

O`ZBEKISTAN RESPUBLİKASI  
XALIQ BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİĞİ

A`jiniyaz atındag'ı No`kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı

N.Djumabaev, G.Mamutova, G.Babaniyazova, B.Nukusbaev

*Irracional ten`sizliklerdi sheshiw usılları*  
(metodikalıq qollanba)

*Du`ziwshiler: N.Djumabaev, G.Mamutova, G.Babaniyazova, B.Nukusbaev*

Bul metodikalıq qollanba joqarı oqıw orınlarının' matematika fakul'teti talabaları, akademiyalıq licey, ka'sip-o'ner kolledjleri, ulıwma bilim beriw mektepleri ha'm matematika pa'nin teren'nen oqıtılatug'ın qa'nigelestirilgen mektep oqıwshıları ushın «İrracional ten'sizliklerdi sheshiw usılları» temasında jazılğ'an bolıp, bunda ha'r qıylı tu'rdegı irrational ten'lemelerdi sheshiwdin' tu'rli usılları ko'rsetilgen. Metodikalıq qollanbada oqıwshılardıń o`zlestiriliwi kerek bolğ'an mısallar metodikalıq jaqtan bir neshe usıllar menen sheship ko'rsetilgen.

*Juwaplı redaktor:*

**M.Qasımov** - A`jiniyaz atındag`ı No`kis mámleketlik pedagogikalıq institutı matematikanı oqıtıw kafedrasının` docenti, fizika-matematika ilimlerinin` kandidatı.

*Pikir bildiriwshiler:*

**O.Nurjanov** -Berdaq atındag`ı Qaraqalpaq mámleketlik universitetinin` «Fizika-matematika» fakultetinin` docenti, fizika-matematika ilimlerinin` kandidatı.

**S.Ta'n`irbergenov** - A`jiniyaz atındag`ı No`kis mámleketlik pedagogikalıq institutı matematikanı oqıtıw kafedrasının` docenti, fizika-matematika ilimlerinin` kandidatı.

**A`jiniyaz atındag`ı No`kis ma`mleketlik pedagogikalıq institutı  
ilimiy oqıw-metodikalıq ken`esi 2016-jıl 16-aprel  
№11 sanlı bayanlaması menen baspag`a usınıs etildi.**

## KIRISIW

Oqıwshılar irracional ten`sizliklerdi sheshiwde ko`p qa`teliklerge jol qoyadı, sebebi ha`r bir irracional ten`sizliktin` ten` ku`shli almasıwın tolıq bilmeydi. Qollanbada irracional ten`sizliklerdi sheshiwde ten` ku`shli almasıwıwlar arqalı sheshiw usıllarına ken` orın berildi. Irracional ten`sizliklerdi sheshiwde jat koren`lerdin` payda bolıwının` aldın alıw ha`m koren`lerdi joytıp alıw jag`dayların anıqlaw ushın ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabıw arqalı sheshiwge u`lken kewil awdarıldı.

Bul metodikalıq qollanbada  $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ,  $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ,  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > 0$ ,  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < 0$ ,  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > h(x)$ ,  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < h(x)$ ,  $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} > 0$ ,  $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} < 0$ ,  $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} > 1$ ,  $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} < 1$

tu`rindegi irracional ten`sizliklerge, irracional ten`sizliklerdi olarda qatnasqan an`latpalardın` belgilerine baylanıslı sheshiw usılları ha`m quramalı irracional ten`sizliklerdi sheshiw usıllarına misallar metodikalıq jaqtan anıq etip sheship ko`rsetildi ha`m bir neshe shıng`ıwlar sheship u`yreniw ushın keltirildi.

Solay etip, bul metodikalıq qollanbada irracional ten`sizliklerdi sheship u`yreniw boyınsha bilim ha`m a`meliy ko`nlikpelerdi teren`lestiriw maqset etip qoyılğ`an bolıp matematikag`a qızıqqan oqıwshılarg`a arnalğ`an. Metodikalıq qollanbadan sabaq waqtında, fakul`tativ sabaqlarda, do`gerek sabaqlarda, matematikanı teren`nen oqıtatug`ın akademiyalıq liceylerde, kollejlerde, pedagogikalıq instituttın` talabaları ha`m oqıtıwshıları sonday-aq orta mekteptin` mug`allimleri paydalanıwları mu`mkin. Bul metodikalıq qollanbanın` tiykarg`ı maqseti oqıwshılarg`a irracional ten`sizliklerdi tu`rlerine qaray ha`r qiyli tu`rlerge bo`lip ha`r bir tu`rge bir neshe mısallar sheship ko`rsetiw arqalı irracional ten`sizliklerdi qa`tesiz sheshiwdi ha`m olardın` teren` bilimge iye bolıwına ja`rdem ko`rsetiw bolıp tabıladı.

## §1. Irracional ten`sizliklerdi sheshiw usılları

**Anıqlama.** Belgisiz qatnasqan an`latpaları koren belgisi astında bolgan ten`sizlikler irracional ten`sizlikler dep ataladı.

Irracional ten`sizliklerdi sheshiw usılların ko`rip o`teyik. A`dette irracional ten`sizlikler koren belgisinen qutılıw usılı menen sheshiledi. Bul usıl sonnan ibarat, koren belgisinen qutılıw ushın ten`sizliktin` eki jag`ın racional an`latpa shıqqang`a shekem tiyisli da`rejege ko`teriledi. Tabılg`an sheshimlerdi berilgen ten`sizliktegi belgisizlerdin` ornına qoyıw arqalı olar berilgen ten`sizliktin` sheshimi bolama yamasa olar ishinde jat sheshimlerdin` bar-joqlıg`ı anıqlanadı.

Ko`binese koren belgisinen qutılıw ushın ten`sizliktin` eki jag`ın jup da`rejege ko`tergende berilgen ten`sizlikke ten` ku`shli bolmag`an ten`sizlik kelip shıg`adı, yag`nıy jup da`rejege ko`tergende ten`sizliktin` korenleri jog`almaydı, biraq jat korenler payda bolıwı mu`mkin. Jat korenler tekseriw arqalı anıqlanıp, qalg`anları sheshimler jıyının payda etedi. Sonlıqtan, irracional ten`sizliklerdi sheshiwde, ju`da` saq bolıw talap etiledi. Aldın-ala, berilgen irracional ten`sizlikti onın` eki jag`ı mag`anag`a iye bolatug`ın o`zgeriwshilerdin` ma`nisleri ko`pliginde ko`rip shıg`ıwımız tiyis.

Irracional ten`sizliklerdi sheshiw, a`dette og`an ten` ku`shli bolgan racional ten`sizlikler sistemasın yamasa olardın` birlesiwın sheshiwge keltiriledi. Bunday sistemalar o`zgeriwshilerge sheklewler qoyıw ha`m ten`sizlikti da`rejege ko`teriw na`tiyjesinde payda boladı.

Irracional ten`sizliklerdi ten` ku`shlilik ko`plik sistemalar usılı menen sheshiw qolaylı bolıp tabıladı. Sonlıqtan, bul usıldı oqıwshılarg`a teren`nen u`yretiwimiz tiyis.

