

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI**  
**OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**  
**FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI**  
**FIZIKA – MATEMATIKA FAKULTETI**

**Matematika yo'nalishi**

**kunduzgi bo'lim**

**08. 402- guruh bitiruvchisi**

**Hasanova Muslima Mirzobaxromovnaning**

**“XOSMAS INTEGRALLARNING GEOMETRIYA VA  
FIZIKAGA TATBIQLARI ”**

**mavzusidagi**

**BITIRUV**  
**MALAKAVIY ISHI**

**Ilmiy raxbar:**

**Differensial tenglamalar  
kafedrasining katta**

**o'qituvchisi:**

**M.Axunboyev**

**Farg'ona – 2012**

Bitiruv malakaviy ish kafedraning 20 \_\_\_\_\_ yil \_\_\_\_\_ dagi  
Yig'ilishida muxokama qilingan va ximoyaga tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri \_\_\_\_\_

Taqrizchilar: 1

2

## **R E J A:**

### **KIRISH**

#### **I-BOB. XOSMAS INTEGRALLAR.**

- 1.1. § Birinchi jins xosmas integrallar.
- 1.2. § Birinchi jins xosmas integrallar uchun yaqinlashish belgilari.
- 1.3. § Ikkinchi jins xosmas integrallar.
- 1.4. § Ikkinchi jins xosmas integrallarni hisoblash.
- 1.5. § Absolyut va shartli yaqinlashuvchi xosmas integrallar.

#### **II-BOB XOSMAS INTEGRALLARNING BA'ZI TATBIQLARI.**

- 2.1-§. Beta funksiya va uning xossalari.
- 2.2-§. Gamma funksiya va uning xossalari.
- 2.3-§. Beta va Gamma funksiyalar orasidagi bog'lanish
- 2.4-§. Puasson integrali, Frenel integrali.
- 2.5-§. Chiziqli chegarada buziladigan parabolik tipdagi chiziqli tenglama uchun birinchi chegaraviy masala.

### **XULOSA**

Foydalangan adabiyotlar

## KIRISH

O'zbekiston Resublikasi Prezidenti I.A.Karimov Oliy Majlisining XIV sessiyasida so'zlagan nutqida kadrlar tayyorlashning ahamiyatiga izoh berib shunday degan edi:

«Biz oldimizga qanday vazifa qo'ymaylik, qanday muammoni yechish zaruriyati tug'ilmasin, oxir oqibat, baribir kadrlarga borib qadalaveradi. Mubolag'asiz aytish mumkinki, bizning kelajagimiz, mamlakatimiz kelajagi, o'rnimizga kim kelishiga yoki boshqacharoq qilib aytganda, qanday kadrlar tayyorlashimizga bog'liq.

...Mamlakatimiz kelajagi uchun Oliy Majlisning IX sessiyasida qabul qilingan «Kadrlar tayyorlash bo'yicha milliy dasturi»ning amalga oshirilishi juda ham muhim ahamiyatga ega.

...Yuqori malakali kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashga alohida e'tibor berish lozim. Kadrlar tayyorlashning sifati, erkin fikrlovchi shaxs - fuqaroni kamol toptirishiga, ertaga sinf xonalar va auditoriyalarda kimlar dars va saboq berishiga bog'liq.

Darhaqiqat, barkamol inson shaxsining shakllanishi bevosita uzluksiz ta'lim jarayonida amalga oshadi. Shunday ekan, har jabhada muvaffaqiyatga erishish, jumladan yuqori malakali kadrlar tayyorlashda milliy dasturni o'rni va ahamiyati beqiyosdir.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturida Oliy ta'limning asosiy maqsadi bozor iqtisodiyoti sharoitida mustaqil ishlashga qodir, raqobatbardosh, yuqori malakali mutaxassislar tayyorlashdan iborat. Bu maqsadga erishish uchun, shuningdek Resublikamiz Prezidenti aytgani kabi «mamlakatimizning boy ilmiy - texnikaviy salohiyatidan keng foydalangan holda, yuksak texnologiya va fan yutuqlariga asoslangan ishlab chiqarish sohalari - avtomobilsozlik, samolyotsozlik, mikrobiologiya, elektrotexnika va elektronika sanoatlarini, telekommunikatsiya va

zamonaviy axborot texnologiya vositalarini tez sur'atlarda rivojlantirish» uchun saboq olayotgan har bir shaxs o'zi o'rgangan ta'lim mazmunini chuqur anglashi, qayerda va qanday tatbiq qilishni bilishi, hayotda esa o'zi amaliyotga tatbiq qila olishi kerak.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.Karimovning «Jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari» nomli asarida jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozining kelib chiqish sabablari, oqibatlari va uning O'zbekiston iqtisodiyotiga ta'sirini kamaytirish yo'llari chuqur va atroflicha taxlil qilingan. Inqirozning mamlakatimiz iqtisodiyotiga ta'sirini yumshatishga qaratilgan, inqirozga qarshi choralar dasturini ishlab chiqishga yo'naltirilgan amaliy tavsiyalar berilgan.

Ma'lumki, yirik rivojlangan mamlakatlarda uzoq yillardan buyon muttasil davlat byudjeti taqchilligi kuzatilgani va ularning salbiy tashqi savdo balansiga ega ekanligi, davlat tashqi qarzining miqdori yalpi ichki mahsulotga nisbatan yuqori bo'layotgani, rivojlangan mamlakatlarda qayta moliyalash stavkasining past darajada ushlab turilishi oqibatida jahon kapital bozorida arzon kreditlarning vujudga kelishi, ipoteka kreditlari berish talablarining asossiz bo'shashtirib yuborilganligi, moliyaviy institutlarning o'z mablag'lari va qarz majburiyatlari o'rtasidagi nisbatning keskin buzulishi, jahon iqtisodiyotida real va moliyaviy sektor o'rtasidagi nisbatning keskin o'zgarishi jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi kelib chiqishiga sabab bo'ladi.

Shuni mamnuniyat bilan ta'kidlash joizki, 2008-yilning dekabr oyida mamlakatimizga tashrif buyurgan Xalqaro valyuta jamg'armasining missiyasi tomonidan ko'plab davlatlarda ro'y berayotgan moliyaviy - iqtisodiy inqiroz va rivojlangan davlatlar iqtisodiy saloxiyati pasayishi kuzatilayotgan bir paytda, 2008- yilda O'zbekiston iqtisodiyoti barqarorligi saqlab qolinganligi, ya'ni ichki maxsulotning real o'sishi 9 foizni tashkil etganligi, mamlakatda tashqi savdo

balansi va byudjetning sezilarli profitsiti, valyuta zahiralarining o'sayotganligi va pul krediti siyosati barqarorligi saqlanayotganligi e'tirof etiladi.

Jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi Prezidentimiz I.Karimov tomonidan ishlab chiqilgan mashhur besh tamoyilga asoslangan ijtimoiy yo'naltirilgan erkin bozor iqtisodiyotiga o'tish modeli naqadar to'g'ri va puxta ekanligi yana bir bor isbotlandi.

Avvalambor iqtisodiyotning mafkuradan xoli bo'lishi, iqtisodiyotning siyosatdan ustunligida o'z ifodasini topgan iqtisodiy siyosat, davlatning bosh islohotchi vazifasini o'z zimmasiga olish, qonun ustuvorligini ta'minlash, kuchli ijtimoiy siyosat olib borish, islohotlarni bosqichma - bosqich va vazminlik bilan amalga oshirish kabi tamoyillar dunyoda avj olib borayotgan moliyaviy - iqtisodiy inqiroz sharoitida o'zini namoyon etadi.

Prezidentimiz ta'kidlaganidek, tobora chuqurlashib borayotgan moliyaviy - iqtisodiy inqiroz mamlakatimizga ta'sir ko'rsatmaydi, bizni chetlab o'tadi, deb qarash mumkin emas. Global iqtisodiy makonning uzviy bir qismi sifatida O'zbekiston ham jahon iqtisodiy inqirozining salbiy oqibatlarini his etmoqda. Xususan, jahon xom ashyo bozorlarida talablarning susayishi tufayli O'zbekiston eksport qiladigan qimmatbaxo va rangli metallar, paxta, uran, neft mahsulotlari, mineral o'g'itlarning narxi tushib bormoqda. Asosiy savdo hamkorlarimizning harid, to'lov qobiliyatining pasayishi eksport tushumining kamayishiga olib kelmoqda.

Mamlakatimiz universitetlari va oliy texnika o'quv yurtlarining deyarli barcha fakultetlarida matematik analiz yoki oliy matematika fani talabalarga o'tiladi. Bu fanlarning asosiy tushunchalaridan biri integral tushunchasidir. Bu tushuncha tatbiq nuqtai nazardan ham muhim ahamiyatga ega. Aniq integral ta'rifiga asosan funksiya chekli sohada chegaralangan bo'lishi kerak. Agar bu shartlardan biri bajarilmasa aniq integral ta'rifi o'rinli bo'lmaydi. Bunday hollarda xosmas integral tushunchasiga kelamiz. Birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallar

mavjud bo'lib, ulardan birida integrallash sohasi cheksiz, ikkinchisida esa integral ostidagi funksiya biron nuqtada chegaralanmagan bo'ladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ish «Xosmas integrallar » va «Xosmas integrallarning ba'zi tatbiqlari» deb nomlangan ikkita bobdan iborat. Birinchi bobda birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallar va ularning yaqinlashish belgilari o'rganilgan. Ikkinchi bobda bu integrallarning tatbiqi sifatida gamma funksiya va betta funksiya, ular orasidagi bog'lanish, Frenel va Puasson integrallari, chegaralanmagan sohada chiziqli parabolik tipdagi buziladigan ikkinchi tartibli tenglama uchun birinchi chegaraviy masala qaralgan. Berilgan funksiyalarni xosmas integrallar bilan ifodalash o'rinli bo'lishi ko'rsatilgan. Bunda Bessel funksiyasi xossaligidan foydalanilgan. Berilgan funksiyalarga qo'yilgan ba'zi shartlarda masala yechimining mavjudligi isbotlangan. Puasson integrali ehtimollar nazariyasida, Frenel integrallari fizikaning optika bo'limida tatbiq etiladi.

Bakalavrlar va fan o'qituvchilari o'zlarining ish faoliyatlarida ushbu bitiruv malakaviy ishidan foydalanishlari mumkin.

## I-BOB XOSMAS INTEGRALLAR

Aniq integralning ta'rifida integralning chegaralari chekli, integral ostidagi funksiya esa  $[a,b]$  kesmada chegaralangan bo'lishi talab etiladi. Agar bu shartlardan birontasi bajarilmasa ta'rif ma'nosini yo'qotadi. Bunday hollarda aniq integral ta'rifini umumlashtirish mumkin, natijada xosmas integrallar tushunchasiga kelamiz.

