

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

5130100 «Matematika» ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun

Narzullayeva Sayyora Qambariddin qizining

**“ 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral
munosabatlar”**

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”**

**Ilmiy rahbar _____ prof. Omirov B.A.
” _____ ” _____ 2015y.**

Kafedra mudiri:

_____ dots. Muxitdinov R.T.

Taqrizchi: _____ o'qit. Elmurodova.H. B

” _____ ” _____ 2015y.

” _____ ” _____ 2015y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani

prof. Sh. M.Mirzayev

« _____ » _____ 2015 y

Buxoro- 2015y.

MUNDARIJA

Kirish	3
I BOB. Banax yoki Gilbert fazolari to'g'ri yig'indisida aniqlangan operatorlar	
1.1§ Banax yoki Gilbert fazolari to'g'ri yig'indisi haqida.....	12
1.2§ Operatorli matritsalar va ularning asosiy xossalari.....	19
Xulosa.....	26
II BOB. 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar	
2.1§ Operatorli matritsalarining aniqlanishi va spektri. Asosiy tushunchalar va misollar.....	27
2.2§ Chegaralangan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar.....	32
2.3§ Chegaralanmagan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar.....	42
Xulosa.....	54
Xotima.....	55
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	56

KIRISH

Ta'lim va tarbiya sohasidagi tub islohotlarni
yuksak bosqichga ko'tarish muhim vazifamiz
va muqaddas burchimizdir!

Sh. M. Mirziyoyev

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarori oliy ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, mamlakatimizni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish borasidagi ustuvor vazifalarga mos holda, kadrlar tayyorlashning ma'no-mazmunini tubdan qayta ko'rib chiqish, xalqaro standartlar darajasida oliy malakali mutaxassislar tayyorlash uchun zarur sharoitlar yaratish maqsadida qabul qilingan.

Mustaqillik yillarida iqtisodiyotning, ijtimoiy hayotning real talablaridan kelib chiqqan holda, yurtimizda oliy ta'lim tizimini modernizatsiya qilish, unga o'qitishning zamonaviy shakl va texnologiyalarini joriy etish, mutaxassislar tayyorlash bo'yicha ixtisoslik yo'nalishlarini takomillashtirish borasida katta ishlar qilindi.

Shu bilan birga, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2016-yil 8-oktabrdagi farmoyishi asosida tuzilgan ishchi guruh tomonidan oliy ta'lim tizimidagi mavjud holatni o'rganish natijalari shuni ko'rsatmoqdaki, qator oliy ta'lim muassasalarida ilmiy-pedagogik salohiyat hanuz past darajada qolmoqda, ta'lim jarayonining o'quv-metodik va axborot ta'minoti zamonaviy talablarga mos emas, moddiy-texnik baza tizimli ravishda yangilanishga muhtoj. Oliy ta'lim tizimida o'quv jarayoniga ilg'or xalqaro tajribani keng joriy etish, yetakchi xorijiy turdosh ilmiy-ta'lim muassasalari bilan yaqin hamkorlik aloqalarini yo'lga qo'yish orqali pedagog va ilmiy kadrlar malakasini oshirish borasidagi ishlar talab darajasida olib borilmayapti.

Qabul qilingan qarorga ko'ra, quyidagilar oliy ta'lim tizimini kelgusida kompleks rivojlantirishning eng muhim vazifalari etib belgilandi:

har bir oliy ta'lim muassasasi tomonidan xorijdagi yetakchi turdosh ilmiy-ta'lim muassasalari bilan istiqbolli hamkorlik aloqalarini yaqindan yo'lga qo'yish,

o'quv jarayoniga xalqaro ta'lim standartlariga asoslangan eng zamonaviy pedagogik texnologiyalar, ta'lim dasturlari va o'quv-metodik materiallarni keng joriy etish, ilmiy-pedagogik faoliyatga yuqori malakali chet el o'qituvchilari va olimlarini jalb etish;

oliy ma'lumotli kadrlarni tayyorlashning maqsadli mezonlarini shakllantirish, oliy ta'lim muassasalaridagi ixtisoslik yo'nalishlari va mutaxassisliklarni hududlar va sohalar bo'yicha joriy etilayotgan dasturlarning talab va ehtiyojlari, iqtisodiyot tarmoqlari va hududlarni kompleks taraqqiy ettirish istiqbollari inobatga olgan holda optimallashtirish;

yangi avlod o'quv qo'llanmalarini yaratish va oliy ta'lim tizimiga keng tatbiq etish, oliy ta'lim muassasalarini zamonaviy o'quv-metodik va ilmiy adabiyotlar bilan ta'minlash, jumladan, eng yangi xorijiy adabiyotlarni sotib olish va tarjima qilish negizida axborot-resurs markazlari fondlarini muntazam yangilab borish;

pedagog kadrlarning kasb malakasi va mahoratini sifat jihatdan muntazam oshirib borish, pedagog va ilmiy xodimlarning stajirovkadan o'tishini yo'lga qo'yish, oliy ta'lim muassasalari bitiruvchilarini PhD dasturi va xorijiy magistratura dasturlari asosida o'qitish;

oliy ta'lim muassasalarining ilmiy salohiyatini mustahkamlash, oliy ta'lim tizimida ilmiy tadqiqotlarni yanada rivojlantirish, ularning akademik ilm-fan bilan integratsiyasini kuchaytirish, professor-o'qituvchilar tarkibining ilmiy faoliyati samaradorligini oshirish, iqtidorli talaba-yoshlarni ilmiy faoliyat bilan shug'ullanishga jalb etish;

oliy ta'limning ma'naviy-axloqiy mazmunini kuchaytirish, talaba-yoshlarning qalbi va ongiga milliy istiqloq g'oyasini, xalqimizning yuksak ma'naviyati va insonparvarlik an'analarga sadoqat tuyg'usini chuqur singdirish, biz uchun mutlaqo yot va begona bo'lgan g'oyalarga nisbatan ularda mustahkam immunitet va tanqidiy munosabatni shakllantirish;

oliy ta'lim muassasalari moddiy-texnika bazasini ularning o'quv va ilmiy-laboratoriya binolarini, sport inshootlari va ijtimoiy-muhandislik infratuzilmalarini

qurish, kapital ta'mirlash va rekonstruksiya qilish orqali yanada mustahkamlash, zamonaviy ilm-fan sohalarining ustuvor yo'nalishlari bo'yicha o'quv-ilmiy laboratoriyalar bazasini zamonaviy asbob-uskunalar bilan ta'minlash;

oliy ta'lim muassasalarini zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari vositalari bilan ta'minlash, talabalar, o'qituvchi va yosh tadqiqotchilarning jahondagi ilg'or ta'lim resurslari, ilmiy adabiyotlar va ma'lumotlar bazasi bo'yicha elektron kataloglarga kirish imkoniyatini kengaytirish.

Qarorda belgilangan vazifalarning samarali yechimini to'liq ta'minlash maqsadida oliy ta'lim darajasini sifat jihatidan oshirish va tubdan takomillashtirish, oliy ta'lim muassasalari moddiy-texnika bazasini mustahkamlash va modernizatsiya qilish, ularni zamonaviy o'quv-ilmiy laboratoriyalari, axborot-kommunikatsiya texnologiyalari bilan jihozlash maqsadida Oliy ta'lim tizimini 2017-2021-yillarga mo'ljallangan kompleks rivojlantirish dasturi tasdiqlandi.

Dasturga muvofiq, 2017-2021-yillarda 48 ta oliy ta'lim muassasasida jami 180 ta o'quv, ilmiy-laboratoriya binosi, sport inshootlari va ijtimoiy-muhandislik infratuzilmalari obyektlarida qurilish, rekonstruksiya va kapital ta'mirlash ishlari olib boriladi. Shuningdek, 53 ta oliy ta'lim muassasasida 400 ta o'quv laboratoriyasi bosqichma-bosqich eng zamonaviy o'quv-laboratoriya uskunalarini bilan jihozlanadi, 7 ta oliy ta'lim muassasasida barcha oliy ta'lim muassasalari o'zaro hamkorlikda foydalanadigan ilmiy laboratoriyalar tashkil etiladi.

Qarorning muhim ahamiyatini ko'rsatadigan yana bir jihat shundan iboratki, mamlakatimiz Prezidenti tomonidan har bir oliy ta'lim muassasasi bo'yicha quyidagi konkret parametr va ko'rsatkichlarni o'z ichiga olgan manzilli rivojlantirish dasturlari tasdiqlandi:

oliy ta'lim tizimida yangi ta'lim ixtisoslik yo'nalishlari va mutaxassisliklarning, shuningdek, iqtisodiyot sohalari va hududlarni kompleks rivojlantirishning joriy va istiqboldagi ehtiyojlaridan kelib chiqqan holda ishlab chiqilgan va bakalavriat va magistraturaga talabalar qabul qilishning umumiy ko'rsatkichlarini 2021-yilgacha bosqichma-bosqich ravishda 18 foizgacha

oshirishni nazarda tutadigan 2017-2021-yillarga mo'ljallangan parametr va ko'rsatkichlari;

o'quv binolari, talabalar turar-joylari, axborot-resurs markazlari va boshqa obyektlarni qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlash hisobidan yangi o'quv o'rinlarini tashkil etish, yangi o'quv-laboratoriya komplekslarini sotib olish, auditoriyalarni komputer texnikasi bilan jihozlash;

professor-o'qituvchilarning kasb mahoratini, pedagog xodimlarning malakasini oshirish, shuningdek, ularning xorijiy hamkor oliy o'quv yurtlarida malaka oshirishi, magistratura, doktoranturada ta'lim olishi, hamda respublikamizning tayanch oliy o'quv yurtlari qoshida qayta tayyorgarlikdan o'tishi va malaka oshirishi.

Mazkur dasturda asosan mamlakatimizning har bir oliy ta'lim muassasasi bilan AQSh, Buyuk Britaniya, Fransiya, Italiya, Niderlandiya, Rossiya, Yaponiya, Janubiy Koreya, Xitoy va shu kabi boshqa davlatlarning yetakchi ilmiy-ta'lim muassasalari bilan hamkorlik aloqalarining o'rnatilgani o'ta muhim ahamiyat kasb etadi. Shu asosda har yili 350 nafardan ortiq xorijlik yuqori malakali pedagog va olimlarning mamlakatimiz oliy o'quv yurtlariga o'quv jarayoniga jalb etilishi ko'zda tutilmoqda.

Amaliyot shuni ko'rsatmoqdaki, oliy ta'lim muassasalari pedagog xodimlarining mehnatiga haq to'lash bo'yicha amaldagi tizimni jiddiy takomillashtirish va bu borada moddiy rag'batlantirishning yangi mexanizmlarini joriy etishga ehtiyoj sezilmoqda. Shu munosabat bilan O'zbekiston Respublikasining Moliya vazirligi, Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, Mehnat vazirligi, Sog'liqni saqlash vazirligi va Xalq ta'lim vazirligiga uch oy muddatda ilg'or xalqaro tajribadan kelib chiqib, oliy o'quv yurtlari pedagog xodimlariga ularning kasb mahorati, faoliyatidagi yuqori natijadorlik va tarbiyaviy sohadagi samarali ishtirokini inobatga olib, ustama haq to'lashni belgilash tizimi bo'yicha Vazirlar Mahkamasiga takliflar kiritish vazifasi topshirildi.

Qarorga muvofiq, Vazirlar Mahkamasiga ikki oy muddatda iqtidorli yosh pedagog va ilmiy xodimlarning malakasini oshirish bo'yicha O'zbekiston

Respublikasi Prezidentining “Iste’dod” jamg‘armasi faoliyatini tubdan qayta ko‘rib chiqish, xorijiy ta’lim muassasalari va ilmiy markazlarida ilmiy-pedagog xodimlarning malaka oshirishi va qayta tayyorgarlikdan o‘tishini, oliy ta’lim muassasalari bitiruvchilarining PhD dasturi va ularning magistraturada o‘qishini tashkil etish bo‘yicha chora-tadbirlar ko‘zda tutilgan takliflar kiritish topshirilmoqda.

Ta’kidlash joizki, oliy ta’lim muassasalarining ilmiy salohiyatini mustahkamlash maqsadida korxonalarning buyurtmasiga asosan amaliy va innovatsion ilmiy-tadqiqot va tajriba-konstruktorlik faoliyatini amalga oshiradigan ta’lim va ilmiy-tadqiqot muassasalari yuridik shaxslardan olinadigan daromad solig‘idan, yagona soliq to‘lovidan, maqsadli davlat jamg‘armalariga majburiy to‘lov va qo‘shimcha qiymat solig‘idan ozod qilindi.

Ta’lim-tarbiya jarayonlarining sifati ustidan samarali davlat nazoratini o‘rnatish maqsadida Vazirlar Mahkamasi huzurida Ta’lim sifatini nazorat qilish bo‘yicha davlat inspeksiyasi tashkil etiladi. Uning asosiy vazifasi – ta’lim-tarbiya jarayoni, professor-o‘qituvchilar tarkibi, ta’lim tizimida kadrlar tayyorlash va ularning malakasini oshirish sifati hamda mulkchilik shakli va idoraviy bo‘ysunishidan qat’i nazar, ta’lim muassasalarini attestatsiya va davlat akkreditatsiyasidan o‘tkazish, ta’lim-tarbiya sifatini nazorat qilish bo‘yicha davlat siyosatini amalga oshirishdan iborat.

Oliy ta’lim tizimini 2017-2021-yillarga mo‘ljallangan kompleks rivojlantirish dasturini amalga oshirish uchun yo‘naltiriladigan moliyaviy mablag‘lar 1,7 trillion so‘mdan ziyod bo‘lib, ulardan 1,2 trillion so‘mi o‘quv-laboratoriya binolari, sport zallari va talabalar turar-joylarini rekonstruksiya qilish va kapital ta’mirlashga, 500 milliard so‘mdan ortiq mablag‘ esa o‘quv-laboratoriya uskunalari, mebel va inventar bilan ta’minlash, umumiy tartibda foydalanishga mo‘ljallangan, barcha ta’lim muassasalariga xizmat ko‘rsatadigan laboratoriya komplekslarini tashkil etish hamda axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlantirishga sarflanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori uzluksiz ta’lim tizimini rivojlantirish, mamlakatimizning izchil rivojlanib borayotgan iqtisodiyotini yuqori malakali kadrlar bilan ta’minlash, barcha hududlar va tarmoqlarni strategik jihatdan kompleks rivojlantirish masalalarini hal qilish borasida oliy ta’lim tizimi ishtirokini kengaytirish yo‘lidagi yana bir muhim amaliy qadamdir.

Yig‘ilishda ta’lim tizimida amalga oshirilayotgan islohotlar muhokama qilinar ekan, yoshlarning kasb-hunar egalashi, o‘quvchilarni vatanparvarlik ruhida tarbiyalash masalalariga ham alohida e’tibor qaratildi.

