

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**“Амалий математика ва
информатика” кафедраси**

МАТЕМАТИК ДАСТУРЛАШ фанидан

Амалий ва тажриба машғулоти учун ўқув қўлланма

Йўналиш: – 5480100 Амалий математика ва информатика,
5521200 Информатика ва ахборот технологиялари,
5340600 Молия,
5340900 Бухгалтерия ҳисоби ва аудит



Термиз – 2011 й.

Аннотация

Ушбу ўқув - қўлланма иқтисодий йўналишдаги олий ўқув юртларининг бакалавриат йўналишидаги талабалар учун “Математик программалаш” фанидан тузилган намунавий ўқув дастури асосида яратилган. Ҳар бир ўтилган назарий маъруза мавзусини талабалар томонидан амалий жихатдан мустаҳкамлаш мақсадида, тўпламга киритилган масалалар мавзулар бўйича амалий машғулотларга бўлинган. Деярлик барча масалаларда шу машғулот мавзусига оид қисқача назарий маълумотлар ва типик масалаларнинг ечиш намуналари келтирилган.

Такдим этилаётган амалий масалалар тўпламидан амалий машғулот дарсларидан ташқари мустақил таълим жараёнларида ҳам фойдаланиш мумкин.

Тузувчилар: и.ф.н., доцент Садатов О.Х..
К.ўқт.Муратов А.
Ўқт. Соқиева О.Б.

Такризчилар: ТерДУ “Иштимой-иқтисодий таълим”
кафедраси мудири, и.ф.д. Хатамов О.Қ.
ТерДУ “Амалий математика ва
информатика” кафедраси,
ф-м.ф.н. доцент М.Чориев.

Термиз давлат университети илмий
услубий кэнгашида тасдиқланган
“ _____ ” “ _____ ” 2011 й. Баённома № _____

М У Н Д А Р И Ж А

К И Р И Ш	4
1. ОПТИМАЛЛАШ МАСАЛАСИ	5
1.1. Оптимал ечимни қабул қилиш ва унинг асосий босқичлари	5
1.2. Оптималлаш масаласининг иқтисодий математик модели	6
2. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ	8
2.1. Чизикли дастурлаш масаласининг иқтисодий математик модели	8
2.2. Ишлаб чиқаришни режалаштиришнинг иқтисодий математик модели	10
3. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ	18
3.1. Чизикли тэнгламалар тизимини ечиш	18
3.2. Чизикли дастурлаш масаласини ечишнинг график усули	24
3.3. Симплекс жадвал усули	28
3.4. Excel дастурий воситасида чизикли дастурлаш масаласини ечиш	35
3.5. Чизикли дастурлаш масаласини ечишнинг сунъий базис усули	37
3.6. Чизикли дастурлашнинг ўзаро икки ёқлама масаласи	40
4. ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ	51
4.1. Транспорт масаласининг иқтисодий математик модели	51
4.2. Транспорт масаласини ечиш усуллари	52
4.3. Очiq турдаги транспорт масаласи	56
5. ЧИЗИҚСИЗ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ	61
5.1. Чизиксиз дастурлаш масаласининг қўйилиши	61
5.2. Шартсиз оптималлаш масаласини ечиш усуллари	62
5.3. Лагранж аниқмас қўпайтувчилар усули	65
5.4. Шартли оптималлаш масаласини ечиш	66
5.5. Градиент усуллар	68
5.6. Excel дастурий воситасида чизиксиз дастурлаш масаласини ечиш	75
6. ДИНАМИК ДАСТУРЛАШ ВА УНИНГ ЭНГ СОДДА МАСАЛАЛАРИ	79
6.1. Динамик дастурлашнинг асосий масаласи	79
6.2. Инвестицияни тақсимлаш масаласи	85
7. ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ	93
7.1. Ўйинлар назарияси ҳақида асосий тушунчалар	93
7.2. Матрицали ўйинларни чизикли дастурлаш масаласи кўринишида ифодалаш	95
Фойдаланилган адабиётлар	98

К И Р И Ш

Математик дастурлаш усуллари иқтисодий математиканинг кўп вариантли ечимга эга бўлган масалаларда энг яхши, мақсадга мувофиқ, яъни оптимал ечимни топишга ёрдам берувчи йўналишидир.

Математик дастурлаш курси чизикли дастурлаш, чизикли бўлмаган дастурлаш ва динамик дастурлаш деб аталувчи қисмларни ўз ичига олади. Дастурлаш шундай жараёнки, унда энг аввал бошланғич ечим топилади ва кейин бу ечим қадамба-қадам яхшиланиб борилади. Бу жараён энг яхши дастур топулгунча давом эттирилади ва ҳар бир қадамда махсус кўрсатмалар ёрдамида қандай иш тутиш, ҳамда оптимал ечимга қандай яқинлашиш кераклиги кўрсатилиб борилади.

Ушбу қўлланма еттита бўлимдан иборат бўлиб, ҳар бир бўлимда қисқача назарий маълумотлар ва уларга мос амалий машғулот учун масалалар келтирилган. Биринчи бўлимда оптималлаш масаласи ва унинг классификацияси келтирилган. Иккинчи ва учунчи бўлимларда чизикли дастурлаш масалалари ва уларни ечиш усуллари берилган. Бу ерда Excel дастурий воситасида чизикли дастурлаш масалаларини қандай қилиб ечиш кетма-кетлиги масалалар ёрдамида қадамба-қадам қилиб келтирилган. Тўртинчи бўлимда транспорт масаласи ва уни ечиш усуллари берилган. Бешинчи бўлимда чизиксиз дастурлаш масалалари ва уларни ечиш усуллари берилган. Бўлимда Excel дастурий воситасида чизиксиз дастурлаш масалаларини қандай қилиб ечиш кетма-кетлиги келтирилган. Олтинчи бўлимда динамик дастурлашнинг энг содда масалалари, жумладан инвестицияни тақсимлаш масаласи ва унга доир масалалар келтирилган. Еттинчи бўлимда ўйинлар назарияси ҳақида тушунчалар ва матрицали ўйинларни чизикли дастурлаш масалалари кўринишида ифодалаш келтирилган.

Қўлланмада асосий эътибор чизикли ва чизиксиз дастурлаш масалаларини ечиш усулларига ҳамда компьютер дастурий воситаларидан фойдаланиб уларни ечишга қаратилган. Бу эса иқтисодий масалаларни иқтисодий математик моделлаштириш ва уларни компьютердан фойдаланиб ечишда талабаларнинг амалий билимларини янада мустаҳкамлашини ва мустақил шуғулланишини таъминлайди.

Қўлланма техника, амалий математика ва иқтисод йўналишидаги олий ўқув юртлари ўқитувчилари, магистрлари ва талабалари учун қизиқиш туғдиради ва уларга иқтисодий математик моделлар ва усуллар курсининг математик дастурлаш ва оптималлаштириш усулларига доир масала ва масалаларни ечишда асосий маслаҳатчи сифатида кўмак беради деган умуддамиз.

1. МАТЕМАТИК ДАСТУРЛАШНИНГ ОПТИМАЛЛАШ МАСАЛАСИ

1.1. Оптимал ечимни излаш ва унинг асосий босқичлари

Чизикли программалаштириш(ЧП) инсон фаолиятининг турли соҳаларида кенг қўлланиладиган фанлардан биридир унинг асосий йўналиши эса оптималлаштириш масаласидир. Бу соҳасидаги муваффақиятларга катта техник тизимларни лойиҳалаш ва таҳлил қилиш натижасида эришилган.

Инсон олдида қўйиладиган барча масалаларни ечишда яхши ёки ёмон деган ечимни қабул қилиши мумкин. Ечим қабул қилиш жараёни формаллашган ва формаллашмаган ҳолда бўлиши мумкин.

Формаллашмаган ечим қабул қилиш – бу ижод, санъатдир. Формаллашмаган ечимни қабул қилишда инсондан ҳеч нарса талаб этмайди. Масалан, инсон ўтирди, ўйлади, ечим қабул қилди. Ҳақиқатдан ҳам бу ҳолда ечимнинг тўғрилигига ҳеч қандай кафолат йўқ. Инсон кўп ҳолларда ҳеч қандай асоссиз ўзи ўйлаган ҳолда, айрим ҳолларда эса тажрибасига ишонган ҳолда ечимларни қабул қилади.

Формаллашган ечимга келсак, у аниқ тавсияга асосланиб қабул қилинади.

Формаллашган ечим қабул қилиш иккита усулга асосланади:

- мантикий моделлаш;
- оптималлаш

Мантикий моделлашда юқори билимга эга бўлган мутахассислар томонидан усул танланиб, унинг ёрдамида бирор бир ҳолат ёки бошқа ҳолатда нима қилиш кераклиги аниқланади. Бунда математик мантикий функциялар хизмат қилади.

Ечим қабул қилишнинг оптималлаш усули қуйидагиларга асосланади:

- иқтисодий математик моделлаш;
- компьютерда масалани ечиш;
- бошланғич маълумотлар;

Иқтисодий математик моделлашнинг иккита имконияти мавжуд:

- қўйилган саволга тез жавоб бериш;
- кенг тажриба ўтказиш имконияти.

Ечим қабул қилиш алгоритми анча мураккаб бўлиб, айниқса ҳозирги бозор иқтисодиёти даврида компьютерни қўлламасдан туриб амалий жиҳатдан бажариш мумкин эмас. Компьютерда оптимал ечимни излаш алгоритми учун ишлаб чиқилган дастурий таъминот ва бошланғич маълумотсиз изланаётган натижага эришиб бўлмайди.

Маъқул бўлган ечимларни қабул қилишни қуйидагича этапларга бўлиш мумкин:

1. Масалани танлаш. Бунда масала қандай талабларни қаноатлантириши кераклиги аниқлаштирилади.

2. Масалани қўйиш. Бунда масаланинг иқтисодий иқтисодий математик модели ва унинг элементлари аниқланади.

3. Масаланинг иқтисодий математик моделини тузиш. Бу этапда оптимал ечим қабул қилишга асосланган иқтисодий математик моделни тузиш масаласи қаралади.

4. Масала учун бошланғич маълумотларни йиғиш. Бу этапда тузилган иқтисодий математик моделга мос бошланғич маълумотлар йиғилади.

5. Масалани ечиш. Бу этапда керакли усул танланиб масала ечилади.

6. Ечимни таҳлил қилиш. Бу этапда олинган оптимал ечим иқтисодий математик модел асосида таҳлил қилинади.

7. Оптимал ечимни қабул қилиш. Оптимал ечимни олинган натижаларга асосланиб мутахассис томонидан қабул қилинади.

Ечимни график кўринишда тасвирлаш оптимал ечимни қабул қилишда муҳим фактор бўлиб, унда маълумотлар яққол тасвирланади.

1.2. Иқтисодий масаланинг математик модели

Бирор иқтисодий масаланинг математик моделини оддий бир ҳол учун кўриб чиқайлик. Тўғри бурчакли параллелопед формага эга бўлган бакни лойиҳалаштириш керак бўлсин. Бунда унинг ҳажмини ҳисоблаш формуласи қуйидагича бўлади.

$$V=a \cdot b \cdot h$$

бу ерда a , b , h – идишнинг томонлари.

Бу масаланинг иқтисодий математик моделини тузиш учун масала қўйилиши тавсифини бериш керак: ҳажми $V=2000$ га тенг бўлган бак ўлчамини аниқлаш талаб этилсин ва бакни тайёрлаш учун кам материал кетсин, унинг майдони (сирти)

$$S=2 \cdot [a \cdot b + (a+b) \cdot h].$$

Бундай масаланинг иқтисодий математик модели қуйидагича ёзилади.

$$F=S \rightarrow \min$$

$$V=2000$$

Бу ёзув $V=2000$ шарт билан S катталикини минималлаштириш маъносини билдиради.

Бундан юқоридагиларга асосланиб қуйидагича ёзамиз.

$$F=2 \cdot [a \cdot b + (a+b) \cdot h] \rightarrow \min$$

$$a \cdot b \cdot h=2000$$

Бу боғланишларга яна кўпроқ компьютер учун керак бўлган шартни қўшамиз. Бу шарт тўртбурчак томонлари фақат мусбат қийматга эга бўлишлиги шартидир, яъни $a, b, h > 0$. У ҳолда масаланинг оптимал ечимини излашнинг янги қуйидаги иқтисодий математик моделига эга бўламиз.

$$\text{МФ (ЦФ)} \quad F=2 \cdot [a \cdot b + (a+b) \cdot h] \rightarrow \min$$

$$\text{ЧГ (ОГР)} \quad a \cdot b \cdot h=2000$$

$$\text{ЧШ (ГРУ)} \quad a, b, h > 0.$$

Бу модел учта асосий ташкил этувчилардан иборат: мақсад функцияси (МФ); чегаралаш (ЧГ); чегаравий шарт (ЧШ).

Бу оптималлаш масаласининг иқтисодий иқтисодий математик моделида $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=h$ белгилашларни киритиб уни қуйидагича ёзамиз.

$$F=2 \cdot [x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) \cdot x_3] \rightarrow \min$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=2000$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0.$$

Ёки буни умумлаштирган ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned} F &= f(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \min \\ g(x_1, x_2, x_3) &= B \\ x_1, x_2, x_3 &> 0. \end{aligned}$$

У ҳолда юқоридагиларни ҳисобга олиб оптималлаш масаласининг умумлашган иқтисодий математик моделини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned} F &= f(x_j) \rightarrow \min(\max, \text{Const}) \\ g_i(x_j) &\leq B_i \\ d_j \leq x_j \leq D_j \quad &i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Бу модел формулалари иқтисодий маъноларини берамиз:

1) мақсад функцияси (МФ) – оптималлаш критерияси бўлиб, масала ечимининг оптималлигини кўрсатади. Бунда мақсад функцияси 3 турга мўлжалланган бўлиши мумкин: максималлаштириш; минималлаштириш; берилган қийматга мўлжалланган.

2) чегаралаш (ЧГ) – ўзгарувчилар ўртасидаги боғланишларни ўргатади. Улар бир тарафлама ёки икки тарафлама бўлиши мумкин, масалан:

$$\begin{aligned} g_i(x_j) &\leq B_i && \text{бир тарафлама берилиш;} \\ A_i \leq g_i(x_j) &\leq B_i && \text{икки тарафлама берилиш.} \end{aligned}$$

Excel дастури ёрдамида оптималлаш масаласини ечишда икки тарафлама чегаралаш, иккита бир тарафлама чегаралашга ажратиб берилади, яъни

$$\begin{aligned} g_i(x_j) &\geq A_i \\ g_i(x_j) &\leq B_i \end{aligned}$$

3) чегаравий шарт (ЧШ) – қиймати изланаётган ўзгарувчиларга чегаралашларни қўяди.

Масаланинг барча чегаралашлар ва чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечимларга – мумкин бўлган ечимлар тўплами дейилади.

Иқтисодий математик модел элементлар турларига қараб оптималлаш масаласини қуйидаги синфларга ажратиш мумкин:

А) Чизикли дастурлаш. Бунда боғланишлар чизикли, изланаётган ўзгарувчилар узлуксиз ва бошланғич маълумотлар аниқ қийматлар бўлади.

Б) Чизиксиз дастурлаш. Бунда боғланишлар чизиксиз, изланаётган ўзгарувчилар узлуксиз ёки бутун сонли бўлиб, бошланғич маълумотлар ҳам аниқ қийматлар бўлади.

В) Динамик дастурлаш. Бунда боғланишлар чизикли ёки чизиксиз бўлиб, кўпроқ вақтга боғлиқ масалалар қаралади.

Мавзулар бўйича саволлар

1. Ечим қабул қилиш жараёни қандай ҳолда бўлиши мумкин?
2. Мантиқий моделлаш деганда нимани тушунасиз?
3. Ечим қабул қилишда оптималлаш усули нималарга асосланади?
4. Масаланинг мумкин бўлган ечимлари деганда нимани тушунасиз?
5. Оптималлаш масаласини қандай синфларга ажратиш мумкин?
6. Мақсад функцияси нима?
7. Ўзгарувчилар орасидаги боғланишлар қандай бўлиши мумкин?
8. Ечимлар қабул қилишнинг асосий этапларини айтиб беринг?

У ҳолда бундай масалага каноник кўринишда берилган чизиқли дастурлаш масаласи дейилади.

Чизиқли моделга келтириладиган қуйидаги иқтисодий масалани кўриб чиқайлик.

Масала. Корхона уч турдаги маҳсулотни ишлаб чиқаради, уни буюртмачиларга етказиши ва бозорга сотувга чиқаради.

Бозордаги талаб шартини биринчи турдаги маҳсулот сонини 2000, иккинчидан 3000, учинчидан 5000 тадан ортишига йўл қўйилмайди.

Маҳсулотни ишлаб чиқаришда 4 турдаги ресурс қўлланилади. Битта маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарф бўладиган ресурс миқдори ҳамда ҳар бир турдаги маҳсулотни сотишдан олинadиган фойда 2.1-жадвалда келтирилган.

- 1) Буюртмачиларни таъминлаш учун;
- 2) Маҳсулот миқдори ошириб кетмаслиги учун;
- 3) Максимал фойдани олиш учун ишлаб чиқариш жараёнини қай тарзда ташкиллаштириш керак?

2.1. жадвал

Ресурс тури	Маҳсулот тури			Жами ресурслар
	1	2	3	
1	500	300	1000	25 000 000
2	1000	200	100	30 000 000
3	150	300	200	20 000 000
4	100	200	400	40 000 000
Фойда	20	40	50	

Иқтисодий математик моделни қуриш.