### 1.1-§. Birinchi jins xosmas integrallar.

#### Ta'rif:

Aytaylik  $f(x)$  funksiya  $[a,\infty)$  oraliqda berilgan bo'lib,  $\int_a^A f(x)dx$  integral mavjud

bo'sin, bunda  $A>0$ . U vaqtda, agar ushbu chekli limit mavjud bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = J, \quad (1)$$

bunda  $J$ -chekli son, u holda buni birinchi jins xosmas integral yoki  $f(x)$  funksiyaning  $[a,\infty)$  oraliqda xosmas integrali deyiladi va

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (2)$$

simvol bilan belgilanadi. Bu holda (2) xosmas integral mavjud yoki yaqinlashadi deyiladi. Agar (1) limit mavjud bo'lmasa yoki limit cheksizga teng bo'lsa, u holda (2) xosmas integral uzoqlashuvchi yoki mavjud emas deb ataladi. Xuddi shuningdek quyidagi integrallar qaraladi:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x)dx \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (4)$$

bularda  $a$ - ixtiyoriy son.

Xosmas integral aniq integralning limiti sifatida aniqlanganligi uchun aniq integralning ko'p xossalari xosmas integral uchun ham bajariladi. O'rta qiymat haqidagi teorema o'z kuchini yo'qotadi. Birinchi jins xosmas integralni

hisoblash ta'rifga asosan amalga oshiriladi. Haqiqatan ham, agar  $F(x)$ -funksiya  $f(x)$  funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [F(A) - F(a)] = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty},$$

bunda

$$F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A).$$

Shunday qilib, (2) xosmas integralni hisoblash uchun ushbu umumlashgan Nyuton-Leybnits formulasini hosil qilamiz:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) \quad (5).$$

Xuddi shuningdek,

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty),$$

bunda  $F(-\infty) = \lim_{A \rightarrow -\infty} F(A)$ .

**Misollar:**

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \quad (a > 0) \text{ xosmas integral hisoblansin.}$$

**Yechish:** Ta'rifga asosan

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-ax} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{a} (e^{-aA} - e^{-a \cdot 0}) \right] = -\frac{1}{a} \lim_{A \rightarrow +\infty} (e^{-aA} - 1) = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

**Javob:** Xosmas integral yaqinlashadi.

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} \text{ integral tekshirilsin}$$

**Yechish:**

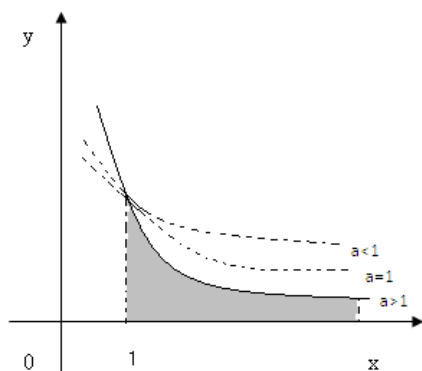
Ta'rifga asosan  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln(1+x^2)] = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln(1+A^2) - \ln 2] = +\infty$

**Javob:** Integral uzoqlashadi.

3.  $\alpha$  ning qanday qiymatlarida  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} (\alpha > 0)$  xosmas integralning mavjudligi tekshirilsin.

**Yechish:** Ta'rifga asosan

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \rightarrow +\infty} (x^{1-\alpha}) \Big|_a^A = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \rightarrow +\infty} (A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{agar } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{agar } \alpha \leq 1 \end{cases}$$



**Javob:**  $\alpha > 1$  bo'lsa, integral yaqinlashadi,

$\alpha \leq 1$  bo'lsa, integral uzoqlashadi. Bu misoldan birinchi jins xosmas integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi belgilarini keltirib chiqarishda foydalanamiz.

## 1.2-§ Birinchi jins xosmas integrallar uchun yaqinlashish belgilari.

Ba'zi hollarda funksiyaning boshlang'ich funkiyasini topib bo'lmaydi. Bunday vaqtda xosmas integralni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlash uchun boshlang'ich funksiyaning axtarmasdan ma'lum bir belgilarga murojat qilishga to'g'ri keladi. Birinchi jins xosmas integralni yaqinlashishini yoki uzoqlashishini tekshirish uchun yetarli shartni ifodalovchi quyidagi belgini keltiramiz.

**Teorema:** (Yaqinlashish belgisi) Aytaylik  $f(x)$  funksiya

$[a, \infty)$  oraliqda uzluksiz va musbat bo'lsin, ya'ni

$f(x) \geq 0$ . U vaqtda, agar  $[a, \infty)$  oraliqda

$$f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha} \quad (6)$$

tengsizlik bajarilib,  $\alpha > 1$  bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (7)$$

xosmas integral yaqinlashadi; agar

$$f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha} \quad (8)$$

tengsizlik bajarilib,  $\alpha \leq 1$  bo'lsa, u holda (7) xosmas integral uzoqlashadi, bunda  $a > 0$ , M-qandaydir o'zgarmas son.

**Isbot:**

$f(x)$  funksiya musbat bo'lganligi uchun yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan quyidagi aniq integral

$$\hat{O}(A) = \int_a^A f(x) dx \quad (9)$$

yuqori chegara A ga bog'liq bo'lgan o'suvchi funksiyaning ifodalaydi. (6) tengsizlikka asosan quyidagi kelib chiqadi:

$$\hat{O}(A) = \int_a^A f(x) dx \leq \int_a^A \frac{M}{x^\alpha} dx < M \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{M}{\alpha - 1} \alpha^{1-\alpha}, \alpha > 1$$

Demak, (9) funksiya yuqoridan chegaralangan. Ma'lumki agar funksiya o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda

$A \rightarrow +\infty$  chekli limitga ega bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integral mavjud bo'ladi. Demak, (7) xosmas integral yaqinlashadi. Agar (8) tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\hat{O}(A) = \int_A^a f(x) dx \geq \int_a^A \frac{M}{x^\alpha} dx = M \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha}$$

bo'ladi  $\alpha \leq 1$  bo'lganda esa  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$  dir.

Bu esa

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \hat{O}(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty$$

ekanligini anglatadi. Demak, (7) xosmas integral uzoqlashadi. Teorema ibotlanadi. Bu isbotlangan teoremadan amaliyotda tatbiq qilinadigan xosmas integralni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini ta'minlovchi quyidagi yetarli belgi kelib chiqadi.

**Yaqinlashish uchun yetarli belgi.** Aytaylik  $[a, \infty)$  oraliqda  $f(x)$  funksiya musbat va uzluksiz bo'lsin. Agar  $\alpha > 1$  bo'lib, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = J \quad (10)$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda (7) xosmas integral yaqinlashadi. Agar  $\alpha \leq 1$  bo'lib, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = J \neq 0 \quad (11)$$

chekli yoki cheksiz limit mavjud bo'lsa, u holda (7) xosmas integral uzoqlashadi.

**Birinchi hol.** Aytaylik  $\alpha > 1$  bo'lganda (10) limit mavjud bo'lsin. U vaqtda limit ta'rifiga asosan  $\forall \varepsilon > 0$  uchun  $\exists N$  bo'ladiki,  $x > N$  bo'lganda  $x^\alpha f(x) < J + \varepsilon$  tengsizlik bajariladi. Bundan  $f(x) < \frac{M}{x^\alpha}$  kelib chiqadi, bunda  $M = J + \varepsilon > 0$ .

Shunday qilib (6) shart hosil bo'ladi. Bu esa  $\int_N^{+\infty} f(x) dx$  integralning mavjudligini ta'minlaydi. Quyidagi

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^N f(x) dx + \int_N^{+\infty} f(x) dx \quad (12)$$

tenglikdan esa (7)-xosmas integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

**Ikkinchi hol.**  $\alpha \leq 1$  bo'lganda (11) limit mavjud bo'lsin. Bizda  $J > 0$   $J$  dan kichik bo'lgan musbat  $M$  sonni olamiz. U vaqtda tanlangan  $M$  bo'yicha shunday  $N$  sonni topish mumkinki, natijada  $x > N$  bo'lganda  $x^\alpha f(x) > M$  tengsizlik bajariladi (ma'lumki, agar  $x_n \rightarrow b$  va  $b < r$  ( $b > r$ ) bo'lsa, u holda ma'lum bir joydan boshlab  $x_n < r$  ( $x_n > r$ ) munosabat bajariladi). Shunday qilib (8) tengsizlik hosil

bo'ladi. Bundan esa  $\int_N^{+\infty} f(x) dx$

integralning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. (12) ga asosan (7) integral uzoqlashadi.

**Misollar:**

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + 2}} \text{ integral tekshirilsin}$$

**Yechish:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}}, \quad x^{\frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = 1, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1 \text{ bo'lgani uchun xosmas integral yaqinlashadi.}$$

$$2. \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} dx \text{ integral tekshirilsin.}$$

**Yechish:**

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{x^{\frac{1}{3}} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}};$$

$$x^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} f(x) = 1; \quad \alpha = \frac{1}{3} < 1$$

Demak, berilgan xosmas integral uzoqlashadi.

$$3. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{integral tekshirilsin.}$$

**Yechish:**  $f(x) = e^{-x^2}$ ; Lopital qoidasiga asosan  $\alpha > 0$  da  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \cdot e^{-x^2} = 0$ ,

bo'ladi. Xususiyl holda  $\alpha = 2 > 1$  bo'lganda,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = 0$ , bo'ladi. Demak, berilgan integral yaqinlashadi. Bu Puasson

integrali bo'lib, uning qiymati  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  ga teng.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

### 1.3-§ Ikkinchi jins xosmas integrallar

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada berilgan bo'lib,  $b$  nuqtada chegaralanmagan bo'lsin. Bu holda  $b$  ni maxsus nuqta deyiladi. U vaqtda  $[b - \varepsilon; b]$  kesmada  $f(x)$  funksiya integrallanuvchi bo'lmaydi, bunda  $\varepsilon > 0$   $[a, b - \varepsilon]$  kesmada  $f(x)$  funksiyaning integrallanuvchi (demak, chegaralangan) bo'lsin deb qaraymiz. Agar ushbu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = J \quad (13)$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda bu limitni  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesma bo'yicha olingan ikkinchi jins xosmas integral deyiladi va

$$J = \int_a^b f(x) dx \quad (14)$$

kabi belgilanadi. Bu holda (14) integral mavjud va chekli bo'lsa yaqinlashuvchi deyiladi. Agar (13) limit mavjud bo'lmasa yoki cheksizga teng bo'lsa, u holda (14) integral mavjud emas yoki uzoqlashuvchi deyiladi.