Bunda yoshlarning ulug‘ ajdodlar merosini o‘rganishi, ularga mos yetuk kadrlar bo‘lib voyaga yetishiga alohida e’tibor qaratilmoqda.

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi axborot-kommunikatsiya texnologiyalari yo‘nalishiga oid chuqurlashtirib o‘qitishga ixtisoslashtirilgan maktab tashkil etilishi ham aynan ana shu vazifani amalga oshirishdagi ilk qadam bo‘ldi.

Mazkur maktabning tashkil etilishi kadrlarni yoshligidanoq tayyorlab borish, sohada yetuk hamda zamon talablariga javob beradigan kadrlar tayyorlashga zamin yaratadi.

Shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Mirzo Ulug‘bek nomidagi ixtisoslashtirilgan davlat umumta’lim maktab-internatini va “Astronomiya va aeronavtika” bog‘ini tashkil etish to‘g‘risida”gi qarori qabul qilindi.

Mazkur qaror bilan Astronomiya instituti qoshida matematika, astronomiya, fizika va informatika fanlarini chuqur o‘rgatishga ixtisoslashtirilgan Mirzo Ulug‘bek nomidagi ixtisoslashtirilgan davlat umumta’lim maktab-internati tashkil etiladi.

Maktablar oldiga qo‘yilayotgan talablardan biri — yuqori malakali, sohasining bilimdoni bo‘lgan o‘qituvchi-pedagoglar bazasini shakllantirish bilan birgalikda, maktabda chet tilini xam o‘qitish. Bu kabi ixtisoslashgan maktablarning tashkil etilayotgani yoshlarni vatanparvarlik ruhida tarbiyalashga xizmat qilishi alohida ta’kidlandi.

Yig'ilishda hududlar imkoniyati va salohiyatini o'rgangan holda 8—9-sinf o'quvchilarini kasbga yo'naltirish masalasi ham ko'rib chiqildi. Bu ta'limning keyingi bosqichida o'quvchilarning hunar egallashida yangi imkoniyatlar eshigini ochadi. Endilikda umumta'lim maktablari bitiruvchilarini 50 ga yaqin kasbga o'rgatish yo'lga qo'yiladi.

Buning uchun kasb-hunar kollejlari va umumta'lim maktablari negizida zamonaviy jihozlangan o'quv ishlab chiqarish markazlari tashkil etilishi rejalashtirilgan. Shuningdek, ba'zi kasb-hunar kollejlari tegishli vazirlik va idoralarga korxona va tashkilotlarga birlashtiriladi.

O'zbekiston Prezidentining 2017-yil 14-martdagi "O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi muassasalari faoliyatini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarori bu borada muhim omil bo'lmoqda.

Bu kadrlar tayyorlashda mazkur muassasalarning ulushini oshirish va kafolatlangan ish o'rinlarini yaratish imkonini beradi.

Prezident soha rahbarlariga bu borada joylarga chiqib qaysi hududga qanday soha bo'yicha mutaxassislar zarurligini o'rganib chiqish vazifasini topshirdi.

Davlat rahbari mutassadi rahbarlarga ta'lim tizimini takomillashtirish, o'quv adabiyotlari bilan sifatli ta'minlash, yoshlarni vatanparvarlik ruhida tarbiyalash masalasida tegishli topshiriqlar berdi.

Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi: Ikkita Banax va Gilbert fazolari to'g'ri yig'indisida ta'sir qiluvchi elementlari ixtiyoriy chiziqli operatorlar bo'lgan 2×2 operatorli matritsalarining spektrini o'rganish masalasi zamonaviy matematik fizikada muhim ahamiyatga ega. Agar operatorli matritsa chegaralangan bo'lsa, u holda operatorlar spektri haqidagi klassik teoremlarga ko'ra uning spektri markazi 0 nuqtada, radiusi ushbu operatorning normasiga teng doirada yotadi. Spektrni o'zida saqlovchi yuqoridagi doiradan kichik to'plam bu sonli tasvir deb ataluvchi to'plamdir. Undan ham kichik to'plam kvadratik sonli tasvirdir. Bunday munosabatlar odatda spektral munosabatlar deb ataladi. Mazkur bitiruv malakaviy ishida biz ushbu spektral munosabatlar hamda ular bilan bog'liq ma'lumotlarga batafsil to'xtalamiz.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi: 2×2 operatorli matritsalarining chegaralangan yoki chegaralanmagan hollari uchun spektral munosabatlarni o'rganish ishining asosiy maqsadi hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy vazifalari: Ishning asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

1) Operatorli matritsalarining aniqlanishi va spektri haqidagi tushunchalarni o'rganish.

2) 2×2 chegaralangan operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlarni o'rganish.

3) 2×2 chegaralanmagan operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlarni o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishining o'rganganlik darajasi: Bitiruv malakaviy ishi to'liq va batafsil o'rganilgan va yetarlicha yoritilgan.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti: Operatorli matritsalar, sonli tasvir, kvadratik sonli tasvir, operatorli matritsalarining aniqlanishi, spektri.

Bitiruv malakaviy ishining obyekti: 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi: Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega. Olingan asosiy natijalar: bir nechta adabiyotlardan mavzuga oid ma'lumotlar to'plab o'rganilgan, ular isbotlar va misollar bilan boyitilgan.

Bitiruv malakaviy ishining yangiligi: Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo'lsada, unda keltirilgan asosiy ma'lumotlar bakalavriatda o'qitiladigan fanlarning dasturlariga kiritilmagan .

Bitiruv malakaviy ishining metodologiyasi: Ishning asosiy natijalarini bayon qilishda va isbotini keltirishda chiziqli algebra, matematik analiz va funksional analiz usullaridan foydalanildi.

Bitiruv malakaviy ishining tarkibi va hajmi: Mazkur ish kirish, ikkita bob, beshta paragraf, har bir bob uchun xulosalar, xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. I – bobda boshlangich tushunchalar, xususan, Banax yoki Gilbert fazolari to'g'ri yig'indisi haqidagi tushunchalar, operatorli

matritsalar va ularning asosiy xossalari o'rganish hamda ularni misollarda tahlil qilinib, I – bob xulosasi bilan yakunlangan. II – bob asosiy qism bo'lib, unda operatorli matritsalar, operatorli matritsalarining aniqlanishi, spektri, sonli tasviri, kvadratik sonli tasviri, shuningdek, ushbu tushunchalarga oid misollar keltirilgan hamda II bob xulosasi bilan yakunlangan, so'ngra ikkala bob bo'yicha xotima yozilgan. Adabiyotlar ro'yxatida bitiruv malakaviy ishni yozishda ishlatilgan asosiy adabiyotlar kiritilgan. BMI ___ sahifani tashkil etadi.

I BOB. BANAX YOKI GILBERT FAZOLARI TO'G'RI YIG'INDISIDA ANIQLANGAN OPERATORLAR .

1.1§ Banax yoki Gilbert fazolari to'g'ri yig'indisi haqida.

1.1.1-ta'rif. Cheksiz o'lchamli to'la Yevklid fazosi *Gilbert fazosi* deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy tabiatli $f, g, \varphi, \dots$ elementlarning H to'plami Gilbert fazosi bo'lsa, u quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

- 1) H - Yevklid fazosi, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo;
- 2) $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$ metrika ma'nosida H - to'la fazo;
- 3) H fazo - cheksiz o'lchamli, ya'ni unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

Odatda separabel Gilbert fazolari qaraladi, ya'ni H ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud.

Bundan keyin biz faqat separabel Gilbert fazolarini qaraymiz.

1.1.1-misol. $C_2[a, b]$ Yevklid fazosi to'la emas, shuning uchun $C_2[a, b]$ Gilbert fazosi bo'la olmaydi.

1.1.2-misol. ℓ_2 va $L_2[a, b]$ lar cheksiz o'lchamli to'la separabel Yevklid fazolaridir. Shuning uchun ular Gilbert fazolari bo'ladi.

1.1.2-ta'rif. Agar R va R^* Yevklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x, y \in R, \quad x^*, y^* \in R^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad \text{va} \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, R va R^* lar izomorf fazolar deyiladi.

Boshqacha aytganda, Yevklid fazolarining izomorfligi shundan iboratki, bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, bu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Ma'lumki, n - o'lchamli ixtiyoriy ikkita Yevklid fazosi o'zaro izomorfdir. Cheksiz o'lchamli Yevklid fazolari o'zaro izomorf bo'lishi shart emas. Masalan ℓ_2 va $C_2[a, b]$ fazolar izomorf emas, chunki ℓ_2 to'la, $C_2[a, b]$ esa to'la emas.

Quyidagi teorema o'rinli.

1.1.1-teorema. *Ixtiyoriy ikkita separabel Gilbert fazosi o'zaro izomorfdir.*

Isbot. Ixtiyoriy H Gilbert fazosini ℓ_2 fazoga izomorfligini ko'rsatamiz. Agar shuni ko'rsatsak, teorema isbot bo'lgan bo'ladi. H Gilbert fazosidan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistemani olamiz va $f \in H$ elementga uning Fur'e koeffitsiyentlari bo'lgan $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ketma-ketlikni mos qo'yamiz. Bessel tengsizligiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

Shuning uchun $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ ketma-ketlik ℓ_2 fazoning elementi bo'ladi. Teskarisi, Riss-Fisher teoremasiga ko'ra, ℓ_2 fazoning ixtiyoriy $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementiga (ketma-ketligiga) H fazoning yagona f elementi mos keladi va uning Fur'e koeffitsiyentlari bo'lib, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar xizmat qiladi. O'rnatilgan bu moslik o'zaro bir qiymatlidir. Agar

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \quad \text{va} \quad g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$$

bo'lsa, u holda

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n, \dots)$$

va

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \dots, \alpha c_n, \dots)$$

Va nihoyat, Parseval tengligidan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (c, d)$$

ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \quad (1.1.1)$$

va

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

Bu yerdan va (10.1) dan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (c, d).$$

Shunday qilib, biz o'rnatgan moslik izomorfizm ekan, ya'ni bu moslik chiziqli amallarni va skalyar ko'paytmani saqlaydi. Δ

Isbotlangan teoremadan shu narsa kelib chiqadiki, izomorfizm aniqligida faqat ℓ_2 Gilbert fazosi mavjud ekan. Boshqacha aytganda, ℓ_2 fazo H Gilbert fazosining "koordinat ko'rinishi" desak bo'ladi.

H Gilbert fazosining qism fazosi deganda yopiq qism fazoni tushunamiz. Gilbert fazosining qism fazolariga misollar keltiramiz.

1.1.3-misol. $h \in H$ - ixtiyoriy element bo'lsin. h ga ortogonal bo'lgan barcha $f \in H$ elementlar to'plami qism fazo tashkil qiladi.

1.1.4-misol. ℓ_2 fazoda $x_1 = x_2$ shartni qanoatlantiruvchi elementlari to'plami qism fazo tashkil qiladi.

1.1.5-misol. ℓ_2 fazoning $M = \{x \in \ell_2 : x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots, 0, x_{2n+1}, 0, \dots)\}$ to'plami uning qism fazosi bo'ladi.

Gilbert fazosining har qanday qism fazosi yo chekli o'lchamli Yevklid fazosi bo'ladi, yo uning o'zi Gilbert fazosini tashkil qiladi.

1.1.6-misol. $L_2[-1, 1]$ Gilbert fazosida toq funksiyalardan iborat $L_2^-[-1, 1] = \{f \in L_2[-1, 1] : f(-t) = f(t)\}$ to'plam qism fazo tashkil qiladi.

1.1.7-misol. $L_2[-1, 1]$ Gilbert fazosida quyidagi to'plam $L_0^-[-1, 1] = \{f \in L_2[-1, 1] : f(t) \equiv 0, t \in [-1, 0]\}$ qism fazo tashkil qiladi.

Agar H Gilbert fazosi separabel bo'lsa, uning ixtiyoriy qismi ham separabel bo'ladi. Bu quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

1.1.1-lemma. R separabel Yevklid fazosining har qanday R' qismi yana separabeldir.

Gilbert fazosining qism fazolari ayrim maxsus xossalarga egaki, ixtiyoriy normalangan fazoning qism fazolari bu xossalarga ega emas. Bu xossalar Gilbert fazosida kiritilgan skalyar ko'paytma va unga mos ortogonallik tushunchasiga asoslangan.

H separabel Gilbert fazosining M qism fazosi berilgan bo'lsin. Bu qism fazo ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli sistema olamiz va unga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

1.1.2-teorema. H separabel Gilbert fazosining ixtiyoriy M qism fazosida shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, uning chiziqli qobig'ining yopig'i M ga teng.

Bizga H Gilbert fazosining M - qism fazosi berilgan bo'lsin. Barcha $f \in M$ elementlarga ortogonal bo'lgan $g \in H$ elementlar to'plamini $M^\perp = H \ominus M$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$M^\perp = \{g \in H : (f, g) = 0, \forall f \in M\}.$$

$M^\perp$ ham H ning qism fazosi ekanligini isbotlaymiz. Bu to'plamning qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqqligini ko'rsatamiz. Agar $g_1, g_2 \in M^\perp$ bo'lsa, u holda

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = \alpha_1 (g_1, f) + \alpha_2 (g_2, f) = 0.$$

Endi $M^\perp$ to'plamning yopiqqligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $g_n \in M^\perp$ elementlar ketma-ketligi $g \in H$ elementga yaqinlashsin. U holda skalyar ko'paytmaning uzluksizligiga ko'ra, istalgan $f \in M$ uchun

$$(g, f) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n, f \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n, f) = 0.$$

Demak, $g \in M^\perp$, ya'ni $M^\perp$ yopiq qism fazo bo'lar ekan. $M^\perp$ qism fazo M qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi deyiladi.

1.1.3-teorema. Agar M - H Gilbert fazosining yopiq qism fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f \in H$ element yagona usul bilan $f = h + h'$ yig'indiga yoyiladi, bu yerda $h \in M$, $h' \in M^\perp$.

Isbot. Avvalo, bu yoyilmaning mavjudligini isbotlaymiz. Buning uchun M da $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema olamiz va

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \quad c_n = (f, \phi_n)$$

deymiz. Bessel tengsizligiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $h \in M$. Endi $h' = f - h$ deb olamiz. Ko'rinib turibdiki, ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$(h', \phi_n) = (f, \phi_n) - (h, \phi_n) = c_n - c_n = 0.$$

Ixtiyoriy $\xi \in M$ element uchun

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \quad \text{va} \quad (h', \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \phi_n) = 0,$$

ya'ni $h' \in M^\perp$.

