) bo'lsa, $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Ketma-ketlikning limitini topishda limit ta'rifidan, yuqorida keltirilgan qoidalaridan shuningdek ba'zi mahsus limitlardan, jumladan ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (e \approx 2,7182...)$$

limitdan foydalaniladi.

4-Misol. Ushbu

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

ketma-ketlikning limiti 2 ga teng, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

bo'lishi isbotlansin.

Ixtiyoriy musbat $\varepsilon > 0$ soni olib, ushbu

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}$$

ayirmani qaraymiz. Ravshanki, bu ayirmaning absolyut qiymati

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi. Agar

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

deyilsa, unda

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = n_0$$

bo'lib, barcha $n > n_0$ va $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, ya'ni

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

tengsizligi bajariladi. Ketma-ketlik ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

bo'ladi.

5-Misol. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^2 + n}{n^3 + 1}$$

limit hisoblansin.

Ma'lumki,

$$\frac{n^3 - n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{n(n^2 - n + 1)}{(n+1)(n^2 - n + 1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Unda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^2 + n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

bo'ladi.

6-Misol. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$$

hisoblansin.

Bu limit quyidagicha hisoblanadi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \left(\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1} \right)}{\left(\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \end{aligned}$$

9.3. Funksiya limiti

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Ravshanki, $|x - a| < \delta$ tengsizlik, $a - \delta < x < a + \delta$ tengsizlikka ekvivalent.

Agar $a - \delta < x < a$ bo'lganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi **chap limiti** deyiladi va

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Agar $a < x < a + \delta$ bo'lganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi **o'ng limiti** deyiladi va

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$$

kabi yoziladi.

7-Misol. Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$$

bo'lishi isbotlansin.

$f(x) = 3x - 2$ funksiyaning $x \rightarrow 1$ dagi limiti 1 ga tengekanligini isbotlash uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilishini ko'rsatish kerakki, $0 < |x - 1| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$$

tengsizligi bajarilsin. Buning uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, ushbu

$$|(3x - 2) - 1|$$

ayirmani qaraymiz. Ravshanki,

$$|(3x - 2) - 1| = |3x - 2 - 1| = 3 \cdot |x - 1|.$$

Keyingi munosabatdan ko'rinadiki, $\varepsilon > 0$ songa ko'ra oliradigan δ ni $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ deyilsa, unda $0 < |x - 1| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| = |3 \cdot (x - 1)| < 3 \cdot |x - 1| < 3\delta < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

tengsizlik bajarildi. Demak, ta'rifga binoan

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$$

bo'ladi.

8-Misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

limit hisoblansin.

Bu limit quyidagicha hisoblanadi

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(x - 1)} = 4.$$

9-Misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \quad (a > 0)$$

limit hisoblansin.

Bu limit quyidagicha hisoblanadi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun **[2, 104-bet]**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

MA'RUZA 10. FUNKSIYANING HOSILASI VA UNING TADBIQLARI

Reja:

1. Funksiyaning hosilasi
2. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari
3. Hosila hisoblashning sodda qoidalari
4. Funksiyaning o'sish va kamayishi
5. Funksiya ekstremumi

Tayanch iboralar: *funksiya, funksiya hosilasi, hosila, argument orttirmasi, funksiyaning orttirmasi, funksiya ekstremumi.*

9.1. Funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Bu funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ni argument orttirmasi Δx ga bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

nisbatni qaraymiz.

Agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va y' yoki $f'(x_0)$ kabi belgilanadi [2, 129-130-betlar] :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x_0).$$

1-Misol. $f(x) = x^2 - 8x + 9$ funksiyaning a nuqtadagi hosilasini toping.

Yechish. Ta'rif foydalanib

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 8) = 2a - 8. \end{aligned}$$

2-Misol. Hosila ta'rifidan foydalanib, ushbu

$$y = \frac{2x+1}{3x+1}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

Funksiya argumenti x ga Δx orttirma berib funksiya orttirmasi Δy hamda

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ni topamiz:

$$\Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1} - \frac{2x + 1}{3x + 1} = -\frac{\Delta x}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)},$$

unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)}.$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)} \right] = -\frac{1}{(3x + 1)^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan funksiyaning hosilasi

$$y' = -\frac{1}{(3x + 1)^2}$$

bo'ladi.

Eslatma. Yuqorida qaralgan $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

9.2. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi, bu funksiya grafigiga (x_0, y_0) nuqtada o'tkazilgan urinmaning (to'g'ri chiziqning) burchak koeffitsientini ifodalaydi. Urinma va normal tenglamalari mos ravishda ushbu [2, 205-208]

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \quad (1)$$

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Moddiy nuqta harakat qonuni ushbu $s = s(t)$ funksiya bilan berilganda (bunda s - o'tilgan yo'l, t - vaqt) funksiyaning t_0 nuqtadagi $s'(t_0)$ hosilasi t_0 momentdagi harakat tezligini ifodalaydi.

3-Misol. Ushbu

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

parabolaga $M_0(1;1)$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normalning tenglamasi topilsin.

Bu tenglamalarni topishda yuqoridagi (1) va (2) formulalardan foydalanamiz. Bu holda

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1, \quad f'(x_0) = f'(1)$$

bo'ladi. Hosila ta'rifidan foydalanib $f'(1)$ ni topamiz.

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \Delta x)^2 - 6 \cdot (1 + \Delta x) + 3 - (2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x - 2) = -2.$$

Demak, izlanayotgan urinmaning tenglamasi

$$y - (-1) = -2(x - 1), \text{ ya'ni } 2x + y - 1 = 0,$$

normalning tenglamasi esa

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1), \text{ ya'ni } x - 2y - 3 = 0$$

bo'ladi.

4-Misol. Bo'shliqda erkin tushayotgan jism $S = \frac{gt^2}{2}$ qonun bo'yicha harakatlanadi, bunda $g \left(g \approx 980 \frac{cm}{cek^2} \right)$ erkin tushayotgan jismning tezlanishi. $t = 10cek$ da harakat tezligi topilsin.

Bu masala $S'(10)$ ni topish bilan hal bo'ladi.

Hosila ta'rifi ko'ra

$$S'(10) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(10 + \Delta t) - S(10)}{\Delta t}$$

bo'ladi. Bu tenglikdagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(10 + \Delta t) - S(10)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g \cdot (10 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}g \cdot 10^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t \cdot (20 + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot 20 = 10g.$$

Demak, harakatning $t = 10cek$ momentdagi tezligi

$$S'(10) = 10 \cdot g \approx 10cek \cdot 980 \frac{cm}{cek^2} = 9800 \frac{cm}{cek} = 98 \frac{m}{cek}$$

bo'ladi.

9.3. Hosila hisoblashning sodda qoidalar

Hosila hisoblashning sodda qoidalarini keltiramiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan bo'lib, $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda:

1) $y = c \cdot f(x)$ bo'lsa, $y' = c \cdot f'(x)$ bo'ladi, $c - const$;

2) $y = f(x) \pm g(x)$ bo'lsa, $y' = (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ bo'ladi;

3) $y = f(x) \cdot g(x)$ bo'lsa, $y' = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \pm f(x) \cdot g'(x)$ bo'ladi;

4) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, ($g(x) \neq 0$) bo'lsa, $y = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ bo'ladi;

5) $u = \varphi(x)$ va $y = f(u)$ lar yordamida tuzilgan $y = f(\varphi(x))$ funksiyaning hosilasi

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \text{ bo'ladi;}$$

6) Agar $y = f(x)$ funksiya nisbatan teskari funksiya $x = \varphi(y)$ bo'lsa,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ bo'ladi;}$$

Ko'pincha hosilalarni hisoblashda quyida keltirilgan jadvaldan foydalanish mumkin:

$$1) \quad (x^a)' = a \cdot x^{a-1}, \quad (u^a)' = a u^{a-1} \cdot u'$$

$$2) \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$3) \quad (e^x)' = e^x, \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$4) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u} \log_a e \cdot u'$$

$$5) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$6) \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7) \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$8) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$9) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

9.4. Funksiyaning o'sish va kamayishi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy $x_1 \in (a, b)$, va $x_2 \in (a, b)$ lar uchun

$$x_1 < x_2 \text{ bo'lganda } f(x_1) \leq f(x_2) \text{ bo'lsa,}$$

$f(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi,

$$x_1 < x_2 \text{ bo'lganda } f(x_1) \geq f(x_2) \text{ bo'lsa,}$$

$f(x)$ funksiya (a, b) da kamayuvchi deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x) \geq 0 \quad (x \in (a,b))$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b) da o'suvchi,

$$f'(x) \leq 0 \quad (x \in (a,b))$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b) da kamayuvchi bo'ladi.