Xuddi shuningdek, agar  $a$  maxsus nuqta bo'lib,  $f(x)$  funksiya  $[a+\varepsilon; b]$  kesmada integrallanuvchi bo'lsa, bunda  $\varepsilon > 0$ , u holda ikkinchi jins hosmas integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (15)$$

ko'rinishda aniqlanadi. Agar  $f(x)$  funksiya  $c$  nuqtada chegaralanmagan bo'lsa, bunda  $a < c < b$ , u holda ta'rif bo'yicha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

deb olinadi. Oxirgida chap tomondagi integral mavjud bolishi uchun o'ng tomondagi integrallar mavjud bo'lishi kerak. Agar  $a$  va  $b$  nuqtalar maxsus nuqtalar bo'lsa, u holda ikkinchi jins xosmas integral

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ko'rinishda aniqlanadi, bunda integral  $c$  nuqtaning tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi.

### Misollar.

1. Ikkinchi jins xosmas integral hisoblansin:  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

**Yechish:**  $x=1$  maxsus nuqta. Ta'rifga asosan:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin (1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Demak xosmas integral yaqinlashadi.

2.  $\alpha > 0$  ni qanday qiymatlarida ushbu ikkinchi jins xosmas integral  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

yaqinlashadi?

**Yechish:**  $x=0$  maxsus nuqta. Ta'rifga asosan:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{agar } \alpha < 1 \text{ bo'lsa;} \\ \infty, & \text{agar } \alpha > 1 \text{ bo'lsa;} \end{cases},$$

$\alpha = 1$  bo'lganda

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\ln \cdot \varepsilon) = \infty$$

Demak, xosmas integral  $\alpha < 1$  bo'lganda yaqinlashadi,  $\alpha \geq 1$  bo'lganda uzoqlashadi.

3. Ushbu ikkinchi jins xosmas integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\rho} \quad (16)$$

$\rho > 0$  ning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lishi tekshirilsin.

**Yechish:**  $x=b$  maxsus nuqta. Ta'rifga asosan:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\rho} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\rho} = \frac{1}{\rho-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b-x)^{1-\rho} \Big|_a^{b-\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{\rho-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^{1-\rho} - (b-a)^{1-\rho}] = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} \cdot (b-a)^{1-\rho}, & \text{agar } \rho < 1 \text{ bo'lsa} \\ \infty, & \text{agar } \rho > 1 \text{ bo'lsa} \end{cases} \end{aligned}$$

$\rho = 1$  bo'lganda

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{b-a}{\varepsilon} = \infty$$

Demak, xosmas integral  $\rho < 1$  bo'lsa, yaqinlashadi;  $\rho \geq 1$  bo'lsa uzoqlashadi.

4. Ushbu ikkinchi jins xosmas integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\rho} \quad (\rho > 0) \quad (17)$$

$\rho < 1$  bo'lganda yaqinlashuvchi,  $\rho \geq 1$  bo'lganda uzoqlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

Chegaralanmagan funksiya dan olingan integralning yaqinlashishi va uzoqlashishi haqidagi yetarli belgini ifodalovchi teoremani isbotlaymiz.

**Teorema:** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a,b)$  yarim segmentda uzluksiz va manfiy bo'lmasin, hamda  $x=b$  nuqtada ikkinchi jins uzilishga ega bo'lsin, yani

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty.$$

U vaqtda:

1) agar shunday  $M>0$  va  $\rho < 1$  o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib,  $[a,b)$  yarim segmentda

$$0 \leq f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^\rho} \quad (18)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx \quad (19)$$

ikkinchi jins xosmas integral yaqinlashadi;

2) agar  $M>0$  va  $\rho \geq 1$  o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib,  $[a,b)$  yarim segmentda

$$f(x) \geq \frac{M}{(b-x)^\rho} \quad (20)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (19) integral uzoqlashadi

**Isbot.** Avval teoremaning birinchi qismini isbotlaymiz. (18) tengsizlikka asosan.

$$\hat{O}(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq M \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\rho} < M \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\rho} = \frac{M(b-a)^{1-\rho}}{1-\rho} (\rho < 1)$$

bo'ladi. Demak,  $\hat{O}(\varepsilon)$  funksiya yuqoridan chegaralangan. Shu bilan birga  $\hat{O}(\varepsilon)$  funksiya o'suvchi bo'ladi. Shuning uchun  $\hat{O}(\varepsilon)$  funksiya  $\varepsilon \rightarrow 0$  da chekli limitga ega boladi. Bu (19) integralning yaqinlashuvchi ekanligini anglatadi. Ikkinchi holda (20) tengsizlikka asosan.

$$\hat{O}(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \geq M \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\rho}$$

bo'ladi. 3-misolga asosan  $\rho \geq 1$  bo'lganda (19) integral uzoqlashadi. Teorema isbotlandi. Bu teoremadan amaliy mashg'ulotlarda qo'llaniladigan ikkinchi

jins xosmas integralning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini aniqlab beruvchi quyidagi yetarli belgi kelib chiqadi

**Teorema:** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b)$  yarim segmentda uzluksiz va manfiy bo'lmasin, hamda  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$  bo'lsin. U vaqtda agar  $\rho < 1$  bo'lganda

$\lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^\rho f(x) = J$  limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda (19) integral

yaqinlashadi;  $\rho \geq 1$  bo'lganda chekli yoki cheksiz

$\lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^\rho f(x) = J \neq 0$  limit mavjud bo'lsa u holda (19) integral

uzoqlashadi.

**Isbot:** Birinchi holda  $(b-x)^\rho f(x)$  ning  $x \rightarrow b$  dagi limiti  $J$  ga teng bo'ladi, bunda  $J$  son nol ham bo'lishi mumkin.  $M > J$  musbat sonni olamiz, u vaqtda

$(b-x)^\rho f(x)$  ko'paytma  $x$  ning  $b$  ga yaqin qiymatlarida  $M$  dan kichik bo'ladi, ya'ni  $(b-x)^\rho f(x) < M$ ,  $a < c \leq x < b$  bunda  $c$  son  $b$  ga shunchalik yaqin qilib tanlanadiki, natijada  $[c, b)$  yarim segmentda oxirgi tengsizlik o'rinli bo'lsin. Bu tengsizlikdan

$$f(x) < \frac{M}{(b-x)^\rho}, \quad c \leq x < b \quad (\rho < 1)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib (18) tengsizlik kelib chiqadi va isbotlangan

teoremaga asosan ushbu  $\int_c^b f(x) dx$  integral yaqinlashadi. U holda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{tenglikdan (19) integralning yaqinlashishi}$$

kelib chiqadi.

Ikkinchi holda  $(b-x)^\rho f(x)$  ko'paytma  $x \rightarrow b$  da  $J > 0$  limitga ega. Shunday musbat  $M < J$  sonni tanlaymiz. Bu holda  $x$  ning  $b$  ga yaqin

qiymatlarida  $(b-x)^{\rho} f(x) > M$ ,  $a < c \leq x < b$ , tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bundan  $[c,b)$  yarim segmentda  $f(x) > \frac{M}{(b-x)^{\rho}}$ ,

tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi, bunda  $\rho \geq 1$ . Demak (20) tengsizlik

hosil bo'ladi. Isbotlangan teorema asosan  $\int_c^b f(x)dx$  -integral uzoqlashadi.

Bu esa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

integralning uzoqlashuvchi ekanligini isbotlaydi. Teorema isbot bo'ldi.

**Eslatma.** Bu yetarli belgi  $x=a$  nuqta  $f(x)$  funksiya uchun maxsus nuqta bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi. Bu holda  $x \rightarrow a$  da  $(x-a)^{\rho} f(x)$  ko'paytmaning limitini topish kerak. Agar bu ko'paytma  $x \rightarrow a$  da chekli limitga ega bo'lsa,  $\rho < 1$  bo'lganda (19) integral yaqinlashadi. Agar  $\rho \geq 1$  bo'lgan holda ko'paytma  $x \rightarrow a$  da chekli yoki cheksiz limitga ega bo'lsa, u holda (19) integral uzoqlashadi.

**Misollar:**

1. Ushbu integral tekshirilsin:  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ .

**Yechish:**  $x=1$  maxsus nuqta.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}; \quad \text{bundan}$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \rho = \frac{1}{2} < 1$$

bo'lgani uchun integral yaqinlashadi.

2. Ushbu integral tekshirilsin:  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$  Yechish:  $x=1$  maxsus nuqta

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}; \quad (1-x) f(x) = \frac{1}{1+x+x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}; \quad \rho = 1 \text{ bo'lgani uchun integral uzoqlashadi.}$$

### 1.4-§ Ikkinchi jins xosmas integralni hisoblash.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b)$  yarim segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib,  $x=b$  nuqta funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsin. U vaqtda  $f(x)$  uchun ana shu yarim segmentda boshlang'ich funksiya  $F(x)$  mavjud bo'lib, Nyuton-Leybnits formulasiga asosan

$$\int_a^b f(x) dx = F(b - \varepsilon) - f(a) \quad (21)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan esa ushbu  $\int_a^b f(x) dx$  ikkinchi jins xosmas integral mavjud bo'lishi uchun ushbu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon) = F(b) \text{ limitning mavjud va chekli bo'lishi talab etiladi.} \quad (21)$$

tenglikda  $\varepsilon \rightarrow 0$  da limitga o'tib, ushbu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (22)$$

Nyuton-Leybnits formulasini hosil qilamiz.

**Eslatma:** (22) formula maxsus nuqta integrallash oraliq'ining ichki nuqtasi bo'lganda ham o'rinli bo'ladi. Shuni esda saqlash mumkinki, boshlang'ich funksiya  $[a; b]$  segmentda uzluksiz bo'lishi kerak. Ana shunday boshlang'ich funksiyaning mavjud bo'lishi xosmas integralning ham mavjud bo'lishini ta'minlaydi. Agar boshlang'ich funksiya  $[a; b]$  segmentning bitta nuqtasida ikkinchi jins uzilishga ega bo'lsa, u holda xosmas integral mavjud bo'lmaydi. Shunday qilib chegaralanmagan funksiya uchun olingan integralni Nyuton-Leybnits formulasi bo'yicha hisoblash uchun  $F(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda uzluksiz bo'lishi kerak, hamda  $f(x)$  chekli bo'lgan nuqtalarda  $F'(x) = f(x)$  tenglik bajarilishi zarur

1- misol. Ushbu

$$\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

integral hisoblansin.

**Yechish:**  $x=0$  maxsus nuqta. Boshlang'ich funksiya  $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$  integrallash oraligi  $[-1,27]$  da uzluksiz. Shuning uchun (22) formulani qo'llash mumkin:

$$\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^{27} = 3(3+1) = 12$$

2-misol. Integralning yaqinlashishi tekshirilsin  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .

**Yechish:**  $x=0$  maxsus nuqta. Boshlang'ich funksiya  $F(x) = -\frac{1}{x}$   $x=0$

nuqtada ikkinchi jins uzulishga ega. Shuning uchun xosmas integral uzoqlashadi va qiymati cheksizga teng. Agar biz buni e'tiborga olmay (22) formulani tatbiq qilsak

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2 \text{ noto'g'ri xulosa kelib chiqadi.}$$

### 1. 5-§ Absolyut va shartli yaqinlashuvchi xosmas integrallar.

Quyidagi birinchi jins xosmas integralni qaraymiz:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

Ma'lumki, (1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $F(A) = \int_a^A f(x) dx$

funksiya  $A \rightarrow +\infty$  da chekli limitga ega bo'lishi kerak.  $F(A)$  funksiya  $A \rightarrow +\infty$  da chekli limitga ega bo'lishi uchun quyidagi Koshi shartining bajarilishi zarur va yetarlidir:  $\forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $\exists B > \alpha$  bo'lsaki,  $B$  dan katta bo'lgan ixtiyoriy  $A_1$  va  $A_2$  sonlar uchun

$$\left| F(A_2) - F(A_1) \right| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Xosmas integral yaqinlashishi uchun Koshi kriteriysi (1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $\forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $\exists B > \alpha$

$$\text{bo'lsaki, } B \text{ dan katta bo'lgan ixtiyoriy } A_1 \text{ va } A_2 \text{ sonlar uchun } \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (2)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir. Aytaylik  $f(x)$  funksiya  $[a, A]$  kesmada integrallanuvchi bo'lsin.

**1-tarif.** Agar  $\int_a^{+\infty} [f(x)] dx$  (3) integral yaqinlashuvchi bo'lsa (1) xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

**2-tarif.** Agar (1) integral yaqinlashuvchi bo'lib, (3) integral uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (1) xosmas integral shartli yaqinlashadi deyiladi.

**1-teorema.** Aytaylik  $[a, +\infty)$  oraliqda

$$|f(x)| \leq g(x) \quad (4)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin U vaqtda

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (5)$$

integralning yaqinlashishidan (1) integralning ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

**Isbot.** Aytaylik (5) integral yaqinlashuvchi bo'lsin. U vaqtda Koshi-kriteriysiga asosan

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx \right| < \varepsilon \quad (6)$$

tengsizlik bajariladi. (4) ga asosan

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx \right| < \varepsilon$$

kelib chiqadi va Koshi-kriteriysiga asosan (1) integral yaqinlashadi.

**Eslatma.** 1-teoremada  $g(x) = |f(x)|$  deb olinsa xosmas integralning absolyut yaqinlashishidan integralning o'zini yaqinlashishi kelib chiqadi. Xosmas integralning shartli yaqinlashuvchi bo'lishi haqidagi teoremani keltiramiz.

**2-teorema** (Dirixle-Abel belgisi). Aytaylik, quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

1)  $f(x)$  funksiya  $[a; +\infty)$  oraliqda uzluksiz va chegaralangan  $F(x)$  boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsin;

2)  $g(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda aniqlangan bo'lib, monoton o'suvchi bo'lmasin, hamda  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  bo'lsin;

3)  $g'(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  da uzluksiz bo'lsin. U vaqtda

$$\int_a^{+\infty} g(x) f(x) dx \quad (7)$$

xosmas integral yaqinlashadi.

**Isbot:** Ixtiyoriy  $[A_1, A_2]$  kesmada, bunda  $A_2 > A_1$ ,

$[A_1, A_2] \subset [a, +\infty)$ , ushbu  $\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx$  integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = g(x), du = g'(x)dx \\ dv = f(x)dx, v = F(x) \end{array} \right\} = F(x)g(x) \Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \quad (8)$$

Teorema shartiga ko'ra boshlang'ich funksiya  $F(x)$  chegaralangan, ya'ni  $|F(x)| \leq K$ .  $g(x)$  funksiya esa o'suvchi bo'lmasdan  $x \rightarrow +\infty$  da nolga yaqinlashganligidan  $g(x) \geq 0, g'(x) \leq 0$  kelib chiqadi, (8) ni baholaymiz:

$$\begin{aligned} \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx &\leq K[g(A_1) + g(A_2)] + K \int_{A_1}^{A_2} (-g'(x))dx = \\ &= K[g(A_1) + g(A_2)] + K[-g(A_2) + g(A_1)] = 2Kg(A_1) \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Demak,

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \leq 2kg(A_1) \quad (9)$$

$\varepsilon$  - ixtiyoriy musbat son bo'lsin.  $x \rightarrow +\infty$  da  $g(x) \rightarrow 0$  bo'lgani uchun  $\varepsilon$

bo'yicha  $B$  sonni shunday tanlaymizki, natijada  $A_1 \geq B$  bo'lsa,  $g(A_1) < \frac{\varepsilon}{2K}$

tengsizlik bajariladi. Bunga asosan (9) dan

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon$$

kelib chiqadi va Koshi-Kriteriysiga asosan (7) integralning yaqinlashishi ta'minlanadi. Teorema isbot bo'ldi. (Peter Gustav Lejen-Dirixle-nimis matematigi, 1805- 1859; Nilrs Genrix-Abelr-Norveg matematigi, 1802-1829)

1-misol. Ushbu

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0$$

integralni tekshiramiz.  $f(x) = \sin x, g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  desak, 2-teorema shartlari bajariladi. Shuning uchun integral yaqinlashadi.

2-misol. Frenel integralini qaraymiz:

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_1^{\infty} x \cdot \sin x^2 \frac{1}{x} dx \quad \text{integralda}$$

$$f(x) = x \cdot \sin x^2; \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

desak, 2-teorema shartlari bajariladi. Shuning uchun Frenel integrali yaqinlashadi.

3-misol  $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$  ham yaqinlashadi. Frenel integrallari fizikaning yorug'lik hodisalari va uning qonunlarini tekshiriladigan bo'lim-optikada tatbiq qilinadi. (Ogusten Jan-Frenel-Fransuz fizigi, 1788-1827)

4-misol  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$  integralning absalyut yaqinlashishi tekshirilsin. Ixtiyoriy

$x \in [1, \infty)$  uchun

$$\left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| = \frac{|\sin x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

bo'ladi. Aniqki,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

integral yaqinlashadi. Bundan

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2} dx$$

integralning ham yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak, berilgan integral absolyut yaqinlashadi.

5-misol. Ushbu

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

integral absolyut yaqinlashadi. Haqiqatdan ham ixtiyoriy  $x \in [1; \infty]$  uchun

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{|\cos x|}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

tengsizlik o'rinli va

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

integral yaqinlashadi. Demak, berilgan integral absolyut yaqinlashadi.

Umuman,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

integral yaqinlashishidan

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

integralning yaqinlashishi kelib chiqmaydi.

6-misol. Ushbu

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

integral tekshirilsin. Berilgan integralni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx + \int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \quad a > 0$$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$  funksiya  $[0, a]$  oralig'ida uzluksiz va chegaralangan bo'lganligi

uchun birinchi integral mavjud.  $f(x) = \sin x, g(x) = \frac{1}{x}$  desak, Dirixle-Abel teoremasiga asosan ikkinchi integral ham yaqinlashadi. Demak, berilgan integral yaqinlashadi. Barcha  $x$  lar uchun

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$

tegizlik o'rinli.  $\int_a^\infty \frac{dx}{x}$  - uzoqlashadi;  $\int_a^\infty \frac{\cos^2 x}{x} dx$  - yaqinlashadi. Shunday qilib,

$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$  integral uzoqlashadi. Berilgan integral shartli yaqinlashadi.

Amaliyotda tadbiq qilinadigan teoremani keltiramiz.

3-teorema. Aytaylik  $f(x)$  va  $\varphi(x)$  funksiyalar  $[a, +\infty)$  oraliqda musbat bo'lsin.

Agar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K,$$

bunda  $0 < K < \infty$  bo'lsa, u holda

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad \text{va} \quad \int_a^\infty \varphi(x) dx$$

integrallar bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

7-misol

$$\int_a^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x + 1} dx$$

integral tekshirilsin.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 5x + 1}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{desak,}$$

u holda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4 + 5x + 1} = 1$$

bo'ladi.  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  yaqinlashuvchi integral bo'lganligi uchun berilgan integral ham yaqinlashadi.

**4-teorema.** Aytaylik  $f(x)$  va  $\varphi(x)$  funksiyalar  $[a,b]$  kesmada uzluksiz bo'lib,  $x=c$  nuqtada chegaralanmagan bo'lsin. Agar chekli va nolga teng bo'lmagan

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = q \neq 0$ . limit mavjud bo'lsa, u holda  $\int_a^b f(x)dx$  va  $\int_a^b \varphi(x)dx$  integrallar

bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

**8-misol.**

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{|\ln x|}$$

integralning yaqinlashishi tekshirilsin. Integral ostidagi  $f(x) = \frac{1}{|\ln x|}$  funksiya

$x \rightarrow 1$  da cheksizga intiladi.  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$  deb, ushbu limitni hisoblaymiz

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{|\ln x|} = 1$$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{|1-x|}$  integral uzoqlashadi. Demak, berilgan integral ham uzoqlashadi.

Agar  $\int_a^b |f(x)|dx$  yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\int_a^b f(x)dx$  -absalyut yaqinlashadi deyiladi.

Agar  $\int_a^b |f(x)|dx$  -yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $\int_a^b f(x)dx$  integral ham yaqinlashadi. Bu tasdiqning teskarisi o'rinli emas.

**9-misol.** Ushbu

$$\int_0^1 \cos x \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

integralning absalyut yaqinlashuvchiligini ko'rsating. Aniqki,

$$\left| \cos x \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

bo'lib,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

xosmas integral yaqinlashadi. U holda

$$\int_0^1 \left| \tilde{f}(x) \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx$$

integralning ham yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan integral absolyut yaqinlashadi.

## II-BOB. XOSMAS INTEGRALLARNING BA'ZI TADBIQLARI.

### 2.1-§ Beta funksiya va uning xossalari.

Biz

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (1)$$

xosmas untegralni qaradik. Integral ostidagi funksiya uchun

1)  $a < 1$ ,  $b \geq 1$  bo'lganda  $x=0$  maxsus nuqta 2)  $a \geq 1$ ,  $b < 1$  bo'lganda  $x=1$  maxsus nuqta. 3)  $a < 1$   $b < 1$  bo'lganda  $x=1$  va  $x=0$  nuqtalar maxsus nuqtalar bo'ladi. Binobarin (1) chegaralanmagan funksiyaning xosmas integralidir. Demak, (1) integral- parametr ga bog'liq xosmas integraldir. (1) xosmas integralning  $a > 0$ ,  $b > 0$  da ya'ni

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0, +\infty)\}$$

to'plamda yaqinlashuvchi bo'lishi ko'rsatildi.

**1- ta'rif:** (1) integral Beta funksiya yoki birinchi tur Eyler integrali deb ataladi va  $B(a; b)$  kabi belgilanadi, demak

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

Shunday qilib  $B(a, b)$  funksiya  $R^2$  fazodagi

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0; +\infty), b \in (0; +\infty)\}$$

to'plamda berilgandir. Endi  $B(a, b)$  funksiyaning xossalari ni o'rganaylik.

