МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

Контрольные задания по высшей математике для студентов заочной формы обучения

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

МАТЕМАТИКА 1 (ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА)

Фергана – 2018

Учебно-методическое пособие по предмету «Математика 1» предназначен для студентов заочного обучения всех направлений бакалавриата филиала.

Утверждено и рекомендовано к изданию на заседании Совета Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, протокол № 3, от «29» 10 2018 г..

Составитель:

Ё. А. Рахимов – ФФ ТУИТ, ассистент кафедры «Естественные дисциплины»

Рецезенты:

И.Тожибоев - ФФ ТУИТ, к.ф-м.н., доцент кафедры «Компьютерные системы»

А. Абдуқодиров – ФФ ТУИТ, к.ф-м.н., доцент кафедры «Информационные технологии»

Учебно-методическое пособие обсужден и одобрен на заседании кафедры «Естественные дисциплины» (протокол № 2а от «25» 09 2018 г.) и рекомендован к расмотрению на Учебно-методическом Совете факультета «Компьютерный инжиниринг».

Зав. кафедрой ЕД: ____________ к.ф-м.н., доцент Сабиров С. С.

Учебно-методическое пособие обсужден и одобрен на заседании Учено-методического Совета Факультета «Компьютерный инжиниринг» (протокол № 2 от « 28 » 09 2018 г.)

Председатель Учено-методического
Совета факультета КИ: ____________ Тожибоев И.

СОГЛАСОВАНО:
Начальник учебно-методического отдела ________ Умаров Ш.

Основная форма учебных занятий студентов-заочников – самостоятельная работа над учебным материалом, слагающаяся из следующих составных элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка и выполнение контрольных работ.

Векторная алгебра.

1. Линейные действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число).
2. Нелинейные действия с векторами (скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение).
3. Решение задач с помощью векторной алгебры. Условие коллинеарности, условие перпендикулярности, условие компланарности векторов.

Решение типового варианта контрольной работы.

Задание 1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = \{2;-1;5\}, \vec{b} = \{7;1;-3\}$.

Решение:

1. Вычислим проекции векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ на оси координат:

$$\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b} = \{5\cdot 2 + 3\cdot 7; 5\cdot(-1) + 3\cdot 1; 5\cdot 5 + 3\cdot(-3)\} = \{31;-2;16\},$$

$$\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b} = \{4\cdot 2 + 7; 4\cdot(-1) + 1; 4\cdot 5 + (-3)\} = \{15;-3;17\}$$

2. Два вектора коллинеарны, если их проекции на оси координат пропорциональны, следовательно, проверим пропорциональность проекций векторов на оси координат:

$\dfrac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2} = \dfrac{31}{15} \neq \dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{16}{17}, \Rightarrow \vec{c}_1, \vec{c}_2$ не коллинеарны.

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = \{-7;1;2\}, \vec{b} = \{3;2;-1\}$?

Решение: Два вектора перпендикулярны , если их скалярное произведение равно 0,скалярное произведение векторов, заданных проекциями на оси координат, вычисляется по формуле: $(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$, где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} \Rightarrow$ вычислим скалярное произведение:

$(\vec{a}, \vec{b}) = -7\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = -21 \neq 0 \Rightarrow$ векторы не перпендикулярны.

Задание 3: Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{-1;2;-1\}, \vec{b} = \{0;2;1\}, \vec{c} = \{2;0;3\}$?

Решение: Три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0, смешанное произведение векторов вычисляется по формуле: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$,

где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\} \Rightarrow$ вычислим смешанное произведение векторов:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 0 - (-4) - 0 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ векторы не компланарны.

Задание 4: При каком значении α векторы $A\vec{B}, A\vec{C}$, где $A(2;1;\alpha), B(3;1;4), C(2;5;3).$, перпендикулярны?

Решение:

1) Для определения α, при котором векторы перпендикулярны, необходимо использовать условие перпендикулярности двух векторов (это условие было рассмотрено в задании 2) $\Rightarrow \alpha$ мы сможем найти из условия: $\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = 0$, для этого найдем проекции векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ на оси координат, заданных координатами точек начала и конца вектора. В этом случае проекции вектора на оси координат равны разности координат точек, задающих конец и начало вектора $\Rightarrow$ $\vec{AB} = \{3-2; 1-1; 4-\alpha\} = \{1; 0; 4-\alpha\}, \vec{AC} = \{2-2; 5-1; 3-\alpha\} = \{0; 4; 3-\alpha\} \Rightarrow$

$\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = 1\cdot 0 + 0\cdot 4 + (4-\alpha)\cdot(3-\alpha) = 0 + 0 + (4-\alpha)\cdot(3-\alpha) = (4-\alpha)\cdot(3-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 4, \alpha = 3.$

Итак: векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны при $\alpha = 4$ и при $\alpha = 3$.

Задание 5: Даны точки: $A(1;0;-1), B(0;1;3), C(2;0;1)$.

Найти:

1. пр $_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC} + 3\vec{CB}\right)$;
2. $\left|\vec{AB} + 4\vec{BC}\right|$;
3. $\angle\left(\vec{AB} - \vec{CB}, \vec{AB}\right)$;
4. орт вектора $\vec{AB}$;
5. $\left(\left(\vec{AB} + 4\vec{BC}\right), \left(\vec{BA} - \vec{AC}\right)\right)$;
6. $\left[\left(\vec{AB} + 2\vec{BC}\right), \left(\vec{CB} - \vec{AB}\right)\right]$;
7. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{AC}$;

Решение:

1. Из определения скалярного произведения следует, что проекцию вектора на вектор можно вычислить по формуле: пр $_{\vec{BC}}\vec{AB} = \dfrac{\left(\vec{AB}, \vec{BC}\right)}{\left|\vec{BC}\right|}$, где скалярное произведение векторов вычисляется по формуле: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$, где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, и длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} \Rightarrow$ итак ,в нашем случае, формула принимает вид: $np_{\vec{AB}+\vec{CB}}\left(2\vec{AC} + 3\vec{CB}\right) = \dfrac{\left(\left(2\vec{AC} + 3\vec{CB}\right), \left(\vec{AB} + \vec{CB}\right)\right)}{\left|\left(\vec{AB} + \vec{CB}\right)\right|}$ $\Rightarrow$ для нахождения $np_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC} + 3\vec{CB}\right)$ необходимо найти проекции векторов на оси координат, заданных координатами точек начала и конца векторов, скалярное произведение и длину соответствующего вектора:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1\}=\{-2;1;2\},$

$\vec{AC}=\{2-1;0-0;1-(-1)\}=\{1;0;2\},$

$\vec{AB}+\vec{CB}=\{(-1)+(-2);1+1;4+2\}=\{-3;2;6\},$

$2\vec{AC}=\{2\cdot1;2\cdot0;2\cdot2\}=\{2;0;4\}, 3\vec{CB}=\{3\cdot(-2);3\cdot1;3\cdot2\}=\{-6;3;6\},$

$2\vec{AC}+3\vec{CB}=\{2+(-6);0+3;4+6\}=\{-4;3;10\},$

$\left(\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right),\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)\right)=(-3)\cdot(-4)+2\cdot3+6\cdot10=12+6+60=78,$

$\left|\vec{AB}+\vec{CB}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+6^2}=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7\Rightarrow$

на основании формулы, выше написанной, получим :

$$np_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\frac{\left(\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right),\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right)}{\left|\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right|}=\frac{78}{7}$$

$$\Rightarrow \text{пр}_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\frac{78}{7};$$

2. Для нахождения длины вектора воспользуемся формулой: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}, \vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, для этого найдем проекции векторов на оси координат (смотри пункт 1), так же найдем сумму векторов по правилу сложения векторов, заданных проекциями на оси координат:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\},$

$4\vec{BC}=\{4\cdot2;4\cdot(-1);4\cdot(-2)\}=\{8;-4;-8\},$

$\vec{AB}+4\vec{BC}=\{-1+8;1+(-4);4+(-8)\}=\{7;-3;-4\}$

$\Rightarrow \left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|=\sqrt{7^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{49+9+16}=\sqrt{74};$

Итак: $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|=\sqrt{74}.$

3. Угол между векторами можно найти из определения скалярного произведения: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=arc\cos\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}\Rightarrow$ в нашем случае формула принимает вид: $\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\frac{\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)}{\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|}$ $\Rightarrow$ находим проекции векторов на оси координат (смотри пункты 1 и 2), вычисляем скалярное произведение векторов, заданных своими проекциями на оси координат, вычисляем длины векторов:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1\}=\{-2;1;2\},$

$\vec{AB}-\vec{CB}=\{(-1)-(-2);1-1;4-2\}=\{1;0;2\},$

$\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=1\cdot(-1)+0\cdot1+2\cdot4=7,$

$\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5},$

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}$

$\Rightarrow$

$$\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\frac{\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)}{\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|}=\arccos\frac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}}=\arccos\frac{7}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}}=\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}};$$

Итак $\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}}$.

4. Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α,β,γ, образованными им с осями координат Ox,Oy,Oz. Косинусы этих углов (направляющие косинусы вектора) определяются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением $cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Rightarrow$ мы имеем вектор единичной длины, такой вектор называется ортом $\Rightarrow$ для нахождения орта вектора необходимо каждую проекцию вектора на оси координат разделить на его длину

$$\Rightarrow\begin{array}{l}\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\\ \left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\end{array}\Rightarrow \text{орт вектора } \vec{AB}=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}.$$

Итак: орт вектора $\vec{AB}=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$.

5. Скалярное произведение векторов вычисляем по формуле:
$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z,\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ (см. пункты 1 и 2), вычислим проекции векторов на оси координат и скалярное произведение векторов :

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\},$$

$$4\vec{BC}=\{4\cdot 2;4\cdot(-1);4\cdot(-2)\}=\{8;-4;-8\},$$

$$\vec{AB}+4\vec{BC}=\{-1+8;1+(-4);4+(-8)\}=\{7;-3;-4\},$$

$$\vec{BA}=-\vec{AB}=\{(-1)\cdot(-1);(-1)\cdot 1;(-1)\cdot 4\}=\{1;-1;-4\},\vec{AC}=\{2-1;0-0;1-(-1)\}=\{1;0;2\},$$

$$\vec{BA}-\vec{AC}=\{1-1;-1-0;-4-2\}=\{0;-1;-6\}\Rightarrow$$

$$\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)=7\cdot 0+(-3)\cdot(-1)+(-4)\cdot(-6)=0+3+24=27;$$

Итак: $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)=27;$

6. Векторное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_y&b_y&b_z\end{vmatrix}, \text{где } \vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}\Rightarrow$$

Находим проекции векторов на оси координат:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1-2\},$

$2\vec{BC}=\{2\cdot 2;2\cdot(-1);2\cdot(-2)\}=\{4;-2;-4\},$

$\vec{AB}+2\vec{BC}=\{-1+4;1+(-2);4+(-4)\}=\{3;-1;0\}, \vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1;\}=\{-2;1;2\},$

$\vec{CB}-\vec{AB}=\{-2-(-1);1-1;2-4\}=\{-1;0;-2\}\Rightarrow$

$$\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-1)\cdot(-2)+\vec{j}\cdot 0\cdot(-1)+\vec{k}\cdot 3\cdot 0-\vec{k}\cdot(-1)\cdot(-1)-$$

$\vec{i}\cdot 0\cdot 0-\vec{j}\cdot(-2)\cdot 3=$

$2\vec{i}+0\vec{j}-0\vec{k}-\vec{k}-0\vec{i}+6\vec{j}=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}.$

Итак: $\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}.$

7. Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},\quad \text{где}\quad \vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}\Rightarrow$$

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\},$

$\vec{AC}=\{2-1;0-0;1-(-1)\}=\{1;0;2\},$

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 1\cdot(-2)+2\cdot 0\cdot 4-1\cdot(-1)\cdot 4-0\cdot(-2)\cdot(-1)-2\cdot 1\cdot 2=$$

$=2+(-2)+0-(-4)-0-4=2-2+4-4=0;$

Итак: $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}=0.$

Задание 6: Даны координаты вершин пирамиды:

$$A(1;4;3), B(2;3;1), C(-2;1;3), D(0;1;2).$$

Вычислить:

1. объем пирамиды;
2. длину ребра AB;
3. площадь грани ABC;

Решение:

1. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, а объем параллелепипеда вычисляется на основании геометрического смысла смешанного произведения $\Rightarrow$ объем параллелипипеда, построенного на векторах как на ребрах равен:

$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, \vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\},$

Найдем проекции соответствующих векторов на оси координат:

$\vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\}, \vec{AC}=\{-2-1;1-4;3-3\}=\{-3;-3;0\},$

$\vec{AD}=\{0-1;1-4;2-3\}=\{-1;-3;-1\},$

Тогда объем пирамиды равен:

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right|$$

Вычислим объем по указанной формуле:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|3+0-18+6-0+3\right|=\frac{1}{6}\left|-6\right|=1;$$

2. Длина ребра

$$AB=\left|\vec{AB}\right|\Rightarrow\vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\}\Rightarrow$$

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$; (смотри пункт 5,3)

3. Площадь грани ABC вычисляется по формуле:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right\|$ так как грань $ABC-$ треугольник, а площадь треугольника можно вычислить как половину площади параллелограмма, а площадь параллелограмма равна длине векторного произведения векторов, на которых построен параллелограмм на основании свойств векторного произведения $\Rightarrow$ найдем проекции векторов на оси координат:

$$\vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\},\ \vec{AC}=\{-2-1;1-4;3-3\}=\{-3;-3;0\}$$

$$\Rightarrow\ S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-6\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}\right|\ =\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$

Контрольная работа

Задания для индивидуальной контрольной работы

Задание 1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 3: Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

Задание 4: При каком значении α векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны?

Задание 5: Даны координаты точек $A, B, C.$. Вычислить:

1) пр$_{(\vec{AB}+\vec{CB})}(2\vec{AC}+3\vec{CB})$;
2) $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|$;
3) $\angle\left((\vec{AB}-\vec{CB}),\vec{AB}\right)$;
4) орт вектора $\vec{AB}$;
5) $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)$;
6) $\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]$;
7) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}$;

Задание 6: Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

1) объем пирамиды;
2) длину ребра AB;
3) площадь грани ABC;

Варианты для индивидуальной контрольной работы.

Вариант 1

1.1 $\vec{a}=\{1;+2;3\},\vec{b}=\{-3;0;-1\},\vec{c}_1=2\vec{a}-4\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}+\vec{b}.$

3.1 $\vec{a}=\{-2;3;+1\},\vec{b}=\{1;+1;-3\},\vec{c}=\{1;-9;1\}.$

2.1 $\vec{a}=\{1;3;-1\},\vec{b}=\{3;-2;3\}.$

4.1 $A(\alpha;-2;3),B(0;-1;2),C(3;-4;5).$

5.1 $A(-1;2;1),B(-1;3;-4),C(0;1;-2).$

6.1 $A(1;-1;1),B(-1;2;-4),C(2;0;-6),D(-2;5;1).$

Вариант 2

1.2 $\vec{a}=\{1;0;1\},\vec{b}=\{-2;3;5\},\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.2 $\vec{a}=\{2;1;4\},\vec{b}=\{4;1;3\}.$

3.2 $\vec{a}=\{3;-2;1\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{3;-1;-2\}.$

4.2 $A(0;-3;\alpha),B(-12;-3;-3),C(-9;-3;-6).$

5.2 $A(0;1;2),B(3;-1;2),C(-1;2;5).$

6.2 $A(0;5;0),B(2;3;-4),C(0;0;6),D(-3;1;-1).$

Вариант 3

1.3 $\vec{a}=\{-2;-4;1\},\vec{b}=\{1;2;-7\},\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{a}+\vec{b}.$

2.3 $\vec{a}=\{0;1;2\},\vec{b}=\{1;3;-2\}.$

3.3 $\vec{a}=\{2;-1;2\},\vec{b}=\{1;2;-3\},\vec{c}=\{3;-4;7\}.$

4.3 $A(3;\alpha;-1),B(5;5;-2),C(4;1;1).$

5.3 $A(0;2;3),B(3;1;2),C(1;5;1).$

6.3 $A(0;0;6),B(4;0;-4),C(1;3;-1),D(4;-1;-3).$

Вариант 4

1.4 $\vec{a}=\{1;2;-3\},\vec{b}=\{2;-1;-1\},\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}.$

2.4 $\vec{a}=\{1;2;1\},\vec{b}=\{3;1;2\}.$

3.4 $\vec{a}=\{1;2;4\},\vec{b}=\{2;1;-5\},\vec{c}=\{1;-1;-1\}.$

4.4 $A(-1;2;\alpha),B(3;4;-6),C(1;1;-1).$

5.4 $A(1;0;3),B(1;4;1),C(0;2;3).$

6.4 $A(-5;6;-1),B(6;-5;2),C(6;5;1),D(0;0;2).$

Вариант 5

1.5 $\vec{a}=\{3;-5;4\},\vec{b}=\{-5;9;-7\},\vec{c}_1=-2\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.5 $\vec{a}=\{2;1;7\},\vec{b}=\{2;4;-3\}.$

3.5 $\vec{a}=\{2;-1;1\},\vec{b}=\{1;2;3\},\vec{c}=\{1;-3;-2\}.$

4.5 $A(-4;-2;0),B(\alpha;-2;4),C(3;-2;1).$

5.5 $A(1;1;0),B(4;1;2),C(1;2;3).$

6.5 $A(2;-5;3),B(3;2;-5),C(5;-3;-2),D(-5;3;-2).$

Вариант 6

1.6 $\vec{a}=\{1;4;-2\},\vec{b}=\{1;1;-1\},\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}.$