Endi irracional ten`sizliklerdin` bir neshe tu`rlerin ten` ku`shlilik ko`plik sistemalar usılı menen sheshiwdi qarap o`teyik:

1.  $\sqrt{f(x)} < g(x)$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

**Mısalı:**  $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 < (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x + 1)(x - 2,5) \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2,5 \end{cases} \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2,5 \end{cases} \\ (x + 2)(x - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2,5 \end{cases} \\ -2 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2,5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x \leq -1 \\ 1 < x < 3 \\ x \geq 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ 2,5 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2,5 \leq x < 3 \end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in [2,5; 3)$

**2-mısal.**  $\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{2}{x} - \frac{1}{2}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**  $y = \frac{2}{x}$  dep belgileymiz.

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} < y - \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - \frac{3}{4} \geq 0 \\ y - \frac{1}{2} > 0 \\ \left(\sqrt{y^2 - \frac{3}{4}}\right)^2 < \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0 \\ y > \frac{1}{2} \\ y^2 - \frac{3}{4} < y^2 - y + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ y > \frac{1}{2} \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} < y < 1 \\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y < 1 \end{aligned}$$

Bul tabılg`an  $y$  tin` ornına ma`nisin qoyamız:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

**Juwabi:**  $x \in \left(2; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

**3-mısal.**  $(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) < \frac{1}{4}x$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw.** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Berilgen ten`sizliktin` eki jag`ın on` an`latpa  $(\sqrt{x+1} + 1)$  ge ko`beytemiz:

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) < \frac{1}{4}x \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) < \frac{1}{4}x(\sqrt{x+1}+1) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow ((\sqrt{x+1})^2 - 1)(\sqrt{1-x}+1) < \frac{1}{4}x(\sqrt{x+1}+1) \Leftrightarrow x(\sqrt{1-x}+1) < \frac{1}{4}x(\sqrt{x+1}+1) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x(\sqrt{x+1}+1-4\sqrt{1-x}-4) > 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x+1}-4\sqrt{1-x}-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \\ \sqrt{x+1}-4\sqrt{1-x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \\ \sqrt{x+1} > 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \\ \sqrt{x+1} < 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases}
\end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \\ \sqrt{x+1} > 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x+1 > 16(1-x)+24\sqrt{1-x}+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x+1 > 16-16x+24\sqrt{1-x}+9 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 24\sqrt{1-x} < 17x-24 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \\ \sqrt{x+1} < 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x+1 < 16(1-x)+24\sqrt{1-x}+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ 24\sqrt{1-x} > 17x-24 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0
\end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in [-1; 0)$

**2.  $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$  tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

**Mısalı:**  $\sqrt{x^2+3x+3} \leq 2x+1$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\sqrt{x^2+3x+3} \leq 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^2+3x+3 \geq 0 \\ x^2+3x+3 \leq (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2+3x+3 \geq 0 \\ x^2+3x+3 \leq 4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 + 3x + 3 \geq 0 \\ 3x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 + 3x + 3 \geq 0 \\ (x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

**Juwabi:**  $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

### Shing'irlar

To'mendegi ten'sizliklerdi sheshin`.

1.  $\sqrt{9x-20} < x$
2.  $\sqrt{5-2x} \leq 6x-1$
3.  $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$
4.  $\sqrt{x^2-3x-10} \leq 8-x$
5.  $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$
6.  $2\sqrt{4-x^2} < x+4$
7.  $\sqrt{(x-6)(1-x)} < 3+2x$
8.  $3\sqrt{1-x^2} \leq 3-x$
9.  $\sqrt{13+3x^2} < 1-2x$
10.  $\sqrt{x+61} \leq x+5$

3.  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  tu`rindagi ten`sizlik.

Bunday tu`rdagi ten`sizlik to'mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

**Mısalı:**  $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+7x+12} > 6-x &\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x < 0 \\ x^2+7x+12 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ x^2+7x+12 > (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ (x+4)(x+3) \geq 0 \\ x \leq 6 \\ x^2+7x+12 > 36-12x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x \leq -4 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x > 6 \\ \frac{24}{19} < x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ \frac{24}{19} < x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{24}{19} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 19x > 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x > \frac{24}{19} \end{cases} \end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in \left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$

4.  $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$  tu`rindegi ten`sizlik.

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$$

**Mısalı:**  $\sqrt{x^2 + 7x + 12} \geq 7 - x$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 7x + 12} \geq 7 - x &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \leq 0 \\ x^2 + 7x + 12 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 7 - x > 0 \\ x^2 + 7x + 12 \geq (7 - x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ (x + 4)(x + 3) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 7 \\ x^2 + 7x + 12 \geq 49 - 14x + x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq -4 \\ x \geq -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 7 \\ 21x \geq 37 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq -4 \\ x \geq -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \geq 7 \\ \frac{37}{21} \leq x < 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq -4 \\ x \geq -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 7 \\ \frac{37}{21} \leq x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{37}{21} \end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in \left[\frac{37}{21}; +\infty\right)$

### Shıng`ıwlar

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $\sqrt{2x + 4} > x + 3$

6.  $\sqrt{x^2 + 5x + 6} > 2x + 3$

2.  $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 4 - x$

7.  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2x - 5$

3.  $\sqrt{2x - x^2} > 5 - x$

8.  $\sqrt{8 + 2x - x^2} \geq 6 - 3x$

4.  $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$

9.  $\sqrt{-2 - 3x - x^2} > 2x + 3$

5.  $\sqrt{x^2 + 4x - 5} > x - 3$

10.  $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} \geq 8 - 2x$

5.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > 0$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

**Mısalı:**  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} > 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-1)(x-4)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ (x-1)(x-4) \geq 0 \\ (x-1)(x-3) \geq 0 \\ (x-1)(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in (-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$

6.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq 0$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

**Mısalı:**  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-1)(x-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) \geq 0 \\ (x-1)(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

7.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < 0$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

8.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq 0$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

**Mısalı:**  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-1)(x-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) = 0 \\ (x-1)(x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

**Juwabı:**  $x \in \{1\}$ .

### *Shıng`ıwlar*

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} > 0$

6.  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} < 0$

2.  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} \geq 0$

7.  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} \leq 0$

3.  $\sqrt{x^2 - 7x + 10} + \sqrt{x^2 - 8x + 12} > 0$

8.  $\sqrt{x^2 - 9x + 18} + \sqrt{x^2 - 10x + 21} > 0$

4.  $\sqrt{x^2 - 7x + 10} + \sqrt{x^2 - 8x + 12} \geq 0$

9.  $\sqrt{x^2 - 9x + 18} + \sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0$

5.  $\sqrt{x^2 - 7x + 10} + \sqrt{x^2 - 8x + 12} \leq 0$

10.  $\sqrt{x^2 - 9x + 18} + \sqrt{x^2 - 10x + 21} \leq 0$

9.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > h(x)$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} > h^2(x) \end{cases}$$

**1-mısal.**  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} > 1$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x+3+x+2+2\sqrt{(2x+3)(x+2)} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \geq -2 \\ 2\sqrt{(2x+3)(x+2)} > -3x-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ -3x-4 \geq 0 \\ 4(2x+3)(x+2) > (-3x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \leq -\frac{4}{3} \\ 4(2x+3)(x+2) > (-3x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \leq -\frac{4}{3} \\ 4(2x^2+7x+6) > 9x^2+24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \leq -\frac{4}{3} \\ x^2-4x-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \leq -\frac{4}{3} \\ (x-(2-2\sqrt{3}))(x-(2+2\sqrt{3})) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \leq -\frac{4}{3} \\ 2-2\sqrt{3} < x < 2+2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 \\ 2-2\sqrt{3} < x < 2+2\sqrt{3} \\ x \leq -\frac{4}{3} \\ 2-2\sqrt{3} < x < 2+2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2\sqrt{3} < x < 2+2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} < x \leq -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-2\sqrt{3} < x < 2+2\sqrt{3}$$

**Juwabi:**  $x \in (2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$ .

**2-mısal.**  $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} \geq 2$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+8} \geq \sqrt{x-4} + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+8 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x+8 \geq x-4+4\sqrt{x-4}+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 4\sqrt{x-4} \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x-4} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x-4 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8$$

**Juwabi:**  $x \in [4; 8]$ .

10.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < h(x)$  tu`rindegi ten`sizlik.

