

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS

TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika –matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

ISMOILOV RO'ZOMUROD MUXTOR O'G'LI

**“INTEGRAL TENGLAMA VA TENGSIZLIKLARNING UMUMIY
KILASIFIKATSIYASI” mavzusida**

5130100-“Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr

darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko'rildi va himoya qilishga
ruxsat berildi”

Ilmiy rahbar _____ o'qit.H.H.Turdiyev

“ _____ ” _____ 2018 y.

Kafedra mudiri

Taqrizchi _____ o'qit.O.ShQilichev

_____ dots.N.H.Mamatova

“ _____ ” _____ 2018 y.

« _____ » _____ 2018 y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani _____ Sh.M.Mirzayev

“ _____ ” _____ 2018 y.

Buxoro-2018

MUNDAREJA

KIRISH.....	3
I. TENGSIZLIKLAR VA INTEGRAL TENGLAMALAR HAQIDA ASOSIY MA'LUMOTLAR	
1.1 Tengsizliklar va ularning klasifikatsiyasi.....	9
1.2 Sodda tengsizligining muhim hollari.....	31
1.3 Integral tenglamalarning umumiy tasnifi	42
Xulosa	57
II. INTEGRAL TENGSIZLIK VA UNING KLASIFIKATSIYASI	
2.1 Integral tengsizlikning tasnifi	59
2.2 Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun maxsus integral tengsizliklar.....	65
2.3 Tengsizlik va integral tengsizliklarga oid misollar.....	81
Xulosa.....	91
Xotima.....	92
Foydalangan adabiyotlar.....	93

KIRISH

Ta'lim va ma'rifat tizimini takomillashtirish, mamlakatimiz kelajagi bo'lgan yoshlarni zamonaviy bilim olishga yo'naltirish, barkamol shaxsini tarbiyalash bilan bog'liq ekanini biz yaxshi anglaymiz.

Sh.M.Mirziyoyev.

O'zbekiston jahonning taraqqiy etgan mamlakatlari qatoridan o'rin egallash va uni mustahkam saqlab turish uchun O'zbekistonda fundamental fanlar jahon andozalari darajasida bo'lishi kerak. Shu o'rinda O'zbekiston Respublikasi Birinchi Prezidenti I.A.Karimovning "O'zbekiston innovatsion rivojlanish turining hozirgi zamon modeliga o'tish uchun zarur sharoitlarga ega. Bu model vujudga keltirilgan ilmiy-texnikaviy salohiyatdan keng va samarali foydalanishga, fundamental va amaliy fanning yutuqlarini, chuqur ilm talab qiladigan amaliyotga keng qamrovda joriy etishga, yuqori malakali, iqtidorli kadrlar sonini ko'paytirishga asoslanadi. Bu mamlakatimiz jahondagi iqtisodiyoti va sanoati rivojlangan davlatlar qatoriga kirib borishining zarur sharti va mustahkam poydevori bo'lib xizmat qiladi" degan fikrlarini keltirib o'tish o'rinli. Respublikamizda "Talim to'g'risida"gi qonun va Kadrlar tayyorlash Milliy Dasturini qabul qilinishi, qolaversa, O'zbekiston Respublikasi Birinchi Prezidenti I. A. Karimovning O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining 2010 yil 27 yanvar kuni bo'lib o'tgan qo'shma majlisidagi "Mamlakatni modernizatsiya qilish va kuchli fuqarolik jamiyati barpo etish – ustuvor maqsadimizdir" hamda Vazirlar Mahkamasining 2010 yil 29 yanvar kuni bo'lib o'tgan majlisidagi "Asosiy vazifamiz – Vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz farovonligini yanada yuksaltirish" mavzusidagi ma'ruzalari zahirida ham aynan shu muammoni hal etish ko'zda tutilgan.

Shavkat Mirziyoyevning O'zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag'ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo'shma

majlisidagi nutqida **“Biz yoshlarga doir davlat siyosatini hech og‘ishmasdan, qat’iyat bilan davom ettiramiz. Nafaqat davom ettiramiz, balki bu siyosatni eng ustuvor vazifamiz sifatida bugun zamon talab qilayotgan yuksak darajaga ko‘taramiz. Yoshlarimizning mustaqil fikrlaydigan, yuksak intellektual va ma’naviy salohiyatga ega bo‘lib, dunyo miqyosida o‘z tengdoshlariga hech qaysi sohada bo‘sh kelmaydigan insonlar bo‘lib kamol topishi, baxtli bo‘lishi uchun davlatimiz va jamiyatimizning bor kuch va imkoniyatlarini safarbar etamiz”** deb ta’kidlagan edi.

Biz ta’lim va tarbiya tizimining barcha bo‘g‘inlari faoliyatini bugungi zamon talablari asosida takomillashtirishni o‘zimizning birinchi darajali vazifamiz deb bilamiz. Yosh avlod tarbiyasi haqida gapirganda, Abdurauf Fitrat bobomizning mana bu fikrlariga har birimiz, ayniqsa, endi hayotga kirib kelayotgan o‘g‘il-qizlarimiz amal qilishlarini men juda-juda istardim. Mana, ulug‘ ajdodimiz nima deb yozganlar: **“Xalqning aniq maqsad sari harakat qilishi, davlatmand bo‘lishi, baxtli bo‘lib izzat-hurmat topishi, jahongir bo‘lishi yoki zaif bo‘lib xorlikka tushishi, baxtsizlik yukini tortishi, e’tibordan qolib, o‘zgalarga tobe va qul, asir bo‘lishi ularning o‘z ota-onalaridan bolalikda olgan tarbiyalariga bog‘liq”**. Qarang, qanday bebaho, oltinga teng so‘zlar! Bugungi kunda yon-atrofimizda diniy ekstremizm, terrorizm, giyohvandlik, odam savdosi, noqonuniy migrasiya, “ommaviy madaniyat” degan turli balo-qazolarning xavfi tobora kuchayib borayotganini hisobga oladigan bo‘lsak, bu so‘zlarning chuqur ma’nosi va ahamiyati yanada yaqqol ayon bo‘ladi.

O‘zbekistonning kelajagi, uning istiqboli, birinchi navbatda yoshlar tarbiyasiga, ularni sog‘lom qilib o‘stirishga, milliy g‘oya, milliy mafkura va o‘z vataniga sadoqat ruhida tarbiyalashga bog‘liq bo‘lib, bu murakkab jarayonni muvaffaqiyatli amalga oshirish mustaqil mamlakatning eng dolzarb vazifalaridan biridir. Shuning uchun ham, Prezidentimiz Islom Abdug‘aniyevich Karimovning “Mamlakatimizning istiqboli yosh avlodlarimiz qanday tarbiya topishiga, qanday ma’naviy fazilatlar egasi bo‘lib voyaga yetishiga,

farzandlarimizning hayotga nechog'lik faol munosabati bo'lishiga, qanday oliy maqsadlarga xizmat qilishiga bog'liq ekanligini hamisha yodda tutishimiz kerak" deb ta'kidlagani bejiz emas. Shu boisdan ham bugungi kunda yoshlarning ta'lim-tarbiyasi mustaqil O'zbekistonning davlat siyosatida ustivor ahamiyat kasb etmoqda.

Yurtimizning birinchi prezidenti Islom Karimovning "Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch" asarida ta'kidlaganidek, yoshlarimizning ma'naviy olamida bo'shliq vujudga kelmasligi uchun ularning qalbi va ongida sog'lom hayot tarzi, milliy va umummilliy qadriyatlarga hurmat- ehtirom tuyg'usini bolalik paytidan boshlab shakllantirishimiz zarur.

Talabalarga bilim berishda zamonaviy ta'lim texnologiyalarining ahamiyati to'g'risida so'z borganda birinchi prezidentimiz I.A.Karimovning "O'quv jarayoniga yangi axborot va pedagogik texnologiyalarni keng joriy etish, bolalarimizni komil insonlar etib tarbiyalashda jonbozlik ko'rsatadigan o'qituvchi va domlalariga e'tiborimizni yanada oshirish, qisqacha aytganda, ta'lim-tarbiya tizimini sifat jihatidan butunlay yangi bosqichga ko'tarish diqqatimiz markazida bo'lishi darkor" degan so'zlarini ta'kidlash o'rinlidir.

Hozirgi kunda jahon tajribasidan ko'rinib turibdiki, ta'lim jarayoniga o'qitishning yangi, zamonaviy usul va vositalari kirib kelmoqda va samarali foydalanilmoqda.

Bitiruv malakaviy ish mavzusining dolzarbligi: Ko'pgina masalalarni yechish matematik modellarga asoslangan tenglamaga keltiriladi. Bunday tenglamalar oddiy, differensial yoki integral tenglamalar va boshqa turdagi tenglamalardan iborat bo'ladi. Bu kabi tenglamalarni yechishda odatiy usuldan boshqa usullar ham qo'l keladi. shunday usullardan biri tenglamalarni tengsizliklar yordamida yechishdir. Tenglamalarni integral tengsizliklar yordamida yechish shular jumlasidandir.

Bitiruv loyiha ishining dolzarbligi, biz bilgan tengsizliklar va ularning integral tengsizliklarga tadbir'ini o'rganish. Bunda eng sodda tengsizliklardan tortib,

Koshi, Koshi-Bunyakovskiy, Yung, Gyolder va Minkovskiy tengsizliklarning biz o'rganayotgan integral tengsizlik Gronoul (1919 yilda) tengsizligiga bog'liqlik va farq qiluvchi taraflarini ko'rsatish ishning dolzarb masalasi etib belgilangan.

Bunda Gronoul tengsizligi quyidagi teoremda:

teorema:(Gronuoll) Agar $I(a \leq t < \infty)$ yarim o'qda aniqlangan, uzluksiz $u(t) \geq 0$ funksiya va o'zgarmas $C \geq 0, K \geq 0$ sonlar uchun

$$u(t) \leq C + K \int_a^t u(s) ds \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu I yarim o'qda

$$u(t) \leq C \exp\{K(t - a)\} \quad (2)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Tadqiqot obyekti va predmeti: Mazkur malakaviy bitiruv ishi sonli tengsizliklar, tengsizliklarning muhim hollari va integral tengsizliklarning o'zaro bog'liqlik hamda farqlarini ko'rsatgan holda ularni sinflarga ajratish

Ishning maqsadi va vazifalari: Ma'lumki ko'pgina hayotiy masalalarni yechishning turli usullari mavjud, shulardan biri tengsizliklar yordamida masalalarni tenglamaga keltirib yechishdir. Bunday tenglamalar oddiy, differensial yoki integral tenglamalardan iborat bo'ladi. Bu kabi tenglamalarni integral tengsizliklar yordamida yechish metodi orqali biz tengsizliklarning integral tengsizliklarga tadbig'ini o'rganamiz. Bunda eng sodda tengsizliklardan tortib, Koshi, Koshi-Bunyakovskiy, Yung, Gyolder va Minkovskiy tengsizliklarning biz o'rganayotgan integral tengsizlik Gronoul (1919 yilda) tengsizligi aloqadorligini o'rganish ishning asosiy maqsad va vazifasi etib belgilangan

Tadqiqot usuli va uslubiyoti: Bitiruv loyiha ishining tadqiqot usuli va uslubiyoti, sonli tengsizliklar, Koshi, Koshi-Bunyakovskiy, Yung, Gyolder va Minkovskiy tengsizliklarning biz o'rganayotgan integral tengsizlik Gronoul tengsizligiga bog'liqligi.

Olingan asosiy natijalar: Bitiruv loyiha ishining asosiy natijalari Gronoul tengsizligi tadbig'ining sonli, Koshi, Koshi-Bunyakovskiy, Yung, Gyolder va Minkovskiy tengsizliklari tadbig'i bog'liqlik va farqli taraflarini ko'rsatgan holda turlarga ajratishdan iborat.

Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati: Bitiruv loyiha ishi referativ xarakterdagi ish bo'lib, bunda fundamental bilimlarga asoslanib tengsizliklarni turlarga ajratish, ularning bog'liq va farqli taraflarini ko'rsatishdan iborat.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi. Qo'llanish sohasi. Xulosa va takliflar. Bitiruv loyiha ishi ilmiy yangilik bo'lmasada, undan matematikaning zamonaviy bo'limlari bo'lgan matematik fizika tenglamalari, funksional analiz, tenzir analiz va boshqa sohalarda keng qo'llaniladi. Ushbu sohalarning muhim asoslari bo'lgan funksionallar, differensial tenglama, integral tenglama va integro differensial tenglamalarda keng qo'llaniladi. Bu ish asosan magistratura talabalari uchun ilmiy ishlarini davom ettirishiga zamin bo'ladi deb o'ylayman.

Ishning hajmi va tuzilishi: Bitiruv malakaviy ishim kirish qismi va bunda prezidentimizning so'zlari, bitiruv malakaviy ishi dolzarbligi, tadqiqot obyekti va predmeti, ishning maqsadi va vazifalari, tadqiqot uslubi va uslibiyoti, olingan asosiy natijalar, natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati, tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi, xulosa va takliflar yoritib berilgan. Malakaviy bitiruv ishim II bob: I bob tengsizliklar va ularning klasifikatsiyasi, Sodda tengsizliklarning muhim hollari va Integral tenglamalarning tasnifi va integral tenglamalarga keladigan tipik masalalar haqida keng tushuncha berildi. II bobda esa integral tengsizlikning tasnifi, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun maxsus integral tengsizliklar va tengsizlik, integral tengsizliklarga oid misollar mavzulari keng yoritilib berilgan. Bitiruv malakaviy ishining har bir bob xulosalari, yakunlovchi xotimasi va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, jami 93 betdan iborat.

I. BOB. TENGSIZLIKLAR VA INTEGRAL TENGLAMALAR HAQIDA ASOSIY MA'LUMOTLAR

1.1.TENGSIZLIKLAR VA ULARNING KLASIFIKATSIYASI

Nostandart tengsizliklar haqida gapirishdan avval,tengsizlik haqida alohida to'xtalib o'tamiz.

Tengsizlik $>$ (katta), $<$ (kichik), $\geq$ (katta yoki teng) , $\leq$ (kichik yoki teng)

Belgilaridan biri orqali bo'lgan 2 ta son yoki matematik ifoda $a > b$ yozib $b < a$ yozuvning xuddi o'zini anglatadi, binobarin 2 ta qarama qarshi ishorali tengsizlikning borligi bu qo'shimcha qulaylikdir xolos. Yoki $<$ belgilari qatnashgan tengsizlik qat'iy $\geq$ yoki $\leq$ belgili tengsizliklar

noqatiy deyiladi. Sonli tengsizlik to'g'ri bo'lishi yoki noto'g'ri bo'lishi mumkin.

Masalan: $2^7 > 5^3$, $\frac{40}{77} < \frac{13}{25}$, $2 > 1,4142, 5 \leq 5$, $-1 \leq 0$ tengsizliklar to'g'ri. $\pi > \frac{355}{113}$

tengsizlik esa noto'g'ri. Shunday qilib, matematik mantiq nuqtai nazaridan tengsizlik mulohazadir. O'zgaruvchilar qatnashgan tengsizlik (ya'ni yozuvida turli qiymatlar qabul qiluvchi harflar bo'lgan tengsizlik) o'zgaruvchilarning ayrim qiymatlarida to'g'ri, ba'zi qiymatlarida noto'g'ri bo'lishi mumkin. Bir necha yoki bir necha o'zgaruvchi qatnashgan tengsizlikni isbotlash o'zgaruvchilarning barcha ruxsat etilgan qiymatlarida uning o'rinli ekanini isbotlash demakdir.

O'zgaruvchilar qatnashgan tengsizlik uchun shu tengsizlikni isbotlash o'zgaruvchilarning barcha masalasini ,ya'ni o'zgaruvchilarning tengsizlik o'rinli bo'kadigan qiymatlari to'plamini tavsiflash masalasini qo'yish mumkin. Tengsizliklarni yechish yoki isbotlash jarayonida biz sonlar orasidagi "katta,kichik" munosabatning asosiy xossalariga tayanamiz. Tengsizlik – antisimmetrik munosabat, ya'ni ixtiyoriy turli a va b sonlar uchun yo $a > b$ yoki $b > a$, u tranzitiv, ya'ni ixtiyoriy 3 ta a, b, c , sonlar uchun agar $a > b$ va $b >$

c , bo'lsa, u holda $a > c$. agar $a > b$ bo'lsa, u holda c uchun $a + b > b + c$. Agar $a > b$ va $c > 0$ bo'lsa, u holda $ac > bc$.

Sonlar orasida tengsizlik munosabatini arifmetik amallar bilan bog'lovchi 2 ta keyingi xossadan biri $a + b > b + c$ xossa o'quvchilarda xatolarni eg ko'p vujudga keltiradi. Ko'pincha tengsizlikni manfiy songa ko'paytirganda tengsizlik belgisi qarama –qarshiga o'zgarishini sedan chiqaradilar.

Agar $a < b$ va $c < d$ bo'lsa, u holda $a + c < b + d$, agar $0 < a < b$, n – natural son bo'lsa, u holda $a^n < b$ va h.k. Son tushunchasini kengaytirganda butun solardan ratsional sonlarga, so'ngra haqiqiy sonlarga o'tishda yangi to'plamda “katta, kichik” munosabatini shunday ta'riflash lozimki uning asosiy xossalari saqlansin.

Ta'rifga ko'ra maxrajlari (q va n) munosabat bo'lgan 2 ta p/q va m/n kasrda $pn > mq$ bo'lsa, birinchisi katta bo'ladi. 2 ta munosabat cheksiz o'nli kasrni solishtirish uchun ustma-ust tushmaydigan xonalardan eng chapdagisini (yuqorisi) qaraladi. Qaysi kasrning shu razryaddagi raqami katta bo'lsa, o'sha kasr kattadir. Tengsizlik yordamida asosiy sonli to'plamlar beriladi.

(kesma $a \leq x \leq b$, integral $a < x < b$, nur $x > a$ h.k) limit, uzluksiz funksiya qator va boshqa muhim tushunchalarning ta'riflari ifodalanadi.

Masalan: Qavariq funksiyaning ta'rifini quyidagicha ifodalash mumkin, agar barcha x_1, x_2 lar uchun

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ uzluksiz funksiya pastga qavariq, agar qarama-qarshi ma'nodagi tengsizlik o'rinli bo'lsa, yuqoriga qavariq, qarama-qarshi ma'nodagi tengsizlik o'rinli bo'lsa, yuqoriga qavariq deyiladi. Hosilaga ega funksiya uchun bu tengsizlik $y = f'(x)$ hosilaning monoton funksiya bo'lishiga teng kuchlidir. Matematikaning ko'pgina tadbirlarida muammoning qo'yilishi ko'pincha tengsizliklar tilida ifodalanadi.

Masalan: talaygina iqtisodiy masalalar o'zgaruvchilarning soni ko'p bo'lgan chiziqli tengsizliklar sistemasini tadqiq qilishga keltiriladi. Ko'pincha u yoki bu

tengsizlik qanday obyektlarning mavjudligini isbotlash rad etish yoki ularning miqdorini baholash sinflashga imkon beradigan muhim qo'shimcha vosita, asosiy lemma bo'lib xizmat qiladi.

Masalan: barcha muntazam ko'pyoqlilarni sinflarga ajratish uchun avvalo muntazam ko'pburchaklar qanday burchaklarga ega bo'lishi mumkinligini eslash kerak va qavariq ko'pyoqli burchak tekis burchaklarining yig'indisi 360° dan ortiq emas degan tengsizliklardan foydalanish lozim.

Bu teorema eng dastlabki geometrik tengsizliklar bilan birga qadimgi yunon matematikasiga mansub, u Yevkilidning mashhur "Negizlarida" bor. Tengsizliklar faqatgina yordamchi qurol emas, matematikaning har bir sohasida algebra va sonlar nazariyasida geometriya va topologiyada ehtimolliklar nazariyasi va funksiyalar nazariyasida matematik fizika va differensial tenglamalar nazariyasida matematikada tengsizliklar ko'rinishida ifoda etiladigan fundamental natijalarni ko'rsatish mumkin.

Matematikaning ko'pgina bo'limlarida, ayniqsa matematik analizda amaliy matematikada tengsizliklar ko'proq uchraydi. Ma'lumki baxtli tasodif tufayligina amalaliy jihatdan muhim.

Taqribiy yechim uchun esa matematikada har doim xatolik bahosini ko'rsatish ya'ni biror tengsizlikni isbotlash talab etiladi. Matematika va fizikada isbotning qat'iyligi darajasi orasidagi asosiy farqlardan biri shundandan iborat fizik kattaliklarning tartibini topish bilan kifoyalanishiga rozi bo'lsa, matematik qandaydir baholarni, ya'ni tengsizliklarni qat'iy isbotlashga intiladi. U yoki bu kattalikning yuqoridan yoki quyidan bahosini topib, ya'ni bu kattalik biror M sonidan katta emasligini isbotlab, biz mumkin qadar aniqroq natija olishga yuqoridan bahoni pasaytirishga quyidan esa bahoni oshirishga harakat qilamiz. Sonli A to'plamning yuqoridan mumkin bo'lgan eng aniq bahosi $\sup A$ kabi belgilanadi.

Misol uchun ko'pburchakning S yuzi uning P perimetri kvadratiga nisbatini qaraylik. Ko'pburchak "dumaloq"lashgan sari s/p^2 miqdor ham kattalashaveradi.

Agar biror miqdor o'zining eng katta qiymatiga erishsa, Sup o'rniga max yozish qabul qilingan, mos ravishda inf o'rniga min yozsa bo'ladi. Tengsizlikni isbotlash funksiyaning ekstremumini tekshirish bilan uzviy bog'liq. Biror f funksiyaning maksimumi M ga tengligini isbotlash uchun argumentning f funksiya M ga teeng bo'ladigan qiymatlarini ko'rsatishimiz va $f \leq M$ tengsizlikni isbotlashimiz lozim.