Endi yoyilmaning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, boshqa bir $f = h_1 + h_1'$, $h_1 \in M$, $h_1' \in M^\perp$ yoyilma mavjud bo'lsin. U holda ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$(h_1, \phi_n) = (f, \phi_n) = c_n.$$

Bu yerdan kelib chiqadiki $h_1 = h$, $h_1' = h'$. Δ

1.1.1-natija. $M \subset H$ qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisining ortogonal to'ldiruvchisi M ning o'ziga teng, ya'ni $(M^\perp)^\perp = M$.

Shunday qilib, H fazoning o'zaro to'ldiruvchi qism fazolari haqida gapirish mumkin. Agar M va $M^\perp$ ikkita shunday bir-birini to'ldiruvchi qism fazolar va $\{\phi_n\}$, $\{\phi'_n\}$ - mos ravishda M va $M^\perp$ dagi to'la ortonormal sistema bo'lsa, u holda $\{\phi_n\}$ va $\{\phi'_n\}$ sistemalarning birlashmasi butun H fazoda to'la ortonormal sistema bo'ladi.

1.1.2-natija. H fazodagi har qanday ortonormal sistemani to'la sistemagacha to'ldirish mumkin.

Agar $\{\phi_n\}$ sistema chekli bo'lsa, u holda bu sistemaga kiruvchi elementlar soni $\{\phi_n\}$ sistemadan hosil qilingan M qism fazoning o'lchamiga va $M^\perp$ qism fazoning koo'lchamiga teng. Shunday qilib, quyidagiga egamiz.

1.1.3-natija. Chekli n - o'lchamli qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi n - koo'lchamga ega va aksincha.

1.1.3-ta'rif. Agar H Gilbert fazosining ixtiyoriy $f \in H$ elementi

$$f = h + h', \quad h \in M, \quad h' \in M^\perp$$

ko'rinishda tasvirlansa, u holda H fazo o'zaro ortogonal M va $M^\perp$ qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi va

$$H = M \oplus M^\perp$$

ko'rinishda yoziladi.

To'g'ri yig'indini chekli yoki sanoqli sondagi qism fazolar uchun ham umumlashtirish mumkin, ya'ni H o'zining $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ qism fazolarining to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

a) M_i qism fazolar juft-jufti bilan o'zaro ortogonal, ya'ni M_i dagi ixtiyoriy vektor M_k dagi ixtiyoriy vektorga ortogonal, $i \neq k$;

b) ixtiyoriy $f \in H$ element

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \quad h_n \in M_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(1.1.2)$$

ko'rinishda tasvirlanadi, agar qo'shiluvchilar soni cheksiz bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'lad. Bu holda $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko'rinishda yoziladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki, agar f uchun (1.1.2) yoyilma mavjud bo'lsa, u yagona va

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2.$$

Qism fazolarning to'g'ri yig'indisi bilan bir qatorda chekli yoki sanoqli sondagi Gilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi haqida ham gapirish mumkin. Agar H_1 va H_2 lar ixtiyoriy Gilbert fazolari bo'lsa, u holda ularning to'g'ri yig'indisi $H = H_1 \oplus H_2$ quyidagicha aniqlanadi. H fazoning elementlari barcha (h_1, h_2) , $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ juftliklardan iborat. $H = H_1 \oplus H_2$ da skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1)_{H_1} + (h_2, h'_2)_{H_2}, \quad h_1, h'_1 \in H_1, \quad h_2, h'_2 \in H_2.$$

Chekli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n$ Gilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi ham xuddi shunday aniqlanadi.

Sanoqli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ Gilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi

$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$ quyidagicha aniqlanadi.

$$H = \left\{ h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots), \quad h_n \in H_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < +\infty \right\}.$$

H fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(h, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g_n), \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots), \quad g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots), \quad h_n, g_n \in H_n.$$

1.1.8-misol. 1.1.6-misolda keltirilgan $L_2[-1,1]$ (toq funksiyalar to'plami) qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisini toping.

Yechish. $L_2^+[-1,1] = \{f \in L_2[-1,1]: f(-t) = f(t)\}$ juft funksiyalardan iborat to'plam $L_2[-1,1]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va $L_2^-[-1,1] \perp L_2^+[-1,1]$. Haqiqatan ham,

$$(f^-, f^+) = \int_{-1}^1 f^-(t) \cdot f^+(t) dt = 0, \quad \forall f^- \in L_2^-[-1,1], \quad \forall f^+ \in L_2^+[-1,1].$$

Bu yerdan $(L_2^-[-1,1])^\perp \supset L_2^+[-1,1]$ va $(L_2^+[-1,1])^\perp \subset L_2^-[-1,1]$ munosabatlar kelib chiqadi. Bulardan esa $(L_2^-[-1,1])^\perp = L_2^+[-1,1]$ tenglikni olamiz.

1.1.4-ta'rif. Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.

Endi Banax fazolariga misollar keltiramiz.

1.1.9-misol. R^n , R_p^n , $C[a,b]$, ℓ_p , $p \geq 1$, c , c_0 fazolarni to'lalikka tekshiring.

Yechish. To'la metrik fazolar mavzusidan ma'lumki, R^n , R_p^n ,

$C[a,b]$, ℓ_p , $p \geq 1$, c , c_0 lar to'la metrik fazolar edi. Shuning uchun ular to'la normalangan fazolar, ya'ni Banax fazolari bo'ladi.

1.1.10-misol. $C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan metrik fazo edi. Shuning uchun $C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan normalangan fazoga misol bo'ladi.

1.2§ Operatorli matritsalar va ularning asosiy xossalari.

H_1 va H_2 Gilbert fazolari bo'lib, $H = H_1 \oplus H_2$ ularning to'g'ri yig'indisi bo'lsin. U holda $H = \{f = (f_1, f_2): f_1 \in H_1, f_2 \in H_2\}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi H fazodagi ikkita f va g elementlar uchun ularning skalyar ko'paytmasini aniqlaymiz: $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2) \in H$ bo'lsin. U holda $(f, g)_H := (f_1, g_1)_{H_1} + (f_2, g_2)_{H_2}$ tenglik o'rinlidir. Bu yerda $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ va $(\cdot, \cdot)_{H_2}$ lar orqali mos ravishda H_1 va H_2 fazolardagi skalyar ko'paytma belgilangan.

Xususiyl holda,

$H_1 = C$ kompleks sonlar fazosi,

$H = L_2[-\pi; \pi] - [-\pi; \pi]$ kesmada aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalar Gilbert fazosi bo'lsa, u holda ma'lumki, $f_1, g_1 \in H_1 = C$ elementlar uchun $(f_1, g_1)_{H_1} = f_1 \cdot \overline{g_1}$ va $f_2, g_2 \in H_1 = L_2[-\pi; \pi]$ elementlar uchun esa $(f_2, g_2)_{H_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f_2(s) \cdot \overline{g_2(s)} ds$ tengliklar o'rinlidir. Shu sababli, H fazodagi skalyar ko'paytma $(f, g)_H = f_1 \cdot \overline{g_1} + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(s) \cdot \overline{g_2(s)} ds$ tenglik orqali aniqlanadi.

Buni ba'zi misollarda tahlil qilamiz.

1.2.1-misol. $f = (f_1, f_2) \in H$, $g = (g_1, g_2) \in H$, $f_1 = 2i$, $f_2(x) = \sin x$, $g_1 = 1 - 3i$, $g_2(x) = \cos x$. f va g elementlarning skalyar ko'paytmasini aniqlang.

$$\begin{aligned} \text{Yechim: } (f, g)_H &= f_1 \cdot \overline{g_1} + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(s) \cdot \overline{g_2(s)} ds = 2i \cdot (1 + 3i) + \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \cos s ds = 2i - 6 + \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2s ds = 2i - 6 - \frac{1}{4} \cos 2s = 2i - 6. \end{aligned}$$

1.2.2-misol. $f = (f_1, f_2) \in H$, $g = (g_1, g_2) \in H$, $f_1 = 3$, $f_2 = \cos^2 x$, $g_1 = i$, $g_2(x) = \sin^2 x$. f va g elementlarning skalyar ko'paytmasini aniqlang.

Yechim:

$$\begin{aligned} (f, g)_H &= f_1 \cdot \overline{g_1} + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(s) \overline{g_2(s)} ds = -3i + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 s \cdot \sin^2 s ds = \\ &= -3i + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2s ds = -3i + \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 4s) ds = \\ &= -3i + \frac{1}{8} \left(s - \frac{\sin 4s}{4} \right) = -3i + \frac{2\pi}{8} = -3i + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

H fazodagi $\forall f = (f_1, f_2)$ element uchun uning normasi

$$\|f\|_H := \sqrt{\|f_1\|_{H_1}^2 + \|f_2\|_{H_2}^2}$$

tenglik yordamida hisoblanadi. Bunda $\|\cdot\|_{H_1}$ va $\|\cdot\|_{H_2}$ lar mos ravishda H_1 va H_2 fazolardagi normalar. Misol tariqasida yana yuqoridagi fazolarni, ya'ni $H_1 = C$ va $H_2 = L_2[-\pi; \pi]$ fazolarni qaraymiz. Funktsional analiz kursidan yaxshi ma'lumki, ixtiyoriy $f_1 \in H_1$ element uchun $\|f_2\|_{H_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(s)|^2 ds}$ tenglik

o'rinlidir. Shu sababli $\|f\|_H = \sqrt{|f_1|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(s)|^2 ds}$ tenglik o'rinlidir.

1.2.3-misol. $f = (f_1, f_2) \in H$, $f_1 = 5 + 2i$, $f_2(x) = \sin x$ element normasini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \text{Yechim: } \|f\|_H &= \sqrt{|f_1|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(s)|^2 ds} = \sqrt{|5 + 2i|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 s ds} = \\ &= \sqrt{29 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2} ds} = \sqrt{29 + \left(\frac{s}{2} - \frac{\sin 2s}{4}\right)} = \sqrt{29 + \pi}. \end{aligned}$$

1.2.4-misol. $f = (f_1, f_2) \in H$, $f_1 = 2 - 3i$, $f_2(x) = \cos x$ element normasini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \text{Yechim: } \|f\|_H &= \sqrt{|f_1|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(s)|^2 ds} = \sqrt{13 + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 s ds} = \\ &= \sqrt{13 + \left(\frac{s}{2} + \frac{\sin 2s}{4}\right)} = \sqrt{13 + \pi}. \end{aligned}$$

Bizga yaxshi ma'lumki, $H = H_1 \oplus H_2$ Gilbert fazosida ta'sir qiluvchi istalgan chiziqli chegaralangan operator hamisha $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ ko'rinishidagi 2×2 o'lchamli blok operatorli matritsalar ko'rinishida tasvirlanadi. Bu yerda $A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$, $i, j = 1, 2$ chiziqli chegaralangan operatoridir.

Aniqlanishiga ko'ra, A operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun $A_{11} = A_{11}^*$, $A_{22} = A_{22}^*$ va $A_{21} = A_{12}^*$ shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir. Misol sifatida $H_1 = C$, $H_2 = L_2[-\pi; \pi]$ fazolarni hamda

$$A_{11} \cdot f_1 = a \cdot f_1, \quad f_1 \in C$$

$$A_{12} \cdot f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} v(s) \cdot f_2(s) ds, \quad f_2 \in L_2[-\pi; \pi];$$

$$(A_{12}^* \cdot f_1)(x) = v(x) \cdot f_1, \quad f_1 \in C$$

$$(A_{22} \cdot f_2)(x) = u(x) \cdot f_2(x), \quad f_2 \in L_2[-\pi; \pi].$$

holni qarashimiz mumkin.

Odatda, matematik fizikada yuqoridagi A_{12} operatorga *yo'qotish operatori*, A_{21} operatorga esa *paydo qilish operatori* deyiladi.

A operatorli matritsani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} A \cdot f &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot f_1 + A_{12} \cdot f_2 \\ A_{12}^* \cdot f_1 + A_{22} \cdot f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot f_1 + \int_{-\pi}^{\pi} v(s) \cdot f_2(s) ds \\ v(x) \cdot f_1 + u(x) \cdot f_2(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $f, g \in D(A)$ elementlar va ixtiyoriy α, β kompleks sonlari uchun

$$A(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot Af + \beta \cdot Ag$$

tenglik bajarilsa, A ga chiziqli operator deyiladi.

1.2.2-ta'rif. Agar $D(A) = H$ bo'lib, shunday $M > 0$ soni topilib, barcha $f \in H$ elementlar uchun

$$\|A \cdot f\| \leq M \|f\| \quad (1.2.1)$$

tenglik bajarilsa, A ga chegaralangan operator deyiladi. (1.2.1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi M sonlar to'plamining aniq quyi chegarasiga A operatorning *normasi* deyiladi va $\|A\|$ kabi belgilanadi. Demak, $\|A\| = \inf(M)$.

Odatda chegaralangan operatorning normasini hisoblashda

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A \cdot x\|;$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A \cdot x\|;$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|};$$

formulalardan foydalaniladi.

Agar $A: H \rightarrow H$ chiziqli chegaralangan operator uchun shunday $B: H \rightarrow H$ operator topilib, ixtiyoriy $f, g \in H$ elementlar uchun $(Af, g) = (f, Bg)$ tenglik o'rinli bo'lsa, B ga A operatorga qo'shma operator deyiladi va A^* kabi belgilanadi, ya'ni $B = A^*$.

Agar $A^* = A$ tenglik o'rinli bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $f, g \in H$ elementlar uchun $(Af, g) = (f, Ag)$ tenglik o'rinli bo'lsa, A ga o'z-o'ziga qo'shma deyiladi.

Endi yuqorida keltirilgan A operatorli matritsani chiziqlilikka, chegaralanganlikka va o'z-o'ziga qo'shmalikka tekshiramiz:

1) Chiziqlilik: $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2) \in H = H_1 + H_2$ ixtiyoriy elementlar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ esa ixtiyoriy sonlar bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned}
 A(\alpha f + \beta g) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha f_1 + \beta g_1 \\ \alpha f_2 + \beta g_2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} A_{11}(\alpha f_1 + \beta g_1) + A_{12}(\alpha f_2 + \beta g_2) \\ A_{12}^*(\alpha f_1 + \beta g_1) + A_{22}(\alpha f_2 + \beta g_2) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha(\alpha f_1 + \beta g_1) + \int_{-\pi}^{\pi} v(s)(\alpha f_2(s) + \beta g_2(s))ds \\ v(x)(\alpha f_1 + \beta g_1) + u(x)(\alpha f_2(x) + \beta g_2(x)) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha \alpha f_1 + \alpha \int_{-\pi}^{\pi} v(s)f_2(s)ds \\ \alpha v(x)f_1 + \alpha u(x)f_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \alpha g_1 + \beta \int_{-\pi}^{\pi} v(s)g_2(s)ds \\ \beta v(x)g_1 + \beta u(x)g_2(x) \end{pmatrix} = \\
 &= \alpha \begin{pmatrix} \alpha f_1 + \int_{-\pi}^{\pi} v(s)f_2(s)ds \\ v(x)f_1 + u(x)f_2(x) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \alpha g_1 + \int_{-\pi}^{\pi} v(s)g_2(s)ds \\ v(x)g_1 + u(x)g_2(x) \end{pmatrix} = \\
 &= \alpha Af + \beta Ag.
 \end{aligned}$$

Ta'rifga ko'ra, A chiziqli operator ekan.

