O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA KOMMUNIKATSIYALARINI RIVOJLANTIRISh VAZIRLIGI

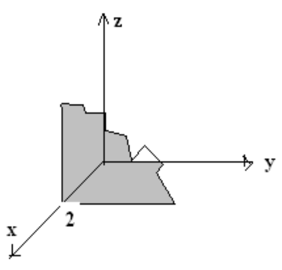
TOSHKEN AXBOROT TEXNOLOGIYaLARI UNIVERSITETI URGANCh FILIALI

«Tabiiy va umumkasbiy fanlar » kafedrasi

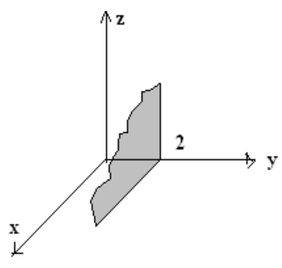
Muallif: I.I.Xusainov

Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik

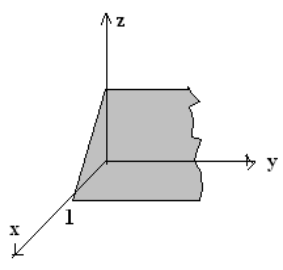
Uslubiy qo'llanma



17-chizma



18-chizma



19.

Urganch – 2016 yil.

Mazkur uslubiy qo`llanma "Oliy matematika" fani o`quv dasturi asosida tayorlandi va "Tabiiy va umumkasbiy fanlar kafedrasining (30.01.17 №6.1) "Kopyuter injineringi" fakulteti (30.01.2017 yil, №8) ilmiy-uslubiy kengashlari tomonidan eshitilib institut uslubiy kengashiga tasdiqlash uchun ta`vsiya etildi.

TATU Urganch filiali (2017-yil,№8__) ilmiy uslubiy kengashi tomonidan nashrga ta`vsiya etildi.

Muallif: Xusainov I.I.

T A Q R I Z C H I L A R:

1) f.m.f.n. B.Bobojonov – UrDU "Differensial tenglamalar" kafedrasi mudiri, dotsent
2) f.m.f.n. Q.A.Mamedov – TATU UF "Axborot ta'lim texnologiyalari" kafedrasi mudiri, dotsent.

I.I.Xusainov, "Fazoda yug`ri chiziq va tekislik" (uslubiy qo`llanma) Urganch-2017, 32 bet.

A N O T A T S I Y A

Mazkur uslubiy qo`llanma "Analitik geometriyaning asosiy bo`limlaridan "Fazoda to`g`ri chiziq va tekislik" bo`limidan "Mustaqil ta`lim" topshiriqlarini bajarish bo`yicha tegishli uslubiyot bayon etilgan. Har bir mavzuga doir bir necha ha`munaviy misollar to`la va mukammal yechib ko`rsatilgan, hamda har bir talabaga alohida variantda mustaqil ishlar berilgan.

Muharrir: p.f.n. dots. A. Ashirova.

K I R I S H.

Hozirgi zamon ilmiy texnika taraqqiyoti muhandis – texnolog mutaxasislarining matematik tayyorligini takomillashtirishni talab etadi. Shu nuqtai nazardan oily texnika o'quv yurtlari talabalari oldida turgan asosiy vazifalardan biri, ular o'z bilimlarini mustaqil to'ldira olishlari, zarurratga qarab esa mutlaqo yangi sohalar va fanlarni mustaqil egallay olishlaridan iborat.

Ushbu uslubiy qo'llanma "Analitik geometriya"ning asosiy bo'limlaridan "Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik" bo'limidan "Mustaqil ta'lim" topshiriqlarini bajarish bo'yicha tegishli uslubiyat bayon etilgan. Har bir mavzuga doir bir nechta namunaviy misollar to'la va mukammal yechib ko'rsatilgan, hamda har bir talabaga alohida variantda mustaqil ishlar berilgan.

Bu qo'llanma davlat ta'lim standartlari. oliy matematika bo'yicha "kompyuter injiniringi, dasturiy injiniringi, kasb ta'limi, telekomunikasi" yo'nalishlari o'quv ishchi dasturiga to'liq mos keladi. Undan boshqa o'quv yurti talabalari qo'shimcha adabiyot sifatida foydalanishlari mumkin.

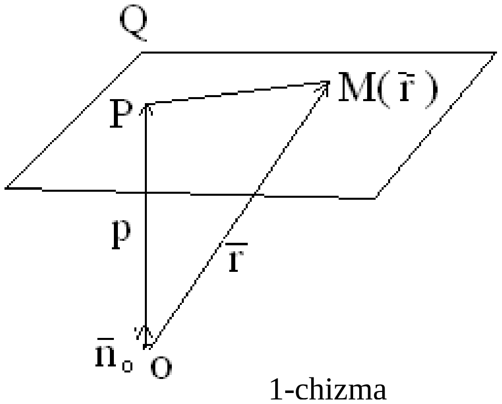
Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari.

I BOB. Tekislik va uning tenglamalari

Fazoda ikki nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan bir xil masofada turgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) tekislik deb qaraladi.

1 – §. Tekislikning normal tenglamasi

Tekislikning fazodagi o'rnini uning koordinatalar boshqacha bo'lgan masofasi **p** ya'ni **O** nuqtadan unga o'tkazilgan OP perpendikulyarning uzunligi bilan, hamda **O** dan tekislik tomon yo'nalgan birlik $\vec{n}^0$ vektor bilan aniqlash mumkin. (1-chizma).



1-chizma

$$np_{\vec{n}^0}\overline{O}\overline{M} = p \qquad (1)$$

$$np_{\vec{n}^0}\overline{O}\overline{M} = \vec{r}n^o \qquad (2)$$

Buni (1) tenglikka qo'yamiz. $\vec{r}\vec{n}^o - p = 0$ (3) bu tenglama tekislikning vektor shaklidagi normal tenglamasi deyiladi. **r** vektor tekislikdagi ixtiyoriy **M** nuqtaning radus-vektori-o'zgaruvchi radus - vektor, $\overline{n}^o$ vektor esa birlik normal vektor deyiladi.

(3) tenglamani proeksiyalar bilan yozamiz. … vektor bilan **Ox, Oy,Oz** koordinata o'qlari orasidagi burchaklarni mos tartibda α , β , γ bilan, **M** nuqtaning koordinatalari **m,x,y,z** bilan belgilaymiz ya'ni, $\overline{n}^o\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $\overline{r}\{x, y, z\}$, bu holda $\overline{r}\overline{n}^0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ (4) Bularni (3) tenglamaga qo'yamiz: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ (5). Bu tenglama tekislikning koordinata shaklidagi normal tenglamasi deyiladi.

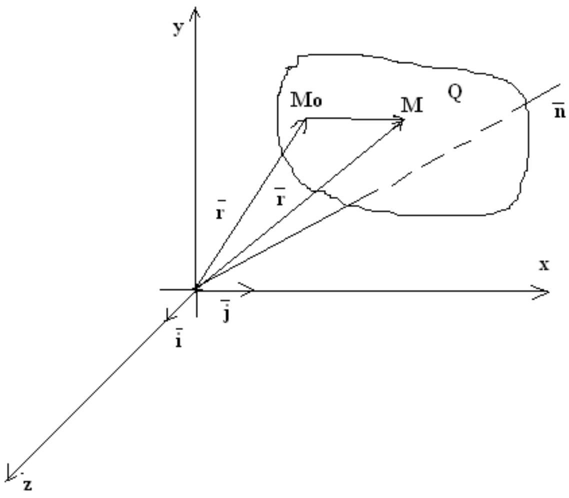
(5) tenglama x,y,z ga nisbatan birinchi darajali algebraik tenglamdir. Demak,har qanday tekislik x,y,z o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajali algebraik tenglama bilan tasvirlanadi.