Masalan: f va g qandaydir funksiyalar bo'lsa, $f > g$ tengsizlikni isbotlash uchun $f - g$ ayirmani shunday almashtirish kerakki, uning musbatligi ochiq-oydin bo'lib qolsin. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ chunki $(a - b)^2 \geq 0$ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ chunki $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

Ammo tengsizlikni isbotlash uchun nihoyatda nozik geometrik yoki analitik mulohazalardan foydalanishga ham to'g'ri keladi. Tajribali shaxmatchiga asosiy debyutlarni bilish yordam berganidek, matematikka ham tez-tez uchraydigan ba'zi klassik ayniy tengsizliklarni bilish foydalidir.

Ular orasida o'zgaruvchilar simmetrik qatnashadigan nafis tengsizliklar bor. Shunday tengsizliklar turkumuni daniyalik matematik I.Yensen (1859-1925) ning qavariq funksiyalar uchun quyidagini tengsizligi beradi. Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada pastda qavariq hamda, $p_1, p_2 \dots p_n \forall$ musbat sonlar bo'lsa, u holda $[a, b]$ dan olingan barcha $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar uchun

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\right) \leq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad (1.1.1)$$

yuqoriga qavariq funksiya uchun teskari tengsizlik o'rinli xususan

$$f(x) = \lg(x), \quad p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}, \quad x_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

bo'lsa bu yerdan o'rta arifmetik va o'rta geometrik uchun tengsizlik hosil bo'ladi.

(1.1.1) tengsizlikni quyidagicha yaqqol sharhlash mumkin. Pastga qavariq funksiya grafigida $\forall p_1, p_2, \dots, p_n$ massali yuklarni joylashtirsak, u massalarning umumiy og'irlik markazi grafikdan yuqorida yotadi.

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

ko'rinishdagi yig'indilarni baholash uchun matematik induksiya metodidan foydalaniladi. Shuningdek bu yig'indini maxsus tanlab olingan integral bilan solishtiriladi.

Masalan: $k_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ yig'indi maxsus tanlab olingan giperbola ostidagi yuza bilan solishtirish. $\ln n \leq k_n \leq \ln n + 1$ bahoni beradi. Aytaylik $n=1000$ bo'lsa, bu yerdan $6,9 < k_{1000} < 7,91$ ni olamiz.

Elementar funksiyalarning uzluksizligi va differensiallanuvchi bo'lishini isbotlash, ularning hosilalari uchun formulalardan kelib chiqishi ba'zi asosiy tengsizliklarga tayanadi. $\sin x < x \tan x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lganda) $e^x > 1 + x$ tengsizliklar Bernulli tengsizligi $(1+x)^n \geq 1 + nx$, ($x > -1$) n -natural son bo'lganda shular jumlasidandir.

O'z navbatida matematik naliz metodlari bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun tengsizliklarni isbotlashning qulay vositasi.

Masalan : agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning qiymatlari $x = a$ nuqtada ustma-ust tushsa va $x \geq a$ uchun $f'(x) \leq g'(x)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $b \geq a$ da $f(b) \geq g(b)$ boshqacha aytganda tengsizlikni hadma-had integrallash mumkin. Bu mulohaza qanday qilib, $\sin x$ ni katta aniqlik bilan hisoblashga imkon berishini ko'rsatadigan bir misol keltiramiz.

1.1.1-misol: $\cos x \leq 1$ va $(\sin x)' = \cos x$ bo'lgani uchun $x > 0$ uchun

$$\sin x = \int_0^x \cos x dx \leq \int_0^x 1 dx = x.$$

Xuddi shuningdek bu yerdan ketma-ket quyidagilarni olamiz.

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}, \text{ ya'ni } \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \sin x \geq x - \frac{x^3}{2*3} \quad 1 - \cos x \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2*3*4},$$

$$\text{ya'ni } \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2*3*4} \quad \sin x \leq x - \frac{x^3}{2*3} + \frac{x^5}{2*3*4*5} \quad \text{va hokazo.}$$

Tengsizliklarni yechish bilan tenglamalarni yechish orasida umumiylik ko'p tengsizliklarni ham almashtirishlar yordamida soddarog'iga keltirish mumkin. Muhim farqi shundan iboratki tengsizlikning yechimlari to'plami x , odatda cheksiz to'plam(kesma ,nur,bir necha kesmalarning birlashmasi va hokazo) bo'ladi. Bu holda javobni to'liq tekshirish mumkin emas, shuning uchun tengsizlikni yecha turib, unga ekvivalent tengsizlik yechimlari to'plami bilan bir xil tengsizlikka o'tishga majbur bo'lamiz. Buning uchun tengsizlikning asosiy xossalari tayanib, tengsizlik belgisini saqlaydigan va teskari tartibda ham o'z kuchini saqlaydigan almashtirishlarga bajarish kerak. Aytaylik tengsizlikning ikkala tomonini kubga oshirish amalini tadbqiq qilish mumkin ammo (agar tengsizlikning ikkala tomonini musbatiga avvaldan ma'lum bo'lmasa) kvadratga ko'tarish amalini tadbqiq qilish mumkin emas. Umuman agar F qat'iy o'suvchi funksiya bo'lsa $f < g$ va $F(f) < F(g)$ tengsizliklar teng kuchlidir.

Biroq $f(x) = g(x)$ tenglamani yechishni bilsak, u holda $f(x) > g(x)$ tengsizlikni yechish ko'p hollarda qiyinchilik tug'dirmaydi "intervallar" metodi yordam beradi. $f(x) > 0$ ko'rinishidagi tengsizlik uchun bilgan holda so'z yuritaylik (barcha hadlarni tengsizlikning chap tomoniga o'tkazishimiz mumkin). $F(x)$ funksiya butun to'ri chiziqda yoki bir necha (chekli yoki cheksiz) kesmalardan tashkil topgan D sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan.

Barcha elementar funksiyalar uchun shunday bo'ladi $f(x) = 0$ tenglamani ildizlarini belgilaymiz ular f funksianing aniqlanish sohasini bir necha intervallarga ajratadi, ularning har birida f o'z ishorasini saqlaydi. Har bir intervalda $f(x)$ qanday ishoraga ega $f(x)$ ga x ning shu intervaldan olingan istalan 1ta qiymatini qo'yib, aniqlash mumkin. Natijada $f(x)$ musbat bo'lgan intervallarni tanlash qoladi xolos, bu esa qidirilayotgan x to'plam bo'ladi.

Masalan: $\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} > 1$ tengsizlikni yechish uchun maxraj $x^3 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow (x -$

$1)(x^2 + x - 1$ bo'lib, u $x = 1$ va $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ nuqtalardan nolga aylanishini kasrni o'zi esa $x=0$ va $x=2$ da 1ga aylanishini hisobga olamiz.

Bu 5ta nuqta son o'qini 6ta bo'lakka ajratadi. SHu bo'laklarning har birida $\frac{2x-x^2}{x^3-2x+1}$ kasrning ishorasini topish qoladi. Ishoralarda odatda (karali ildizlar uchraydigan alohida hadlardan tashqari)almashinib keladi.

Javob: x 3ta to'plamdan iborat. $x < (-1 - \frac{\sqrt{5}}{2}), 0 < x < (-1 + \frac{\sqrt{5}}{2})$ va $1 < x < 2$

Nostandart tenglamalarni yechishning umumiy usuli mavjud bo'lmagani kabi, nostandart tengsizliklarning yechishning umumiy usuli mavjud emas. Shu sababli

Nostandart tengsizliklarni yechishda ham shu tengsizlikka xos bo'lgan chuqur mantiqiy fikr yuritishga to'g'ri keladi. Nostandart tengsizliklarni yechishga doir ayrim misollar bilan tanishaylik.

1.1.2-misol: $\cos x \geq y^2 + \sqrt{y-x^2-1}$ tengsizlikni yechamiz.

Yechish: $x = u; y = v$ sonlardan tuzilgan $(u; v)$ juftlik berigan tengsizlikning yechimi bo'lsin. U holda quyidagi to'g'ri sonli tengsizlikka ega bo'lamiz; $\cos u \geq v^2 + \sqrt{v-u^2-1}$ tengsizlikda ildiz ostidagi ifoda nomanfiy son, ya'ni $v-u^2-1 \geq 0$ dir. Shu sababli, $v \geq u^2 + 1, v \geq 1$, tengsizlik to'g'ridir.

$\sqrt{v-u^2-1} \geq 0$ ekanligini e'tiborga olib, $\cos u \geq v^2 + \sqrt{v-u^2-1} \geq v^2 \geq 1$

tengsizlikni hosil qilamiz, biroq $\cos u \leq 1$. Shu sababli quyidagi munosabatlar o'rinlidir.

$1 \geq \cos u \geq v^2 + \sqrt{v-u^2-1} \geq v^2 \geq 1$ Bu esa $1 = \cos u = v^2 + \sqrt{v-u^2-1} = v^2 = 1$ ekanligini ko'rsatadi.

Oxirgi tenglikdan, $v=1, u=1$ ekanligi kelib chiqadi. Yuqoridagi mulohazalar, $(0,1)$ juftliklardan boshqa juftliklar berilgan tengsizliklarning yechimi bo'la olmasligi va $(0,1)$ juftligina berilgan tengsizlikning yechimi bo'lish mumkinligini ko'rsatadi. $(0,1)$ juftlik, haqiqatdan ham, berilgan tengsizlikning yechimi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Demak, berilgan tengsizlik yagona yechimga ega: $x = 0, y = 1$.

1.1.3-misol: $\min \{ 2x-x^2, x-1 \} > -\frac{1}{2}$ tengsizlikni yechamiz.

Yechish: $\min \{2x - x^2, x - 1\}$ ni topib olamiz. Buning uchun, $2x - x^2 \geq x - 1$ tengsizlikning yechimlar to'plami $\left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$ Oraliqdan iborat ekanligidan

foydalanamiz. $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$ lardan $2x - x^2 \geq x - 1$ bo'lgani uchun

$$\min_{x \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]} \{2x - x^2, x - 1\} = x - 1, \quad \min_{x \in \left(-\infty, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]} \{2x - x^2, x - 1\} = 2x - x^2$$

va

$$\min_{x \in \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right)} (2x - x^2, x - 1) = 2x - x^2$$

Munosabat o'rinalidir. Bu yerda quyidagi

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \{2x - x^2, x - 1\} = \begin{cases} 2x - x^2, & x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} da, \\ x - 1, & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} da, \\ 2x - x^2, & x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} da \end{cases}$$

Munosabatdan foydalansak, berilgan tengsizlik quyidagi majmuaga teng kuchli ekanligini ko'ramiz.

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x - x^2 > -\frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 > -\frac{1}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 > -\frac{1}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Bu majmuani yechib, berilgan tegsizlikning barcha yechimlarini topamiz:

$$\frac{1}{2} < x < 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ko'pincha o'quvchilar u yoki bu ko'rinishdagi tengsizliklarning yechimlarini toppish to'g'risida umumiy tushunchaga ega bo'lsalarda, ammo yechimning geometrik ko'rinishi (ya'ni grafigi) to'g'risida deyarli tasavvurga ega bo'lmaydilar. Ular faqat yechimning analitik yozuvidan foydalanadilar. O'quvchilarning grafik savodxonligi talab darajasida emas. Tengsizliklarni grafik usulda yechish va yechimlarni sonlar to'g'ri chizig'ida yoki tekislikda tasvirlash ancha qulaydir. Shuningdek tenglama va tengsizliklarining yechimlarini analitik ko'rinishida yozish hamda yechimning to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirib, ko'rish ancha murakkab va qiyindir. Va holanki, ularning yechimlarini koordinatalar tekisligida ko'rsatish qulay va bu barcha noqulayliklarning oldini oladi.

Nostandart tengsizliklarning barcha turlariga doir misollarni yechish uchun yetarli darajada teng kuchlilik sxemalari mavjud. Shulardan foydalangan holda tarkibiga ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometric yoki teskari trigonometrik funksiyalarning xossalari hamda ularning grafiglarini bilish albatta zarurdir.

Ko'rsatkichli tengsizliklarni grafik usulda yechish.

1.1.1-ta'rif: $y = a^x$ ko'rinishidagi funksiya ko'rsatkichli funksiya deyiladi, bunga $a > 0$ va $a \neq 1$

1.1.2-ta'rif:

$$\begin{aligned} a^x &> b \\ a^x &< b \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

ko'rinishidagi tengsizliklar eng sodda ko'rsatkichli tengsizliklar deyiladi, bunga $a > 0$ va $a \neq 1$. Ko'rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'lgani uchun u x ning har qanday qiymatlarida musbat qiymatlar qabul qiladi. Shuning uchun $b \leq 0$ bo'lganda (1.1.2) tengsizlik yechimga ega bo'ladi, (1.1.2) tengsizlik esa yechimga ega bo'lmaydi. Kelgusida biz $b > 0$ deb hisoblaymiz.

Ma'lumki, $y = a^x$ funksiya $a > 1$ bo'lganda monoton o'suvchi, $0 < a < 1$ bo'lganda esa monoton kamayuvchi bo'ladi. Funksiya bu xossalardan quyidagilar kelib chiqadi.

1. Agar $a > 1$ bo'lsa, $a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \Rightarrow f_1(x) < f_2(x)$ (1.1.3) bo'ladi va aksincha.

2. Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, $a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \Rightarrow f_1(x) > f_2(x)$ (1.1.4) bo'ladi va aksincha.

Odatda (1.1.2) ko'rinishdagi tengsizliklar a asosga ko'ra logarifmlanadi va x o'zgaruvchining izlanayotgan qiymatlari topiladi. Bunda quyidagi teng kuchli shakl almashtirishdan foydalanadi:

$$\text{I. } a^x > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x > \log_a b \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x < \log_a b \end{cases}, \quad \text{II. } a^x < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x < \log_a b \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x > \log_a b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } f(x, y)^{g(x, y)} \geq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) > 1 \\ g(x, y) \geq 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 0 < f(x, y) < 1 \\ g(x, y) > 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} f(x, y) = 1 \\ g(x, y) \in D(g) \end{cases} \\
\text{IV. } f(x, y)^{\varphi(x, y)} < 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x, y) > 1 \\ \varphi(x, y) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x, y) < 1, \\ \varphi(x, y) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x, y) < 1, \\ \varphi(x, y) > 0 \end{cases} \end{cases} \\
\text{V. } &\begin{cases} \begin{cases} f(x, y) > 1 \\ \phi(x, y) \geq h(x, y) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x, y) \leq 1 \\ \phi(x, y) \leq h(x, y) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x, y) = 1 \\ \phi(x, y) \in D(\phi) \cap D(h) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \phi(x, y) > 0 \\ h(x, y) > 0 \end{cases} \end{cases} \\
\text{VI. } f(x, y)^{\varphi(x, y)} < f(x, y)^{h(x, y)} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x, y) > 1 \\ \varphi(x, y) < h(x, y) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x, y) < 1 \\ \varphi(x, y) > h(x, y) \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

I soha $y \geq a^x$ ($a > 1$) tengsizlikni, II soha $y \leq a^x$ ($a > 1$) tengsizlikni, shuningdek I soha $y \geq a^x$ ($0 < a < 1$) tengsizlikni, II soha esa $y \leq a^x$ ($0 < a < 1$) tengsizlikni, II soha esa $y \leq a^x$ ($0 < a < 1$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi tekislik nuqtalari to'plamidan iboratdir. Yuqorida qabul qilingan sohalar alohida qaralganda chegaraviy nuqtalar to'plami yechimga doir misollar ko'rib chiqamiz.

1.1.4-misol: $x^{2x} \geq x^{x^2}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: V tengkuchlilik sxemasiga ko'ra, berilgan tengsizlikni shakl almashtirib, uning izlanayotgan yechimlari to'plamini topamiz, ya'ni:

$$x^{2x} \geq x^{x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x > x^2 \\ 0 < x < 1 \\ 2x \leq x^2 \\ x = 1 \\ x \in R \\ x = 0 \\ 2x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases} \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x(x-2) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x(x-2) \geq 0 \end{cases} \\ x = 1 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 2 \\ x \leq 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Javob: [1,2] yechim $x = 1$ va $x = 2$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralanagan yopiq tasma (polosa) yoki koordinatalar to'g'ri chizig'ida $A(1)$ va $A(2)$ nuqtalar orasidagi yopiq kesmadan iborat.

1.1.5-misol: $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish: III teng kuchlilik sxemasidan foydalanib, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plamini topamiz va uni sonlar tekisligida tasvirlaymiz. Qat'iy tengsizlikda tengkuchlilik sxemasidagi oxirgi sistema ishtirok etmaydi.

$$(x-2)^{x^2-6x+8} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ x^2-6x+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x-3 > 1 \\ x-3 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > 4 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

Javob : $(2,3) \cup (4,+\infty)$

1.1.6-misol: $(x^2 + x + 1)^x < 1$ tengsizlik yechimlar to'plamini topamiz.

Yechish. VI teng kuchlilik sxemasidan foydalanib, berilgan tengsizlik yechimlar to'plamini topamiz:

$$(x^2 + x + 1)^x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x + 1)^x > 1 \\ x < 0 \\ 0 < (x^2 + x + 1)^x < 1 \\ x > 0 \\ (x^2 + x + 1)^x = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) > 0 \\ x < 0 \\ 0 < (x+0,5)^2 + 0,75 < 1 \\ x > 0 \\ (x+0,5)^2 + 0,75 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \\ x < 0 \\ \emptyset \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x < -1$$

Javob: $(-\infty, -1)$ (Yechim koordinatalar to'g'ri chizig'ida uchi A(-1) nuqtada bo'lgan chap ochiq nurdan, sonlar tekisligida esa $x = -1$ to'g'ri chiziqdan chap tomondagi ochiq yarim tekislik nuqtalari to'plamidan iborat bo'ladi.)

Logarifmik tengsizliklarni grafik usulda yechish.

1.1.3-ta'rif: $y = \log_a x$ ko'rinishidagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi, bunda $a > 0, a \neq 1$ va x - argument ,ya'ni erkli o'zgaruvchi. $y = \log_a x$ ko'rinishdagi logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiyaga teskari funksiya sifatida aniqlanadi. $\log_a x > b$ va $\log_a x < b$ ko'rinishidagi tengsizliklar eng soda logarifmik tengsizliklar deyiladi, bunda $a > 0$ va $a \neq 1$

Ma'lumki logarifmik funksiya argumentlarning musbat qiymatlarida aniqlangan, shuningdek, $a > 1$ bo'lganda logarifmik funksiya o'suvchi, $0 < a < 1$ bo'lganda esa monoton kamayuvchi bo'ladi. Funksiyaning bu xossalardan quyidagilar kelib chiqadi.

1. Agar $a > 1$, $f_1 > 0$ va $f_2 > 0$ bo'lsa, $\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x) \Rightarrow f_1(x) < f_2(x)$ (1) bo'ladi va aksincha. (1) ko'rinishdagi tengsizliklarni, ya'ni logarifmik ifodalar

qatnashgan tengsizliklarni yechayotganda potensirlash yo'li bilan logarifm yo'qotiladi, va izlanayotgan yechimlar to'plami topiladi, bunda quyidagi teng kuchli almashtirishdan foydalanadi.

$$I. \quad \log_a x > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x > a^b \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < x < a^b \end{cases},$$

$$II. \quad \log_a x < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < x < a^b \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x > a^b \end{cases}$$

$$III. \quad \log_{f(x,y)} \varphi(x,y) \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) > 1 \\ \varphi(x,y) \geq f^k(x,y) \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 0 < f(x,y) < 1 \\ 0 < \varphi(x,y) \leq f^k(x,y) \end{cases}$$

$$IV. \quad \log_{f(x,y)} \varphi(x,y) \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) > 1 \\ 0 < \varphi(x,y) \leq f^k(x,y) \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 0 < f(x,y) < 1 \\ \varphi(x,y) \geq f^k(x,y) \end{cases}$$

$$V. \quad \log_{f(x,y)} \varphi(x,y) \geq \log_{f(x,y)} h(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x,y) > 1 \\ \varphi(x,y) \geq h(x,y) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x,y) < 1 \\ 0 < \varphi(x,y) \leq h(x,y) \end{cases} \end{cases}$$

$$VI. \quad \log_{f(x,y)} \varphi(x,y) < \log_{f(x,y)} h(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x,y) > 1 \\ 0 < \varphi(x,y) \leq h(x,y) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x,y) < 1 \\ \varphi(x,y) > h(x,y) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Endi logarifmik tengsizliklarning yechimlarini topishga doir misollarni muhokamalar bilan ko'rib chiqamiz.

1.1.7-misol: $\lg(y-x) < 0$ tengsizlik yechimlari to'plamini toping.

Yechish: $a = 10 > 1$ bo'lgani uchun II tengkuchlilik sxemasining birinchi sistemasidan foydalanib, tengsizlikni yechamiz:

$$\lg(y-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10 > 1 \\ 0 < y-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y-x < 1 \Leftrightarrow x < y < x+1$$

Shunday qilib, berilgan tengsizlik yechimlari to'plami $y = x$ va $y = x+1$ to'g'ri chiziqlar bilan

Chegaralangan ochiq tasma nuqtalari to'plamidan iborat bo'ladi.

$$1.1.8\text{-misol: } \log_{\frac{1}{2}}(2-x^2-y^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{2} < 1, \\ 2-x^2-y^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+y^2 < 1 \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

Demak, izlanayotgan to'plam-markazi koordinatalar boshida va radiusi bir birlikka teng bo'lgan ochiq doiradan iborat.

Trigonometrik tengsizliklarni grafik usulda yechish.

1.1.4-ta'rif: Trigonometrik tengsizlik deb noma'lum miqdor trigometrik funksiya belgisi ostida bo'lgan tengsizlikka aytiladi.