2.6 $\vec{a}=\{-4;1;5\},\vec{b}=\{1;3;1\}.$

3.6 $\vec{a}=\{3;-1;2\},\vec{b}=\{2;-1;-1\},\vec{c}=\{4;-2;-2\}.$

4.6 $A(-5;3;-1),B(\alpha;-2;0),C(6;-4;1).$

5.6 $A(-1;4;2),B(5;2;3),C(0;1;2).$

6.6 $A(6;0;4),B(0;6;4),C(4;6;0),D(0;-6;4).$

Вариант 7

1.7 $\vec{a}=\{1;-2;5\},\vec{b}=\{3;-1;6\},\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.7 $\vec{a}=\{3;-1;2\},\vec{b}=\{2;3;-1\}.$

3.7 $\vec{a}=\{1;1;-1\},\vec{b}=\{7;3;-6\},\vec{c}=\{-1;1;9\}.$

4.7 $A(-3;-7;-5),B(0;-\alpha;-2),C(2;3;0).$

5.7 $A(3;-2;1),B(1;3;2),C(2;4;1).$

6.7 $A(3;2;4),B(2;4;3),C(4;3;-2),D(-4;-2;-3).$

Вариант 8

1.8 $\vec{a}=\{3;5;-1\},\vec{b}=\{2;-1;1\},\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.8 $\vec{a}=\{-4;-1;5\},\vec{b}=\{1;-3;1\}.$

3.8 $\vec{a}=\{2;-4;9\},\vec{b}=\{2;0;-3\},\vec{c}=\{7;9;-3\}.$

4.8 $A(2;-4;6),B(0;-2;\alpha),C(2;3;0).$

5.8 $A(-1;3;-1),B(-3;2;3),C(-1;3;0).$

6.8 $A(6;3;5),B(5;-6;3),C(3;5;6),D(-6;-1;2).$

Вариант 9

1.9 $\vec{a}=\{2;-3;-4\},\vec{b}=\{1;0;-5\},\vec{c}_1=3\vec{a}-9\vec{b},\vec{c}_2=\vec{a}-3\vec{b}.$

2.9 $\vec{a}=\{9;1;2\},\vec{b}=\{-1;1;4\}.$

3.9 $\vec{a}=\{1;1;1\},\vec{b}=\{1;1;-1\},\vec{c}=\{6;0;5\}.$

4.9 $A(0;1;-2),B(3;1;2),C(\alpha;1;1).$

5.9 $A(1;-1;6),B(4;5;-2),C(-1;3;0).$

6.9 $A(5;-2;-1),B(4;0;0),C(2;5;1),D(1;2;5).$

Вариант 10

1.10 $\vec{a} = \{-1;4;2\}, \vec{b}\{3;2;-6\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{b} + 6\vec{a}.$

2.10 $\vec{a} = \{8;2;3\}, \vec{b} = \{-2;8;0\}.$

3.10 $\vec{a} = \{7;2;3\}, \vec{b} = \{5;-3;2\}, \vec{c} = \{10;-11;5\}.$

4.10 $A(3;3;1), B(1;5;-2), C(4;\alpha;1).$

5.10 $A(7;1;2), B(-5;3;-2), C(3;2;5).$

6.10 $A(4;2;5), B(3;0;4), C(0;2;3), D(5;-2;-4).$

Вариант 11

1.11 $\vec{a} = \{5;0;-1\}, \vec{b} = \{7;2;3\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{b} + 6\vec{a}.$

2.11 $\vec{a} = \{7;3;4\}, \vec{b} = \{-1;-1;1\}.$

3.11 $\vec{a} = \{1;2;1\}, \vec{b} = \{3;-5;3\}, \vec{c} = \{2;7;1\}.$

4.11 $A(2;1;-1), B(6;-1;5), C(4;2;\alpha).$

5.11 $A(-2;3;-2), B(2;-3;2), C(-1;3;0).$

6.11 $A(4;2;5), B(-3;0;4), C(0;2;3), D(5;2;-4).$

Вариант 12

1.12 $\vec{a} = \{0;3;-2\}, \vec{b} = \{1;-2;1\}, \vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$

2.12 $\vec{a} = \{6;-4;2\}, \vec{b} = \{1;2;7\}.$

3.12 $\vec{a} = \{2;1;-1\}, \vec{b} = \{3;-5;3\}, \vec{c} = \{2;-1;3\}.$

4.12 $A(-\alpha;-2;1), B(-4;-2;5), C(-5;-2;2).$

5.12 $A(4;2;-1), B(3;0;4), C(1;2;1).$

6.12 $A(4;4;10), B(7;10;2), C(2;8;4), D(9;6;9).$

Вариант 13

1.13 $\vec{a} = \{-2;7;1\}, \vec{b} = \{-3;5;2\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$

2.13 $\vec{a} = \{1;-2;3\}, \vec{b} = \{3;2;-1\}.$

3.13 $\vec{a} = \{1;-1;-1\}, \vec{b} = \{1;4;2\}, \vec{c} = \{3;7;3\}.$

4.13 $A(6;\alpha;3), B(6;3;-2), C(7;3;-3).$

5.13 $A(1;2;3), B(-1;2;-3), C(-2;3;1).$

6.13 $A(4;6;5), B(6;9;4), C(2;10;10), D(7;5;9).$

Вариант 14

1.14 $\vec{a}=\{3;7;0\},\vec{b}=\{1;-3;4\},\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.14 $\vec{a}=\{-2;4;1\},\vec{b}=\{2;1;0\}.$

3.14 $\vec{a}=\{-7;2;-3\},\vec{b}=\{-5;3;2\},\vec{c}=\{-10;11;-5\}.$

4.14 $A(0;0;4),B(\alpha;-6;1),C(-5;-10;-1).$

5.14 $A(4;-5;2),B(1;-3;4),C(5;2;-4).$

6.14 $A(3;5;4),B(8;7;4),C(5;10;3),D(4;7;8).$

Вариант 15

1.15 $\vec{a}=\{-1;2;-1\},\vec{b}=\{2;-7;1\},\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.15 $\vec{a}=\{3;4;1\},\vec{b}=\{1;1;7\}.$

3.15 $\vec{a}=\{1;-2;1\},\vec{b}=\{-5;3;1\},\vec{c}=\{-7;2;1\}.$

4.15 $A(2;-8;-1),B(4;\alpha;0),C(-2;-5;-1).$

5..15 $A(4;4;9),B(7;10;2),C(2;8;4).$

6.15 $A(10;6;5),B(-2;8;4),C(6;8;9),D(7;10;3).$

Вариант 16

1.16 $\vec{a}=\{7;9;-2\},\vec{b}=\{5;4;3\},\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}.$

2.16 $\vec{a}=\{-1;4;2\},\vec{b}=\{2;2;3\}.$

3.16 $\vec{a}=\{-2;4;-9\},\vec{b}=\{-7;3;6\},\vec{c}=\{1;1;1\}.$

4.16 $A(3;-6;9),B(0;-3;\alpha),C(9;-12;15).$

5.16 $A(4;6;5),B(6;9;4),C(7;5;9).$

6.16 $A(1;8;2),B(5;2;6),C(5;7;4),D(4;10;9).$

Вариант 17

1.17 $\vec{a}=\{5;0;-2\},\vec{b}=\{6;4;3\},\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}.$

2.17 $\vec{a}=\{-5;1;3\},\vec{b}=\{2;1;3\}.$

3.17 $\vec{a}=\{3;4;5\},\vec{b}=\{2;1;3\},\vec{c}=\{-1;4;3\}.$

4.17 $A(0;2;-4),B(8;2;2),C(\alpha;2;4).$

5.17 $A(3;5;4),B(8;7;4),C(4;7;8).$

6.17 $A(6;6;5),B(4;9;5),C(4;6;11),D(5;9;3).$

Вариант 18

1.18 $\vec{a}=\{8;3;-1\},\vec{b}=\{4;1;3\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}.$

2.18 $\vec{a}=\{4;3;7\},\vec{b}=\{-4;1;3\}.$

3.18 $\vec{a}=\{-5;6;-2\},\vec{b}=\{-2;-3;1\},\vec{c}=\{2;1;-1\}.$

4.18 $A(3;3;-1),B(5;1;-2),C(4;\alpha;1).$

5.18 $A(10;6;5),B(-2;8;4),C(7;10;3).$

6.18 $A(-3;2;1),B(3;1;-6),C(1;-4;3),D(5;-1;3).$

Вариант 19

1.19 $\vec{a}=\{3;-1;6\},\vec{b}=\{5;7;10\},\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{b}+4\vec{a}.$

2.19 $\vec{a}=\{-4;2;1\},\vec{b}=\{1;-2;1\}.$

3.19 $\vec{a}=\{5;6;1\},\vec{b}=\{4;1;1\},\vec{c}=\{2;-1;2\}.$

4.19 $A(-4;3;-5),B(0;1;-3),C(2;4;-\alpha).$

5.19 $A(6;3;5),B(8;7;3),C(5;10;4).$

6.19 $A(8;6;4),B(10;5;5),C(5;6;8),D(8;10;-7).$

Вариант 20

1.20 $\vec{a}=\{1;-2;4\},\vec{b}=\{7;3;5\},\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.20 $\vec{a}=\{-6;7;1\},\vec{b}=\{3;2;4\}.$