5-misol. Ushbu

$$y = f(x) = \ln(1-x^2)$$

funksiyaning o'sish hamda kamayish oraliqlari topilsin.

Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi,

$$1-x^2 > 0, \quad (x-1)(x+1) < 0, \quad -1 < x < 1$$

$E = (-1,1)$ bo'ladi. Endi funksiyaning hosilasini topamiz:

$$y' = \frac{-2x}{1-x^2}.$$

So'ng $y' \geq 0$, ya'ni $\frac{2x}{x^2-1} \geq 0$ tengsizlikni yyechamiz: Ravshanki,

$$\frac{2x}{x^2-1} \geq 0, \quad x(x-1)(x+1) \geq 0.$$

Demak, $-1 < x < 0$ bo'lib, bu $(-1,0)$ oraliqda berilgan funksiya o'suvchi bo'ladi.

Yuqoridagi kabi berilgan funksiyaning $(0,1)$ oraliqda kamayuvchi ekanligi ko'rsatiladi.

9.5. Funksiya ekstremumi

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, x_0 nuqta o'zining atrofi $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bilan $(\delta > 0)$ (a,b) intervalga tegishli bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga

$$f(x_0) = \max f(x)$$

erishadi deyiladi.

Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun

$$f(x) \geq f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga

$$f(x_0) = \min f(x)$$

erishadi deyiladi.

Funksiya maksimum va minimumlari umumiy nom bilan uning ekstremumlari deyiladi.

Funksiya ekstremumga (maksimum va minimumga) shunday nuqtalarda erishishi mumkin:

1) bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'ladi;

2) shu nuqtalarda funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladi yoki bu nuqtalarda hosila mavjud bo'lmaydi. Odatda bunday nuqtalar $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari deyiladi.

6-misol. Ushbu

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

Berilgan funksiyaning

$$f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$$

hosilasini nolga tenglab

$$f'(x) = 2(3x - 1) = 0$$

$x = \frac{1}{3}$ bo'lishini topamiz. Demak, funksiya bitta $x = \frac{1}{3}$ kritik nuqtaga ega.

Endi shu nuqta atrofida funksiya hosilasining ishorasini aniqlaymiz.

Ravshanki, $\frac{1}{3} - \delta < x < \frac{1}{3}$ ($\delta > 0$) uchun

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) < 0;$$

$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} + \delta$ ($\delta > 0$) uchun

$$f'(x) = 2(3x - 1) = -6\left(\frac{1}{3} - x\right) > 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x = \frac{1}{3}$ nuqtada minimumga erishadi va uning minimum qiymati

$$\min f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

ga teng bo'ladi.

MA'RUZA 11-12. ANIQ VA ANIQMAS INTEGRALLAR VA ULARNING XOSSALARI

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari. Aniqmas integralning sodda xossalari
2. Aniq integral va uning xossalari
3. Aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash

Tayanch atamalar: *funksiya boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, aniq integral.*

10.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari. Aniqmas integralning sodda xossalari

$f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, shu intervalda differensiallanuvchi $F(x)$ funksiya uchun

$$F'(x) = f(x)$$

bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a, b) da $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

$f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyalarning umumiy ko'rinishi

$$F(x) + C, \quad C = \text{const}$$

berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ funksiya (a, b) da uzluksiz bo'lsa, uning aniqmas integrali mavjud bo'ladi. Funksiyaning aniqmas integralini toppish amali funksiyaning integrallash deyiladi. U differensiyallash amaliga teskari amal bo'ladi.

Integrallashning sodda xossalari. [1, 950-952-betlar]

$$1) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x), \quad d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx, \quad .$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad (C = \text{const})$$

$$2) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k = \text{const}, k \neq 0).$$

$$3) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Sodda funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali:

$$1) \int 1 \cdot dx = \int dx = x + c, \text{ chunki } (x + c)' = 1.$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1), \text{ chunki } \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)' = x^n.$$

$$3) \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \text{ chunki}$$

$$x > 0 \text{ da } \int \frac{dx}{x} = \ln x + c \text{ va } (\ln x + c)' = x^{-1}.$$

$$x < 0 \text{ da } \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + c \text{ va } (\ln(-x) + c)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = x^{-1}..$$

$$4) \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \text{ chunki } \left(\frac{a^x}{\ln a} + c \right)' = a^x.$$

$$5) \int e^x \cdot dx = e^x + c, \text{ chunki } (e^x + c)' = e^x.$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + c, \text{ chunki } (-\cos x + c)' = \sin x.$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + c, \text{ chunki } (\sin x + c)' = \cos x.$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c, \text{ chunki } (-\operatorname{ctg} x + c)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c, \text{ chunki } (\operatorname{tg} x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1-Misol. Agar $f'(x) = \sqrt{x}$ va $f(1) = 2$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya topilsin.

Integrallar jadvalining 2)-dan foydalanib

$$f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

bo'lishini topamiz. Ayni paytda

$$f(x) = \frac{2}{3} + C = 2$$

bo'lganligidan $C = \frac{4}{3}$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f(x) = \frac{2}{3} (x\sqrt{x} + 2).$$

2-Misol. Ma'lumki, m massali zarrachaning F kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli bo'yicha harakati ushbu

$$m \cdot \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = F$$

qonun bo'yicha bo'ladi (Nyutonning 3-qonuni). Agar zarracha hiech qanday kuch ta'sir etmasa, ya'ni $F = 0$ bo'lsa, harakat qanday bo'ladi?

Yuqoridagi tenglikdan

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

bo'lishini topamiz, bunda $v(t)$ – tezlik.

Bu tenglikdan

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0$$

bo'lib, undan

$$v(t) = \text{const}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu inersiya qonunidir: agar jismga hech qanday kuch ta'sir etmasa, u tinch holatda yoki to'g'ri chiziq bo'yicha tekis harakatda bo'ladi.

10.2. Aniq integral va uning xossalari

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va chegaralangan bo'lsin.

Bu segmentni

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \quad (x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

nuqtalar yordamida n ta

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

bo'lakka ajratib, har bir bo'lakda ixtiyoriy ravishda bittadan

$$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_{n-1} \quad (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n-1)$$

nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalardagi funksiylarning qiymatlari

$$f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_k), \dots, f(\xi_{n-1})$$

ni mos bo'lakchalar uzunliklari

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0 \quad (x_0 = a),$$

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,$$

.....

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

.....

$$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1} \quad (x_n = b)$$

ga ko'paytirib, quyidagi

$$\begin{aligned} \sigma &= f(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \\ &+ \dots + f(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \end{aligned} \quad (1)$$

yig'indini tuzamiz.

(1) yig'indi integral yig'indi deyiladi.

Integral yig'indi σ ning

$$\max_k \Delta x_k \rightarrow 0$$

dagi limiti mavjud bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi, limitning qiymati esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ bo'yicha aniq integrali deyiladi va

$\int_a^b f(x) dx$ kabi belgilanadi:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max_k \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda

1) uzluksiz bo'lsa,

2) $[a, b]$ segmentning chekli sonidagi nuqtalarida uzilishga ega va qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.

Aniq integral quyidagicha xossalarga ega:

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$3) \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx, \quad c = \text{const},$$

$$4) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (a < c < b).$$

1-Misol. Ushbu

$$\int_a^b c \cdot dx = c \cdot (b - a) \quad (f(x) = c - \text{const})$$

tenglik isbotlansin.

Bu tenglikni aniq integral ta'rifidan foydalanib hisoblaymiz.

$[a, b]$ segmentni ixtiyoriy ravishda n ta

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad (x_0 = a, x_n = b)$$

bo'lakka bo'lib, har bir bo'lakda ixtiyoriy

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_{n-1}$$

nuqtalarni olib $f(x)=c$ funksiyaning integral yig'indisini hisoblaymiz.

$$\sigma = f(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \dots + f(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} =$$

Ravshanki,

$$f(\xi_k) = c, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Bu tengliklarni e'tiborga olib topamiz

$$\sigma = c \cdot \Delta x_0 + c \cdot \Delta x_1 + c \cdot \Delta x_2 + \dots + c \cdot \Delta x_k + \dots + c \cdot \Delta x_{n-1} =$$

$$= c(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_k + \dots + \Delta x_{n-1}) =$$

$$= c(x_1 - a + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{k+1} - x_k + \dots + b - x_{n-1}) =$$

$$= c \cdot (b - a).$$

Undan

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} c \cdot (b - a) = c \cdot (b - a)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ta'rifga binoan

$$\int_a^b c \cdot dx = c \cdot (b - a)$$

bo'ladi.