Иқтисодий математик моделни қуриш этапларини кетма-кет бажарамиз.

- 1) Мақсад-максимал фойда олиш.

- 2) Ўзгарувчилар:

x_1 – биринчи турдаги маҳсулотлар сони;

x_2 – иккинчи турдаги маҳсулотлар сони;

x_3 – учинчи турдаги маҳсулотлар сони;

- 3) Чекланишлар: буюртмачилар таъминлансин, ресурслар захираси доирасидан чиқиб кетилмасин, бозор маҳсулотга тўлиб кетмасин.

Ушбу чекланишларни ҳисобга олган ҳолда масаланинг мавжуд ечимлар соҳасини ёзиб олайлик:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2000, \\ x_3 \geq 2500, \\ x_1 \leq 2000, \\ x_2 \leq 3000, \\ x_3 \leq 5000 \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \leq 25000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 20000000, \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \leq 20000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \leq 40000000. \end{cases}$$

Тизимдаги биринчи учта тенгсизлик буюртмачилар талабига тўғри келади. 4 дан 6 гача бўлган тенгсизликлар бозордаги талабни ифодалайди. Охирги тўртта тенгсизликлар ресурс бўйича чекланишларни кўрсатади.

5) Масаланинг мақсад функцияси ёки самарадорлик мезонининг кўриниши қуйидагича:

$$P = 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \max$$

Формулада фойда P ҳарфи билан белгиланган. Уни максималлаштириш керак. x_1 , x_2 , x_3 билан белгиланган ҳар бир қўшилувчи берилган турдаги маҳсулотни ишлаб чиқаришдан олинган фойдани англатади.

Чекланишлар ҳамда мақсад функцияси бош ўзгарувчилар бўйича чизиқли, бундан келиб чиқадики берилган модел чизиқлидир.

2.2 Корхона тайёр маҳсулот ишлаб чиқариш режаси математик модели

Корхона тайёр маҳсулот ишлаб чиқариш учун m – ҳил ресурсларга эга бўлсин. Ҳар бир ресурсларнинг ҳажми маълум бўлиб, бир бирлик маҳсулотга кетадиган мос ресурсларнинг нормаси ҳам аниқ дейлик. Айрим ишлаб чиқариладиган маҳсулотларга талаб ҳам аниқ ва уларнинг бир бирлиги учун оладиган даромади ҳам берилган. Ресурсларнинг чекланганлигини ҳисобга олган ҳолда, ҳар бир ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг ҳажмини аниқлаш керак.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

j – ресурс номери;

m – ресурс сони;

i – ишлаб чиқариладиган маҳсулот номери;

n – ишлаб чиқариладиган маҳсулот сони;

A_i – i -чи ресурсларнинг ҳажми;

a_{ij} – бир бирлик j -чи маҳсулотга i -чи ресурсдан кетадиган норма;

B_j – j -чи маҳсулотга бўлган бошқа корхоналар талаби;

c_j – ҳар қайси ишлаб чиқаришдан келадиган иқтисодий фойда;

x_j – ҳар бир ишлаб чиқариладиган маҳсулот ҳажми.

Ишлаб чиқаришнинг шундай X режасини тузиш талаб қилинадики, тайёрланадиган маҳсулотнинг ҳар бири ($x_1, x_2, \dots, x_n$) дан энг кўп умумий фойда келадиган бўлсин.

У ҳолда масаланинг иқтисодий иқтисодий математик модели қуйидагича бўлади:

1) Мақсад функцияси.

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

2) Ресурслар учун қуйидаги чекланишлар;

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq A_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

3) Талаблар учун чекланишлар:

$$x_j \geq B_i$$

4) Ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаслик шarti.

$$x_j \geq 0$$

Бу қўйилган масаланинг иқтисодий математик моделидир. Уни ҳисоблаш натижасида корхона ишлаб чиқаришининг оптимал режасини, яъни фойда максимал бўладиган ҳамда ресурслар захирасидан ошиб кетмайдиган ҳар бир турдаги маҳсулотлар сонини аниқлаш мумкин. Қуйидаги иккита амалий масалани алоҳида ечиб кўрайлик.

1-масала. Фабрика икки хил A ва V тикув махсули ишлаб чиқаради. Бу маҳсулотларни ишлаб чиқаришда уч хил N_1, N_2, N_3 турдаги материалларни ишлатади. N_1 – материалдан 15 м., N_2 – материалдан 16 м., N_3 – материалдан 18 м., мавжуд.

M_1 – маҳсулотни ишлаб чиқариш учун N_1 - дан 2 м., N_2 - дан 1 м., N_3 - дан 3 м. ишлатади.

M_2 – маҳсулотни ишлаб чиқариш учун N_1 - дан 3 м., N_2 - дан 4 м., N_3 - дан 0 м. ишлатади.

M_1 – маҳсулотнинг бир бирлигидан келадиган фойда 10 сўмни, M_2 – маҳсулотдан келадиган фойда 5 сўмни ташкил этади.

Ишлаб чиқаришнинг шундай режасини тузиш керакки фабрика максимал фойда олсин. Масаланинг иқтисодий математик моделини тузамиз:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

$$3x_1 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$Z = 10x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

2-масала. Завод икки хил A ва B товар ишлаб чиқаради. Бу товарларни ишлаб чиқаришда тўрт хил R_1, R_2, R_3, R_4 ресурсларни ишлатади, яъни:

R_1 – токор станогида 5700 норма соат.

R_2 – фрезерчи станогида 3700 норма соат.

R_3 – йиғиш учун 5000 норма соат.

R_4 – ярим фабрика 610 кг.

A – маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун:

R_1 – дан 300 норма соат.

R_2 – дан 200 норма соат.

R_3 – дан 200 йиғиш норма соат.

R_4 – дан 10 кг керак бўлади.

В – маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун:

R_1 – дан 400 норма соат.

R_2 – дан 100 норма соат.

R_3 – дан 500 йиғиш норма соат.

R_4 – дан 75 кг керак бўлади.

А – маҳсулотдан энг камида 10 та.

В – дан чекланмаган.

Бир бирлик А – маҳсулот келадиган фойда 3 минг сўмни, В – дан 8 минг сўмни ташкил қилади. Ишлаб чиқаришнинг шундай режасини тузишимиз керак, завод максимал фойда олсин. Масаланинг иқтисодий математик моделини тузамиз.

x_1 – А маҳсулот ҳажми

x_2 – В маҳсулот ҳажми

1) Ресурсларга бўлган чекланишни тузамиз:

$$300x_1 + 400x_2 \leq 5700$$

$$200x_1 + 100x_2 \leq 3700$$

$$200x_1 + 500x_2 \leq 5000$$

$$10x_1 + 70x_2 \leq 610$$

2) А маҳсулотни ишлаб чиқариш учун минимал чегара:

$$x_1 \geq 10, x_2 \geq 2 \text{ дан исталганча.}$$

3) Ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаслик шарти

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4) Мақсад функцияси

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

Мустақил ечиш учун амалий масалалар

Қуйидаги масаланинг иқтисодий математик моделларини тузинг.

1. Икки ҳил товарни (А ва В) сотишда савдо корхонаси уч ҳил ресурс ишлатади. Бир бирлик товар учун келадиган ресурслар ҳажми жадвалда берилган. Бир бирлик А товардан келадиган фойда 2\$, В товардан келадиган фойда 3\$.

Савдо корхонасига максимал фойда олиб келувчи, товарлар сотилишининг оптимал режасини аниқланг.

Ресурслар	Бир бирлик товарга келадиган ресурс нормаси		Ресурслар ҳажми
	А	В	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

2. Цех икки хил маҳсулот ишлаб чиқаради. Биринчи маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун 2 соат, иккинчисининг бир бирлигини тайёрлаш учун 3 соат сарфлайди. Бир бирлик биринчи маҳсулотни сотишдан корхона 8\$, иккинчисининг бир бирлигидан 6\$ фойда кўради. Цех биринчи маҳсулотдан 100 дан, иккинчисидан эса 200 дан кам бўлмаган сонда чиқариш лозим. Агар ишлаб чиқарувчи иккинчисининг иш вақти фонди 900 одам/соат бўлса, цех юқори фойда олиши учун биринчи ва иккинчи маҳсулотдан қанчадан ишлаб чиқариши керак бўлади.

3. Корхона уч турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Унинг бир ойлик дастури биринчисидан 2000, иккинчисидан 1800 ва учинчисидан 1500. Маҳсулотларни ишлаб чиқаришда бир ойда энг ками 61000 кг. материал ишлатади. Биринчи маҳсулотнинг бир бирлиги учун 8 кг, иккинчиси учун 10 кг ва учинчиси учун 11 кг материал сарф бўлади. Биринчи маҳсулот бир бирлиги нархи 7\$, иккинчисиники 10\$ ва учинчисиники 9\$. Корхона оптимал фойда олувчи ишлаб чиқариш режасини тузинг.

4. А ва В деталларни қайта ишлаш учун учта станокда амалга оширилади. А детални сотишдан келадиган фойда 10\$, В деталдан 16\$ ни ташкил этади. Деталларни қайта ишлаш нормаси жадвалда берилган. Максимал фойда олиб келувчи ишлаб чиқариш дастурини тузинг. А маҳсулотдан 300 бирлик, В маҳсулотдан 200 бирликдан кам бўлмасин.

Станоклар	Детални қайта ишлаш норма соати		Станокларни ишлаш соати
	А	В	
1	0.2	0.1	100
2	0.2	0.5	180
3	0.1	0.2	100

5. Кондитер фабрикасида 3 хил карамел ишлаб чиқариш учун уч хил ҳомашё ишлатилади. Корхонадаги I ҳомашёнинг захираси 600 т., II ҳомашёнинг захираси 240 т. ва III ҳомашёнинг захираси 120 т. бўлсин. 1 т. карамел ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли ҳомашёнинг миқдори ҳамда корхонани турли карамеллар ишлаб чиқаришдан оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ҳомашё турлари	Карамеллар			Ҳомашё захираси
	1	2	3	
I	0,6	0,5	0,4	600
II	0,4	0,2	0,3	240
III	-	0,3	0,3	120
Даромад (долл)	140	150	130	

Корхонанинг даромадини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

6. Учта А, В, С маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 3 хил ҳомашё ишлатилади. Ҳаммаси бўлиб I ҳомашё 180 кг. II ҳомашё 210 кг. ва III ҳомашё 244 кг. дан ошмаган миқдорда ишлатиш мумкин. Ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли ҳомашёларнинг миқдори (нормаси) ҳамда ишлаб чиқариладиган маҳсулотларнинг баҳоси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ҳомашё турлари	Маҳсулот турлари			Ҳомашё ишлатиш
	А	В	С	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Маҳсулот баҳоси	10	14	12	

Ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул қийматини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

7. Тикув фабрикасида 4 хил маҳсулот тайёрлаш учун 3 хил газмол ишлатилади. Ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун зарур бўлган газмолнинг миқдори (нормаси), маҳсулотларнинг баҳоси ҳамда фабрикадаги газмоллар захираси ҳақидаги маълумотлар қуйидаги жадвалда келтирилган.

Газмол артикули	1 та маҳсулот учун сарф қилинадиган газмол миқдори (нормаси)				Фабрикадаги газмоллар захираси
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Маҳсулот баҳоси	9	6	4	7	

Фабрикада ишлаб чиқарилган маҳсулотлар пул қийматини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

8. Корхонада 4 хил маҳсулот 3 хил ускуналар ёрдамида ишлаб чиқилади. Бир бирлик маҳсулотни турли хил ускуналарда ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган вақт нормаси, ҳар бир ускуна учун ажратилган вақт фонди ҳамда ҳар бир маҳсулотдан корхонанинг оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ускуна турлари	Бир бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган вақт				Ускуналарнинг умумий иш фонди
	1	2	3	4	
I	2	1	1	3	300
II	1	-	2	1	70
III	1	2	1	-	340
Бир бирик маҳсулотдан олинадиган даромад	8	3	2	1	

Фабрикада ишлаб чиқарилган маҳсулотлар пул қийматини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

9. Одам организми учун бир суткада 118 г. оқсил моддаси, 56 г. ёғ, 500 г. углевод ва 8 г. минерал тузлар керак. Бир килограмм турли маҳсулотлар таркибидаги бу озукка моддаларининг миқдори, маҳсулотларнинг баҳоси қуйидаги жадалда келтирилган.

Ускуна турлари	Бир бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган вақт						
	Гўшт	балиқ	сут	сарёғ	пиш-лок	Дон маҳсулотлари	Картошка
Оқсил моддаси	180	190	30	10	260	130	21
Ёғлар	20	3	40	865	310	30	2
Углевод	-	-	50	6	20	650	200
Минерал тузлар	9	10	7	12	610	20	10
Маҳсулот баҳоси	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Умумий харажатларни минималлаштирувчи бир кунлик овқатланиш режаси (рацион) тузилсин.

10. Уч хил ҳомашёдан шундай аралашма тайёрлаш керакки, у 26 бирлик А моддани, 30 бирлик В моддани, 24 бирлик С моддани ўз ичига олсин. Бир бирлик ҳомашёлар таркибидаги турли химик моддаларнинг миқдори ҳамда ҳомашёларнинг нархи қуйидаги жадвалда келтирилган.

Химик моддалар	1 кг ҳомашё таркибидаги турли химик моддалар миқдори			
	1	2	3	4
А	1	1	-	4
В	2	-	3	5
С	1	2	4	9
1 кг ҳомашёнинг баҳоси	5	6	7	4

Фабрикада ишлаб чиқарилган маҳсулотлар пул қийматини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

11. 110 см. лик пўлат хипчинлардан узунликлари 45 см, 35 см ва 50 см бўлган хомаки маҳсулотлар тайёрлаш керак бўлсин. Талаб қилинган хомаки маҳсулотлар миқдори мос равишда 40, 30 ва 20 бирликни ташкил қилсин. Пўлат хипчинларни мумкин бўлган кесиш йўллари ва уларга мос келувчи хомаки маҳсулотлар ва чиқиндилар миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хомаки маҳсулотлар узушликлари	Кесиш вариантлари					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Чиқиндилар миқдори	20	30	15	5	25	10

Турли кесиш усуллари бўйича қанча пўлат хипчинлар кесганда тайёрланган хомаки маҳсулотлар талабдагидан кам бўлмайди ва чиқиндиларнинг миқдори минимал бўлади.

12. 65 см. лик пўлат хипчинлардан узушликлари 29 см, 21 см ва 15 см бўлган 3 хил хомаки маҳсулотлар тайёрлаш керак бўлсин. Талаб қилинган хомаки маҳсулотлар миқдори мос равишда 100, 200 ва 150 бирликни ташкил қилсин.

Пўлат хипчинларни мумкин бўлган кесиш йўллари ва уларга мос келувчи хомаки маҳсулотлар ва чиқиндилар миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хомаки маҳсулотлар узушликлари	Кесиш вариантлари					
	1	2	3	4	5	6
1	2	-	1	-	1	-
2	-	3	-	-	1	2
3	-	-	2	4	1	1
Чиқиндилар миқдори	7	2	6	5	0	8

Турли кесиш усуллари бўйича қанча пўлат хипчинлар кесганда тайёрланган хомаки маҳсулотлар талабдагидан кам бўлмайди ва чиқиндиларнинг миқдори минимал бўлади.

13. Баҳорги ва кузги буғдой етказиш учун 2 хил типдаги ер майдонидан фойдаланилади. 1 тип ер майдони 0,6 млн.га, 2 тип ер майдони эса 0,4 млн.га.ни ташкил қилади. Турли типдаги ерлардаги кузги ва баҳорги буғдойнинг ҳосилдорлиги қуйидаги жадвалда келтирилган.

Буғдой турлари	Ҳосилдорлик ц/га		Реж.асосан буғ.миқд.
	1 тип ер	2 тип ер	
Кузги	25	20	12
Баҳорги	20	25	8
Умумий ер миқдори	0,6	0,4	

Кузги буғдойдан 12 млн.с. дан кам бўлмаган, ҳамда баҳорги буғдойдан 8 млн.с. дан кам бўлмаган миқдорда ҳосил олиш учун ҳар бир типдаги ердаги экин майдони қанча бўлиши керак?

14. Қуйида келтирилган жадвалдаги маълумотлар асосида қайси қишлоқ хўжалик маҳсулотини қанча гектар ерга экканда етказилган маҳсулотлар миқдори режадагидан кам бўлмайди, ҳамда умумий даромад максимал бўлади?

Маҳсулот турлари	Ҳосилдорлик ц/га		Реж.асосан буғ.миқд.	Даромад (1 с. сўм)
	1 тип ер	2 тип ер		
Пахта	25	25	5300	15
Буғдой	20	25	2000	5
Умумий ер майдони	0,6	200		

Мавзулар бўйича саволлар

1. Математик дастурлаш математиканинг қандай йўналишидан ҳисобланади?
2. Дастурлаш деганда нимани тушунаси?
3. Чизиқли ва чизиқсиз функцияга таъриф беринг.
4. Чизиқли дастурлаш масаласининг иқтисодий математик моделини тушунтириб беринг.
5. Чизиқли дастурлаш масаласи қандай кўринишларда бўлади?
6. Қандай ечим мумкин бўлган ечим дейилади?
7. Қандай ечим оптимал ечим дейилади?
8. Ишлаб чиқаришни режалаштиришнинг иқтисодий математик моделига тушунтириш беринг.