3.20 $\vec{a}=\{2;-1;4\},\vec{b}=\{4;-1;1\},\vec{c}=\{3;4;1\}.$

4.20 $A(\alpha;-1;0),B(-2;-1;4),C(8;-1;-1).$

5.20 $A(1;8;2),B(5;2;6),C(6;9;3).$

6.20 $A(7;7;3),B(6;5;8),C(3;6;7),D(8;4;1).$

Вариант 21

1.21 $\vec{a}=\{3;-7;0\},\vec{b}=\{4;-6;1\},\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=5\vec{a}+7\vec{b}.$

2.21 $\vec{a}=\{6;-7;-1\},\vec{b}=\{2;1;5\}.$

3.21 $\vec{a}=\{-2;-1;4\},\vec{b}=\{-4;1;-1\},\vec{c}=\{1;1;2.\}$

4.21 $A(7;\alpha;2)B(8;1;3),C(6;-1;2).$

5.21 $A(7;2;2),B(5;7;6),C(2;3;7).$

6.21 $A(4;0;0),B(-2;1;2),C(1;3;2),D(3;2;7).$

Вариант 22

1.22 $\vec{a}=\{2;-6;4\},\vec{b}=\{-3;-7;6\},\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-5\vec{b}.$

2.22 $\vec{a}=\{3;-3;4\},\vec{b}=\{2;1;-1\}.$

3.22 $\vec{a}=\{2;1;3\},\vec{b}=\{3;-2;1\},\vec{c}=\{4;-2;3\}.$

4.22 $A(2;3;\alpha),B(-1;3;-2),C(3;-7;-3).$

5.22 $A(-5;6;-1),B(2;4;3),C(5;2;-4).$

6.22 $A(-2;1;2),B(4;0;1),C(3;2;7),D(1;3;2).$

Вариант 23

1.23 $\vec{a}=\{5;-1;2\},\vec{b}=\{6;1;-7\},\vec{c}_1=3\vec{a}-9\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{b}+6\vec{a}.$

2.23 $\vec{a}=\{-4;-5;1\},\vec{b}=\{2;3;7\}.$

3.23 $\vec{a}=\{-3;1;-4\},\vec{b}=\{4;3;1\},\vec{c}=\{1;2;2\}.$

4.23 $A(2;2;7),B(\alpha;-1;6),C(-2;5;7).$

5.23 $A(3;2;4),B(-3;1;-2),C(5;-2;3).$

6.23 $A(1;3;2),B(3;2;7),C(4;0;1),D(-2;1;-2).$

Вариант 24

1.24 $\vec{a}=\{-3;5;-3\},\vec{b}=\{6;1;-2\},\vec{c}_1=2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-5\vec{b}.$

2.24 $\vec{a}=\{-5;4;2\},\vec{b}=\{2;-1;1\}.$

3.24 $\vec{a}=\{4;3;-2\},\vec{b}=\{-1;2;2\},\vec{c}=\{2;2;1\}.$

4.24 $A(-1;2;-3),B(0;\alpha;-2),C(-3;4;-5).$

5.24 $A(5;-2;1),B(4;2;5),C(-1;2;4).$

6.24 $A(3;2;7),B(1;3;2),C(-2;1;3),D(4;-2;3).$

Вариант 25

1.25 $\vec{a}=\{4;2;9\},\vec{b}=\{0;-1;3\},\vec{c}_1=4\vec{b}-3\vec{a},\vec{c}_2=4\vec{a}-3\vec{b}.$

2.25 $\vec{a}=\{5;-4;2\},\vec{b}=\{3;5;2\}.$

3.25 $\vec{a}=\{3;1;4\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{5;4;3\}.$

4.25 $A(0;3;-6),B(9;3;\alpha),C(12;3;-3).$

5.25 $A(7;5;6),B(-2;-5;2),C(-3;1;0).$

6.25 $A(3;1;-2),B(1;-2;1),C(-2;1;0),D(2;2;5).$

Вариант 26

1.26 $\vec{a}=\{2;-1;6\},\vec{b}=\{-1;3;8\},\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}.$

2.26 $\vec{a}=\{5;4;-2\},\vec{b}=\{4;4;3\}.$

3.26 $\vec{a}=\{-1;2;1\},\vec{b}=\{3;2;-1\},\vec{c}=\{-5;6;1\}.$

4.26 $A(3;3;-1),B(5;1;-2),C(\alpha;1;-3).$

5.26 $A(-2;1;2),B(-1;-2;2),C(3;-1;4).$

6.26 $A(1;-2;1),B(3;1;-2),C(2;2;5),D(-2;1;0).$

Вариант 27

1.27 $\vec{a}=\{5;0;8\},\vec{b}=\{-3;1;7\},\vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b},\vec{c}=12\vec{b}-9\vec{a}.$

2.27 $\vec{a}=\{7;-3;1\},\vec{b}=\{1;1;-4\}.$

3.27 $\vec{a}=\{-1;2;-2\},\vec{b}=\{4;5;4\},\vec{c}=\{6;5;1\}.$

4.27 $A(-2;1;1),B(2;3;2),C(0;\alpha;3).$

5.27 $A(1;3;2),B(-2;3;2),C(-5;6;8).$

6.27 $A(-3;2;1),B(-2;1;0),C(1;-2;1),D(3;1;2).$

Вариант 28

1.28 $\vec{a}=\{-1;3;4\},\vec{b}=\{2;-1;0\},\vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{b}-5\vec{a}.$

2.28 $\vec{a}=\{9;-5;6\},\vec{b}=\{-1;3;-2\}.$

3.28 $\vec{a}=\{2;-1;2\},\vec{b}=\{3;3;3\},\vec{c}=\{4;5;1\}.$

4.28 $A(6;4;-1),B(2;-3;-5),C(4;3;\alpha).$

5.28 $A(5;1;-2),B(-4;2;7),C(2;1;-2).$

6.28 $A(-3;-2;9),B(3;-6;-2),C(2;3;5),D(2;-5;6).$

Вариант 29

1.29 $\vec{a}=\{-5;-2;-7\},\vec{b}=\{4;0;-8\},\vec{c}_1=3\vec{a}+4\vec{b},\vec{c}_2=6\vec{b}-7\vec{a}.$

2.29 $\vec{a}=\{-2;2;-7\},\vec{b}=\{2;-2;3\}.$

3.29 $\vec{a}=\{2;1;3\},\vec{b}=\{2;-2;8\},\vec{c}=\{-1;1;-2\}.$

4.29 $A(0;\alpha;-9),B(0;-2;1),C(-1;2;-5).$

5.29 $A(1;-6;1),B(2;-3;-2),C(-1;3;+2).$

6.29 $A(3;6;-2),B(2;1;-1),C(4;-2;5),D(-3;2;-1).$

Вариант 30

1.30 $\vec{a}=\{-2;0;5\},\vec{b}=\{-1;3;4\},\vec{c}_1=2\vec{a}-6\vec{b},\vec{c}_2=5\vec{a}+6\vec{b}.$

2.30 $\vec{a}=\{3;-4;-6\},\vec{b}=\{1;-2;-1\}.$

3.30 $\vec{a}=\{-2;1;-4\},\vec{b}=\{1;1;-2\},\vec{c}=\{-1;-2;3\}.$

4.30 $A(4;2;-5),B(-1;\alpha;-7),C(-3;10;-4).$

5.30 $A(2;-1;3),B(1;-7;1),C(-6;4;7).$

6.30 $A(2;+1;-5),B(-2;9;-5),C(-3;4;1),D(3;+2;-1).$

Образец решения варианта

Задание 1.

Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{a}+\vec{b},\vec{a}=\{2;-1;5\}\vec{b}=\{7;1;-3\}.$

Решение:

1. Вычислим проекции векторов $\vec{c}_1,\vec{c}_2$:

$$\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}=\{5\cdot 2+3\cdot 7;5\cdot(-1)+3\cdot 1;5\cdot 5+3\cdot(-3)\}=\{31;-2;16\},$$

$$\vec{c}_2=4\vec{a}+\vec{b}=\{4\cdot 2+7;4\cdot(-1)+1;4\cdot 5+(-3)\}=\{15;-3;17\}$$

2. Два вектора коллинеарны, если их проекции пропорциональны, следовательно, проверим пропорциональность проекций векторов:

$$\frac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2}=\frac{31}{15}\neq\frac{-2}{-3}\neq\frac{16}{17},\Rightarrow \vec{c}_1,\vec{c}_2 \text{ не коллинеарны.}$$

Задание 2.

Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}=\{-7;1;2\},\vec{b}=\{3;2;-1\}$?