10.3. Aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'lib, $F(x)$ esa uning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin ($F'(x) = f(x)$). Unda

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad (2)$$

bo'ladi. (2) formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi. Uning yordamida aniq integrallar hisoblanadi.

2-Misol. Ushbu.

$$\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx$$

integral hisoblansin.

Bu integralni aniq integral xossalari hamda Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib topamiz.

$$\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx = [x]_0^4 + 4 \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} d\left(\frac{x}{4}\right) = 4 + 4 \left[e^{\frac{x}{4}} \right]_0^4 = 4e.$$

Jumla. [2, 360-bet]. $f(x)$ funksiya $[-a, a]$ da uzluksiz bo'lsin.

1) Agar $f(x)$ juft ($f(-x) = f(x)$) bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

bo'ladi.

2) Agar $f(x)$ toq ($f(-x) = -f(x)$) bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

bo'ladi.

Misol. $f(x) = x^6 + 1$ funksiya uchun $f(-x) = f(x)$ shart bajariladi, demak $f(x)$ juft funksiya. U holda $\int_{-2}^2 (x^6 + 1)dx = 2 \int_0^2 (x^6 + 1)dx = 2 \left[\left(\frac{1}{7} x^7 + x \right) \Big|_0^2 \right] = \frac{284}{7}$.

MA'RUZA 13-14. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

Reja:

1. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi
2. Hodisalar ustida amallar
3. Ehtimollikning statistik ta'rifi.
4. Ehtimollikning klassik ta'rifi
5. Ehtimollikning geometrik ta'rifi

Tayanch atamalar: *stoxastik tajriba, tasodifiy hodisa, ehtimollik, ehtimollik fazosi.*

11.1. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri “**tasodifiy hodisa**” tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajriba o'tkazilayotgan bo'lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida **tasodifiy** deb ataladi.

Tasodifiy hodisa (yoki **hodisa**) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari $A, B, C, \dots$ lar bilan belgilanadi.

Tajribaning har qanday natijasi **elementar hodisa** deyiladi va ω orqali belgilanadi.

Tajribaning natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami **elementar hodisalar fazosi** deyiladi va Ω orqali belgilanadi.

1-misol. Tajriba nomerlangan kub (o'yin soqqasi) ni tashlashdan iborat bo'lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisalar $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ lardan iborat bo'ladi. ω_i hodisa tajriba natijasida i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ochko tushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi: $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga **muqarrar hodisa** deyiladi. Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo'la oladi.

Aksincha, umuman ro'y bermaydigan hodisaga **mumkin bo'lmagan hodisa** deyiladi va u $\emptyset$ orqali belgilanadi.

1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

$A = \{5 \text{ raqam tushishi}\};$

$B = \{\text{juft raqam tushishi}\};$

$C = \{7 \text{ raqam tushishi}\};$

$D = \{\text{butun raqam tushishi}\};$

Bu yerda A va B hodisalar tasodifiy, C hodisa mumkin bo'lmagan va D hodisa muqarrar hodisalar bo'ladi.

11.2. Hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

A va B **hodisalar yig'indisi** deb, A va B hodisalarning kamida bittasi (ya'ni yoki A , yoki B , yoki A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat $C = A \cup B$ ($C = A + B$) hodisaga aytiladi.

A va B **hodisalar ko‘paytmasi** deb, A va B hodisalar ikkilasi ham (ya’ni A va B birgalikda) ro‘y berishidan iborat $C = A \cap B$ ($C = A \cdot B$) hodisaga aytiladi.

A hodisadan B **hodisaning ayirmasi** deb, A hodisa ro‘y berib, B hodisa ro‘y bermasligidan iborat $C = A \setminus B$ ($C = A - B$) hodisaga aytiladi.

A hodisaga **qarama-qarshi** $\bar{A}$ hodisa faqat va faqat A hodisa ro‘y bermaganda ro‘y beradi (ya’ni $\bar{A}$ hodisa A hodisa ro‘y bermaganda ro‘y beradi). $\bar{A}$ ni A uchun **teskari hodisa** deb ham ataladi.

Agar A hodisa ro‘y berishidan B hodisaning ham ro‘y berishi kelib chiqsa A hodisa B hodisani **ergashtiradi** deyiladi va $A \subseteq B$ ko‘rinishida yoziladi.

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lsa, u holda A va B hodisalar **teng (teng kuchli)** hodisalar deyiladi va $A = B$ ko‘rinishida yoziladi.

2-misol. A, B va C-ixtiyoriy hodisalar bo‘lsin. Bu hodisalar orqali quyidagi hodisalarni ifodalang: $D = \{\text{uchchala hodisa ro‘y berdi}\}$; $E = \{\text{bu hodisalarning kamida bittasi ro‘y berdi}\}$; $F = \{\text{bu hodisalarning birortasi ham ro‘y bermadi}\}$; $G = \{\text{bu hodisalarning faqat bittasi ro‘y berdi}\}$.

Hodisalar ustidagi amallardan foydalanamiz: $D = A \cap B \cap C$ ($D = A \cdot B \cdot C$);

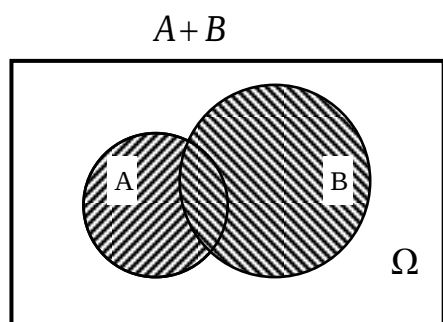
$E = A + B + C$; $F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$; $G = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$.

Demak, hodisalarni to‘plamlar kabi ham talqin etish mumkin ekan.

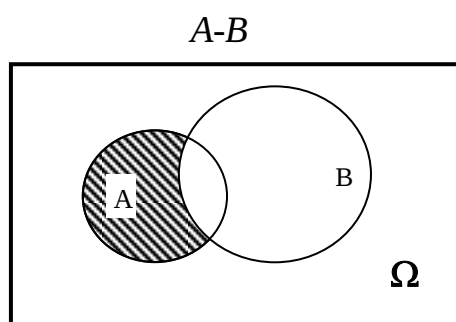
Belgilash	To‘plamlar nazariyasidagi talqini	Ehtimollar nazariyasidagi talqini
Ω	Fazo (asosiy to‘plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
$\omega, \omega \in \Omega$	ω fazo elementi	ω elementar hodisa
$A, A \subseteq \Omega$	A to‘plam	A hodisa
$A \cup B, A + B$	A va B to‘plamlarning yig‘indisi, birlashmasi	A va B hodisalar yig‘indisi (A va B ning kamida bittasi ro‘y berishidan iborat hodisa)
$A \cap B, A \cdot B$	A va B to‘plamlarning kesishmasi	A va B hodisalar ko‘paytmasi (A va B ning birgalikda ro‘y berishidan iborat hodisa)
$A \setminus B, A - B$	A to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisaning ayirmasi (A ning ro‘y berishi, B ning ro‘y bermasligidan iborat hodisa)
$\emptyset$	Bo‘sh to‘plam	Mumkin bo‘lmagan hodisa
$\bar{A}$	A to‘plamga to‘ldiruvchi	A hodisaga teskari hodisa (A ning ro‘y bermasligidan iborat)
$A \cap B = \emptyset$,	A va B to‘plamlar	A va B hodisalar birgalikda

$A \cdot B = \emptyset$	kesishmaydi	emas
$A \subseteq B$	A to'plam B ning qismi	A hodisa B ni ergashtiradi
$A = B$	A va B to'plamlar ustma-ust tushadi	A va B hodisalar teng kuchli

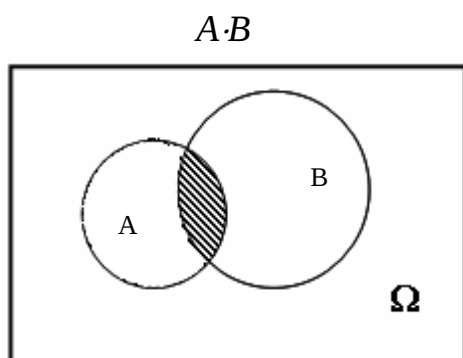
Hodisalar va ular ustidagi amallarni **Eyler-Venn** diagrammalari yordamida tushuntirish (tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.