2 – §. Tekislikning umumiy tenglamasi

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta **Q** tekislikka tegishl perpendikulyar bo'lgan nolmas vektor bo'lsin (2-chizma).

Agar **M(x,y,z)** nuqta **Q** tekislikdagi **M_0** nuqtadan farqli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u holda $\overline{MM_0} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ vektor $\bar{n} = \bar{r} - \bar{r}_0 = \{A; B; C\}$ vektorga $\perp$ bo'ladi, ya'ni bu vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$\bar{n}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$ (6) tekislikning vektor shaklidagi tenglamasini koordinata shaklidagi yozilsa , u holda $A(X-X_0)+B(Y-Y_0)+C(Z-Z_0)$ (7) tenglama hosil bo'ladi.



2-chizma

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tib $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi deyiladi.

(7) tenglamani bunday ko'rinishida ham yozish mumkin: Ax+By+Cz +D=0 (8) bunda D= – $(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

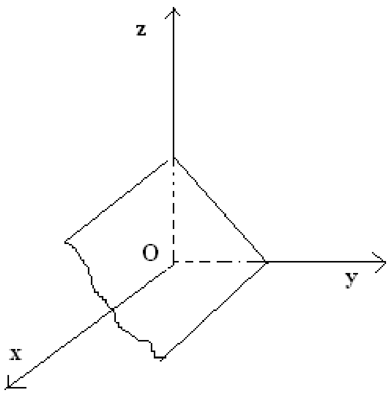
<u>(8) tenglamaga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.</u>

<u>Eslatma</u>. $\bar{n}$ vektor nolmas vektor bo'lgani uchun tekislik umumiy tenglamasining A,B va C koeffitsientlari bir vaqtda nolga teng bo'lmaydi.

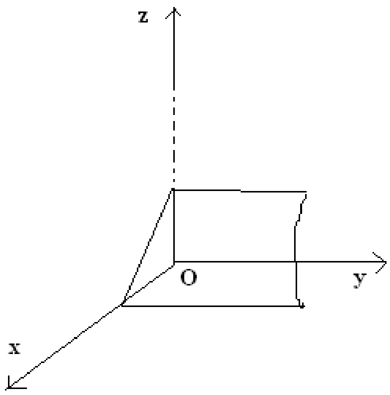
<u>(8) tekislikning umumiy tenglamasining xususiy hollalriga qarab chiqamiz:</u>

1. D=0 bo'lsin, bu holda (8) tenglama Ax+By+Cz=0 (9) ko'rinishni oladi. Bu (9) tenglama koordinatalar boshidan o'tgan tekislikni tasvirlaydi.

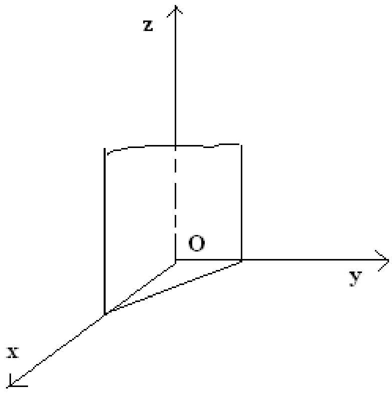
2. A=0 bo'lsin, bu holda (8) tenglama By+Cz+D=0 ko'rinishni oladi. Bundan $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ya'ni koordinatalar boshidan tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar bilan absissalar o'qi orasidagi burchak 90^0 ga tengligidan Ox o'qiga parallel tekislikni tasvirlaydi. (3 - chizma)



3 - chizma



4 - chizma

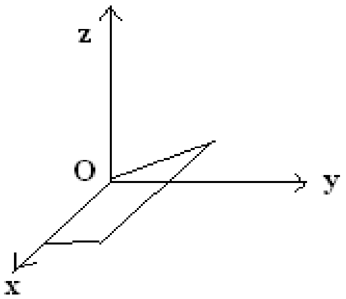


5 - chizma

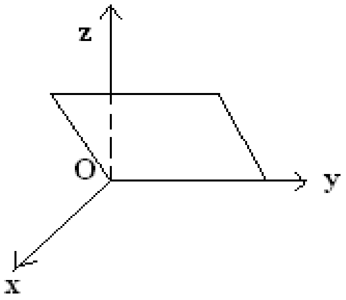
3. B=0 bo’lsin, bu holda (8) tenglama Ax+Cz+D=0 (11) ko’rinishini oladi. Bu tenglama bilan tasvirlangan tekislik Oy o’qiga parallel bo’ladi. (4-chizma)

4. C=0 bo’lsin, Bu holda (8) tenglama Ax+By+D=0 (12) ko’rinishni oladi. Bu Oz o’qqa parallel tekislikni tasvirlaydi. (5-chizma)

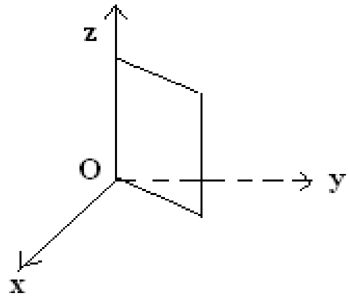
5. A=0, D=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama By+Cz=0 (13) ko’rinishni oladi. D=0 bo’lganda tekislik koordinatalar boshidan o’tadi. A=0 shartda Ox o’qiga parallel bo’ladi. Demak, (13) tenglama Ox o’qidan o’tgan tekislikni tasvirlaydi. (6-chizma)



6-chizma



7-chizma

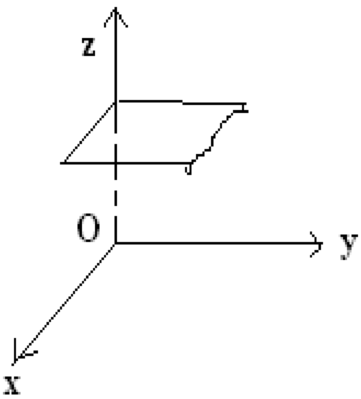


8-chizma

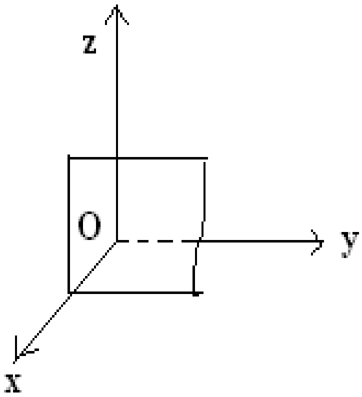
6. B=0 va D=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama Ax+Cz=0 (14) ko’rinishini oladi. Bu tenglama Oy o’qidan o’tgan (7-chizma) tekislikni tasvirlaydi.