1.1.5-ta’rif: Eng soda trigonometrik tengsizlik deb $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x < a$ ko’rinishdagi tengsizlikka aytiladi.

Trigonometrik tengsizliklarni yechish odatda eng sodda trigonometrik tengsizliklarni, shuningdek sodda trigonometrik tengsizliklar sistemasini yoki sistemalar birlashmasini yechishga keltiriladi. Eng sodda trigonometrik tengsizliklarni yechish uchun juda ko’p hollarda birlik aylanadan foydalanish qulaydir, chunki unga eng sodda tengsizliklarni qanoatlantiruvchi o’zgaruvchilarning qiymatlari to’plami bitta yoki bir nechta yoylar ko’rinishida tasvirlanadi. Xuddi , shunga O’xshash,sonlar to’g’ri chiziqdagi oraliqlarni, shuningdek u yoki bu yoylarga tegishli nuqtalar to’plamini tengsizliklar yordamida berish va yozish mumkin bo’ladi. Eng sodda trigonometrik tengsizliklar bevosita trigonometrik funksiyalarining xossalaridan foydalanilgan holda yechiladi.Trigonometrik funksiya belgisi ostida qatnashadigan no’malun o’zgaruvchilarturli ko’rinishdagi funksiyalar ko’rinishida ham bo’lishi mumkin.

Sonning arksinusi va uning asosiy xossalari.

1.1.6-ta’rif: a sonning arksinusi deb $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmaga tegishli sinusi a ga teng songa aytiladi.

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmadan olingan va sinusi a ga teng bo’lgan burchak (yoy) ni – bosh burchak deyishga va uni $\arcsin a$ (“ a sonning arksinusi”) deb belgilashga kelishilgan.

Eslatma: Ixtiyoriy a soni uchun sinusi a gat eng bo’lgan burchakni toppish masalasi tez-tez uchrab turadi. Avvalo shuni aytishimiz mumkinki, agar $a > 1$ va $a < -1$ bo’lsa, u holda yuqorida qo’yilgan masala yechimga ega bo’lmaydi, chunki sinus ta’rifiga ko’ra sinusi 1 dan katta yoki -1 dan kichik bo’lgan burchak mavjud emas.

Agar $a \in [-1;1]$ bo’lsa, u holda sinusi a soniga teng bo’lgan cheksiz ko’p burchaklar mavjuddir. Haqiqatdan, $a \in [-1;1]$ bo’lganda $y = a$ to’g’ri chiziq birlik aylanani yoki ikki nuqtada, yoki bitta nuqtada kesadi. Yuqorida aytilganidek, birlik aylanada yotgan har bir nuqta uchun shunday α burchak mavjudki, bu burchakning sinusi shu nuqta ordinatasiga (ya’ni a ga) teng bo’ladi.

Sinusning xossasiga ko’ra istalgan α burchak va istalgan n soni uchun $\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi n)$ o’rinli. Shunning uchun istalgan butun n soni uchun $(\alpha + 2\pi n)$ burchakning sinusi a soniga teng bo’ladi. Sonning arksinusi ta’rifiga ko’ra quyidagi ikki shartni bir vaqtda qanoatlantiruvchi burchak mavjuddir.

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin(\arcsin a) = a$ Shunday qilib, $a \in [-1, 1]$ dan olingan istalgan sonning sinusi mavjudligi va uning yagonaligi, shuningdek, $a \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ dan olingan istalgan sonning esa sinusi mavjud emasligi kelib chiqadi.

1.1.9-misol: $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$, chunki $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ va $-\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Demak, sinusi $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ga teng bo'lgan va $[-1, 1]$ kesmaga tegishli yagona burchak $-\frac{\pi}{3}$ dir.

Sonning arksinusi ta'rifidan kelib chiqadigan ayrim xossalarni sanab o'tamiz:

1.1.1-xossa: $a \in [-1, 1]$ dan olinga istalgan son uchun quyidagi qo'sh tengsizlik o'rinlidir $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$

1.1.2-xossa: $a \in [-1, 1]$ dan olingan istalgan son uchun quyidagi tenglik o'rinlidir: $\sin(\arcsin a) = a$

1.1.3-xossa: $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dan olingan istalgan burchak uchun quyidagi tenglik o'rinlidir. $\arcsin(\sin a) = a$

1.1.4-xossa: 1 dan katta hamda -1 dan kichik istalgan sonlar uchun $\arcsin a$ ifoda ma'noga ega emas.

$\sin a > a$ ko'rinishidagi tengsizlikni yechish.

Agar $a > -1$ bo'lsa, u holda tengsizlikning yechimi istalgan haqiqiy son(ya'ni $x \in R$) bo'ladi.

Agar $-1 \leq a < 1$ bo'lsa, u holda tengsizlik yechimlari quyidagi qo'sh tengsizlik ko'rinishida ifodalanadi:

$$2\pi n + \arcsin a < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$$

$-1 \leq a < 1$ bo'lganda $\sin x > a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x ning qiymatlari to'plami ikki xil ko'rinishda ko'rsatilgan.

Agar $a \geq 1$ bo'lsa, u holda tengsizlik yechimga ega bo'lmaydi. Yuqorida ko'rilgan hamma hollarni birlashtirib, yozamiz.

$$I. \sin x > a \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -1 \leq a < 1 \\ 2\pi n + \arcsin a < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} a < -1 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 1 \\ \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

1.1.10-misol: $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ yoyning birinchi davridagi qiymati, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ yoyning bosh qiymati berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi burchak (yoy) larni umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Javob: $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right] n \in \mathbb{Z}$

sin < a ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish.

Agar $a \leq -1$ bo'lsa, tengsizlik yechimga ega bo'lmaydi, chunki sinus funksiya -1 dan kichik qiymatlarni qabul qilmaydi.

Agar $-1 < a \leq 1$ bo'lsa, u holda tengsizlikning yechimlari ko'pincha quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{aligned} \pi + \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n \\ (-\arcsin a + \pi(2n+1)) < x < \arcsin a + 2\pi(n+1) \end{aligned}$$

yoki

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Agar $a > 1$ bo'lsa, u holda x ning barcha haqiqiy qiymatlarida tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagi hamma hollarni birlashtirib, quyidagi teng kuchlilik sxemasiga ega bo'lamiz.

$$\text{II. } \sin x < a \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a \leq 1 \\ -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ a > -1 \\ -\infty < x < +\infty \\ a \leq -1 \\ \emptyset \end{cases}$$

1.1.11-misol: $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ to'g'ri chiziq birlik aylanani $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ va $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

nuqtalarda kesishadi. Berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini chizmada ko'rsatilgan chizmadan ko'rinadiki, $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ yoydan olingan x ning

qiymati uchun y ning bitta va faqat bitta qiymati mos kelgani uchun $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{4}$

yoyning bosh qiymati hisoblanadi. $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$ birinchi davrdagi yoyning qiymatidir. Izlanayotgan umumiy ko'rinish quyidagicha bo'ladi:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Javob: $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] n \in \mathbb{Z}$

Sonning arkkosinusi va uning asosiy xossalari.

1.1.7-ta'rif: a sonining arkkosinusi deb $[0; \pi]$ oraliqqa tegishli kosinusi a ga aytiladi. $[0; \pi]$ kesmadan olingan va kosinusi a soniga teng bo'lgan burchakning bosh qiymati deyishga va uni $\arccos$ adeb belgilashga kelishilgan.

Sonning arkkosinusi ta'rifiga ko'ra quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi burchak mavjuddir.

$$0 \leq \arccos a \leq \pi,$$

$$\cos(\arccos a) = a.$$

Shunday qilib, $a \in [-1, 1]$ dan olingan istalgan sonning arkkosinusi mavjudligi va uning yagonaligi, shuningdek, $a \in (-\infty; 1) \cup (1, +\infty)$ dan olingan istalgan sonning esa kosinusi mavjud emasligi kelib chiqadi.

1.1.12-misol: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ shunday α burchakki, u $0 \leq \alpha \leq \pi$ va $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

shartlarni qanoatlantiruvchi yagona bosh burchak $\frac{\pi}{4}$ dan iboratdir. Bunga

$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ ekanligi kelib chiqadi.

Sonning arkkosinusi ta'rifidan kelib chiqadigan asosiy xossalar quyidagilardan iboratdir:

1.1.5-xossa: $a \in [-1, 1]$ olingan istalgan son uchun quyidagi qo'sh tengsizlik o'rinlidir: $0 \leq \arccos a \leq \pi$

1.1.6-xossa: $a \in [-1, 1]$ dan olingan istalgan son uchun quyidagi tenglik o'rinlidir: $\cos(\arccos a) = a$

1.1.7-xossa: $\alpha \in [0; \pi]$ dan olingan istalgan burchak uchun quyidagi tenglik o'rinlidir: $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$

1.1.8-xossa: 1 dan katta istalgan a son uchun hamda -1 dan kichik istalgan a son uchun, ya'ni $|a| > 1$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan a son uchun $\arccos a$ yozuv ma'noga ega emas.

1.1.13-misol: $\arccos(\cos(-5))$ ni hisoblang.

Yechish: $-5 \notin [0; \pi]$ bo'lgani uchun $\arccos(\cos(-5)) = -5$ deb yozish mumkin emas. Ammo $\cos(-5) = \cos(2\pi - 5)$ shuning uchun $\arccos(\cos(-5)) = \arccos(\cos(2\pi - 5)) = 2\pi - 5$

$\cos x > a$ ko'rinishidagi tengsizlikni yechish.

Agar $a < -1$ bo'lsa, u holda x ning barcha haqiqiy qiymatlarida tengsizlikning aynan to'g'ri bo'ladigan, ya'ni tengsizlikning yechimi $-\infty < x < +\infty$ (yoki $x \in R$) bo'ladi, chunki $y = \cos x$ funksiya chegaralangan (ya'ni $|\cos x| \leq 1$) Shu sababli tengsizlikning chap qismidagi $y = \cos x$ funksiya -1 dan kichik bo'lmagan son -1 dan kichik sondan, albatta katta bo'ladi.

Agar $-1 \leq a < 1$ bo'lsa, u holda tengsizlikning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in Z$$

$-1 \leq a < 1$ bo'lganda, $\cos x > a$ tengsizlikning yechimlar to'plami bo'ladi. Agar $a \geq 1$ bo'lsa, u holda tengsizlik yechimga ega bo'lmaydi, chunki tengsizlikning chap qismi 1 dan katta sonni qabul qila olmaydi. Shuning uchun $a \geq 1$ bo'lganda, $\cos x > a$ tengsizlik yechimga ega bo'lmaydi.

Shunday qilib, quyidagi tengkuchlilik sxemasiga ega bo'lamiz:

$$\cos x > a \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq a < 1 \\ -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in Z \\ a < -1 \\ -\infty < x < +\infty \\ a \geq 1 \\ \emptyset \end{cases}$$

$\cos x < a$ ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish.

Agar $a \geq -1$ bo'lsa, u holda x ning barcha haqiqiy qiymatlarida tengsizlik to'g'ri tengsizlik bo'ladi, shuning uchun bu holda tengsizlik cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi, ya'ni $-\infty < x < +\infty$

Sonning arktangensi va uning asosiy xossalari

1.1.8-ta'rif: a sonining arktangensi deb $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalga tegishli tangensi a ga teng songa aytiladi.

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervaldan olingan va tangensi a soniga teng burchak (yoy)ni burchakning bosh qiymati deyishga va uni *arctga* deb belgilashga kelishilgan.

$tg x > a$ ko'rinishidagi tengsizlikni yechish.

Tangens funksiyaning oladigan qiymatlari chegaralanmagan.

Shuning uchun ham a ning istalgan haqiqiy qiymatlarida tengsizlik yechimga ega va bu yechim umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$IV. \quad tg x > a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < \infty, \\ \arctg a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, (n \in Z). \end{cases}$$

Agar $tgx > a$ tengsizlik yechimga ega bo'lsa, u holda tangenslar chizig'i (ya'ni o'qi) ning Ax nuqtasining ordinatasi tgx ga teng bo'lib, u berilgan a son dan katta bo'lishi kerak. Bunday nuqtalarning hammasi AB ochiq nurda yotadi. Tangensning davriyligini hisobga olsak, javob quyidagicha bo'ladi:

$$arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Yuqorida keltirigan yoyning analitik yozuvini tuzamiz: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctg \frac{1}{a} + \pi n$
 $n \in \mathbb{Z}$. odatda, $tgx > a$, $tgx < a$ ko'rinishdagi tengsizliklarning yechimlarini bir yo'la o'rgatish maqsadga muvofiqdir.

4-jadval

	$-\infty < a < \infty (a \in \mathbb{R})$. javob
$tgx = a$	$x = arctga + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$tgx > a$	$arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ yoki $(arctga + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$tgx \geq a$	$arctga + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ yoki $[arctga + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$tgx < a$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ yoki $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, arctga + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$tgx \leq a$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctga + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ yoki $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, arctga + \pi n], n \in \mathbb{Z}$

Sonning arkkotangensi va unung asosiy xossalari

1.1.9-ta'rif. a sonning $arcctg$ deb $(0, \pi)$ intervalga tegishli kotangensi a ga teng songa aytiladi.

$(0, \pi)$ intervaldan olingan va kotangensi a soniga teng bo'lgan burchak (yoy) ni burchak(yoy)ning bosh qiymati(ya'ni bosh burchak) deyishga va uni $arcctga$ deb belgilashga kelishilgan.

Sonning arkkotangensi deb ta'rifga ko'ra bir vaqtda quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi burchak mavjuddir: $0 < arcctga < \pi, ctg(arcctga) = a$. Bundan, istalgan haqiqiy sonning arkkotangensi mavjudligi va uning yagonaligi kelib chiqadi.

$ctgx > a$ ko`rinishdagi tengsizliklarni yechish.

Bu ko`rinishdagi tengsizliklar  $a$  ning istalgan haqiqiy qiymatlarida yechimga ega bo`ladi.

$$V. ctgx > a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < \infty, \\ \pi < x < \text{arctg} a + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \pi < x < \text{arctg} a + \pi, n \in \mathbb{Z}$$

$ctgx < a$ ko`rinishdagi tengsizliklarni yechish.

$ctgx < a$ ko`rinishdagi tengsizliklar a ning istalgan haqiqiy qiymatlarida quyidagi yechimga ega:

$$VI. ctgx < a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < \infty, \\ \text{arctg} a + \pi < x < \pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \text{arctg} a + \pi < x < \pi (n +$$

1), $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sin(ax + b) < c, \sin(ax + b) > c, \cos(ax + b) < c, \cos(ax + b) > c, tg(ax + b) < c,$$

$tg(ax + b) > c, ctg(ax + b) < c, ctg(ax + b) > c$, ko`rinishdagi tengsizliklarni yechish. Bunday ko`rinishdagi tengsizliklar $ax + b = t$ belgilash kiritish yordamida eng sodda trigonometrik tengsizliklarga keladi.

$a < \sin x < b$, $a < \cos x < b$, $a < tg x < b$, $a < ctg x < b$, ko`rinishdagi tengsizliklarni yechish.

Juda ko`p hollarda trigonometrik tengsizliklarni yechganda ikkita eng sodda tengsizliklar kesishmasini yechishga keltiriladi. Bunday tengsizliklarni yechish uchun quyidagi teng kuchli almashtirishlardan foydalaniladi.

a) $a < \sin x < b$ ko`rinishdagi qo`sh tengsizliklarni yechishning teng kuchli sxemasi quyidagicha bo`ladi:

VII.

$$a < \sin x <$$

$$b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ -1 \leq a < 1, \\ -1 < b \leq 1, \\ \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi < x < \arcsin b + 2\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \pi - \arcsin b + 2\pi < x < \pi - \arcsin a + 2\pi, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} b > 1, \\ a < -1, \\ -\infty < x < \infty, \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a \geq b, \\ a \geq 1, \\ b \leq -1 \\ \emptyset \end{cases}$$

radius o`lchovida,

$$a < \sin x < b \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a < b, \\ -1 \leq a < 1, \\ -1 < b \leq 1, \end{cases} & \begin{cases} \arcsin a + 360^\circ n < x < \arcsin b + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z} \\ 180^\circ - \arcsin b + 360^\circ k < x < 180^\circ - \arcsin a + 360^\circ k \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow a < \sin x < b \Leftrightarrow \\ \begin{cases} b > 1, \\ a < -1, \\ -\infty < x < \infty \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq b, \\ a \geq 1, \\ b \leq -1, \\ \emptyset \end{cases}$$

Trigonometrik tengsizliklarning koordinatalardan foydalanib yechish.

Bizga ma'lumki, $\cos \varphi$ va $\sin \varphi$ birlik aylanadagi nuqtaning absissasi va ordinatasidan iborat. Shuning uchun $f(\cos \varphi, \sin \varphi) \leq 0$ tengsizlikning yechimlari to'plami mos ravishda

$$\begin{cases} f(x, y) \geq 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} f(x, y) \leq 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Algebraik aralash sistemaning yechimlar to'plami bilan teng kuchli bo'ladi. Nostandart tenglama va tengsizliklarni topishda akademik litseylar, kasb-hunar kollejlarda yechib ko'rsatilgan. nostandart tenglamalarni sun'iy usullar bilan yechish qulaydir. Bunda akademik litseylar, kasb-hunar kollejlari darsligida sun'iy usullarni topish berigan. Men esa yordamchi noma'lumlar kiritib yechish usulini ko'rsatdim. Bunda yangi pedagogik texnologiyalardan foydalanib, mavzuni o'quvchilarga yetkazish usulida to'xtatdim. Darslarda bunday usullardan foydalanish o'qishda samarali hisoblanadi.

Parametr bilan tanishish. Parametr qatnashgan tenglamalar.

$$f(a, b, c, \dots, k, x) = g(a, b, c, \dots, k, x),$$

ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu erda $a, b, c, \dots, k, x$ - o'zgaruvchi miqdorlar.

1.1.10-ta'rif. Tenglamaning ikkala qismi haqiqiy sonlar to'plamida ma'noga ega bo'ladigan o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar $a = a_0, b = b_0, c = c_0, \dots, k$

$= k_0$, sistemasi $a, b, c, \dots, k, x$ o'zgaruvchilarning yo'l qo'yiladigan qiymatlar sistemasi deb ataladi.

$A - a$ ning yo'l qo'yiladigan qiymatlar to'plami, $B - b$ ning yo'l qo'yiladigan qiymatlar to'plami, ..., $X - x$ ning yo'l qo'yiladigan qiymatlar to'plami bo'lsin. Agar $A, B, C, \dots, K$ to'plamlarning har biridan bittadan mos ravishda $a, b, c, \dots, k$ qiymatni tanlab, tayinlasak va ularni tenglamaga qo'ysak, u holda x ga nisbatan tenglamani, ya'ni bir o'zgaruvchili tenglamani olamiz.

1.1.11-ta'rif. Tenglamani yechishda $a, b, c, \dots, k$ o'zgaruvchilar o'zgarmas deb hisoblanadi va parametrlar, x – haqiqiy o'zgaruvchi miqdor, tenglama esa parametrli bir noma'lumli tenglama deb ataladi.

Kelgusida parametrlarni lotin alifbosining birinchi harflari: $a, b, c, \dots, k, l, m, n$ lar bilan, noma'lumlarni esa $- x, y, z$ harflar bilan belgilashga kelishib olamiz. .

Masalan, $\frac{2nx-5}{(m-3)nx} - \frac{3nx+5}{n+1} = \frac{n-1}{nx}$ tenglamada m va n – parametrlar, x – noma'lum.

$m \neq 3, n \neq -1, x \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi m, n, x larning ixtiyoriy qiymatlar sistemasi yo'l qo'yiladigan hisoblanadi.

$m = 4, n = 1$ da $\frac{2x-5}{x} - \frac{3x+5}{2} = 0$, tenglamani olamiz

$m = 5, n = 3$ da $\frac{6x-5}{6x} - \frac{9x+5}{4} = \frac{2}{3x}$ tenglamani olamiz va h.k.

1.1.12-ta'rif. Parametrli tenglama yoki tengsizlikni yechish deb – parametrlarning qanday qiymatlarida yechimlari mavjudligini va ular qaysilar ekanligini ko'rsatishga aytiladi.

Tenglama va tengsizliklarni echish jarayonida teng kuchlilik haqidagi teoremlar muhim ahamiyatga ega.

1.1.13-ta'rif. Bir xil parametrlarni o'z ichiga olgan ikkita tenglama yoki tengsizlik teng kuchli deyiladi, agar:

a) parametrlarning bir xil qiymatlarida ma'noga ega bo'lsa;

b) birinchi tenglama(tengsizlik)ning har bir yechimi ikkinchi tenglama(tengsizlik)ning echimi bo'lsa va aksincha.

1.1.14-misol. a ning qanday qiymatlarida $x^2 - a = 0$ va $\sqrt{x} - a = 0$ tenglamalar teng kuchli?

Echish. Ravshanki, $a > 0$ da birinchi tenglama ikkita $x = \pm\sqrt{a}$ turli ildizlarga, ikkinchisi – faqat bitta ildizga $x = a^2$ ga ega va bu holda tenglamalar teng kuchli bo'lmaydi. $a = 0$ da tenglamalar echimlari ustma-ust tushadi ($x = 0$), $a < 0$ da na birinchi, na ikkinchi tenglama echimlarga ega. Lekin ma'lumki bunday tenglamalar teng kuchli deb hisoblanadi.

Javob: $a \leq 0$.

1.2 SODDA TENGSIZLIGINING MUHUM HOLLARI

Ixtiyoriy $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ sonlar uchun ushbu

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1.2.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu tengsizlikda tenglik faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bo'lganda bajariladi.