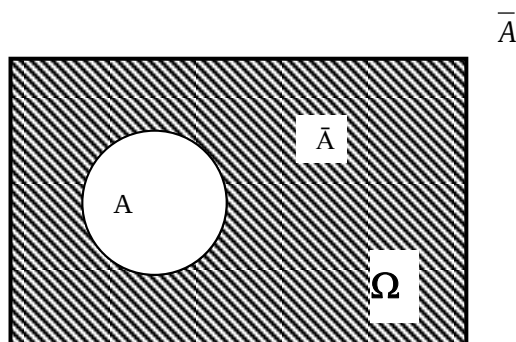
1-rasm.



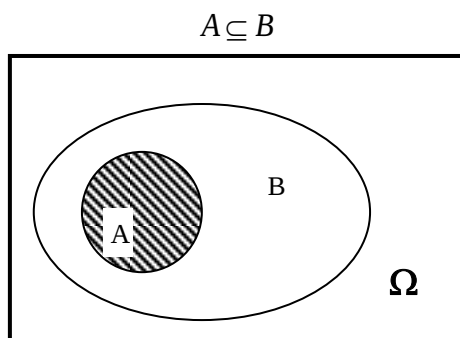
2-rasm.



3-rasm.



4-rasm.



5-rasm.

Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

1. $A+B = B+A$, $A \cdot B = B \cdot A$;

2. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
3. $(A+B)+C = A+(B+C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
4. $A+A=A$, $A \cdot A=A$;
5. $A+\Omega=\Omega$, $A \cdot \Omega=A$, $A+\emptyset=A$, $A \cdot \emptyset=\emptyset$;
6. $A+\bar{A}=\Omega$, $A \cdot \bar{A}=\emptyset$;
7. $\overline{\emptyset}=\Omega$, $\overline{\Omega}=\emptyset$, $\overline{\bar{A}}=A$;
8. $A-B=A \cdot \bar{B}$;
9. $\overline{A+B}=\bar{A} \cdot \bar{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.
10. $\overline{A \cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.

11.3. Ehtimollikning statistik ta'rifi

A hodisa n ta bog'liqsiz tajribalarda n_A marta ro'y bersin. n_A son A hodisaning chastotasi, $\frac{n_A}{n}$ munosabat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Nisbiy chastotaning statistik turg'unlik xossasi deb ataluvchi xossasi mavjud, ya'ni tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastotasi ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi va biror son atrofida tebranib turadi.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Tanga $A=\{\text{Gerb}\}$ tomoni bilan tushishi hodisasini qaraylik. Byuffon va K.Pirsonlar tomonidan o'tkazilgan tajribalar natijasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Tajriba o'tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, n_A	Nisbiy chastota, n_A/n
Byuffon	4040	2048	0.5080
K.Pirson	12000	6019	0.5016
K.Pirson	24000	12012	0.5005

Jadvaldan ko'rinadiki, n ortgani sari n_A/n nisbiy chastota $\frac{1}{2}=0.5$ ga yaqinlashar ekan.

Agar tajribalar soni etarlicha ko'p bo'lsa, va shu tajribalarda biror A hodisaning nisbiy chastotasi biror o'zgarmas son atrofida tebransa, bu songa A hodisaning **statistik ehtimolligi** deyiladi.

A hodisaning ehtimolligi $P(A)$ simvol bilan belgilanadi.

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} = P(A) \text{ yoki yetarlicha katta } n \text{ lar uchun } \frac{n_A}{n} \approx P(A).$$

Statistik ehtimollikning kamchiligi shundan iboratki, bu yerda statistik ehtimollik yagona emas. Masalan, tanga tashlash tajribasida ehtimollik sifatida nafaqat 0.5, balki 0.49 yoki 0.51 ni ham olishimiz mumkin. Ehtimollikni aniq hisoblash uchun katta

sondagi tajribalar o'tkazishni talab qiladi, bu esa amaliyotda ko'p vaqt va xarajatlarni talab qiladi.

Statistik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(\Omega) = 1$;
4. $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $P(A+B) = P(A) + P(B)$;

Isboti. 1) Ihtiyoriy A hodisaning chastotasi uchun $0 \leq n_A \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$.

Etarlicha katta n lar uchun $\frac{n_A}{n} \approx P(A)$ bo'lgani uchun $0 \leq P(A) \leq 1$ bo'ladi.

2) Mumkin bo'lmagan hodisa uchun $n_A=0$.

3) Muqarrar hodisaning chastotasi $n_A=n$.

4) Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $n_{A+B} = n_A + n_B$ va

$$P(A+B) \approx \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} \approx P(A) + P(B).$$

11.4. Ehtimollikning klassik ta'rifi

Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin.

A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} \quad (1)$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz.

Kombinatorikada **qo'shish** va **ko'paytirish** qoidasi deb ataluvchi ikki muhim **qoida (prinsiplari)** mavjud.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar A to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A \cdot B = \emptyset$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A+B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi: A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ ning elementlari soni $n \cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: **qaytarilmaydigan** va **qaytariladigan tanlashlar**. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

Guruhlashlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan guruhlashlar soni

quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2)$$

C_n^m sonlar Nyuton binomi formulasining koeffisientlaridir:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \dots + q^n.$$

O‘rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (3)$$

O‘rin almashtirishlar soni: n ta elementdan n tadan o‘rinlashtirish o‘rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = n!. \quad (4)$$

O‘rin almashtirish o‘rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar (3) da $n=m$ bo‘lsa,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n! \text{ bo‘ladi.}$$

II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi.

Qaytariladigan guruhlashlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \quad (5)$$

Qaytariladigan o‘rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan qaytariladigan o‘rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \quad (6)$$

Qaytariladigan o‘rin almashtirishlar soni: k hil n ta elementdan iborat to‘plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta, ..., k -element n_k marta qaytarilsin va $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo‘lsin, u holda n ta elementdan iborat o‘rin almashtirish $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (7)$$

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz.

1-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to‘g‘ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. $A = \{\text{telefon nomeri to‘g‘ri terilgan}\}$ hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo‘ladi (chunki kerakli telefon nomeri bitta bo‘ladi). Shuning uchun klassik ta’rifga ko‘ra

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011.$$

2-misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. $B = \{10 \text{ lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi}\}$ hodisasi bo'lsa, $N(B) = C_1^1 \cdot C_{99}^9$ va

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

3-misol. Pochta bo'limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo'lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C_6^4}$ usul bilan tanlash mumkin. a) $A = \{4 \text{ ta bir xildagi otkritka sotilgan}\}$ hodisasi bo'lsin. A hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya'ni $N(A) = 6$. Klassik ta'rifga ko'ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{C_6^4} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$

bo'ladi. b) $B = \{4 \text{ ta har xil otkritka sotilgan}\}$ hodisasi bo'lsin, u holda $N(B) = C_6^4$ ga teng

$$\text{va } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_6^4} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}.$$

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $0 \leq P(A) \leq 1$;
4. Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
5. $\forall A, B \in \Omega$ uchun $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isboti. 1) $N(\emptyset) = 0$ bo'lgani uchun klassik ta'rifga ko'ra $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$. **2)**

Klassik ta'rifga ko'ra $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$. **3)** Ihtiyoriy A hodisa uchun

$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ ekanligidan $0 \leq P(A) \leq 1$ bo'ladi. **4)** Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $N(A + B) = N(A) + N(B)$ va

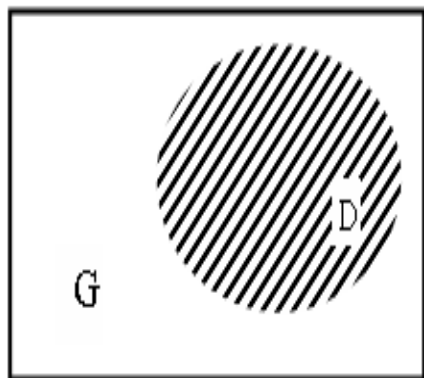
$$P(A + B) = \frac{N(A + B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

5) $A + B$ va B hodisalarni birgalikda bo'lmagan ikki hodisalar yig'indisi shaklida yozib olamiz: $A + B = A + B \cdot \bar{A}$, $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \bar{A}) = A \cdot B + B \cdot \bar{A}$, u holda **4-xossaga ko'ra** $P(A + B) = P(A) + P(B \cdot \bar{A})$ va $P(B) = P(A \cdot B) + P(B \cdot \bar{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ kelib chiqadi.