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasıdı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} < h^2(x) \end{cases}$$

**1-mısal:**  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+15 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -15 \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x+3+x+15+2\sqrt{(x+3)(x+15)} < 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{(x+3)(x+15)} < 9-x \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+3)(x+15) < (9-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+18x+45 < 81-18x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 1 \end{aligned}$$

**Juwabı:**  $x \in [-3, 1)$ .

**2-mısal.**  $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} < 3$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} < 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x+2+3-x+2\sqrt{(x+2)(3-x)} < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ 2\sqrt{(x+2)(3-x)} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ (x+2)(3-x) < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ -x^2+x+6 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x^2-x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ (x+1)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ 2 < x \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

**Juwabı:**  $x \in [-2, -1] \cup (2, 3]$ .

**Shınıg`ıwlar:**

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} > 1$

6.  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} < 1$

2.  $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} < 5$

7.  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \leq 1$

3.  $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} < 1$

8.  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leq 1$

4.  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+80} > 3$

9.  $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} > 2$

5.  $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{6x-x^2} > 3$

10.  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \geq 2$

11.  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > \sqrt{h(x)}$  tu`rindagi ten`sizlik.

Bunday tu`rdagi ten`sizlik to`mendagi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} > h(x) \end{cases}$$

**1-mısal.**  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-10} > \sqrt{x+12}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-10} > \sqrt{x+12} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x-10 \geq 0 \\ x+12 \geq 0 \\ x+2+2x-10+2\sqrt{(x+2)(2x-10)} > x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 5 \\ x \geq -12 \\ \sqrt{(x+2)(2x-10)} > 10-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \sqrt{(x+2)(2x-10)} > 10-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ 10-x < 0 \\ (x+2)(2x-10) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 5 \\ 10-x \geq 0 \\ (x+2)(2x-10) > (10-x)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ x > 10 \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ x > 10 \\ x \geq 5 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 10 \\ x^2 + 14x - 120 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 10 \\ x \leq -2 \\ x > 10 \\ x \geq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 5 \leq x \leq 10 \\ (x+20)(x-6) > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ \begin{cases} 5 \leq x \leq 10 \\ (x+20)(x-6) > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ \begin{cases} 5 \leq x \leq 10 \\ x < -20 \\ x > 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ \begin{cases} 5 \leq x \leq 10 \\ x > 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ \begin{cases} 6 < x \leq 10 \\ x > 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x > 6$$

**Juwabi:**  $x \in (6, +\infty)$ .

**2-mısal.**  $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} > \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$  ten`sizligin sheshin`

**Sheshiw:** Ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ 4x^2 - 18x + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-5) \geq 0 \\ (x-3)(x+5) \geq 0 \\ 4(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 5 \\ x \leq -5 \\ x \geq 3 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 3 \\ x \leq 3 \\ x \geq 3 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x = 3 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x = 3 \\ x \in \emptyset \\ x \geq 5 \\ x \in \emptyset \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x = 3 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

1.  $x=3$  bolg`anda berilgen ten`sizlik  $0 > 0$  boladı, demek,  $x=3$  berilgen ten`sizliktin` sheshimi bolmaydı.

2.  $x \leq -5$  ha`m  $x \geq 5$  bolg`anda berilgen ten`sizliktin` eki jag`ıda on`, olay bolsa berilgen ten`sizlikni to`mendegishe jazamız:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} > \sqrt{4x^2 - 18x + 18} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)(x-5)} + \sqrt{(x-3)(x+5)} > \sqrt{4(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \Leftrightarrow \sqrt{|x-3|} \cdot \sqrt{|x-5|} + \sqrt{|x-3|} \cdot \sqrt{|x+5|} > \\ &> 2\sqrt{|x-3|} \cdot \sqrt{\left|x-\frac{3}{2}\right|} \end{aligned}$$

Bul ten`sizliktin` eki jag`ın  $\sqrt{|x-3|}$  ke bo`lemiz, sonda keyingi ten`sizlikke ten`ku`shli bolgan to`mendegi ten`sizlik kelip shıg`adı:

$$\sqrt{|x-5|} + \sqrt{|x+5|} > 2\sqrt{\left|x-\frac{3}{2}\right|} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{-5-x} > 2\sqrt{\frac{3}{2}-x} \\ x \geq 5 \\ \sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} > 2\sqrt{x-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

1.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \leq -5 \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{-5-x} > 2\sqrt{\frac{3}{2}-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ (\sqrt{5-x} + \sqrt{-5-x})^2 > \left(2\sqrt{\frac{3}{2}-x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ 5-x+2\sqrt{x^2-25}-5-x > 4\left(\frac{3}{2}-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ \sqrt{x^2-25} > 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x < 3 \\ x^2-25 > 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x > 5\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \geq 5 \\ \sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} > 2\sqrt{x-\frac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ (\sqrt{x-5} + \sqrt{x+5})^2 > \left(2\sqrt{x-\frac{3}{2}}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x-5+2\sqrt{x^2-25}+5+x > 4\left(x-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \sqrt{x^2-25} > x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x > 3 \\ x^2-25 > 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x > 5\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > 5\frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in \left(5\frac{2}{3}, +\infty\right)$ .

**3-mısal.**  $\sqrt{x^2+8x+16} - \sqrt{x^2-3x-4} > 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+8x+16} - \sqrt{x^2-3x-4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8x+16} > \sqrt{x^2-3x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x+16 \geq 0 \\ x^2-3x-4 \geq 0 \\ x^2+8x+16 > x^2-3x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 \geq 0 \\ (x+1)(x-4) \geq 0 \\ 11x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \\ x > -\frac{20}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > -\frac{20}{11} \\ x \geq 4 \\ x > -\frac{20}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{20}{11} < x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in \left(-\frac{20}{11}; -1\right] \cup [4; +\infty)$ .

## Shung'ıwlar

To'mendegi ten'sizliklerdi sheshin`.

1.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} > \sqrt{2x+4}$
2.  $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-3} > \sqrt{8x-5}$
3.  $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} > \sqrt{5-x}$
4.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} > \sqrt{x-1}$
5.  $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} > 2\sqrt{x}$

**12.**  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < \sqrt{h(x)}$  tu`rindegi ten'sizlik.

Bunday tu`rdegi ten'sizlik to'mendegi ten'sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} < h(x) \end{cases}$$

**Mısal.**  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-10} < \sqrt{x+12}$  ten'sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{2x-10} < \sqrt{x+12} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x-10 \geq 0 \\ x+12 \geq 0 \\ x+2+2x-10+2\sqrt{(x+2)(2x-10)} < x+12 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 5 \\ x \geq -12 \\ \sqrt{(x+2)(2x-10)} < 10-x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \sqrt{(x+2)(2x-10)} < 10-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 10-x > 0 \\ (x+2)(2x-10) < (10-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x < 10 \\ x^2 + 14x - 120 < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x < 10 \\ (x+20)(x-6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x < 10 \\ -20 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 6 \end{aligned}$$

**Juwabı:**  $x \in [5, 6)$ .

## Shung'ıwlar

To'mendegi ten'sizliklerdi sheshin`

1.  $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-5} < \sqrt{x+6}$
2.  $2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-3} < \sqrt{x-1}$
3.  $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} < \sqrt{x-3}$
4.  $\sqrt{5x-27} + \sqrt{3x-19} < \sqrt{7x-13}$
5.  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{x+3}$

**13.  $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} \geq 0$  tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$g(x) \cdot \sqrt{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ D(g(x)) \\ f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

**Mısal.**  $(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$  ten`sizligin sheshin`

**Sheshiw:**

$$(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in \{-1\} \cup [2; +\infty)$ .