7. C=0 va D=0 bo’lsin. Bu holda (8) tenglama Ax+By=0 (15) ko'rinishni oladi. Bu tenglama Oz o’qdan o’tgan tekislikni tasvirlaydi. (8-chizma)

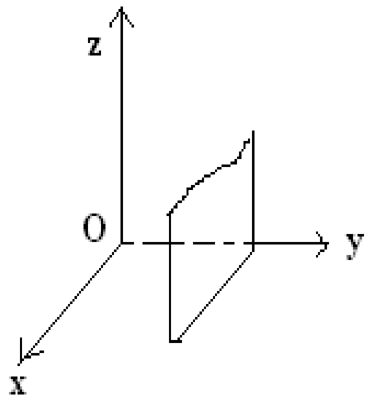
8. A=0, B=0 bo'lsin. Bu holda (8) tenglama Cz+D=0 yoki $Z=-\frac{D}{C}(C\neq 0)$ ko'rinishni oladi. Bu tenglama Ox o'qi bilan Oy o'qqa parallel tekislikni yoki, boshqacha aytganda, xOy tekislikka parallel tekislikni tasvirlaydi. Bu tekislik xOy tekislikdan $h=-\frac{D}{C}$ (C$\neq 0$) masofa uzoqdan o'tadi. (9- chizma)



9-chizma



10-chizma



11-chizma

9. B=0, C=0 bo'lsin. Bu holda (8) tenglama Ax+D=0 yoki $x=-\frac{D}{A}$ (A$\neq 0$) ko'rinishida bo'lib, yOz tekislikka parallel, undan $k=-\frac{D}{A}$ masofa uzoqlikda yotgan tekislikni tasvirlaydi. (10-chizma)

10. A=0, C=0 bo'lsin. Bu holda (8) tenglama By+D=0 yoki $y=-\frac{D}{B}$ (B$\neq 0$) ko'rinishni oladi va bu tenglama xOz tekislikka parallel bo'lib, undan $l=-\frac{D}{B}$ masofa uzoqlikda yotgan tekislikni tasvirlaydi. (11-chizma)

11. A=0, B=0, D=0 bo'lsin. Bu holda (8) tenglama Cz = 0 => z=0 (C$\neq 0$) ko'rinishni oladi. 1 va 8 –hollardagi natijalarga asosan bu tenglama xOy tekislikni tasvirlaydi.

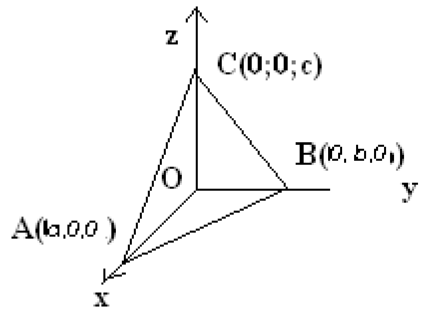
12. A=0, C=0, D=0 bo'lib, B$\neq 0$ bo'lsa, (8) tenglama By=0=>y=0 tenglamaga aylanadi va xOz tekislikni tasvirlaydi.

13. B=0, C=0, D=0 bo'lib, A$\neq 0$ bo'lsa (8) tenglama Ax=0=>x=0 ko'rinishini oladi va yOz tekislikni tasvirlaydi.

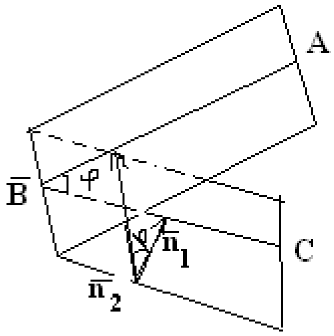
14. A=0, B=0, C=0 bo'lsa, (8) tenglamadan D=0 bo'lib,bu holda x,y,z o'zgaruvchilar orasida hech qanday munosabat (bog'lanish) bo'lmaydi.

3 – § . Tekislikning har xil tenglamalari.

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ (16) ko'rinishdagi tenglama, tekislikning koordina o'qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi (12-chizma)



12-chizma



13-chizma

2. Vektor shakldа berilgan $\bar{n}_1\bar{r}+d_1=0$ va $\bar{n}_2\bar{r}+d_2=0$ tekisliklar orasidagi (13-chizma) burchak: $\cos\varphi=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}$ (17) formula bilan aniqlanadi; bu yerda $\bar{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$; $\bar{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$

3. Umumiy ko'rinishda berilgan $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklar orasidagi burchak (13-chizma):

$$\cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$ (18) formula bilan aniqlanadi.

4. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ (19) tekisliklarning parallellik, $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (20) perpendikulyarlik shartlari bo'ladi.

5. $Ax+By+Cz+D=0$ (8) tekislikning umumiy tenglamani normal shaklga keltirish uchun uni hadma-had normallovchi ko'paytuvchi $M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (21)ga

ko'paytirish kerak, bu holda $\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ bo'ladi. (22)

Agar D<0 bo'lsa, (21) va (22) formulalarning o'ng tomonida musbat, D>0 bo'lsa, manfiy ishora olinadi.

6. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ (5) tekislikkacha bo'lgan **d** masofa: $d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|$ (23); agar tekislikning tenglamasi vektor shaklda bo'lsa, $d=\left|\bar{n}^0\bar{r}-p\right|$ (24) ko'rinishda va agar tekislikning tenglamasi Ax+By+Cz+D=(8) ko'rinishda bo'lsa, $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (25) formulalar bilan aniqlanadi.

7. $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi:

a) Koordinatalar shaklida: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ (26)

b) Vektor ko'rinishida: $[(\bar{r}-\bar{r}_1)(\bar{r}_2-\bar{r}_1)]\cdot(\bar{r}_3-\bar{r}_1)=0$ (27); bu yerda $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_2$ lar mos ravishda M_1, M_2, M_3 nuqtalarning radius-vektorlari.

8. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o'tib, $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasi: $A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0$ (28)

9. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan o'tib, Ax+By+Cz+D=0 tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi:

$\left[\overline{M_1M}\ \overline{M_1M_2}\right]\cdot\bar{n} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$ (29), ya'ni aralash ko'paytma nolga teng. Bunda M (x;y;z) izlanayotgan tekislikning ixtiyoriy nuqtasi.

10. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o'tib, $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi:

$$[\bar{n}_1\bar{n}_2]\cdot \overline{M_1M} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

11. $\bar{n}=\{A,B,C\}$ vektorga $\perp$ bo'lib, koordinatalar boshidan **p** birlik masofadan o'tgan tekislik tenglamasi $\dfrac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm p$ (31)

12. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklarning kesishish chizig'i orqali o'tuvchi tekisliklarning tenglamalari $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda($ $A_2+B_2y+C_2z+D_2)=0$ (32).

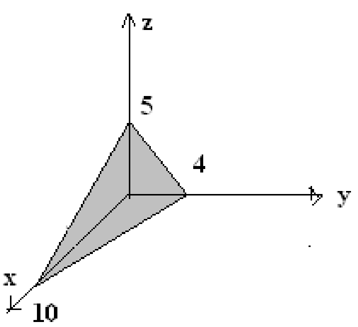
Bu yerda λ- o'zgaruvchi parametr (32) tenglama tekisliklar dastasining tenglamasi deyiladi.

4 – §. I bob mazusiga doir misollar

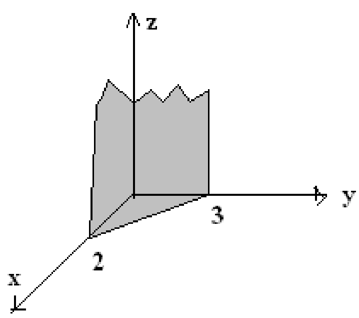
1-misol. a) $2x+5y+4z-20=0$, b) $3x+2y-6=0$ c) $3y+z-3=0$
d) $5x-10=0$, e) $2y-4=0$ f) $4x+z=4$ tekislik tenglamalarini yasang.