11.5. Ehtimollikning geometrik ta'rifi

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra, Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo'lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.

O'lchovli biror G soha berilgan bo'lib, u D sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini



ko'ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa

1-rasm.

bo'ladi. $A = \{X \in D\}$ -

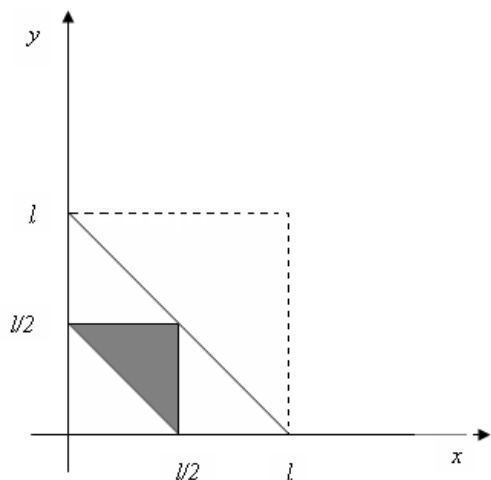
X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

A hodisaning **geometrik ehtimolligi** deb, D soha o'lchovini G soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A) = \frac{\text{mes}\{D\}}{\text{mes}\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

1-misol. l uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo'laklarga bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimolligini toping.



Birinchi bo'lak uzunligini x , ikkinchi bo'lak uzunligini y bilan belgilasak, uchinchi bo'lak uzunligi $l-x-y$ bo'ladi. Bu yerda $\Omega = \{(x, y) : 0 < x + y < l\}$, ya'ni $0 < x + y < l$ sterjenning bo'laklari uzunliklarining barcha bo'lishi mumkin bo'lgan kombinatsiyasidir.

2-rasm

Bu bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:
 $x + y > l - x - y$, $x + l - x - y > y$, $y + l - x - y > x$.

Bulardan $x < \frac{l}{2}$, $y < \frac{l}{2}$, $x + y > \frac{l}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu tengsizliklar 2-rasmdagi bo'yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta'rifiga ko'ra:

$$P(A) = \frac{\text{mes}\{A\}}{\text{mes}\{G\}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{1}{2} \cdot l \cdot l} = \frac{1}{4}.$$

2-misol. (Uchrashuv haqida). Ikki do'st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do'sti kelmasa u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9

bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo'lsa, bu ikki do'stning uchrashishi ehtimolini toping.

Birinchi kishi kelgan momenti x , ikkinchisikini y bo'lsin: $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 60$ U

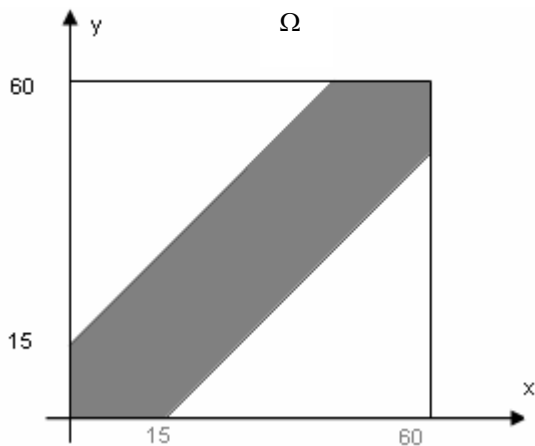
holda ularning uchrashishlari uchun $|x - y| \leq 15$ tengsizlik bajarilishi kerak. Demak,

$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$,

$A = \{(x, y) : |x - y| \leq 15\}$. x va y larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz (3-rasm).

3-rasm

U holda



$$P(A) = \frac{\text{mes}\{A\}}{\text{mes}\{G\}} = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

MA'RUZA 15-16. VARIATION QATOR VA EMPIRIK TAQSIMOT FUNKSIYA

Reja:

1. Bosh va tanlanma to'plam
2. Variation qator. Chastotali va nisbiy chastotali variation qatorlar
3. Statistik tanlanmalarni grafikda tasvirlash
4. Empirik taqsimot funksiya va uning grafigi

Tayanch iboralar: *bosh to'plam, tanlanma, variation qator, chastota, nisbiy chastota, polygon, gistogramma, empirik taqsimot funksiya.*

12.1. Bosh va tanlanma to'plam

Aytaylik, ishlab chiqarilgan mahsulotlarning katta to'piga tegishli biron-bir hususiyat (masalan, mahsulotning o'lchami, og'irligi, narxi va hokazo) o'rganilayotgan bo'lsin. To'piga tegishli barcha mahsulotlar *bosh to'plamni* tashkil qiladi deyiladi. Ko'p hollarda, bosh to'plamga mahsulotlar juda ko'p miqdorda bo'lib, ularning barchasini uzluksiz o'lchash amaliyotda mumkin bo'lmaydi. Ba'zi hollarda bu umuman mumkin bo'lmasa, ayrim hollarda juda katta harajatlarni talab qiladi. Bunday hollarda bosh to'plamdan tasodifiy ravishda chekli sondagi mahsulot ajratib olinadi va ularning hususiyatlari o'rganiladi. Bu jarayon tanlanmalarga olib keladi. Demak, *tanlanma* bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlar. Tanlanmalar usuli deganda biz bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlarga xos bo'lgan qaralayotgan hususiyatlarni statistik tahlil qilib, shular asosida bosh to'plam elementlariga xos bo'lgan hususiyatlar haqida umumiy hulosalar chiqarishni tushunamiz.

Matematik statistikada har qanday mulohaza va hulosalar statistik ma'lumotlarga yoki boshqacha qilib aytganda tajriba natijalariga tayanadi. Odatda tajriba natijalari taqsimoti $F(x)$ bo'lgan X t.m.ning $X_1, X_2, \dots, X_n$ kuzatilmalaridan iborat bo'ladi. Demak, kuzatilmalar bog'liqsiz va X t.m. bilan bir xil taqsimlangan t.m.lar ekan.

Kuzatilmalardan tuzilgan $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektor hajmi n ga teng bo'lgan *tanlanma* deyiladi.

Endi X bilan X t.m. qabul qiladigan qiymatlar to'plami bo'lsin. X to'plam bosh to'plamdan iborat bo'ladi. X to'plam chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Mavzu boshida qaralgan misoldagi barcha mahsulotlarning hususiyatlaridan iborat to'plam-bosh to'plam va shu hususiyatlarning sonli ifodasi esa X t.m. qiymatlaridan iborat bo'ladi. Bosh to'plam X dan qiymatlar qabul qiluvchi X t.m.ning taqsimot funksiyasini va sonli xarakteristikalarini (masalan, matematik kutilma, dispersiya, yuqori tartibli momentlar va hokazo) mos ravishda nazariy taqsimot va nazariy sonli xarakteristikalar deyiladi. Kuzatilmalar asosida aniqlangan taqsimot funksiya va unga mos sonli xarakteristikalar empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi va sonli xarakteristikalar deyiladi.

Statistik izlanish asosida kuzatilmalar, ya'ni statistik tajriba natijalari – sonli

ma'lumotlar yotadi. Faraz qilaylik, biror tasodifiy tajribani kuzatish natijasida $x_1, \dots, x_n$ sonlar olingan bo'lib, ularni bog'liq bo'lmagan va bir xil taqsimlangan $X_1, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning qiymatlari deb qaraylik. U holda $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$ vektor $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ tasodifiy vektorning qiymati bo'ladi. Matematik statistikada $X_1, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar n hajmga ega bo'lgan takroriy tanlanma yoki shunchaki tanlanma deb ataladi.

12.2. Variatsion qator. Chastotali va nisbiy chastotali variatsion qatorlar

Bizga $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ tanlanma berilgan bo'lib, uning elementlarini tartiblab $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ qator tuzamiz. Hosil bo'lgan qatorga variatsiyon qator detiladi. Bu qatorda elementlardan birnechtasi bir hil bo'lishi mumkin. Ularni quyidagi ko'rinishda yozib chiqsak

$$\begin{cases} X_{(i)}^* : X_{(1)}^*, X_{(2)}^*, \dots, X_{(k)}^* \\ n_i : n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_k, \end{cases}$$

hosil bo'lgan qatorga chastotali variatsion qator deyiladi, bu yerda n_i larga chastotalar (takrorlanishlar soni) deyiladi. Chastotali variatsion qatorda chastotalar n_i larni tanlanma hajmi n ga bo'lib, nisbiy chastotali variatsion qator tuzamiz.

$$\begin{cases} X_{(i)} : X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)} \\ \omega_i : \omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_k, \end{cases}$$

bu yerda $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ nisbiy chastota.