Ечиш. Фирма ҳар куни А1 маҳсулотдан x_1 , А2 маҳсулотдан x_2 , А3 маҳсулотдан x_3 ва А4 маҳсулотдан x_4 ҳажмда ишлаб чиқаради. У ҳолда масала қуйидаги тенгламалар тизимига келади.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 2250 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 1550 \\ 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 1850 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 = 1700 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини вектор формада ёзамиз

$$A \cdot X = B.$$

Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2250 \\ 1550 \\ 1850 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

Бу масалани Excel электрон жадвал процессорида ечиш кетма-кетлиги қуйидагича:

1. А матрица элементлари электрон жадвалга киритилади.

2. В вектор элементлари электрон жадвалга киритилади.

3. A^{-1} тескари матрица топилади:

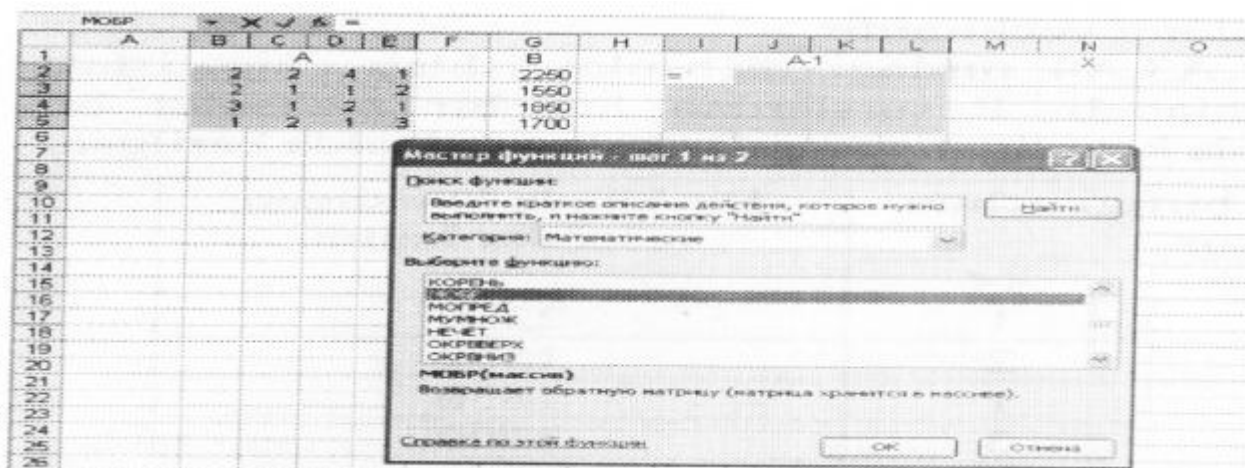
3.1. А матрица элементлари ажратилади;

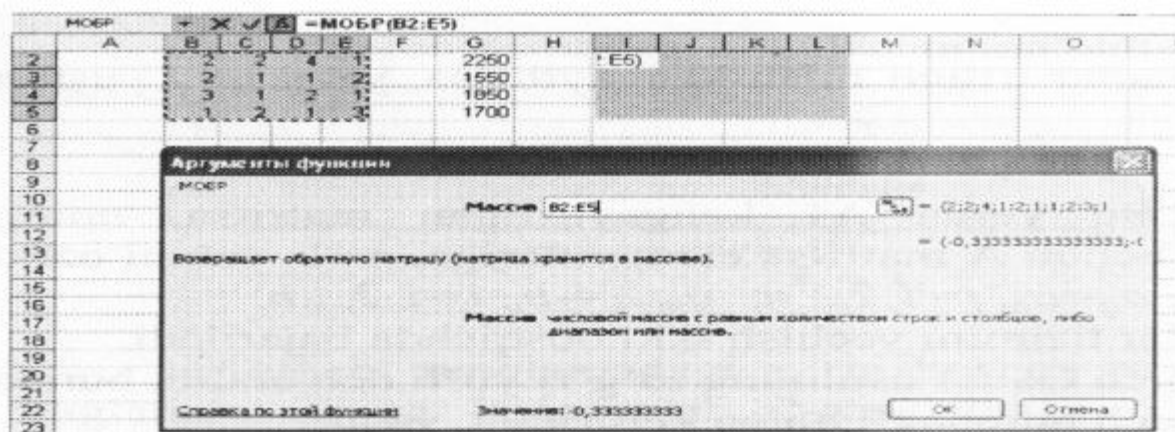
3.2. Ctrl тугмасини босган ҳолда электрон жадвалдан A^{-1} тескари матрица элементлари чиқиши керак бўлган жойлар ҳам ажратилади;

3.3. “Вставка функции” (fx) пиктограммаси босилади;

3.4. Мулоқот ойнасининг категориялар бўлиmidан математика, кейинги дарчадан МОБР функцияси танланиб ОК тугмаси босилади;

3.5. Яна А матрица элементлари ажаратилиб массив адреси аниқланади ва Ctrl+Shift+Enter тугмалари барабар босилади. Натижада A^{-1} тескари матрица элементлари ҳосил бўлади. Расмларда бу жараён кўрсатилган.





4. Топилган A-1 матрица B векторга кўпайтирилади.

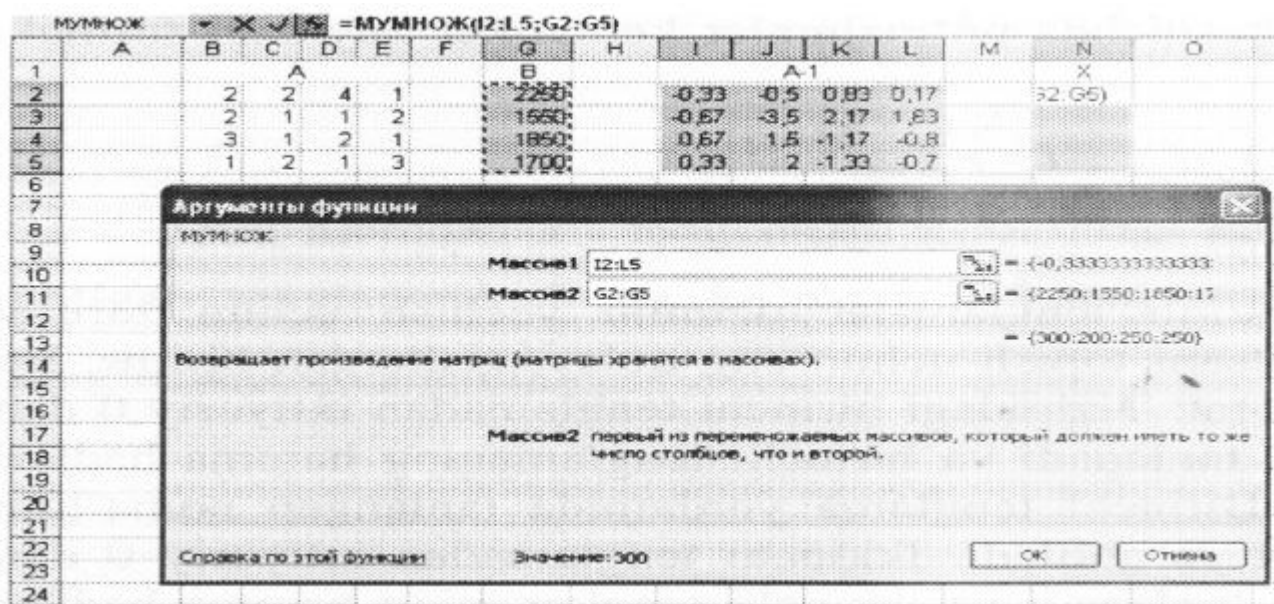
4.1. A^{-1} тескари матрица элементлари ажратилади;

4.2. Ctrl тугмаси босилган ҳолда B вектор элементлари кейин ҳисобланиши керак бўлган X вектор элементлари ажратилади;

4.3. “Вставка функции” (fx) пиктограммаси ҳосил бўлади;

4.4. Мулоқот ойнасининг категориялар бўлимидан математика, кейинги дарчадан УМНОЖ функцияси танланиб ОК тугмаси босилади;

4.5. Олдин A^{-1} матрица элементлари ажратилиб массив адреси аниқланади, кейин B вектори элементлари ажратилиб массив адреси аниқланади ва Ctrl+Shift+Enter тугмалари барабар босилади. Натижада X векторида ҳосил бўлади. Расмларда бу жараён кўрсатилган.



N5		A (=МУМНОЖ(D2:L5;G2:G5))													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1		A					B			A-1					X
2		2	2	4	1		2250		-0,33	-0,5	0,83	0,17		300	
3		2	1	1	2		1550		-0,67	-3,5	2,17	1,83		200	
4		3	1	2	1		1850		0,67	1,5	-1,17	-0,8		250	
5		1	2	1	3		1700		0,33	2	-1,33	-0,7		250	
6															
7															

Демак, фирма томонидан бир кунда ишлаб чиқиладиган маҳсулотлар ҳажми мос равишда A1 маҳсулотдан 300, A2 маҳсулотдан 200, A3 маҳсулотдан 250 ва A4 маҳсулотдан 250 тенг экан.

А) Тенгламалар системасини номаълумларни кетма-кет йўқатиш(Гаусс) усули билан ечамиз.

Система матрицаси A озоод ҳадлар устуни билан кенгайтирилса, яъни $n+1$ устун қилиб озоод ҳадлар киритилса, уни

$$A_1 X = 0$$

Кўринишида ёзиш мумкин. Бу ерда A1 матрица кенгайтирилган матрица, унинг элементлари $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$ учун A матрица элементларига $n+1$ – устуни озоод ҳадларга тенг қилиб олинган, яъни, $a_{ij}=a_{ij}, j=1, 2, \dots, n; a_{in+1}=-b_i, i=1, 2, \dots, n$.

Юқоридаги (3.1) тенгламалар системасини ечиш икки этапда бажарилади.

Биринчи этап. Бу этап Гаусс усулининг тўғри йўли деб аталиб, бунда тенгламалар системаси матрицаси A1 уч бурчакли ҳолга келтирилади, яъни

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \dots & a_{1n-1}^1 & a_{1n}^1 & a_{1n+1}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & \dots & a_{2n-1}^2 & a_{2n}^2 & a_{2n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & a_{n-1n}^{n-1} & a_{n-1n+1}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & a_{nn+1}^n \end{pmatrix}$$

Бу матрица элементлари $k=1,2,\dots,n$ учун кетма-кет

$$a_{kj}^k = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}; \quad a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{kj}^{k-1} \cdot a_{ik}^{k-1}; \quad i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{k+1, n+1}$$

формулалар билан ҳисобланади.

Иккинчи этап. Бу босқичда номаълумлар кетма-кет қуйидаги формула билан аниқланади.

$$x_i = a_{in+1}^i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^i x_j; \quad i = \overline{n, 1}$$

Б) Тенгламалар системасини Жордан-Гаусс усули ёрдамида ечиш.

Жордан-Гаусс усули чизикли тенгламалар системасини ечиш учун зарурат туғилганда A^{-1} тескари матрицани топиш учун энг қулай усуллардан биридир. Бу усул моҳияти қуйидагилардан иборат: Системадаги биринчи тенгламадан ихтиёрий 0 дан фарқли коэффициентли номаълум танланади ва биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадлари шу коэффициентга бўлинади. Биринчи тенглама ёрдамида танланган номаълум бошқа ҳамма тенгламалардан йўқотилади. Иккинчиси тенгламадан ихтиёрий 0 дан фарқли коэффициентли номаълум танланади ва иккинчиси тенгламанинг ҳамма ҳадлари шу коэффициентга бўлиб чиқилади. Бу тенглама ёрдамида танланган номаълум қолган ҳамма тенгламалардан йўқотилади ва ҳақозо.

- бирорта тенгламанинг чап томони 0 га айланиб, ўнг томони 0 дан фарқли бўлиб қолиши мумкин. Бу ҳолда система ечимга эга бўлмайди.

- бирорта тенгламанинг чап томони ва ўнг томони ҳам 0 га айланиб, қаноатлантирганлиги сабаб уни ташлаб юбориш мумкин.

- ҳар бир тенгламадан биттадан номаълум топилгандан сўнг система ечими ҳосил бўлади.

Масала.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

1) Биринчи тенгламадаги x_1 ни бошқа тенгламалардан йўқотиш учун 1-тенгламани 2 га кўпайтириб 2-тенгламага, (-1) га кўпайтириб, 3-тенгламага қўшамиз. Натижада қуйидаги тизим ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_3 = 4. \end{cases}$$

2) Иккинчи тенгламадан x_2 ни танлаб, бу тенгламани x_2 олдидаги коэффициент 3 га бўламиз. Бу ерда коэффициент 3 ни аниқловчи коэффициент деб атаймиз. Ҳосил бўлган тенгламани (-1) га кўпайтириб биринчи тенгламага қўшамиз. Натижада қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = -\frac{1}{3}, \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{7}{3}, \\ 2x_3 = 4. \end{cases}$$

3) Бу системадан 3 – тенгламани x_3 олдидаги коэффициент 2 га бўламиз. Ҳосил бўлган тенгламани $2/3$ га кўпайтириб 1-тенгламага ва $1/3$ га кўпайтириб, 2-тенгламага қўшамиз.

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Жордан – Гаусс усули бўйича қилган ҳамма ишларимиз натижасида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицани бирлик матрицага айлантирдик. Бундан бажарган ҳамма алгебраик алмаштиришларимиз берилган A матрицани A^{-1} матрицага кўпайтиришга эквивалент эканлиги кўринади.

Масала.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Берилган тизимга Жордан-Гаусс усулини қўллаб, қуйидаги тизимга эга бўламиз.

$$\begin{cases} x_1 & -\frac{1}{7}x_4 = \frac{3}{7}, \\ & x_2 + \frac{41}{56}x_4 = -\frac{53}{56}, \\ & x_3 + \frac{3}{4}x_4 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Бундан системанинг умумий ечимини топамиз.

$$x_1 = \frac{3}{7} + \frac{1}{7}x_4; x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{41}{56}x_4; x_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_4.$$

Бу ерда x_1, x_2, x_3 ўзгарувчиларга базис ўзгарувчилар, x_4 ўзгарувчига эса озод ўзгарувчи дейилади. Чунки бу ўзгарувчи турли қийматларни қабул қилиши мумкин. Озод ўзгарувчига нол қиймат бериб, тизимнинг базис ечимлари топилади, яъни

$$x_1 = \frac{3}{7}; x_2 = -\frac{53}{56}; x_3 = \frac{1}{4}; x_4 = 0.$$

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги системаларни тескари матрицани топиш ва Гаусс усуллари ёрдамида ечинг.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 11x + 3y - z = 15, \\ 2x + 5y + 5z = -11, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -8, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -6, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Қуйидаги системаларнинг Жордан-Гаусс усули ёрдамида ихтиёрий базис ечимларини топинг.

1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

4.

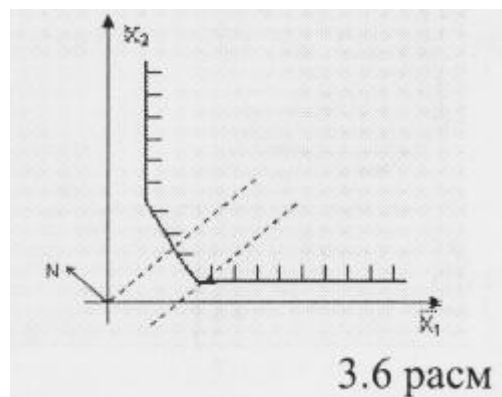
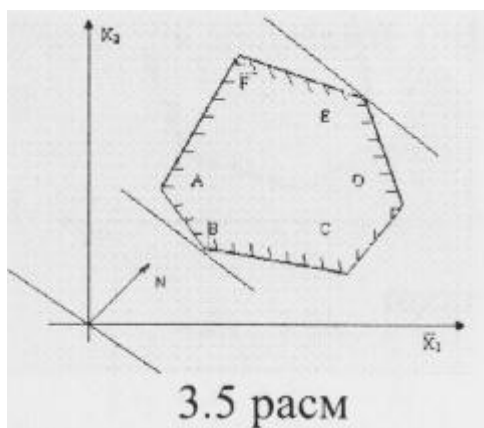
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

3.2. Иқтисодий масалаларни график усулда ечиш

$n=2$ бўлганда тенгсизликлар системасидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Бу тенгсизликларнинг ҳар бири $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ тўғри чизик билан, ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари $x_j \geq 0 \quad j=1,2$ эса $x_j = 0$ тўғри чизик билан чегараланган ярим текисликлар бўлади. Тенгсизликлар системаси биргаликда бўлганлиги учун ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлади, яъни чегаравий тўғри чизиклар бир-бири билан кесишиб, мумкин бўлган (ўринли) ечимлар тўпламини ҳосил қилади. Демак, $n=2$ бўлганда мумкин бўлган ечимлар тўплами кўпбурчакнинг нуқталаридан иборат бўлади.



2-хол. $c_1x_1+c_2x_2=const$ тўғри чизик $N(c_1,c_2)$ вектор бўйича силжиб бориб каварик кўпбурчакнинг бирорта четки нуктасида минимум ёки максимум қийматга эришади. Бундай ҳолда чизикли функция юқоридан чегараланган, куйидан эса чегараланмаган (3.7 расм) ёки куйидан чегараланган юқоридан эса чегараланмаган бўлиши мумкин (3.8 расм). Баъзи чизикли функциялар юқоридан ҳам куйидан ҳам чегараланган бўлиши мумкин (3.9 расм).