### *Shing`ıwlar*

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $(x-3) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2} \geq 0$
2.  $(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$
3.  $(x+2) \cdot \sqrt{x^2 - 9x + 20} \geq 0$
4.  $(x+3) \cdot \sqrt{\frac{6-x}{8-x}} \geq 0$
5.  $(x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 11x + 28} \geq 0$

**14.  $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} > 0$  tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$g(x) \cdot \sqrt{f(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

**Mısal.**  $(x-3) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2} > 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$(x-3) \cdot \sqrt{x^2+x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \\ x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x > 3 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in (3, +\infty)$ .

### *Shung`rwlar*

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $(x-3) \cdot \sqrt{x^2+x-2} > 0$
2.  $(x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-x-2} > 0$
3.  $(x+2) \cdot \sqrt{x^2-9x+20} > 0$
4.  $(x+3) \cdot \sqrt{\frac{6-x}{8-x}} \geq 0$
5.  $(x+1) \cdot \sqrt{x^2+11x+28} > 0$

**15.**  $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} \leq 0$  tu`rindagi ten`sizlik.

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten`ku`shli almasadı:

$$g(x) \cdot \sqrt{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

**Misal.**  $(x-12) \cdot \sqrt{x-3} \leq 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$(x-12) \cdot \sqrt{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-12 \leq 0 \\ x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 12 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 12$$

**Juwabi:**  $x \in [3; 12]$ .

### *Shung`rwlar*

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $(x-15) \cdot \sqrt{x-2} \leq 0$
2.  $(x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-2x-3} \leq 0$
3.  $(x+2) \cdot \sqrt{x^2-18x+42} \leq 0$

$$4. (x+3) \cdot \sqrt{\frac{6-x}{8-x}} \leq 0$$

$$5. (x+1) \cdot \sqrt{x^2+7x+12} \leq 0$$

**16.**  $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} < 0$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$g(x) \cdot \sqrt{f(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

**Mısal.**  $(x-12) \cdot \sqrt{x-3} < 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$(x-12) \cdot \sqrt{x-3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 12$$

**Juwabı:**  $x \in (3, 12)$ .

### *Shung`ıwlar*

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

$$1. (x-15) \cdot \sqrt{x-2} < 0$$

$$2. (x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-2x-3} < 0$$

$$3. (x+2) \cdot \sqrt{x^2-18x+42} < 0$$

$$4. (x+3) \cdot \sqrt{\frac{6-x}{8-x}} < 0$$

$$5. (x+1) \cdot \sqrt{x^2+7x+12} < 0$$

**17.**  $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} > 1$  **tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

**Mısal.**  $\frac{2-x^2}{\sqrt{4x+5}} > 1$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\begin{aligned} \frac{2-x^2}{\sqrt{4x+5}} > 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5 > 0 \\ \sqrt{4x+5} < 2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x > -5 \\ 2-x^2 > 0 \\ 4x+5 < 4-4x^2+x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{4} \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 4x^4-4x^2-4x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < x < \sqrt{2} \\ (x+1)^2(x^2-2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < x < \sqrt{2} \\ (x+1)^2(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < x < \sqrt{2} \\ x \neq -1 \\ x > 1+\sqrt{2} \\ x < 1-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < x < \sqrt{2} \\ -\infty < x < -1 \\ -1 < x < 1-\sqrt{2} \\ x > 1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < x < -1 \\ -1 < x < 1-\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in \left(-\frac{5}{4}, -1\right) \cup (-1, 1-\sqrt{2})$ .

### Shung`rular

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} > 1$
2.  $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2-x} > 1$
3.  $\frac{\sqrt{8+2x-x^2}}{6-3x} > 1$
4.  $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \geq 1$
5.  $\frac{\sqrt{5+2x}}{5-x} \geq 1$

**18.  $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} < 1$  tu`rindegi ten`sizlik.**

Bunday tu`rdegi ten`sizlik to`mendegi ten`sizlikler sistemasına ten` ku`shli almasadı:

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

**1- misal.**  $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \\ 24+2x-x^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \\ x^2-x-12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \\ x > 0 \\ -4 \leq x \leq 6 \\ x > 4 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 0 \\ 0 < x \leq 6 \\ x > 4 \\ 0 < x \leq 6 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 0 \\ 4 < x \leq 6 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 0 \\ 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in [-4; 0) \cup (4; 6]$ .

**2- misal.**  $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**

$$\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1-\sqrt{1-8x^2} \geq 0 \\ 1-\sqrt{1-8x^2} < 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1-8x^2} \leq 1 \\ \sqrt{1-8x^2} > 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1-8x^2 \geq 0 \\ 1-8x^2 \leq 1 \\ x > 0 \\ 1-8x^2 \geq 0 \\ 1-8x^2 \leq 1 \\ \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 1-8x^2 > (1-2x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-2x < 0 \\ 1-8x^2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 \leq \frac{1}{8} \\ x^2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 \geq 0 \\ x^2 \leq \frac{1}{8} \\ \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 1-8x^2 > 1-4x+4x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x^2 \leq \frac{1}{8} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x \neq 0 \\ x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x \neq 0 \\ \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x(x-\frac{1}{3}) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x < 0 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x < 0 \\ 0 < x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

**Juwbani:**  $x \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$ .

### *Shing'ıwlar*

To'mendegi ten'sizliklerdi sheshin`.

1.  $\frac{\sqrt{3x-2}}{x-4} < 1$
2.  $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$
3.  $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} \leq 1$
4.  $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1} < 1$
5.  $\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} < 1$

### **§2. Irracional ten'sizliklerdi olarda qatnasqan an'latpalardıń belgilerine baylanıslı sheshiw usılları**

Ayırım irracional ten'sizliklerdin` an'latpaları o`zlerinin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastında berilgen ten'sizliktin` an'latpaları belgisine baylanıslı og`an ten` ku`shli bolgan ten'sizliktin` an'latpalarına almasadı.

1. Eger  $f(x) \geq 0$  ha`m  $g(x) \geq 0$  bolsa, onda  $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$  an'latpasının` belgisi  $f(x) - g(x)$  an'latpasının` belgisi menen birdey yag`nıy  $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) - g(x)$  boladı.

2. Eger  $g(x) \geq 0$  bolsa, onda  $|f(x)| - \sqrt{g(x)}$  an'latpasının` belgisi  $f^2(x) - g(x)$  an'latpasının` belgisi menen birdey yag`nıy  $|f(x)| - \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f^2(x) - g(x)$  boladı.

3. Eger  $f(x) \geq 0$  bolsa, onda  $\sqrt{f(x)}$  an'latpasının` belgisi  $f(x)$  an'latpasının` belgisi menen birdey yag`nıy  $\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow f(x)$  boladı.