12.3. Statistik tanlanmalarni grafikda tasvirlash

Tajribalar soni katta bo'lsa, tajriba natijalari statistik qatori ham katta bo'ladi. Shuning uchun, ko'p hollarda intervallik statistik qatordan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Faraz qilaylik, biron-bir usul bilan tajriba natijalari intervallarga ajratilgan bo'lsin. Har bir intervaldagi kuzatilmalarning chastotasini hisoblaymiz. Olingan ma'lumotlar asosida jadval tuzamiz. Hosil bo'lgan jadval tanlanma majmua deyiladi.

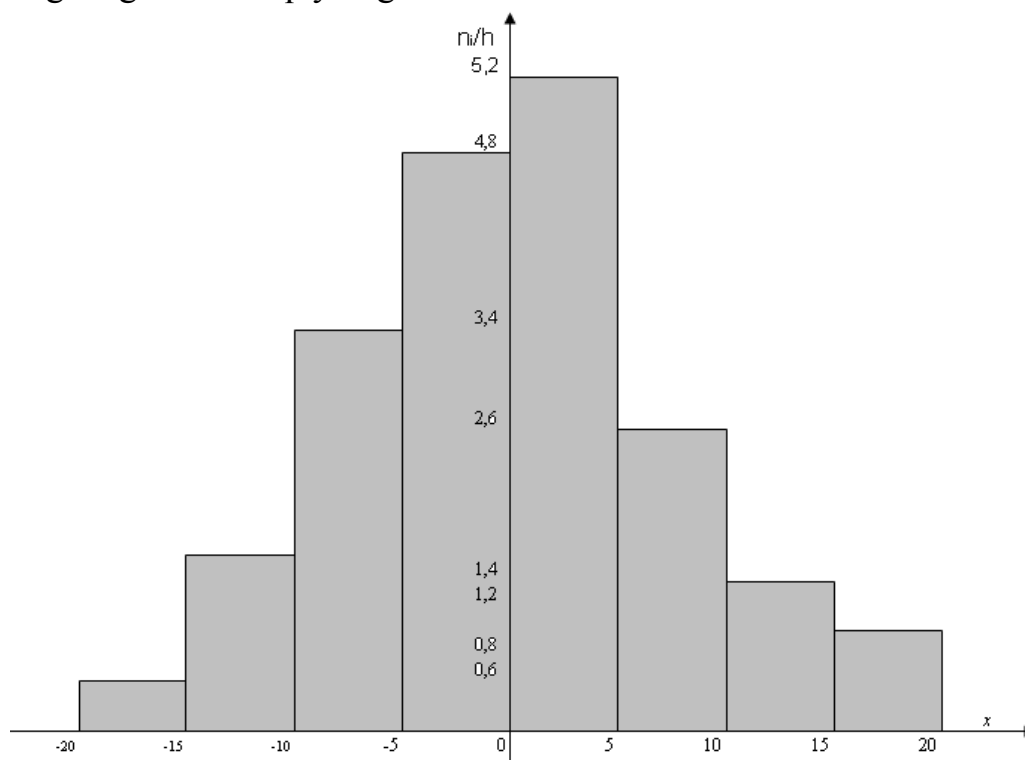
1-misol. Ma'lum masofa 100 marta o'lchanganda yo'l qo'yilgan xatolar quyidagilardan iborat:

Guruhlar	[-20;-15)	[-15;-10)	[-10;-5)	[-5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20]
Guruhlardagi	2	8	17	24	26	13	6	4

xatolar soni								
Chastotalar	0.02	0.08	0.17	0.24	0.26	0.13	0.06	0.04

Statistik majmuaning grafik tasviri *gistogramma* deyiladi. Uni qurish uchun t.m.ning qiymatlar sohasini uzunligi h ga teng bo'lgan k ta oraliqlarga bo'linadi va kuzatilmalarning har bir oraliqqa tushgan sonlari aniqlanadi. Masalan, n_i - soni i -oraliqqa tushgan kuzatilmalar soni bo'lsin, u holda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari oraliq uzunligi h ga teng bo'lgan va balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan shaklga aytiladi. Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



1-rasm.

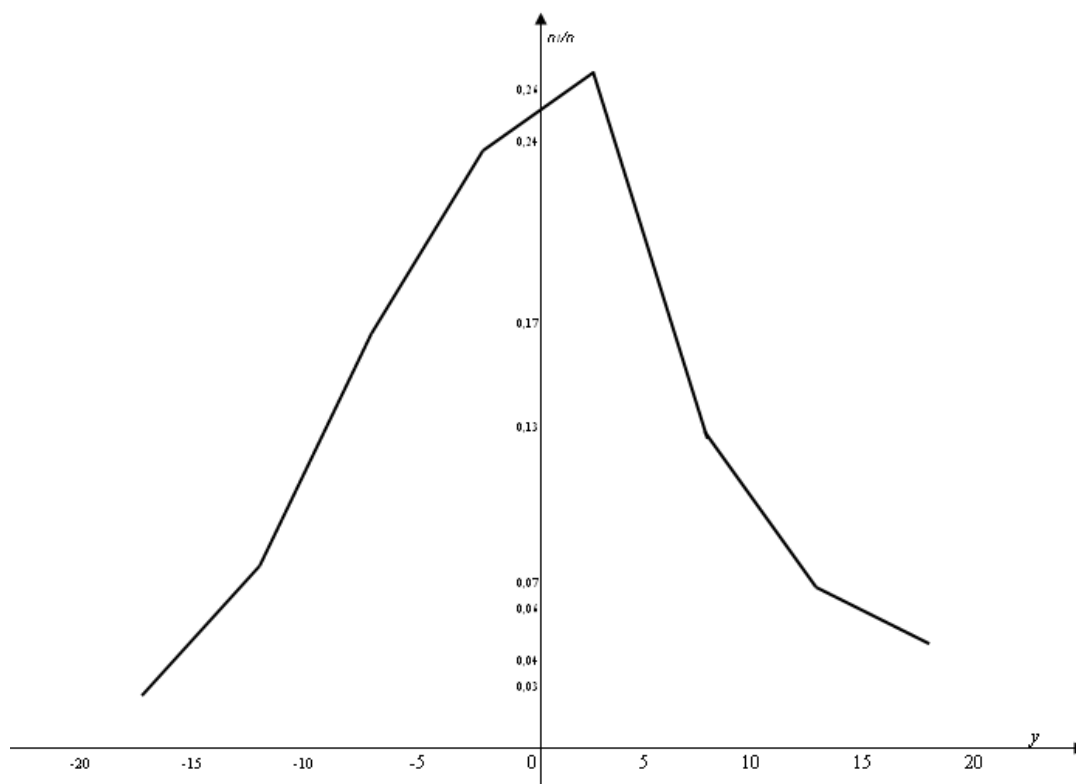
Hosil bo'lgan fuguraning yuzasi n ga teng, chunki $\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h bo'lgan, balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo'lgan to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali figuraga aytiladi. Bu holda hosil bo'lgan figura yuzasi 1 ga teng.

Misol. Masofa 100 marta o'lchanganda hosil bo'lgan xatolarning nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang. Buning uchun 1-jadvaldan foydalanamiz.

1-rasmdan ko'rinib turibdiki, nisbiy chastotalar gistogrammasi xatolar taqsimotining zichlik funksiyasiga yaqin bo'ladi. Bu yaqinlik yanada aniqroq bo'lishi talab qilinsa, nisbiy chastotalar poligonidan foydalangan ma'qul.

Tekislikda $\left(y_2, \frac{n_1}{n}\right), \left(y_2, \frac{n_2}{n}\right), \dots, \left(y_k, \frac{n_k}{n}\right)$ nuqtalarni siniq chiziqlar bilan birlashtirishdan hosil bo'lgan figura *nisbiy chastotalar poligoni* deyiladi.



2-rasm.

12.4. Empirik taqsimot funksiya va uning grafigi

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan X t.m. kuzatilayotgan bo'lsin. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – vektor esa unga mos hajmi n ga teng bo'lgan tanlanma bo'lsin. Shu vektorning biron-bir aniq qiymati:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

X t.m.ning amalga oshgan qiymati deyiladi.