Endi bu operatorni chegaralanganlikka tekshiramiz.

Aniqlanishiga ko'ra,

$$\|Af\|^2 = \left| \alpha f_1 + \int_{-\pi}^{\pi} v(s)f_2(s)ds \right|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |v(x)f_1 + u(x)f_2(x)|^2 dx.$$

Har bir qo'shiluvchini alohida-alohida baholaymiz. Birinchi qo'shiluvchini baholashda $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ elementar tengsizlikdan foydalanamiz. U holda

$$\left| af_1 + \int_{-\pi}^{\pi} v(s)f_2(s)ds \right|^2 \leq 2|a|^2|f_1|^2 + 2 \left| \int_{-\pi}^{\pi} v(s)f_2(s)ds \right|^2.$$

Oxirgi qo'shiluvchini baholash uchun Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx$$

tengsizlikni qo'llaymiz. Bu holda

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} v(s)f_2(s)ds \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |v(s)|^2 ds \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(s)|^2 ds = \|v\|^2 \cdot \|f_2\|^2$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib birinchi qo'shiluvchi

$$2|a|^2 \cdot \|f_1\|^2 + 2\|v\|^2 \cdot \|f_2\|^2$$

dan oshmaydi.

Endi ikkinchi qo'shiluvchini baholaymiz:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |v(x)f_1 + u(x)f_2(x)|^2 dx \\ & \leq 2|f_1|^2 \int_{-\pi}^{\pi} |v(x)|^2 dx \\ & + \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)f_2(x)|^2 dx \leq 2\|f_1\|^2 \cdot \|v\| + 2 \max|u(x)|^2 \cdot \|f_2\|^2 \end{aligned}$$

Xulosa qilib aytganda,

$$\begin{aligned} \|Af\|^2 & \leq 2|a|^2 \cdot \|f_1\|^2 + 2\|v\|^2 \cdot \|f_2\|^2 + 2\|v\|^2 \cdot \|f_1\|^2 + 2 \max|u(x)|^2 \\ & \cdot \|f_2\|^2 = 2(|a|^2 + \|v\|) \cdot \|f_1\|^2 + 2(\|v\|^2 + \max|u(x)|^2) \cdot \|f_2\|^2 \\ & \leq M^2 \cdot \|f\|^2 \end{aligned}$$

bu yerda

$$M^2 := \max \left\{ 2(|a|^2 + \|v\|^2), 2(\|v\|^2 + \max |u(x)|^2) \right\}.$$

Ya'ni, $\|Af\| \leq M\|f\|$ tengsizlik o'rinli.

Shunday qilib, A chegaralangan operator ekan.

Endi A operatorni o'z-o'ziga qo'shmalikka tekshiramiz, ya'ni $A^* = A$ tenglikni tekshiramiz. Buning uchun esa

$$A_{11}^* = A_{11}, \quad A_{12}^* = A_{21}, \quad A_{22}^* = A_{22}$$

tengliklarni tekshiramiz:

$$(A_{11}f_1, g_1)_1 = \omega f_1 \overline{g_1} = f_1(\overline{\omega g_1}) = (f_1, A_{11}g_1)_1$$

Oxirgi tenglikda biz ω ning haqiqiy son qiymat ekanligini inobatga oldik. Bu esa $A_{11}^* = A_{11}$ ekanligini bildiradi.

Bunda biz $v(\cdot)$ funksiyaning haqiqiy qiymatli funksiya ekanligini inobatga oldik. Ta'rifga ko'ra, bu $A_{12}^* = A_{21}$ ekanligini bildiradi.

Endi $A_{22}^* = A_{22}$ ekanligini ko'rsatamiz.

$$(A_{22}f_2, f_2)_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(s)f_2(s)\overline{g_2(s)}ds = \int_{-\pi}^{\pi} f_2(s)\left(\overline{u(s)g_2(s)}\right)ds = (f_2, A_{22}g_2)_2$$

Oxirgi tenglik $u(\cdot)$ ning haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya ekanligidan kelib chiqadi.

Shunday qilib, A o'z-o'ziga qo'shma operatorli matritsa ekan.

Agar A_1 va A_2 lar H_1 Gilbert fazosini H Gilbert fazosiga o'tkazuvchi chiziqli, chegaralangan operatorli matritsalar bo'lsa, u holda quyidagi xossalar o'rinli:

$$1) (A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^* \quad 2) (\lambda A_1)^* = \overline{\lambda} A_1^* \quad 3) (A_1 A_2)^* = A_2^* \cdot A_1^*$$

Xulosa.

Ushbu bob “Banax yoki Gilbert fazolari to’g’ri yig’indisida aniqlangan operatorlar” deb nomlangan bo’lib, u ikkita paragrafdan tashkil topgan. 1.1-§ “Banax yoki Gilbert fazolari to’g’ri yig’indisi haqida” deb nomlangan bo’lib, unda asosan Gilbert fazosi, izomort fazolar, Gilbert fazolarning to’g’ri yig’indisi, unda skalyar ko’paytma va norma kiritilishi haqidagi ma’lumotlar o’z aksini topgan. 1.2-§ “Operatorli matritsalar va ularning asosiy xossalari” deb nomlangan. Bu paragrafda ikkita Gilbert fazolarining to’g’ri yig’indisida aniqlangan chiziqli chegaralangan operatorlar, ya’ni 2×2 blok operatorli matritsalar, ularning aniqlanishi, chiziqliligi, chegaralanganligi, o’z-o’ziga qo’shmaligi haqida so’z boradi. Keltirilgan ma’lumotlar misollar yordamida tahlil qilingan.

II BOB. 2×2 OPERATORLI MATRITSALAR UCHUN SPEKTRAL MUNOSABATLAR.

2.1§. Operatorli matritsalarining aniqlanishi va spektri. Asosiy tushunchalar va misollar.

Bizga $H_1, H_2, \dots, H_n$ Gilbert fazolari berilgan bo'lsin. U holda $H := \{(f_1, f_2, \dots, f_n): f_k \in H_k, k = \overline{1, n}\}$ fazoga $H_1, H_2, \dots, H_n$ fazolarning *to'g'ri yig'indisi* deyiladi va $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ kabi belgilanadi.

Operatorlar nazariyasidan yaxshi ma'lumki, $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ Gilbert fazosida ta'sir qiluvchi har qanday chiziqli, chegaralangan operator $n \times n$ o'lchamli operatorli matritsa ko'rinishida tasvirlanadi:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bunda $A_{ij}: H_j \rightarrow H_i, i, j = \overline{1, n}$ lar chiziqli chegaralangan operatorlar.

Operatorli matritsalarini bloklarga bo'lish masalasini qaraymiz.

Buni $n=3$ bo'lgan holda tahlil qilamiz. $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ bo'lsin. U holda A operator

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

ko'rinishni oladi. Dastlab shuni ta'kidlab o'tish joizki, A operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun

$$\begin{aligned} A_{11}^* &= A_{11}, & A_{22}^* &= A_{22}, & A_{33}^* &= A_{33} \\ A_{12}^* &= A_{21}, & A_{13}^* &= A_{31}, & A_{23}^* &= A_{32} \end{aligned}$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Agar $X_1 := H_1$, $X_2 := H_2 \oplus H_3$ belgilash kiritilsa, u holda H Gilbert fazosi X_1 va X_2 fazolarning to'g'ri yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi. Bu holda A operatorli matritsani $H = X_1 \oplus X_2$ yoyilmaga nisbatan

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

ko'rinishida tasvirlanadi, bu yerda

$$\begin{aligned} B_{11} &:= A_{11}, & B_{12} &:= (A_{12} \ A_{13}) \\ B_{21} &:= \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}, & B_{22} &:= \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Xuddi shuningdek, $Y_1 = H_1 \oplus H_2$, $Y_2 = H_3$ belgilash kiritilsa, u holda H Gilbert fazosi Y_1 va Y_2 Gilbert fazolarning to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lib, A operator $H = Y_1 \oplus Y_2$ yoyilmaga nisbatan 2×2 o'lchamli blok operatorli matritsa ko'rinishida tasvirlanadi:

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

bu yerda $C_{ij}: Y_j \rightarrow Y_i$ matritsaviy elementlar quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$\begin{aligned} C_{11} &:= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, & C_{12} &:= \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix} \\ C_{21} &:= (A_{31} \ A_{32}), & C_{22} &:= A_{33}. \end{aligned}$$

Endi $n=4$ holni qaraymiz. Ya'ni H Gilbert fazosi H_1, H_2, H_3, H_4 Gilbert fazolarining to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lsin. H da aniqlangan 4×4 o'lchamli

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

operatorli matritsani qaraymiz, bu yerda $A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ matritsaviy chiziqli chegaralangan operatorlar.

Bu holda 2 xil holatni kuzatish mumkin:

1-holat: H Gilbert fazosi ikkita Gilbert fazolarning to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lishi mumkin.

2-holat: H Gilbert fazosi uchta Gilbert fazolarning to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lishi mumkin.

Dastlab 1-holatni muhokama qilamiz. Agar

$$X_1 := H_1, \quad X_2 = H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$$

belgilash kiritilsa, u holda A operator $H = X_1 \oplus X_2$ yoyilmasiga nisbatan 2×2 o'lchamli

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

operatorli matritsa ko'rinishda tasvirlanadi. Bunda

$$B_{11} := A_{11}, \quad B_{12} := (A_{12} \quad A_{13} \quad A_{14})$$

$$B_{21} := \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{pmatrix}, \quad B_{22} := \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}.$$

Agar $Y_1 := H_1 \oplus H_2$, $Y = H_3 \oplus H_4$ fazolar kiritilsa, u holda A operatorli matritsa $H = Y_1 \oplus Y_2$ yoyilmaga nisbatan

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda $C_{ij}: Y_j \rightarrow Y_i$, $i, j = 1, 2$ operatorlarning har biri 2×2 o'lchamli operatorli matritsalar bo'lib, quyidagi tengliklar yordamida aniqlangan:

$$C_{11} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad C_{12} := \begin{pmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{23} & A_{24} \end{pmatrix},$$

$$C_{21} := \begin{pmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{pmatrix}, \quad C_{22} := \begin{pmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}.$$

Endi H Gilbert fazosini $Z_1 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ va $Z_2 := H_4$ Gilbert fazolari yordamida $H = Z_1 \oplus Z_2$ ko'rinishida tasvirlaymiz. U holda A operator $H = Z_1 \oplus Z_2$ yoyilmaga nisbatan tasvir o'rinli. Har ikkala holda ham A operatorli 3×3 o'lchamli operatorli matritsa shaklida tasvirlanadi. Ularning matritsaviy elementlari A operatorni mos bloklarga ajratish orqali aniqlanadi.

Endi operatorli matritsalarining spektri bilan bog'liq tushunchalarni kiritamiz.

Bizga H Gilbert fazosida aniqlangan A operatorli matritsa berilgan bo'lsin, ya'ni $A: H \rightarrow H$. Agar biror $\lambda \in \mathbb{C}$ soni uchun $Af = \lambda f$ tenglama nolmas $f \in H$ yechimga ega bo'lsa, λ soni A operator uchun xos qiymat, nolmas $f \in H$ yechimga ega xos vektor yoki xos funksiya deyiladi. Ushbu

$$L_\lambda := \{f \in H: Af = \lambda f\}$$

qism fazoga A operatorning λ xos qiymatga mos keluvchi xos qism fazosi deyiladi. Bizga yaxshi ma'lumki, L_λ qism fazo A operatorga nisbatan invariant bo'ladi.

Shuni alohida ta'kidlash joizki, operatorning xos qism fazosi istalgan o'lchamga ega bo'lishi mumkin. Masalan, I birlik operator uchun $\lambda = 1$ xos qiymatga mos keluvchi xos qism fazo H ning o'ziga teng.

L_λ qism fazo o'lchamiga λ xos qiymatning karralisi deyiladi. Agar A operator λ xos qiymatining shunday atrofi topilib, bu atrofda A operatorning λ dan farqli xos qiymati yotmasa, λ soni A operator uchun yakka *langan* xos qiymat deyiladi. A operatorning barcha chekli karrali yakka *langan* xos qiymatlari to'plamiga A operatorning *diskret spektri* deyiladi va $\sigma_{disc}(A)$ kabi belgilanadi.

$A - \lambda I$ operator teskarilanuvchan va teskari operator chegaralangan bo'ladigan barcha λ lar to'plamiga A operatorning *rezolventa to'plami* deyiladi va $\rho(A)$ kabi belgilanadi.

Chekli o'lchamli fazo hamda A operatorning barcha xos qiymatlari to'plamiga uning *spektri* deyiladi va $\sigma(A)$ kabi belgilanadi.

Qolgan barcha qiymatlarga esa A ning *regulyar qiymatlari* deyiladi.

Shunday qilib, chekli o'lchamli holda quyidagi ikkita hol bo'lishi mumkin:

1) $Af = \lambda f$ tenglama nolmas yechimga ega, ya'ni λ soni A operator uchun xos qiymat, bu holda $(A - \lambda I)^{-1}$ mavjud emas;

2) fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ chegaralangan teskari operator mavjud; ya'ni λ regulyar nuqta.

Biroq cheksiz o'lchamli fazo hamda yana uchinchi hol ham mavjud:

3) $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud, lekin bu operator fazoning hamma yerida aniqlanmagan. Odatda bunday λ nuqta A operatorning uzluksiz spektriga tegishli deyiladi. A operatorning uzluksiz spektri $\sigma_{cont}(A)$ kabi belgilanadi.

A operatorning barcha xos qiymatlari to'plami uning *nuqtali spektri* deyiladi va $\sigma_p(A)$ kabi belgilanadi.

Operatorli matritsaning spektrini hisoblashga doir misol qaraymiz.

Bunday operatorli matritsa sifatida 1.2§ da o'rnatilgan 2×2 o'lchamli A operatorli matritsani qaraymiz.

Agar H Gilbert fazosida ta'sir qiluvchi

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$$

operatorlarni kiritsak, u holda $A = A_0 + V$ ko'rinishda tasvirlanadi. Aniqlanishiga ko'ra, V - 2 o'lchamli operator.

Chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi mashhur Veyl teoremasiga ko'ra, A_0 operatorning muhim spektri A operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi, ya'ni

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_0).$$

A_0 operatorning muhim spektri uchun esa $\sigma_{ess}(A_0) = [m; M]$ tenglik o'rinli, bu yerda m va M sonlari quyidagi tengliklar yordamida aniqlanadi:

$$m := \min_{-\pi \leq x \leq \pi} u(x), \quad M := \max_{-\pi \leq x \leq \pi} u(x)$$

Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra,

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_0) = [m; M].$$

Endi A operatorning diskret spetrini o'rganamiz. Buning uchun esa xos qiymatga nisbatan $Af = \lambda f$ tenglamani qaraymiz. Ushbu tenglama

$$\begin{cases} (\omega - \lambda)f_1 + \int_{-\pi}^{\pi} v(t)f_2(t)dt = 0 \\ v(x)f_1 + (u(x) - \lambda)f_2(x) = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

tenglamalar sistemasiga ekvivalentdir. $\lambda \in [m; M]$ bo'lgani uchun (2.1.1)-tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasidan $f_2(x)$ uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$f_2(x) = -\frac{v(x)f_1}{u(x)-\lambda} \quad (2.1.2)$$

$f_2(x)$ uchun topilgan (2.1.2) ifodani (2.1.1)-tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasiga qo'yib,

$$\left(\omega - \lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)dt}{u(t)-\lambda} \right) f_1 = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $f_1 = 0$ bo'lsa, u holda (2.1.2)ga ko'ra $f_2(x) = 0$ bo'ladi. Bu esa λ ning xos qiymat ekanligiga, aniqrog'i (f_1, f_2) xos vektor funksiyasi ekanligiga zid. Demak, $f_1 \neq 0$. Shu sababli

$$\Delta(\lambda) := \omega - \lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)}{u(t)-\lambda} dt = 0.$$

Oxirgi mulohazalardan

$$\sigma_{disc}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m; M] : \Delta(\lambda) = 0\}$$

tenglik kelib chiqadi.

2.2§ Chegaralangan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar

H Gilbert fazosi va A operator H Gilbert fazosidagi chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. Ushbu

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in S_H\}$$

to'plamga A operatorning sonli tasviri deyiladi, bu yerda

$$S_H := \{x \in H : \|x\| = 1\}$$

orqali H dagi birlik sfera belgilangan. Mashhur Tyopliu-Xausdorf teoremasiga ko'ra sonli tasvir C ning qavariq qism to'plami bo'lib,

$$\sigma_p(A) \subset W(A), \quad \sigma(A) \subset \overline{W(A)} \quad (2.2.1)$$

spektral munosabatlar o'rinli, bunda $\sigma_p(A)$ – A operatorning nuqtali spektri, $\sigma(A)$ esa A ning spektridir. Agar $\dim H < \infty$ bo'lsa, $W(A)$ yopiq to'plam bo'ladi.

Agar H Gilbert fazosi H_1 va H_2 Gilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi ko'rinishda tasvirlansa, u holda ixtiyoriy chiziqli chegaralangan $A \in L(H)$ operator hamisha 2×2 o'lchamli blok-operatorli matritsa ko'rinishda tasvirlanadi:

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

Bunda $A \in L(H_1)$, $B \in L(H_2, H_1)$, $C \in L(H_1, H_2)$, $D \in L(H_2)$ –chiziqli chegaralangan operatorlar.

2.2.1-ta'rif. $f \in S_{H_1}$ va $g \in S_{H_2}$ lar uchun

$$A_{f,g} := \begin{pmatrix} (Af, f) & (Bg, f) \\ (Cf, g) & (Dg, g) \end{pmatrix} \quad (2.2.3).$$

2×2 sonli matritsani aniqlaymiz. U holda $W^2(A) := \bigcup_{f \in S_{H_1}, g \in S_{H_2}} \sigma_p(A_{f,g})$ to'plamga A operatorning kvadratik sonli tasviri deyiladi, bu A operatorning (2.2.2) ko'rishiga mos keladi.

H gilbert fazoning ikkita turli yoyilmasiga mos kvadratik sonli tasvirlar ham turlicha bo'lishi mumkin. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin:

$$A_0 := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ va $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^1$ ga mos kvadratik sonli tasvirlar turlicha bo'ladi.

Ko'pincha kvadratik sonli tasvirning quyidagi ekvivalent ta'rifidan foydalanish qulaydir. Bunda normasi birga teng bo'lishi shart bo'lmagan nolmas elementlardan foydalaniladi.

$f \in \mathcal{D}_1$, $g \in \mathcal{D}_2$, $f, g \neq 0$ elementlar uchun

$$\mathcal{A}_{f,g} := \begin{pmatrix} \frac{(Af, f)}{\|f\|^2} & \frac{(Bg, f)}{\|f\| \|g\|} \\ \frac{(Cf, g)}{\|f\| \|g\|} & \frac{(Dg, g)}{\|g\|^2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \quad (2.2.4)$$

va

$$\begin{aligned}\Delta(f, g; \lambda) &:= \det \begin{pmatrix} (Af, f) - \lambda(f, f) & (Bg, f) \\ (Cf, g) & (Dg, g) - \lambda(g, g) \end{pmatrix} = \\ &= \|f\|^2 \|g\|^2 \det(\mathcal{A}_{f,g} - \lambda)\end{aligned}$$

belgilashlar olamiz.

U holda

$$\begin{aligned}W^2(\mathcal{A}) &= \bigcup_{\substack{f \in \mathcal{D}_1, g \in \mathcal{D}_2, \\ f, g \neq 0}} \sigma_p(\mathcal{A}_{f,g}) = \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}: \exists f \in \mathcal{D}_1, g \in \mathcal{D}_2, f, g \neq 0, \det(\mathcal{A}_{f,g} - \lambda) = 0\} = \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}: \exists f \in \mathcal{D}_1, g \in \mathcal{D}_2, f, g \neq 0, \Delta(\mathcal{A}_{f,g} - \lambda) = 0\}.\end{aligned}$$

Xususiyl holda, $A = A^*, D = D^*$ va yoki $C \subset B^*$ yoki $C \subset -B^*$ bo'lsa, u holda $\det(\mathcal{A}_{f,g} - \lambda) = 0$ kvadratik tenglamani ikkita $\lambda_{\pm}(f, g)$ yechimlari

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm}(f, g) &= \frac{1}{2} \left(\frac{(Af, f)}{\|f\|^2} + \frac{(Dg, g)}{\|g\|^2} \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left(\frac{(Af, f)}{\|f\|^2} + \frac{(Dg, g)}{\|g\|^2} \right)^2 + 4 \frac{|(Bg, f)|(Cf, g)|}{\|f\|^2 \|g\|^2}} \right)\end{aligned}$$

kabi aniqlanadi. Bunda kvadrat ildiz ostidagi ifoda hamisha haqiqiy.

Agar $C \subset B^*$ bo'lsa, u holda u nomanfiydir. Agar $C \subset -B^*$ bo'lsa, u holda $z \geq 0$ bo'lganda kvadrat ildiz tarmog'ini $\sqrt{z} \geq 0$ bo'ladigan qilib tanlaymiz va $z < 0$ bo'lsa $Im\sqrt{z} > 0$ qilib tanlaymiz.

2.2.1-xossa. $W^2(A) \subset W(A)$ munosabat o'rinli.

Isbot. Faraz qilaylik, $\lambda_0 \in W^2(A)$ bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $f \in S_{H_1}, g \in S_{H_2}$ va $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2, |\alpha_1| + |\alpha_2| = 1$ lar topilib,

$$A_{(f,g)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (α_1, α_2) bilan skalyar ko'paytirib, $A_{(f,g)}$ ning ta'rifidan foydalanib,

$$\left(A \begin{pmatrix} \alpha_1 f \\ \alpha_2 g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 f \\ \alpha_2 g \end{pmatrix} \right) = \lambda_0$$

ni hosil qilamiz. $\|\alpha_1 f\|^2 + \|\alpha_2 g\|^2 = 1$ bo'lgani uchun $\lambda_0 \in W(A)$ bo'ladi. 2.2.1-xossa isbotlandi.

2.2.1-teorema. Quyidagi spektral munosabatlar o'rinli:

$$\sigma_p(A) \subset W^2(A), \quad \sigma(A) \subset \overline{W^2(A)}$$

Isbot. Dastlab $\lambda \in \sigma_p(A)$ holni qaraymiz. U holda shunday nolmas $(f, g) \in H$ element topilib,

$$\begin{cases} (A - \lambda)f + Bg = 0 \\ Cf + (D - \lambda)g = 0 \end{cases}$$

bo'ladi. $\hat{f} \in S_{H_1}, \hat{g} \in S_{H_2}$ elementlar uchun $f = \|f\|\hat{f}, g = \|g\|\hat{g}$ deb olamiz.

Shu sababli agar $f = 0$ bo'lsa, u holda $\hat{f}$ ixtiyoriy qilib tanlanadi.

U holda

$$(Af, \hat{f}) - \lambda(f, \hat{f}) + (Bg, \hat{f}) = 0$$

$$(Cf, \hat{g}) + (Dg, \hat{g}) - \lambda(g, \hat{g}) = 0$$

bo'ladi va shu sababli

$$A_{\hat{f}, \hat{g}} \left(\frac{\|f\|}{\|g\|} \right) = \lambda \left(\frac{\|f\|}{\|g\|} \right)$$

bo'ladi. Demak, $\lambda \in \sigma_p(A_{\hat{f}, \hat{g}}) \subset W^2(A)$ ekan.

Agar $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ bo'lsa, u holda $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ yoki $\lambda \in \sigma_{app}(A)$ bo'ladi.

Agar $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ bo'lsa, u holda yuqorida isbotlangani kabi $\bar{\lambda} \in W^2(A^*)$ bo'ladi va shu sababli $\lambda \in W^2(A)$. Agar $\lambda \in \sigma_{app}(A)$ bo'lsa, u holda shunday $(\hat{f}_n, \hat{g}_n) \in H$

elementlar ketma-ketligi topilib, $\|f_n\|^2 + \|g_n\|^2 = 1$ $\left\| A \left(\frac{\|f_n\|}{\|g_n\|} \right) - \lambda \left(\frac{\|f_n\|}{\|g_n\|} \right) \right\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ bo'ladi.

U holda $\hat{f} \in S_{H_1}$ va $\hat{g} \in S_{H_2}$ lar uchun

$$A_{\hat{f}, \hat{g}} \left(\frac{\|f_n\|}{\|g_n\|} \right) - \lambda \left(\frac{\|f_n\|}{\|g_n\|} \right)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

ni hosil qilamiz. $\|A_{\hat{f}, \hat{g}}\| \leq \|A\|, n \in N$ bo'lganligi uchun $n \rightarrow \infty$ bo'lganda

$\text{dist}(\lambda, \sigma_p(A_{\hat{f}, \hat{g}})) \rightarrow 0$ bo'ladi. Shu sababli $\lambda \in \overline{\bigcup_{n \in N} \sigma_p(A_{\hat{f}, \hat{g}})} \subset \overline{W^2(A)}$.

Teorema to'liq isbotlandi.

2.2.1-xossa va 2.2.1-teoremadan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

$$1) \sigma_p(A) \subset W^2(A) \subset W(A);$$

$$2) \sigma(A) \subset \overline{W^2(A)} \subset \overline{W(A)}$$

Shunday qilib, kvadratik tasvir qavariq to'plam bo'lmagani uchun u $\sigma(A)$ spektrning joylashuv o'rnini sonli tasvirga nisbatan yaxshiroq tasvirlar ekan.

Bizga yaxshi ma'lumki, agar A operator 2×2 o'lchamli sonli matritsa bo'lsa, u holda A operator spektri uning xos qiymatlaridan iborat bo'ladi, ya'ni A operator sof nuqtali spektrga ega bo'ladi. Bu holda A operatorning $W(A)$ sonli tasviri

$$W(A) = [\min\{\lambda_1, \lambda_2\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2\}]$$

kabi bo'ladi. Shu sababli uning sonli tasvirini hisoblash uchun A ning xos qiymatlarini topish yetarli.

Quyidagi misollarda $W(A)$ ni hisoblash masalasini qaraymiz.

2.2.1-misol . $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ operatorning tasvirini toping.

Yechim. A matritsa uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz:

$$Ax = \lambda x$$

Bu tenglamani quyidagi $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglamaga yoki $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$

tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Uni $\begin{cases} (4 - \lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ kabi yozib

olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni 0 ga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

Sodda hisoblashlarga ko'ra hosil bo'lgan kvadrat tenglama yechimlari

quyidagicha bo'ladi: $\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$. Shunday qilib,

$\lambda_1 = 3 - \sqrt{2}$; $\lambda_2 = 3 + \sqrt{2}$ sonlari A matritsaning xos qiymatlari bo'lar ekan. Shu sababli $W(A) = [3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}]$.

2.2.2-misol . $A = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 22 \end{pmatrix}$ operatorning sonli tasvirini toping.

Yechim. A matritsa uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz:

$$Ax = \lambda x$$

Bu tenglamani quyidagi $\begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglamaga yoki

$\begin{cases} 16x_1 + 5x_2 = \lambda x_1 \\ 5x_1 + 22x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Uni

$\begin{cases} (16 - \lambda)x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 + (22 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ kabi yozib olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni 0 ga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 16 - \lambda & 5 \\ 5 & 22 - \lambda \end{vmatrix} = (22 - \lambda)(16 - \lambda) - 25 = \lambda^2 - 38\lambda + 327 = 0.$$

Sodda hisoblashlarga ko'ra hosil bo'lgan kvadrat tenglama yechimlari quyidagicha bo'ladi: $\lambda_{1,2} = \frac{38 \pm 2\sqrt{34}}{2} = 19 \pm \sqrt{34}$. Shunday qilib,

$\lambda_1 = 19 - \sqrt{34}$; $\lambda_2 = 19 + \sqrt{34}$ sonlari A matritsaning xos qiymatlari bo'lar ekan. Shu sababli $W(A) = [19 - \sqrt{34}; 19 + \sqrt{34}]$.

2.2.3-misol . $A = \begin{pmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ operatorning sonli tasvirini toping.

Yechim. A matritsa uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz:

$$Ax = \lambda x$$

Bu tenglamani quyidagi $\begin{pmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglamaga yoki

$\begin{cases} 36x_1 + 6x_2 = \lambda x_1 \\ 6x_1 + 18x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Uni

$\begin{cases} (36 - \lambda)x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 + (18 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ kabi yozib olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni 0 ga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 36 - \lambda & 6 \\ 6 & 18 - \lambda \end{vmatrix} = (36 - \lambda)(18 - \lambda) - 36 = \lambda^2 - 54\lambda + 612 = 0.$$

Sodda hisoblashlarga ko'ra hosil bo'lgan kvadrat tenglama yechimlari quyidagicha bo'ladi: $\lambda_{1,2} = \frac{54 \pm 6\sqrt{13}}{2} = 27 \pm 3\sqrt{13}$. Shunday qilib, $\lambda_1 = 27 - 3\sqrt{13}$; $\lambda_2 = 27 + 3\sqrt{13}$ sonlari A matritsaning xos qiymatlari bo'lar ekan. Shu sababli $W(A) = [27 - 3\sqrt{13}; 27 + 3\sqrt{13}]$.