Bul keltirilgen tastıyqlawlardan paydalanıp to'mendegi irracional ten'sizliklerdi shesheyik:

**1- misal.**  $|x+4| - \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0$  ten'sizligin sheshin`

**Sheshiw:** Berilgen ten'sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$|x+4| = \sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{x^2 + 8x + 16}$  ekenliginen paydalanıp, berilgen ten'sizlikti to'mendegishe jazamız:  $|x+4| - \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0$  bul ten'sizlikti joqarıda keltirilgen 1-tastıyqlawdan paydalanıp to'mendegishe sheshemiz:

$$\sqrt{x^2 + 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 - x^2 + 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 11x + 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{20}{11}$$

Olay bolsa,

$$|x+4| - \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \\ x \geq -\frac{20}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq -\frac{20}{11} \\ x \leq -1 \\ x \geq -\frac{20}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -\frac{20}{11} \leq x \leq -1 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in \left[-\frac{20}{11}; -1\right] \cup [4; +\infty)$ .

**2- misal.**  $\sqrt{16x|x-1|+3} \geq 4x-3$  ten`sizligin sheshin`

**Sheshiw:**

$$\sqrt{16x|x-1|+3} \geq 4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \\ 16x^2-16x+3 \geq 16x^2-24x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ 16x^2-16x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ 16x^2-16x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geq 0 \\ x-1 < 0 \\ 16x-16x^2+3 \geq 16x^2-24x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x < 1 \\ 16x^2-4x+3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < \frac{3}{4} \\ \frac{2-\sqrt{7}}{4} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{7}}{4} \\ \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{2-\sqrt{7}}{4} \leq x < \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

**Juwabi.**  $x \in \left[\frac{2-\sqrt{7}}{4}; +\infty\right)$ .

**3- misal.**  $\frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{7-2x}} > 0$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkın ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 7-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < \frac{7}{2}$$

Berilgen ten`sizlikti joqarida keltirilgen 1-tastıyqlawdan paydalanıp to`mendegishe sheshemiz:

$$\frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{7-2x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x+4-2x-1}{\sqrt{7-2x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{7-2x}} > 0 \Leftrightarrow x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Olay bolsa:

$$\begin{cases} x > -3 \\ -\frac{1}{2} \leq x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < \frac{7}{2}$$

**Juwabı:**  $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ .

**4- mısal.**  $\frac{\sqrt{2x^2-3x-5}}{\sqrt{x-2}} < \sqrt{x+1}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 2x^2-3x-5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+1) \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq \frac{5}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 2 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

Endi berilgen ten`sizlikti sheshemiz:

$$\frac{\sqrt{2x^2-3x-5}}{\sqrt{x-2}} < \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2-3x-5}}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x-2}} < 0$$

Keyingi bo`lshektin` alımına 1 ha`m 3 tastıyqlawlardı qollanıp ten`sizlikti to`mendegishe jazamız:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x-2}} < 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-5-x^2+x+2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{x-2} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Olay bolsa:

$$\begin{cases} \begin{cases} x \leq -1 \\ 2 < x \leq 3 \end{cases} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \\ 2 < x \leq 3 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ \frac{5}{2} \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x < 3$$

**Juwabı.**  $x \in \left[\frac{5}{2}; 3\right)$ .

**5- mısal.**  $\frac{\sqrt{x+2}-|x-2|}{\sqrt{8-x}-|x-2|} \geq 1$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 8 \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 8 \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Endi berilgen ten`sizlikti sheshemiz:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}-|x-2|}{\sqrt{8-x}-|x-2|} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{(x-2)^2}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x^2-4x+4}} \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x^2-4x+4}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{8-x}+\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x^2-4x+4}} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x^2-4x+4}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-8+x}{8-x-x^2+4x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{-x^2+3x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{x^2-3x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{(x+1)(x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Olay bolsa:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 8 \\ x \leq -1 \\ 3 \leq x \leq 4 \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 8 \\ x < -1 \\ -2 \leq x \leq 8 \\ 3 \leq x \leq 4 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in [-2; -1) \cup [3; 4)$ .

### Shing`rawlar

To`mendegi ten`sizliklerdi sheshin`.

1.  $|x+3| - \sqrt{x^2-2x-3} \geq 0$

6.  $|x-7| - \sqrt{7-x} \geq 0$

2.  $\sqrt{x^2-5x+6} \leq \sqrt{2x-4}$

7.  $\sqrt{3x^2-5x-2} \leq \sqrt{2x-4}$

3.  $\frac{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{6-3x}} \geq 0$

8.  $\frac{\sqrt{x+5}+|x-4|}{\sqrt{10-x}+|x-4|} \geq 1$

4.  $\frac{\sqrt{3x^2-2x-5}}{\sqrt{x-3}} < \sqrt{x+1}$

9.  $\frac{\sqrt{2x^2-18}-\sqrt{x^2+3x}}{7-x} \geq 0$

5.  $\frac{\sqrt{4x^2-4}-\sqrt{x^2+4x}}{5-x} \geq 0$

10.  $|x-6| - \sqrt{6-x} \geq 0$

### §3. O`zgeriwshini belgilew arqalı sheshiletug`ın irracional ten`sizlikler

Ayırım quramalı irracional ten`sizliklerdi sheshiwde olardıń o`zgeriwshilerin belgilew arqalı sheshiw qolaylı boladı.

**1-mısal.**  $\frac{(x-1)\sqrt{x-1}+1}{x-2} < \sqrt{x-1} + \frac{1}{2}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkın ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$y = \sqrt{x-1} \geq 0$  dep belgileymiz. Sonda berilgen ten`sizlik to`mendegi tu`рге iye boladı ha`m onı sheshemiz:

$$\begin{aligned} \frac{y^3+1}{y^2-1} < y + \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y-1)(y+1)} < y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{y^2-y+1}{y-1} - y - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2y^2-2y+2-2y^2+2y-y+1}{2(y-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{y-3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < 1 \\ y > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

bul tabilg`an  $y$  tin` ornına ma`nislerin qoysaq:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} < 1 \\ \sqrt{x-1} > 3 \\ x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 1 \\ x-1 > 9 \\ x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 10 \\ x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \\ x > 10 \\ x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x > 10 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in [1; 2) \cup (10; +\infty)$ .

**2-mısal.**  $\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \leq x\sqrt{x}+27$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

$y = \sqrt{x} \geq 0$  dep belgileymiz. Sonda berilgen ten`sizlik to`mendegi tu`rge iye boladı ha`m onı sheshemiz:

$$\begin{aligned} \frac{y^2-9}{y-3} \leq y^3+27 &\Leftrightarrow \frac{(y-3)(y+3)}{y-3} \leq (y+3)(y^2-3y+9) \Leftrightarrow (y+3) \leq (y+3)(y^2-3y+9) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y+3)(y^2-3y+9) - (y+3) \geq 0 \Leftrightarrow (y+3)(y^2-3y+8) \geq 0 \Leftrightarrow y+3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -3 \end{aligned}$$

bul tabilg`an  $y$  tin` ornına ma`nislerin qoysaq:

$$\begin{cases} \sqrt{x} \geq -3 \\ \sqrt{x} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x > 9 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in [0; 9) \cup (9; +\infty)$ .