Решение:

Два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0, вычислим скалярное произведение:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-7\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot(-1)=-21\neq 0\Rightarrow \text{векторы не перпендикулярны.}$$

Задание 3.

Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{-1;2;-1\},\vec{b}=\{0;2;1\},\vec{c}=\{2;0;3\}$?

Решение:

Три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0, вычислим смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-6+4+0-(-4)-0-0=2\neq 0\Rightarrow \text{векторы не компланарны.}$$

Задание 4.

Найти угол между векторами $\vec{AB},\vec{AC},$ где $A(2;1;3),B(3;1;4),C(2;5;3).$

Решение:

Косинус угла между векторами вычисляется по формуле:

$$cos\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)=\frac{\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|}=\frac{\left(\{3-2;1-1;4-3\},\{2-2;5-1;3-3\}\right)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+0^2}}=\frac{1\cdot0+0\cdot4+1\cdot0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}}=\frac{0}{4\sqrt{2}}=0\Rightarrow$$

$$\angle\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)=arc\cos0=\frac{\pi}{2}.$$

Задание 5.

Даны точки: $A(1;0;-1), B(0;1;3), C(2;0;1)$.

Найти:

1. пр $_{\vec{BC}}\vec{AB}$;
2. пр $_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)$;
3. $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|$;
4. $\angle\left(\vec{AB}-\vec{CB},\vec{AB}\right)$;
5. $\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)$;
6. $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)$;
7. $\left[\vec{AB},\vec{BC}\right]$;
8. $\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]$;
9. $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}$;
10. $\left[\left[\left(\vec{AB}+\vec{BC}\right),\vec{BC}\right],\vec{AC}\right]$;
11. $\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)\cdot\vec{BC}$;
12. орт вектора $\vec{AB}$.

Решение:

1. Проекция вектора на вектор вычисляется по формуле:

пр $_{\vec{BC}}\vec{AB}=\dfrac{\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)}{\left|\vec{BC}\right|}\Rightarrow$ находим проекции векторов:

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},$$

$$\vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\}$$

вычисляем скалярное произведение векторов и длину вектора:

$$\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)=(-1)\cdot2+1\cdot(-1)+4\cdot(-2)=-11,$$

$$\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3.$$

$\Rightarrow$ пр $_{\vec{BC}}\vec{AB}=\dfrac{-11}{3}$.

2. Находим проекции векторов:

$$\vec{AB}=\{-1;1;4\},\vec{CB}=\{-2;1;2\},\vec{AC}=\{1;0;2\},$$

$$\vec{AB}+\vec{CB}=\{-3;2;6\},2\vec{AC}+3\vec{CB}=\{-4;3;10\},$$

$$\left(\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right),\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)\right)=78,$$

$$\left|\vec{AB}+\vec{CB}\right|=7\Rightarrow$$

$$\text{пр}_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\frac{78}{7};$$

3. Находим проекции векторов:

$$\vec{AB}=\{-1;1;4\},\ \vec{BC}=\{2;-1;-2\},\ \vec{AB}+4\vec{BC}=\{7;-3;-4\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|=\sqrt{74};$$

4. Находим проекции векторов:

$$\vec{AB}=\{-1;1;4\},\ \vec{CB}=\{-2;1;2\},\ \vec{AB}-\vec{CB}=\{1;0;2\}\Rightarrow$$

$$\angle\left(\vec{AB}-\vec{CB},\vec{AB}\right)=\arccos\frac{\left(\vec{AB}-\vec{CB},\vec{AB}\right)}{\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|}=\arccos\frac{1\cdot(-1)+0\cdot1+2\cdot4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}}=\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}};$$

5. $\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)=(-1)\cdot2+1\cdot(-1)+4\cdot(-2)=-11;$

6.
$$\vec{AB}+4\vec{BC}=\{7;-3;-4\},\ \vec{BA}-\vec{AC}=\{0;-1;-6\}\Rightarrow$$
$$\left(\vec{AB}+4\vec{BC},\vec{BA}-\vec{AC}\right)=27$$

7. Векторное произведение векторов вычисляется по формуле: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_y & b_y & b_z\end{vmatrix}$

где $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}\Rightarrow$ $\left[\vec{AB},\vec{BC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}=\{2;6;-1\};$

8.
$$\vec{AB}+2\vec{BC}=\{3;-1;0\},\ \vec{BA}-\vec{AC}=\{0;-1;-6\}\Rightarrow$$

$$\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -6\end{vmatrix}=6\vec{i}+18\vec{j}-3\vec{k}.;$$

9. Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$, где

$\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}\Rightarrow$ $\quad\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0;$

10. $\left[\left(\vec{AB}+\vec{BC}\right),\vec{BC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}=\{2;6;-1\}$

$$\left[\left[\left(\vec{AB}+\vec{BC}\right),\vec{BC}\right],\vec{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 6 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=12\vec{i}-5\vec{j}-6\vec{k};$$

11. $\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)=-11, \left(\vec{AB},\vec{BC}\right)\cdot\vec{BC}=(-11)\cdot\{2;-1;-2\}=\{-22;11;22\}$;

12. Орт вектора $\vec{AB}=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$, так как орт- это вектор единичной длины $\Rightarrow$ необходимо каждую проекцию вектора разделить на его длину.

Задание 6.

Даны координаты вершин пирамиды: $A(1;4;3), B(2;3;1), C(-2;1;3), D(0;1;2)$.

Вычислить:

1. объем пирамиды;
2. длину ребра AB;
3. площадь грани ABC ;
4. угол между ребрами AB и AD.

Решение:

1. Объем пирамиды вычисляется по формуле: $V=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right|\Rightarrow$

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|3+0-18+6-0+3|=\frac{1}{6}|-6|=1;$$

2. Длина ребра $AB=\left|\vec{AB}\right|\Rightarrow$

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6};$$

3. Площадь грани ABC вычисляется по формуле: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right\|\Rightarrow$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-6\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}\right| =\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$

4. Угол между ребрами AB и AD вычисляется по формуле: $\angle\left(A\bar{B},A\bar{D}\right)=\arccos\frac{\left(A\vec{B},A\vec{D}\right)}{\left|A\vec{B}\right|\cdot\left|A\vec{D}\right|}\Rightarrow$

$$\angle\left(A\bar{B},A\bar{D}\right)=\arccos\frac{1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}}=\arccos\frac{4}{\sqrt{66}}.$$

Задание 7.

Имеет ли смысл выражение $\left[\left(\vec{a}+\left(\vec{b},\vec{c}\right),\vec{d}\right),\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]$? Обосновать.

Решение:

Выражение $\left[\left(\vec{a}+\left(\vec{b},\vec{c}\right),\vec{d}\right),\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]$ смысла не имеет, так как складывать числа с векторами нельзя: в результате скалярного призведения $\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ получим число, затем мы должны сложить вектор $\vec{a}$ с результатом скалярного произведения (число), что не возможно.

Задание 8.

Придумать исходные данные на указанные типы задач векторной алгебры и решить их.

Решение:

Рассмотрим одну из указанных задач, например, задачу 8,3:

Дано: $\vec{x} \perp \vec{a} = \{1;2;1\}, \vec{x} \perp \vec{b} = \{-1;3;2\}, \angle(\vec{x}, oy) -$ тупой, $\Rightarrow x_2 < 0, |\vec{x}| = 2.$

Найти: $\vec{x} = \{x_1; x_2; x_3\}$..

Решение:

По условию:

$\vec{x} \perp \vec{a} \Rightarrow (\vec{x}, \vec{a}) = 0 \Rightarrow 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0,$

$\vec{x} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{x}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow (-1) \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0,$

$|\vec{x}| = 2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 2.$

Итак, получили систему трех уравнений с тремя неизвестными, решением которой и будут проекции исходного вектора:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_3} + 2\dfrac{x_2}{x_3} + 1 = 0 \\ -\dfrac{x_1}{x_3} + 3\dfrac{x_2}{x_3} + 2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ по формулам Крамера находим отношение коэффициентов:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}, \frac{x_2}{x_3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{5} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{5} x_3, x_2 = \frac{-3}{5} x_3$$

$$\frac{1}{25} x_3^2 + \frac{9}{25} x_3^2 + x_3^2 = 4 \Rightarrow x_3^2 = \frac{100}{35} = \frac{20}{7} \Rightarrow x_3 = \pm\sqrt{\frac{20}{7}}.$$

Условие $x_2 < 0$ выполняется при $x_3 > 0$ то есть $x_3 = +\sqrt{\frac{20}{7}}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{35}}, x_2 = \frac{-3\sqrt{20}}{5\sqrt{7}} = -\frac{6}{\sqrt{35}}, x_3 = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{35}}.$$

Ответ: $\vec{x} = \left\{\frac{2}{\sqrt{35}}; -\frac{6}{\sqrt{35}}; \frac{10}{\sqrt{35}}\right\}.$

Второй способ решения:

По условию:

$$\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{x} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{x} \parallel \vec{y} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} = \{1; -3; 5\}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-3} = \frac{x_3}{5} = t, \Rightarrow x_1 = t, x_2 = -3t, x_3 = 5t.$$

Найденные значения x_1, x_2, x_3 подставим в условие $|\vec{x}| = 2$, найдем t так, что бы $x_2 < 0$.