2.2.4-misol . $A = \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$ operatorning sonli tasvirini toping.

Yechim. A matritsa uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz:

$$Ax = \lambda x$$

Bu tenglamani quyidagi $\begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglamaga yoki

$\begin{cases} 25x_1 + 7x_2 = \lambda x_1 \\ 7x_1 + 15x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Uni

$\begin{cases} (25 - \lambda)x_1 + 7x_2 = 0 \\ 7x_1 + (15 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ kabi yozib olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni 0 ga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 25 - \lambda & 7 \\ 7 & 15 - \lambda \end{vmatrix} = (15 - \lambda)(25 - \lambda) - 49 = \lambda^2 - 40\lambda + 326 = 0.$$

Sodda hisoblashlarga ko'ra hosil bo'lgan kvadrat tenglama yechimlari quyidagicha bo'ladi: $\lambda_{1,2} = \frac{40 \pm 2\sqrt{74}}{2} = 20 \pm \sqrt{74}$. Shunday qilib, $\lambda_1 = 20 - \sqrt{74}$; $\lambda_2 = 20 + \sqrt{74}$ sonlari A matritsaning xos qiymatlari bo'lar ekan. Shu sababli $W(A) = [20 - \sqrt{74}; 20 + \sqrt{74}]$.

2.2.5-misol . $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 19 \end{pmatrix}$ operatorning sonli tasvirini toping.

Yechim. A matritsa uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz:

$$Ax = \lambda x$$

Bu tenglamani quyidagi $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglamaga yoki

$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 19x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Uni

$\begin{cases} (9 - \lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (19 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ kabi yozib olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni 0 ga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & 3 \\ 3 & 19 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda)(19 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 28\lambda + 162 = 0.$$

Sodda hisoblashlarga ko'ra hosil bo'lgan kvadrat tenglama yechimlari quyidagicha bo'ladi: $\lambda_{1,2} = \frac{28 \pm 2\sqrt{34}}{2} = 14 \pm \sqrt{34}$. Shunday qilib,

$\lambda_1 = 14 - \sqrt{34}$; $\lambda_2 = 14 + \sqrt{34}$ sonlari A matritsaning xos qiymatlari bo'lar ekan. Shu sababli $W(A) = [14 - \sqrt{34}; 14 + \sqrt{34}]$.

Faraz qilaylik, H'_i , $i = 1, 2$ ixtiyoriy Gilbert fazolari va $H_i = l^2(N) \oplus H'_i$, $i = 1, 2$ bo'lsin. Bu yerda

$$l^2(N) := \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : x_k \in C, k \in N, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}.$$

Quyidagi

$$A_1 := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{12} \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

blok operatorli matritsalarini qaraymiz. Bu yerda $A_{11}, A_{21}: l^2(N) \rightarrow l^2(N)$ operatorlar

$$\begin{aligned} A_{11}(x_1, \dots, x_n, \dots) &= (a_{11}x_1, \dots, a_{1n}x_n, \dots); \quad A_{21}(x_1, \dots, x_n, \dots) \\ &= (a_{21}x_1, \dots, a_{2n}x_n); \quad (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2(N) \end{aligned}$$

formulalar bilan aniqlangan. $A_{12}: H'_1 \rightarrow H'_1$ va $A_{22}: H'_2 \rightarrow H'_2$ operatorlar biror $a_1, a_2 \in R$ sonlari uchun

$$\sigma(A_{12}) = \sigma_{ess}(A_{12}) = (-\infty; a_1]; \quad \sigma(A_{22}) = \sigma_{ess}(A_{22}) = [a_2; +\infty)$$

shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy chiziqli o'z-o'ziga qo'shma operatorlar bo'lsin.

Qo'shimcha ravishda quyidagilarni faraz qilamiz:

$$\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\} \subset R;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n} = a_1 (a_{1n} > a_1, n \in N);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a_2 (a_{2n} > a_2, n \in N);$$

$$\sup_n a_{1n} < \inf_n a_{2n}$$

parametrlarda qo'yilgan bu shartlarda $a_1 < a_2$ bo'ladi. Bundan tashqari A_{11} va A_{21} operatorlar chegaralangan operatorlar bo'ladi. Yuqoridagi shartlarda A_{21} va A_{22} operatorlar o'z-o'ziga qo'shma yarim chegaralangan operatorlar bo'ladi, aniqrog'i A_{21} operator yuqoridan, A_{22} operator esa quyidan chegaralangan operator bo'ladi.

Faraz qilaylik, $H := H_1 \oplus H_2$ bo'lsin. Ushbu

$$A := \text{diag}\{A_1, A_2\}: H \rightarrow H$$

ko'rinishdagi diagonal operatorli matritsani qaraymiz. Bu operator o'z-o'ziga qo'shma chegaralanmagan operator bo'lib, uning aniqlanish sohasi uchun

$$D(A) := (l^2(N) \oplus D(A_1)) \oplus (l^2(N) \oplus D(A_2))$$

tenglik o'rinlidir.

A operatorning aniqlanishiga ko'ra, uning spektri $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ kabi topiladi.

A_1 va A_2 operatorlarning spektrlari uchun $\max\sigma(A_1) < \min\sigma(A_2)$ tengsizlik o'rinlidir. A operator $(\max\sigma(A_1), \min\sigma(A_2))$ to'plamda yotuvchi cheksiz sondagi $\{z_n\}, \{\lambda_n\}$ xos qiymatlarga egadir, ya'ni $\{z_n\}, \{\lambda_n\} \subset (\max\sigma(A_1), \min\sigma(A_2))$ xos sonlari mos ravishda $\max\sigma(A_1)$ va $\min\sigma(A_2)$ chegaraviy nuqtalarga yaqinlashuvchi bo'ladi.

2.2.6-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ matritsaning spektrini toping.

Yechim. A matritsa $\mathbb{R}^3$ Gilbert fazosida aniqlangan. Biz ushbu fazoni Gilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi ya'ni $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ ko'rinishida tasvirlab olishimiz mumkin:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = 2 \quad A_{12} = (0 \ 0) \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

A_{11} matritsaning xos soni $\lambda = 2$ ga. Endi A_{22} matritsaning xos sonlarini topamiz: $A_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. A_{22} matritsa uchun xos qiymatlarga nisbatan tenglamani

qaraymiz: $Ax = \lambda x$. Bu tenglamani quyidagi $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglama

yoki $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = \lambda x_1 \\ 5x_1 + 9x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Uni

$\begin{cases} x_1(4 - \lambda) + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 + (9 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ kabi yozib olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 5 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) - 25 = \lambda^2 - 13\lambda + 11 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 44}}{2} = \frac{13 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{13 - 5\sqrt{5}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{13 + 5\sqrt{5}}{2}$$

sonlari A_{22} matritsaning xos qiymatlari bo'lar ekan. A matritsaning xos qiymatlari

esa λ_1, λ_2 va $\lambda_3 = 2$. $\sigma(A) = \left\{ \frac{13-5\sqrt{5}}{2}; 2; \frac{13+5\sqrt{5}}{2} \right\}$. A matritsaning sonli tasviri

esa $W(A) = [\lambda_1, \lambda_2] = \left[\frac{13-5\sqrt{5}}{2}, \frac{13+5\sqrt{5}}{2} \right]$ ko'rinib turibdiki, $\sigma(A) \subset W(A)$

munosabat o'rinli.

2.2.7-misol. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ matritsaning spektrini toping.

Yechim. A matritsa $\mathbb{R}^4$ Gilbert fazosida aniqlangan. Biz ushbu fazoni Gilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi ya'ni $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ ko'rinishida tasvirlab olishimiz mumkin:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Endi A_{11} matritsaning xos sonlarini topamiz. A_{11} matritsa uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz: $Ax = \lambda x$. Bu tenglama quyidagi

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglamaga yoki $\begin{cases} x_1(5 - \lambda) + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (5 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ sistema kabi yozib olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \quad (\lambda - 8)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 8$$

Endi A_{22} matritsaning xos sonlarini topamiz. A_{22} matritsa uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz: $Ax = \lambda x$. Bu tenglama quyidagi

$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tenglamaga yoki $\begin{cases} x_1(7 - \lambda) + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 + (7 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ sistema kabi yozib olamiz.

Oxirgi tenglamalar sistemasining asosiy determinantini topib, uni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & 6 \\ 6 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0 \quad (\lambda - 1)(\lambda - 13) = 0$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 13$$

Bundan ma'lumki, $\sigma(A) = \{1, 2, 8, 13\}$. $W(A) = [1, 13]$ bo'ladi. Demak, quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi: $\sigma(A) \subset W(A)$.

2.3§ Chegaralanmagan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar.

H_1 va H_2 — Banach fazolari bo'lsin. $H = H_1 \oplus H_2$ Banach fazosida

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

kabi aniqlangan 2×2 o'lchamli chiziqli blok operatorli matritsani qaraymiz. Bunda A va D lar mos ravishda H_1 va H_2 da zich aniqlangan yopiq chiziqli operatorlar, B va C lar esa mos ravishda H_2 ni H_1 ga o'tkazuvchi va H_1 ni H_2 ga

o'tkazuvchi zich aniqlangan yopiq chiziqli operatorlar. U holda $\mathcal{A}$ operator ham o'zining

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := (\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(C)) \oplus (\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(D))$$

aniqlanish sohasida zich aniqlangan, lekin yopiq bo'lishi shart emas.

Quyidagi biz diagonal bo'yicha va diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha majoranta bo'ladigan blok operatorli matritsalarini qaraymiz.

Faraz qilaylik, E, F va G lar Banax fazolar, T, S lar esa mos ravishda E ni F ga va E ni G ga o'tkazuvchi chiziqli operatorlar bo'lsin.

2.3.1-ta'rif. Agar $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$ va $\exists a_s, b_s \geq 0$ sonlari topilib,

$$\|Sx\| \leq a_s \|x\| + b_s \|Tx\|, \quad x \in \mathcal{D}(T) \quad (2.3.2)$$

bajarilsa, S operator T — *chegaralangan* yoki T ga nisbatan *chegaralangan* deyiladi.

Biror $a_s \geq 0$ uchun (2.3.2) ni qanoatlantiruvchi b_s larning infimumini S ning T — *chegarasi* deyiladi va δ_s kabi belgilanadi.

2.3.2-ta'rif. Agar $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ va har qanday chegaralangan $\{x\}_1^\infty \subset \mathcal{D}(T)$ ketma-ketlik uchun $\{Tx\}_1^\infty \in F$ ketma-ketlik chegaralangan $\{Sx\}_1^\infty \subset G$ ketma-ketlik esa yaqinlashuvchi ketma-ketlikni o'zida saqlasa, S operatorga T — *kompakt* deyiladi.

Ta'kidlash joizki, T yopiq operator, S esa yopiluvchan operator bo'lsa, u holda $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ ekanligidan S operator T —chegaralangan bo'lishi kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} \|Sx\| &\leq a_s \|x\| + b_s \|Tx\| \leq a_s \|x\| + b_s \|(T + S)x\| + b_s \|Sx\|, \\ x &\in \mathcal{D}(T) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

tengsizlikdan ko'rinib turibdiki, agar S operator T —chegaralangan bo'lib, S ning T —chegarasi uchun $\delta_s < 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda S operator

$(T + S)$ —chegaralangan bo'lib, S ning $(T + S)$ —chegarasi $\frac{\delta_s}{1 - \delta_s}$ dan oshmaydi.

Osongina isbotlash mumkinki, (2.3.2) tengsizlik

$$\|Sx\|^2 \leq a_s'^2 \|x\|^2 + b_s'^2 \|Tx\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(T) \quad (2.3.4)$$

tengsizlikka ekvivalent bo'ladi. Agar biror $\delta > 0$ uchun (2.3.2) tengsizlik bajarilib, $b'_s > \delta$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Shuning uchun S operatorning T –chegarasi biror $a'_s \geq 0$ uchun (2.3.4) tengsizlikni qanoatlantiruvchi b'_s larning infimumi bo'yicha olinishi mumkin.

2.3.3-ta'rif. Agar (2.3.1) formula bilan aniqlangan $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsada C operator A –chegaralangan, B operator esa D –chegaralangan bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ ga *diagonal elementlar bo'yicha chegaralangan* deyiladi.

2.3.4-ta'rif. Agar (2.3.1) formula bilan aniqlangan $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsada A operator C –chegaralangan, D operator esa B –chegaralangan bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ ga *diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha chegaralangan* deyiladi.

Eslatma . $\mathcal{A}$ matritsaning elementlari yopiq deb faraz qilingani bois, nisbiy chegaralanganlik turi quyidagi munosabatlar yordamida ham tekshirilishi mumkin:

1) $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa diagonal elementlari bo'yicha chegaralangan bo'lishi uchun $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$, $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(B)$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

2) $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa diagonal bo'lmagan elementlari bo'yicha chegaralangan bo'lishi uchun $\mathcal{D}(C) \subset \mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(D)$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Har ikkala holda $\mathcal{A}$ operator quyidagi to'plamda zich aniqlangan bo'ladi:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 = \begin{cases} \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D), & \text{agar } \mathcal{A} \text{ diagonal elementlar bo'yicha} \\ & \text{chegaralangan bo'lsa,} \\ \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B), & \text{agar } \mathcal{A} \text{ diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha} \\ & \text{chegaralangan bo'lsa} \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ blok operatorli matritsani yopiq operator bo'lishini ta'minlash uchun bizga qo'shimcha shart kerak bo'ladi. Quyidagi ta'rifni shu maqsadda kiritamiz:

2.3.5-ta'rif. Faraz qilaylik, $\delta \geq 0$ bo'lsin.

1) Agar C operator A –chegaralangan bo'lib, uning A –chegarasi δ_C bo'lsa, B operator esa D –chegaralangan operator bo'lib, uning D –chegarasi δ_B bo'lsa va $\delta = \max\{\delta_B, \delta_C\}$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa δ –tartib bilan *diagonal elementlari bo'yicha chegaralangan* deyiladi.

2) Agar A operator C –chegaralangan bo'lib, uning C –chegarasi δ_A bo'lsa, D operator esa B –chegaralangan operator bo'lib, uning B –chegarasi δ_D bo'lsa va $\delta = \max\{\delta_A, \delta_D\}$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa δ –tartib bilan diagonal bo'lmagan elementlari bo'yicha chegaralangan deyiladi.

Eslatma. Agar $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ bo'lsa, u holda δ –tartib bilan diagonal bo'lmagan elementlari bo'yicha chegaralangan bo'lishi uchun

$$\mathcal{G}\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

operator 0-tartib bilan diagonal elementlari bo'yicha chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli. Xususiyl holda, quyidagi tasdiq o'rinli.