Yechilishi.

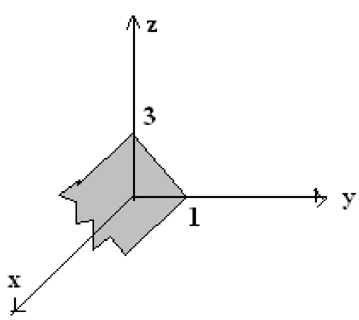
a) $2x+5y+4z-20=0$ tenglamalarini tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi ko'rinishiga keltiramiz: $\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$



14 -chizma



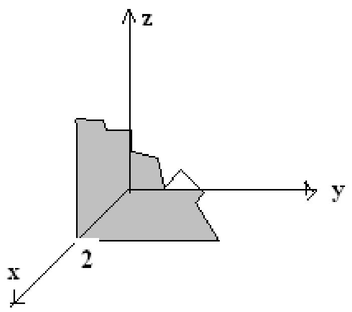
15 -chizma



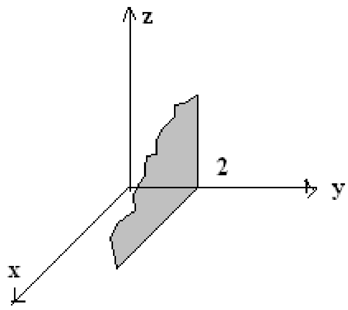
b) 3x+2y-6=0 $\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ tenglama (15-rasm) Oz o'qqa parallel tekislikdan iborat.

c) 3y+z-3=0 $\Rightarrow \frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$ tenglama (16-rasm)Ox o'qqa parallel tekislik

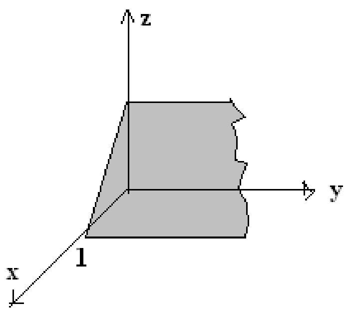
d) 5x-10=0 $\Rightarrow$ x=2 (17-chizma) tekislik yOz tekislikka parallel, undan 2 masofa uzoqlikda yotgan tekislik tenglamasi.



17-chizma



18 -chizma



19 -

e) 2y-4 =0$\Rightarrow$ y=2 tekislik xOz tekislikka parallel, undan 2 masofa uzoqlikda yotgan (18-rasm) tekislik tenglamasi

f) 4x+z=4$\Rightarrow \frac{y}{1}+\frac{z}{4}=0$ tenglama Oy o'qqa parallel (19-rasm) tekislik.

2-misol. Ox o'q hamda A(2;-1;3) nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu masalani yechish uchun (13) formuladan foydalamiz. Ox o'q orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi:

By+Cz=0(a). Bu tekislik A(2;-1;3) nuqta orqali o'tganligi uchun bu nuqtaning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya'ni –B+3c=0 $\Rightarrow$ B=3c. Buni (a) tenglmaga qo'yib, c ga qisqartirsak, izlanayotgan tenglama hosil bo'ladi: 3y+z=0

3-misol. B (3;-2;-3) nuqta orqali o'tib, yOz tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish.yOz teikslikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasi: Ax+D=0 (b). Bu tekislik B (3;-2;-3) nuqta orqali o'tganligi uchun,bu nuqtaning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya'ni: $3A+D \Rightarrow D=-3A$. Buni (b) tenglamaga qo'yib, A ga qisqartirsak, izlanayotgan tenglama hosil bo'ladi: Ax-3A=0 yoki x-3=0

4-misol. M(2;-2;1) nuqtadan o'tgan va 3x-4z+2=0 tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasni tuzing.

Yechish. (28) formuladan foydanalamiz: 3(x-2)-4(z-1)=0=>3x-4z-2=0

5-misol. A(4;-2;3) nuqtadan o'tib, 2x-y+4z-1=0 va x+2y-3z+4=0 teksliklarga perpendikulyar bo'lgan tekslik tenglamasini tuzing.

Yechish. (30) formulaga asosan $[\bar{n}_1, \bar{n}_2] \cdot \overline{AM} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ x-4 & y+2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4(z-3)+3(x-4)+4(y+2)-8(x-4)+(z-3)+6(y+2)=0 yoki x-2y-z-5=0

6-misol. $M_1(1;2;0)$, $M_2(-3;0;1)$, $M_3(1;-1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish (26) formuladan foydalanamiz: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ -3-1 & 0-2 & 1-0 \\ 1-1 & -1-2 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ -2(x-1)+12z+4(y-2)+3(x-1)=0 $\Rightarrow$ x+4y+12z-9=0

7-misol. $M_1(1;2;0)$, $M_2(2,1,1)$ nuqtalardan o'tib, -x+y-1=0 tekslikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish (29) formulaga asosan : $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 1-2 & 1-0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ x+y-3=0

8-misol. a) 2x+4y+4z-2=0 va x-2y+2z-4=0

b) x-y-2z+5=0 va 2x-2y-4z+6=0 teksliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (18) formuladan foydallansak:

a) $\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot(-2) + 4\cdot 2}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{6\cdot 3} = \frac{1}{9} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{9}$

b) (19) formulaga asosan : $\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}=\frac{-2}{2}$ shartdan teksliklar parallel ekanligini ular orasidagi burchak $\varphi=0$ bo'ladi.

9-misol. M(4;3;-5) nuqtadan 2x-3y+6z-4=0 tekslikgacha bo'lgan masofa topilsin.

Yechish. Ma'lumki $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan Ax+By+Cz+D=0 tekislikkacha bo'lgan masofa $d=\left|\frac{A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$ formula bilan topiladi. Berilgan misolda A=2, B=-3, C=6, D=-4 bo'lganidan $d=\left|\frac{2\cdot 4-3\cdot 5-6\cdot 5+4}{\sqrt{4+9+36}}\right|=\left|\frac{8-49}{7}\right|=\frac{41}{7}=5\frac{6}{7}$

10-misol. $M_1(-1;0;0)$ va $M_2(0;0;1)$ nuqtalardan o'tib 2x+y-2z+2=0 tekslik bilan 60^0 burchak tashkil qiladigan tekslik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $M_1(-1;0;0)$ nuqtadan o'tuvchi tekslik tenglamasi: A(x+1)+By+Cz=0(*). Bu tekslik $M_2(0;0;1)$ nuqtadan o'tsa, uning koordinatalari tekslik tenglamasini qanoatlantiradi.