Итак: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}} = \sqrt{t^2 + 9t^2 + 25t^2} = \pm\sqrt{35}t = 2 \Rightarrow t = \pm\dfrac{2}{\sqrt{35}}$.

Так как по условию $x_2 < 0,$ то $t = +\dfrac{2}{\sqrt{35}}$.

Итак:

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{35}}, x_2 = -\frac{6}{\sqrt{35}}, x_3 = \frac{10}{\sqrt{35}}.$$

Ответ: $\vec{x} = \left\{\dfrac{2}{\sqrt{35}}; -\dfrac{6}{\sqrt{35}}; \dfrac{10}{\sqrt{35}}\right\}$.

Задания для индивидуальной контрольной работы

Задание 1

Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 2

Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 3

Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

Задание 4

Найти угол между векторами $A\vec{B}$ и $A\vec{C}$.

Задание 5

Даны координаты точек $A, B, C.$ Вычислить:

1) $\text{пр}_{B\vec{C}} A\vec{B}$;
2) $\text{пр}_{\left(A\vec{B}+C\vec{B}\right)}(2A\vec{C} + 3C\vec{B})$;
3) $\left|A\vec{B} + 4B\vec{C}\right|$;
4) $\angle\left((A\vec{B} - C\vec{B}), A\vec{B}\right)$;
5) $(A\vec{B}, B\vec{C})$;
6) $\left(\left(A\vec{B} + 4B\vec{C}\right), \left(B\vec{A} - A\vec{C}\right)\right)$;
7) $\left[A\vec{B}, B\vec{C}\right]$;
8) $\left[\left(A\vec{B} + 2B\vec{C}\right), \left(C\vec{B} - A\vec{B}\right)\right]$;
9) $A\vec{B} \cdot B\vec{C} \cdot A\vec{C}$;

10) $\left[\left[\left(\vec{AB}+\vec{BC}\right),\vec{BC}\right],\vec{AC}\right]$;

11) $\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)\cdot\vec{AC}$;

12) орт вектора $\vec{AB}$;

Задание 6

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

1) объем пирамиды;
2) длину ребра AB;
3) площадь грани ABC;
4) угол между ребрами AB и AD;

Задание 7

Имеет ли смысл выражение ? Обосновать.

Задание 8

Придумать исходные данные на указанные типы задач векторной алгебры и решить их.

8.1 Дано: $\vec{x}\,\square\,\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\angle(\vec{x},oz)-$ острый (или с любой другой осью, тупой или острый), $|\vec{x}|=A$, где $A-$ произвольное число.

Найти: $\vec{x}=\{x_1;x_2;x_3\}$.

8.2 Дано: $\vec{x}\,\square\,\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},(\vec{x},\vec{a})=A$.

Найти: $\vec{x}=\{x_1;x_2;x_3\}$.

8.3 Дано: $\vec{x}\perp\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{x}\perp\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\angle(\vec{x},oy)-$тупой(острый или с любой другой осью), $|\vec{x}|=A$.

Найти: $\vec{x}=\{x_1;x_2;x_3\}$.

8.4 Дано: $\vec{x}\perp oz$ (любой другой оси), $(\vec{x},\vec{a})=A,\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},(\vec{x},\vec{b})=B,\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$.

Найти: $\vec{x}=\{x_1;x_2;x_3\}$.

8,5 Дано: $(\vec{x},\vec{a})=A,(\vec{x},\vec{b})=B,(\vec{x},\vec{c})=C$, где

$\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\},A,B,C-$ произвольные числа.

Найти: $\vec{x}=\{x_1;x_2;x_3\}$.

Варианты для индивидуальной контрольной работы.

ВАРИАНТ 1

1.1 $\vec{a}=\{1;-2;3\},\vec{b}=\{3;0;1\},\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}.$

2.1 $\vec{a}=\{1;3;-1\},\vec{b}=\{3;-2;3\}.$

3.1 $\vec{a}=\{2;3;-1\},\vec{b}=\{1;-1;3\},\vec{c}=\{1;9;-1\}.$

4.1 $A(1;-2;3),B(0;-1;2),C(3;-4;5).$

5.1 $A(1;2;1),B(-1;3;4),C(0;1;2).$

6.1 $A(1;1;1),B(-1;2;4),C(2;0;6),D(-2;5;-1).$

7.1 $\left(\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right],\vec{c}\right).$

ВАРИАНТ 2

1.2 $\vec{a}=\{1;0;1\},\vec{b}=\{-2;3;5\},\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.2 $\vec{a}=\{2;1;4\},\vec{b}=\{4;1;3\}.$

3.2 $\vec{a}=\{3;-2;1\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{3;-1;-2\}.$

4.2 $A(0;-3;6),B(-12;-3;-3),C(-9;-3;-6).$

5.2 $A(0;1;2),B(3;-1;2),C(-1;2;5).$

6.2 $A(0;5;0),B(2;3;-4),C(0;0;6),D(-3;1;-1).$

7.2 $\left(\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right),\vec{a}\right).$

ВАРИАНТ 3

1.3 $\vec{a}=\{-2;4;1\},\vec{b}=\{1;-2;7\},\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}.$

2.3 $\vec{a}=\{0;1;2\},\vec{b}=\{1;3;-2\}.$

3.3 $\vec{a}=\{2;-1;2\},\vec{b}=\{1;2;-3\},\vec{c}=\{3;-4;7\}.$

4.3 $A(3;3;-1),B(5;5;-2),C(4;1;1).$

5.3 $A(0;2;3),B(3;1;2),C(1;5;1).$

6.3 $A(0;0;6),B(4;0;-4),C(1;3;-1),D(4;-1;-3).$

7.3 $\left[\left[\vec{a},\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right],\vec{d}\right].$

ВАРИАНТ 4

1.4 $\vec{a}=\{1;2;-3\},\vec{b}=\{2;-1;-1\},\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}.$

2.4 $\vec{a}=\{1;2;1\},\vec{b}=\{3;1;2\}.$

3.4 $\vec{a}=\{1;2;4\},\vec{b}=\{2;1;-5\},\vec{c}=\{1;-1;-1\}.$

4.4 $A(-1;2;-3), B(3;4;-6), C(1;1;-1).$

5.4 $A(1;0;3), B(1;4;1), C(0;2;3).$

6.4 $A(-5;6;-1), B(6;-5;2), C(6;5;1), D(0;0;2).$

7.4 $\left[\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right),\vec{c}\right],\vec{d}\right].$

ВАРИАНТ 5

1.5 $\vec{a}=\{3;5;4\}, \vec{b}=\{5;9;7\}, \vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.5 $\vec{a}=\{2;1;7\}, \vec{b}=\{2;4;-3\}.$

3.5 $\vec{a}=\{2;-1;1\}, \vec{b}=\{1;2;3\}, \vec{c}=\{1;-3;-2\}.$

4.5 $A(-4;-2;0), B(-1;-2;4), C(3;-2;1).$

5.5 $A(1;1;0), B(4;1;2), C(1;2;3).$

6.5 $A(2;-5;3), B(3;2;-5), C(5;-3;-2), D(-5;3;-2).$

7.5 $\left[\left[\vec{a},5\vec{d}\right],\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right].$

ВАРИАНТ 6

1.6 $\vec{a}=\{1;4;-2\}, \vec{b}=\{1;1;-1\}, \vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}.$

2.6 $\vec{a}=\{-4;1;5\}, \vec{b}=\{1;3;1\}.$

3.6 $\vec{a}=\{3;-1;2\}, \vec{b}=\{2;-1;-1\}, \vec{c}=\{4;-2;-2\}.$

4.6 $A(5;3;-1), B(5;2;0), C(6;4;-1).$

5.6 $A(-1;4;2), B(5;2;3), C(0;1;2).$

6.6 $A(6;0;4), B(0;6;4), C(4;6;0), D(0;-6;4).$

7.6 $\left[\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right),\vec{d}\right].$

ВАРИАНТ 7

1.7 $\vec{a}=\{1;-2;5\}, \vec{b}=\{3;-1;6\}, \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.7 $\vec{a}=\{3;-1;2\}, \vec{b}=\{2;3;-1\}.$

3.7 $\vec{a}=\{1;1;-1\}, \vec{b}=\{7;3;-6\}, \vec{c}=\{-1;1;9\}.$

4.7 $A(-3;-7;-5), B(0;-1;-2), C(2;3;0).$

5.7 $A(3;-2;1), B(1;3;2), C(2;4;1).$

6.7 $A(3;2;4), B(2;4;3), C(4;3;-2), D(-4;-2;-3).$

7.7 $\left(\left(\vec{a},\vec{b}\right),\vec{c}\right).$

ВАРИАНТ 8

1.8 $\vec{a}=\{3;5;-1\},\vec{b}=\{2;-1;1\},\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.8 $\vec{a}=\{-4;-1;5\},\vec{b}=\{1;-3;1\}.$