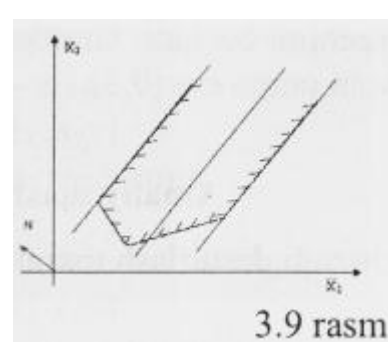
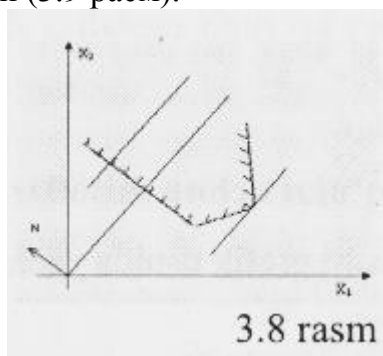
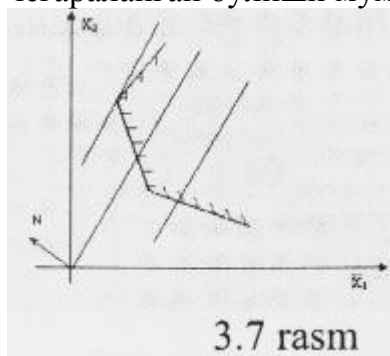
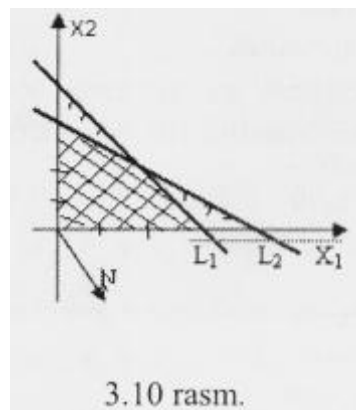


График усул билан масалани ечишда куйидаги кетма-кетликни бажарамиз:

1. Тенгламалар ёки тенгсизликлар системасининг графиклари қурилади.
2. Ҳар бир тенгсизликнинг текисликдаги аниқланиш томонлари (соҳаси) белгиланади.
3. Мумкин бўлган ечимлар соҳаси ажратилади.
4. $N=(c_1, c_2)$ вектори қурилади ва унга $(0,0)$ нуктада перпендикуляр ўтказилади.
5. Кўпбурчакдан перпендикулярга параллел чизикни вектор йўналиши бўйича параллел силжитиб экстремал нукта топилади. Агар Z функциянинг минимал қийматига мос нуктани топиш керак бўлса, у ҳолда бу нукта p векторга перпендикулярнинг шу вектор йўналиши бўйича силжитганда мумкин бўлган нукталар соҳасининг биринчи нуктасига мос келади. Максимум қиймат берувчи нукта эса энг охириги нукта бўлади. Агар вектор қиймати (манфий ишора) $-N$ бўлса, юқоридаги ҳолнинг тескари бўлади.
6. Оптимал нукта координатаси топилади ва Z функция қиймати ҳисобланади.

Масала. Қуйидаги оптималлаш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 & (L_1) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 & (L_2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ Z = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max \end{cases}$$



Берилган тенгсизликларнинг графикларини X_1Ox_2 текисликда курамиз ва мумкин бўлган ечимлар соҳасини аниқлаймиз (3.10 расм). Соҳа графигида штрихланган жойни аниқлайди. Чунки бу жой ҳамма тенгсизликларни қаноатлантирувчи соҳадир. Мумкин бўлган ечимлар соҳасидан оптимал ечимни аниқлаймиз. Аниқлаш учун $(0,0)$ нуктадан ўтувчи $N=(2,-5)$ векторини ясаймиз ва унинг йўналишини аниқлаймиз. $(0,0)$ нуктада бу векторга N перпендикулярини ўтказамиз ва уни вектор йўналиши бўйича силжитамиз. Соҳа билан перпендикулярнинг охири кесишиш нуктаси Z функциясига максимал қиймат берувчи нуктадир. Бу нукта $(3,0)$ бўлиб унинг координатаси $x_1=3, x_2=0$ масаланинг ечими бўлади. Графикдан кўришиб турибдики Z функцияга минимум қиймат берувчи нукта эса $(0,3)$.

Мустақил ечиш учун масалалар

. Қуйидаги чизикли дастурлаш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{aligned} 1. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = -x_1 + x_2 \Rightarrow \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = -x_1 - x_2 \Rightarrow \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = 2x_1 - 5x_2 \Rightarrow \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = -x_1 - x_2 \Rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = -x_1 + x_2 \Rightarrow \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = x_1 + x_2 \Rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = x_1 - x_2 \Rightarrow \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad & 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\ & Z = x_1 + x_2 \Rightarrow \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = -x_1 + x_2 \Rightarrow \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = -x_1 - x_2 \Rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = x_1 - x_2 \Rightarrow \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & 3x_1 - x_2 \geq 6 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = -x_1 - x_2 \Rightarrow \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = x_1 - x_2 \Rightarrow \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad & -3x_1 - x_2 \geq 6 \\
& x_1 \geq 1; \quad x_2 \geq 1 \\
& Z = x_1 + x_2 \Rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = x_1 - x_2 \Rightarrow \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16. \quad & -2x_1 - x_2 \geq 4 \\
& x_1 \geq 1; \quad x_2 \geq 1 \\
& Z = x_1 + x_2 \Rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17. \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 - x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = x_1 - 2x_2 \Rightarrow \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18. \quad & -3x_1 - x_2 \geq 6 \\
& x_1 \geq 1; \quad x_2 \geq 1 \\
& Z = x_1 + x_2 \Rightarrow \min
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
19. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \\
& Z = x_1 - x_2 \Rightarrow \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
20. \quad & -2x_1 - x_2 \geq 4 \\
& x_1 \geq 1; \quad x_2 \geq 1 \\
& Z = x_1 + x_2 \Rightarrow \min
\end{aligned}$$

3.3. Чизиқли дастурлаш масаласининг Симплекс усули

Симплекс усули чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг асосий усулларида бири бўлиб, кетма-кет яқинлашиш усули ёрдамида $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўтказувчиларнинг шундай оптимал қийматини топадики, бу қийматлар мақсад функциясига максимал (ёки минимал) қиймат берилади.

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласи берилган бўлсин:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

Масалани ечиш учун симплекс жадвал қурамиз ва симплекс усули ғоясини бериш учун берилган масалани қуйидагича каноник формада ёзамиз.

[illegible]

Бу ерда x_{n+1} – озод ўзгарувчилар дейилади. Уларни қулайлик, ҳамда бошқа ўзгарувчилардан фарқлаш учун мос равишда $y_1, y_2, \dots, y_m$ деб белгилаймиз ва яна қуйидаги белгилашларни киритамиз $b_{i0}=b_i$; $b_{ij}=a_{ij}$; $b_{0j}=c_j$. Бу белгилашлар асосида қуйидаги симплекс жадвал деб аталувчи жадвални тузамиз.

BO'	1	-x ₁	-x ₂	...	-x _s	...	-x _n
y ₁	b ₁₀	b ₁₁	b ₁₂	...	b _{1s}	...	b _{1n}
y ₂	b ₂₀	b ₂₁	b ₂₂	...	b _{2s}	...	b _{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
y _s	b _{r0}	b _{r1}	b _{r2}	...	b_{rs}	...	b _{rn}
...	...	...	...	...	...	...	...
y _m	b _{m0}	b _{m1}	b _{m2}	...	b _{ms}	...	b _{mn}
Z	b ₀₀	b ₀₁	b ₀₂	...	b _{0s}	...	b _{0n}

Чизиқли дастурлаш масалсини симплекс усул ёрдамида ечиш икки этапдан иборат:

1. Бошланғич таянч режани топиш.
2. Таянч планлар ичидан масаланинг оптимал режасини топиш.

А) Масаланинг таянч режасини топиш.

Бошланғич таянч режасини топиш куйидаги алгоритм бўйича бажарилади:

1. Симплекс жадвалдан хал қилувчи элементни топиш:

1.1. Ҳал қилувчи элементни топиш олдин ҳал қилувчи устунни топишдан бошланади. Бунинг учун озод ҳадлар устунига қаралади. Агар озод ҳадлар устунигадаги элементлар ҳаммаси мусбат бўлса, бу бошланғич план таянч план бўлади ва иккинчи этапга ўтилади. Агар манфий элемент мавжуд бўлса, улардан модул бўйича энг каттаси танланади (агар битта бўлса шу элемент ўзи олинади). Масала учун айталик бу элемент b_{r0} бўлсин. Шу b_{r0} элемент турган r сатр қаралади. Агар сатр элементларидан ҳаммаси мусбат бўлса, масаланинг ечими мавжуд бўлмайди (бу ҳолда ҳисоблашлар шу жойда тўхтатилади). Агар сатрда манфий элемент мавжуд бўлса, улардан модул бўйича энг каттаси танланади (агар битта бўлса ўзи олинади). Шу элемент турган устун ҳал қилувчи устун дейилади. Масала учун бу s -чи устун бўлсин.

1.2. Ҳал қилувчи сатр топилади. Озод ҳадларни ҳал қилувчи устун элементларига бўлиб чиқилади ва улардан мусбатларининг энг кичиги танланади, яъни

$$\min \left\{ \frac{b_{10}}{b_{1s}}; \frac{b_{20}}{b_{2s}}; \dots; \frac{b_{r0}}{b_{rs}}; \dots; \frac{b_{m0}}{b_{ms}} \right\}.$$

Айтайлик, бу нисбатлар ичида мусбатларнинг энг кичиги b_{r0}/b_{rs} бўлсин. У ҳолда шу b_{rs} элемент турган сатр ҳал қилувчи сатр дейилади, b_{rs} элементининг ўзи эса ҳал қилувчи элемент бўлади.

2. Ҳал қилувчи устун ва сатр ўзгарувчилари ўринлари алмаштирилади, (яъни x_s ва y_s янги жадвалда ўринлари алмашади).

3. Жадвалда симплекс алмаштириш бажарилади.

3.1. Ҳал қилувчи устун элементлари ҳал қилувчи элементга бўлиб чиқилиб янги жадвалга ёзилади, яъни $b_{is} = -b_{is}/b_{rs}$ ($i \neq r$).

3.2. Ҳал қилувчи сатр элементлари ҳал қилувчи элементга бўлиб чиқилиб янги жадвалга ёзилади, яъни $b'_{rj} = b_{rj}/b_{rs}$ ($j \neq s$).

3.3. Ҳал қилувчи элемент 1 га тенглаштирилиб ўзига бўлинади, яъни $b'_{rs} = 1/b_{rs}$.

3.4. Янги симплекс жадвалнинг қолган элементлари қуйидаги формула орқали топилади.

$$b'_{ij} = \frac{b_{ij}b_{rs} - b_{is}b_{rj}}{b_{rs}} \quad \text{ёки} \quad b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{is}b_{rj}}{b_{rs}}; \quad i \neq r, \quad j \neq s$$

Янги жадвалда b'_{ij} – элементни ҳисоблашда эски жадвалдан b_{ij} , b_{is} , b_{rj} , b_{rs} элементларини топиш қуйидагича бўлади:

$b_{ij} - b'_{ij}$ элементнинг эски жадвалдаг унга мос элемент;

$b_{is} - b_{ij}$ элемент турган сатр билан b_r ҳал қилувчи элемент устуни кесишмасидаги элемент;

$b_{rj} - b_{ij}$ элемент турган устун билан b_{rs} ҳал қилувчи элемент сатри кесишмасидаги элемент;

b_{rs} – ҳал қилувчи элемент.

BO'	1	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_s$	...	$-x_n$
y_1	b'_{10}	b'_{11}	b'_{12}	...	b'_{1s}	...	b'_{1n}
y_2	b'_{20}	b'_{21}	b'_{22}	...	b'_{2s}	...	b'_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
x_s	b'_{r0}	b'_{r1}	b'_{r2}	...	b'_{rs}	...	b'_{rn}
...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	b'_{m0}	b'_{m1}	b'_{m2}	...	b'_{ms}	...	b'_{mn}
Z	b'_{00}	b'_{01}	b'_{02}	...	b'_{0s}	...	b'_{0n}

4. Янги топилган симплекс жадвалда таянч план мавжуд бўлса иккинчи босқичга, яъни оптимал планни топишга ўтилади, акс ҳолда юқоридаги жараён янги жадвал учун токи таянч план топилгунча қайта такрорланади.

Б) Масаланинг оптимал режасини топиш.

Агар 1 босқичдан олинган таянч планнинг симплекс жадвалдаги Z-сатр элементлари (озод ҳади b'_{00} дан ташқари) ҳаммаси мусбат бўлса, бу олинган бошланғич таянч план ягона ва у масаланинг оптимал режаси (ечими) бўлади. Агар Z сатрдаги ҳамма мусбат элементлардан камида биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда масаланинг чексиз кўп оптимал режаси мавжуд бўлади. Агар Z сатрдаги элементлардан ҳеч бўлмаганда биттаси манфий бўлса, оптимал план қуйидаги алгоритм бўйича топилади:

1. Ҳал қилувчи элементни топиш.

1.1. Ҳал қилувчи устун топилади. Z-қатордаги манфий элементларнинг модули бўйича энг каттаси (битта бўлса ўзи) танланади. Шу элемент турган устун ҳал қилувчи устун бўлади.

1.2. Ҳал қилувчи сатр топилади. Озод ҳадлар элементлари ҳал қилувчи устун элементларига бўлиб чиқилади ва улардан мусбатларининг энг кичиги олинади, яъни биринчи босқичнинг 1.2 пунктидаги каби. Бу сонга мос келувчи устундаги элемент ҳал қилувчи элемент ва шу элемент турган сатр эса ҳал қилувчи сатр бўлади.

2. Ҳал қилувчи сатр устун ўзгарувчилари ўз жойларини алмаштиради.

3. Жадвалда симплекс алмаштириш бажарилади. Симплекс алмаштириш 1-босқичдаги 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 пунктлар каби бажарилади.

4. Янги топилган жадвалнинг Z сатри қаралади. Агар Z қатордаги ҳамма элементлар мусбат бўлса, олинган охириги план масаланинг оптимал режаси бўлади. Акс ҳолда юқоридаги 1,2,3 пунктлар яна такрорланади, токи оптимал план топилгунча.

Изоҳ: Чизиқли дастурлаш масаласида, агар мақсад функциясининг минимуми изланса юқоридаги 1-чи пунктлар босқич тўлиғича ўринли бўлиб, 2-босқичда эса фақат Z-қатор элементлари манфий ҳолатга келтирилиши керак, яъни тескари ҳолат бўлади.

1-мисол

$$z=5x_1-x_2+3x_3$$

чизиқли функцияга максимум қиймат берувчи

$$x_1+x_2+x_3\leq 2$$

$$4x_1+2x_2+x_3\leq 3$$

$$x_1-x_2+2x_3\leq -1$$

$$-3x_1+2x_2-2x_3\leq 5$$

$$x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0$$

чегаравий тизимнинг мумкин бўлган ечимлари соҳасида номаълумлар топилсин. Чегаравий тизимни каноник кўринишда қуйидагича ёзиб оламиз.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$

$$4x_1+2x_2+x_3+x_5=3$$

$$x_1-x_2+2x_3+x_6=-1$$

$$-3x_1+2x_2-2x_3+x_7=5$$

$$x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0$$

Тенгламада базис ўзгарувчиларни симплекс ўзгарувчилардан фарклаш учун $x_4=y_1$, $x_5=y_2$, $x_6=y_2$, $x_7=y_4$ белгилашларни киритамиз ва Симплекс жадвал тузамиз.

So' \ Bo'	1	-x ₁	-x ₂	-x ₃
y ₁	2	1	1	1
y ₂	3	4	2	1
y ₃	-1	1	-1	2
y ₄	5	-3	2	-2
Z	0	-5	1	-3

Ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаслик шарти беерилганлигини ҳисобга олиб, тўғридан-тўғри таянч ечимни топишга киришамиз. Озод ҳадлар ичида -1 манфий ишорали коэффицент бор. Шу қатордан ишораси манфий бўлган модул бўйича энг катта элементни топамиз. У x_2 устундаги -1 элементдир. Қоидага биноан мусбат ичидан энг кичигини топамиз:

$$+\min \{2/1, 3/2, -1/-1, 5/2\}=1/1$$

Демак, унга мос элемент x_2 устундаги -1 элемент. Бу элемент ҳал қилувчи элемент бўлади. Энди Симплекс алмаштириш қилиб, қуйидаги жадвални тузамиз.

So' \ Bo'	1	-x ₁	-y ₃	-x ₃
y ₁	1	2	1	3
y ₂	1	6	2	5
x ₂	1	-1	-1	-2
y ₄	3	-1	2	2
Z	-1	-4	1	-1

Бу жадвалдан кўришиб турибдики озод ҳадлар мусбат, шу сабаб таянч план мавжуд. Энди оптимал ечимини топиш учун Z қаторига қараймиз. Бу қаторда иккита манфий ишорали коэффицент бор. Улардан модул бўйича қиймати катта бўлган коэффицентни танлаб оламиз, у -4 элементиدير. Қоидага биноан ҳал қилувчи элементни аниқлаб янги жадвал тузамиз.

$$+\min \{1/2, 1/6, 1/-1, 3/-1\}=1/6$$

Унга мос элемент x_1 устундаги 6 элемент. Бу элемент ҳал қилувчи элемент бўлади. Энди Симплекс алмаштириш қилиб, қуйидаги жадвални тузамиз.