Boshqacha qilib aytganda, nomanfiy sonlar o'rta geometrigi ularning o'rta arifmetigidan oshmaydi va tenglik faqat bu sonlar bir-biriga teng bo'lganda bajariladi.

Bu tengsizlik Agyusten Lui Koshi tomonidan 1821- yilda isbot etilgan. Izoh: $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, (1.2.1) tengsizlikning chap tomoni nolga aylanib, u ushbu $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$ ko'rinishni oladi. Bu tengsizlikda tenglik faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ bo'lganda bajariladi. Shuning uchun biz, (1.2.1) tengsizlikni isbotlashda $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ deb hisoblaymiz.

$n = 2, n = 3, n = 4$ bo'lgan hollarda Koshi tengsizligi osongina isbot qilinadi.

$n = 2$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. U holda (1.2.1) tengsizlik

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (1.2.2)$$

ko'rinishida bo'ladi. (1.2.2) tengsizlik esa ushbu $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ tengsizlikka teng kuchli bo'ladi. Tenglik faqat $a_1 = a_2$ bo'lganda bajarilishi ma'lum.

$n = 3$ bo'lsin. Bu holda Koshi tengsizligi ushbu $\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ ko'rinishida bo'ladi. $a = \sqrt[3]{a_1}$, $b = \sqrt[3]{a_2}$, $c = \sqrt[3]{a_3}$ belgilash kiritsak, u

$$3abc \leq a^3 + b^3 + c^3 \quad (1.2.3)$$

ko'rinishni oladi. (1.2.3) tengsizlikni $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ tarzda yozib olib, chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \geq 0, \quad (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0, \quad \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geq 0.$$

Oxirgi tengsizlik o'rinli bo'lishi va tenglik faqat $a = b = c$ bo'lganda bajarilishi ravshan, demak $n = 3$ bo'lgan holda Koshi tengsizligi bajarilishini ko'ratdik. $n = 4$ bo'lsin. Bu holda Koshi tengsizligi

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \quad (1.2.4)$$

tarzda yoziladi. (1.2.4) tengsizlik (1.2.2) tengsizlikdan osongina kelib chiqadi:

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{a_3 \cdot a_4}} \leq \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

$n = 4$ bo'lgan holda o'rinli bo'lishi ko'rsatildi.

(1.2.1) tengsizlikdan quyidagi muhim natijalar kelib chiqadi :

1.2.1-Natija. Yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nomanfiy sonlar orasida ko'paytmasi eng katta bo'ladigani, bu bir-biriga teng sonlardir.

1.2.2-Natija. Ko'paytmasi o'zgarmas bo'lgan nomanfiy sonlar orasida yig'indisi eng kichik bo'ladigani bu bir –biriga teng sonlardir.

Bu natijalar eng katta va eng kichik qiymatlarni topishga doir masalalarda ishlatish mumkin.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING BIRINCHI USULI

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ma'lum. Shuning uchun $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}$$

belgilardan so'ng quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo'ladi: $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall \quad x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ sonlar uchun

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \quad (1.2.5)$$

bo'ladi va tenglik faqat $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ bo'lganda bajariladi.

Oxirgi tasdiqni matematik induksiya usulida isbotlaymiz.

$n = 2$ da bajarilishini yuqorida ko'rsatilib o'tildi.

$n = k$ da to'g'ri deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Ushbu

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1 \quad (1.2.6)$$

tenglikni chap tomonidagi ko'paytuvchilar orasida shunday ikkitasi topiladiki, birinchisi 1 dan katta bo'lmaydi, ikkinchisi esa 1 dan kichik bo'lmaydi. Agar bu fikr bajarilmasa, (1.2.6) tenglik ham bajarilmasligi ravshan. Qulayligi uchun $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ deb olamiz.

U holda

$$\begin{aligned} (1 - x_1)(x_2 - 1) &\geq 0, \\ x_2 - 1 - x_1x_2 + x_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 + x_1x_2 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

bo'ladi. Ushbu $x_1x_2, x_3, x_4, \dots, x_k, x_{k+1}$ k ta son ko'paytmasi 1 ga teng bo'lgani

uchun induksiya faraziga ko'ra

$$x_1x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq k \quad (1.2.8)$$

tengsizli o'rinli bo'ladi. (1.2.7) va (1.2.8) dan quyidagi baholash kelib chiqadi:

$$(x_1 + x_2) + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq (1 + x_1x_2) + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq k + 1$$

Keltirilgan tasdiqni bir qismi isbotlandi. Agar (1.2.5) tengsizlikda tenglik bajarilib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar orasida 1 dan farqlisi bo'lsa, bu sonlar ko'paytmasi 1 bo'lgani uchun shunday ikkitasi topiladiki (aytaylik x_1 va x_2

), $x_1 < 1, x_2 > 1$

$x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2 \Rightarrow n = x_1 + x_2 + \dots + x_n > 1 + x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq 1 + (n - 1) = n$ ziddiyat kelib chiqdi. Demak $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ sonlar uchun (1.2.5) belgilashimizga qaytsak :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik o'rinli ekani kelib chiqadi.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING IKKINCHI USULI.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

U holda

$$(n+1)A_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = nA_n + a_{n+1}$$

$$(G_{n+1})^{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = (G_n)^n a_{n+1}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Quyidagi ayirmani ko'rib chiqamiz:

$$R = (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}) - n(A_n - G_n).$$

yuqoridagi ayniyatlardan ushbu

$$R = a_{n+1} + nG_n - (n+1)\sqrt[n+1]{(G_n)^n a_{n+1}} \quad (1.2.9)$$

tenglik kelib chiqadi. Agar $G_n = x^{n+1}$, $a_{n+1} = y^{n+1}$ belgilash kiritsak, (1.2.9)

tenglikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} R &= y^{n+1} + nx^{n+1} - (n+1)x^n y = nx^n(x-y) - y(x^n - y^n) = \\ &= nx^n(x-y) - y(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = \\ &= (x-y)[(x^n - yx^{n-1}) + (x^n - y^2x^{n-2}) + \dots + (x^n - y^n)] = \\ &= (x-y)^2[x^{n-1} + x^{n-2}(x+y) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})] \geq 0. \end{aligned}$$

Demak, ushbu

$$(n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}) \geq n(A_n - G_n) \quad (1.2.10)$$

tengsizlik o'rinli bo'lar ekan. $A_2 - G_2 \geq 0$ bo'lgani uchun (1.2.10) tengsizlikdan n ning ixtiyoriy natural qiymatida $A_n \geq G_n$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik o'rinli. Isbot tugadi.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING UCHINCHI USULI.

Avval, $x > 0$ bo'lganda ushbu $\ln x \leq x-1$ tengsizlikni isbotlab olamiz. Bu yerda tenglik faqat $x=1$ bo'lganda bajariladi. Buning uchun $f(x) = \ln x - x + 1$ yordamchi funksiya tuzib olamiz va bu funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. Ushbu

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

tenglikka asosan $f(x)$ funksiya $(0,1]$ oraliqda o'suvchi va $[1,\infty)$ oraliqda kamayuvchi bo'ladi. Bunga ko'ra oraliqda kamayuvchi bo'ladi. Bunga ko'ra bo'lganda $f(x) < f(1)$ va $x > 1$ bo'lganda $f(1) > f(x)$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiya eng katta qiymatini $x=1$ bo'lganda qabul qiladi. Shuning uchun $f(x) \leq f(1)$ bo'ladi, ya'ni

$$\ln x - x + 1 \leq 0,$$

$$\ln x \leq x - 1.$$

$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}, x_2 = \frac{a_2}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}.$$

belgilash kiritdik, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ bo'ladi. Yuqorida isbot qilingan tengsizlikka ko'ra

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} &= e^{\frac{\ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}{n}} = e^{\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}} \leq e^{\frac{(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_n - 1)}{n}} = \\ &= e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n}{n}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

bo'ladi. Bundan esa belgilashlarga asosan

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerda tenglik bajarilishi uchun yuqoridagi tengsizlikda $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ bo'lishi kerak. Aks holda tengsizlik belgisi qat'iy bo'ladi. Isbot tugadi.

KOSHI-BUNYAKOVSKIY TENGSIZLIGINI ISBOTLASH.

Ixtiyoriy $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar uchun ushbu

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \quad (1.2.11)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda tenglik faqat

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \dots, a_n = \lambda b_n \quad (1.2.12)$$

bo'lganda bajariladi. (1.2.11) tengsizlikka Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deyiladi. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlarning barchasi nolga teng bo'lsa, (1.2.11) tengsizlik bajarilishi ma'lum. Shuning uchun $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar orasida teng bo'lmaganlari bor deb hisoblaymiz.

Yuqorida keltirgan fikrni Koshi tengsizligidan foydalanib isbotlaymiz.

Ushbu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}, x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}, \\ y_1 &= \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, y_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, \dots, y_n = \frac{b_n}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}} \end{aligned}$$

belgilashlarni kiritib olamiz. Quydagi tengsizliklarni bir-biriga qo'shamiz:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a_1}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, & y_1 &= \frac{b_1}{(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}, \\
x_2 &= \frac{a_2}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, & y_2 &= \frac{b_2}{(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}, \\
&\dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \\
x_n &= \frac{a_n}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, & y_n &= \frac{b_n}{(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

belgilashlarni kiritamiz. Quyidagi tengsizliklarni bir-biriga qo'shamiz:

$$\begin{aligned}
x_1 y_1 &\leq \frac{x_1^p}{p} + \frac{y_1^q}{q}, \\
x_2 y_2 &\leq \frac{x_2^p}{p} + \frac{y_2^q}{q}, \\
&\dots \dots \dots, \\
x_n y_n &\leq \frac{x_n^p}{p} + \frac{y_n^q}{q}
\end{aligned}$$

natijada ushbu

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq \frac{1}{p} (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p) + \frac{1}{q} (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Yuqoridagi belgilashlarni hisobga olib, oxirgi tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ushbu tengsizlikka Gyolder tengsizligi deyiladi. Gyolder tengsizligida $p = 2, q = 2$ desak, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi. Demak, Gyolder tengsizligi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining umumlashmasi ekan. Gyolder tengsizliga asoslanib quyidagi baholashlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p = [a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + a_2(a_2 + b_2)^{p-1} + \dots \\
&\dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1}] + [b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + b_2(a_2 + b_2)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1}] \leq \\
&\leq [a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} \cdot [(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + (a_2 + b_2)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} + \quad (1.2.16) \\
&+ [b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p]^{\frac{1}{p}} \cdot [(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + (a_2 + b_2)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} = \\
&= \{[a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} + [b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p]^{\frac{1}{p}}\} \cdot \\
&\quad \cdot \{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Oxirgi tengsizlikda $(p-1)q = p$ tenglik ishlatildi. Agar (1.2.16) baholashning ikkala tomonini ham $\{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p\}^{\frac{1}{q}}$ ifodaga bo'lsak va $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ tenglikni e'tiborga olsak, ushbu

$$\begin{aligned} & \{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p\}^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \leq [a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} + [b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlikka Minkovskiy tengsizligi deyiladi.

YENSEN TENGSIZLIGI

Aslida Koshi tengsizligi $f(x) = \ln x$ funksiya qavariqligining sodda natijasidir. Umumiy holda, ya'ni $f(x)$ ixtiyoriy qavariq yoki botiq funksiya bo'lgan holda Koshi tangsizligiga o'xshash tengsizliklarni isbot qilish mumkin. Agar $f(x)$ funksiya uchun $f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$ tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ sonlarda o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda qavariq deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ sonlarda o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda botiq deyiladi.

1.2.1-teorema: a) Agar $f''(x) < 0$, $x \in (a, b)$ bo'lsa ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ va $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlari uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \quad (1.2.17)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

b) Agar $f''(x) > 0$, $x \in (a, b)$ bo'lsa ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ va $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlari uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \quad (1.2.18)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. a) Avvalo ixtiyoriy $c \in (a, b)$ va $x \in (a, b)$ uchun ushbu

$$f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) \quad (1.2.19)$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

funknsiyaning (a, b) oraliqda eng katta qiymatini topamiz.

$$g'(x) = f'(x) - f'(c), \quad g''(x) = f''(x) < 0$$

bo'lgani uchun $g'(x)$ kamayuvchi. $g'(c) = 0$ ekanligidan $g'(x)$ ning ishorasi $x = c$ nuqtadan o'tishda musbatdan manfiyga o'zgarishi kelib chiqadi. $x = c$ nuqtadan boshqa nuqtada $g'(x)$ nolga aylanmasligidan $g(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatini qabul qilishi kelib chiqadi. Demak, $g(x) \leq g(c)$ bo'ladi, ya'ni (1.2.19) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(1.2.19) tengsizlikda tenglik faqat $x = c$ bo'lganda bajariladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin. Agar

$c = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$ bo'lsa, $c \in (a, b)$ bo'ladi. (1.2.19) tengsizlikka ko'ra

$$\begin{aligned} p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n) &\leq p_1 [f(c) + f'(c)(x - c)] + \\ &+ p_2 [f(c) + f'(c)(x - c)] + \dots + p_n [f(c) + f'(c)(x - c)] = \\ &= f(c) + f'(c)(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - c) = \\ &= f(c) + f'(c)(c - c) = f(c) = f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) \geq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n)$$

bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

$m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots, m_n \geq 0, (m_1 + m_2 + \dots + m_n > 0)$ ixtiyoriy sonlar bo'lsin.

(1.2.17) va (1.2.18) tengsizliklarda

$$p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, p_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \dots, p_n = \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

deymiz. U holda (1.2.17) va (1.2.18) tengsizliklar mos ravishda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \geq \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (1.2.20)$$

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \leq \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (1.2.21)$$

(1.2.17), (1.2.18), (1.2.20) va (1.2.21) tengsizliklarga Yensen tengsizliklari deyiladi. Yensen tengsizliklarida $f(x)$ funksiyaning turli xil qilib tanlash hisobiga ajoyib tengsizliklarni olish mumkin. Masalan, 1) $f(x) = \ln x$ bo'lsa,

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n},$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$ bo'lsa,

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{n},$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

3) $f(x) = x^p$ bo'lsa,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n},$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ va $p > 1$.

4) $f(x) = \sin x$ bo'lsa,

$$\sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n}$$

bo'ladi, bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \pi]$.

5) $f(x) = xe^x$ bo'lsa,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \leq x_1 e^{x_1} + x_2 e^{x_2} + \dots + x_n e^{x_n}$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

6) $f(x) = x^2$ bo'lsa,

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^2 \leq \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n)^2 \leq (m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2)(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

bo'ladi. Bu tengsizlikda $m_1 = b_1^2, m_2 = b_2^2, \dots, m_n = b_n^2$,

$$x_1 = \frac{a_1}{b_1}, x_2 = \frac{a_2}{b_2}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

desak, $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Koshi-Bunyokovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

7) $f(x) = x^p, p > 1, x > 0$ bo'lsa,

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^p \leq \frac{m_1 x_1^p + m_2 x_2^p + \dots + m_n x_n^p}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n)^p \leq (m_1 x_1^p + m_2 x_2^p + \dots + m_n x_n^p)(m_1 + m_2 + \dots + m_n)^{p-1}$$

bo'ladi. Bu tengsizlikda

$$q = \frac{p}{p-1}, m_1 = b_1^q, m_2 = b_2^q, \dots, m_n = b_n^q, x_1 = \frac{a_1}{b_1^{q-1}}, x_2 = \frac{a_2}{b_2^{q-1}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n^{q-1}}$$

desak, $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^p \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{p}{q}}$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Gyolder tengsizligi kelib chiqadi.

1.3 INTEGRAL TENGLAMALARNING TASNIFI VA INTEGRAL TENGLAMAGA KELTIRILADIGAN MASALALAR

Integral tenglamalar deb, odatda, nom'lum funksiya integral ishorasi ostida bo'lgan tenglamalarga aytiladi.

Biz bu bobda noma'lum funksiya chiziqli ishtirok etgan tenglamalarni, ya'ni ushbu

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.3.1)$$

ko'rinishdagi chiziqli integral tenglamalarni tekshiramiz. Bu yerda $\varphi(x)$ — noma'lum funksiya, $K(x,y)$ va $f(x)$ funksiyalar mos ravishda $\{a \leq x \leq b\}$ kvadratda va $a \leq x \leq b$ oraliqda aniqlangan funksiyalar (a, b — o'zgarmas sonlar). Bu kvadrat va oraliqni asosiy kvadrat va asosiy oraliq deb yuritiladi.

$f(x)$ funksiya (1.3.1) integral tenglamaning *ozod hadi*, $K(x,y)$ uning *yadrosi*, λ sonli ko'paytuvchi tenglamaning *parametrideyiladi*.

Qayd qilib o'tamizki, (1.3.1) bitta integral tenglama bo'lmay, balki sonli λ parametrga bog'liq bo'lgan integral tenglamalar oilasidir. Agar $\lambda K(x,y)$ ko'paytmani $K_1(x,y)$ bilan belgilab, $K_1(x,y)$ ni yangi yadro deb qarasak, u holda tenglamaning parametrik 1 ga teng bo'lib qoladi. Lekin, λ parametmi kiritish integral tenglamalarni o'rganishda foydali bo'lishiga keyinchalik biz ishonch hosil qilamiz. (1.3.1) integral tenglama *ikkinchi tur chiziqli integral tenglama* yoki bunday tenglamalarni birinchi bo'lib o'rgangan matematik nomi bilan *Fredgolm integral tenglamasi* deyiladi.

Agar $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, ya'ni

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = 0 \quad (1.3.2)$$

tenglama (1.3.1) ga mos bo'lgan bir jinsli integral tenglama deyiladi.

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\psi(y)dy = 0 \quad (1.3.3)$$

tenglama (1.3.2) bir jinsli tenglamaga qo'shma integral tenglama deyiladi.

Fredgolmning birinchi tur tenglamasi deb,

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.3.4)$$

ko'rinishdagi integral tenglamaga aytiladi.

Fredgolm tenglamalarida yadro va ozod had mos ravishda asosiy kvadrat va asosiy oraliqda uzluksiz, yoki ushbu

$$\int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2 dy dx < +\infty, \quad (1.3.5)$$

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < +\infty \quad (1.3.6)$$

shartlarni qanoatlantiradi, deb hisoblanadi. Ravshanki, $K(x, y)$ yadro $\{(x, y): a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ kvadratda uzluksiz bo'lsa, (1.3.5) shart bajariladi. (1.3.5) shartni qanoatlantiruvchi yadrolar Fredgolm yadrosi deb ataladi.

Agar ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasining umumiy yechimi $\Phi(x)$ mavjud bo'lsa,

$$\Phi(x) = \varphi^0(x) + \varphi(x)$$

ko'rinishga ega bo'lishini tekshirib ko'rish qiyin emas, bunda $\varphi^0(x)$ (1.3.2) tenglamaning umumiy yechimi, $\varphi(x)$ esa (1.3.1) tenglamaning xususiy yechimidir. Haqiqatan ham, agar $\Phi(x)$ va $\varphi(x)$ mos ravishda bir jinsli bo'lmagan (1.3.1) tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari bo'lsa, ularning ayirmasi $\varphi^0(x) = \Phi(x) - \varphi(x)$ (1.3.2) tenglamaning yechimi bo'ladi. Bundan darhol yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

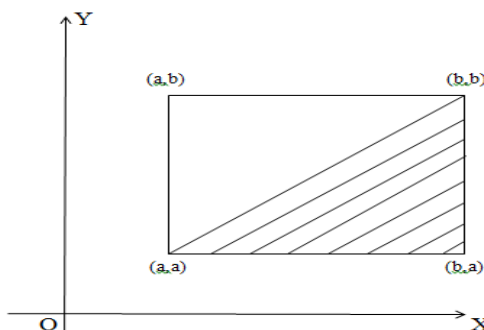
Agar (1.3.1) tenglamada integral chegaralaridan bittasi, masalan, yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lsa, ya'ni

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad x > a \quad (1.3.7)$$

ko'rinishdagi tenglama Volterraning ikkinchi tur integral tenglamasi,

$$\int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (1.3.8)$$

tenglama esa, Volterraning birinchi tur integral tenglamasi deyiladi.



(1.3.1-chizma)

Volterra tenglamasini ayrim shartlar bajarilganda Fredgolm tenglamasining xususiy holi deb qarash mumkin. (1.3.7) tenglamada $K(x, y)$ yadro masalaning ma'nosi bo'yicha $a \leq y \leq x$ oraliqda aniqlangan. Uni $y > x$ bo'lganda $K(x, y) = 0$, $x < y \leq b$ deb hisoblab, qo'shimcha aniqlaymiz. U holda (1.3.7)

tenglamaning yadrosi

$$\bar{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & y \leq x; \\ 0, & y > x \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlangan Fredgolm tenglamasining xususiy holi deb qarash mumkin (1.3.1- chizma). Kvadratning shtrixlangan yarmida $K(x, y)$ yadro $K(x, y)$ yadro bilan ustma-ust tushadi, ikkinchi yarmida esa aynan nolga teng, $K(x, y)$ yadro bunday aniqlanganda Fredgolmning

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \bar{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

tenglamasi aynan Volterraning (1.3.7) tenglamasidan iborat bo'ladi. Bundan, Fredgolm tenglamasi uchun olingan natijalarni uning xususiy holi deb qaralgan Volterra tenglamasi uchun ham o'tkazish mumkinligi kelib chiqadi. Ammo Volterra tenglamalari o'ziga xos bo'lgan, Fredgolm tenglamalari ega bo'lmagan xususiyatlarga ham egadir.

Ushbu

$$a(x)\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (1.3.9)$$

tenglama uchinchi tur integral tenglama deyiladi.