3.8 $\vec{a}=\{2;-4;9\},\vec{b}=\{2;0;-3\},\vec{c}=\{7;9;-3\}.$

4.8 $A(2;-4;6),B(0;-2;4),C(2;3;0).$

5.8 $A(-1;3;-1),B(-3;2;3),C(-1;3;0).$

6.8 $A(6;3;5),B(5;-6;3),C(3;5;6),D(-6;-1;2).$

7.8 $\left(\left(\vec{a},\vec{b}\right),\vec{c}\right)\cdot\vec{c}.$

ВАРИАНТ 9

1.9 $\vec{a}=\{-2;-3;-2\},\vec{b}=\{1;0;5\},\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b},\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}.$

2.9 $\vec{a}=\{9;1;2\},\vec{b}=\{-1;1;4\}.$

3.9 $\vec{a}=\{1;1;1\},\vec{b}=\{1;1;-1\},\vec{c}=\{6;0;5\}.$

4.9 $A(0;1;-2),B(3;1;2),C(4;1;1).$

5.9 $A(1;-1;6),B(4;5;-2),C(-1;3;0).$

6.9 $A(5;-2;-1),B(4;0;0),C(2;5;1),D(1;2;5).$

7.9 $\left[\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c}\right],\vec{a}\right].$

ВАРИАНТ 10

1.10 $\vec{a}=\{-1;4;2\},\vec{b}\{3;-2;6\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}.$

2.10 $\vec{a}=\{8;2;3\},\vec{b}=\{-2;8;0\}.$

3.10 $\vec{a}=\{7;2;3\},\vec{b}=\{5;-3;2\},\vec{c}=\{10;-11;5\}.$

4.10 $A(3;3;1),B(1;5;-2),C(4;1;1).$

5.10 $A(7;1;2),B(-5;3;-2),C(3;2;5).$

6.10 $A(4;2;5),B(3;0;4),C(0;2;3),D(5;-2;-4).$

7.10 $\text{пр}_{\vec{a}}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$

ВАРИАНТ 11

1.11 $\vec{a}=\{5;0;-1\},\vec{b}=\{7;2;3\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{b}+6\vec{a}.$

2.11 $\vec{a}=\{7;3;4\},\vec{b}=\{-1;-1;1\}.$

3.11 $\vec{a}=\{1;2;1\},\vec{b}=\{3;-5;3\},\vec{c}=\{2;7;1\}.$

4.11 $A(2;1;-1),B(6;-1;5),C(4;2;1).$

5.11 $A(-2;3;-2), B(2;-3;2), C(-1;3;0)$.

6.11 $A(4;2;5), B(-3;0;4), C(0;2;3), D(5;2;-4)$.

7.11 пр $_{(\vec{d}+\vec{c})}\left[\vec{d},\vec{c}\right]$.

ВАРИАНТ 12

1.12 $\vec{a}=\{0;3;-2\}, \vec{b}=\{1;-2;1\}, \vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$.

2.12 $\vec{a}=\{6;-4;2\}, \vec{b}=\{1;2;7\}$.

3.12 $\vec{a}=\{2;1;-1\}, \vec{b}=\{3;-5;3\}, \vec{c}=\{2;-1;3\}$.

4.12 $A(-1;-2;1), B(-4;-2;5), C(-5;-2;2)$.

5.12 $A(4;2;-1), B(3;0;4), C(1;2;1)$.

6.12 $A(4;4;10), B(7;10;2), C(2;8;4), D(9;6;9)$.

7.12 пр $_{\left[\vec{d},\vec{c}\right]}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

ВАРИАНТ 13

1.13 $\vec{a}=\{-2;7;1\}, \vec{b}=\{-3;5;2\}, \vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$.

2.13 $\vec{a}=\{1;-2;3\}, \vec{b}=\{3;2;1\}$.

3.13 $\vec{a}=\{1;-1;-1\}, \vec{b}=\{1;4;2\}, \vec{c}=\{3;7;3\}$.

4.13 $A(6;-2;3), B(6;3;-2), C(7;3;-3)$.

5.13 $A(1;2;3), B(-1;2;-3), C(-2;3;1)$.

6.13 $A(4;6;5), B(6;9;4), C(2;10;10), D(7;5;9)$.

7.13 пр $_{(\vec{c}-3\vec{d})}\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$.

ВАРИАНТ 14

1.14 $\vec{a}=\{3;7;0\}, \vec{b}=\{1;-3;4\}, \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

2.14 $\vec{a}=\{-2;4;1\}, \vec{b}=\{2;1;0\}$.

3.14 $\vec{a}=\{-7;2;-3\}, \vec{b}=\{-5;3;2\}, \vec{c}=\{-10;11;-5\}$.

4.14 $A(0;0;4), B(-3;-6;1), C(-5;-10;-1)$.

5.14 $A(4;-5;2), B(1;-3;4), C(5;2;-4)$.

6.14 $A(3;5;4), B(8;7;4), C(5;10;3), D(4;7;8)$.

7.14 пр $_{(4\vec{c}-7\vec{d})}\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$.

ВАРИАНТ 15

1.15 $\vec{a}=\{-1;2;-1\},\vec{b}=\{2;-7;1\},\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.15 $\vec{a}=\{3;4;1\},\vec{b}=\{1;1;7\}.$

3.15 $\vec{a}=\{1;-2;1\},\vec{b}=\{-5;3;1\},\vec{c}=\{-7;2;1\}.$

4.15 $A(2;-8;-1),B(4;-6;0),C(-2;-5;-1).$

5..15 $A(4;4;9),B(7;10;2),C(2;8;4).$

6.15 $A(10;6;5),B(-2;8;4),C(6;8;9),D(7;10;3).$

7.15 пр$_{(\vec{c},\vec{d})}\left[\left(3\vec{d}-\vec{b}\right),\vec{c}\right].$

ВАРИАНТ 16

1.16 $\vec{a}=\{7;9;-2\},\vec{b}=\{5;4;3\},\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}.$

2.16 $\vec{a}=\{-1;4;2\},\vec{b}=\{2;2;3\}.$

3.16 $\vec{a}=\{-2;4;-9\},\vec{b}=\{-7;3;6\},\vec{c}=\{1;1;1\}.$

4.16 $A(3;-6;9),B(0;-3;6),C(9;-12;15).$

5.16 $A(4;6;5),B(6;9;4),C(7;5;9).$

6.16 $A(1;8;2),B(5;2;6),C(5;7;4),D(4;10;9).$

7.16 пр$_{3\vec{c}}\left[\vec{b},(\vec{a},\vec{c})\right].$

ВАРИАНТ 17

1.17 $\vec{a}=\{5;0;-2\},\vec{b}=\{6;4;3\},\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}.$

2.17 $\vec{a}=\{-5;1;3\},\vec{b}=\{2;1;3\}.$

3.17 $\vec{a}=\{3;4;5\},\vec{b}=\{2;1;3\},\vec{c}=\{-1;4;3\}.$

4.17 $A(0;2;-4),B(8;2;2),C(6;2;4).$

5.17 $A(3;5;4),B(8;7;4),C(4;7;8).$

6.17 $A(6;6;5),B(4;9;5),C(4;6;11),D(5;9;3).$

7.17 пр$_{((2\vec{a}-\vec{c}),\vec{d})}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$

ВАРИАНТ 18

1.18 $\vec{a}=\{8;3;-1\},\vec{b}=\{4;1;3\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}.$

2.18 $\vec{a}=\{4;3;7\},\vec{b}=\{-4;1;3\}.$

3.18 $\vec{a}=\{-5;6;-2\},\vec{b}=\{-2;-3;1\},\vec{c}=\{2;1;-1\}.$

4.18 $A(3;3;-1),B(5;1;-2),C(4;1;1).$

5.18 $A(10;6;5), B(-2;8;4), C(7;10;3).$

6,18 $A(7;2;2), B(5;7;7), C(5;3;1), D(2;3;7).$

7.18 пр $_{(\vec{a}-\vec{b})}\left(\left(3\vec{b}-\vec{d}\right),\vec{b}\right).$

ВАРИАНТ 19

1.19 $\vec{a}=\{3;-1;6\}, \vec{b}=\{5;7;10\}, \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=2\vec{b}+4\vec{a}.$

2.19 $\vec{a}=\{-4;2;1\}, \vec{b}=\{1;-2;1\}.$

3.19 $\vec{a}=\{5;6;1\}, \vec{b}=\{4;1;1\}, \vec{c}=\{2;-1;2\}.$

4.19 $A(-4;3;0), B(0;1;3), C(-2;4;-2).$

5.19 $A(6;3;5), B(8;7;3), C(5;10;4).$

6.19 $A(8;6;4), B(10;5;5), C(5;6;8), D(8;10;-7).$

7.19 пр $_{5\vec{b}-\vec{c}}\left(\left[4\vec{c},\vec{d}\right],\vec{a}\right).$

ВАРИАНТ 20

1.20 $\vec{a}=\{1;-2;4\}, \vec{b}=\{7;3;5\}, \vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.20 $\vec{a}=\{-6;7;1\}, \vec{b}=\{3;2;4\}.$