2.3.1-tasdiq. Ushbu

$$\mathcal{T} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} := \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

blok operatorli matritsalarini qaraymiz. Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1) Agar $\mathcal{A}$ operator δ –tartib bilan diagonal elementlari bo'yicha chegaralangan bo'lsa, u holda $\mathcal{S}$ operator $\mathcal{T}$ –chegaralangan bo'lib, uning $\mathcal{T}$ –chegarasi δ ga teng bo'ladi.

2) Agar $\mathcal{A}$ operator δ –tartib bilan diagonal bo'lmagan elementlari bo'yicha chegaralangan bo'lsa, u holda $\mathcal{T}$ operator $\mathcal{S}$ –chegaralangan bo'lib, uning $\mathcal{S}$ –chegarasi δ ga teng bo'ladi.

Isbot. 1)-tasdiqni isbotlaymiz. 2)-tasdiq shunga o'xshash isbotlanadi. Faraz qilaylik, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Shartlarga ko'ra shunday

$$a'_B, a'_C, b'_B, b'_C \geq 0 \text{ sonlar topilib,}$$

$$\delta_B \leq b'_B < \delta_B + \varepsilon, \quad \delta_C \leq b'_C < \delta_C + \varepsilon$$

va

$$\|Bg\|^2 \leq a'^2_B \|g\|^2 + b'^2_B \|Dg\|^2, \quad g \in \mathcal{D}(D) \quad (2.3.7),$$

$$\|Cf\|^2 \leq a'^2_C \|f\|^2 + b'^2_C \|Af\|^2, \quad f \in \mathcal{D}(A) \quad (2.3.8)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Shu sababli $(f, g)^t \in \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D)$ uchun

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|^2 = \|Bg\|^2 + \|Cf\|^2 \leq \\
& \leq a_B'^2 \|g\|^2 + b_B'^2 \|Dg\|^2 + a_C'^2 \|f\|^2 + b_C'^2 \|Af\|^2 \\
& \leq (\max\{a_B', a_C'\})^2 \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|^2 + (\max\{b_B', b_C'\})^2 \left\| \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|^2
\end{aligned}$$

o'rinli bo'ladi. $\max\{b_B', b_C'\} < \max\{\delta_B + \varepsilon, \delta_C + \varepsilon\} = \delta + \varepsilon$ bo'lganligi uchun yuqoridagi munosabatlar S operator T —chegaralangan bo'lib, uning T —chegarasi δ dan oshmasligini bildiradi. Agar $f = 0$ deb olib, so'ngra $g = 0$ deb olsak, T —chegarasi δ ga tengligiga ziddiyat hosil bo'ladi. Isbot tugadi.

Endi spektral munosablar haqidagi teoremlarni bayon qilib isbotlaymiz.

T chiziqli operator uchun uning nuqtali spektri bu operatorning xos qiymatlari to'plami bo'lib, $\delta_p(T)$ orqali belgilanadi.

T chiziqli operatorning taqribiy nuqtali spektri

$$\delta_{app}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n)_1^\infty \subset \mathcal{D}(T), \|x_n\| = 1, (T - \lambda)x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

2.3.1-teorema. $\delta_p(\mathcal{A}) \subset W^2(\mathcal{A})$ tenglik o'rinli.

Isbot. Agar $\lambda_0 \in \delta_p(\mathcal{A})$ bo'lsa, u holda $\exists$ nolmas $(f, g) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ vektor topilib, $Af + Bg = \lambda_0 f$, $Cf + Dg = \lambda_0 g$, (2.3.9) bajariladi. Agar $\hat{f} \in \mathcal{D}_1$, $\hat{g} \in \mathcal{D}_2$, $\|\hat{f}\| = \|\hat{g}\| = 1$ deb tanlab, $f = \|f\|\hat{f}$, $g = \|g\|\hat{g}$ belgilash olsak, hamda (2.3.9) ning 1-tenglamasini $\hat{f}$ ga, 2-tenglamasini esa $\hat{g}$ ga skalyar ko'paytirib,

$$(Af, \hat{f}) + (Bg, \hat{f}) = \lambda_0(f, \hat{f})$$

$$(Cf, \hat{g}) + (Dg, \hat{g}) = \lambda_0(g, \hat{g})$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamalarni unga ekvivalent bo'lgan

$$\mathcal{A}_{\hat{f}, \hat{g}} \begin{pmatrix} \|f\| \\ \|g\| \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \|f\| \\ \|g\| \end{pmatrix}$$

shaklda yozib olamiz. Shu sababli,

$$\lambda_0 \in \delta_p(\mathcal{A}_{\hat{f}, \hat{g}}) \subset W^2(\mathcal{A})$$

o'rinli bo'ladi.

Teorema to'liq isbotlandi.

2.3.2-teorema. Agar $\mathcal{A}$ operator 0-tartib bilan diagonal bo'yicha chegaralangan bo'lsa, u holda

$$\delta_{app}(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik,

$$\lambda_0 \in \delta_{app}(\mathcal{A})$$

bo'lsin. U holda shunday

$(f_n)_1^\infty = ((f_n g_n)^t)_1^\infty \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D)$, $\|f\|^2 + \|g\|^2 = 1$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $(\mathcal{A} - z_0)f_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ bo'ladi, ya'ni

$$\begin{aligned} (A - \lambda_0)f_n + Bg_n &=: h_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\ Cf_n + (D - \lambda_0)g_n &=: k_n \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$\mathcal{A}$ operator 0-tartibli chegaralangan va shu sababli birdan kichik,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

operator $\mathcal{A}$ —chegaralangan bo'ladi. Shuning uchun $(A - \lambda_0)f_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ekanligidan $\{Sf_n\}_1^\infty$ ketma-ketlik va shu sababli $\{Bg_n\}_1^\infty$ va $\{Cf_n\}_1^\infty$ ketma-ketliklar chegaralangan bo'ladi. U holda (2.3.10)ga ko'ra $\{(A - \lambda_0)f_n\}_1^\infty$ va $\{(D - \lambda_0)g_n\}_1^\infty$ ham chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi.

Endi $\hat{f}_n \in \mathcal{D}(A)$, $\hat{g}_n \in \mathcal{D}(D)$ larni shunday tanlaymizki,

$$\|\hat{f}_n\| = \|\hat{g}_n\| = 1, \quad f_n = \|f_n\|\hat{f}_n, \quad g_n = \|g_n\|\hat{g}_n$$

bo'lsin.

$$\Delta(\hat{f}_n, \hat{g}_n; \lambda) = \det \begin{pmatrix} (A\hat{f}_n, \hat{f}_n) - \lambda & (B\hat{g}_n, \hat{f}_n) \\ (C\hat{f}_n, \hat{g}_n) & (D\hat{g}_n, \hat{g}_n) - \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

ni qaraymiz. Faraz qilaylik, $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|f_n\| > 0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|g_n\| > 0$ bo'lsin.

Umumiylikni buzmagani holda $\|f_n\|, \|g_n\| > 0$ deb faraz qilamiz. (2.3.10)ga ko'ra

$$\begin{aligned} (A\hat{f}_n, \hat{f}_n) - \lambda_0 &= \frac{1}{\|f_n\|} ((h_n, \hat{f}_n) - \|g_n\|(B\hat{g}_n, \hat{f}_n)) \\ (C\hat{f}_n, \hat{g}_n) &= \frac{1}{\|f_n\|} ((k_n, \hat{g}_n) - \|g_n\|((D\hat{g}_n, \hat{g}_n) - \lambda_0)) \end{aligned}$$

va shu sababli

$$\Delta(\hat{f}_n, \hat{g}_n; \lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\|f_n\|} (h_n, \hat{f}_n) & (B\hat{g}_n, \hat{f}_n) \\ \frac{1}{\|f_n\|} (k_n, \hat{g}_n) & (D\hat{g}_n, \hat{g}_n) - \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

o'rinli. 1-ustun elementlari 0 ga intiladi va elementlari $B\hat{g}_n = Bg_n/\|g_n\|$ va $(D - \lambda_0)\hat{g}_n = (D - \lambda_0)g_n/\|g_n\|$ bo'lgan ketma-ketliklar chegaralangan bo'ladi. Demak,

$$\Delta(\hat{f}_n, \hat{g}_n; \lambda_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

o'rinli. $\Delta(\hat{f}_n, \hat{g}_n; \cdot)$ keltirilgan kvadratik ko'phad bo'lgani uchun

$$\Delta(\hat{f}_n, \hat{g}_n; \lambda) = (\lambda - \lambda_n^1)(\lambda - \lambda_n^2), \quad n \in N \quad (2.3.12)$$

kabi yoziladi, bu yerda λ_n^1 va λ_n^2 lar $\Delta(\hat{f}_n, \hat{g}_n; \lambda) = 0$ kvadratik tenglama yechimidir va shu sababli $\lambda_n^1, \lambda_n^2 \in W^2(\mathcal{A})$. (2.3.11) va (2.3.12) tenglikdan $\lambda_n^1 \rightarrow \lambda_0$ yoki $\lambda_n^2 \rightarrow \lambda_0$, $n \rightarrow \infty$ munosabatlar kelib chiqadi va shu sababli, $\lambda_0 \in W^2(\mathcal{A})$.

Endi $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|g_n\| > 0$ bo'lgan holni qaraymiz. U holda $\|f_n\|^2 + \|g_n\|^2 = 1$ ekanligidan $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|f_n\| > 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Umumiylikni buzmaganda $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$ va biror $\gamma \in [0; 1]$ uchun $\|f_n\| > \gamma$, $n \in N$ deb faraz qilamiz.

Dastlab $\dim H_2 \geq 2$ deb faraz qilamiz. Bu holda $Bg_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\forall \varepsilon > 0$ sonini olamiz. $\{(D - \lambda_0)g_n\}_1^\infty$ chegaralangan bo'lgani uchun $\exists M > 0$ soni topilib, $\|(D - \lambda_0)g_n\| < M$, $n \in N$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\mathcal{A}$ diagonal elementlar bo'yicha chegaralangan va tartibi 0ga teng bo'lgani uchun B operator D —chegaralangan bo'lib, D —chegarasi 0 ga teng bo'ladi va shu sababli $\exists a_B, b_B \geq 0$ sonlar topilib, $b_B < \varepsilon/(2M)$ va

$$\|Bg_n\| \leq a_B \|g_n\| + b_B \|g_n\| \leq (a_B + b_B |\lambda_0|) \|g_n\| + b_B \|(D - \lambda_0)g_n\|,$$

$$n \in N$$

bo'ladi. Agar $N \in \mathbb{N}$ natural sonini

$$\|g_n\| < \varepsilon/(2(a_B + b_B |\lambda_0|)), \quad n \geq N$$

bo'ladigan qilib tanlasak, u holda $n \geq N$ uchun $\|Bg_n\| < \varepsilon$ bo'ladi. Demak, $Bg_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ekan. Bundan va (2.3.10) dagi birinchi munosabatdan $(A - \lambda_0)f_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ kelib chiqadi va shu sababli $\lambda_0 \in \sigma_{app}(A)$. Shuning uchun

$$\lambda_0 \in \sigma_{app}(A) \subset \overline{W(A)} \subset \overline{W^2(A)}$$

o'rinli.

Agar $\dim H_2 = 1$ bo'lsa, u holda B va D lar chegaralangan operatorlar bo'ladi. U holda $g_n \rightarrow 0$ ekanligidan $Bg_n \rightarrow 0$, $(D - \lambda_0)g_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ bo'lishi kelib chiqadi va shu sababli (2.3.10) ga ko'ra $\hat{f}_n, \hat{g}_n$ larni yuqoridagi kabi tanlab $(A - \lambda_0)f_n \rightarrow 0$, $C\hat{f}_n \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$ ni hosil qilamiz, bunda $\|\hat{f}_n\|^{-1} \leq \gamma^{-1}$, $n \in N$. B va D operatorlarning chegaralanganligidan $(B\hat{g}_n)_1^\infty$, $((D - \lambda_0)\hat{g}_n)_1^\infty$ larning ham chegaralanganligi kelib chiqadi. Shu sababli

$$\Delta(\hat{f}_n, \hat{g}_n; \lambda_0) = \det \begin{pmatrix} (A\hat{f}_n, \hat{f}_n) - \lambda_0 & (B\hat{g}_n, \hat{f}_n) \\ (C\hat{f}_n, \hat{g}_n) & (D\hat{g}_n, \hat{g}_n) - \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad n \rightarrow \infty$$

o'rinli.

Xuddi shu usul bilan $\lambda_0 \in \overline{W^2(\mathcal{A})}$ ekanligini ko'rsatish mumkin. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|f_n\| = 0$ bo'lgan hol C operatorning A -chegaralangan va A -chegarasi 0 ga tengligidan kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2.3.1-xossa. Agar B operator chegaralangan yoki D -kompakt va C operator chegaralangan yoki A -kompakt bo'lsa, u holda

$$\sigma_{app}(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$$

o'rinli bo'ladi.

2.3.3-teorema. Agar $\mathcal{A}$ operator 0-tartib bilan diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha chegaralangan va B, C larning chegaralangan teskarisi mavjud bo'lsa, u holda

$$\sigma_{app}(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. $f_n, \hat{f}_n \in \mathcal{D}(C)$ va $g_n, \hat{g}_n \in \mathcal{D}(B)$ elementlarni olamiz. U holda

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

operator $\mathcal{A}$ –chegaralangan bo'ladi. Ko'rsatish mumkinki, agar $\lambda_0 \in \sigma_{app}(\mathcal{A})$ bo'lsa, u holda $\{(A - \lambda_0)f_n\}_1^\infty, \{Bg_n\}_1^\infty, \{Cf_n\}_1^\infty, \{(D - \lambda_0)g_n\}_1^\infty$ ketma-ketliklar chegaralangan ketma-ketliklar bo'ladi va agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|f_n\| > 0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|g_n\| > 0$. Demak, bu holda $\lambda_0 \in \overline{W^2(\mathcal{A})}$ bo'ladi.

Biz $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|g_n\| = 0$ bo'lgan holni qaraymiz. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|f_n\| = 0$ hol esa shunga o'xshash tahlil qilinadi. Umumiylikni buzmagani holda $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$ va biror $\gamma \in (0; 1]$ uchun $\|f_n\| > \gamma$, $n \in \mathbb{N}$ bo'lsin deb faraz qilamiz.