$A(0+1)+B\cdot 0+C\cdot 1=0 \Rightarrow C=-A$(**)

Berilgan tekslik bilan izlanayotgan tekslik orasidagi burchak 60^0 bo'lgani uchun $\cos\varphi=\cos 60^0=\frac{1}{2}$

Ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasi va (**) ga ko'ra

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{A\cdot 2+B\cdot 1+C\cdot(-2)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}\\ C=-A\end{cases}\Rightarrow\left\{\dfrac{2A+B+2A}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow 2(4A+B)=3\sqrt{2A^2+B^2}\Rightarrow 2A^2+32AB+5B^2=0\Rightarrow A=\pm\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-4)B \quad (***)$$

(*) tenglamada A va C larning o'rniga (**) va (***) tengliklardagi qiymatlarini qo'yib B ga qisqartirib soddalashtirsak: $\pm(3\sqrt{3}-4)x+2By=0$ tekslik tenglamalari hosil bo'ladi

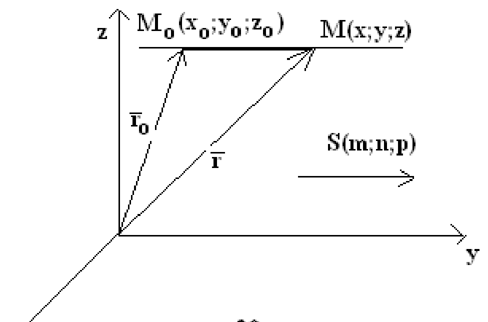
11-misol. 4x+3y-5z-8=0 va 4x+3y-5z+12=0 teksliklar orasidagi masofani toping.

Yechish. Izlanayotgan masofani topish uchun teksliklarning birida nuqta olish va bu nuqtadan ikkinchi tekslikkacha bo’lgan masofani aniqlash kerak. Berilgan teksliklardan birinchisining tenglamasida y=0, z=0 deb faraz qilib, 4x-8=0=> x=2 ga ega bo’lamiz, ya’ni M(2;0;0) nuqtani hosil qilamiz. Bu nuqtadan 4x+3y-5z+12=0 tekislikkacha bo’lgan masofa $d=\left|\frac{4\cdot 2+3\cdot 0-5\cdot 0+12}{-\sqrt{4^2+3^2+5^2}}\right|=\left|\frac{20}{-5\sqrt{2}}\right|=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

II BOB. Fazoda to’g’ri chiziq tenglamalari.

1 – §. To’g’ri chiziqning vektor shaklidagi tenglamasi.

Berilgan $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan $\bar{s}$=(m;n;p) vektorga paralell holda o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s}$ (1) ko’rinishda bo’ladi va to’g’ri chiziqning vektor shaklidagi tenglamasi deyiladi. Bu yerda $\bar{r}$ -to’g’ri chiziqdagi istalgan M(x;y;z) nuqtaning radius vektori (20-chizma) $\bar{r}_0$ esa $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtaning radius vektori, t-harqanday haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi parametr. $\bar{s}$ - to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori deyiladi, uning koordinatalari esa (ya’ni m,n,p sonlar) to’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi koeffitsientlari deyiladi.



20-rasm

2 – §. To’g’ri chiziqning parametrik va kanonik tenglamalari.

Agar (1) tenglamada vektorlarning koordinatalariga o’tilsa, ya’ni $\bar{r}_0$={x_0;y_0;z_0}, $\bar{r}$={x;y;z}, $\bar{s}$={m;n;p} larni e’tiborga olsak: $\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tm \\ y &= y_0 + tn \\ z &= z_0 + tp \end{aligned}\right\}$ (2) Bu tenglama to’g’ri chiziqning koordinata shakldagi prametrik tenglamasi deyiladi. (t-parametr)

(

2) tenglamalarga qaraganda biz fazoda to’g’ri chiziq parametrik shaklda uchta tenglama bilan beriladi degan xulosaga kelamiz.

Parametrik tenglamadan **t** ni topamiz:

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p} \quad \text{Demak ,} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3)$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

(3) tenglamalar fazodagi to'g'ri chiziq o'zgaruvchi x,y,z koordinatalarga nisbatan birinchi darajali 2 ta tenglama bilan berilishini ko'rsatadi.

(2) va (3) tenglamalar $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o'tgan va yo'naltiruvchi vektori $\bar{s}$={m;n;p} bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasidir.

3 – §. To'g'ri chiziqning umumiy va berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi tenglamalari.

Agar $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0(\alpha)$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (β) teikslik tenglamalari o'zaro parallel bo'lmasa, u holda ular to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Shu sababli, fazoda to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chiziq sifatida qaraymiz. Demak, fazoda to'g'ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (4)$$

(4) ga to'g'ri chiziqning umumiy tenglamsi deyiladi.

Agar α va β tekislik tenglamalari o'zaro parallel bo'lsa (4) to'g'ri chiziqni ifodalamaydi.

Faraz qilaylik, to'g'ri chiziqning ikki $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\bar{a}=\overline{M_1M_2}$ vektorni olish mumkin. Agar M(x;y;z) nuqta to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsa bo'lsa, u holda, $\overline{M_1M}$ va $\bar{a}$ vektorlar parallel bo'ladi. Berilgan koordinataga ko'ra,

$\overline{M_1M}$ $=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$, $\bar{a}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$

Vektorlarning kollenierlik shartiga ko'ra: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (5)

(5) ga berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.

4 – §. **To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi kosinuslari.**

To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori uchun birlik vektor olganda, ya'ni $\bar{S}=\bar{S}_0$ bo'lganda m, n,p koeffitsientlar to'g'ri chiziq bilan Ox,Oy, Oz o'qlar orasidagi α,β,γ burchaklarning kosinuslariga teng bo'lsa, bu holda (2) parametrik va (3) kanonik tenglamalar mos tartibda

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+t\cos\alpha\\ y&=y_0+t\cos\beta\\ z&=z_0+t\cos\gamma\end{aligned}\right\}\ (2`)\ \text{va}\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}\ \ (3`)$$ ko'rinishlarni oladi.

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ lar to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Yo'naltiruvchi kosinuslarni yo'naltiruvchi koeffitsientlar bilan ifodalash mumkin. Buning uchun $\bar{S}=S\bar{S}_0$ tenglikdan foydalanamiz, bunda s skalyar $\bar{S}$ vektorning uzunligidir. Keyigni tenglikni proeksiyalar bilan yozsak, m=s$\cos\alpha$, n=s$\cos\beta$, p=s$\cos\gamma$ (6)hosil bo'ladi; bu tengliklar to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi koeffitsientlari bilan uning yo'naltiruvchi kosinuslarining bir-biriga proporsionalligini ko'rsatadi. $\bar{S}$ vektorning uzunligi $S=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$ ekanini e'tiborga olib, (6) tenglikdan yo'naltiruvchi kosinuslarini topamiz:

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{m}{s}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{m}{s}=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\\ \cos\alpha=\dfrac{m}{s}=\dfrac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\end{cases}\qquad (7)$$

(7) formulalar yo'naltiruvchi vektorning uzunligi qanday bo'lmasin, fazodagi to'g'ri chiziqning yo'nalishi yo'naltiruvchi koeffitsientlar bilan aniqlanishini ko'rsatadi. Shuning uchun ko'p masalalarda fazodagi to'g'ri chiziqning yo'nalishi m:n:p nisbat shaklida beriladi. m,n,p, yo'naltiruvchi koeffitsentlarning hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lolmaydi,chunki m=0, n=0, p=0 bo'lganda yo'naltiruvchi vektorning o'zi ham nol vektor bo'lib qoladi va bu holda to'g'ri chiziqning fazodagi o'rni aniq bo'lmaydi.