Agar $a \leq x \leq b$ oralig'ida $a(x) \equiv 0$ bo'lsa, (1.3.9) dan (1.3.4) tenglama, $a(x) \equiv 1$ bo'lsa, (1.3.1) tenglama kelib chiqadi. Lekin bu oralig'ning ayrim nuqtalarida $a(x)$ funksiya nolga teng bo'lib, qolgan nuqtalarda esa noldan farqli bo'lishi mumkin. Bu holda (1.3.9) tenglamani maxsus tekshirishga to'g'ri keladi. Biz bu bobda bunday tenglamalarni o'rganmaymiz.

Noma'lum funksiya integral ishorasi ostida chiziqli ishtirok etsa, bunday tenglamalarni chiziqli bo'lmagan integral tenglamalar deyiladi.

Masalan, nomalum funksiya n – darajasi bilan integral tenglamaga kirishi mumkin, ya'ni

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi^n(y) dy = f(x).$$

Noma'lum funksiya integral tenglamada umumiyroq holda ham qatnashishi mumkin, masalan

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy$$

Bu tenglama *Urison tenglamasi* deyiladi.

Urison tenglamasining muhim xususiy holi bo'lgan ushbu

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y) F(y, \varphi(y)) dy$$

tenglamani *Gammershteyn tenglamasi* deb ataladi, bu yerda $K(x, y)$ – Fredgolm yadrosi. Ushbu

$$\varphi(x) = \int_a^b (F(x, y, \varphi(y))) dy$$

tenglama Volterranning chiziqli bo'lmagan integral tenglamasidan iborat, bu yerda $F(x, y, \varphi(y))$, $a \leq x, y \leq b$ – $M \leq \varphi \leq M$ sohada x, y, φ argumentlarning uzluksiz funksiyasidir.

Amaliy masalalarda tez-tez shunday integral tenglamalarni yechishga to'g'ri keladiki, ularda noma'lum funksiya ko'p argumentli bo'ladi.

E^n Yevklid fazosidagi chegaralangan sohani D orqali, bu sohaga tegishli nuqtalami $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ orqali belgilab olamiz. $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ noma'lum, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $K(x, y) = K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ berilgan funksiyalar, λ – berilgan sonli parametr bo'lsin. Bu holda Fredgolmning ko'p o'lchovli ikkinchi tur integral tenglamasi

$$\varphi(x) - \lambda \int_D \dots \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

ko'rinishda yoziladi, bundan $dy = dy_1 \dots dy_n$. Qisqalik uchun D soha bo'yicha olingan integralni bitta integral bilan belgilasak, avalgi tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\varphi(x) - \lambda \int_D K(x, y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Bu integral tenglamada integral D sohani chegaralab turgan S sirt bo'yicha ham olinishi mumkin. Bunday integral tenglamalarni tekshirishda (1.3.1) tenglamaga nisbatan katta qiyinchiliklar kelib chiqmaydi. Shu sababli, biz e'tiborimizni ko'proq (1.3.1) tenglamani o'rganishga qaratamiz.

Ketma-ket yaqinlashtirish usuli

Biz bu bobda, asosan Fredgolmning ikkinchi turdagi

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (1.3.10)$$

integral tenglamasini tekshiramiz. (1.3.10) tenglamada $K(x, y)$ yadroni va $f(x)$ funksiyani uzluksiz funksiyalar deb hisoblaymiz, shuning uchun

$$\int_a^b |K(x, y)| dy \leq M, \quad a \leq x \leq b, \quad \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = m \quad (1.3.11)$$

bo'ladi.

Tabiiyki, bu holda (1.3.10) tenglamaning yechimini ham uzluksiz funksiyalar sinfidan izlaymiz.

1.3.1-teorema. Agar (1.3.10) tenglamaning parametri

$$|\lambda| < \frac{1}{M} \quad (1.3.12)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda bu tenglamaning yagona $\varphi(x)$ yechimi mavjud bo'lib, uni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan topish mumkin.

Isbot .Nolinchi yaqinlashish sifatida (1.3.11) tenglamaning ozod hadini qabul qilamiz, ya'ni

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

Birinchi yaqinlashishni

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y) dy$$

munosabat bilan aniqlaymiz. Bu jarayonni davom ettirib, n – yaqinlashishni

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.13)$$

formula bilan aniqlaymiz.

Shunday qilib, (1.3.13) rekurrent munosabatlarni qanoatlantruvchi

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), K, \varphi_n(x), \dots \quad (1.3.14)$$

funksiyalar ketma – ketligiga ega bo’lamiz. Matematik analzdan ma’lumki, (1.3.14) ketma-ketlikning yaqinlashishi

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \quad (1.3.15)$$

qatorning yaqinlashishiga teng kuchlidir. (1.3.13) formulani

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) [\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y) + \varphi_{n-2}(y)] dy = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-2}(y) dy + \lambda \int_a^b K(x, y) [\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y)] dy = \\ &= \varphi_{n-1}(y) + \lambda \int_a^b K(x, y) [\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y)] dy, \quad n = 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (1.3.16)$$

ko'rinishida yozib olamiz . (1.3.11) munosabatlarga asosan (1.3.16) dan darhol quyidagi tengsizliklar kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &\leq m\lambda M, \\ |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\leq m\lambda^2 M^2, \\ &..... \\ |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| &\leq m\lambda^n M^n. \end{aligned}$$

Shunday qilib, (1.3.15) qatorning har bir hadi musbat hadli

$$\sum_{n=0}^{\infty} m|\lambda|^n M^n \quad (1.3.17)$$

qatorning mos hadidan kata emas. (1.3.17) qator esa, (1.3.12) tengsizlikka asosan yaqinlashuvchidir. Demak, (1.3.15) qator, natijada uzluksiz funksiyalarning (1.3.14) ketma-ketligi uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga absolut va tekis yaqinlashadi. (1.3.13) tenglikdan $\rightarrow \infty$ da limitga o'tib,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

tenglikni hosil qilamiz, bu esa $\varphi(x)$ funksiya (1.3.10) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatadi.

Endi (1.3.10) tenglamaning $\varphi(x)$ dan boshqa yechimi yo'qligini ko'rsatish qiyin emas. Buning uchun aksincha, ya'ni (1.3.10) tenglamaning $\varphi(x)$ dan boshqa yana bitta $\psi(x)$ yechimi bor deb, faraz qilamiz. U holda bu yechimlarning ayirmasi $\omega(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ (1.3.10) tenglamaga mos bo'lgan bir jinsli tenglamaning yechimidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\omega(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \omega(y) dy.$$

$\omega_0 = \max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|$ deb belgilab olsak, oxirgi tengsizlikdan

$$\omega \leq |\lambda| M \omega_0$$

tengsizlikka ega bolamiz. Agar $\omega \neq 0$ bo'lsa, oxirgi tengsizlik (1.3.12) tengsizlikka qarama-qarshidir. Demak, $\omega_0 = 0$, bundan $\omega(x) = 0$, ya'ni $\varphi(x) = \psi(x)$ ekanligi kelib chiqadi.

Fredgolm teoremlari

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli integral tenglamalar nazarivasiida algebradan ma'lum bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishga doir teoremlar muhim rol o'ynaydi.

Biz bu bandda keyinchalik bizga kerak bo'ladigan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalariga taalluqli teoremlarni, asosan isbotsiz keltiramiz.

Tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.18)$$

ko'rinishida sistemani tekshiramiz.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar x va b vektor — ustunlarning koordinatalari deb, ya'ni

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

a_{ij} koeffitsiyentlarni esa, ushbu

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsaning elementlari deb talqin qilamiz. U holda (1.4.18) sistemani bitta

$$Ax = b$$

vektor tenglama ko'rinishida yozish mumkin. Ma'lumki, A matritsa berilgan bolsa, uning satrlarini ustunlariga almashtirish natijasida hosil bo'lgan matritsani A bilan transponirlangan matritsa deyiladi.

Agar A matritsaning a_{ij} elementlari kompleks sonlardan iborat bolsa, transponirlangan matritsa elementlarini qo'shma kompleks $\overline{a_{ij}}$ elementlar bilan almashtirish natijasida A matritsaga qo'shma A^* matritsa hosil boladi.

Shunday qilib, agar $A = \|a_{ij}\|$ bo'lsa, $A^* = \|\overline{a_{ij}}\|$ bo'ladi. a_{ij} elementlar haqiqiy sonlar bo'lsa, A matritsaga qo'shma boigan A^* matritsa transponirlangan matritsaning o'zidan iborat boladi.

Ushbu

$$A^*y = c$$

yoki, yoyib yozilganda

$$\sum_{j=1}^n \overline{a_{ij}} y_j = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tenglamalar sistemasi (1.3.18) sistemaga *qo'shma sistema* deyiladi.

Qo'shma sistemaning o'ng tomonidagi vektor ixtiyoriy bo'lishi mumkin. Koeffitsientlari haqiqiy sonlardan iborat sistemaga qo'shma sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = c_i$$

ko'rinishga ega boladi. Biz quyida keltiradigan tushuncha va teoremlarda sistemaning koeffitsientlari haqiqiy yoki kompleks sonlar bolishining farqi yo'q. O'zaro qo'shma matritsalarining determinantlari bir vaqtda nolga teng yoki teng bo'lmaydi; qo'shma matritsalar bir xil rangga ega bo'ladi.

1.3.2- teorema. Agar algebraik tenglamalar sistemasining determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda berilgan sistema ham va unga qo'shma bo'lgan sistema ham ixtiyoriy ozod hadlarda yechiladi va bu sistemaning yechimlari yagona bo'ladi. Bu holda bir jinsli sistema faqat trivial (nolga teng) yechimga ega bo'ladi.

1.3.3- teorema. Agar algebraik tenglamalar sistemasining determinanti nolga teng bo'lsa, u holda bir jinsli $Ax = 0$ va $A^*y = 0$ sistemalar bir xil sonda

$p = n - r$ chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi, bu yerdagi r — A matritsaning rangi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, agar $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ va $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(p)}$ lar $Ax = 0$ va $A^*y = 0$ sistemalarning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlari bo'lsa, u holda bu sistemalarning umumiy yechimi

$$x = \sum_{j=1}^p \gamma_j x^{(j)}, \quad y = \sum_{j=1}^p \gamma_j^* y^{(j)}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bundagi γ_j va γ_j^* lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

1.3.4- teorema. Bir jinsii bo'lmagan (1.3.18) sistemaning yechimga ega bo'lishi uchun A matritsaning rangi, bu matritsaga ozod hadlar ustunini qo'shimcha qilishdan hosil bo'lgan kengaytirilgan matritsaning rangiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar (1.3.18) sistemaning determinanti nolga teng bo'lib, sistema yechiladigan bolsa, u cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi: (1.3.18) sistemaning biror yechimiga unga mos bir jinsli sistemaning ixtiyoriy yechimini qo'shib, yana (1.3.18) sistemaning yechimini hosil qilamiz. Bu holda agar A matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, (1.3.18) sistemaning umumiy yechimi

$$x = x^{(0)} + \sum_{j=1}^p \gamma_j x^{(j)}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerdagi $x^{(0)}$ sistemaning xususiy yechimi, $x^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, p$ lar esa, bir jinsi $Ax = 0$ sistemaning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlaridir.

3-teoremani unga ekvivalent bo'lgan va keyinchalik biz foydalanadigan teorema bilan almashtirish mumkin.

1.3.5-teorema. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (1.3.18) yechimga ega bo'lishi uchun bu sistema ozod hadlari vektorining qo'shma bir jinsii sistema barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremaning isbotini keltiramiz. Eslatib o'tamiz, agar

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$$

bo'lsa, x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

A matritsaning i — ustunidan tashkil topgan vektorni A_i orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(1.3.18) sistemani

$$\sum_{i=1}^n x_i A_i = b$$

ko'rinishida yozib olishimiz mumkin. Bu yozuv shuni ko'rsatadiki. b vektor A_i vektorning chiziqli kombinatsiyasi bo'lgan holda va (faqat shu holdagina (1.3.18) sistema yechimga ega bo'ladi. Buning uchun b vektoring barcha A_i vektorlarga ortogonal bo'lgan har bir vektorga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir.

Shunday vektor y bo'lib, uning komponentlari $y_1, y_2, \dots, y_n$ bo'lsin. $(y, A_j) = 0, j = 1, 2, \dots, n$ shart

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tenglikka ekvivalentdir. Bu esa, y (1.3.18) sistemaga qo'shma bir jinsli sistemaning yechimi ekanligini bildiradi.

Demak, (1.3.18) sistemaning yechimga ega bo'lishi uchun b vektoring qo'shma bir jinsli sistemaning ixtiyoriy yechimga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Aynigan yadroli Fredgolm integral tenglamalari. Fredgolmning ikkinchi tur (1.3.10) tenglamasidagi $K(x, y)$ yadro

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(y) \quad (1.3.19)$$

ko'rinishga ega bo'lsa, y aynigan (*buzilgan*) yadro deb ataladi. Bundagi $p_i(x)$ va $q_i(y)$ funksiyalarni asosiy (a, b) oraliqda uzluksiz funksiyalar deb hisoblaymiz. U holda $K(x, y)$ yadro asosiy kvadratda uzluksiz funksiya bo'ladi. Ayrim adabiyotlarda (1.3.19) ko'rinishdagi yadroni Pinkerle –Gursa yadrosi, qisqacha PG – yadro deb ham yuritiladi. Umumiylikka ziyon yetkazmay, $p_i(x)$ barcha funksiyalarni ham, $q_i(y)$ funksiyalarni ham o'zaro chiziqli bog'liq emas deb hisoblaymiz. Aks holda chiziqli bog'liqlarini boshqalari orqali chiziqli ifodalab, (1.3.19) yig'indida qo'shiluvchilar sonini kamaytirish mumkin. (1.3.19) ifodani (1.3.10) integral tenglamaga qo'yib,

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b p_i(x)q_i(y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.3.20)$$

tenglamani hosil qilamiz. Ushbu

$$c_i = \int_a^b q_i(y)\varphi(y)dy \quad (1.3.21)$$

belgilashlarni kiritib, (1.3.20) integral tenglamani

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i p_i(x) \quad (1.3.22)$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda c_i – nomal'um sonlar. c_i – o'zgarmaslarni aniqlash uchun oxirgi formuladan $\varphi(x)$ ning qiymatini (1.3.20) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$\varphi(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i p_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b p_i(x) q_i(y) \left[f(y) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j p_j(y) \right] dy = f(x)$$

yoki

$$\sum_{i=1}^n p_i(x) \left[c_i - \int_a^b q_i(y) f(y) dy + \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b c_j p_j(y) q_i(y) dy \right] = 0.$$

Bundan $p_i(x)$ funksiyalar chiziqli bo'lmagani uchun

$$c_i - \int_a^b q_i(y) f(y) dy + \lambda \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b p_j(y) q_i(y) dy = 0$$

tenglik kelib chiqadi. Quyidagi belgilarni kiritib,

$$\gamma_i = \int_a^b q_i(y) f(y) dy, \quad a_{ij} = \int_a^b p_j(y) q_i(y) dy \quad (1.3.23)$$

avvalgi tenglikni

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.24)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Shunday qilib, c_i o'zgarmaslarni aniqlash uchun (1.3.24) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qildik. (1.3.20) integral tenglama va (1.3.5) sistemaning ekvivalentligini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan ham, agar $\varphi(x) \in C[a, b]$ funksiya (1.3.20) tenglamaning yechimi bolsa, u holda (1.3.21) tenglik bilan aniqlangan c_i , $i = 1, \dots, n$ sonlar (1.3.24) sistemani qanoatlantirishini hozirgina ko'rsatdik. Aksincha, agar c_i , $i = 1, \dots, n$, sonlar (1.3.24) sistemaning yechimlaridan iborat bo'lsa, (1.3.22) formula bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya $a \leq x \leq b$ oralig'ida uzluksiz bo'lib, (1.3.23) ga asosan (1.3.20) tenglamani qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} & \varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^n p_i(x) \int_a^b q_i(y) \varphi(y) dy - f(x) = \\ & = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i p_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n p_i(x) \int_a^b q_i(y) \left[f(y) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j p_j(y) \right] dy - f(x) \\ & = \\ & = \lambda \sum_{i=1}^n p_i(x) (c_i - \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j - \gamma_i) = 0. \end{aligned}$$

Avvalgi bandda, (1.3.20) tenglamalar sistemasi nazariyasida

$$M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \alpha_{11} & -\lambda \alpha_{12} & \dots & -\lambda \alpha_{1n} \\ -\lambda \alpha_{21} & 1 - \lambda \alpha_{22} & \dots & -\lambda \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \alpha_{n1} & -\lambda \alpha_{n2} & \dots & 1 - \lambda \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

matrisa muhim rol o'ynashini ko'rdik. Bu matrisaning determinantini $D(\lambda)$ orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1 - \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$D(\lambda)$ determinant λ ga nisbatan n – darajali ko'phaddan iboratdir; bu ko'phad

$$D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

bo'lgani uchun aynan noldan farqli. Agar

$$D(\lambda) \neq 0 \quad (1.3.25)$$

bo'lsa, (1.3.24) sistema ixtiyoriy γ_i o'ng tomonlar uchun yagona yechimga ega bolishini va bu yechim Kramer formulalari bilan aniqlanishini bizga ma'lum. (1.3.25) shart $D(\lambda)$ ko'phadning ildizlari bo'lgan λ ning chekli sonagi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$ qiymatlari uchun buziladi. λ ning bu qiymatlari $K(x, y)$ yadroning yoki (1.3.20) tenglamaning xos (xarakteristik) sonlari deyiladi.

Shunday qilib, λ ning $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ lardan farqli bo'lgan har bir chekli qiymatida (1.3.24) sistema yagona $c_1, \dots, c_n$ yechimga ega bo'ladi. Bu yechimni (1.3.22) tenglikning o'ng tomoniga qo'yib, (1.3.20) integral tenglamaning $\varphi(x)$ yechimiga ega bo'lamiz.

Natijada quyidagi teoremani isbotladik.

Fredgolmning birinchi teoremasi. Agar λ parameter $K(x, y)$ yadroning xos soni bo'lmasa, ixtiyoriy uzluksiz $f(x)$ ozod had uchun (1.3.20) integral tenglama yechimga ega, shu bilan birga bu yechim yagona bo'ladi,

(1.3.20) integral tenglamaga mos bir jinsli

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(y) \varphi(y) dy = 0 \quad (1.3.26)$$

tenglama (1.3.24) sistemaga mos bo'lgan ushbu

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j = 0 \quad (1.3.27)$$

bir jinsli chiziqli algebraik sistemaga keladi. (1.3.26) tenglamaga qo'shma bo'lgan bir jinsli tenglama

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(y) \psi(y) dy = 0 \quad (1.3.28)$$

ko'rinishga ega. (1.3.28) tenglama esa (1.3.27) ga qo'shma bo'lgan

$$d_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} d_j = 0 \quad (1.3.29)$$

bir jinsli sistemaga teng kuchlidir, bundan

$$d_i = \int_a^b p_i(x)\psi(y)dy, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Agar $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \dots, m$ bo'lib, $M(\lambda)$ matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, 1-banddagi 2-teoremadan ma'lumki, bir jinsii (1.3.27) sistema ham va unga qo'shma bo'lgan (1.3.29) sistema ham $n - r$ ta

$$c_1^j, \dots, c_n^j, \quad d_1^j, \dots, d_n^j, \quad j = 1, 2, \dots, n - r$$

chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi. Bu yechimlarni (1.3.26) va (1.3.28) dan hosil bo'lgan ushbu

$$\varphi_j(x) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i^j p_i(x), \quad \psi_j(x) = \lambda \sum_{i=1}^n d_i^j q_i(x), \quad j = 1, 2, \dots, n - r \quad (1.3.30)$$

formulalarning o'ng tomonlariga qo'yib, (1.3.26) va (1.3.28) bir jinsli integral tenglamalarning $n - r$ tadan chiziqli erkli yechimlarini hosil qilamiz.

Fredgolmning ikkinchi teoremasi. Bir jinsii (1.3.26) tenglama va unga qo'shma bo'lgan (1.3.28) tenglama bir xil $n - r$ tadan chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi.

Bir jinsii (1.3.26) tenglamaning nolga teng bo'lmagan $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n - r$ yechimlari (1.3.20) tenglamaning yoki $K(x, y)$ yadroning λ_k , $k = 1, \dots, m$ xos sonlariga mos bo'lgan xos funksiyalari deyiladi.

Avvalgi banddagi 4 - teoremadan ma'lumki, $\lambda = \lambda_k$ bo'lganda (1.3.24) sistema ixtiyoriy o'ng tomonlar uchun yechimga ega bo'lavermaydi. Bu sistemaning yechimga ega bo'lishi uchun γ_i , $i = 1, \dots, n$ sonlar

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - r \quad (1.3.31)$$

shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir. Bu shartlarda γ_i o'rniga uning qiymatini qo'yib, (1.3.31) ga teng kuchli bo'lgan quyidagi tengliklar aistemasiga ega bo'lamiz:

$$\lambda \sum_{i=1}^n \gamma_i d_i^j = \lambda \sum_{i=1}^n d_i^j \int_a^b q_i(x)f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x) \sum_{i=1}^n d_i^j q_i(x) dx = 0.$$

Bundan (1.3.30) ga asosan

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - r$$

tengliklar hosil boladi.

Biror D sohada, xususan (a, b) oraliqda, ikkita funksiyaning ko'paytmasidan olingan integral nolga teng bo'lsa, bu funksiyalar ortogonal deb ataladi.

Shunday qilib biz quyidagi teoremani isbot qildik.

Fredgolmning uchinchi teoremasi. $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \dots, m$ bo'lganda (1.3.20) integral tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun uning ozod

hadi $f(x)$ funksiyaning qo'shma bir jinsli (1.3.28) integral tenglamaning barcha $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n-r$ yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu holda (1.3.20) tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega va bu yechimlar ushbu ko'rmishdida boladi:

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) + \sum_{j=1}^{n-r} \beta_j \varphi_j(x),$$

bu yerda $\bar{\varphi}(x)$ (1.3.20) tenglamaning xususiy yechimi, yig'indi esa (1.3.26) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi.