$1^0$  (1) integral

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

ixtiyoriy

$$M_0 = \{(x, b) \in R^2 : a \in [a_0; +\infty), b \in [b_0; +\infty)\} \quad a_0 > 0, \quad b_0 > 0)$$

to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

**Isbot:** Berilgan integralni tekis yaqinlashuvchilikka tekshirish uchun uni quyidagicha

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx .$$

yozi olamiz. Ravshanki,  $a > 0$  bo'lganda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx$$

integral yaqinlashuvchi,  $b > 0$  bo'lganda

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{b-1} dx$$

integral yaqinlashuvchi. Parametr  $a$  ning  $a \geq a_0$  ( $a_0 > 0$ ) qiymatlari va  $\forall b > 0$ ,

$\forall x \in (0; \frac{1}{2})$  uchun

$$x^{a-1} (1-x)^{b-1} \leq x^{a_0-1} (1-x)^{b-1} \leq 2 x^{a_0-1}$$

bo'ladi. Veyrshtass alomatidan foydalanib

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

integralning tekis yaqinlashuvchi ekanligini topamiz. Shuningdek, parametr  $b$

ning  $b \geq b_0$  ( $b_0 > 0$ ) qiymatlari va  $\forall a > 0$   $\forall x \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right)$  uchun

$$x^{a-1} (1-x)^{b-1} \leq x^{a-1} \cdot (1-x)^{b_0-1} \leq 2 (1-x)^{b_0-1}$$

bo'ladi va yana Veyrshtass alomatiga ko'ra

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx$$

integralning tekis yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Demak,

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

integral  $a \geq a_0 > 0$  va  $b \geq b_0 > 0$  bo'lganda, ya'ni

$$M_0 = \{(a, b) \in R^2 : a \in [a_0, +\infty), b \in [b_0, +\infty)\}$$

to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

**Eslatma.**  $B(a, b)$  ning  $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0; +\infty), b \in (0; +\infty)\}$  to'plamda notekis yaqinlashuvchiligini ko'rish qiyin emas.

2<sup>0</sup>.  $B(a, b)$  funksiya

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty), b \in (0; +\infty)\}$$

to'plamda uzluksiz funksiyadir. Haqiqatan ham,

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

integralning  $M_0$  to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lishidan va integral ostidagi funksiyaning  $\forall (a, b) \in M$  da uzluksizligidan teorema asosan  $B(a, b)$  funksiya

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0; +\infty), b \in (0; +\infty)\}$$

to'plamda uzluksiz bo'ladi.

3<sup>0</sup>.  $\forall (a, b) \in M$  uchun  $B(a, b) = B(b, a)$  bo'ladi. Darhaqiqat

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

integralda  $x=1-t$  almashtirish bajarilsa, unda

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 t^{b-1} \cdot (1-t)^{a-1} dt = B(b, a)$$

bo'lishini topamiz.

4<sup>0</sup>.  $B(a, b)$  funksiya quyidagicha ham ifodalanadi;

$$B(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt \quad (2)$$

Haqiqatan ham, (1) integralda  $x = \frac{t}{1+t}$  almashtirish bajarilsa, u holda

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1} \cdot \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{b-1} \cdot \frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt$$

bo'ladi. Xususan,  $b = 1-a$  ( $0 < a < 1$ ) bo'ganda

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (3)$$

bo'ladi (3) munosabatdan quyidagini topamiz:

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \pi$$

$$5^0. \forall (a, b) \in M' (M' = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0; +\infty), b \in (1; +\infty)\})$$

uchun

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \quad (4)$$

bo'ladi

(1) integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{b-1} d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \frac{1}{a} x^a (1-x)^{b-1} \Big|_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx =$$

$$= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx$$

(a>0, b>1). Agar

$$x^a (1-x)^{b-2} = x^{a-1} [1 - (1-x)] (1-x)^{b-2} =$$

$$= x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-2} - x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \quad \text{ekanligini} \quad \text{e'tiborga} \quad \text{olsak,} \quad \text{u} \quad \text{holda}$$

$$\int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-2} dx - \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = B(a; b-1) - (a, b) \quad \text{bo'lib,}$$

natijada

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} [B(a, b-1) - B(a, b)]$$

bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \quad (a > 0, b > 1)$$

bo'lishini topamiz. Xuddi shunga o'xshash  $\forall (a, b) \in M''$  uchun

$$(M'' = \{(a, b) \in R^2 : a \in (1; +\infty), b \in (0; +\infty)\})$$

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b)$$

bo'ladi. Xususan,  $b = n (n \in \mathbb{N})$  bo'lganda

$$B(a, b) = B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} B(a, n-1)$$

bo'lib (4) formulani takror qo'llab, quyidagini topamiz.

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-1} - \frac{1}{n+1} B(a, 1).$$

Ravshanki,

$$B(a, 1) = \int_a^1 x^{a-1} \cdot dx = \frac{1}{a}.$$

Demak,

$$B(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1)}{a(a+1)(a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)} \quad (5).$$

Agar (5) da  $a = m (m \in \mathbb{N})$  bo'lsa, u holda

$$B(m, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{m(m+1) \cdot \dots \cdot (m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

## 2.2-§ Gamma funksiya va uning xossalari

Biz

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (6)$$

xosmas integralni qaradik. Bu chegaralanmagan funksiyaning ( $a < 1$  da  $x=0$  maxsus nuqta) cheksiz oraliq bo'yicha olingan xosmas integrali bo'lishi bilan birga  $a$  ga (parametr) ham bog'liqdur. O'sha yerda (6) xosmas integralning  $a > 0$  da,  $(0; +\infty)$  yaqinlashuvchi,  $a \leq 0$  da, ya'ni  $[-\infty; 0]$  da uzoqlashuvchi bo'lishi ko'rsatildi.

**2-ta'rif:** (6) integral gamma funksiya yoki ikkinchi tur Eyler integrali deb ataladi va  $\Gamma(a)$  kabi belgilanadi. Demak,

$$\tilde{A}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Shunday qilib,  $\Gamma(a)$  funksiya  $(0; +\infty)$  da berilgandir. Endi  $\Gamma(a)$  funksiyaning xossalari o'rganaylik. 1-xossa. (6) integral

$$\tilde{A}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

ixtiyoriy  $[a_0, b_0]$  ( $0 < a_0 < b_0 < +\infty$ ) oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

**Isbot:** (6) integralni quyidagi 2-qismga ajratib,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

ularning har birini alohida-alohida tekis yaqinlashuvchilikka tekshiramiz. Agar

$a_0$  ( $a_0 > 0$ ) sonni olib, parametr  $a$  ning  $a \geq a_0$  qiymatlari qaralsa, unda barcha  $x \in (0; 1]$  uchun

$$x^{a-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^{1-a_0}}$$

bo'lib, ushbu Veyrshtass alomatiga ko'ra

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$$

integral tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar  $b_0$  ( $b_0 > 0$ ) sonni olib, parametr  $a$  ning  $a \leq b_0$  qiymatlari qaratiladigan bo'lsa, unda barcha  $x \geq 1$  uchun

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{b_0-1} e^{-x} \leq \left(\frac{b_0+1}{e}\right)^{b_0+1} \cdot \frac{1}{x^2}$$

bo'lib,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

integralning yaqinlashuvchiligidan, yana Veyrshtass alomatiga ko'ra

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

integralning tekis yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz. Shunday qilib,

$$\tilde{A}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

integral  $[a, b_0]$  ( $0 < a_0 < b_0 < +\infty$ ) da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

**Eslatma:**  $\tilde{A}(a)$  ning  $(0; +\infty)$  da notekis yaqinlashuvchiligini ko'ramiz.

**2-xossa.**  $\tilde{A}(a)$  funksiya  $(0; +\infty)$  da uzluksiz hamda barcha tartibdagi uzluksiz xosilalarga ega va

$$\tilde{A}^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**Isbot:**  $\forall a \in (0; +\infty)$  nuqtani olaylik. Unda shunday  $[a_0; b_0]$  ( $0 < a_0 < b_0 < +\infty$ ) oraliq topiladiki,  $a \in [a_0; b_0]$  bo'ladi. Ravshanki,

$$\tilde{A}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

integral ostidagi  $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$  funksiya

$$M = \{(x, a) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0; +\infty), a \in (0; +\infty)\}$$

to'plamda uzluksiz funksiya. (6) integral esa  $[a_0; b_0]$  da tekis yaqinlashuvchi. U holda teorema asosan  $\Gamma(a)$  funksiya  $[a_0; b_0]$  da binobarin,  $a$  nuqtada uzluksiz bo'ladi. (6) integral ostidagi  $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$  funksiya

$$f'_a(x, a) = x^{a-1} \cdot e^{-x} \ln x$$

hosilasining  $M$  to'plamda uzluksiz funksiya ekanligini payqash qiyin emas. Endi

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x, a) dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} \ln x dx$$

integralni  $[a_0; b_0]$  da tekis yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz. Ushbu

$$\int_0^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} \ln x dx$$

integral ostidagi  $x^{a-1} e^{-x} \ln x$  funksiya uchun

$$0 < x \leq 1 \text{ da } \left| x^{a-1} e^{-x} \ln x \right| \leq x^{a_0-1} |\ln x|$$

o'rinlidir  $\Psi_1(x) = x^{\frac{a_0}{2}} |\ln x|$  funksiya  $0 < x \leq 1$  da chegaralanganligidan va

$\int_0^1 x^{\frac{a_0}{2}-1} dx$  integralning yaqinlashuvchiligidan

$$\int_0^1 x^{a-1} |\ln x| dx$$

ning ham yaqinlashuvchi bo'lishini va Veyrshtass alomatiga ko'ra qaralayotgan  $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$  integralning tekis yaqinlashuvchiligini topamiz.

Shunga o'xshash quyidagi

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$$

integralda, integral ostidagi  $x^{a-1} \cdot e^{-x} \ln x$  funksiya uchun barcha  $x \geq 1$  da



ekanligini topamiz. Xususan,  $a=1$  bo'lganda

$$\tilde{A}(n+1) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot \tilde{A}(1)$$

bo'ladi. Agar

$$\tilde{A}(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda  $\tilde{A}(n+1) = n!$  ekanligi kelib chiqadi. Yana, (7) formuladan foydalanib  $\tilde{A}(2) = \tilde{A}(1) = 1$  bo'lishini topamiz.