Ammo yo'naltiruvchi koeffitsientlarning ba'zi birlari nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan m=0, $n\neq 0$, $p\neq 0$ bo'lsin. m=0 bo'lishi yo'naltiruvchi vektor Ox o'qqa perpendikulyar ekanini bildiradi. Bu holda (2) parametrik tenglamalar

$$\begin{cases} x = x_0 + 0\cdot t \ (yoki \quad x = x_0) \\ y = y_0 + n\cdot t \\ z = z_0 + p\cdot t \end{cases} \qquad (2'')$$

ko'rinishga keladi; (3) tenglama esa $\frac{x-x_0}{o} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ (3``) shaklni oladi. Nolga bo'lish mumkin emasligi bizga ma'lum, shuning uchun (3``) tenlamalarni qanday tushunish kerak? Bu savolga javob berish uchun (2``) tenglamalarni bunday yozamiz: $\frac{x-x_0}{o} = \frac{y-y_0}{n}$; $\frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ Birinchi tenglamadan. $n(x-x_0)=O(y-y_0)$ yoki $x=x_0$

Demak, (3``) tenglamalar $x=x_0$; $\frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ tenglamalarga aylanadi. Bu tenglamalar yo'naltiruvchi vektori $\bar{S}$(o,n,p) bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tasvirlaydi. Demak, (3``) tenglamani shartli tenglama deb qarash kerak, u tenglama $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o'tib, $\bar{S}$ {o,n,p} yo'naltiruvchi vektorga parallel to'g'ri chiziqni tasvirlaydi.

5 – §. **Fazodagi ikki to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.**

Fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak sifatida fazoning istalgan nuqtasidan shu to'g'ri chiziqlarga parallel o'tkazilgan ikki to'g'ri chiziqning tashkil qilgan burchaklaridan istalganini olamiz. Bu burchak O bilan π o'rtasida o'zgaradi.

Ikki to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ va } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

Bu chiziqlar orasidagi burchak bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari $\bar{S}_1\{m_1 ; n_1 ; p_1\}$ va $\bar{S}_2\{m_2 ; n_2 ; p_2\}$ lar orasidagi burchak φ ga teng. Ya'ni ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga ko'ra:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (8)$$

Agar qaralayotgan to'g'ri chiziqlar bir-biriga parallel bo'lsa,ularning yo'naltiruvchi $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ vektorlar ham parallel, ya'ni $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ (9). Bunga ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti deyiladi.

Agar berilgan to'g'ri chiziqlar bir-biriga perpendikulyar bo'lsa, u holda, ularning $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ vektorlari ham bir-biriga perpendikulyar:

$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ (10) bo'ladi.

(10) ga ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti deyiladi.

6 – §. **Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan va ikki to'g'ri chiziq orasidagi masofalar.**

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1;)$ nuqtadan $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan eng qisqa masofani topish uchun bu nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar bilan to'g'ri chiziq kesishish nuqtasining koordinatalarini topish kerak.

Buning uchun berilgan nuqta orqali berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislik o'tkazib, berilgan to'g'ri chiziq bilan unga perpendikulyar bo'lgan tekislikning kesishish nuqtasining koordinatalarini aniqlaymiz.

Berilgan nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi:

$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$ (*)

A,B,C koeffitsentlar bilan bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari orasida A:B:C=m:n:p munosabat mavjud. Bundan foydalansak, (*)ning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$m(x-x_1) + n(y-y_1) + p(z-z_1) = 0$ Bu tekislik bilan berilgan to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasining koordinatalari $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2;)$ aniqlanadi.

M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi masofa berilgan M_1 nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan eng qisqa masofadir.

12-misol A(7;9;7) nuqtadan $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Berilgan nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi:

A(x-7)+B(y-9)+C(z-7)=0 (*)

A:B:C=4:3:2 munosabatni (*)ga qo'ysak: 4(x-7)+3(x-9)+2(z-7)=0 yoki 4x+3y+2z-69=0. Bu tekislik bilan berilgan to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasining koordinatalarini aniqlaymiz.

Buning uchun berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini parametrik ko'rinishga keltiramiz, ya'ni x=4t+2, y=3t+1, z=2t (**)

Bu qiymatlarni tekislik tenglamasiga qo'yib, parametr t ning qiymatini aniqlaymiz:

$$4(4t+2)+3(3t+1)+2\cdot 2t-69=0 \Rightarrow t=2$$

t ning bu qiymatini (**)ga qo'yib, berilgan to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini aniqlaymiz: x=10, y=7, z=4 ya'ni B(10;7;4)

A va B nuqtalar orasidagi masofa berilgan A nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan eng qisqa masofadir, ya'ni d=|AB|=$\sqrt{22}$

Kesishmaydigan $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ (11) $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ (12) to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani topish uchun bu to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotishi yoki yotmasligini tekshirib ko'riladi.

Agar berilgan to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa, izlanayotgan masofa mos ravishda (11)va (12) to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi parallel tekisliklar orasidagi eng qisqa masofagan iborat bo'ladi.

Izlanayotgan masofa: **determinant yordamida:**

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}} \quad (13)$$

va **vektorial formada** esa,

$$d=\frac{(\bar r_2-\bar r_1)[n_1n_1]}{\|[n_1n_1]\|}$$ (14) formulalar yordamida topiladi.

13-misol. Kesishmaydigan $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ va $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani toping.

Yechish. Berilgan to'g'ri chiziqlarning bir tekislikka yotish yoki yotmasligini tekshirib ko'ramiz:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} -9 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix}=245\neq 0$$

Demak, berilgan to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmaydi.

1-usul. (13) formuladan foydalansak:

$$d=\frac{\begin{vmatrix} -9 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}^2}}=\frac{245}{35}=7$$

2-usul. Agar $\bar r_1$ veckor $M_1(9;-2;0)$ nuqtaning radius vektori, $\bar r_2$ esa

$M_2(0;7;2)$ nuqtaning radius vektori bo'lsa: $\bar r_1-\bar r_2=\{-9;-5;2\}$

So'ngra $[n_1n_2]=\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix}=-15\bar i-10\bar j+30\bar k \Rightarrow \|[n_1n_2]\|=35$,

$$(\bar r_2-\bar r_1)[\bar n_1\bar n_2]=\{-9;-5;2\}\cdot\{-15;-10;30\}=245$$

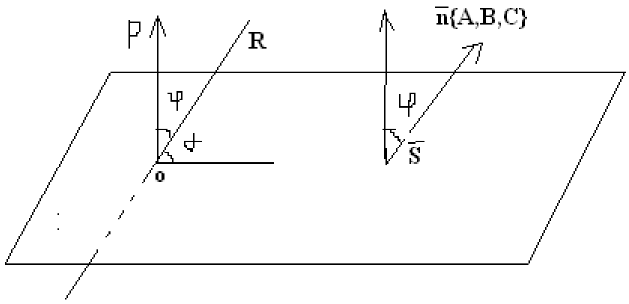
(14) formuladan: $d=\frac{245}{35}=7$

III BOB. TO’G’RI CHIZIQLAR VA TEKISLIK

1 – §. To’g’ri chiziq va tekisliklar orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Ta’rif. To’g’ri chiziq bilan uning tekislikdagi proeksiyasi tashkil qilgan burchakka to’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb ataladi.

Bizga $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to’g’ri chiziq va Ax+By+Cz+D=0 tekislik berilgan bo’lsin.