**3-mısal.**  $\sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2+4x+4} \leq \sqrt{2(x^2+4x+6)}$  ten`sizligin sheshin`

**Sheshiw:**  $y = x^2+4x+4 = (x+2)^2$  dep belgileymiz. Sonda berilgen ten`sizlik to`mendegishe jazıladı ha`m onı sheshemiz:

$$\begin{aligned} \sqrt{y+4} + \sqrt{y} &\leq \sqrt{2(y+2)} \Leftrightarrow (\sqrt{y+4} + \sqrt{y})^2 \leq (\sqrt{2(y+2)})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2y+4 + 2\sqrt{(y+4)y} \leq 2y+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(y+4)y} \leq 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

bul tabilg`an  $y$  tin` ornına ma`nislerin qoysaq:

$$y = (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

**Juwabi:**  $x \in \{-2\}$ .

**4-mısal.**  $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-x^2-2x$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**  $y = \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 0$  dep belgileymiz.

Sonda  $5x^2 + 10x + 1 = y^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x = y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = \frac{y^2 - 1}{5}$  boladı. Bul tabılg`anlardı

berilgen ten`sizlikke qoyıp payda bolg`an ten`sizlikti sheshemiz:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq 7 - \frac{y^2 - 1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 5y - 36 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y+9)(y-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq -9 \\ y \geq 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq -9 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \emptyset \\ y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq 4 \end{aligned}$$

Bul tabılg`an u tin` ma`nisin belgilegen jerge qoyamız:

$$\begin{aligned} & \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 4 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 \geq 16 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Juwabı:**  $x \in (-\infty; 3] \cup [1; +\infty)$ .

**5-mısal.**  $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:**  $y = \frac{2}{x}$  belgilewin kirgizemiz. Onda berilgen ten`sizlik to`mendegi

tu`rde boladı:

$$\begin{aligned} & y - \frac{1}{2} > \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{1}{2} > 0 \\ y^2 - \frac{3}{4} \geq 0 \\ \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{y^2 - \frac{3}{4}}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{2} \\ \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0 \\ y^2 - y + \frac{1}{4} > y^2 - \frac{3}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{2} \\ y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} < x < 1 \\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \emptyset \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < 1 \end{aligned}$$

Bul tabılg`an  $y$  tin` ma`nisin belgilegen jerge qoyamız:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow 2 < x \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

**Juwabı:**  $x \in \left(2; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

## Shinigi'wolar

To`mendegi ten`sizlikni sheshin`.

1.  $\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - 4 \leq -3x^2 + 5x$
2.  $\sqrt{3x^2 - 5x - 4} + 3x^2 \leq 5x + 10$
3.  $\sqrt{x^2 + 12x + 36} + \sqrt{x^2 + 12x + 40} \leq \sqrt{2(x^2 + 12x + 38)}$
4.  $\frac{(x-4)\sqrt{x-4} + 1}{x-5} < \sqrt{x-4} + \frac{2}{3}$
5.  $\frac{2x^2}{\sqrt{5x-1}} + x \geq \sqrt{5x-1}$

### §4. Quramali irratsional ten`sizliklerdi sheshiw usullari

**1-misal.**  $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} < x^2$  ten`sizligin sheshin`

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizlikni mu`mkin ma`nislerinin` oblastin` tabamuz:

$$\begin{cases} 12 - \frac{12}{x^2} \geq 0 \\ x^2 - \frac{12}{x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 12}{x^2} \geq 0 \\ \frac{x^4 - 12}{x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12 \geq 0 \\ x^4 - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 12 \\ x^2 \geq \sqrt{12} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + \sqrt[4]{12})(x - \sqrt[4]{12}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt[4]{12} \\ x \geq \sqrt[4]{12} \end{cases}$$

Berilgen ten`sizlikni to`mendegishe jazamuz:

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} < x^2 \Leftrightarrow \sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} < x^2 - \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}}$$

Keyingi ten`sizlikni eki jag`i mu`mkin ma`nislerinin` oblastinda on` bolg`anliqtan bul ten`sizlikni eki jag`in kvadratqa ko`teremiz:

$$\begin{aligned} 12 - \frac{12}{x^2} < x^4 - 2x^2 \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} + x^2 - \frac{12}{x^2} &\Leftrightarrow (x^4 - 12) + 2|x| \cdot \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} + x^2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^4 - 12} - |x|)^2 > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ \sqrt{x^4 - 12} - |x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ \sqrt{x^4 - 12} \neq |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -2 < x < 2 \\ x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Olay bolsa:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -\sqrt[4]{12} \\ x \geq \sqrt[4]{12} \\ x < -2 \\ -2 < x < 2 \\ x > 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq -\sqrt[4]{12} \\ x < -2 \\ -2 < x < 2 \\ x \geq \sqrt[4]{12} \\ x < -2 \\ x > 2 \\ x \geq \sqrt[4]{12} \\ -2 < x < 2 \\ x \geq \sqrt[4]{12} \\ x > 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < -2 \\ -2 < x < -\sqrt[4]{12} \\ x \in \emptyset \\ x \in \emptyset \\ \sqrt[4]{12} < x < 2 \\ x > 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < -2 \\ -2 < x < -\sqrt[4]{12} \\ \sqrt[4]{12} < x < 2 \\ x > 2 \end{array} \right\}$$

**Juwabi:**  $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\sqrt[4]{12}) \cup (\sqrt[4]{12}; 2) \cup (2; +\infty)$ .

**2-mısal.**  $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} > \frac{3}{2}\sqrt{x}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastı  $x \geq 1$  boladı.

$\sqrt{x+\sqrt{x}} > 0$  bolg`anlıqtan, berilgen ten`sizliktin` eki jag`ın usı an`latpag`a ko`beytemiz:

Sonda  $x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} > \frac{3}{2}\sqrt{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}\sqrt{x} > \sqrt{x(x-1)}$  ten`sizligi kelip shıg`adı. Bul ten`sizliktin` eki jag`ın  $\sqrt{x} > 0$  ge bo`lsek  $\sqrt{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{x-1}$  ten`sizligi payda boladı. Bul ten`sizliktin` eki jag`ın kvadratqa ko`tersek

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} > x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{5}{4} \Leftrightarrow x < \frac{25}{16}$$

Olay bolsa:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x < \frac{25}{16} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{25}{16}$$

**Juwabi:**  $x \in \left[1; \frac{25}{16}\right)$ .

**3-mısal.**  $x + \frac{x-1}{4}\sqrt{x^2 - 2x + 9} < -\frac{x+1}{4}\sqrt{x^2 + 2x + 9}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 9 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 9 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in R \\ x \in R \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in R$$

Demek, berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastı barlıq haqıyqıy sanlar ko`pligi boladı.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + 9} = a \text{ ha`m } \sqrt{x^2 + 2x + 9} = b \text{ dep belgileyik.} \\ \sqrt{x^2 - 2x + 9} = a \Rightarrow x^2 - 2x + 9 = a^2 \Rightarrow x^2 + 9 = a^2 + 2x \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} = \epsilon \Rightarrow x^2 + 2x + 9 = \epsilon^2 \Rightarrow x^2 + 9 = \epsilon^2 - 2x \quad (2)$$