Uzluksiz yadroli Fredolmning ikkinchi tur integral tenglamasi.

Agar $K(x, y)$ funksiya asosiy kvadratda uzluksiz bo'lsa, matematik analiz kursida isbotlanadigan Veyershtass teoremasiga asosan, har bir $\varepsilon > 0$ uchun x va y ga nisbatan yetarli yuqori darajada shunday $K_0(x, y)$ ko'phad mavjud boladiki, asosiy kvadratda

$$|K(x, y) - K_0(x, y)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli boladi. Ravshanki, $K_0(x, y)$ ko'phadning har bir hadini bittasi x ga, ikkinchisi y ga bog'liq bo'lgan ikkita funkinyaning ko'paytmasi sifatida ifodalash mumkin. Shu sababli $K(x, y)$ yadroni

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(y) + K_1(x, y) \quad (1.3.32)$$

ko'rinishida yozib olishimiz mumkin. Bundagi $K_1(x, y)$ ifoda $\{a \leq x, y \leq b\}$ kvadratda

$$\int_a^b |K(x, y)| dy < \varepsilon \quad (1.3.33)$$

shartni qanoatlantruvchi uzluksiz funksiyaadir.

(1.3.32) tenglik $K(x, y)$ yadroning kichik va aynigan yadrolar yig'indisiga ajratilganligini ifodftlovchi formuladir.

Ixtiyoriy $R > 0$ sonni belgilab olib, (1.3.10) tenglamani λ parametrningqiymatlari faqat $|\lambda| \leq R$ doirada yotgandagina tekshiramiz. $\varepsilon > 0$ sonni shunday kichik qilib tanlaymizki, $\varepsilon < \frac{1}{2R}$ bo'lsin. (1.3.32) tenglikka asosan (1.3.10) integral tenglamani

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_1(x, y)\varphi(y)dy = F(x) \quad (1.3.34)$$

Ko'rinishida yozib olamiz, bu yerda

$$F(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b p_i(x)q_i(y)\varphi(y) dy. \quad (1.3.35)$$

Shunday qilib, parametric $|\lambda|\varepsilon < 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi tenglamani hosil qildik. 1- § dan ma'lumki, bunday integral tenglama yagona yechimga ega

bo'ladi. $K_1(x, y)$ yadroning rezolventasini $R_1(x, y; \lambda)$ orqali belgilab, (1.3.34) tenglamani

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R_1(x, y; \lambda) F(y) dy \quad (1.3.36)$$

ko'rinishda yozib olamiz. (1.3.36) tenglikdagi $F(x)$ o'rniga uning (1.3.35) dagi qiymatini olib borib qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b p_i(x) q_i(y) \varphi(y) dy + \\ + \lambda \int_a^b R_1(x, t; \lambda) \left[f(y) + \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b p_i(t) q_i(y) \varphi(y) dy \right] dt. \end{aligned}$$

Ushbu

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_1(x, t; \lambda) f(t) dt \\ r_i(x, \lambda) = p_i(x) + \lambda \int_a^b R_i(x, t; \lambda) p_i(t) dx \end{aligned}$$

belgilashlarni kiritib,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n r_i(x, \lambda) q_i(y) \varphi(y) dy = g(x) \quad (1.3.37)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Fredgolm alternativasi. Agar (1.3.10) tenglamaga mos bir jinsli

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (1.3.38)$$

tenglama λ ning har bir tayin qiymati uchun noldan farqli yechimga ega bo'lmasa, (1.3.10) tenglama ixtiyoriy ozod had $f(x)$ uchun $f(x)$ yagona yechimga ega bo'ladi; agar (1.3.38) bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lsa. (1.3.38) tenglama ham va unga qo'shma

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x) \psi(y) dy = 0 \quad (1.3.39)$$

bir jinsli tenglama ham bir xil chekli sondagi chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi: u holda (1.3.10) tenglama ixtiyoriy $f(x)$ uchun yechimga ega bo'lavermaydi, (1.3.10) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun uning ozod hadi $f(x)$ qo'shma (1.3.39) bir jinsli tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

Bunda $\psi_i(x)$ funksiyalar (1.3.39) tenglamaning barcha chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlari.

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.40)$$

algebraik sistemaning determinant

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1 - \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$|\lambda| \leq R$ doirada λ ning analitik funksiyasidir, chunki bu doirada α_{ij} koeffitsientlar λ ga nisbatan analitikdir. $D_R(0) = 1$ bo'lgani uchun $D_R(\lambda)$ funksiya noldan farqli. Bundan analitik funksiyalarning yagonalik xossasiga asosan $D_R(\lambda)$ determinant $|\lambda| \leq R$ doirada faqat chekli sondagi nollarga ega degan xulosaga kelamiz.

Aynan nolga teng bo'lgan funksiya ravshanki, bir jinsli (1.3.38) tenglamaning va unga qo'shma bo'lgan (1.3.39) bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi. Bundan keyin bir jinsli (yoki unga qo'shma) tenglamaning yechimi deganda aynan noldan farqli yechimni tushunamiz.

Endi 1 – banddagiday quyidagi ta'riflarni kiritishimiz mumkin.

Bir jinsli (1.3.38) tenglama $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, yechimlarga ega bo'lgan λ parametirning qiymatini $K(x, y)$ yadroning yoki (1.3.10) tenglamaning xos soni, $\varphi_i(x)$ funksiyalarni esa shu yadro yoki tenglamaning λ xos songa mos **bo'lgan xos funksiya lari deyiladi**.

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishning 1-bobi tengsizliklar va integral tenglamalar haqida asosiy malumotlar deb nomlanib, bu bobning birinchi mavzusi tengsizliklar va ularning klassifikatsiyasi bolib, bu mavzuda tengsizliklar va ularning klassifikatsiyasi haqida to'liq ma'lumot berilib, misollar orqali o'rganilib borildi.

Ushbu bobning ikkinchi mavzusi sodda tengsizliklarning muhim hollari deb nomlanib, bu mavzuda Koshi tengsizligining isboti va Yung, Minkovskiy, Gyolder tengsizliklari o'rganildi.

Bu bobning uchinchi mavzusi Integral tenglamalarning umumiy tasnifi bo'lib, unda Fredholm va Volterra tenglamalari haqida malumotlar keltirildi.

II. INTEGRAL TENGSIZLIK VA UNING KLASSIFIKATSIYASI

2.1.Chiziqli xosmas integral tengsizlikning muhim tadbiri

Hozirgi davrda integral tengsizliklar turli yo'nalishlarda umumiyashtirilib, integral, differensial, integro-differensial va xususiy hosilali differensial tenglamalar yechimlarining xossalarini o'rganishda muvaffaqiyat bilan qo'llanilmoqda.

2.2.1-teorema:(Gronuoll) Agar $I(a \leq t < \infty)$ yarim o'qda aniqlangan, uzluksiz $u(t) \geq 0$ funksiya va o'zgarmas $C \geq 0, K \geq 0$ sonlar uchun

$$u(t) \leq C + K \int_a^t u(s) ds \quad (2.1.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu I yarim o'qda

$$u(t) \leq C \exp\{K(t - a)\} \quad (2.1.2)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

2.1.2 – teorema. Faraz qilaylik $I(-\infty \leq t < t_0)$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz $u(t) \geq 0, \lambda(t) \geq 0, P(-\infty \leq t < t_0, -\infty < s \leq t)$ sohada aniqlangan uzluksiz $\mu(t, s) \geq 0$ funksiya hamda o'zgarmas $\mu \geq 0, \eta \geq 0$ sonlar uchun

$$u(t) \leq \mu + \eta \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s)u(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau)u(\tau) d\tau \right] ds \quad (2.1.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin, bu yerda

$$\int_{-\infty}^t \lambda(s) ds < \infty, \int_{-\infty}^t \lambda(s) \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau ds < \infty.$$

U holda shu I oraliqda

$$u(t) \leq \mu \exp \left\{ \eta \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds \right\} \quad (2.1.4)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\omega(t) = \mu + \eta \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s)u(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau)u(\tau) d\tau \right] ds$$

bu tenglikni t bo'yicha differensiallaymiz, u holda

$$\omega'(t) = \eta \left[\lambda(t)u(t) + \int_{-\infty}^t \mu(t, \tau)u(\tau) d\tau \right]$$

hosil bo'ladi. Bu tenglikning har ikkala tomonini $\omega(t) \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} = \beta \left[\lambda(t) \frac{u(t)}{\omega(t)} + \int_{-\infty}^t \mu(t, \tau) \frac{u(\tau)}{\omega(t)} d\tau \right]$$

agar $t \geq s$ bo'lganda $\omega(t) \geq \omega(s)$ va $\omega(t) \geq u(t)$ ekanligini nazarga olsak

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \eta \lambda(t) + \eta \int_{-\infty}^t \mu(t, \tau) d\tau$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizliklarni $-\infty$ dan t gacha integrallab, quyidagini topamiz

$$\ln \omega(t) - \ln \mu = \eta \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds$$

yoki

$$\ln \frac{\omega(t)}{\mu} = \eta \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds$$

bundan

$$\omega(t) \leq \mu \exp \left\{ \eta \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds \right\}$$

$u(t) \leq \omega(s)$ ekanligini nazarga olsak oxirgi tengsizlikdan isbot talab etilgan tengsizlik kelib chiqadi.

Endi yarim o'qdagi chiziqli bo'lmagan integro – differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

Ushbu

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + \int_{-\infty}^t F(t, s, x) ds \quad (2.1.5)$$

yarim o'qdagi chiziqli bo'lmagan integro – differensial tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaning

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = c \quad (2.1.6)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish bilan shug'ullanamiz.

(2.1.5) – (2.1.6) birgalikda Koshining limitik masalasi deb aytiladi.

Biz avvalo (2.1.3) – (2.1.4) masalaning yechimini topishni unga ekvivalent bo'lgan integral tenglamaning yechimini topish masalasiga keltiramiz. Haqiqatdan (2.1.5) tenglamaning (2.1.6) shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsa, u holda

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) + \int_{-\infty}^t F(t, s, x(s)) ds \quad (2.1.7)$$

ayniyatga ega bo'lamiz. Bu tenglikning har ikkala tomonini $-\infty$ dan t gacha integrallab, (2.1.6) ni hisobga olsak ushbu integral tenglamaga kelamiz:

$$x(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, x(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds \quad (2.1.8)$$

bu tenglamani ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida yechamiz. Yechimga ketma-ket yaqinlashishlarni quyidagicha qaraymiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0(t) = c \\ x_1(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, x_0(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x_0(\tau)) d\tau ds \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, x_{n-1}(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau ds \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

quyida shu $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t), \dots$ ketma-ketlikning biror $x(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashishini, $x(t)$ funksiyaning uzluksizligini va uning (2.1.8) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. (2.1.9) tengliklardagi $x_n(t)$ funksiyaning (2.1.8) tenglamaning taqribiy yechimi ham bo'ladi. Uning aniq yechim bilan farqini ham baholash mumkinligini ko'ramiz. So'ngra ma'lum shartlar bajarilganda yechimning yagonaligi ham ko'rsatamiz.

2.1.3 – teorema. Faraz qilaylik

1) $F(t, x)$ funksiya $D = \{(t, x): -\infty \leq t < t_0, |x| < \infty\}$ sohada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar bo`lib, bundan tashqari

$$\int_{-\infty}^t |F(s, c)| ds < \infty, \quad \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |K(s, \tau, c)| d\tau ds < \infty$$

shartlar bajarilsin.

2) $F(t, x)$ va $K(t, s, x)$ funksiyalar x argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{aligned} |F(t, x_1) - F(t, x_2)| &\leq \lambda(t)|x_1 - x_2| \\ |K(t, s, x_1) - K(t, s, x_2)| &\leq \mu(t, s)|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

bu yerda

$$\int_{-\infty}^t \lambda(s) ds < \infty, \quad \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau ds < \infty$$

deb hisoblanadi. U holda (2.1.5) – (2.1.6) masala $I(-\infty, t_0)$ oraliqda yagona uzluksiz yechimga ega bo'ladi. bundan tashqari aniq va taqribiy yechimlar orasidagi farq quyidagicha baholanadi.

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \frac{a(t_0)b^{n-1}(t_0)}{n!} \exp \left\{ \int_{-\infty}^t \left[\lambda(t) + \int_{-\infty}^t \mu(t,s) d\tau \right] ds \right\}$$

Isbot. Avvalo yechimning mavjudligini isbotlaymiz. Shu maqsadda (2.1.9) tenglikdan ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_0(t)| &= \left| \int_{-\infty}^t F(s, x_0(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x_0(\tau)) d\tau ds \right| \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^t |F(s, c)| ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |K(s, \tau, c)| d\tau ds = a(t) \\
|x_2(t) - x_1(t)| &= \int_{-\infty}^t |F(t, x_1(s)) - F(t, x_0(s))| ds + \\
&+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s |K(s, \tau, x_1(\tau)) - K(s, \tau, x_0(\tau))| d\tau ds \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x_1(s) - x_0(s)| ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x_1(s) - x_0(\tau)| d\tau ds = \\
&\leq \int_{-\infty}^t \lambda(s) \left[|x_1(s) - x_0(s)| ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x_1(\tau) - x_0(\tau)| d\tau \right] ds \leq \\
&\leq a(t) \int_{-\infty}^t \lambda(s) \left[1 + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds = a(t)b(t)
\end{aligned}$$

bu yerda

$$b(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(s) \left[1 + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds.$$

Bu jarayonni n - marta takrorlasak natijada ushbu

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq a(t) \frac{b^{n-1}(t)}{(n-1)!} \quad (2.1.10)$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Matematik analiz kursidan ma'lumki $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t), \dots$ ketma-ketlikning tekis yaqinlashishini ko'rsatish uchun ushbu

$$x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + \dots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + \dots \quad (2.1.11)$$

qatorning tekis yaqinlashishini ko'rsatish yetarli. Biz yuqorida (2.1.11) qatorning har bir hadi uchun (2.1.10) ko'rinishdagi baholarni topgan edik. Shu sababli (2.1.11) qator uchun ushbu

$$a(t_0) + a(t_0) \frac{b(t_0)}{1!} + a(t_0) \frac{b^2(t_0)}{2!} + \dots + a(t_0) \frac{b^{n-1}(t_0)}{(n-1)!} + \dots$$

qator majorant qator vazifasini bajaradi. bu yaqinlashuvchi sonli qator bo'lganligi uchun (2.1.11) qator absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi (Veyrshtas alomatiga asosan). Demak $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik ham $(-\infty, t_0)$ da tekis yaqinlashadi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t), t \in (-\infty, t_0), \quad (t_0 \leq \infty)$$

F va K funksiyalarning o'z aniqlanish sohaslarida uzluksiz funksiyalar bo'lganligi uchun (2.1.9) tengliklardan ko'rinadiki, $\{x_n(t)\}$ funksiyalar $(-\infty, t_0)$ oraliqda uzluksiz funksiyalarni aniqlaydi. Demak $x(t)$ funksiya ham uzluksizdir. Shunday qilib (2.1.8) tenglamaning uzluksiz yechimi borligini aniqladik. Osongina ko'rsatish mumkinki bu yechim (2.1.8) tenglamani qanoatlantiradi. haqiqatdan $F(t, x)$ va $K(t, s, x)$ funksiyalarning o'z aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lganliklaridan (2.1.9) tengliklarning n – chisida $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$$

bo'lganligi uchun,

$$x(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, x(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds$$

tenglikka ega bo'lamiz. bunda integral ostida limitga o'tish mumkinligi haqidagi teoremdan foydalandik. Endi yechimning yagonaligini ko'ramiz. Faraz qilaylik (2.1.8) tenglama $(-\infty, t_0)$ oraliqda $x(t)$ dan boshqa yana bir $y(t)$ yechimga ham ega bo'lsin. u holda

$$x(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, x(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds$$

va

$$y(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, y(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, y(\tau)) d\tau ds$$

tengliklarga ega bo'lamiz. bularning biridan ikkinchisini ayirib, hosil bo'lgan tenglikning har ikkala tomonidan modul olsak quyidagi tengsizlik hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} & |x(t) - y(t)| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x(s) - y(s)| ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x(\tau) - y(\tau)| d\tau ds \end{aligned}$$

Ixtiyoriy o'zgarmas $\alpha > 0$ soni uchun quyidagi tengsizlikni yozish mumkin

$$\begin{aligned} & |x(t) - y(t)| \leq \\ & \leq \alpha + \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x(s) - y(s)| ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x(\tau) - y(\tau)| d\tau ds \end{aligned}$$

Integral tengsizliklar haqidagi 2.1.2 – teorema asosan bu yerdan quyidagiga ega bo'lamiz

$$|x(t) - y(t)| \leq \alpha \exp \left\{ \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds \right\}$$

$\alpha > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, uni nolga intiltirib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz

$$|x(t) - y(t)| \leq 0.$$

Bundan esa $x(t) - y(t) \equiv 0$ yoki $x(t) \equiv y(t)$ degan xulosaga kelamiz. Demak, (2.1.8) tenglamaning yechimi yagona ekan. Endi aniq va taqribiy yechimlar orasidagi farqlarni baholashga kirishamiz. Yuqorida qayd qilinganidek (2.1.8) tenglamaning aniq yechimi $x(t)$, taqribiy yechimi esa $x_n(t)$ bo'lsin:

$$x(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, x(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x(\tau)) d\tau ds$$

$$x_n(t) = c + \int_{-\infty}^t F(s, x_{n-1}(s)) ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s K(s, \tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau ds$$

bularning biridan ikkinchisini ayirib hosil bo'lgan tenglikning har ikkala tomonidan modul olamiz:

$$|x(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x(s) - x_{n-1}(s)| ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x(\tau) - x_{n-1}(\tau)| d\tau ds$$

o'ng tomonidagi modullar ostidagi ifodaga $x_n(t)$ ni qo'shib va ayirib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| d\tau ds + \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x(s) - x_n(s)| ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x(\tau) - x_n(\tau)| d\tau ds.$$

Bu tengsizlikdagi $|x_n(\tau) - x_{n-1}(s)|$ ayirma modulini (2.1.10) formula yordamida baholaymiz: u holda

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \int_{-\infty}^t \lambda(s) a(s) \frac{b^{n-1}(s)}{(n-1)!} ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) a(\tau) \frac{b^{n-1}(\tau)}{(n-1)!} d\tau ds + \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x(s) - x_n(s)| ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x(\tau) - x_n(\tau)| d\tau ds.$$

yoki

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \frac{a(t)}{(n-1)!} \int_{-\infty}^t b^{n-1} \left[\lambda(s) \left(1 + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right) \right] ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x(s) - x_n(s)| ds + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x(\tau) - x_n(\tau)| d\tau ds$$

bu yerdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|x(t) - x_n(t)| \leq a(t) \frac{b^n(t)}{(n)!} + \int_{-\infty}^t \lambda(s) |x(s) - x_n(s)| ds + \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) |x(\tau) - x_n(\tau)| d\tau ds$$

$a(t) \leq a(t_0)$, $b(t) \leq b(t_0)$, $(t \leq t_0)$ ekanligini nazarga olib oxirgi tengsizlikdan integral tengsizliklar haqidagi 2.1.2 – teoramaga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz.

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \frac{a(t_0)b^n(t_0)}{(n)!} \exp \left\{ \int_{-\infty}^t \left[\lambda(s) + \int_{-\infty}^s \mu(s, \tau) d\tau \right] ds \right\}$$

Bu esa izlangan bahodir. Shu bilan teorema to'liq isbotlandi.

2.2 Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun maxsus integral tengsizliklar

2.2.1-teorema. Agar $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty)$ sohada aniq-langan, uzluksiz, $u(x, y) \geq 0, \varphi(x, y) \geq 0$ funksiyalar va o'zgarmas $C \geq 0$ son uchun

$$u(x, y) \leq C + \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) u(z, t) dt dz \quad (2.2.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, uholdashu G sohada

$$u(x, y) \leq C \cdot \exp \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) dt dz \quad (2.2.2)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Xususiyl holda $\varphi(z, t) = K = \text{const}$ bo'lsa,

$$u(x, y) \leq C \exp(K(x - a)(y - b))$$

va $C = 0$ bo'lsa, $u(x, y) \equiv 0$ bo'ladi.

Isbot. Teoremani $C > 0$ uchun isbotlaymiz, $C = 0$ bo'lganda teoremaning isboti ko'rinib turibdi.

$$v(x, y) = C + \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) u(z, t) dt dz, \quad v(a, y) = C > 0.$$

Bu tenglikni x bo'yicha differensiallaymiz: $v'_x(x, y) = \int_b^y \varphi(x, t) u(x, t) dt$.

$u(x, y) \leq v(x, y)$ ni nazarda tutib, oxirgi tenglikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{v'_x(x, y)}{v(x, y)} = \int_b^y \varphi(x, t) \frac{u(x, y)}{v(x, y)} dt \leq \int_b^y \varphi(x, t) dt,$$

ya'ni

$$\frac{v'_x(x, y)}{v(x, y)} \leq \int_b^y \varphi(x, t) dt.$$

Oxirgi tengsizlikni a dan x gacha integrallaymiz:

$$\ln v(x, y) - \ln v(a, y) \leq \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) dt dz$$

yoki

$$\ln \frac{v(x, y)}{C} \leq \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) dt dz$$

Bu yerdan

$$v(x, y) \leq C \exp \left(\int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) dt dz \right).$$

Bunga asosan $u(x, y) \leq v(x, y)$ tengsizlikka ko'ra isboti talab etilgan (2.2.2) tengsizlik kelib chiqadi.