21-chizma

To’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi (21-rasm) burchak α va yo’naltiruvchi vektor $\bar{s}$ {m,n,p} bilan tekislikning normal vektori $\bar{n}$ {A;B;C} orasidagi burchak φ lar yig’indisi $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$ bundan $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$

Ikkinchi tomondan bu vektorlar mos tartibda OR to’g’ri chiziqqa va OP perpendikulyarga parallel (α burchak O dan $\frac{\pi}{2}$ gacha o’zgaradi)

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusini topish formulasiga ko’ra:

$\cos\varphi=\sin\alpha=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (1) ($0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ bo’lgani uchun formula suratidagi ifodaning absolyut qiymati olinadi).

(1) formulaga to’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasi deyiladi.

Agar to'g'ri chiziq bilan tekislik bir-biriga parallel bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bilan tekislikning normal vektori bir-biriga perpendikulyar bo'ladi, ya'ni Am+Bn+Cp=0 (2)

Agar to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, ularning yo'naltiruvchi vektori bilan normal vektori bir-biriga parallel bo'ladi. Shuning uchun $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ (3)

(2)ga to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik shari deyilsa,(3)ga perpendikulyarlik sharti deyiladi.

2 – §. Fazodagi to'g'ri chiziq va tekislikka doir ba'zi formulalar.

1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi : $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (4)

berilgan bo'lsin. Bu holda (4) to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\bar{s}$ ni har biri berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $\bar{n}_1$ {A_1; B_1; C1) va $\bar{n}_2$ {A_2; B_2; C_2) ikki vektorning vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan [$\bar{n}_1\,\bar{n}_2$] vektor deb qarashmumkin:

$$\bar{s}=[\bar{n}_1\bar{n}_2]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

2. Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tib, berilgan $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ (6) formula bilan aniqlanadi.

3. Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tib , berilgan Ax+By+Cz+D=0 tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi: $\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$ (7)

4. Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tib , Ax+By+Cz+D=0 tekislikka parallel bo'lgan hamma to'g'ri chiziqlar geometrik o'rni

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ (8) tekislikdan iborat bo'ladi.

5.Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan va berilgan

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to'g'ri chiziqdan o'tgan tekislik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \quad (9)$$

6. $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ va $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotish sharti:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

7. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to'g'ri chiziqning Ax+By+Cz+D=0 tekislikda yotish sharti:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0=0 \end{cases} \quad (11)$$

3 – §. III bob mavzulariga doir misollar

14-misol $M_1(1;-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\bar{s}=\{-2;3;-4\}$ vektorga parallel to'g'ri chiziqning kanonik va umumiy tenglamasini tuzing.

Yechish. (3) formuladan foydalanib to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi topamiz:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-4}$$

Agar bu tenglamalarni sistema ko'rinishda yozsak, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}\\ \dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y+1=0\\ 4y+3z-1=0\end{cases}$$

15-misol. Ox o'qqa parallel va A(2;1;3) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziqning $\bar{s}$ yo'naltiruvchi vektori Ox o'qqa parallel bo'lgani uchun uning Oy va Oz o'qlardagi proeksiyalari nolga teng.

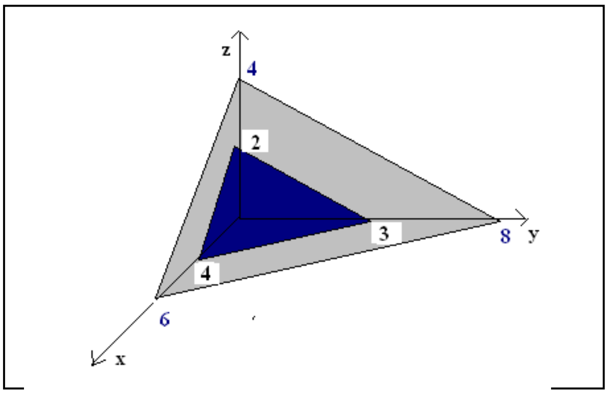
$\bar{s}$ vektor mumkin bo'lgan ikki yo'nalishdan istalganiga ega bo'lishi va uning uzunligi istalgancha bo'lishi mumkin. $|\bar{s}|=2$ deb olamiz va Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan yo'nalishni tanlaymiz; u holda $\bar{s}=(2;0;0)$. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{0};$$

Umumiy tenglamasi: $\begin{cases}y-1=0\\ z-3=0\end{cases}$

16-misol $\begin{cases}x+2y+3z-6=0\\ 2x+y+2z-8=0\end{cases}$ to'g'ri chiziqni yasang.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasining har biri o'zaro parallel bo'lmagan tekislik tenglamasini tasvirlaydi. Bu tekisliklarning kesishishi natijasida to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. To'g'ri chiziqni yasash uchun berilgan tekisliklarning har birini alohida yasab, kesishish nuqtalarini birlashtirsak, izlanayotgan to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Har ikkala tekislikni yasash uchun, ularning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalarini



22 -rasm

aniqlaymiz: $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{4}=1 \end{cases}$

17-misol M(2;4;-3) nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlari bilan mos ravishda $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$; $\beta=\pi$; $\lambda=\dfrac{2\pi}{3}$ burchaklar tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini tuzing.

Yechish. Agar izlanayotgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorini $\bar{s}$ {m,n,p} desak, bu vektorning koordinatalari:

$\bar{s}(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ Masala shartiga asosan: $\cos\dfrac{\pi}{2}=m=\dfrac{1}{2}$; $\cos\pi=n=-1$;

$\cos\dfrac{2\pi}{3}=p=-\dfrac{1}{2}$; $x_0=2$; $y_0=4$; $z_0=-3$

Bu qiymatlarni (3)tenglama qo'ysak: $\dfrac{x-2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+3}{-\frac{1}{2}}$ to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

Parametrik tenglama:

$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t+2 \\ y=-t+4 \\ z=\dfrac{-1}{2}t-3 \end{cases}$ ko'rinishda bo'ladi.

18-misol. Umumiy ko'rinishda berilgan to'g'ri chiziq

$\begin{cases} 2x+y-2z+1=0 \\ 3x-4y-2z=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 4x-y-6z-2=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$ lar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlarini (5) formuladan foydalanib topamiz: $\bar{s}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -10\bar{i} - 2\bar{j} - 11\bar{k}$ $\quad \bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 12\bar{j} + 4\bar{k}$

Bu vektorlar orasidagi burchak berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng. (8) formulaga asosan:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{-(10\cdot 3 + 2\cdot 12 + 11\cdot 4)}{\sqrt{225}\cdot\sqrt{169}} = -\frac{98}{195} \Rightarrow \varphi = \pi - \arccos\frac{98}{195} \approx 180^0 - 59^0 48` = 120^0 22`$$

19-misol. **B**erilgan M_1 (2;3;-2) nuqtadan o'tib, berilgan $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{4}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini toping.

Yechish.(6)formuladan foydalanamiz: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{4}$

20-misol. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-3}$ va $\frac{x-6}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{4}$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

Yechish.(10) shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$\begin{vmatrix} 6-2 & 4-2 & 4-1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantning birinchi va ikkinchi ustun elementlari mos tartibda proporsional bo'lgani uchun determinant nolga teng. Demak, to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotadi, shuning uchun ular kesishadi. Kesishish niqtasini tipamiz. Buning uchun to'g'ri chiziq tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1; \quad z = 2x - 13 \\ y = -\frac{2}{3}z + \frac{14}{3}; \quad z = 4y - 17 \end{cases}$$

Bu tenglamalarning birinchi uchtasini birgalikda yechamiz, natijada

x= $\frac{74}{11}$; y=$\frac{48}{11}$; z=$\frac{5}{11}$ hosil bo'ladi. Bularni to'rtinchi tenglamaga qo'ysak:

$\frac{5}{11}$=4$\cdot\frac{48}{11}$-17$\Rightarrow \frac{5}{11}=\frac{5}{11}$ Demak, to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi:

($\frac{74}{11}$; $\frac{48}{11}$; $\frac{5}{11}$)

<u>21-misol</u>. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$to'g'ri chiziq va 2x-4y+4z-6=0 tekisliklar orasidagi burchakni toping.