(1) ha'm (2) ten'liklerdin' sol jaqlari ten' bolg'anliqtan on' jaqlarida ten' boladi. Olay bolsa,

$$a^2 + 2x = \epsilon^2 - 2x \Leftrightarrow 4x = \epsilon^2 - a^2 \Leftrightarrow x = \frac{\epsilon^2 - a^2}{4}$$

x tin' bul tabilg'an ma'nisin berilgen ten'sizlikke qoyamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2 - a^2}{4} + \frac{\epsilon^2 - a^2 - 4}{16}a + \frac{\epsilon^2 - a^2 + 4}{16}\epsilon < 0 &\Leftrightarrow \frac{\epsilon^2 - a^2}{4} + \frac{\epsilon^2 - a^2}{16}a - \frac{a}{4} + \frac{\epsilon^2 - a^2}{16}\epsilon + \frac{\epsilon}{4} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\epsilon^2 - a^2}{4} + \frac{\epsilon^2 - a^2}{16}(a + \epsilon) + \frac{\epsilon - a}{4} < 0 &\Leftrightarrow \frac{(\epsilon - a)(\epsilon + a)}{4} + \frac{(\epsilon - a)(\epsilon + a)^2}{16} + \frac{\epsilon - a}{4} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\epsilon - a) \left[ \frac{\epsilon + a}{4} + \frac{(\epsilon + a)^2}{16} + \frac{1}{4} \right] < 0 \end{aligned}$$

Keyingi ten'sizliktegi kvadrat qawsırma ishindegi an'latpa on' an'latpa bolg'anliqtan ten'sizlikni sol an'latpag'a qısqartamiz:

$$\epsilon - a < 0 \Leftrightarrow \epsilon < a$$

bul ten'sizliktegi a ha'm v nın' ornına ma'nislerin qoysaq:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 9} < \sqrt{x^2 - 2x + 9} &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 9 < x^2 - 2x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 9 - x^2 + 2x - 9 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x < 0 &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

**Juwabi:**  $x \in (-\infty; 0)$ .

**4-mısal.**  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} > \frac{3x^2 + \frac{4}{9}}{2\left(x - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{x\left(x - \frac{8}{3}\right)}}$  ten'sizligin sheshin'.

**Sheshiw:**  $x - \frac{1}{3} = y$  dep belgileyimiz, bunnan  $x = y + \frac{1}{3}$ . Bul tabilg'anlardı berilgen ten'sizlikke qoyamiz:

$$y^2 - \frac{25}{9} > \frac{3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}}{2y + \sqrt{\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3} - \frac{8}{3}\right)}} \Leftrightarrow y^2 - \frac{25}{9} > \frac{3y^2 + 2y + \frac{7}{9}}{2y + \sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}}}$$

Keyingi ten'sizliknin' on' jag'ındag'ı bo'lshektin' alımındag'ı an'latpa y tin' qa'legen haqıyqıy ma'nisinde on' bolg'anliqtan onı taslap ketemiz.

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{25}{9} > \frac{1}{2y + \sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}}} &\Leftrightarrow y^2 - \frac{25}{9} > \frac{2y - \sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}}}{\left(2y + \sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}}\right)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - \frac{25}{9} > 2y - \sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}} &\Leftrightarrow \left(y^2 - 2y - \frac{7}{9}\right) + \sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}} - 2 > 0 \end{aligned}$$

Keyingi ten'sizlikten  $\sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}} = a$  dep belgileyik, bunda  $a \geq 0$  boladı.

$$a^2 + a - 2 > 0 \Leftrightarrow (a+2)(a-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2 \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\text{olay bolsa, } \begin{cases} a < -2 \\ a > 1 \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1$$

Demek,

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 - 2y - \frac{7}{9}} > 1 &\Leftrightarrow y^2 - 2y - \frac{7}{9} > 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y - \frac{16}{9} > 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{8}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y < -\frac{2}{3} \\ y > \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} < -\frac{2}{3} \\ x - \frac{1}{3} > \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Juwabi: } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty).$$

**5-mısal.**  $(12-x)\sqrt{\frac{12-x}{x-2}} + (x-2)\sqrt{\frac{x-2}{12-x}} < \frac{82}{3}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw.** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkın ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\frac{12-x}{x-2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{x-12}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-12}{x-2} < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-12) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 12$$

$$x-2 = a > 0 \text{ dep belgileymiz, bunnan } x = a+2$$

$$12-x = \epsilon > 0 \text{ dep belgileymiz, bunnan } x = 12-\epsilon$$

Bul ten`liklerden  $a+2 = 12-\epsilon \Leftrightarrow a+\epsilon = 10$  boladı.

Berilgen ten`sizlikti taza belgshilewler arqalı jazamız ha`m onı sheshemiz:

$$\begin{aligned} \epsilon \sqrt{\frac{\epsilon}{a}} + a \sqrt{\frac{a}{\epsilon}} < \frac{82}{3} &\Leftrightarrow \frac{\epsilon^2 + a^2}{\sqrt{a\epsilon}} - \frac{82}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{3(a^2 + \epsilon^2) - 82\sqrt{a\epsilon}}{3\sqrt{a\epsilon}} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3(a^2 + \epsilon^2) - 82\sqrt{a\epsilon} < 0 \Leftrightarrow 3((a+\epsilon)^2 - 2a\epsilon) - 82\sqrt{a\epsilon} < 0 \Leftrightarrow 3(a+\epsilon)^2 - 6a\epsilon - 82\sqrt{a\epsilon} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 300 - 6a\epsilon - 82\sqrt{a\epsilon} < 0 \Leftrightarrow 150 - 3a\epsilon - 41\sqrt{a\epsilon} < 0 \Leftrightarrow 3a\epsilon + 41\sqrt{a\epsilon} - 150 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a\epsilon} - 3)(3\sqrt{a\epsilon} + 50) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a\epsilon} < -\frac{50}{3} \\ \sqrt{a\epsilon} > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

1) eger  $\sqrt{a\epsilon} < -\frac{50}{3}$  bolsa, ten`sizlik sheshimge iye bolmaydı.

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{a\epsilon} > 3 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(12-x)} > 3 \Leftrightarrow (x-2)(12-x) > 9 \Leftrightarrow 12x - x^2 - 24 + 2x > 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 14x + 33 < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-11) < 0 \Leftrightarrow 3 < x < 11 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2 < x < 12 \\ 3 < x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 11$$

$$\text{Juwabi: } x \in (3; 11).$$

**6-mısal.**  $\frac{(9-x)\sqrt{9-x} + (4+x)\sqrt{4+x}}{(9-x)\sqrt{4+x} + (4+x)\sqrt{9-x}} < \frac{7}{6}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkın ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 4+x > 0 \\ 9-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 9$$

$\sqrt{9-x} = a$  ha`m  $\sqrt{4+x} = b$  dep belgileymiz.