Ko'rinib turibdiki, agar $\varphi(x, y) = K = \text{const}$ bo'lsa,

$$u(x, y) \leq C \exp(K(x - a)(y - b))$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

2.2.2-teorema. Agar $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty)$ sohada aniqlangan, uzluksiz $u(x, y) \geq 0, f(x, y) \geq 0, g(x, y) \geq 0, \varphi(x, y) \geq 0$, va manfiy bo'lmagan $p'(x), q'(y)$ hosilalarga ega bo'lgan $p(x) > 0$ ($a \leq x < \infty$), $q(y) > 0$ ($b \leq y < \infty$)

$$u(x, y) \leq p(x) + q(y) + \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) u(z, t) dt dz \quad (2.2.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu G sohada

$$u(x, y) \leq \frac{[p(a) + q(y)] \cdot [p(x) + q(b)]}{p(a) + q(b)} \exp \left\{ \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) dt dz \right\} \quad (2.2.4)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Bu teoremaning isboti ham yuqoridagi kabi bo'ladi.

2.2.3-teorema. Agar $\Delta(a \leq x \leq b, b \leq y \leq d)$ sohada aniqlangan, uzluksiz, $u(x, y) \geq 0, f(x, y) \geq 0, g(x, y) \geq 0, \varphi(x, y) \geq 0$ funksiyalar va $\Delta_1(a \leq x \leq l, b \leq y \leq d, a \leq z \leq x, b \leq t \leq y)$ sohada aniqlangan, uzluksiz $\psi(x, y, z, t) \geq 0$ funksiya uchun

$$u(x, y) \leq f(x, y) + \\ + g(x, y) \int_a^x \int_b^y [\varphi(z, t) u(z, t) + \psi(x, y, z, t)] dt dz \quad (2.2.5)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu Δ sohada

$$u(x, y) \leq f(x, y) + g(x, y) \int_a^x \int_b^y \psi(x, y, z, t) dt dz + \\ + g(x, y) \int_a^x \int_b^y \exp \left\{ \int_z^x \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dz_1 dt_1 \right\} \times f(x, y) \varphi(x, y) dt dz + \\ + g(x, y) \int_a^x \int_b^y \exp \left\{ \int_z^x \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dz_1 dt_1 \right\} \varphi(z, t) \times \\ \times g(z, t) \left[\int_z^x \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dz_1 dt_1 \right] dt dz \quad (2.2.6)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremani ketma-ket o'rniga qo'yish usuli bilan isbotlaymiz. (2.2.6)

tengsizlikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$u(x, y) \leq f(x, y) + g(x, y) \int_a^x \int_b^y \psi(x, y, z, t) dt dz + J_0(x, y) + J_1(x, y) + \dots$$

$$+ J_{n-1}(x, y) + I_0(x, y) + I_1(x, y) + \dots + I_{n-1}(x, y) + R_n(x, y),$$

bu yerda

$$J_0(x, y) = g(x, y) \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) f(z, t) dt dz,$$

.....

$$J_{n-1}(x, y) = g(x, y) \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) J_{n-2}(z, t) dt dz,$$

$$I_0(x, y) = g(x, y) \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) g(z, t) \times \int_a^x \int_b^y \psi(z, t, z_1, t_1) dt_1 dz_1 dt dz$$

.....

$$I_{n-1}(x, y) = g(x, y) \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) I_{n-2}(z, t) dt dz,$$

$$R_n(x, y) =$$

$$= g(x, y) \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) g(z, t) \dots \int_a^{z_{n-1}} \int_b^{t_{n-1}} \varphi(z_n, t_n) u(z_n, t_n) dz_n dt_n \dots dt dz.$$

Endi $J_2, \dots, J_{n-1}, I_2, \dots, I_{n-1}, R_n$ larni ketma-ket baholaymiz:

$$J_2(x, y) = g(x, y) \int_a^x dz \int_b^y \varphi(z, t) g(z, t) dt \int_a^z dz_1 \int_b^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dt_1 \times$$

$$\times \int_a^{z_1} dz_2 \int_b^{t_1} \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2.$$

Direxle formulasiga asosan buni quyidagicha yozamiz:

$$J_2(x, y) = g(x, y) \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) g(z, t) V_2(x, y, z, t) dt dz$$

bu yerda

$$V_2(x, y, z, t) = \int_a^z dz_1 \int_b^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dt_1 \\ \times \int_a^{z_1} dz_2 \int_b^{t_1} \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2.$$

Oxirgi munosabatdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$V_2(x, y, z, t) \leq \int_z^x \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dt_1 \times \int_a^{z_1} dz_2 \int_b^{t_1} \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2 + \\ + \int_z^{z_1} \varphi(z_2, t_1) g(z_2, t_1) dt_2 \times \int_t^{t_1} \varphi(z_1, t_2) g(z_1, t_2) dt_1 = \\ = \frac{1}{2} \int_z^x dz_1 \int_t^y \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial t_1} \left[\int_a^{z_1} dz_2 \int_b^{t_1} \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2 \right]^2 dt_1 = \\ = \frac{1}{2!} \left[\int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) u(z, t) dt dz \right]^2.$$

Shunday qilib, quyidagi bahoni hosil qildik:

$$J_2(x, y) \leq \frac{g(x, y)}{2!} \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) f(z, t) \left\{ \int_z^x \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dz_1 dt_1 \right\}^2 dt dz$$

Endi matematik induksiya usuli bilan barcha natural n lar uchun ushbu

$$J_{n-1}(x, y) \leq \frac{g(x, y)}{(n-1)!} \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) f(z, t) \times \\ \times \left\{ \int_z^x \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dz_1 dt_1 \right\}^{n-1} dt dz \quad (2.2.7)$$

tengsizlikning to'g'riligini isbotlaymiz.

Bu tengsizlik $n = 2$ uchun to'g'ri , uni yuqorida isbotlagan edik. Endi (2.2.7) tengsizlik $n - 2$ - nomer uchun to'g'ri bo'lsin. Uning to'g'riligining $n - 1$ - nomer uchun isbotlaymiz. Haqiqatan ham ,

$$\begin{aligned}
 J_{n-1}(x, y) &\leq \frac{g(x, y)}{(n-1)!} \int_a^x dz \int_b^y \varphi(z, t) g(z, t) dt \int_a^z dz_1 \int_b^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dt_1 \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_{z_1}^t dz_2 \int_{t_1}^z \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2 \right\}^{n-2} dt = \\
 &= \frac{g(x, y)}{(n-2)!} \int_a^x dz \int_b^y \varphi(z, t) f(z, t) V_{n-1}(x, y, z, t) dt, \tag{2.2.8}
 \end{aligned}$$

bu yerda

$$\begin{aligned}
 V_{n-1}(x, y, z, t) &= \int_z^x dz_1 \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_z^{z_1} dz_2 \int_t^{t_1} \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2 \right\}^{n-2} dt_1.
 \end{aligned}$$

Oxirgi munosabatdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
 V_{n-1}(x, y, z, t) &\leq \int_z^x dz_1 \int_t^y \{ \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dt_1 \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_z^{z_1} dz_2 \int_t^{t_1} \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2 \right\}^{n-2} + \\
 &\quad + (n-2) \left[\int_z^{z_1} dz_2 \int_t^{t_1} \varphi(z_2, t_2) g(z_2, t_2) dt_2 \right]^{n-3} \times \\
 &\quad \times \int_z^{z_1} \varphi(z_2, t_1) g(z_2, t_1) dt_2 \times \int_t^{t_1} \varphi(z_1, t_2) g(z_1, t_2) dt_2 dt_1 =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \int_z^x dz_1 \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dt_1 \right\}^{n-1}.$$

Bunga asosan, (2.2.9) dan (2.2.8) tengsizlikning to'g'riligi kelib chiqadi.

Xususan, agar (2.2.6) tengsizlikda bo'lsa, (2.2.7) tengsizlik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$u(x, y) \leq C \left[1 + \int_a^x \int_b^y \exp \left\{ \int_z^x \int_t^y \varphi(z_1, t_1) g(z_1, t_1) dz_1 dt_1 \right\} \varphi(z, t) dt dz \right] \leq \\ \leq C \exp \left\{ \int_a^x \int_b^y \varphi(z, t) dt dz \right\}.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, bu yerda Vendroff tengsizligidan aniqroq tengsizlik hosil qilingan.

2.2.4-teorema. Agar $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty)$ sohada aniqlangan, uzluksiz $u(x, y) \geq 0$ monoton kamaymaydigan $f(x, y) \geq 0$ va uzluksiz $\varphi(x) \geq 0$, $(a \leq x < \infty), \psi(y) \geq 0, (b \leq y < \infty)$ funksiyaalr uchun

$$u(x, y) \leq f(x, y) + \int_a^x \varphi(s) u(s, y) ds + \int_b^y \psi(t) u(x, t) dt \quad (2.2.9)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu G sohada

$$u(x, y) \leq f(x, y) \exp \left\{ \int_a^x \varphi(s) ds + \int_b^y \psi(t) dt + \int_a^x \int_b^y \varphi(s) \psi(t) dt ds \right\} \quad (2.2.10)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartiga ko'ra

$$\frac{1}{f(x, y)} \leq \frac{1}{f(s, t)}, \quad \frac{1}{f(x, y)} \leq \frac{1}{f(x, t)}, \quad a \leq s \leq x, b \leq t \leq y$$

ekanini e'tiborga olsak, (2.2.9) tengsizlikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$v(x, y) \leq 1 + \int_a^x \varphi(s) v(s, y) ds + \int_b^y \psi(t) v(x, t) dt$$

bu yerda $v(x, y) = \frac{u(x, y)}{f(x, y)}$. Endi

$$T(x, y) \leq 1 + \int_a^x \varphi(s) v(s, y) ds$$

deb belgilab, oxirgi tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$v(x, y) \leq 1 + \int_b^y \psi(s) v(x, t) dt$$

Bu tengsizlikda x ni parametr deb hisoblab, 2.1.4-teoremaga ko'ra ushbu

$$v(x, y) \leq T(x, y) + \int_b^y T(x, t) \psi(t) \exp\{\psi(\tau) d\tau\} dt$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Oxirgi tengsizlikni $T(x, y)$ ning yuqoridagi qiymatini qo'yib, sodda hisoblashlarni bajarsak, quyidagi tengsizlik hosil bo'ladi:

$$v(x, y) \leq 1 + \int_a^x \varphi(s) W(s, y) ds + \int_a^x \int_b^y \varphi(s) \psi(t) W(s, t) dt ds,$$

bu yerda

$$W(x, y) = v(x, y) \exp \left\{ - \int_b^y \psi(t) dt \right\}.$$

Endi

$$R(x, y) \leq 1 + \int_a^x \varphi(s) W(s, y) ds + \int_a^x \int_b^y \varphi(s) \psi(t) W(s, t) dt ds$$

deb belgilash kiritamiz. Bundan

$$R'_x(x, y) = \varphi(x) W(x, y) + \int_b^y \varphi(x) \psi(t) W(x, t) dt.$$

Agar

$$W(x, y) \leq R(x, y)$$

ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan

$$R'_x(x, y) \leq \varphi(x)R(x, y) + \int_b^y \varphi(x)\psi(t)R(x, t)dt$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bundan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[R(x, y) \exp \left\{ - \int_a^x \varphi(s)ds \right\} \right] \leq \exp \left\{ - \int_a^x \varphi(s)ds \right\} \times \int_b^y \varphi(x)\psi(t)R(x, t)dt$$

tengsizlikni yozish mumkin. Bu tengsizlikning ikki tomonini a dan x gacha integrallaymiz:

$$R(x, y) \exp \left\{ - \int_a^x \varphi(s)ds \right\} \leq 1 + \int_a^x \int_b^y \varphi(s)\psi(t) \exp \left\{ - \int_a^s \varphi(\eta)d\eta \right\} R(s, t) dt ds.$$

Bundan Vendroff tengsizligiga ko'ra quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$R(x, y) \exp \left\{ - \int_a^x \varphi(s)ds \right\} \leq \exp \left\{ \int_a^x \int_b^y \varphi(s)\psi(t) dt ds \right\}.$$

Demak,

$$W(x, y) \leq \exp \left\{ \int_a^x \varphi(s)ds + \int_a^x \int_b^y \varphi(s)\psi(t) dt ds \right\}$$

u holda $W(x, y)$ ning $v(x, y)$ orqali ifodasini e'tiborga olsak,

$$W(x, y) \leq \exp \left\{ \int_a^x \varphi(s)ds + \int_b^y \psi(t)dt + \int_a^x \int_b^y \varphi(s)\psi(t) dt ds \right\}$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Endi $u(x, y) = f(x, y)v(x, y)$ ekanligini hisobga olsak, isbot talab etilgan (2.2.10) tengsizlikni hosil qilamiz.

2.2.1-natija. Agar $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty)$ sohada aniqlangan, $u(x, y) \geq 0$ uzluksiz funksiya va $C \geq 0, p \geq 0, q \geq 0$ sonlar uchun

$$u(x, y) \leq C + \int_a^x u(z, y)dz + q \int_b^y u(x, t)dt$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu G sohada

$$u(x, y) \leq C \exp \{ p(x - a) + q(y - b) + pq(x - a)(y - b) \}$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

2.2.5-teorema. Agar $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty)$ sohada aniqlangan, uzluksiz $u(x, y) \geq 0, k(x, y) \geq 0$ monoton kamaymaydigan, uzluksiz $f(x, y) > 0, \varphi(x) \geq 0 (a \leq x < \infty), \psi(y) \geq 0 (b \leq y < \infty)$ funksiyalar uchun ushbu

$$u(x, y) \leq f(x, y) + \int_a^x \int_b^y k(s, t) u(s, t) dt ds + \\ + \int_a^x \varphi(s) u(s, y) ds + \int_b^y \psi(t) u(x, t) dt \quad (2.2.11)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu G sohada

$$u(x, y) \leq f(x, y) \exp \left\{ \int_a^x \varphi(s) ds + \int_b^y \psi(t) dt + \int_a^x \int_b^y \varphi(s) \psi(t) dt ds + \right. \\ + \int_a^x \int_b^y k(s, t) \exp \left\{ \int_a^s \varphi(\eta) d\eta + \int_b^t \psi(\tau) d\tau \right. \\ \left. \left. + \int_a^s \int_b^t \varphi(\eta) \psi(\tau) d\tau d\eta \right\} dt ds \right\} \quad (2.2.12)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Isbot. Yuqorida isbot etilgan 2.2.4-teoremadagi kabi (2.2.12) tengsizlikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$v(x, y) \leq 1 + \int_a^x \int_b^y k(s, t) v(s, t) dt ds + \int_a^x \varphi(s) v(s, y) ds + \int_b^y \psi(t) v(x, t) dt$$

bu yerda $v(x, y) = \frac{u(x, y)}{f(x, y)}$.

Bu tengsizlikda

$$R(x, y) = 1 + \int_a^x \int_b^y k(s, t) v(s, t) dt ds$$

deb belgilash kiritamiz. U holda

$$v(x, y) \leq R(x, y) + \int_a^x \varphi(s)v(s, y)ds + \int_b^y \psi(t)v(x, t)dt$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan 2.2.4-teoremadagi kabi quyidagini yozish mumkin:

$$v(x, y) \leq R(x, y) \exp \left\{ \int_a^x \varphi(s)ds + \int_b^y \psi(t)dt + \int_a^x \int_b^y \varphi(s)\psi(t)dtds \right\} \quad (2.2.13)$$

Ravshanki, (2.2.12) dan :

$$R'_x(x, y) = \int_b^y k(x, t)v(x, t)dt$$

Agar (2.2.13) tengsizlikni nazarga olsak, oxirgi tengsizlikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{R'(x, y)}{R(x, y)} \leq \int_b^y k(x, t) \exp \left\{ \int_a^x \varphi(s)ds + \int_b^y \psi(\tau)d\tau + \int_a^x \int_b^y \varphi(s)\psi(\tau)d\tau ds \right\} dt$$

Bu tengsizlikni a dan x gacha integrallaymiz:

$$R(x, y) \leq \exp \left\{ \int_a^x \int_b^y k(s, t) \exp \left[\int_a^s \varphi(\eta)d\eta + \int_b^t \psi(\tau)d\tau + \int_a^s \int_b^t \varphi(\eta)\psi(\tau)d\tau d\eta \right] dtds \right\}$$

Bunga asosan,

$$v(x, y) \leq \exp \left\{ \int_a^x \varphi(s)ds + \int_b^y \psi(t)dt + \int_a^x \int_b^y \varphi(s)\psi(t)dtds + \right. \\ \left. + \int_a^x \int_b^y k(s, t) \exp \left[\int_a^s \varphi(\eta)d\eta + \int_b^t \psi(\tau)d\tau + \int_a^s \int_b^t \varphi(\eta)\psi(\tau)d\tau d\eta \right] dtds \right\}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan $v(x, y) = \frac{u(x, y)}{f(x, y)}$ ekanini e'tiborga olsak, isbot talab etilgan tengsizlik hosil bo'ladi.

Ko'rinib turibdiki, agar $k(x, y) \equiv 0$ bo'lsa, bu teoremadan 2.2.4-teorema kelib chiqadi.

2.2.6-teorema. Agar $\Delta(a \leq x \leq b, b \leq y \leq d)$ sohada aniqlangan, uzluksiz $u(x, y) \geq 0, f(x, y) \geq 0$ va uzluksiz $a(x) \geq 0, \varphi(x) \geq 0 (a \leq x \leq l), b(y) \geq 0, \psi(y) \geq 0 (b \leq y \leq d)$ funksiyalar uchun ushbu

$$u(x, y) \leq f(x, y) + a(x)b(y) \int_a^x \int_b^y \varphi(z)\psi(t)u(z, t)dtdz + \\ + a(x) \int_a^x \varphi(z)u(z, y)dz + b(y) \int_b^y \psi(t)u(x, t)dt$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu sohada

$$u(x, y) \leq f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x, y)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$G_n(x, y) = \frac{a(x)}{(n-1)!} \int_a^x f(z, y)\varphi(z) \left[\int_z^x a(z_1)\varphi(z_1)dz_1 \right]^{n-1-v} dz + \\ + \frac{b(y)}{(n-1)!} \int_b^y f(x, t)\varphi(t) \left[\int_t^y b(t_1)\psi(t_1)dt_1 \right]^{n-1} dt + \\ + \sum_{\vartheta=1}^{n-1} G_{n,\vartheta} \frac{a(x)b(y)}{(n-\vartheta-1)!(\vartheta-1)!} \int_a^x \int_b^y f(z_1, t)\varphi(z)\psi(t) \left[\int_z^x a(z_1)\varphi(z_1)dz_1 \right]^{n-1} \\ \times \left[\int_t^y b(t_1)\psi(t_1)dt_1 \right]^{n-1} dtdz,$$

$$G_{n+1,\vartheta} = G_{n,\vartheta-1} + G_{n-1,\vartheta-1}, G_{1,0} = G_{1,1} = 1, G_{2,0} = G_{2,1} = 1, G_{2,1} = 3$$

Bu teoremani ketma-ket yaqinlashish usuli bilan isbot qilish mumkin.

2.2.7-teorema. Agar $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty)$ sohada manfiy bo'lmagan uzluksiz $u(x, y)$ funksiya uchun quyidagi

$$u(x, y) \leq C(x-a)^\alpha(y-b)^\beta + m(x-a)^\gamma(y-b)^\delta \int_a^x \int_b^y \frac{u(s, t) dt ds}{(s-t)(t-b)}$$

(bu yerda $C \geq 0, a \geq 0, b \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$) integral tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu G sohada

$$u(x, y) \leq C(x-a)^\alpha(y-b)^\beta \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(x-a)^{n\gamma}(y-b)^{n\delta}}{\alpha(\alpha+\beta) \dots [\alpha+(n-1)\gamma]\beta(\beta+\delta) + [\beta+(n-1)\delta]} \right\}$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Xususan, agar $\gamma = 0, \delta = 0, m < \alpha\beta, u(x, y) \leq q(x-a)^\alpha(y-b)^\beta$ bo'lsa, quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$u(x, y) \leq C\alpha\beta \frac{(x-a)^\alpha(y-b)^\beta}{\alpha\beta - m};$$

Bu teoremaning isboti 2.1.8-teoremaning isbotiga o'xshash.