Birinchisi satri tajriba nomerlari, ikkinchisi esa X ning mos amaldagi qiymatlaridan iborat bo'lgan quyidagi jadvalga

1	2	3	...	n
x_1	x_2	x_3	...	x_n

statistik qator deb ataladi. Statistik qator turli maqsadlarda va turli usullar bilan tahlil qilinishi mumkin. Mana shunday tahlilning maqsadi X t.m.ning empirik(yoki statistik)

taqsimot funksiyasini tuzishdan iborat bo'lishi mumkin.

(1) qatorni kamaymasligi bo'yicha tartiblaymiz:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad (2)$$

hosil bo'lgan (2) qator *variatsion qator* deyiladi.

Ixtiyoriy statistik qator (1) yordamida empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi aniqlanishi mumkin.

Quyidagicha

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) \quad (3)$$

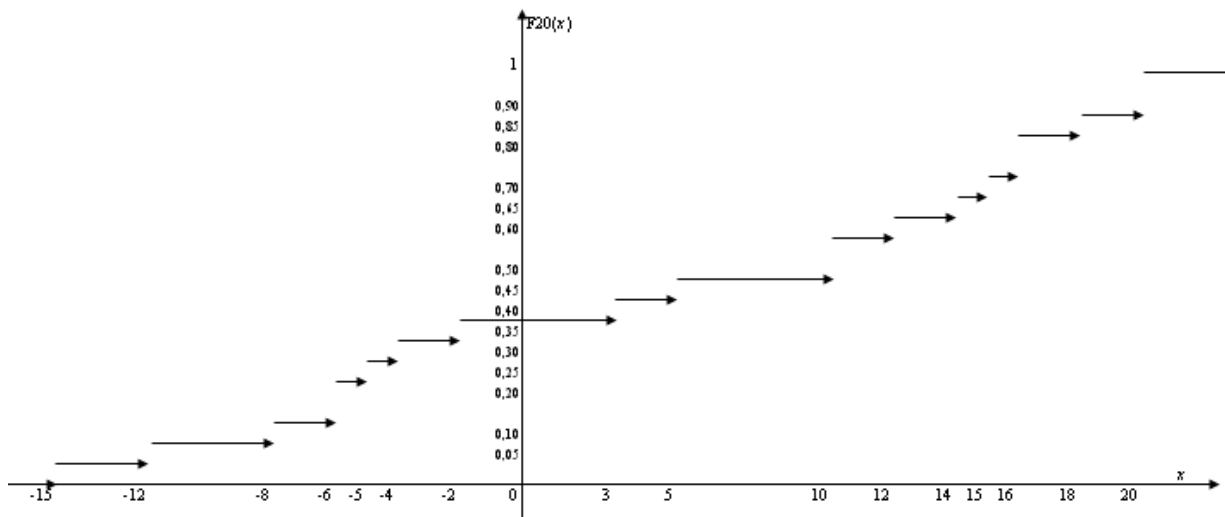
aniqlangan funksiya *empirik*(yoki tanlanma) *taqsimot funksiyasi* deyiladi. Bu yerda $I(A)$ orqali A hodisa indikator belgilangan. Statistik qator (1) t.m.lardan iborat bo'lgani uchun, empirik taqsimot funksiya ham har bir tayinlangan x da t.m. bo'ladi.

1-misol. Uzoqlikni o'lchovchi asbob bilan ma'lum masofa o'lchanganda tasodifiy xatolikka yo'l qo'yildi. Tajriba 20 marta takrorlanganda yo'l qo'yilgan xatoliklar statistik taqsimot funksiyasini tuzing. Statistik qator quyidagicha bo'lsin:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5	-8	10	15	3	-6	-15	20	12	15

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-4	-2	20	14	-8	-12	16	10	-5	18

Eng kichik kuzatilma -15. Demak, $\hat{F}_{20}(-15) = 0$. -15 bir marta kuzatildi, demak, uning chastotasi $\frac{1}{20}$. Shuning uchiun, -15 nuqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo'lgan sakrashga ega, -15 nuqtadan -12 nuqttagacha bo'lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng. -12 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo'lgan sakrashga ega, -12 nuqtadan -8 nuqttagacha bo'lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng. -8 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng bo'lgan sakrashga ega, chunki -8 qiymat ikki marta uchraydi va hokazo. Empirik taqsimot funksiya grafigini chizamiz.



3-rasm.

Har qanday t.m.ning empirik taqsimot funksiyasi kuzatilgan nuqtalarda shu kuzatilmaning chastotasiga teng va sakrashga ega bo'lgan pog'onali, uzlukli funksiyadan iborat bo'ladi.

Bernulli teoremasiga asosan tajribalar soni n cheksiz o'sganda $\{X < x\}$ hodisaning chastotasi shu hodisaning ehtimolligiga intiladi. Bu esa empirik taqsimot funksiyaning n cheksizlikka intilganda haqiqiy taqsimot funksiya $F(x) = P\{X < x\}$ ga istalgancha yaqin bo'lishini anglatadi.

MA'RUZA 17-18. STATISTIK KO'RSATKICHLAR

Reja:

1. O'rtacha qiymat va uning xossalari
2. Dispersiya, o'rta kvadratik tarqoqlik va uni hisoblash formulalari
3. Variatsiya koeffitsienti. Mediana, moda
4. Asimmetriya va ekstsess koeffitsientlari

Tayanch iboralar: *O'rtacha qiymat, Dispersiya, o'rta kvadratik tarqoqlik, Variatsiya koeffitsienti. Mediana, moda. Asimmetriya va ekstsessa*

13.1. Tanlanma o'rtacha qiymati

Bizga $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ tanlanma berilgan bo'lib, uning elementlarini $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ tartiblab variatsion qator tuzamiz.

Tanlanma o'rtacha qiymati [1, 568-bet]

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

formula orqali hisoblanadi. Agar chastotali variatsion qator

$$\begin{cases} X_{(i)} : X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)} \\ n_i : n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_k \end{cases}$$

bo'lsa, u holda tanlanma o'rtacha qiymati

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k X_{(i)} n_i$$

bo'ladi. Nisbiy chastotali variatsion qator

$$\begin{cases} X_{(i)} : X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)} \\ \omega_i : \omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_k \end{cases}$$

bo'lsa, u holda tanlanma o'rtacha qiymati

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k X_{(i)} \omega_i$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu erda $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ - nisbiy chastota.

13.2. Dispersiya, o'rta kvadratik tarqoqlik va uni hisoblash formulalari

Tanlanma to'plam belgisi qiymatlarini uning o'rtacha qiymati atrofida sochilishini xarakterlash maqsadida yig'ma xarakteristika – tanlanma dispersiyasi kiritiladi.

Tanlanma dispersiyasi D deb belgining kuzatiladigan qiymatlarini ularning $\bar{x}$

o'rtacha qiymatidan chetlanishi kvadratlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi.

$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ tanlanma dispersiyasi **[1, 580-bet]**

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

formula orqali hisoblanadi. Agar chastotali variatsion qator

$$\begin{cases} X_{(i)} : X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)} \\ n_i : n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_k \end{cases}$$

bo'lsa, u holda tanlanma dispersiyasi

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (X_{(i)} - \bar{x})^2 n_i$$

ga teng bo'ladi. Agar nisbiy chastotali variatsion qator

$$\begin{cases} X_{(i)} : X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)} \\ \omega_i : \omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_k \end{cases}$$

bo'lsa, u holda tanlanma dispersiyasi

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (X_{(i)} - \bar{x})^2 \omega_i$$

ko'rinishda bo'ladi. Tanlanma dispersiyasini hisoblashda quyidagi formuladan ham foydalanishimiz mumkin

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2,$$

$$\text{bu erda } \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k X_{(i)}^2 n_i = \sum_{i=1}^k X_{(i)}^2 \omega_i.$$

Tanlanma to'plam belgisi qiymatlarini uning o'rtacha qiymati atrofida sochilishini xarakterlash uchun dispersiyadan tashqari yig'ma xarakteristika – o'rtacha kvadratik tarqoqlikdan foydalaniladi.