So' \ Bo'	1	-y ₂	-y ₃	-x ₃
Y ₁	2/3	-1/3	1/3	4/3
X ₁	1/6	1/6	1/3	5/6
X ₂	7/6	1/6	-2/3	-7/6
Y ₄	19/6	1/6	7/3	17/6
Z	-1/3	2/3	7/3	7/3

Озод ҳадлар ва Z қаторидаги коэффицентлар мусбат. Демак, оптимал ечим топилди, яъни $y_2=y_3=x_3=0$ ва $x_1=1/6$, $x_2=7/6$ бўлганда Z нинг максимал қиймати $-1/3$ га тенг бўлади, яъни $z=-1/3$.

2-мисол.

Берилган чизиқли дастурлаш масаласининг мақсад функциясига $\min$ қиймат берувчи ечимини топинг.

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$z = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

Чегаравий тизимни каноник кўринишда қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_4 = -2$$

Симплекс жадвал қурамиз. Биринчи жадвалда озод ҳадлар ичида манфий элемент мавжуд. Шунинг учун таянч планни топамиз. Бу жадвалдан ҳал қилувчи элементни топиб, Симплекс алмаштириш бажарамиз ва иккинчи жадвалга эга бўламиз. Иккинчи жадвалда таянч план мавжуд. Шу сабаб ундан оптимал планни топишга ўтамиз.

Сў \ Бў	1	$-x_1$	$-x_2$
y_1	2	1	1
y_2	-2	-2	1
Z	0	-1	1

Сў	1	$-y_2$	$-x_2$
Бў			
y_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Z	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Оптимал планни топиш учун Z-катор элементларини манфий ҳолга келтириш керак. Бунинг учун жадвалдан ҳал қилувчи элементни топамиз. Ҳал қилувчи элемент $\frac{3}{2}$. Симплекс алмаштириш қилиб қуйидаги жадвалга эга бўламиз.

Сў	1	$-y_2$	$-y_1$
Бў			
x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$
Z	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{3}$

Жадвалдан кўриниб турибдики мақсад функциясига минимал қиймат берувчи нуқта мавжуд, яъни:

$$x_1 = \frac{4}{3}; x_2 = \frac{2}{3}; z_{\min} = \frac{2}{3}.$$

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масалаларини график ва симплекс усулларда ечинг. Натижаларни солиштиринг.

2.- $5x_1 + 4x_2 \leq 20$

$-2x_1 - 3x_2 \leq -6$

$x_1 - 3x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$F(x_1; x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 1$

4.- $2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$F(x_1; x_2) = -x_1 + x_2$

5. $2x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 - x_2 \leq 4$

$-3x_1 + 3x_2 \geq 12$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$F(x_1; x_2) = -4x_1 - 2x_2$

6. $x_1 + x_2 \geq 3$

$-x_1 - 2x_2 \geq 6$

$x_1 + x_2 \geq 12$

$x_1 - 3x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$F(x_1; x_2) = x_1 + x_2$

7. $3x_1 + x_2 \geq 3$

$6x_1 + 14x_2 \geq 21$

$x_1 \leq 3,5$

$2x_2 \leq 9$

$3x_1 - 5x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$F(x_1; x_2) = -x_1 - x_2$

8. $-x_1 + x_2 \leq 2$

$x_2 \geq 2$

$-2x_1 + x_2 \geq -6$

$x_2 \leq 5,5$

$x_1 \geq 2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$F(x_1; x_2) = x_1 + x_2$

9. $3x_1 - x_2 \leq 1$

$5x_1 - 3x_2 \leq 15$

$x_2 \leq 2,5$

$2x_1 - x_2 \geq -2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

10. $x_1 - x_2 \geq -2$

$x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 6x_2 \leq 6$

$10x_1 + 7x_2 \leq 80$

$-x_1 + 15x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$$11. \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = x_1 - 3x_2 - 3$$

$$12. \quad x_1 + x_2 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 < 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = 4x_1 + 3x_2 - 1$$

$$13. \quad x_1 - x_2 \geq 5$$

$$4x_1 - 2x_2 \geq 13$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 7$$

$$14. \quad x_1 - x_2 \geq 1$$

$$-3x_1 + 10x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 11$$

$$3x_2 - x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = x_1 + x_2$$

$$15. \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$16. \quad 4x_1 - 5x_2 \geq 4$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 12$$

$$5x_1 - 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$10x_1 - 7x_2 \leq 70$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = 3x_1 + x_2 + 3$$

$$19. \quad -4x_1 + 5x_2 \leq 29$$

$$3x_1 - x_2 \leq 14$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 38$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = 4x_1 + 3x_2 - 7$$

$$20. \quad x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 36$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 \geq -4$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 24$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = x_1 + x_2 + 24$$

3.4. Кишлоқ хужалигини режалаштиришда Симплекс усулини қўллаш.

Хозирги бозор иқтисодиёти муносабатларига ўтиш даврида, ноаниқлик ва таваккалчилик шароитларида кишлоқ хужалигини барқарор ривожлантиришда математик усулларни қўллаш ва уни тадбиқ этиш яхши натежаларга олиб келади. Рақобат даврида корхона ва фирмаларни бошқариш ва уларнинг фаолиятини режалаштириш жараёнида иқтисодчи бевосита қуйидаги масалаларга дуч келади:

- изланаётган миқдорларга жуда кўп чекланишлар қўйилади;
- масалалар чексиз кўп ечимларга эга бўлиб , улардан энг яхшиси(оптимали)ни танлаб олишга тўғри келади.

Масалаларнинг бундай қўйилиши иқтисодчи ёки менеджер учун катта қийинчиликлар туғдиради. Бундай масалалар шу вақтгача асосан эмпирик йўл билан, яъни айрим чекланишларга асосланган эди, бошқача айтганда изланаётган миқдорлар танлаб олиш йўли билан ҳал этилар эди. Кейинги йилларда яратилган чизикли дастурлаш усуллари ва ЭХМларида масалаларнинг катта ўлчамларини ечишга мулжалланган дастурларнинг яратилиши, қуйилган масалаларни ечишнинг бирдан – бир тўғри йўлини кўрсатиб берди ва имкон яратди.

Дастурлаш амалий жихатдан мумкин бўлган дастурни(режа, жадвал, тақсимот) аниқлашдан иборат.

Аниқ иқтисодий масалани ечиш учун бу масаланинг шартини математик модел билан ифодалаш керак бўлади. Бу жараён икки босқичдан иборат бўлади:

- 1) Изланаётган мақсад, изланаётган миқдорларнинг бирор бир боғлиқлиги кўринишида берилиши(яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотларни сотишдан келадиган фойда, ишлаб чиқаришга сарфланаётган молиявий ресурслар, юкларни ташишга кетадиган харажатлар ва шунга ухшаш) . Хосил бўлган ифода мақсад функция ёки функционали дейилади.
- 2) Изланаётган миқдорларга қўйиладиган чегаравий шартлар миқдорий ифодаланади. Улар ресурсларнинг миқдори, маълум талабларни қондириш зарурати, технология шароити ва бошқа иқтисодий ҳамда техникавий омилларнинг ишлатилишидан келиб чиқади.

Биз чизикли дастурлашнинг симплекс усулида кишлоқ хужалиги масалалари қандай ечилиши амалиётини кўриб чиқамиз.

1. Ишлаб чиқаришни ражалаштириш масаласи.

Айтайлик корхона ёки фирма n хил маҳсулот ишлаб чиқариш қудратига эга бўлсин ва шу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун m хилдаги ресурслардан фойдалансин , ҳамда уларнинг захиралари

$b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m$. маълум бўлсин. Ишлаб чиқарилаётган маҳсулотдан олинган фойда $c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_n$. ҳам маълум бўлсин. Ҳар бир маҳсулотни ишлаб

чиқариш учун зарур бўлган ресурсларнинг сарфланаётган нормалари $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{ij}, \dots, b_{mn}$ ҳам маълум бўлсин.

Бу ерда a_{11} - биринчи турдаги маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун биринчи турдаги ресурсдан қанча зарурлигини билдиради. Умумий ҳолда a_{ij} - j ($j=1, 2, \dots, n$) турдаги маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун i ($i=1, 2, \dots, m$) турдаги ресурсдан қанча кераклигини билдиради. Бу ифодаларни *технологик коеффисиентлар* деб атаймиз, унинг ўлчами тхп га тенг.

Ишлаб чиқаришнинг шундай X режасини топиш талаб қилинадик, натижада махсимум фойда олиш мумкин бўлсин.

Энг аввало масаланинг мақсадли функциясини тузиш керак, яъни фойдани изланаётган миқдорлар орқали ифодалаш зарур. Маълумки биринчи турдаги бир бирлик маҳсулот c_1 фойда беради, режа бўйича биринчи турдаги маҳсулотдан x_1 бирликда ишлаб чиқариш лозим, натежада $c_1 \cdot x_1$ миқдорда фойда олинади. Демак умумий ҳолда

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max \quad \text{бўлиб,} \quad \text{буни}$$

масаланинг мақсадли функцияси дейилади.

Энди чегаравий шартларни ёзамиз. Унинг учун маҳсулотларин ишлаб чиқариш учун сарфланаётган ҳар бир ресурснинг миқдорини топамиз яъни биринчи турдаги маҳсулотдан x_1 ишлаб чиқариш учун , биринчи турдаги ресурсдан $a_{11}x_1$ бирлик сарфланади, иккинчи турдаги маҳсулотдан x_2 ишлаб чиқариш учун иккинчи турдаги ресурсдан $a_{12}x_2$ бирлик сарфланади ва хоказо, биринчи ресурснинг умумий сарфи $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j} + \dots + a_{1n}x_n$ га тенг.

Лекин маҳсулотларни ишлаб чиқаришга кетадиган умумий сарфлар мавжуд захиралардан ошиб кетмаслиги керак, яъни $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j} + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$ бўлиши керак.

Демак умумий ҳолда уни қуйидагича ёзамиз:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j} + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j} + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2$$

.....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq (\geq) b_i$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m$$

Демак юқоридаги чизиқли масала аниқ ечимларга эга бўлиши учун қўйилган шартлар бажарилиши керак, лекин ечимлар манфий ёки нол чиқиб қолиши мумкин, бу ҳолда маҳсулотнинг бу турини ишлаб чиқариш иқтисодий жихатдан фойдали эмас ёки рентабилли эмаслигини билдиради. Шунинг учун номанфийлик шартини киритамиз, яъни $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ лик шарти бажарилиши лозим.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$\dots -x_j \dots$	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$a_{13} \dots$	$a_{1j} \dots$	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$a_{23} \dots$	$a_{2j} \dots$	a_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_i =$	a_{i1}	a_{i2}	$a_{i3} \dots$	$a_{ij} \dots$	a_{in}	a_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$a_{m3} \dots$	$a_{mj} \dots$	a_{mn}	a_n
$Z =$	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3 \dots$	$-c_j \dots$	$-c_n$	0

Симплекс усулга доир амалий масалалар ечамиз ва бирга назарий таҳлилларини бериб борамиз:

1. Масала .

Хужаликнинг 2000 га ер майдони бор , ундан арпа ва картошка экиш учун фойдаланиш режалаштирилган. Хужаликнинг 1800 трактор – смена, 16000 киши – кун ишлаб чиқариш ресурслари бўлиб, режа бўйича ҳар гектардан 100 ц/га картошка ва 20 ц/га арпа олиш кўзда тутилган. Бундан ташқари қуйидаги жадвал бўйича харажатлар бирлиги нормативи берилган:

	Картошка	Арпа
Т/С	2,1	0,6
Киши/кун	20	2
1 кгдаги озуқа бирлиги	0,3	1,2

Масаланинг шarti: Картошка билан арпанинг шундай нисбатини топингки, хужаликдаги ердан тўла фойдаланиб максимал озуқа бирлиги олиш мумкин бўлсин.

Ечиш.

Озуқа бирлигини ҳосилдорлик билан солиштирамиз, яъни:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0,3 &= 30 \text{ ц/га 1 га} \\ 20 \cdot 1,2 &= 24 \text{ ц/га 1 га} \end{aligned} \quad \text{картошка ва арпанинг озуқа бирлиги.}$$

Бир центнер маҳсулот олиш учун норматив харажатлар жадвалини тузиш учун қуйидаги ҳисобларни бажарамиз, яъни:

$$\begin{aligned} 1/100 &= 0,001 \text{ картошка} & 1/20 &= 0,05 \text{ арпа} \\ 2,1/100 &= 0,021 \text{ Т/С} & 0,6/20 &= 0,03 \text{ Т/С} \\ 20/100 &= 0,2 \text{ киши/кун} & 2/20 &= 0,1 \text{ киши/кун} \end{aligned}$$

Бу натижаларни қуйидагича жадвалга солсак ҳам бўлади:

Ишлаб чиқариш ресурслари	Ўл. бир.	1 ц.га кетган харажатлар		Жами ишлаб чиқариш харажатлари
		Картошка	Арпа	
Экинзор	га	0,01	0,05	2000
Трактор-смена	т/с	0,021	0,03	1800
Киши-кун	к/к	0,2	0,1	16000

Белгилашлар киритамиз: X_1 билан арпани, X_2 билан картошкани белгилаймиз ва юқоридаги жадвалдан қуйидаги тенгсизликлар системасини ёзишимиз мумкин:

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,05x_2 \leq 2000 \\ 0,021x_1 + 0,03x_2 \leq 1800 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 16000 \end{cases} \quad (1)$$

Ер майдонидан тўла ва оптимал фойдаланиш учун мақсадли функция деган тушунчани киритамиз ва уни Z ҳарфи билан белгилаймиз. Бизга максимал озуқа бирлиги топиш талаб қилинапти, қайсики картошканинг озуқа бирлиги 0,3 ва арпаники 1,2 эди, демак максимал озуқа бирлиги олиш учун

$$Z = 0,3x_1 + 1,2x_2 \Rightarrow \max \quad (2)$$

ни топиш керак бўлади.

Оптимал ечимни топиш учун (1) тенгликнинг шундай мусбат ($x_1 > 0, x_2 > 0$) ечимларини топиш керакки, (2) тенглик бажарилсин.

Уни ечиш учун (1) тенгсизликни тенгламалар системаси кўринишида ифодалаймиз, яъни:

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,05x_2 + x_3 = 2000 \\ 0,021x_1 + 0,03x_2 + x_4 = 1800 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 + x_5 = 16000 \end{cases} \quad (3)$$

(2)га ҳам қўшимча ўзгарувчилар киритамиз

$$Z = 0,3x_1 + 1,2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \Rightarrow \max$$

(3) тенгламалар системасини қўшимча ноъмалумларга нисбатан ечамиз.

$$\begin{cases} x_3 = 2000 - 0,01x_1 - 0,05x_2 \\ x_4 = 0,021x_1 - 0,03x_2 \\ x_5 = 0,2x_1 - 0,1x_2 = 16000 \end{cases} \quad (4)$$

Энди қуйидаги биринчи Симплекс жадвалига соламиз:

1- Симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосиймас номаълумлар	
		$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	2000	0,01	0,05
$x_4 =$	1800	0,021	0,03
$x_5 =$	16000	0,2	0,1
$Z =$	0	-0,3	-1,2

Симплекс алгоритмини масалага қўллаймиз:

1. Бош устунни танлаймиз. Z қатордаги коэффициентлар ичидан энг кичиги абсалют қиймат бўйича энг каттаси жойлашган устун бош устун деб олинади, бу жадвалда -1,2 турган устун бош устун бўлади.

2. Бош қатор танланади. Озод ҳадларни кетма-кет бош устун элементларига бўламиз ва улар ичидан энг кичик қийматлисини танлаймиз, бу қиймат турган қатор бош қатор деилади. Бизнинг мисолимизда $\frac{2000}{0,05} = 40000$, $\frac{1800}{0,03} = 60000$, $\frac{16000}{0,1} = 160000$, 40000 турган қатор бош устун бўлади.

3. Бош ҳад танланади. Бош устун ва бош қатор кесишган жойда турган сон бош ҳад дейилади. Бизнинг мисолимизда $b_{rh} = 0,05$.

навбатдаги Симплекс жадвали учун бош ҳад деб $b_{rh}^1 = \frac{1}{b_{rh}} = \frac{1}{0,05} = 20$ ни

оламиз

4. Навбатдаги Симплекс жадвалнинг бош қаторини тўлдириш учун

$b_{hj}^1 = \frac{b_{rj}}{b_{rh}}$ формуладан фойдаланамиз ёки бош қатор элементларини бош ҳадга кетма-кет бўламиз ва натежани кейинги жадвалга ёзамиз.

Бизнинг мисолимизда $b_{hj}^1 = \frac{b_{rj}}{b_{rh}} = \frac{2000}{0,05} = 40000$, $b_{hj}^1 = \frac{b_{rj}}{b_{rh}} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$

5. Навбатдаги Симплекс жадвалнинг бош устунини тўлдириш учун

қуйидаги формуладан фойдаланамиз: $b_{ir}^1 = -\frac{b_{ik}}{b_{rh}}$, яъни бош устун

элементларини кетма-кет бош ҳадга бўламиз ва ишорасини ўзгартириб жадвалга ёзамиз. Бизнинг мисолимизда

$$b_{ir}^1 = -\frac{0,03}{0,05} = -0,6, \quad b_{ir}^1 = -\frac{0,1}{0,05} = -2, \quad b_{ir}^1 = -\frac{(-1,2)}{0,05} = 24.$$

6. Навбатдаги Симплекс жадвалининг қолган элементларини топиш

қуйидаги формула билан ҳисобланади: $b_{ij}^1 = b_{ij} - \frac{b_{ih}}{b_{rh}} \cdot b_{rj}$. Бизнинг мисолимизда

$$b_{21}^1 = \frac{1800 \cdot 0,05 - 2000 \cdot 0,3}{0,05} = 600, \quad b_{32}^1 = \frac{0,2 \cdot 0,05 - 0,01 \cdot 0,1}{0,05} = 0,18,$$

улар $b_{22}^1 = \frac{0,021 \cdot 0,05 - 2000 \cdot 0,03}{0,05} = 0,015, \quad b_{42}^1 = \frac{(-0,3) \cdot 0,05 - 0,01 \cdot (-1,2)}{0,05} = -0,06$

$$b_{31}^1 = \frac{16000 \cdot 0,05 - 2000 \cdot 0,1}{0,05} = 12000, \quad b_{41}^1 = \frac{0,015 \cdot 0 - 2000(-1,2)}{0,05} = 48000$$

га тенг.