3.20 $\vec{a}=\{2;-1;4\}, \vec{b}=\{4;-1;1\}, \vec{c}=\{3;4;1\}.$

4.20 $A(1;-1;0), B(-2;-1;4), C(8;-1;-1).$

5.20 $A(1;8;2), B(5;2;6), C(6;9;3).$

6.20 $A(7;7;3), B(6;5;8), C(3;6;7), D(8;4;1).$

7.20 $\left[\left(\vec{d},\vec{c}\right),\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right].$

ВАРИАНТ 21

1.21 $\vec{a}=\{3;7;0\}, \vec{b}=\{4;6;-1\}, \vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}, \vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}.$

2.21 $\vec{a}=\{6;-7;-1\}, \vec{b}=\{2;1;5\}.$

3.21 $\vec{a}=\{-2;-1;4\}, \vec{b}=\{-4;1;-1\}, \vec{c}=\{1;1;2.\}$

4.21 $A(7;0;2)B(8;1;3), C(6;-1;2).$

5.21 $A(7;2;2), B(5;7;6), C(2;3;7).$

6.21 $A(4;0;0), B(-2;1;2), C(1;3;2), D(3;2;7).$

7.21 $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\left(\vec{c},\vec{d}\right)\right]\right].$

ВАРИАНТ 22

1.22 $\vec{a}=\{2;-1;4\},\vec{b}=\{3;-7;-6\},\vec{c}_1=2\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-3\vec{b}.$

2.22 $\vec{a}=\{3;-3;4\},\vec{b}=\{2;1;-1\}.$

3.22 $\vec{a}=\{2;1;3\},\vec{b}=\{3;-2;1\},\vec{c}=\{4;-2;3\}.$

4.22 $A(2;3;2),B(-1;3;-2),C(3;-7;-3).$

5.22 $A(-5;6;-1),B(2;4;3),C(5;2;-4).$

6.22 $A(-2;1;2),B(4;0;1),C(3;2;7),D(1;3;2).$

7.22 $\left[\left(\vec{b},\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right),\vec{c}\right].$

ВАРИАНТ 23

1.23 $\vec{a}=\{5;-1;-2\},\vec{b}=\{6;0;7\},\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=4\vec{b}-6\vec{a}.$

2.23 $\vec{a}=\{-4;-5;1\},\vec{b}=\{2;3;7\}.$

3.23 $\vec{a}=\{-3;1;-4\},\vec{b}=\{4;3;1\},\vec{c}=\{1;2;2\}.$

4.23 $A(2;2;7),B(0;-1;6),C(-2;5;7).$

5.23 $A(3;2;4),B(-3;1;-2),C(5;-2;3).$

6.23 $A(1;3;2),B(3;2;7),C(4;0;1),D(-2;1;-2).$

7.23 $\left(\left(\left[\vec{a},\vec{d}\right],\vec{a}\right),\vec{b}\right).$

ВАРИАНТ 24

1.24 $\vec{a}=\{-3;6;3\},\vec{b}=\{7;1;2\},\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}.$

2.24 $\vec{a}=\{-5;4;2\},\vec{b}=\{2;-1;1\}.$

3.24 $\vec{a}=\{4;3;-2\},\vec{b}=\{-1;2;2\},\vec{c}=\{2;2;1\}.$

4.24 $A(-1;2;-3),B(0;1;-2),C(-3;4;-5).$

5.24 $A(5;-2;1),B(4;2;5),C(-1;2;4).$

6.24 $A(3;2;7),B(1;3;2),C(-2;1;3),D(4;-2;3).$

7.24 $\left[\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c}\right],\vec{d}\right].$

ВАРИАНТ 25

1.25 $\vec{a}=\{4;2;9\},\vec{b}=\{0;-1;3\},\vec{c}_1=4\vec{b}-3\vec{a},\vec{c}_2=4\vec{a}-3\vec{b}.$

2.25 $\vec{a}=\{5;-4;2\},\vec{b}=\{3;5;2\}.$

3.25 $\vec{a}=\{3;1;4\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{5;4;3\}.$

4.25 $A(0;3;-6),B(9;3;6),C(12;3;3).$

5.25 $A(7;5;6),B(-2;-5;2),C(-3;1;0).$

6.25 $A(3;1;-2),B(1;-2;1),C(-2;1;0),D(2;2;5).$

7.25 $\left(np_{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{d}\right).$

ВАРИАНТ 26

1.26 $\vec{a}=\{2;-1;6\},\vec{b}=\{-1;3;8\},\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}.$

2.26 $\vec{a}=\{5;4;-2\},\vec{b}=\{4;4;3\}.$

3.26 $\vec{a}=\{-1;2;1\},\vec{b}=\{3;2;-1\},\vec{c}=\{-5;6;1\}.$

4.26 $A(3;3;-1),B(5;1;-2),C(4;1;-3).$

5.26 $A(-2;1;2),B(-1;-2;2),C(3;-1;4).$

6.26 $A(1;-2;1),B(3;1;-2),C(2;2;5),D(-2;1;0).$

7.26 $\left[np_{\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)}\left(\vec{a},\vec{b}\right),\vec{c}\right].$

ВАРИАНТ 27

1.27 $\vec{a}=\{5;0;8\},\vec{b}=\{-3;1;7\},\vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b},\vec{c}=12\vec{b}-9\vec{a}.$

2.27 $\vec{a}=\{7;-3;1\},\vec{b}=\{1;1;-4\}.$

3.27 $\vec{a}=\{-1;2;-2\},\vec{b}=\{4;5;4\},\vec{c}=\{6;5;1\}.$

4.27 $A(-2;1;1),B(2;3;2),C(0;1;3).$

5.27 $A(1;3;2),B(-2;3;2),C(-5;6;8).$

6.27 $A(-3;2;1),B(-2;1;0),C(1;-2;1),D(3;1;2).$

7.27 $np_{\left(\vec{b},\vec{c}\right)}\left(\vec{b},\vec{d}\right).$

ВАРИАНТ 28

1.28 $\vec{a}=\{-1;3;4\},\vec{b}=\{2;-1;0\},\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}.$

2.28 $\vec{a}=\{8;-2;3\},\vec{b}=\{1;3;2\}.$

3.28 $\vec{a}=\{2;-1;2\},\vec{b}=\{3;3;3\},\vec{c}=\{4;5;1\}.$

4.28 $A(1;4;-1),B(-2;3;-5),C(8;4;0).$

5.28 $A(3;1;-2),B(4;-2;7),C(-2;1;2).$

6.28 $A(1;-2;1),B(3;1;-2),C(2;2;5),D(-2;1;0).$

7.28 $np_{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\left(\vec{b},\vec{c}\right).$

ВАРИАНТ 29

1.29 $\vec{a}=\{4;2;-7\},\vec{b}=\{5;0;-3\},\vec{c}_1=2\vec{a}-5\vec{b},\vec{c}_2=6\vec{b}-2\vec{a}.$

2.29 $\vec{a}=\{-8;2;-3\},\vec{b}=\{2;2;3\}.$

3.29 $\vec{a}=\{-2;1;-3\},\vec{b}=\{2;2;1\},\vec{c}=\{1;1;2\}.$

4.29 $A(0;1;0),B(0;2;1),C(1;2;5).$

5.29 $A(1;-2;1),B(-2;3;2),C(1;3;-2).$

6.29 $A(-3;1;2),B(-2;1;1),C(1;-2;3),D(3;2;1).$

7.29 $\left(\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right),\vec{c}\right],\left[\vec{d},\vec{c}\right]\right).$

ВАРИАНТ 30

1.30 $\vec{a}=\{2;0;-5\},\vec{b}=\{1;-3;-4\},\vec{c}_1=2\vec{a}+6\vec{b},\vec{c}_2=5\vec{a}-2\vec{b}.$

2.30 $\vec{a}=\{3;6;-7\},\vec{b}=\{1;2;1\}.$

3.30 $\vec{a}=\{2;-1;4\},\vec{b}=\{1;1;2\},\vec{c}=\{1;2;-3\}.$

4.30 $A(-4;0;4),B(-1;6;7),C(1;10;9).$

5.30 $A(2;2;5),B(3;2;7),C(3;5;8).$

6.30 $A(2;-1;1),B(2;2;5),C(3;2;1),D(1;-2;1).$

7.30 $\left[\vec{a},\left(\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{d}\right)\right].$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский.-М. : Наука, 1980.-175 с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. - М. - Наука, 1975. - 239 с.
3. Привалов И.И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. - М.: Гос. изд-во физ. - мат. лит-ры, 1961. - 229 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов. - М. : Высшая математика, 1974. - 415 с.