**4- xossa.**  $\Gamma(a)$  funksiyani o'zgarish xarakteri  $\Gamma(a)$  funksiya  $(0; +\infty)$  oraliqda berilgan bo'lib, shu oraliqda istalgan tartibli hosilaga ega. Bu funksiyani  $a=1$  va  $a=2$  nuqtalardagi qiymatlari bir-biriga teng:  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ .  $\Gamma(a)$  funksiyaga Roll teoremasini tatbiq qila olamiz, chunki yuqorida keltirilgan faktlar Roll teoremasi shartlarining bajarilishini ta'minlaydi. Demak, Roll teoremasi ga ko'ra, shunday  $a^* (1 < a^* < 2)$  topiladiki,  $\Gamma(a^*) = 0$  bo'ladi  $\forall a \in (0; +\infty)$  da

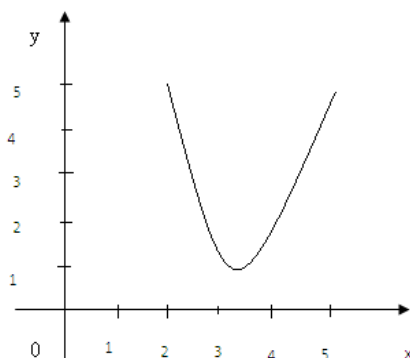
$$\tilde{A}''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0$$

bo'lishi sababli,  $\tilde{A}'(a)$  funksiya  $(0; +\infty)$  oraliqda qat'iy o'suvchi bo'ladi. Demak,  $\tilde{A}'(a)$  funksiya  $(0; +\infty)$  da  $a^*$  nuqtadan boshqa nuqtalarda nolga aylanmaydi, ya'ni

$$\tilde{A}'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} \ln x dx = 0$$

tenglama  $(0; +\infty)$  oraliqda  $a^*$  dan boshqa yechimga ega emas. U holda  $0 < a < a^*$  da  $\tilde{A}'(a) < 0$ ,  $a^* < a < +\infty$  da  $\tilde{A}'(a) > 0$  bo'ladi. Demak,  $\Gamma(a)$  funksiya  $a^*$  nuqtada minimumga ega. Uning minimumi qiymati  $\tilde{A}(a^*)$  ga teng. Taqribiy hisoblash usuli bilan  $a^* = 1,4616\dots$   $\tilde{A}(a^*) = \min \tilde{A}(a) = 0,8856\dots$  bo'lishi topilgan.  $\Gamma(a)$  funksiya  $a > a^*$  da o'suvchi bo'lganligi sababli  $a > n+1 (n \in \mathbb{N})$  bo'lganda  $\tilde{A}(a) > \tilde{A}(n+1) = n!$  bo'lib, undan  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \tilde{A}(a) = +\infty$  bo'lishini topamiz. Ikkinchi tomondan,  $a \rightarrow +0$  da  $\tilde{A}(a+1) \rightarrow \tilde{A}(1) = 1$  hamda

$\tilde{A}(a) = \frac{\tilde{A}(a+1)}{a}$  ekanligidan  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \tilde{A}(a) = +\infty$  kelib chiqadi  $\Gamma(a)$  funksiyaning grafigi:



### 2.3-§ Beta va Gamma funksiyalar orasidagi bog'lanish

Biz quyida  $B(a, b)$  va  $\Gamma(a)$  funksiyalar orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan formulani keltiramiz. Ma'lumki,  $\Gamma(a)$  funksiya  $(0; +\infty)$  da  $B(a, b)$  funksiya esa  $R^2$  fazodagi

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0; +\infty), b \in (0; +\infty)\}$$

to'plamda berilgan.

**Teorema:**  $\forall (a, b) \in M$  uchun

$$B(a, b) = \frac{\tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(b)}{\tilde{A}(a+b)}$$

formula o'rinli.

**Isbot:** Ushbu

$$\tilde{A}(a+b) = \int_0^{+\infty} x^{a+b-1} \cdot e^{-x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

gamma funksiyada o'zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz.

$$x(1+t) \cdot y \quad (t > 0) .$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\tilde{A}(a+b) = \int_0^{+\infty} (1+t)^{a+b-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} \cdot (1+t) dy = (1+t)^{a+b} \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy .$$

Keyingi tenglikdan quyidagini topamiz:

$$\frac{\tilde{A}(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Bu tenglikning har ikki tomonini  $t^{a-1}$  ga ko'paytirib, natijani  $(0; +\infty)$  oraliq bo'yicha integrallaymiz:

$$\tilde{A}(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy \right] \cdot t^{a-1} dt.$$

Agar (2) formulaga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = B(a, b)$$

ekanini e'tiborga olsak, unda

$$\tilde{A}(a+b) \cdot B(a, b) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy \right] \cdot t^{a-1} dt \quad (8)$$

bo'ladi. Endi (8) tenglikning o'ng tomonidagi integral  $\tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(b)$  ga teng bo'lishini isbotlaymiz. Uning uchun, avvalo bu integrallarda integrallash tartibini almashtirish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun dastlab teorema shartlari bajarilishini ko'rish kerak. Dastlab  $a > 1$ ,  $b > 1$  bo'lgan holni ko'raylik.  $a > 1$ ,  $b > 1$  da, ya'ni

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \in (1; +\infty), b \in (1; +\infty)\}$$

to'plamda integral ostidagi

$$f(t, y) = y^{a+b-1} t^{a-1} e^{-(1+t)y}$$

funksiya

$$\forall (t, y) \in \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0; +\infty), y \in [0; +\infty)\}$$

da uzluksiz bo'lib,

$$f(t, y) = y^{a+b-1} \cdot t^{a-1} \cdot e^{-(1+t)y} \geq 0$$

bo'ladi. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} f(t, y) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy$$

integral t o'zgaruvchining  $[0; +\infty)$  oraliqda uzluksiz funksiyasi bo'ladi, chunki

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy = \tilde{A}(a+b) \cdot \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}.$$

Ushbu

$$\int_0^{+\infty} f(t, y) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt$$

integral y o'zgaruvchining  $[0; +\infty)$  oraliqdagi uzluksiz funksiyasi bo'ladi, chunki

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dt = \tilde{A}(a) \cdot y^{b-1} \cdot e^{-y}$$

va nihoyat yuqoridagi (8) munosabatga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy \right] dt$$

integral yaqinlashuvchi. U holda teorema asosan

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dt \right] dy$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy \right] dt = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dt \right] dy$$

bo'ladi. O'ng tomondagi integralni hisoblaylik:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy \right] dt &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dt \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-y} \left[ \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot e^{-ty} dt \right] dy = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{y^a} \left[ \int_0^{+\infty} (ty)^{a-1} \cdot e^{-ty} \cdot d(ty) \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{b-1} \cdot e^{-y} \cdot \tilde{A}(a) dy = \tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(b) \quad (9) \end{aligned}$$

Natijada, (8) va (9) munosabatlardan

$$\tilde{A}(a+b) \cdot B(a, b) = \tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(b),$$

ya'ni

$$B(a, b) = \frac{\tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(b)}{\tilde{A}(a+b)} \quad (10)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Biz bu formulani  $a>1$ ,  $b>1$  bo'lgan hol uchun isbotladik. Endi umumiy holni ko'raylik. Aytaylik,  $a>0$ ,  $b>0$  bo'lsin. U holda isbot etilgan (10) formulaga ko'ra

$$B(a+1, b+1) = \frac{\tilde{A}(a+1)\tilde{A}(b+1)}{\tilde{A}(a+b+2)} \quad (11)$$

bo'ladi.  $B(a,b)$  va  $\Gamma(a)$  funksiyalarning xossaligidan foydalanib quyidagini topamiz:

$$B(a+1, b+1) = \frac{a}{a+b+1} \cdot B(a, b+1) = \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot B(a, b),$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(a+1) &= a \cdot \tilde{A}(a), \quad \tilde{A}(b+1) = b \cdot \tilde{A}(b), \quad \tilde{A}(a+b+2) = \\ &= (a+b+1) \cdot \tilde{A}(a+b+1) = (a+b+1)(a+b) \cdot \tilde{A}(a+b). \end{aligned}$$

Natijada (11) formula quyidagi

$$\frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} \cdot B(a, b) = \frac{a \cdot \tilde{A}(a) \cdot b \tilde{A}(b)}{(a+b)(a+b+1) \cdot \tilde{A}(a+b)}$$

ko'rinishga keladi. Bu esa (10) formula  $a > 0, \quad b > 0$  da ham o'rinli ekanligini bildiradi.

**1-natija:**  $\forall a \in (0;1)$  uchun

$$\tilde{A}(a)\tilde{A}(1-a) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (12)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham (10) formulada  $b = 1-a (0 < a < 1)$  deyilsa, unda,

$$B(a, 1-a) = \frac{\tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(1-a)}{\tilde{A}(1)}$$

bo'lib, (3) va  $\tilde{A}(1) = 1$  munosabatlarga muvofiq

$$\tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi} \cdot (0 < a < 1).$$

Odatda (12) formula keltirish formulasi deb ataladi. Xususan, (12) da  $a = \frac{1}{2}$  deb olsak, unda

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{bo'lishini topamiz.}$$

**2- Natija;** Ushbu

$\tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \cdot \tilde{A}(2a) (a > 0)$  (10) formula o'rinlidir. Shuni isbotlaymiz (10) munosabatda  $a=b$  deb

$$B(a, a) = \frac{\tilde{A}(a) \cdot \tilde{A}(a)}{\tilde{A}(a)}$$

bo'lishini topamiz. So'ngra

$$B(a, a) = \int_0^1 [x(1-x)]^{a-1} dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \right]^{a-1} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x\right)^2 \right]^{a-1} dx$$

integralda  $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} \sqrt{t}$  almashtirishni bajarib

$$B(a, a) = 2 \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} (1-t) \right]^{a-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}; a\right)$$

ga ega bo'lamiz. Natijada

$$\frac{\tilde{A}^2(a)}{\tilde{A}(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)$$

bo'ladi. Yana (10) formulaga ko'ra

$$B\left(\frac{1}{2}, a\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} \quad (**) \text{ bo'lib, } (**) \text{ bo'lib}$$

munosabatdan

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a) \quad (13)$$

Odatda (13) formula Lejandr formulasi deb ataladi.

## 2.4-§ Puasson integrali. Frenel integrali.

Ushbu integral

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (1)$$

Puasson integrali deyiladi. Integralni hisoblaymiz  $x = ut; dx = udt$ ; almashtirish qilamiz. (1) ga asosan

$$J = \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} u dt \quad (2)$$

(2)-tenglikning har ikkala tomonini  $e^{-u^2}$  ga ko'paytiramiz.

$$J \cdot e^{-u^2} = \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt \quad (3)$$

(3) tenglikdan U bo'yicha integral olamiz.

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} \cdot u dt = \int_0^{\infty} dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} \cdot u du = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2(-(1+t^2))} \cdot e^{-(1+t^2)u^2} \Big|_0^{\infty} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Demak,

$$\int_0^{\infty} dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} \cdot u du = \frac{\pi}{4}$$

Demak,

$$J^2 = \frac{\pi}{4} \text{ yoki } J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Shunday qilib Puasson integralining qiymati  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  ga teng,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

### Frenel integrali.

Ushbu

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

Frenel integrallari deyiladi. Bu integrallarning tatbiqi fizikaning optika bo'limida uchraydi. Biz shu integrallarni hisoblaymiz.  $x^2 = t, \quad x = \sqrt{t} \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$  almashtirish qilamiz.