Berilgen ten`sizlikti taza belgshilewler arqalı jazamız ha`m onı sheshemiz:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{a^2b + ab^2} < \frac{7}{6} &\Leftrightarrow \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab(a+b)} < \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} < \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} - \frac{7}{6} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{6a^2 - 6ab + 6b^2 - 7ab}{6ab} < 0 \Leftrightarrow \frac{6a^2 - 13ab + 6b^2}{6ab} < 0 \Leftrightarrow 6a^2 - 13ab + 6b^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 6 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Keyingi ten`sizliktin` eki jag`ın kvadratqa ko`teremiz:

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} < \frac{a^2}{b^2} < \frac{9}{4} &\Leftrightarrow \frac{4}{9} < \frac{9-x}{4+x} < \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9-x}{4+x} > \frac{4}{9} \\ \frac{9-x}{4+x} < \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9-x}{4+x} - \frac{4}{9} > 0 \\ \frac{9-x}{4+x} - \frac{9}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{81-9x-16-4x}{9(4+x)} > 0 \\ \frac{36-4x-9x-36}{4(4+x)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{65-13x}{9(4+x)} > 0 \\ \frac{-13x}{4(4+x)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13x-65}{9(4+x)} < 0 \\ \frac{13x}{4(4+x)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-5) < 0 \\ (x+4)x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 5 \\ x < -4 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5 \end{aligned}$$

**Juwabı:**  $x \in (0; 5)$ .

**7-mısal.**  $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw.** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkın ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}} &\Leftrightarrow \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} - \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} - \frac{2(6x-4)}{\sqrt{9x^2+16}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} - \\ &\quad - \frac{2(\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x})(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}} > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x}) \left( 1 - \frac{2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x}) \left( \frac{\sqrt{9x^2+16} - 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}} \right) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x}) \left[ \sqrt{9x^2+16} - 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) \right] > 0 \end{aligned}$$

keyingi ten`sizliktin` eki jag`in on` an`latpa bolg`an

$(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})\sqrt{9x^2+16}+2(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})$  an`latpasına ko`beytemiz, sonda to`mendegi ten`sizlik payda boladı.

$$\begin{aligned} (6x-4)(9x^2+8x-32-16\sqrt{8-2x^2}) > 0 &\Leftrightarrow 2(3x-2)(4(8-2x^2)+16\sqrt{8-2x^2}-(x^2-8x)) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(2\sqrt{8-2x^2}-x)(2\sqrt{8-2x^2}+8+x) < 0 &\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)(2\sqrt{8-2x^2}-x) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) < 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Bul tabılg`an sheshimdi ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastı menen kesilistiremiz:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{3} < x < \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} < x \leq 2 \end{cases}$$

**Juwabi:**  $x \in \left[-2; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; 2\right]$

**8-mısal.**  $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$  ten`sizligin sheshin`.

**Sheshiw:** Berilgen ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \\ 5x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 3x \geq 2 \\ 4x \geq 3 \\ 5x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \geq \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{5}$$

Berilgen ten`sizlikti to`mendegi tu`rde jazamız:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4} \Leftrightarrow \sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1} > \sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3} \quad (1)$$

(1) ten`sizlikte  $5x-4-2x+1 > 0 \Leftrightarrow 3x-3 > 0 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$  ha`m  $3x-2-4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$  bolg`anlıqtan ten`sizliktin` mu`mkin ma`nislerinin` oblastın  $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$  kesindisine ha`mde  $x > 1$  aralıqqa bo`lip ha`m bulardın` ha`r qaysısında (1) ten`sizlikti sheshemiz:

1)  $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$  kesindisinde  $\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1} \leq 0$  ha`m  $\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3} \geq 0$  ten`sizlikleri

orınlı boladı, demek  $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$  kesindisinde (1) ten`sizlik sheshimge iye emes.

2)  $x > 1$  aralıg`ında  $\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1} > 0$  ha`m  $\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3} < 0$  ten`sizlikleri orınlı boladı, demek  $x > 1$  aralıg`ındag`ı  $x$  tın` qa`legen ma`nisleri ushın (1) ten`sizlik orınlı boladı.

**Juwabi:**  $x \in (1; +\infty)$ .

## PAYDALANILG`AN A`DEBIYATLAR

1. Вавилов В.В., Мельников И.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенство. Москва «Наука», 1987.
2. A.I.Abdixamidov, X.A.Nasimov, I.M.Nosirov, J.X.Xusanov. Algebra ha`m matematikaliq analiz tiykarlari. 1 ha`m 2 bo`lim, No`kis «BILIM» 2005.
3. Мирзаахмедов М.А., Каримов Р.А. Тенглама ва тенгсизликларни ечиш. Тошкент. «Ўқитувчи» 1989.
4. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Москва «Просвещение» 1991.
5. Умирбеков А.У., Шаабзалов Ш.Ш. Математикани такрорланг. Тошкент «Ўқитувчи» 1989.
6. Сахаев М. Алгебрадан масалалар тўплами. Тошкент «Ўқитувчи». 1987.
7. Яремчук Ф.П., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции. Киев – 1976.
8. Галицкий М.Л. ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ курсини чуқур ўрганиш: Методик тавсиялар ва дидактик материаллар. Тошкент. «Ўқитувчи» 1998.
9. Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.. 3000 кнкурсных задач по математике. Москва., 1998.
10. Шаригин И. Математика для поступающих в вузы. Дрофа. Москва. 2004.

## MAZMUNI

Kirisiw .....	3
§ 1. Irracional ten`sizliklerdi sheshiw usılları.....	4
1. $\sqrt{f(x)} < g(x)$ tu`rindegi ten`sizlik.....	4
2. $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ tu`rindegi ten`sizlik.....	6
3. $\sqrt{f(x)} > g(x)$ tu`rindegi ten`sizlik.....	7
4. $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ tu`rindegi ten`sizlik.....	8
5. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	9
6. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	9
7. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	10
8. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	10
9. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > h(x)$ tu`rindegi ten`sizlik.....	10
10. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < h(x)$ tu`rindegi ten`sizlik.....	12
11. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > \sqrt{h(x)}$ tu`rindegi ten`sizlik.....	13
12. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < \sqrt{h(x)}$ tu`rindegi ten`sizlik.....	16
13. $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} \geq 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	17
14. $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} > 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	17
15. $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} \leq 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	18
16. $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} < 0$ tu`rindegi ten`sizlik.....	19
17. $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} > 1$ tu`rindegi ten`sizlik.....	19
18. $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} < 1$ tu`rindegi ten`sizlik.....	20
§2. Irracional ten`sizliklerdi olarda qatnasqan an`latpalardın` belgilerine baylanıslı sheshiw usılları.....	22
§3. O`zgeriwshini belgilew arqalı sheshiletug`ın irracional ten`sizlikler .....	25
§4. Quramalı irracional ten`sizliklerdi sheshiw usılları.....	28
Paydalanılğ`an adebiyatlar.....	33

*Du'ziwshiler:*

**No'kisbay Djumabaev** - A'jiniyaz atindag'ı NMPİ Fizika matematika fakultetinin'  
Matematikanı oqıtıw metodikası kafedrasının' ag'a oqıtıwshısı

**Gulnaz Mamutova**- A'jiniyaz atindag'ı NMPİ Fizika matematika fakultetinin'  
Matematikanı oqıtıw metodikası kafedrasının' assistent oqıtıwshısı

**Gulnara Babaniyazova**-A'miwda'rya rayonu № 3 sanli' Akademik litseyi  
matematika pa'ni oqıtıwshısı

**Baqbergen Nukusbaev**- A'jiniyaz atindag'ı NMPİ Fizika matematika fakul'tetinin'  
Matematikanı oqıtıw metodikası ta'lim bag'darı talabası

## *Irracional ten`sizliklerdi sheshiw usılları* (metodikalıq qollanba)

**Bas redaktor:** *K.M.Koshanov*  
**Tex. redaktor:** *E.K.İskenderova*  
**Korrektor:** *A.M.Saribaeva*  
**Operator:** *N.Reymov*

A'jiniyaz atindag'ı NMPİ redakciya – baspa bo'limi

A'jiniyaz atindag'ı NMPİ baspaxanasında basılg'an 2016-j.  
Buyırtpa 0196. Nusqası 100 dana. Forması 60x84. Ko'lemi 2.3 b.t.  
230105, No'kis qalası, A.Dosnazarov ko'shesi-104. Reestr № 11-3084.