Олинган натижаларни навбатдаги Симплекс жадвали кўринишида ёзамиз:

2- Симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосиймас номаълумлар	
		$-x_1$	$-x_3$
$x_2 =$	40000	0,2	20
$x_4 =$	600	0,015	-0,6
$x_5 =$	12000	0,18	-2
Z =	48000	-0,06	24

Бу янги биринчи таянч РЕЖА дейилади, лекин унинг оптимал ё оптимал ё лптимал эмаслигини текширишимиз керак, агар оптимал бўлмаса юқоридаги амаллар яна такрорланади.

Демак оптималлик кртериясини келтирамиз:

1. Агар охирги жадвалда Z қатордаги элементлар ҳаммаси мусбат бўлса , танч режа оптимал бўлади ва ҳисоблаш тухтатилади, акс ҳолда жараён яна давом еттирилади.

2. Агар озод ҳадлар ҳаммаси мусбат бўлса Режа оптимал дейилади ва жараён тухтатилади.

3. Агар Z қаторда битта манфий ишорали ҳад қатнашса, шу сон турган устун бош устун деб олинади, агар манфий ишоралилари кўп бўлса, улар ичидан энг кичиги , абсолют қиймати бўйича энг каттаси танланади мусбат коэффицентларга эътибор берилмайди.

4. Агар масаланинг шартда минумумни топиш талаб қилинган бўлса, Z қатордаги мусбат коэффицентлар ичидан энг каттаси танланади ва у устун бош устун деб олинади.

5. Агар Z қатордаги ҳамма элемент мусбат(минумумни талаб қилаг бўлса, ҳаммаси манфий) бўлса, топилган РЕЖА оптимал деб қобил қилинади.

Бизнинг мисолимизда охириги жадвалдан қараб Режа оптимал эмаслиги билдик(битта манфий ҳад қатнашяпти) шунинг учун -0,06 ҳад қатнашган устунни бош устун деб оламиз ва Жардон модификацияланган чиқариш усулини яна қўллаймиз. Натижада қуйидаги 3-Симплекс жадвали ҳосил бўлади:

3- Симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосиймас номаълумлар	
		$-x_4$	$-x_3$
$x_2 =$	32000	-13,3	28
$x_1 =$	40000	66,6	-40
$x_5 =$	4800	-12	5,2
Z =	50400	4	21,6

Жадвалдан кўриниб турибдики РЕЖА оптимал экан, демак хужалик 40000 центнер картошка, 32000 центнер арпа етиштирганда 50400 центнер максимум озуқа бирлигига тенг ҳосил олиши мумкин экан, ҳамда барча ишлаб чиқариш ресурсларидан унумли фойдаланилади.

Масала тўлиқ ечилди.

2-Масала. Аналитик типдаги машқни ечиб кўрамиз:

Бизга $z = -3x_1 + 6x_2 \Rightarrow \max$ чизикли функцияга(ёки функционалга) максимал қиймат берувчи

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 1 \geq 0 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ y_4 = x_1 - 4x_2 + 13 \geq 0 \\ y_5 = -4x_1 + x_2 + 23 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Чегаравий шартларнинг мумкин бўлган ечимлар соҳасида номаълумларни топинг.

Ечиш: Жадвал тузамиз:

1-Симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Асосиймас номаълумлар		Озод ҳадлар
	$-x_1$	$-x_2$	1

y_1		-1		-2	1
y_2		-2		-1	-4
y_3		-1		1	1
y_4		-1		4	13
y_5		4		-1	23
Z		3		-6	0

Бу мисол учун қўшимча чегаравий шартлар берилган эмас, шунинг учун x_1 ва x_2 номаълумларни жадвалдан йўқатамиз. x_1 ни йўқатиш учун рамкага олинган -1 коэффицентни ҳал қилувчи элемент деб оламиз ва x_1 билан y_1 ларнинг ўрнини алмаштирамиз:

2-симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Асосиймас номаълумлар			Озод ҳадлар
	$-y_1$		$-x_2$	
x_1		-1	2	-1
y_2		-2	3	-6
y_3		-1	3	0
y_4		-1	6	12
y_5		4	-9	27
Z		3	-12	3

Жадвалдаги коэффицентларни $b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}$ формула ёрдамида аниқлаймиз, яъни:

$$(-1)(-1) - (-2)(-2) = -3$$

$$(-1)(1) - (-1)(-2) = -3$$

$$(-1)(4) - (-1)(-2) = -6$$

$$(-1)(-1) - (4)(-2) = 9$$

$$(-1)(-4) - (2)(1) = 6$$

$$(-1)(1) - (-1)(1) = 0$$

$$(-1)(13) - (-1)(1) = -12$$

$$(-1)(23) - (4)(1) = -27$$

$$(1)(0) - (3)(1) = -3$$

Энди x_1 ни алоҳида оламиз $x_1 = y_1 - 2x_2 - 1$ ва жадвални тўлдирамиз.

3-симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Асосиймас номаълумлар			Озод ҳадлар
	$-y_1$		$-x_2$	
y_2		-2	3	-6
y_3		-1	3	0

y_4	-1	6	12
y_5	4	-9	27
Z	3	-12	3

Ҳосил бўлган жадвалдан кўриниб турибдики, ҳал қилувчи устун ва сатрлар 2- ва 3- қоидалар бўйича аниқланади. Қолган элементлари 4- қоидага мувофиқ юқоридаги формула бўйича аниқланади. Жадвал тузушда аниқланган сонларни ўринларига мос равишда қўйиб бориб 5- қоидага асосан -1 га бўлиб , охириги жадвални ҳосил қиламиз.

Энди x_2 ни жадвалдан йўқатамиз, бунинг учун иккинчи жадвалдаги рамкага олинган коэффициентни ҳал қилувчи элемент деб оламиз ва янги жадвал ҳосил қиламиз:

4-симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Асосиймас номаълумлар		Озод ҳадлар
	$-y_1$	$-y_2$	
x_2	-2/3	1/3	-2
y_3	1	-1	6
y_4	3	-2	24
y_5	-2	3	9
Z	-5	4	-21

x_2 ни яна олдингидай алоҳида ёзиб оламиз: $x_2 = 2/3y_1 - 1/3y_2 - 2$

Булар ёрдамида янги жадвал ҳосил қиламиз:

5-симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Асосиймас номаълумлар		Озод ҳадлар
	$-y_1$	$-y_2$	
y_3	1	-1	6
y_4	3	-2	24
y_5	-2	3	9
Z	-5	4	-21

Бу жадвалдаги барча озод ҳадлар мусбат, демак кўраётган масаламизнинг таянч ечимлари мавжуд, энди оптимал ечимларини аниқлаймиз.

Унинг учун аввал ҳал қилувчи элементни танлаймиз, уни танлаш учун Z қатордаги коэффициентларни қараб чиқамиз. Бу қаторда -5 манфий сон мавжуд, шунинг учун бу сон турган устунни ҳал қилувчи устун деб оламиз. 1-қоидага кўра

$$\min\{6/1, 24/3, -9/2\} \geq 0$$

Бу коэффициентлар орасида $-9/2$ энг кичик аммо манфий сон бўлганлиги сабабли унинг урнига $6/1$ кичик сонни оламиз, яъни:

$$\min\{6/1, 24/3, -9/2\} = 6/1 = 6$$

Шу сабабли 1 сонини ҳал қилувчи элемент деб олсак бўлади:

6-симплекс жадвали

Асосий номаълумлар	Асосиймас номаълумлар			Озод ҳадлар
	$-y_3$			$-y_2$
y_1		1		-1
y_4		-3		[1]
y_5		2		1
Z		5		1

Демак, Z қаторида манфий ишорали коэффициентлар йўқ, шунинг учун y_3 ва y_4 ларни нолга тенглаштириб y_1, y_2, y_5, Z ларни аниқлаймиз, яъни $y_3 = y_4 = 0$ бўлганда, $\max Z = 15, y_1 = 12, y_2 = 6, y_5 = 15$

эканлигини аниқлаймиз, бу сонларни x_1 ва x_2 ларнинг ўрнига қўйиб қуйидаги қийматларни топамиз: $x_1 = 4, x_2 = 3$ бу ечимлар оптимал ечимлар дейилади.

Қуйида Симплекс жадвалга келтириб ечиладиган аналитик кўринишдаги масалаларни мустақил ечиш учун берамиз:

2. Масала.

$$1,5x_1 + 4x_2 \leq 5000$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 8000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 2000$$

$$Z = 2x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

3. Масала.

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$Z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

4. Масала.

$$2x_1 + 6x_2 \leq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

5. Масала.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$Z = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

6. Масала.

$$0,05x_1 + 0,03x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 5, x_2 \geq 2$$

$$Z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

7. Масала.

$$0,06x_1 + 0,06x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,4x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 10, x_2 \geq 3$$

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

8. Масала.

9. Масала.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \leq 1,5$$

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 3$$

$$3x_1 - x_2 \leq 1,5$$

$$5x_1 + 5x_2 \geq 3$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

3.5. Симплекс масаласини Жардон модификацияланган чиқариш усули билан ечиш.

Амалий масаланинг қўйилиши:

Хужаликнинг 2000 гектар экин майдони , 1600 центнер минерал ўғити ҳисобида ва 14600 киши-кун фойдаланилмаган ишлаб чиқариш ресурслари бор. Қуйидаги жадвалда миёрлашган кўрсаткичлар(Сонлар шартли равишда келтирилган) берилган бўлсин:

1-жадвал

Ҳосилдорлик, харажатлар миёри ва бир бирлик маҳсулотни сотиш баҳоси

Кўрсаткичлар	Экинлар		
	Буғдой	Арпа	Макка
1.Ҳосилдорлик, ц/га	24	14	12
2.Меҳнат харажати,1 ц.га к/кун	0,4	0,5	0,6
3.Минерал ўғит харажати, 1 ц.га	0,6	0,4	0,8
4.Таннарх, м.сўм/ц	6,0	5,0	16,0
5. Сотиш баҳоси, м.сўм/ц	8,0	8,0	20,0

Ечиш. Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

x_1 билан буғдойни экиш зарур бўлган экин майдонини,

x_2 ва x_3 билан мос равишда арпа ва макка экинларни белгилаймиз..

Биринчи умумий майдонга нисбатан чегараланиш шартини қуйидагича тенгсизлик кўринишида ёзамиз:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2000 \quad (1)$$

Энди меҳнат харажатлари бўйича чегаравий шартларни келтирамиз.

Агар номаълумлар ўлчавларини бир гектар бирлигида қобил қилсак, бошқа барча нормативларни ҳам шу бир бирликка нисбатан олиш керак. Меҳнат харажатлари 1 центнер маҳсулотга нисбатан ҳисобга олинган, шунинг учун ҳосилдорликни билган ҳолда 1 гектар ерга экиладиган экинларнинг меҳнат харажатлари нормативларини осонгина ҳисоблаб чиқариш мумкин. Демак экин майдонлари тенгсизлигини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$9,6x_1 + 7x_2 + 7,2x_3 \leq 14600 \quad (2)$$

Учунчи чегараланиш шартларини жадвалдан қараб ёзсак ҳам бўлади, яъни

$$0,6x_1 + 0,4x_2 + 0,8x_3 \leq 1600 \quad (3)$$

Юқоридаги келтирилган (1-3) чегаравий шартлар ишлаб чиқаришнинг ўсиш шартларини билдиради. Қайсики оптималлик критерияси сифатида масимум олинadиган фойда деб олиб уни мақсадли функция каби қидирамиз. Маълумки бир бирлик маҳсулот фойдаси, сотиш боҳоси ва маҳсулот бирлиги таннари орасидаги фарқдан иборат. Бир центнер буғдойдан 20 м.сўм., буғдойдан 30 м.сўм., бедадан 4 м.сўм фойда келиши кўзда тутилган бўлса, бир гектарга нисбатан фойда ҳисоби мос ҳолда 48,42, ва 48 м.сўмни ташкил қилади. У ҳолда бу масаланинг мақсадли функцияси қуйидагича бўлади:

$$L = 48x_1 + 42x_2 + 48x_3 \quad (4)$$

Энди қуйидаги тенгсизликлар системасини тузишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2000 \\ 9,6x_1 + 7x_2 + 7,2x_3 &\leq 14600 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 + 0,8x_3 &\leq 1600 \\ L = 48x_1 + 42x_2 + 48x_3 &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (1)$$

(1) форма қўйилган масаланинг умумий чизиқли дастурлаш тенгсизликлар системаси дейилади.

Буни симплекс усули билан ечиш учун бир қанча алмаштиришлар киритамиз.

Дастлаб x_4, x_5, x_6 қўшимча номаълумларни тенгсизликка қўшамиз ва тенгсизлик тенгламалар ситемасига айланади. У ҳолда юқоридаги тенгсизликлар ситемасининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2000 \\ 9,6x_1 + 7x_2 + 7,2x_3 + x_5 &= 14600 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 + 0,8x_3 + x_6 &= 1600 \\ L = 48x_1 + 42x_2 + 48x_3 &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (2)$$

Бу ситемани x_4, x_5, x_6 ларга нисбатан ечамиз, яъни

$$\begin{aligned} x_4 &= 2000 - (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_5 &= 14600 - (9,6x_1 + 7x_2 + 7,2x_3) \\ x_6 &= 1600 - (0,6x_1 + 0,4x_2 + 0,8x_3) \\ L &= 0 - (-48x_1 - 42x_2 - 48x_3) \rightarrow \max \end{aligned} \quad (3)$$

(3) ни биринчи симплекс жадвалига соламиз:

1-симплекс жадвали

Асосиймас номаълумлар	Озод хадлар	Асосий номаълумлар		
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$

x_4	2000	1	1	1	$\Rightarrow$
x_5	14600	[9,6]	7,0	7,2	
x_6	1600	0,6	0,4	0,8	
L	0	-48	-42	-48	
		$\uparrow$			

Бундан олдин келтирилган 1-масала каби симплекс усули алгоритмини қўллаймиз ва қуйидаги 2 симплекс жадвалга келамиз:

2-симплекс жадвали

Асосиймас номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий номаълумлар		
		$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	479,2	0	0,3	[0,3] $\Rightarrow$
x_1	1520,8	1	0,7	0,7
x_6	687,5	0	0	0,4
L	72998,4	0	-8,4	-14,4 $\uparrow$

Бу ҳосил қилинган жадвалнинг мақсадли функцияси қаторида ҳам яна иккита манфий элемент қатнашаётибди, шунинг учун бу режа ҳам оптимал эмас, уни яна симплекс усул алгоритмини қўллаб қуйидаги 3 нчи жадвалга келамиз:

3-симплекс жадвали

Асосиймас номаълумлар	Озод ҳадлар	Асосий номаълумлар		
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_3	1597,3	0	1	1
x_1	402,7	1	0	0
x_6	48,6	0	-0,4	0
L	95999,5	0	6,0	0

--	--	--	--	--

Охирги жадвалдан кўриниб турибдики L мақсадли функция каторида манфий элементлар йўқ шунинг учун бу режани оптимал деб ҳисоблаймиз ва уни иқтисодий талқин қиламиз.

Жавоблар: $x_3 = 1597,3$, $x_1 = 402,7$, $x_6 = 48,6$, $x_5 = 0$, $x_2 = 0$, $L = 95999,5$

Нателаларнинг иқтисодий маъноси қуйидагича: агар маккажухори учун 1600 га(аниғи 1597,3) бўлса, буғдой учун 400 га(402,7) ажратилади ва арпа экиш мақсадга мувофиқ эмаслигини кўрсатапти. Экин майдонидан ва меҳнат ресурсларидан оптимал фойдаланилаяпти, лекин минерал ўғитлардан 48,6 ц. фойдаланилмай қолмоқда. Бундай оптимал режа асосида хужалик 96 миллион сўм фойда олиши кўзда тутилади.

Масала тўлиқ ечилди.