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt,$$

Birinchi integralni hisoblaymiz.

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2 \varphi} du$$

bo'lganligi uchun

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t du \quad e^{-kt}$$

yaqinlashish ko'paytuvchini kiritamiz.

$$\int_0^{\infty} e^{-kt} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(k+u^2)t} \cdot \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + (k + u^2)^2}$$

Bunda  $k \rightarrow 0$  da limitga o'tsak,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ \frac{AU + B}{U^2 - \sqrt{2}U + 1} + \frac{CU + D}{U^2 + \sqrt{2}U + 1} \right] dU = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

## 2.5-§ Chiziqli chegarada buziladigan parabolik tipdagi chiziqli tenglama uchun birinchi chegaraviy masala

Hosmas integrallarning tatbiqi sifatida cheksiz sohada chegarada buziladigan chiziqli parabolik tipdagi tenglama uchun birinchi chegaraviy masala yechimining mavjudligini isbotlaymiz.

Chegarada buziladigan parabolik tipdagi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1)$$

tenglama uchun

$$\bar{D} = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x < +\infty\}$$

sohada

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2)$$

$$U(t, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U(t, x) = 0 \quad (3)$$

shartlarda birinchi chegaraviy masalani qaraymiz.

**Ta'rif:**  $\bar{D}$  sohada  $\frac{\partial u}{\partial t}$  va  $\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x})$  hosilalari bilan chegaralangan  $U(t, x)$  funksiyani (1), (2), (3), birinchi chegaraviy masalaning yechimi deyiladi, agar:

1)  $U(t, x)$  funksiya yarim polosa  $\bar{D}$  sohada uzluksiz bo'lsa,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  va  $\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x})$

funksiyalar esa  $t > 0$  bo'lganda uzluksiz bo'lsa;

2)  $x \rightarrow 0$  da  $\left| x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq A_1$ ,  $x > 0$  da  $\left| x^{\frac{3\alpha}{4}} \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq A_2$  munosabatlar o'rinli bo'lsa, bunda

$A_1$  va  $A_2$  lar o'zgarmas sonlar;

3) (1) tenglamani

$$D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, \quad 0 < x < +\infty\}$$

sohada qanoatlantirsa;

4) berilgan (2) va (3) shartlarni oddiy ma'noda qanoatlantirsa. Fure usuliga asosan (1) tenglamaning (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini

$$U(t, x) = X(x)O(t) \quad (4)$$

ko'rinishda izlaymiz. (4) ni (1) ga qo'yib  $X(x)$  va  $Y(t)$  funksiyalarni topish uchun quyidagi oddiy differensial tenglamalarni hosil qilamiz.

$$(x^\alpha X'(x))' + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (5),$$

$$O'(t) + \lambda^2 O(t) = 0 \quad (6).$$

Bunda  $\lambda$  parametr. (4) va (3) lardan

$$X(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} X(x) = 0 \quad (7)$$

chegaraviy shartlar kelib chiqadi.

Shturm –Liuvill tipidagi (5),(7) singulyar masalaning spektri uzluksiz va musbat yarim o'q bilan ustma-ust tushadi.

Ko'rsatish osonki, (5) tenglama Bessel tenglamasiga keltiriladi va uning umumiy yechimi

$$X(x, \lambda) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\rho} \left( \frac{2\lambda}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) C_1 + C_2 J_{-\rho} \left( \frac{2\lambda}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) x^{\frac{1-\alpha}{2}} =$$

$$= x^{\frac{1-\alpha}{2}} \left[ C_1 J_{\rho} \left( \frac{2\lambda}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) + C_2 J_{-\rho} \left( \frac{2\lambda}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) \right],$$

bunda  $J_{\rho}(z) - \rho$  tartibli birinchi jins Bessel funksiyasi,  $\rho = \frac{1-\alpha}{2}$ ,  $C_1, C_2$  lar

ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. (7) shartlarni e'tiborga olib qulaylik uchun

$$\tilde{N}_1 = 1 \text{ deb, ushbuni } X(x, \lambda) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\rho} \left( \frac{2\lambda}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) \quad (8)$$

hosil qilamiz. (6) tenglamani umumiy yechimi

$$\dot{O}(t) = C_3 e^{-\lambda^2 t}$$

bo'ladi, bunda  $\tilde{N}_3$  o'zgarmas son.

Shunday qilib (5) tenglamaning (3) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$U_{\lambda}(t, x) = a(\lambda) X(x, \lambda) e^{-\lambda^2 t}$$

funksiyalardan iborat bo'ladi. Quyidagi funksiyani tuzamiz:

$$U(t, x) = \int_0^{\infty} U_{\lambda}(t, x) d\lambda = \int_0^{\infty} a(\lambda) X(x, \lambda) e^{-\lambda^2 t} d\lambda \quad (9)$$

Agar (1) tenglamaga kiruvchi xosilalarni (9) integral orqali hisoblash mumkin bo'lsa, u holda (9) funksiya (1) tenglamani qanoatlantiradi. (9) dagi  $a(\lambda)$  ni shunday aniqlaymizki, natijada (9) funksiya (1) tenglamani, (2) boshlang'ich shartni va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. (2) va (9) lardan

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} a(\lambda) X(x, \lambda) d\lambda \quad (10)$$

kelib chiqadi.

Boshlang'ich funksiyani qanday shartlarda Fure-Xonkel integrali orqali ifodalashni ta'minlaydigan lemmani isbotlaymiz.

**1-Lemma.** Agar boshlang'ich funksiya  $\varphi(x)$ :

- 1) barcha  $x \geq 0$  lar uchun ikkinchi tartibli uzluksiz xosilaga ega bo'lsa;
- 2)  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 0$ ,
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{\alpha}{4}} \varphi(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3\alpha}{4}} \varphi'(x) = 0$ ,
- 4)  $x^{-\frac{\alpha}{4}} \varphi(x)$ ,  $x^{\frac{\alpha}{4}} \varphi'(x)$ ,  $x^{-\frac{\alpha}{4}} (x^{\alpha} \varphi'(x))' \in L(0, \infty)$  bo'lsa, u holda xosmas integral.

$$\int_0^{\infty} a(\lambda) X(x, \lambda) d\lambda,$$

bunda

$$a(\lambda) = \frac{2\lambda}{2-\alpha} \int_0^{\infty} X(x, \lambda) \varphi(x) dx,$$

barcha  $x \geq 0$  uchun absolyut va tekis yaqinlashadi va demak (10) tenglik o'rinlidir.

**Isbot:** Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\frac{2}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}} = y, \quad x^{-\frac{\alpha}{2}} dx = dy,$$

$$\psi(y) = \left(\frac{2-\alpha}{2} y\right)^{-\rho} \varphi\left[\left(\frac{2-\alpha}{2} y\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}\right], \quad B(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{\lambda}.$$

U vaqtda (8)ni etiborga olib, (10) dan quyidagini olamiz:

$$\Psi(y) = \int_0^{\infty} \lambda b(\lambda) J_{\rho}(\lambda y) d\lambda, \quad 0 < y < +\infty \quad (11)$$

(11) dan Xankel teoremasiga asosan:

$$b(\lambda) = \int_0^{\infty} y \Psi(y) J_{\rho}(\lambda y) dy, \quad 0 < \lambda < +\infty.$$

Oxirgi integralda  $y = \frac{2}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}}$  almashtirish qilib, ushbuni

$$a(\lambda) = \frac{2\lambda}{2-\alpha} \int_0^{\infty} X(x, \lambda) \varphi(x) dx, \quad (12)$$

topamiz. (12) da  $X(x, \lambda)$  ni  $-\frac{1}{\lambda^2} (x^{\alpha} X'_x(x, \lambda))'$  ga almashtirib, ikki marta bo'laklab integrallab quyidagini olamiz:

$$a(\lambda) = \frac{2\lambda}{2-\alpha} \int_0^{\infty} X(x, \lambda) \varphi(x) dx = -\frac{2}{\lambda(2-\alpha)} \int_0^{\infty} (x^{\alpha} X'_x(x, \lambda))'_x \varphi(x) dx =$$

$$= -\frac{2x^\alpha}{\lambda(2-\alpha)} \left[ X'_x(x, \lambda) \varphi(x) - \varphi'(x) X(x, \lambda) \right] \Big|_0^\infty - \frac{2}{\lambda(2-\alpha)} \int_0^\infty (x^\alpha \varphi'(x)) X(x, \lambda) dx. \quad (13)$$

Bessel funksiyalari uchun quyidagi asymptotik formula o'rinli.  $z$  ning yetarli katta qiymatlari uchun:

$$J_\rho(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \left[ \cos\left(Z - \frac{\rho\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{Z}\right) \right],$$

$$J'_\rho(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \left[ \sin\left(Z - \frac{\rho\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{Z}\right) \right];$$

$z \rightarrow 0$  da esa  $J_\rho(Z) = O(Z^\rho)$ ,  $J'_\rho(Z) = O(Z^{\rho-1})$

Asymptotik formulalarga va lemmaning 2), 3) shartlarga ko'ra (13) ning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi nolga teng bo'ladi. U vaqtda (13) dan

$$|a(\lambda)| \leq \frac{2}{\lambda(2-\alpha)} \int_0^\infty |(x^\alpha \varphi'(x))'| |X(x, \alpha)| dx \quad (14)$$

hosil bo'ladi. Aniqki,

$$|X(x, \lambda)| \leq M = \text{const}, \quad \int_0^\infty \frac{|X(x, \lambda)|}{\lambda} d\lambda \leq M_1 = \text{const}.$$

Shuning uchun

$$\int_0^\infty |a(\lambda) X(x, \lambda)| d\lambda \leq M \int_0^\infty |a(\lambda)| d\lambda \leq \frac{2M}{2-\alpha} \int_0^\infty |(x^\alpha \varphi'(x))'| dx \int_0^\infty \frac{|X(x, \lambda)|}{\lambda} d\lambda \leq \frac{2MM_1K}{2-\alpha}$$

bunda

$$\int_0^\infty |(x^\alpha \varphi'(x))'| dx \leq K = \text{const}.$$

Bulardan (10) tenglikning o'ng tomonidagi integralni barcha  $x \geq 0$  uchun absolyut va tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak, (10) tenglik o'rinlidir, lemma isbotlandi.

Biz (1), (2), (3) masala yechimining mavjudligi to'risidagi teoremani isbotlaymiz.

**Teorema:** Agar  $\varphi(x)$  funksiya lemma shartlarini qanoatlantirsa, u holda (1), (2), (3) masalaning yechimi mavjud.