Agar $\dim \mathcal{H}_2 = 1$ bo'lsa, teorema isboti oson. Agar $\dim \mathcal{H}_2 \geq 2$ bo'lsa, u holda $\{Dg_n\}_1^\infty$ ketma-ketlikning 0 ga yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. $\{Bg_n\}_1^\infty$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lgani uchun shunday $M > 0$ soni topilib, $\|Bg_n\| < M$, $n \in \mathbb{N}$ bo'ladi. $\mathcal{A}$ operator 0-tartib bilan diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha chegaralangan bo'lganligi uchun B operator D –chegaralangan bo'lib, B –chegarasi 0 ga teng. va shu sababli $a_D, b_D \geq 0$ sonlar topilib, $b_D < \varepsilon/(2M)$ va

$$\|Dg_n\| \leq a_D \|g_n\| + b_D \|Bg_n\|, \quad n \in \mathbb{N}$$

bo'ladi. Agar $N \in \mathbb{N}$ sonini $\|g_n\| < \frac{\varepsilon}{2a_D}$, $n \geq N$ shart bajariladigan qilib tanlasak, u holda $n \geq N$ uchun $\|Dg_n\| < \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. C –operatorning chegaralangan teskarisi mavjud bo'lgani uchun $\{g_n\}_1^\infty$ va $\{Dg_n\}_1^\infty$ larning nolga intilishidan va (2.3.10) dagi ikkinchi munosabatdan

$$f_n = -C^{-1}(D - \lambda_0)g_n + C^{-1}k_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

kelib chiqadi. Bu esa $\|f_n\| > \gamma > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ekanligiga zid. Teorema isbotlandi.

4.1-natija. Agar A operator chegaralangan yoki C –kompakt, D operator chegaralangan yoki B –kompakt bo'lsa va B, C operatorlarning chegaralangan teskarisi mavjud bo'lsa, u holda

$$\sigma_{app}(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}.$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar B va C operatorlarning chegaralangan teskarisi mavjudligi sharti bajarilmasa, u holda 2.3.3-teorema va 4.1-natija tasdig'i o'rinli bo'lmaydi. Bunga quyidagi misolga ishonch hosil qilish mumkin.

Misol. Faraz qilaylik, $A = C = D = 0$ va B operator $\mathcal{H}_2$ ni $\mathcal{H}_1$ ga o'tkazuvchi biyektiv yopiq chiziqli operator bo'lib, $D(B) \subsetneq \mathcal{H}_2$ bo'lsin. U holda

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{D}(B)$$

blok-operatorli matritsa yopiq va diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha chegaralangan bo'lib, $W^2(\mathcal{A}) = \{0\}$ bo'lsin. Agar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bo'lsa, u holda $A - \lambda$ inyektiv, $R(A - \lambda) = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{D}(B) \subsetneq \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ zich va shu sababli $\lambda_0 \in \sigma_c(\mathcal{A}) \subset \sigma_{app}(\mathcal{A})$ munosabat o'rinli. Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, u holda $A - \lambda$ inyektiv emas va shuning uchun $\lambda_0 \in \sigma_p(\mathcal{A}) \subset \sigma_{app}(\mathcal{A})$. Demak, $\sigma_{app}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$ to'plam $\overline{W^2(\mathcal{A})} = \{0\}$ to'plamda saqlanmaydi.

Chegaralangan holdan farqli o'laroq chegaralanmagan chiziqli operator spektri uchun $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$ munosabat $\mathbb{C} \setminus \overline{W(T)}$ ning har bir komponentasi $\mu \in \rho(T)$ nuqtani saqlasa yoki ekvivalent ravishda μ nuqtada $R(T - \mu) = \mathcal{H}$ bo'lsa o'rinli bo'ladi. Kvadratik sonli tasvir uchun bu tasdiq quyidagicha bo'ladi.

2.3.4-teorema. Faraz qilaylik, $\mathcal{A}$ yopiq operator va 0-tartib bilan diagonal elementlar bo'yicha chegaralangan yoki 0-tartib bilan diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha chegaralangan bo'lib, B va C operatorlarning chegaralangan teskarisi mavjud bo'lsin. Agar Ω to'plam $\mathbb{C} \setminus \overline{W^2(\mathcal{A})}$ ning $\mu \in \rho(\mathcal{A})$ nuqtani saqlovchi komponentasi bo'lsa, u holda $\Omega \subset \rho(\mathcal{A})$ bo'ladi; xususan, $\mathbb{C} \setminus \overline{W^2(\mathcal{A})}$ ning har bir elementi $\mu \in \rho(\mathcal{A})$ nuqtani saqlasa, u holda

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Har bir $\lambda \in r(\mathcal{A})$ nuqta uchun $R(\mathcal{A} - \lambda)$ qiymatlar sohasi yopiq to'plam va $\lambda \mapsto \dim R(\mathcal{A} - \lambda)^\perp$ akslantirish $r(\mathcal{A})$ ning har bir komponentasida o'zgarmas bo'ladi. Shu sababli, mos ravishda 2.3.2- yoki 2.3.3- teoremalarga ko'ra xuddi shunday tasdiq $\mathbb{C} \setminus \overline{W^2(\mathcal{A})} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_{app}(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A})$ ning har bir

komponentasida o'rinli. Farazimizga ko'ra barcha $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{W^2(\mathcal{A})}$ lar uchun $R(\mathcal{A} - \lambda) = \mathcal{H}$ bo'ladi, ya'ni $\mathbb{C} \setminus \overline{W^2(\mathcal{A})} \subset \rho(\mathcal{A})$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma. Sonli tasvir qavariq to'plam bo'lgani uchun $\mathbb{C} \setminus \overline{W(\mathcal{A})}$ to'ldiruvchining kamida ikkita komponentasi bor. Shu sababli $\mathbb{C} \setminus \overline{W^2(\mathcal{A})}$ – kvadratik sonli tasvir yopig'ining to'ldiruvchisining komponentalar soni haqida ma'lumot yo'q.

Quyidagi lemma 2.3.4-teorema shartlarini o'rganishda muhim ahamiyatga ega.

2.3.1-lemma. E, F –lar Banax fazolari va T, S operatorlar E ni F ga o'tkazuvchi chiziqli operatorlar bo'lsin. Faraz qilaylik, $\rho \geq 0$ va $\varphi \in (-\pi; \pi]$ uchun $\Theta_{\rho, \varphi} := \{re^{i\varphi} : r \geq \rho\}$ to'plam va $M \geq 0$ soni topilib, $\Theta_{\rho, \varphi} \subset \rho(T)$ va

$$\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Theta_{\rho, \varphi} \quad (2.3.13)$$

o'rinli bo'lsin. Agar S operator T –chegaralangan bo'lib, uning T –chegarasi $1/(1 + M)$ dan kichik bo'lsin. U holda shunday $R \geq \rho$ topilib, $\Theta_{\rho, \varphi} \subset \rho(T + S)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $\lambda \in \Theta_{\rho, \varphi}$ bo'lsin. S ga qo'yilgan shartlarda $b_S < 1/(1 + M)$ bo'ladigan shunday $a_S, b_S \geq 0$ sonlar topilib,

$$\|Sx\| \leq a_S \|x\| + b_S \|Tx\| \leq (a_S + b_S |\lambda|) \|x\| + b_S \|(T - \lambda)x\|, \\ x \in \mathcal{D}(T)$$

bo'ladi. Chegaralangan teskari operator mavjudligi haqidagi teoremani $T - \lambda$ va S operatorlarga qo'llab, agar

$$(a_S + b_S |\lambda|) \|(T - \lambda)^{-1}\| + b_S < 1$$

bo'lsa, $\lambda \in \rho(T + S)$ bo'lishini hosil qilamiz. (2.3.13)-shartga ko'ra bu tengsizlik

$$a_S \frac{M}{|\lambda|} + (1 + M)b_S < 1 \quad (2.3.14)$$

bo'lganda bajariladi. Agar $R \geq \rho$ va

$$R > \frac{a_S M}{1 - (1 + M)b_S}$$

bo'ladigan R uchun $|\lambda| \geq R$ bo'lsa, (2.3.14) bajariladi. Lemma isbotlandi.

Eslatma. Agar A operator elementlariga qo'yilgan shartlar susaytirilsa va 2.3.2-teoremaga diagonal elementlari bo'yicha chegaralangan $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsada A va D operatorlar yopiluvchan bo'lsa, $\mathcal{A}$ operatorning kvadratik sonli tasviri $\mathcal{A}$ ning yopig'i $\bar{\mathcal{A}}$ uchun

$$\sigma_p(\bar{\mathcal{A}}) \subset \sigma_{app}(\mathcal{A}), \quad \sigma_{app}(\bar{\mathcal{A}}) = \sigma_{app}(\mathcal{A}) \quad (2.3.15)$$

kabi spektral munosabat o'rinli bo'ladi.

Ta'kidlash joizki, 2.3.3-teoremada diagonal bo'lmagan elementlar bo'yicha chegaralangan holda B va C operatorlar hamisha yopiq bo'ladi. Chunki ularning chegaralangan teskarisi mavjud deb faraz qilindi.

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishning ushbu bobi “ 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar” deb nomlangan bo’lib, u uchta paragrafdan tashkil topgan. 2.1-§ “Operatorli matritsalarining aniqlanishi va spektri. Asosiy tushunchalar va misollar” deb nomlanib, u n ta Gilbert fazolar to’g’ri yig’indisida ta’sir qiluvchi $n \times n$ blok operatorli matritsalarini o’rganish bilan boshlangan. $n=3$ bo’lgan xususiy holda batafsil tahlil qilingan. So’ngra u mos yoyilma yordamida 2×2 blok operatorli matritsa ko’rinishga keltirilgan. $n=4$ ham xuddi shunday muhokama qilingan. Bu paragrafda chiziqli chegaralangan operatorlar uchun muhim va diskret spektr tushunchalari kiritilgan. Umumlashgan Fridriks modeli misolida muhim va diskret spektrlar topilgan. 2.2-§ “Chegaralangan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar” deb nomlangan bo’lib, dastlab sonli tasvir, so’ngra kvadratik sonli tasvir tushunchalari kiritilib, kvadratik sonli tasvir sonli tasvirda yotishi isbotlangan. Ta’rif yordamida operatorning nuqtali spektri kvadratik sonli tasvirda yotishi, uning spektri esa sonli tasvir yopig’ida yotishi isbotlangan. 2.3-§ “Chegaralanmagan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar” deb nomlangan. Bu paragrafda 2.2-§ dagi natijalar qo’shimcha shartlar asosida chegaralanmagan holda o’tkazilgan.

Xotima.

1-bob “Banax yoki Gilbert fazolari to’g’ri yig’indisida aniqlangan operatorlar” deb nomlangan bo’lib, u ikkita paragrafdan tashkil topgan. 1.1-§ “Banax yoki Gilbert fazolari to’g’ri yig’indisi haqida” deb nomlangan bo’lib, unda asosan Gilbert fazosi, izomort fazolar, Gilbert fazolarning to’g’ri yig’indisi, unda skalyar ko’paytma va norma kiritilishi haqidagi ma’lumotlar o’z aksini topgan. 1.2-§ “Operatorli matritsalar va ularning asosiy xossalari” deb nomlangan. Bu paragrafda ikkita Gilbert fazolarining to’g’ri yig’indisida aniqlangan chiziqli chegaralangan operatorlar, ya’ni 2×2 blok operatorli matritsalar, ularning aniqlanishi, chiziqliligi, chegaralanganligi, o’z-o’ziga qo’shmaligi haqida so’z boradi. Keltirilgan ma’lumotlar misollar yordamida tahlil qilingan.

Bitiruv malakaviy ishning 2-bobi “ 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar” deb nomlangan bo’lib, u uchta paragrafdan tashkil topgan. 2.1-§ “Operatorli matritsalarining aniqlanishi va spektri. Asosiy tushunchalar va misollar” deb nomlanib, u n ta Gilbert fazolar to’g’ri yig’indisida ta’sir qiluvchi $n \times n$ blok operatorli matritsalarini o’rganish bilan boshlangan. $n=3$ bo’lgan xususiy holda batafsil tahlil qilingan. So’ngra u mos yoyilma yordamida 2×2 blok operatorli matritsa ko’rinishga keltirilgan. $n=4$ ham xuddi shunday muhokama qilingan. Bu paragrafda chiziqli chegaralangan operatorlar uchun muhim va diskret spektr tushunchalari kiritilgan. Umumlashgan Fridriks modeli misolida muhim va diskret spektrlar topilgan. 2.2-§ “Chegaralangan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar” deb nomlangan bo’lib, dastlab sonli tasvir, so’ngra kvadratik sonli tasvir tushunchalari kiritilib, kvadratik sonli tasvir sonli tasvirda yotishi isbotlangan. Ta’rif yordamida operatorning nuqtali spektri kvadratik sonli tasvirda yotishi, uning spektri esa sonli tasvir yopig’ida yotishi isbotlangan. 2.3-§ “Chegaralanmagan 2×2 operatorli matritsalar uchun spektral munosabatlar” deb nomlangan. Bu paragrafda 2.2-§ dagi natijalar qo’shimcha shartlar asosida chegaralanmagan holda o’tkazilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Mirziyoyev Sh. M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent: : “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. Toshkent : O‘zbekiston, 2017. -592 b.
3. Каримов И. А. Она ватанимиз бахт-у саодати ва келажаги йўлида хизмат қилиш энг олий саодатдир.-Т.: Ўзбекистон, 2015.-304б
4. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни, Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил, 9-сон, 225.
5. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил. 11-12-сон.
6. J. I. Abdullayev, R. N. G‘anixo‘jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funktsional analiz. Toshkent-Samarqand, 2009.
7. C. Tretter. Spectral inclusion for unbounded block operator matrices. *Journal of Functional Analysis* 256 (2009) 3809-3829.
8. C. Tretter. Spectral theory of block operator matrices and applications. Imperial College Press, 2008.
9. Т. А. Саримсоқов. Функционал анализ курси. Тошкент, Ўқитувчи, 1986
10. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементи теории функций и функционального анализа. Москва, Наука, 1989.
11. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементи функционального анализа. Москва. Наука, 1965
12. Langer, H.,Tretter, C. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. *J. Operator Theory*, 39(2):339-359, 1998
13. Langer, H.,Tretter, C. Diagonalization of certain block operator matrices and applications to Dirac operators. In *Operator theory and analysis (Amsterdam, 1997)*, vol. 122 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pp. 331-358. Birkhäuser, Basel, 2001.

14. Tretter, C. Spectral issues for block operator matrices. In *Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1999)*, vol. 16 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pp. 407-423. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
15. Tretter, C., Wagenhofer, M. The block numerical range of an $n \times n$ block operator matrix. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24(4):1003-1017, 2003
16. Wagenhofer, M. *Block numerical ranges*. PhD thesis, Universität Bremen, 2007.
17. Wagenhofer, M. *Der blocknumerische Wertebereich*. Diploma thesis. Universität Regensburg, 2000.
18. T.H. Rasulov, C. Tretter. Spectral inclusion for unbounded diagonally dominant $n \times n$ operator matrices. *Rocky mountain journal of mathematics*. Volume 48, number 1, 2018, P. 279-324.
19. www.ziynet.uz
20. www.lex.uz
21. www.norma.uz
22. www.edu.uz