2.2.8-teorema. Agar $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty)$ sohada aniqlangan, uzluksiz $u(x, y) \geq 0, f(x, y) \geq 0, \varphi(x, y) \geq 0$ funksiyalar va $G(a \leq x < \infty, b \leq y < \infty, a \leq s \leq x, b \leq t \leq y)$ sohada aniqlangan uzluksiz $\psi(x, y, s, t)$ funksiya uchun ushbu

$$u(x, y) \leq f(x, y) + \int_a^x \int_b^y [\varphi(s, t)u(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)u(\tau, \eta)d\tau d\eta] dt ds \quad (2.2.14)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda G sohada

$$u(x, y) \leq f(x, y) + \alpha(x, y)\exp[\beta(x, y)] \quad (2.2.15)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$\alpha(x, y) = \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)f(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)f(\tau, \eta)d\tau d\eta \right] dt ds,$$

$$\beta(x, y) = \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds.$$

Isbot: Ketma-ket o'rniga qo'yish usuli bilan (2.2.14) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\leq f(x, y) + \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)f(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)f(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds \\ &+ \\ &+ \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)f(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)f_1(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds + \dots + \\ &+ \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)f(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)f_n(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds + \\ &+ \int_a^x \int_b^y [\varphi(s, t)R_{n+1}(\tau, \eta) d\tau d\eta] dt ds, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)f(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)f_1(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x, y) &= \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)f(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)f_{n-1}(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds, \\ R_1(x, y) &= \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)u(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)f_1(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds, \\ &\dots\dots\dots \\ R_{n+1}(x, y) &= \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t)R_n(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta)R_n(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds. \end{aligned}$$

Endi $f_1(x, y), \dots, f_n(x, y), R_1(x, y), \dots, R_{n+1}(x, y)$ larni ketma-ket baholaymiz:

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \alpha(x, y), \\
f_2(x, y) &\leq \alpha(x, y) \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds = \alpha(x, y) \beta(x, y) \\
f_3(x, y) &\leq \alpha(x, y) \int_a^x \int_b^y \left[\varphi(s, t) \beta(x, y) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta) \beta(\tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds \leq \\
&\leq \alpha(x, y) \int_a^x \int_b^y \beta(s, t) \left[\varphi(s, t) + \int_a^s \int_b^t \psi(s, t, \tau, \eta) d\tau d\eta \right] dt ds = \\
&= \alpha(x, y) \int_a^x \int_b^y \beta(s, t) \frac{\partial^2 \beta(s, t)}{\partial t \partial s} dt ds = \alpha(x, y) \frac{\beta^2(s, t)}{2!} \\
&\dots\dots\dots, \\
f_n(x, y) &\leq \alpha(x, y) \frac{\beta^{n-1}(x, y)}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Shunga o'xshash quyidagi

$$R_{n+1}(x, y) \leq R_1(x, y) \frac{\beta^n(x, y)}{n!}$$

tengsizlik ham o'rinli ekanini ko'rsatish mumkin. Shunday qilib, (2.2.16) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &\leq f(x, y) + \alpha(x, y) + \alpha(x, y)\beta(x, y) + \alpha(x, y) \frac{\beta^{n-1}(x, y)}{(n-1)!} + \dots = \\
&= f(x, y) + \alpha(x, y) \left[1 + \beta(x, y) + \frac{\beta^{n-1}(x, y)}{(n-1)!} + \dots \right]
\end{aligned}$$

yoki

$$u(x, y) \leq f(x, y) + \alpha(x, y) \exp[\beta(x, y)].$$

Shuni isbotlash talab etilgan edi.

2.3.TENGSIKLIK VA INTEGRAL TENGSIKLIKLARGA OID MISOLLAR

2.3.1-misol. Ushbu integral tenglama yechilsin:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y)\varphi(y)dy = \cos 3x.$$

Bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos x \cos y - \sin x \sin y)\varphi(y)dy = \cos 3x.$$

Bundan,

$$c_1 = \int_0^{\pi} \varphi(y) \cos y dy, c_2 = \int_0^{\pi} \varphi(y) \sin y dy \quad (2.3.1)$$

belgilashlarni kiritib,

$$\varphi(x) = c_1 \lambda \cos x - c_2 \lambda \sin x + \cos 3x \quad (2.3.2)$$

tenglikni hosil qilamiz. (2.3.2) ni (2.3.1) ga qo'yamiz:

$$c_1 = \int_0^{\pi} (c_1 \lambda \cos y - c_2 \lambda \sin y + \cos 3y) \cos y dy,$$

$$c_2 = \int_0^{\pi} (c_1 \lambda \cos y - c_2 \lambda \sin y + \cos 3y) \sin y dy$$

yoki

$$c_1 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 y dy \right) + c_2 \lambda \int_0^{\pi} \sin y \cos y dy = \int_0^{\pi} \cos 3y \cos y dy,$$

$$-c_1 \lambda \int_0^{\pi} \cos y \sin y dy + c_2 \left(1 + \lambda \int_0^{\pi} \sin^2 y dy \right) = \int_0^{\pi} \cos 3y \sin y dy.$$

bu tenglikdagi integralni hisoblagandan so'ng, ushbu sistemaga ega bo'lamiz.

$$c_1 \left(1 - \lambda \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad c_2 \left(1 + \lambda \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (2.3.3)$$

(2.3.3) sistemaning determinant

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \lambda \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\pi^2}{4} \lambda^2.$$

Bir nechta holni tekshiramiz.

Agar $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$ ($D(\lambda) \neq 0$) bo'lsa, (2.3.3) sistema yagona $c_1 = 0, c_2 = 0$ yechimga ega bo'ladi. demak berilgan integral tenglama birdan-bir $\varphi(x) = \cos 3x$ yechimga ega bo'ladi. Unga mos bir jinsli

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y)\varphi(y)dy = 0 \quad (2.3.4)$$

tenglama esa, faqat $\varphi(x) = 0$ yechimga ega bo'ladi.

Agar $\lambda = \frac{2}{\pi}$ bo'lsa, (2.3.3) sistema

$$c_1 \cdot 0 = 0,$$

$$c_2 \cdot 2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bundan, $c_2 = 0$, $c_1 = c$, c – ixtiyoriy o'zgarmas bo'lishi kelib chiqadi.

Berilgan integral tenglama

$$\varphi(x) = \bar{c} \cos x + \cos 3x, \quad \bar{c} = \frac{2c}{\pi}$$

Formula bilan aniqlangan cheksiz ko'p yechimlarga ega va unga mos bir jinsli (2.3.4) tenglama ham cheksiz ko'p

$$\varphi(x) = \bar{c} \cos x$$

yechimlarga ega bo'ladi.

Agar $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ bo'lsa, (2.3.3) sistema

$$2 \cdot c_1 = 0$$

$$0 \cdot c_2 = 0,$$

ko'rinishga keladi, bundan $c_1 = 0$, $c_2 = c$, c – ixtiyoriy o'zgarmas.

U hilda berilgan tenglama

$$\varphi(x) = c \cdot \sin x + \cos 3x$$

ko'rinishidagi umumiy yechimga ega bo'ladi.

Tekshinlayotgan misolda tenglamaning yadrosi $K(x, y) = \cos(x + y)$

bo'lib, unga mos qo'shma bir jinsli tenglamaning yadrosi ham xuddi shu

funksiyadan iborat bo'ladi. Tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = \cos 3x$ funktsiya $\sin x$, $\cos x$ funktsiyalarga ortogonaldir. Demak, Fredgolm alternativasiidagi tenglamaning yechimga ega bolishi uchun zarur va yetarli bo'lgan ortogonallik sharti $[0, \pi]$ oraliqda bajariadi.

2.3.2-Misol. Perimetri $2p$ bo'lgan uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'lgan uchburchakni topish so'ralsin.

Yechish: Buning uchun Geron formulasi va Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \cdot \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Demak, perimetri $2p$ bo'lgan ixtiyoriy uchburchakning yuzasi $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ dan

oshmaydi. $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ ga faqat $p-a = p-b = p-c$, ya'ni $a = b = c$ bo'lganda

teng bo'ladi. Bu esa, bir xil perimetrlı uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'ladigan teng tomonli uchburchak bo'lishini bildiradi.

2.3.3-Misol. Ixtiyoriy uchburchak uchun ushbu

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4p$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan tengsizlik chap tomonini guruhlab yozib olamiz va Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} \left(a^3 + \frac{1}{a}\right) + \left(b^3 + \frac{1}{b}\right) + \left(c^3 + \frac{1}{c}\right) &\geq 2\sqrt{a^3 \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b^3 \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{c^3 \cdot \frac{1}{c}} = \\ &= 2a + 2b + 2c = 4p \end{aligned}$$

Bu yerda tenglik faqat $a^3 = \frac{1}{a}$, $b^3 = \frac{1}{b}$, $c^3 = \frac{1}{c}$ bo'lganda, ya'ni $a = b = c = 1$ bo'lganda bajariladi.

2.3.4-Misol. $y = x^2 + x^6 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, ($x > 0$) funksiyaning eng kichik

qiymatini topamiz. Buning uchun berilgan funktsiyani ushbu

$$y = x^2 + x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$
 ko'rinishida yozib olamiz va Koshi

tengsizligini qo'llaymiz: $y \geq 7\sqrt{x^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 7$.

Bu yerda tenglik $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Demak, berilgan funktsiyaning eng kichik qiymati 7 ekan.

2.3.5-Misol. Agar $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_5 > 0$ bo'lsa, ushbu

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_1} + \frac{a_5}{a_1 + a_2} \geq \frac{5}{2}$$

tengsizlik bajarilishini isbotlaymiz. $a_6 = a_1$, $a_7 = a_2$ belgilash kiritib, berilgan tengsizlikni ushbu

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_6} + \frac{a_5}{a_6 + a_7} \geq \frac{5}{2}$$

ko'rinishda yozib olamiz va Yensen tengsizligidan foydalanamiz.

Yensen tengsizligini $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun yozamiz:

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^{-1} \leq \frac{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \dots + \frac{m_n}{x_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \dots + \frac{m_n}{x_n} \geq \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)^2}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}.$$

Oxirgi tengsizlikda $n = 5$, $m_i = a_i$, $x_i = a_{i+1} + a_{i+2}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ desak, ushbu

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_6} + \frac{a_5}{a_6 + a_7} \geq$$

$$\geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi esa quyidagi tengsizlikni isbotlashga o'tamiz:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)} \geq \frac{5}{2},$$

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \geq 5[a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)],$$

$$2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_5^2) \geq a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5,$$

$$5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2,$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Bu tengsizlik o'rinli, chunki u Koshi-Bunyokovskiy tengsizligidir.

Demak $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_5 > 0$ uchun

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_1} + \frac{a_5}{a_1 + a_2} \geq \frac{5}{2}$$

tengsizlik o'rinli. Isbot tugadi.

2.3.6-misol. Agar $I(a \leq t < \infty)$ segmentda aniqlangan, uzluksiz $u(t) \geq 0$ funksiya ushbu

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t [a(\tau)u(\tau) + b(\tau)]d\tau \quad (2.3.5)$$

integral tengsizlikni qanoatlantirsa (bu yerda $a(t) > 0, b(t) > 0$ funksiyalar I segmentda integrallanuvchi $f(t) > 0$ esa I segmentda chegaralangan funksiyalardir), u holda I segmentda

$$u(t) \leq \int_a^t b(\tau) \cdot \exp \left\{ \int_a^t a(s)ds \right\} d\tau \quad (2.3.6)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

Isbot: (1) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$u(t) \leq \int_a^t a(\tau)u(\tau)d\tau + \int_a^t b(\tau) d\tau + \sup_{0 \leq t \leq b} f(t).$$

Bunda quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$F_1(t) = \int_a^t b(\tau)d\tau + \sup_{0 \leq t \leq b} f(t) \quad (2.3.7)$$

$$u(t) \leq F_1(t) + \int_a^t a(\tau)u(\tau)d\tau$$

Hosil bo'lgan tengsizlikni $F_1(t) > 0$ ga bo'lamiz.

$$\frac{u(t)}{F_1(t)} \leq 1 + \frac{1}{F_1(t)} \int_a^t a(\tau)u(\tau)d\tau$$

$R(a) = 1, \frac{dR(t)}{dt} - ?$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{a(t)u(t)}{F_1(t)} - \frac{F_1'(t)}{F_1^2(t)} \int_a^t a(\tau)u(\tau)d\tau \leq \frac{a(t)u(t)}{F_1(t)}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} \leq a(t)R(t).$$

Ifodani ikki tomonini a dan t gacha integrallaymiz:

$$\int_a^t \frac{dR(t)}{dt} \leq \int_a^t \alpha(\tau) d\tau, \quad \ln R(t)|_a^t \leq \int_a^t \alpha(\tau) d\tau$$

$$R(a) = 1 \Rightarrow \ln R(a) = 0 \Rightarrow R(t) \leq \exp \left\{ \int_a^t \alpha(\tau) d\tau \right\}$$

$u(t) \leq F_1(t)R(t)$ va (2.3.7) belgilashni e'tiborga olib,

$$u(t) \leq \sup_{0 \leq t \leq b} f(t) + \int_a^t b(\tau) \cdot \exp \left\{ \int_a^t \alpha(s) ds \right\} d\tau$$

ni hosil qildik, bu esa isbot talab qilingan (2.3.6) ni ifodalaydi.

2.3.7-misol. Ushbu

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta d\tau + \varphi \int_a^t u(\tau) d\tau$$

tengsizlikni yeching, bunda $u(t) \geq 0$ funksiya $t \geq a$ uchun uzluksuz berilgan tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta d\tau + \varphi \int_a^t u(\tau) d\tau = \alpha + \beta(t-a) + \varphi \int_a^t u(\tau) d\tau$$

$F(t) = \alpha + \beta(t-a)$, $F'(t) = \beta > 0$, $F(t) > 0$ bo'lgani uchun 2.1.1-natijaga asosan:

2.3.1-natija: Agar $I(a \leq t < \infty)$ yarim o'qda aniqlangan va uzluksiz $u(t) \geq 0, f(t) \geq 0$, funksiyalar va biror o'zgarmas $L \geq 0$ son uchun

$$u(t) \leq f(t) + L \int_a^t u(s) ds$$

tengsizlik ham o'rinli bo'lsa, u holda shu I yarim o'qda

$$u(t) \leq f(t) + L \int_a^t \exp\{L(t-s)\} f(s) ds$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

$$u(t) \leq [\alpha + \beta(t-a)] \exp\{\psi(t-a)\}$$

ya'ni

$$u(t) \leq \alpha \exp\{\psi(t-a)\} + \beta(t-a)\exp\{\psi(t-a)\}.$$

2.3.8-misol. Ushbu

$$u(t) \leq 5 + \int_2^t s^2 u(s) ds$$

tengsizlikni yeching. $u(t)$ uzluksiz funksiya $I (2 \leq t < \infty)$ yarim o'qda aniqlangan

$$v(t) \leq 5 + \int_2^t s^2 u(s) ds, \quad v'(t) = t^2 u(t)$$

$u(t) = v(t)$ ekanligidan $v'(t) = t^2 v(t)$ ni 2 dan t gacha integrallaymiz.

$$\int_2^t \frac{dv(t)}{v(t)} \leq \int_2^t s^2 ds, \quad \ln \frac{v(t)}{v(2)} \leq \frac{t^3}{3} - \frac{8}{3}$$

$$v(t) \leq C \cdot \exp\left\{\frac{t^3}{3}\right\}$$

$$u(t) \leq C \cdot \exp\left\{\frac{t^3}{3}\right\}$$

2.3.9-misol. Agar $J (a \leq t \leq b)$ segmentda aniqlangan, uzluksiz $u(t) \geq 0, f(t) \geq 0$ funksiyalar va $R(a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq t)$ sohada aniqlangan, uzluksiz $K(t, s)$ funksiya uchun

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t K(t, s) u(s) ds \quad (2.3.8)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda shu J segmentda

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t R(t, s) f(s) ds \quad (2.3.9)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi, bu yerda $R(t, s)$ –

$$v(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)v(s)ds \quad (2.3.10)$$

tenglamaning rezolventasi.

Isbot. Teoremani ketma-ket o'rniga qo'yish usuli bilan isbotlaymiz. (2.3.11)

tengsizlikning o'ng tomonidagi $u(s)$ o'rniga undan kichik bo'lmagan

$$f(s) + \int_a^t K(s, s_1)u(s_1)ds_1$$

ifodani qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t K(t, s)f(s)ds + \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1)u(s_1)ds_1ds$$

Endi bu tengsizlikning o'ng tomonidagi $u(s_1)$ o'rniga xuddi yuqoridagi kabi

$$f(s_1) + \int_a^{s_1} K(s_1, s_2)u(s_2)ds_2$$

ifodani qo'yamiz. Bu protsessni n marta takrorlab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} u(t) \leq & f(t) + \int_a^t K(t, s)f(s)ds + \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1)f(s_1)ds_1ds + \dots + \\ & + \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) \dots \int_a^{s_{n-2}} K(s_{n-2}, s_{n-1})f(s_{n-1})ds_{n-1}ds + \dots R_{n+1}(t), \end{aligned}$$

bu yerda

$$R_{n+1}(t) = \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) \dots \int_a^{s_{n-1}} K(s_{n-1}, s_n)u(s_n)ds_n \dots ds.$$

Osongina ko'rish mumkinki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(t) = 0.$$

U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t K(t, s)f(s)ds + \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1)f(s_1)ds_1ds + \dots$$

$$+ \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) \dots \int_a^{s_{n-2}} K(s_{n-2}, s_{n-1}) f(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds + \dots$$

Ko'rinib turibdiki, bu tengsizlikning o'ng tomonida turgan qator, (2.3.10) tenglamaning yechimidan iborat. Agar uning rezolventa orqali ko'rinishini e'tiborga olsak,

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t R(t, s) f(s) ds$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu berilgan misolimizning yechimidir.

2.3.10-misol. Ushbu

$$u(t) \leq 1 + \int_0^t (s - t) u(s) ds$$

tengsizlikni yeching. $u(t)$ uzluksiz funksiya $I (0 \leq t < \infty)$ yarim o'qda aniqlangan

Ushbu tengsizlikni Gronuoll-Bellman tengsizligiga asosan, ya'ni

$$u(t) \leq C + \int_a^t g(s) u(s) ds$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$u(t) \leq C \exp \left\{ \int_a^t g(s) ds \right\}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$u(t) \leq \exp \left\{ \int_0^t (s - t) ds \right\} = \exp \left\{ \left(\frac{s^2}{2} - st \right) \Big|_0^t \right\} = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\}$$

$$u(t) \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\}$$

Endi $f(x) = \exp\{x\}$ funksiyaning Makleron qatoriga yoyilmasini ko'ramiz:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + K$$

$$\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} - \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} - \dots - K \approx$$

$$\approx 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \dots - K = \cos t, \quad u(t) \leq \cos t$$

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishining II bobi 3 qismdan iborat bo'lib, birinchi qismi Integral tengsizliklarning tasnifi deb nomlangan bo'lib, bu qismda Gronoulla-Belman tengsizliklaridan foydalanib klassifikatsiya qilindi.

II bobning ikkinchi mavzusi esa, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun maxsus integral tengsizliklar bo'lib, bunda asosan ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun Gronoulla tengsizlini o'rinli ekanligi o'rganildi.

II bobning uchinchi qismida tengsizliklar va integral tengsizliklarga oid misollar deb nomlangan bo'lib unda integral tenglama va tengsizliklarga oid misollar, sodda tengsizliklarga oid misollar keltirib izohlangan.

Xotima

Bitiruv malakaviy ishning 1-bobi tengsizliklar va integral tenglamalar haqida asosiy malumotlar deb nomlanib, bu bobning birinchi mavzusi tengsizliklar va ularning klassifikatsiyasi bolib, bu mavzuda tengsizliklar va ularning klassifikatsiyasi haqida to'liq ma'lumot berilib, misollar orqali o'rganilib borildi.

Ushbu bobning ikkinchi mavzusi sodda tengsizliklarning muhim hollari deb nomlanib, bu mavzuda Koshi tengsizligining isboti va Yung, Minkovskiy, Gyolder tengsizliklari o'rganildi.

Bu bobning uchinchi mavzusi Integral tenglamalarning umumiy tasnifi bo'lib, unda Fredholm va Volterra tenglamalari haqida malumotlar keltirildi.

Bitiruv malakaviy ishining II bobi 3 qismdan iborat bo'lib, birinchi qismi Integral tengsizliklarning tasnifi deb nomlangan bo'lib, bu qismda Gronoulla-Belman tengsizliklaridan foydalanib klassifikatsiya qilindi.

II bobning ikkinchi mavzusi esa, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun maxsus integral tengsizliklar bo'lib, bunda asosan ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun Gronoulla tengsizlini o'rinli ekanligi o'rganildi.

II bobning uchinchi qismida tengsizliklar va integral tengsizliklarga oid misollar deb nomlangan bo'lib unda integral tenglama va tengsizliklarga oid misollar, sodda tengsizliklarga oid misollar keltirib izohlangan.

Foydalanilgan adabiyotlar

Asosiy adabiyotlar

1. Erkin va faravon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimga bag'ishlangan. Oliy Majlis palatalarining qo'shma majlisidagi nutq. Sh.M.Mirziyoev-Toshkent O'zbekiston, 2016
2. I.A.Karimov "Inson baxt uchun tug'iladi". Toshkent, "Sharq", 2001 y,
3. Sarimsoqov.T.A, "Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi", Toshkent "O'zbekiston", 1993y, 340-bet.
4. Abdulayev.E.I, R.N.G'anixo'jayev va boshqalar "Funksional analiz" Toshkent Samarqand, 2009y, 75-77-betlar.
5. Соболев.С.Л. "Некоторые приложения функционального анализа в математической физике", Изд-во. ЛГУ 1950 г.
6. Колмогоров.А.Н., Фомин.С.В., "Элементы теории функций и функционального анализа". "Наука", М., 1965г, 90-105стр.
7. Nurimov T. Integral tenglamalar va tengsizliklar.-Toshkent: O'qituvchi, 1985. 176 b
8. А.Н. Филатов, Л.В. Шарова "Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний" Изд-во. «Наука» Москва 1976 г стр. 1-152
9. Нуримов Т., Турдиев Х.Х. "Сингуляр интеграл тенгсизлик ва унинг тадбиқлари" Сам.Д.У илмий ахборотномаси. 2012 5 (75) с. 16-21
10. Т. Нуримов, Х.Х. Турдиев "Чизиқли махсус интеграл тенгсизлик ва унинг тадбиқлари" Бухоро Давлат университети илмий ахборотномаси 2012 4 (48) с. 21-27
11. К.Т. Ахмедов, М.А. Якубов, И.А. Вейсов "Некоторые интегральные неравенства" Изд-во. УзССР 1972 г.
12. М. Salohiddinov "Integral tenglamalar" Toshkent "yangi yo'l polygraph service" 2007y. 10-43 betlar
13. Н.Н. Turdiyev, R. Ismoilov "Chiziqli maxsus integral tengsizlik va uning tatbiqlari" Bux.D.U.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Москва: Наука. 1965.
2. А.Б. Антоневиц, П.Н. Князов, Я.В. Радыно. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск. Высшая школа. 1978.
3. www. Legion.ru