Худди юқоридагидек бажариладиган бир нечта масалаларни мустиқил ечиш учун таклиф қиламиз:

1-масала

Ҳосилдорлик, харажатлар миёри ва бир бирлик маҳсулотни сотиш баҳоси

Кўрсаткичлар	Экинлар		
	Буғдой	Арпа	Макка
1.Ҳосилдорлик, ц/га	20	12	10
2.Меҳнат харажати, 1 ц.га к/кун	0,2	0,1	0,3
3.Минерал ўғит харажати, 1 ц.га	0,8	0,6	1,0
4.Таннарх, м.сўм/ц	3,0	4,0	8,0
5. Сотиш баҳоси, м.сўм/ц	6,0	6,0	20,0

2- масала

Ҳосилдорлик, харажатлар миёри ва бир бирлик маҳсулотни сотиш баҳоси

Кўрсаткичлар	Экинлар		
	Буғдой	Арпа	Макка
1.Ҳосилдорлик, ц/га	30	20	10
2.Меҳнат харажати, 1 ц.га к/кун	0,2	0,1	0,4
3.Минерал ўғит харажати, 1 ц.га	1,6	1,0	1,0
4.Таннарх, м.сўм/ц	2,0	3,0	10,0

5. Сотиш баҳоси, м. сўм/ц	8,0	7,0	15,0
---------------------------	-----	-----	------

3- масала

Ҳосилдорлик, харажатлар миёри ва бир бирлик маҳсулотни сотиш баҳоси

Кўрсаткичлар	Экинлар		
	Буғдой	Арпа	Макка
1.Ҳосилдорлик, ц/га	20	25	15
2.Меҳнат харажати,1 ц.га к/кун	0,2	0,1	0,3
3.Минерал ўғит харажати, 1 ц.га	0,8	1,0	1,2
4.Таннарх, м.сўм/ц	3,0	3,0	12,0
5. Сотиш баҳоси, м.сўм/ц	7,0	8,0	20,0

4- масала

Ҳосилдорлик, харажатлар миёри ва бир бирлик маҳсулотни сотиш баҳоси

Кўрсаткичлар	Экинлар		
	Буғдой	Арпа	Макка
1.Ҳосилдорлик, ц/га	25	18	12
2.Меҳнат харажати,1 ц.га к/кун	0,2	0,2	0,3
3.Минерал ўғит харажати, 1 ц.га	0,8	0,4	0,5
4.Таннарх, м.сўм/ц	2,5	3,0	14,0
5. Сотиш баҳоси, м.сўм/ц	7,5	7,0	21,0

5- масала

Ҳосилдорлик, харажатлар миёри ва бир бирлик маҳсулотни сотиш баҳоси

Кўрсаткичлар	Экинлар		
	Буғдой	Арпа	Макка
1.Ҳосилдорлик, ц/га	15	16	14
2.Меҳнат харажати,1 ц.га к/кун	0,3	0,2	0,5
3.Минерал ўғит харажати, 1 ц.га	0,3	0,3	0,7
4.Таннарх, м.сўм/ц	4,0	3,5	15,0
5. Сотиш баҳоси, м.сўм/ц	7,0	6,0	20,0

3.6. Симплекс масалаларини ечишда Excel электрон жадвалидан фойдаланиш

Чизиқли дастурлаш масаласини Excel жадвал процессорида ечиш учун олдин масала шартлари киритилиб кейин Сервис менюсидаги Поиск решения процедурасидан фойдаланилади.

Масала шартларини киритиш қуйидаги этаплардан иборат:

1. Масала шартларини киритиш учун форма тайёрлаш.

2. Бошланғич маълумотларни киритиш.
3. Иқтисодий математик моделга боғланишларни киритиш.
4. Мақсад функциясини киритиш.
5. Чекланиш ва чегаравий шартларни киритиш.

Масала учун юқоридаги 3.3. пунктда берилган биринчи чизиқли дастурлаш масаласини компьютерда Excel воситасида “Поиск решения” процедураси ёрдамида ечиш кетма-кетлигини кўриб чиқамиз:

1. Excel ойнасида масала шартларини киритиш учун форма тайёрлаймиз.
2. Маълумотларни мос ячейкаларга киритамиз.

	A	B	C	D	E	F
1	Чизиқли дастурлаш масаласини ечиш					
2	Ўзгарувчилар	x1	x2	x3		b
3	ва қиймати					
4	Мақсад ф-я	5	-1	3		0
5	1 тенсизлик	1	1	1		2
6	2 тенсизлик	4	2	1		3
7	3 тенсизлик	1	-1	2		-1
8	4 тенсизлик	-3	2	-2		5
9						

3. E4 ячейкасига $=B4*\$B\$3+C4*\$C\$3+D4*\$D\3 формуласини киритамиз.

4. Бу E4 ячейкасида E5,E6,E7,E8 ячейкаларига нусха кўчирамиз.

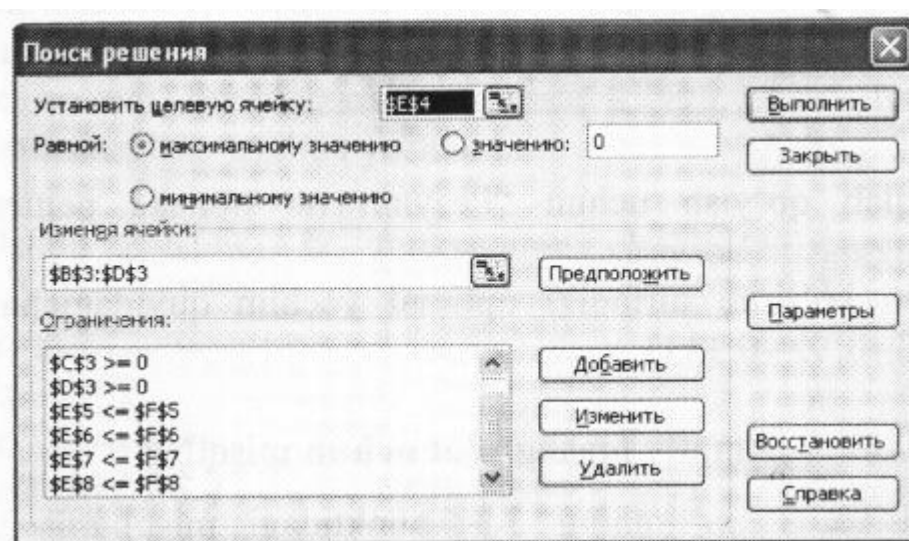
5. “Поиск решения” процедурасини ишга тушурамиз, яъни менюнинг “Сервис” бўлимидан “Поиск решения” процедураси танлаймиз.

6. Очилган “Поиск решения” процедураси мулоқот ойнасида қуйидагиларни киритамиз:

6.1. Сичқонча билан мақсад функцияси каторидаги формула киритилган E4 ячейкасини кўрсатамиз.

6.2. Мақсад функцияси экстремумини (масалан, мулоқот ойнасидан “максимальному значению” танланади) танлаймиз.

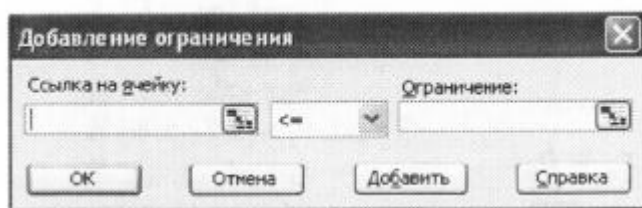
6.3. “Изменяя ячейки” майдонига ўтиб ўзгарувчилар қиймати кўрсатилган адресларни киритамиз. Бунинг осон йўли шу ячейкаларни сичқончада ажратишдир.



6.4. Чегараланишларни киритиш. Бу жараён курсор “Ограничения” майдонига қўйилиб “Добавить” тугмасини босиш билан амалга оширилади. Натижада “Добавление ограничения” ойнаси очилади.

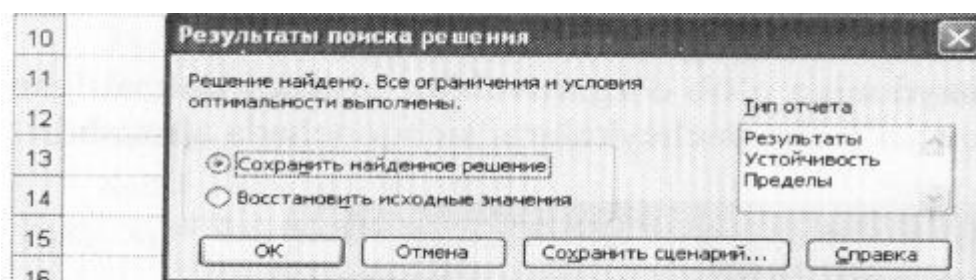
6.5. “Ссылка на ячейку” майдонига биринчи чегараланиш учун киритилган формула ячейкаси E5 сичқончада кўрсатилади, кейин математик формулада берилган шарт белгиси танланади ва “Ограничение” майдонига мос b овоз ҳад қиймати турган ячейка адреси кўрсатилади (ёки киритилади). Бу жараён бошқа чегараланишлар учун ҳам қайтарилади.

6.6. Худди 6.5. пунктидаги каби чегаравий шартлар ҳам киритилади. “Ссылка на ячейку” майдонига B3 ячейкаси кўрсатилиб, “>=” белгиси танланади ва кейин “Ограничение” майдонига 0 қиймат берилади. Бошқа ўзгарувчилар чегаравий шarti ҳам шу усулда киритилади.



7. “Выполнить” буйруғи берилади ва натижада қуйидаги натижага эга бўламиз.

	A	B	C	D	E	F
1	Чизикли дастурлаш масаласини ейтиш					
2	Ўзгарувчилар	x1	x2	x3		b
3	ва қиймати	0,16667	1,16667	0		
4	Мақсад ф-я	5	-1	3	-0,3333	0
5	1 тенсизлик	1	1	1	1,3333	2
6	2 тенсизлик	4	2	1	3	3
7	3 тенсизлик	1	-1	2	-1	-1
8	4 тенсизлик	-3	2	-2	1,8333	5
9						



Охирги ойнадан кўриниб турибдики оптимал ечим қуйидагича: $x_1=0,16667$; $x_2=1,16667$; $x_3=0$; $Z=-0,3333$.

2 бўлим ва 3 бўлимнинг 3.3. пунктидаги масалаларни Excel дастурий воситасида ечишнинг ва натижаларни солиштиринг.

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 &= 1 \\ x_j &\geq 0, \quad j=1,2,3,4\end{aligned}$$

ва уни қаноатлантирадиган минимуми топилсин.

Ечиш. Чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилмаган бўлганлиги учун симплекс усулдан фойдаланиб бўлмайди. Бу масалани симплекс жадвал усули билан ечиш учун сунъий базис усулидан фойдаланамиз. y_1, y_2, y_3 сунъий номаълумлар ёрдамида бу масалага мос чизикли дастурлаш масаласини қуйидагича ёзамиз:

$$y_1 = 3 - (x_1 - x_3 + 4x_4),$$

$$y_2 = 3 - (2x_1 - x_2),$$

$$y_3 = 1 - (3x_1 - 2x_2 - x_4)$$

Бу тизим учун манфий бўлмаган $x_j \geq 0, \quad j=1,2,3,4$ ларни ва қуйидаги

$$F = y_1 + y_2 + y_3$$

Ёрдамчи мақсад функцияга минимум қиймат берувчи y_1, y_2, y_3 ларни топамиз.

Бошланғич жадвалда базис номаълумлар учун y_1, y_2, y_3 ларни олиб, қуйидагига эга бўламиз.

$$y_1 + x_1 - x_3 + 4x_4 = 3$$

$$y_2 + 2x_1 - x_2 = 3$$

$$y_3 + 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 1$$

$$F + 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7$$

$$Z - x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

Бу масалага мос симплекс жадвал қуйидагича бўлади:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
y_1	3	1	0	-1	4
y_2	3	2	-1	0	0
y_3	1	3	-2	0	-1
F	7	6	-3	-1	3
Z	0	-1	-1	-2	0

Симплекс жадвалнинг биридан иккинчисига кетма-кет ўтиб, қуйидагич жадвалларни тузамиз.

	1	$-y_3$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
y_1	8/3	-1/3	2/3	-1	13/3
y_2	7/3	-2/3	1/3	0	2/3
x_1	1/3	1/3	-2/3	0	-1/3
F	5	-2	1	-1	5
Z	1/3	1/3	-5/3	-2	-1/3

	1	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	$-x_4$
x_2	4	-1/2	3/2	-3/2	13/2
y_2	1	-1/2	-1/2	1/2	-3/2
x_1	3	0	1	-1	4
F	1	-3/2	-3/2	1/2	-3/2
Z	21/3	-1/2	-5/2	-9/2	21/2

	1	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	$-x_4$
x_2	7	-2	0	3	2
x_3	2	-1	-1	2	-3
x_1	5	-1	0	2	1
F	0	-1	-1	-1	-0
Z	16	-4	-2	9	-3

Охирги жадвалда F дан бошланувчи сатрда мусбат элемент мавжуд эмас.

Демак, топилган $\{5;7;2;0;0;0\}$ ечим оптимал ечим бўлади, чунки бу ечимда $F=0$.

Демак, $y_1=y_2=y_3=0$ да $Z_{min}=16$ бўлиб, $x_1=5$; $x_2=7$; $x_3=2$; $x_4=0$.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги чизикли дастурлаш масалаларини сунъий базис усули билан ечинг.

1.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 11 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f &= 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 14 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 6 \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 &\geq 22 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 7 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f &= 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} f &= 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.7. Икки ёқлама масалаларни ечиш усуллари

Ҳар қандай чизикли дастурлаш масаласига, унга ўзаро икки ёқлама бўлган бошқа бир чизикли дастурлаш масаласи тўғри келади. Берилган дастлабки (бошланғич) масала билан унга нисбатан икки ёқлама бўлган масала ўртасида бевосита боғланиш бўлиб, яъни бирининг ечимидан иккинчисининг ечимини топиш мумкин. Ўзаро боғлиқ бундай масалаларга бирликда иккиланган масалалар дейилади.

Дастлабки масала (3.5) – (3.6.) ни матрица формада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Z_{max} = CX$$

$$AX \leq B, X \geq 0$$

У ҳолда икки ёқлама (7.3) – (7.4.) масала эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F_{min} = B'Y$$

$$A'Y' \geq C', Y \geq 0$$

Матрица формада ёзилган дастлабки ва икки ёқлама масалаларнинг матрицалари ва векторлари бир-бирига нисбатан транспонирланган бўлади.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B' = (b_1, \dots, b_m), \quad C = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad C' = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Масалан:

а) Дастлабки масала

$$Z_{max} = CX$$

$$AX \leq B, X \geq 0$$

Икки ёқлама масала

$$F_{min} = B'Y$$

$$A'Y' \geq C', Y \geq 0$$

б) Дастлабки масала

$$Z_{min} = CX$$

$$AX \leq B, X \geq 0$$

Икки ёқлама масала

$$F_{max} = B'Y$$

$$A'Y' \leq C', Y \geq 0$$

Масала. Қуйидаги масалага икки ёқлама масала тузинг.

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$

$$-4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$$

$$3x_2 + x_5 + x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

$$Z = x_2 - x_4 - 3x_5 \rightarrow \min$$

Ечиш. Дастлабки масала

$$C = (0; 1; 0; -1; -3; 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$Z_{min} = CX; AX=B; X \geq 0$ бўлади. Дастлабки масала симметрик бўлмаган масалага тўғри келади. Шунинг учун а) пунктга асосан икки ёқлама масала қуйидагича бўлади:

$$F_{max} = B'Y; A'Y \leq C'$$

Бу ерда

$$B' = (1, 2, 5), \quad C' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ёки

$$\begin{aligned} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 &\leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 &\leq -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 &\leq 3 \\ y_i &\geq 0, \quad i=1,2,3 \\ F = y_1 - 2y_2 - 5y_3 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

3.8. Симплекс усул билан ўзаро икки ёқлама масалаларни ечиш

Дастлабки масаланинг ечимидан, унга нисбатан икки ёқлама масаланинг ёки ёқлама масаланинг ечимидан дастлабки масаланинг ечимини келтириб чиқаришга имкон берадиган симплекс усул ўзаро икки ёқлама симплекс усул дейилади. Ўзаро икки ёқлама симплекс усулнинг асосий мазмуни қуйидагидан иборат:

Қуйидаги масала

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\geq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\}$$

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

ва унга нисбатан икки ёқлама

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &\leq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\}$$

$$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$$

масала берилган бўлсин. Бу дастлабки ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган масалага симплекс усулни қўллаш учун чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилган, яъни

$$x_{n+1} = -b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad b_i \leq 0$$

$$y_{m+j} = -\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i + c_j, \quad c_j \geq 0$$

Кўринишда бўлиши керак. Бу ерда тенгламалар тизими масаладаги уларга мос тенгсизликлар тизимидан қўшимча

$$x_{n+i} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad y_{m+j} \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

номаълумларни киритиш натижасида келиб чиқади. Бу ерда $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ номаълумлар берилган масала учун базис, $x_1, x_2, \dots, x_n$ лар озод номаълумлардир.

$y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$ номаълумлар эса икки ёқлама масса учун базис, $y_1, y_2, \dots, y_m$ лар эса озод номаълумлардир.

Ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига асосан $\min Z = \max F$ бўлгани учун юқоридаги масалаларнинг бирортасининг оптимал ечимини топсак, иккинчисининг ҳам оптимал ечимини топган бўламиз.

Бунинг учун, берилган масаладаги базис номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги озод номаълумлар ва берилган масаладаги озод номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги базис номаълумлар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш кифоядир, яъни:

$$x_{n+1} \leftrightarrow y_1; \quad x_{n+2} \leftrightarrow y_2; \quad \dots; \quad x_{n+m} \leftrightarrow y_m; \quad x_1 \leftrightarrow y_{m+1}; \quad x_2 \leftrightarrow y_{m+2}; \quad \dots; \quad x_n \leftrightarrow y_{m+n};$$

Агар берилган масаланинг оптимал ечими $\{0, 0, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$ бўлса, унга икки ёқлама бўлган масаланинг оптимал ечими $\{y_1, y_2, \dots, y_m, 0, 0, \dots, 0\}$ бўлиб, y_1 x_{n+1} олдидаги коэффицентга, яъни $y_1 = c_{n+1}$ га; y_2 эса x_{n+2} олдидаги коэффицентга, яъни $y_2 = c_{n+2}$ га; y_m эса x_{n+m} олдидаги коэффицентга, яъни $y_m = c_{n+m}$ га тенгдир.