<u>Yechish</u>.(1) formulaga asosan:

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 2 - 1\cdot 4 + 2\cdot 4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+16+16}} = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{4}{9}$$

IV BOB. MUSTAQIL ECHISH UCHUN TOPSHIRIQLAR.

1-misol. Ox o'q hamda $A(a_{11};a_{12};a_{13})$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

2-misol. B $(a_{21};a_{22};a_{23})$ nuqta orqali o'tib, yOz tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

3-misol. $M(a_{31};a_{32};a_{33})$ nuqtadan o'tgan va $a_{31}x–a_{22}z+ a_{23}=0$ tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasni tuzing.

4-misol. $A(a_{32};a_{22};a_{12})$ nuqtadan o'tib, $a_{11}x-a_{21}y+a_{31}z-a_{32}=0$ va $a_{12}x+a_{22}y-a_{23}z+a_{31}=0$ teksliklarga perpendikulyar bo'lgan tekslik tenglamasini tuzing.

5-misol. $M_1(a_{21};a_{31};a_{11})$, $M_2(a_{22};a_{12};a_{32})$, $M_3(a_{13};a_{33};a_{23})$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

6-misol. $M_1(a_{22};a_{11};a_{33})$, $M_2(a_{31};a_{21};a_{13})$ nuqtalardan o'tib, -x+y-1=0 tekslikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

7-misol. a) $a_{11}x\ a_{21}y+a_{32}z-a_{12}=0$ va x-2y+2z-4=0

b) x-y-2z+5=0 va $a_{31}x-a_{22}y-a_{12}z+a_{32}=0$ teksliklar orasidagi burchakni toping.

8-misol. $M(a_{31};a_{22};a_{13})$ nuqtadan 2x-3y+6z-4=0 tekslikgacha bo'lgan masofa topilsin.

9-misol. $M_1(a_{12};0;0)$ va $M_2(0;0;\ a_{32})$ nuqtalardan o'tib 2x+y-2z+2=0 tekslik bilan 60^0 burchak tashkil qiladigan tekslik tenglamasi tuzilsin.

10-misol. $a_{12}x+a_{22}y-a_{32}z-a_{33}=0$ va $a_{11}x+a_{31}y-a_{21}z+a_{23}=0$ teksliklar orasidagi masofani toping.

11-misol $A(a_{31};a_{23};a_{12})$ nuqtadan $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

<u>12-misol</u>. Kesishmaydigan $\frac{x-9}{a_{12}}=\frac{y+2}{-a_{13}}=\frac{z}{a_{22}}$ va $\frac{x}{-a_{31}}=\frac{y+7}{a_{11}}=\frac{z-2}{a_{21}}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani toping.

13-misol $M_1(a12;a22;a32)$ nuqtadan o'tuvchi va $\bar{s}=\{-a_{11};a_{21};-a_{31}\}$ vektorga parallel to'g'ri chiziqning kanonik va umumiy tenglamasini tuzing.

14-misol. Ox o'qqa parallel va $A(a_{32};a_{11};a_{22})$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

15-misol $\begin{cases} x+a_{13}y+a_{21}z-a_{22}=0 \\ a_{11}x+y+a_{12}z-a_{31}=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqni yasang.

16-misol $M(a_{32};a_{11};-a_{22})$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlari bilan mos ravishda $\alpha=\frac{\pi}{3}$; $\beta=\pi$; $\lambda=\frac{2\pi}{3}$ burchaklar tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini tuzing.

17-misol. Umumiy ko'rinishda berilgan to'g'ri chiziq

$\begin{cases} a_{13}x+y-a_{22}z+a_{32}=0 \\ a_{12}x-a_{11}y-a_{31}z=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} a_{21}x-a_{12}y-a_{21}z-a_{32}=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$ lar orasidagi burchakni toping.

18-misol. **B**erilgan M_1 $(a_{32};a_{33};a_{31})$ nuqtadan o'tib, berilgan $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-2}{4}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini toping.

19-misol. $\frac{x-a_{11}}{4}=\frac{y-a_{22}}{2}=\frac{z-a_{33}}{-3}$ va $\frac{x-a_{21}}{2}=\frac{y-a_{31}}{1}=\frac{z+a_{12}}{4}$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

20-misol. $\frac{x-a_{13}}{2}=\frac{y+a_{23}}{1}=\frac{z-a_{31}}{2}$ to'g'ri chiziq va 2x-4y+4z-6=0 tekisliklar orasidagi burchakni toping.

MUSTAQIL ISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

variant №	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	variant №2	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	-2	4	5	3	-4	1	6	-3	0	16	1	-1	2	0	3	4	5	-4	2
2	0	1	-2	4	5	3	-4	0	6	17	3	0	-4	5	2	4	-3	-1	-1
3	2	1	0	-1	4	-3	5	6	-4	18	4	-3	2	-0	5	6	-1	1	2
4	3	2	-1	4	5	-2	5	4	6	19	3	-2	0	-1	4	-4	3	5	6
5	-4	3	2	0	4	6	-2	3	5	20	2	1	-1	0	-3	4	5	6	2
6	4	-3	0	1	2	-1	4	5	-6	21	-2	-3	0	-1	-1	2	4	3	5
7	-3	2	1	0	2	3	5	6	4	22	-1	2	3	4	-2	-1	0	2	4
8	5	4	-2	3	-3	0	1	6	4	23	2	-1	0	3	-4	5	6	-2	3
9	-6	5	0	2	1	-2	-1	3	4	24	-1	2	0	3	4	-3	2	4	5
10	-4	2	1	1	0	3	2	6	5	25	3	-1	0	1	3	4	4	0	2
11	3	4	-2	0	1	5	6	-4	3	26	1	2	2	3	1	2	5	4	2
12	4	0	-5	3	2	1	-2	1	4	27	2	3	0	1	-1	4	2	3	5
13	-2	3	4	0	-1	2	5	6	-5	28	5	5	2	6	5	4	-3	0	2
14	0	2	1	3	-2	4	5	3	6	29	3	4	0	1	2	4	5	3	6
15	3	4	-2	5	-4	0	2	6	1	30	-2	6	1	1	0	1	3	4	2

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. T.Jo'raev va boshqalar "Oliy matematika asoslari" , 1-qism, T.1995 "O'zbekiston"
2. Yo.Soatov "Oliy matematika" 1-jild, T.1992 "O'qituvchi"
3. V.E.Shneyder "Oliy matematika qisqa kurs, 1-qism, T.1987 "O'qituvchi"
4. X.Latipov, Sh.Tojiev "Analitik geometriya va chiziqli algebra", T.1995 "O'zbekiston"
5. T.Shodiev "Analitik geometriya va chiziqli algebra", T.1984 "O'qituvchi"
6. B.A.Abdalimov "Oliy matematika" T.1994 "O'qituvchi"

MUNDARIJA.