Tanlanma o'rtacha kvadratik tarqoqligi deb tanlanma dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga aytiladi **[1, 508-bet]** :

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

13.3. Variatsiya koeffitsienti. Mediana, moda

σ_T ning bir o'zi o'rganilayotgan miqdorning o'zgaruvchanligini to'liq xarakterlab bera olmaydi. SHu sababli nisbiy o'rtacha farq tushunchasi kiritiladi. Variatsiya koeffitsientini hisoblash formulasi

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

1. Agar $0 < V < 33$ (%) bo'lsa, u holda tanlanma to'liq va asosli bo'ladi;

2. Agar $33 < V < 100$ (% da) bo'lsa, u holda tanlanma bir jinsli emas;

3. Agar $V > 100$ (% da) bo'lsa, u holda tanlanma ma'lumotlari etarli emas, tajriba qayta o'tkaziladi.

13.4. Asimmetriya va ekstsess koeffitsientlari

Variatsion qator elementlarining soni toq bo'lsa, variatsion qatorning o'rtasida joylashgan had mediana deyiladi va Me kabi belgilanadi. Mediana variatsion qatorni hadlar soni jihatdan ikkita teng qismga bo'ladi. Agar variantalar soni juft bo'lsa, u holda mediana variatsion qator o'rtasidagi ikkita variantalar yig'indisini yarmiga teng bo'ladi. Agar tanlanma variatsion qatori $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ bo'lsa, u holda mediana uchun quyidagi umumiy formulani yozish mumkin:

$$Me = \begin{cases} X_{(k)}, & \text{agar } n = 2k + 1, \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & \text{agar } n = 2k. \end{cases}$$

Agar to'plamning hajmi katta bo'lsa, dastlab uni guruhlariga ajratiladi, so'ng yig'ilgan takrorlanishlar qatori tuziladi va mediana quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$Me = x_0 + h \frac{s_1 - s_2}{f},$$

bu erda x_0 - kuzatishlar natijalarining yarmi joylashgan gruppning quyi chegarasi, h - oraliqning qiymati, s_1 - qator umumiy sonining yarmi, s_2 - mediana joylashgan gruppadan oldingi grup yig'ilgan takrorlanishi, f - mediana joylashgan gruppning takrorlanishi.

Berilgan variatsion qatorda o'rganilayotgan belgining eng ko'p takrorlanadigan qiymati **moda** deyiladi va **Mo** kabi belgilagadi. Masalan, 10 ta bolaning bo'ylari o'lchanganda quyidagi natijalar olingan bo'lsin (sm hisobida):

120, 125, 127, 125, 130, 125, 122, 120, 125, 121.

Bu qatorda eng ko'p takrorlangani 125. Demek, $Mo = 125$.

Agar tanlanma guruhlariga ajratilgan bo'lsa, u holda moda quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$Mo = x_m + h \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})},$$

bu erda x_m - modal gruppning quyi chegarasi, h - oraliqning qiymati, n_m, n_{m-1}, n_{m+1} - mos ravishda modal grupp, unga chap va o'ngdan qo'shni gruppalarining takrorlanishlari.

Asimmetriya koeffitsientini hisoblash

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

bu erda $\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x}_T)^3$. CHastotali va nisbiy chastotali variatsion qatorlar berilgan bo'lsa, u holda

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (X_{(i)} - \bar{x})^3 n_i = \sum_{i=1}^k (X_{(i)} - \bar{x})^3 \omega_i.$$

μ_3 ni hisoblash uchun quyidagi formuladan ham foydalanish mumkin:

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,$$

bu erda $\alpha_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k X_{(i)}^m n_i = \sum_{i=1}^k X_{(i)}^m \omega_i$.

Ekstess koeffitsientini hisoblash

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

bu erda $\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{x})^4$. CHastotali va nisbiy chastotali variatsion qatorlar berilgan bo'lsa, u holda

$$\mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (X_{(i)} - \bar{x})^4 n_i = \sum_{i=1}^k (X_{(i)} - \bar{x})^4 \omega_i.$$

μ_4 ni hisoblash uchun quyidagi formuladan ham foydalanish mumkin:

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 - 6\alpha_2\alpha_1^2 - \alpha_1^4,$$

bu erda $\alpha_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k X_{(i)}^m n_i = \sum_{i=1}^k X_{(i)}^m \omega_i$.

Tanlanmani statistik tahlil qilish

Quyidagi tanlanma berilgan bo'lsin.

2,907	1,152	1,506	1,818	2,636	2,065	2,229	2,455	1,249	1,962
2,914	1,214	1,522	1,829	2,67	2,069	2,243	2,461	1,263	1,972
2,92	1,006	1,56	1,854	2,682	2,08	2,258	2,486	1,275	1,984
2,923	1,023	1,566	1,862	2,705	2,083	2,267	2,504	1,315	1,997
2,952	1,04	1,624	1,864	2,753	2,096	2,289	2,511	1,349	2,001
2,969	1,047	1,653	1,866	2,759	2,127	2,331	2,523	1,363	2,012
2,976	1,049	1,694	1,873	2,765	2,128	2,337	2,524	1,383	2,015
2,978	1,053	1,731	1,879	2,787	2,154	2,357	2,535	1,398	2,019
2,993	1,466	1,756	1,919	2,866	2,16	2,376	2,544	1,415	2,046
2,993	1,496	1,803	1,931	2,9	2,209	2,43	2,589	1,463	2,047

1) Tartiblash

1,006	1,275	1,506	1,818	1,962	2,065	2,229	2,455	2,636	2,907
1,023	1,315	1,522	1,829	1,972	2,069	2,243	2,461	2,67	2,914
1,04	1,349	1,56	1,854	1,984	2,08	2,258	2,486	2,682	2,92
1,047	1,363	1,566	1,862	1,997	2,083	2,267	2,504	2,705	2,923
1,049	1,383	1,624	1,864	2,001	2,096	2,289	2,511	2,753	2,952
1,053	1,398	1,653	1,866	2,012	2,127	2,331	2,523	2,759	2,969
1,152	1,415	1,694	1,873	2,015	2,128	2,337	2,524	2,765	2,976
1,214	1,463	1,731	1,879	2,019	2,154	2,357	2,535	2,787	2,978
1,249	1,466	1,756	1,919	2,046	2,16	2,376	2,544	2,866	2,993
1,263	1,496	1,803	1,931	2,047	2,209	2,43	2,589	2,9	2,993

2) Tanlanmaning hajmi

$$N=100$$

3) Eng kichik va eng katta qiymat topiladi

$$X_{\min}=1,006$$

$$X_{\max}=2,993$$

4) Tanlanmaning kengligi hisoblanadi

$$R= X_{\max}- X_{\min}$$

$$R=2,993-1,006=1,987$$

5) Intervallar soni

$$k = \sqrt{N}$$

$$k = \sqrt{100} = 10$$

6) Intervallarning uzunligi

$$h = R / k$$

$$h = 1,987 / 10 = 0,1987$$

7) Intervallaning chegaralarni hisoblash

$$a_0 = X_{\min} - h / 2$$

$$a_1 = a_0 + h$$

...

$$a_{i+1} = a_i + h$$

Demak,

$$a_0 = 0,90665$$

$$a_1 = 1,10535$$

$$a_2 = 1,30405$$

$$a_3 = 1,50275$$

$$a_4 = 1,70145$$

$$a_5 = 1,90015$$

$$a_6 = 2,09885$$

$$a_7 = 2,29755$$

$$a_8 = 2,49625$$

$$a_9 = 2,69495$$

$$a_{10} = 2,89365$$

$$a_{11} = 3,09235$$

8) Intervallarning o'rtalarini hisoblash

$$X_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$$

$$X_1 = \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{0,90665 + 1,10535}{2} = 1,006$$

9) Interval variatsion qatorni tuzamiz

Ai	ai+1	Ni	Xi	SumNi	Wi	SumWi
0,90665	1,10535	6	1,006	6	0,06	0,06
1,10535	1,30405	5	1,2047	11	0,05	0,11
1,30405	1,50275	9	1,4034	20	0,09	0,2
1,50275	1,70145	7	1,6021	27	0,07	0,27
1,70145	1,90015	11	1,8008	38	0,11	0,38
1,90015	2,09885	17	1,9995	55	0,17	0,55
2,09885	2,29755	10	2,1982	65	0,1	0,65
2,29755	2,49625	8	2,3969	73	0,08	0,73
2,49625	2,69495	10	2,5956	83	0,1	0,83
2,69495	2,89365	6	2,7943	89	0,06	0,89
2,89365	3,09235	11	2,993	100	0,11	1

Bu erda

Ni – intervalning chastotasi

SumNi – yig'ilgan chastota

Wi – nisbiy chastota

SumWi – yig'ilgan nisbiy chastota