**Isbot.**  $U(t, x)$  funksiyaning yopiq  $\bar{D}$  sohada uzluksiz ekanligini isbotlaymiz:

$e^{-\lambda^2 t} \leq 1$  bo'lganligi uchun (9) dan ushbuni hosil qilamiz:

$$\left| \int_0^\infty a(\lambda) X(x, \lambda) e^{-\lambda^2 t} d\lambda \right| \leq \int_0^\infty |a(\lambda) X(x, \lambda)| d\lambda.$$

Oxirgi integral  $\bar{D}$  sohada lemmaga asosan absalyut va tekis yaqinlashadi.  $U(t, x)$  funksiya  $\bar{D}$  sohada uzluksiz va chegaralangan bo'ladi. (9) teglikning har ikkala tomonidan  $t$  bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \int_0^\infty \lambda^2 a(\lambda) X(x, \lambda) e^{-\lambda^2 t} d\lambda \quad (15)$$

$$(14) \text{ dan } |a(\lambda)| \leq \frac{\text{const}}{\lambda},$$

bundan  $\text{const } \alpha, M, K$  sonlarga bog'liq. U vaqtda (15) dan

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq \text{const} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^2 t} d\lambda$$

hosil bo'lib,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  funksiyaning  $t > 0, x \geq 0$  qiymatlarida uzluksiz va

chegaralangan bo'lishi kelib chiqadi.  $\frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x})$  funksiyaning  $t > 0, x \geq 0$

qiymatlarda uzluksiz va chegaralangan bo'lishi (1) teglamadan kelib chiqadi.

Bessel funksiyasi uchun asimptotik formulalarga asoslanib,  $x \rightarrow 0$  da

$$\left| x^\alpha U_x \right| \leq A_1, \quad x > 0 \quad \text{uchun esa} \quad \left| x^{\frac{3\alpha}{4}} U_x \right| \leq A_2 \quad \text{baholarni o'rinli ekanligi ko'rsatiladi,}$$

bunda  $A_1, A_2$  lar qandaydir o'zgarmas sonlar. Teorema isbotlandi.

Bir jinsli boshlang'ich va chegaraviy shartlarda bir jinsli bo'lmagan.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}) + f(t, x) \quad (16)$$

tenglamani qaraymiz.

Isbotlangan lemmaga o'xshash quyidagi lemma isbotlandi.

**2-Lemma.** Agar  $f(t, x)$  funksiya  $t \in [0, T]$  ga nisbatan tekis 1- Lemma shartlarni qanoatlantirsa, u xolda ushbu xosmas integral

$$\int_0^\infty X(x, \lambda) \bar{f}(t, \lambda) d\lambda,$$

bunda

$$\bar{f}(t, \lambda) = \frac{2\lambda}{2-\alpha} \int_0^\infty X(x, \lambda) f(t, x) dx,$$

$\bar{D}$  sohada absalyut va tekis yaqinlashadi va demak quyidagi

$$f(t, x) = \int_0^\infty X(x, \lambda) \bar{f}(t, \lambda) d\lambda \quad (17)$$

tenglik o'rinlidir. (16) tenglamani yechimini

$$U(t, x) = \int_0^\infty X(x, \lambda) \bar{U}(t, \lambda) d\lambda \quad (18)$$

ko'rinishda izlaymiz, bunda  $\bar{U}(t, \lambda)$  noma'lum funksiya. (17) va (18) larni (16)ga qo'yib  $\bar{U}(t, \lambda)$  ni topish uchun  $\bar{U}(0, \lambda) = 0$  shartni qanoatlantiruvchi

$$\bar{U}'_t(t, \lambda) + \lambda^2 \bar{U}(t, \lambda) = \bar{f}(t, \lambda)$$

tenglama hosil qilinadi. Bu masalaning yechimi

$$\bar{U}(t, \lambda) = \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} \bar{f}(\tau, \lambda) d\tau$$

bo'ladi. Ko'rish osonki, (16) tenglamaning bir jinsli boshlang'ich va chegaraviy shartlardagi yechimi

$$U(t, x) = \frac{2}{2-\alpha} \int_0^\infty \lambda X(x, \lambda) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} d\tau \int_0^\infty X(\xi, \lambda) f(\tau, \xi) d\xi \quad (19)$$

bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $f(t, x)$  funksiya 2-lemma shartlarini qanoatlantirsa, u holda (16) tenglamaning bir jinsli boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi klassik yechimi mavjud.

**Isbot:** (19) dan:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{2-\alpha} \int_0^\infty \lambda X(x, \lambda) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} d\tau \int_0^\infty X(\xi, \lambda) f(\tau, \xi) d\xi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^t d\tau \int_0^\infty X(x, \lambda) \left[ \frac{2\lambda}{2-\alpha} \int_0^\infty X(\xi, \lambda) f(\tau, \xi) d\xi \right] d\lambda \right| \leq \\ & \leq \int_0^t d\tau \int_0^\infty |X(x, \lambda) \bar{f}(\tau, \lambda)| d\lambda \end{aligned}$$

Bu tegsizlikning o'ng tomonidagi ichki integral 2-lemmaga asosan  $\bar{D}$  sohada absolyut va tekis yaqinlashadi. Bundan  $U(t, x)$  funksiyaning  $\bar{D}$  sohada uzluksizligi va chegaralanganligi kelib chiqadi. Endi (19) dan  $t$  bo'yicha hosila olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{2-\alpha} \int_0^\infty \lambda X(x, \lambda) d\lambda \int_0^\infty X(\xi, \lambda) - f(t, \xi) d\xi -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{2-\alpha} \int_0^\infty \lambda^3 X(x, \lambda) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} d\tau \int_0^\infty X(\xi, \lambda) f(\tau, \xi) d\xi = \\
& = \int_0^\infty X(x, \lambda) \left[ \frac{2\lambda}{2-\alpha} \int_0^\infty X(\xi, \lambda) f(t, \xi) d\xi \right] d\lambda - \\
& - \int_0^\infty \lambda^2 X(x, \lambda) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} \left[ \frac{2\lambda}{2-\alpha} \int_0^\infty X(\xi, \lambda) f(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau = \\
& = \int_0^\infty X(x, \lambda) \bar{f}(t, \lambda) d\lambda - \int_0^\infty \lambda^2 X(x, \lambda) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} \bar{f}(\tau, \lambda) d\tau = \\
& = f(t, x) - \int_0^\infty \lambda^2 X(x, \lambda) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} \bar{f}(\tau, \lambda) d\tau \quad (20)
\end{aligned}$$

Aniqliki  $\left| \bar{f}(t, \lambda) \right| \leq \frac{\text{const}}{\lambda}$ , bunda  $\text{const} = \alpha, M, K$ , o'zgarmas sonlarga bog'liq bo'lib,

$$\int_0^\infty \left| (x^\alpha f_x'(t, x))'_x \right| dx \leq K_1,$$

U holda (20) dan ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| & = \left| f(t, x) - \int_0^\infty \lambda^2 X(x, \lambda) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} \bar{f}(\tau, \lambda) d\tau \right| \leq \\
& \leq |f(t, x)| + \int_0^\infty \lambda^2 |X(x, \lambda)| d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} |\bar{f}(\tau, \lambda)| d\tau \leq \\
& \leq |f(t, x)| + \text{const} \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} d\tau \leq \\
& \leq |f(t, x)| + \text{const} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^2(t-\tau_1)} d\lambda,
\end{aligned}$$

bunda  $0 < \tau_1 < t$ ,  $\text{const}$  esa  $\alpha, M, K_1, T$  larga bog'liq. Bundan  $\frac{\partial u}{\partial t}$  funksiyani

$t > 0, x \geq 0$  sohada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.  $\frac{\partial}{\partial x} \left( x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  funksiyaning

$t > 0, x \geq 0$  qiymatlarda uzluksiz bo'lishi (16) tenglamadan kelib chiqadi.  $x \rightarrow 0$  va

$x > 0$  bo'lsa, mos holda  $|x^\alpha U_x| \leq A_1$  va  $\left| x^{\frac{3\alpha}{4}} u_x \right| \leq A_2$  baholarning o'rinli bo'lishini

ko'rsatish oson. Teorema isbotlandi.

## XULOSA

Xosmas integral tushunchasi aniq integralning umumlashgani bo'lib, matematika va boshqa fanlar bo'limlarida qo'llaniladi. Shu ma'noda ushbu bitiruv malakaviy ishda xosmas integrallarga taalluqli masalalar qaralgani muhim ahamiyatga ega.

Xosmas integralning yaqinlashishini tekshirish uchun o'quvchi Riman integraliga oid mavzularni yaxshi o'zlashtirishi talab etiladi. Xosmas integrallarning ta'riflari va yaqinlashish belgilari, gamma funksiya, beta funksiya, Puasson va Frenel integrallari, xosmas integralning matematik fizika tenglamalarini yechishda tatbiqi to'g'risidagi matematikaning ancha murakkab mavzularini o'zlashtira olgan talaba deyarli o'z maqsadiga erishgan.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligi Oliy o'quv yurtlari uchun Davlat standartlari va o'quv dasturlarini ishlab chiqib, ta'lim turlari va boshqalari o'rtasida uzviylikni, ta'lim mazmuni uzluksizligini ta'minlash borasida ulkan ishlarni amalga oshirmoqda.

Shu ma'noda ushbu bitiruv malakaviy ish bakalavriat va magistrant orasidagi uzviylikni bog'lashda ahamiyatga ega

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. И.А.Каримов. Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури”. Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. Тошкент, Шарқ, 1997 й.
- 2.Т. Azlarov, X. Mansurov. Matematik analiz. 1,2-tom Toshkent, “O’qituvchi” 1986,1989.
- 3.Т. Jo’rayev, A. Sa’dullayev, G. Xydoyberganov, X. Mansurov, A. Vorisov. Oliy matematika asoslari. 1-tom. Toshkent. “O’zbekiston”, 1995.
- 4.Yo.U.Soatov. Oliy matematika. 3-tom. Toshkent, “O’zbekiston”, 1996.
5. Г.М. Фихтенгоц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1, 2, 3. Москва, Наука, 1998
6. Г.М. Фихтенгоц. Основы математического анализа т. 1,2 Москва «Высшая школа» 1997.
- 7.Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т 1,2 Москва, «Наука» 1998.
- 8.В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ. Т 1,2 Москва, «Наука» 1998.
- 9.В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ. Т 1,2 Изд, «Московского университета» 1997.
- 10.Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. Москва, «Наука» 1999.
11. С. М. Никальский. Курс математического анализа. Т 1,2 Москва, «Наука», 1998.
12. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н.Чубариков. Лекции по математическому анализу. Москва, «Высшая школа» 1999.
13. К.А.Бохан, И.А.Егорова, К.В.Лашенов.Курс математического анализа. Т 1,2 Москва из-ва «Просвещение» , 1992

14. A.Sa'dullayev, X. Mansurov, G. Xudoyberganov, A. Vorisov, R.G'ulomov.  
Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami.1,2-tom T.  
"O'qituvchi".1995.