Икки ёқлама масалани ечиш учун икки ёқлама симплекс усул алгоритми қуйидагича:

1. Z қатордан мусбат сон қидирилади ва бу сон турган устун ҳал қилувчи қилиб олинади.

2. Бу устундан мусбат сон изланади ва у турган сатр ҳал қилувчи қилиб олинади (агар устунда мусбат сон бўлмаса, масала ечимга эга бўлмайди).

3. Z қатор элементларининг шу ҳал қилувчи қатор элементларига нисбатини қараймиз ва улрнинг мусбатларининг энг кичигини оламиз. Унга мос элемент ҳал қилувчи бўлади. Симплекс алмаштириш бажарилади. Агар Z қатор барча коэффицентлари манфий бўлса, шу билан биринчи босқич тугайди, акс ҳолда яна бу жараён такрорланади.

4. Иккинчи босқичда озод ҳадлар манфийларининг энг кичиги танланади. Бу сатр ҳал қилувчи сатр бўлади.

5. Ҳал қилувчи устун ва элемент 3 пунктдагидек аниқланади. Симплекс алмаштириш бажарилади. Агар барча озод ҳад коэффицентлари мусбат бўлса, шу билан иккинчи босқич ҳам тугайди, акс ҳолда яна бу жараён такрорланади.

Охирги олинган режа оптимал деб қабул қилинади.

Бу алгоритмнинг бажарилишини қуйидаги масалада кўриб чиқамиз.

Масала.

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 4 \\x_1 - x_2 &= 3 \\-5x_1 - 3x_2 + x_3 &= -10 \\x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \\x_j &\geq 0, \quad j=1,2,3\end{aligned}$$

Ечиш. Икки ёқлама масалани тузамиз. У қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 - 5y_3 + y_4 &\geq 8 \\-y_2 - 3y_3 + 6y_4 &\geq 4 \\2y_1 + y_3 - y_4 &\geq -2 \\F = 4y_1 + 3y_2 - 10y_3 + 5y_4 &\rightarrow \min\end{aligned}$$

Масала шартларини симплекс жадвалга киритамиз.

БЎ	1	СЎ			
		-y ₁	-y ₂	-y ₃	-y ₄
y ₅	-8	-1	-1	5	-1
y ₆	-4	0	1	3	-6
y ₇	2	-2	0	-1	1
F	0	-4	-3	10	-5

F қаторда мусбат элемент (10 сони) мавжуд, шу сабаб бу сон турган устун ҳал қилувчи бўлади. Бу устунда иккита мусбат сон мавжуд, улардан каттасини 5 сонини оламиз ва F қатор элементларининг шу қатор элементларига нисбатини қараймиз, ундан мусбатларининг энг кичигини танлаймиз, унга мос элемент ҳал қилувчи бўлади, яъни

$$\min\{-4/-1; -3/-1; 10/5; -5/-1\} = \min\{4; 3; 2; 5\} = 2$$

Демак, ҳал қилувчи элемент 5 сонига тенг. Симплекс алмаштириш бажариб қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

БЎ	1	СЎ			
		-y ₁	-y ₂	-y ₅	-y ₄

y_3	-8/5	-51	-1/5	1/5	-1/5
y_6	-4/5	3/5	8/5	-3/5	-27/5
y_7	2/5	-11/5	-1/5	1/5	4/5
F	16	-2	-1	-2	-3

F қатор элементлари барчаси манфий, шу сабаб озод ҳадлар устунини қараймиз, унда манфий элемент бор, у -8.5. Бу қатор ҳал қилувчи бўлади. Яна F қатор элементларининг шу қатор элементларига нисбатини қараймиз, ундан мусбатларининг энг кичигини танлаймиз, унга мос элемент ҳал қилувчи бўлади, яъни $\min|-2/-1/5; -1/1/5; -3/-1/5| = \min\{10; 5; -10; 15\} = 5$

Демак, ҳал қилувчи элемент -1/5. Симплекс алмаштириш бажариб қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

БЎ	1	СЎ			
		$-y_1$	$-y_3$	$-y_5$	$-y_4$
y_2	8	1	-5	-1	1
y_6	-12	-1	8	1	-7
y_7	2	-2	-1	0	1
F	24	-1	-5	-3	2

F қатор элементлари барчаси манфий, шу сабаб озод ҳадлар устунини қараймиз, унда манфий элемент бор, у -12. Бу қатор ҳал қилувчи бўлади. Яна F қатор элементларининг шу қатор элементларига нисбатини қараймиз, ундан мусбатларининг энг кичигини танлаймиз, унга м ос элемент ҳал қилувчи бўлади, яъни $\min|-1/-1; -5/8; -3/1; -2/7| = \min\{1; -5/8; -3; 2/7\} = 2/7$.

Демак, ҳал қилувчи элемент -7. Симплекс алмаштириш бажариб қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

БЎ	1	СЎ			
		$-y_1$	$-y_3$	$-y_5$	$-y_6$
y_2	44/7	6/7	-27/7	-6/7	1/7
y_4	12/7	1/7	-8/7	-1/7	-1/7
y_7	2/7	-15/7	1/7	1/7	1/7
F	192/7	-5/7	-51/7	-23/7	-2/7

Жадвалдан кўришиб турибдики бу олинган режа оптимал бўлади. Демак, иккиланган масаланинг оптимал ечими $y^* = (0; 44/7; 12/7; 0; 0; 2/7)$, $F_{\min} = 192/7$.

Асосий масала билан иккиланган масала ўзгарувчилари орасидаги боғланишга кўра яъни $x_1 \leftrightarrow y_5$; $x_2 \leftrightarrow y_6$; $x_3 \leftrightarrow y_7$; $x_4 \leftrightarrow y_1$; $x_5 \leftrightarrow y_2$; $x_6 \leftrightarrow y_3$; $x_7 \leftrightarrow y_4$ асосий масала ечимини ҳам топиш мумкин, яъни $x = (23/7; 2/7; 0; 5/7; 0; 5/7; 0)$ ва $Z_{\max} = F_{\min}$ бўлганлиги учун $Z_{\max} = 192/7$.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига икки ёқлама масала тузинг ва унинг бирини ечиб, иккинчисининг оптимал ечимини аниқланг.

1.

$$f = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 7$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12$$

2.

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 12$$

3.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &\geq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq 4 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \min \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 8 \\ 3x_1 - 4x_3 &\geq 5 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f &= 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_5 &= 14 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5). \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} f &= -2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ x_j &\geq 0, \quad (j=1,2,3). \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 15 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1,2,3). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \min \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &\geq 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\geq 6 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geq 3 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 &\leq 7 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \rightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{aligned}$$

3.9. Чизиқли программалашнинг сонли усуллари(бутун сонли программалаш)

Ўзгарувчиларга бутун сонли бўлишлик шарти қўйилган чизиқли дастурлаш масалаларига бутун сонли дастурлаш масаласи дейилади. Бутун сонли дастурлаш масалаларига сайёҳ ҳақидаги масала, оптимал жадвал тузиш, транспорт воситалари маршрутлашни оптималлаш, оптимал жойлаштириш масаласи ва ҳакозаларни масала қилиш мумкин.

Бутун сонли дастурлаш масаласи чизиқли дастурлаш масаласидан қўшимча шартлар билан фарқ қилади. Бу шартларнинг қатнашиши бутун сонли дастурлаш масаласини ечиш жараёнини қийинлаштиради. Натижада чизиқли дастурлаш масалаларини ечиш учун қўлланиладиган усулларни бутун сонли дастурлаш масалаларига қўллаш мумкин бўлмай қолади. ЧПни айрим программалаш усуллари билан танишиб чиқамиз.

А) Гомори усули. Бутун сонли дастурлаш масалаларини ечиш учун унинг хусусиятларини эътиборга олувчи усуллар яратилган бўлиб, улардан америкалик олим Р.Гомори яратган усул оптимал ечимни берувчи энг аниқ усул ҳисобланади. Бу усулнинг ғояси қуйидагидан иборат. Берилган бутун сонли дастурлаш масаласида номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермасдан, уларни оддий чизиқли дастурлаш масаласи сифатида симплекс усулдан фойдаланиб ечамиз.

Агар ечим бутун сонлардан иборат бўлса, у бутун сонли дастурлаш масаласининг ҳам ечими бўлади. Акс ҳолда номаълумларнинг бутун бўлишлик шартини эътиборга олувчи ва “кесувчи тенглама” деб аталувчи қўшимча тенглама тузилади. Уни Қуйидаги этапларга бўлиб ўрганамиз:

1. Айтайлик, масаладаги сонларнинг бутун бўлишлик шарти ташлаб юборишдан ҳосил бўладиган масала ечилган ва унинг оптимал ечими мавжуд бўлсин. Агар барча x лар бутун сонлар бўлса, топилган ечим бутун сонли дастурлаш масаласининг ечими бўлади.

2. Фараз қилайлик, баъзи x лар каср сонлардан иборат бўлсин, яъни симплекс жадвалдаги озод ҳадлар устуни қийматлари ичида каср сонлар ҳам мавжуд бўлсин. Уларнинг бутун қисмларини $[x]$ билан белгилаймиз. У ҳолда бу сонларнинг каср қисмлари q лар қуйидагича аниқланади:

$$q_i = x_i - [x_i], \quad q_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}].$$

Фараз қилайлик, баъзи $q_i \neq 0$ бўлсин. У ҳолда, симплекс жадвалнинг $\max q_i = q_k$ тенгликни қаноатлантирувчи k қатори учун кесувчи тенглама тузилади. Бунинг учун аввал

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \dots + q_{kn}x_n \geq q_k$$

тенгсизлик тузилади, сўнгра уни (-1) га кўпайтириб, x_{n+1} қўшимча ўзгарувчи киритилади.

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - \dots - q_{kn}x_n + x_{n+1} = q_k$$

Бундай тузилган тенглама кесувчи тенглама дейилади.

3. Кесувчи тенгламани симплекс жадвалнинг $m+2$ қаторига жойлаштирамиз ва симплекс алмаштиришларни бажарамиз.

Агар ҳосил бўлган янги симплекс жадвалда барча x_i лар бутун сонли (яъни ҳамма $q_i = x_i - [x_i] = 0$) бўлса, топилган ечим берилган бутун сонли дастурлаш масаласининг ечими бўлади. Акс ҳолда юқоридаги 2 ва 3 пунктлар яна такрорланади. Умуман бу жараён масаланинг бутун сонли ечими топулгунча ёки масаланинг бутун сонли ечими мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Масала. Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласининг бутун сонли ечимини топинг.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun} \\ Z = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min \end{cases}$$

Масалани нормал ҳолга келтирамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ butun} \\ Z = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min \end{cases}$$

Масалани симплекс усулда ечамиз.

БЎ	1	-x ₁	-x ₂
x ₃	6	2	3
x ₄	3	2	-3
Z	8	3	1

БЎ	1	-x ₄	-x ₂
x ₃	3	-1	6
x ₁	1.5	0.5	-1.5
Z	3.5	-1.5	5.5

БЎ	1	-x ₄	-x ₃
x ₂	0.5	-0.17	0.17
x ₁	2.25	0.25	0.25
Z	0.75	-0.58	-0.92

Шундай қилиб масаланинг оптимал режаси топилди, лекин бу режа бутун сонли эмас. Биринчи тенгламанинг каср қисми энг катта бўлгани учун шу биринчи қаторга нисбатан кесувчи тенглама тузамиз:

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

Бу тенгсизликнинг икки томонига (-1) ни кўпайтириб, x₅ қўшимча ўзгарувчи киритамиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}, \text{ ya'ni } -0.17x_3 + 0.17x_4 + x_5 = -0.5$$

Бу охириги тенгламада барча коэффицентларнинг бутун қисмлари нолга тенг бўлгани сабаб, улар ўзгаришсиз қолади. Уни жадвалнинг охирига жойлаштирамиз.

БЎ	1	-x ₄	-x ₃
x ₂	0.5	-0.17	0.17
x ₁	2.25	0.25	0.25
x ₅	-0.5	0.17	-0.17
Z	0.75	-0.58	-0.92

Симплекс алмаштириш қилиб қуйидаги жадвалга эга бўламиз.

БЎ	1	-x ₄	-x ₅
x ₂	0.0	0.0	1.0
x ₁	1.5	0.5	1.5
x ₃	3.0	-1.0	-6.0
Z	3.5	-1.5	-5.5

Энди симплекс жадвалнинг иккинчи қаторига нисбатан кесувчи тенгламани тузамиз.

$$1.5x_4 + 0.5x_5 \geq 1.5$$

Бу тенгсизликда коэффициентлар бутун қисми нолдан катта бўлгани сабаб $q_i = x_i - [x_i]$, $q_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ лардан фойдаланиб уларнинг каср қисмини ажратамиз, яъни $q_2 = 1.5 - [1.5] = 1.5 - 1 = 0.5$, $q_{24} = 1.5 - [1.5] = 1.5 - 1 = 0.5$.

Тенгсизликнинг икки томонига (-1) ни кўпайтириб, x₆ кўшимча ўзгарувчини киритамиз.

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$-0.5x_4 - 0.5x_5 + x_6 = -0.5, \text{ ya'ni } -\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

Уни жадвалнинг охирига жойлаштирамиз.

БЎ	1	-x ₄	-x ₅
x ₂	0.0	0.0	1.0
x ₁	1.5	0.5	1.5
x ₃	3.0	-1.0	-6.0
x ₆	-0.5	-0.5	-0.5
Z	3.5	-1.5	-5.5

Симплекс алмаштиришлар қилиб қуйидаги жадвалга эга бўламиз.

БЎ	1	-x ₆	-x ₅
x ₂	0.0	1.0	0.0
x ₁	1.0	1.0	1.0
x ₃	4.0	-5.0	-2.0
x ₄	1.0	1.0	-2.0
Z	5.0	-4.0	-3.0

Ҳосил бўлган симплекс жадвалда озод ҳадлар устуни элементлари бутун сонлардан иборат. Демак, бутун сонли дастурлаш масаласи ечими $X=(1,0,4,1)$ бўлади ва $Z_{\min}=5$.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги чизикли дастурлаш масаласининг бутун ечимларини аниқланг.

1.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 + \quad \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f &= 6x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 1 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2\frac{1}{2} \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 3x_2 + \quad x_3 \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_2 - 2x_3 &\leq 6 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 4.5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\geq 12 \\ 2x_1 - x_2 + \quad x_3 &\geq 8 \\ x_j &\geq 0 \quad j=1,2,3 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 1/4x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 3\frac{1}{2} \\ 3x_1 + 10x_2 + x_4 &= 15 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5\frac{1}{2} \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 &= -\frac{1}{2} \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} f &= x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + \quad + x_3 &\leq 5 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} f &= 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 &= 13 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max \\ x_1 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &= 41 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 - x_7 &= 47 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} f &= 3x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ -4x_1 + x_2 &\leq 29 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 38 \\ x_j &\geq 0, \text{ butun} \end{aligned}$$

Мавзулар бўйича саволлар

1. Тенгсизликлар системаси қачон биргаликда дейилади.
2. Чизикли дастурлаш масаласини геометрик тасвирланишини тушунтириб беринг.
3. Чизикли дастурлаш масаласини ечишнинг график усулида мумкин бўлган ечимлар соҳаси қандай аниқланади?
4. Симплекс жадвали қандай қурилади?
5. Чизикли дастурлаш масаласини ечишнинг симплекс усули қандай этаплардан иборат?
6. Ҳал қилувчи элемент қандай топилади?
7. Таянч режани топиш алгоритминини тушунтириб беринг.
8. Оптимал режани топиш алгоритминини тушунтириб беринг.
9. Симплекс алмаштиришлар жадвалда қандай бажарилади?
10. Сунъий базис усулини тушунтириб беринг.
11. Иккиланган масала деб қандай масалаларга айтилади?
12. Ўзаро икки ёқлама масалалар иқтисодий математик моделининг неча хили бор?
13. Бутун сонли программалаш масаласида Гомери усули ғояси нимадан иборат?
14. Кесувчи тенглама қандай тузилади?

4. ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ(ТМ)

4.1. Иқтисодий математик модели

Юкларни жўнатиш пунктларидан берилган қабул қилиш пунктларига ташиб беришнинг оптимал режасини топиш масаласига транспорт масаласи дейилади ва у қуйидагича формулировка қилинади:

Айтайлик $A_1, A_2, \dots, A_m$ пунктларида уларга мос $a_1, a_2, \dots, a_m$ миқдордаги бир жинсли юклар жойлашган бўлсин. Бу $A_1, A_2, \dots, A_m$ -ларга жўнатиш пунктлари деймиз. Бу юкларни n -та $B_1, B_2, \dots, B_n$ пунктлари қабул қилиши керак бўлиб ва уларнинг талаблари мос равишда $b_1, b_2, \dots, b_n$ бўлсин. Ҳар бир x_{ij} –бирликдаги юкни i -чи жўнатиш пунктдан j -чи қабул қилиш пунктига олиб бориш нархи (харажати) c_{ij} – маълум бўлсин. Бу юкларни ташиб режасини шундай тузишимиз керакки талабгор пунктлар максимал қониқиш олсин ва ҳамма юкларни олиб бориш учун кетган харажатлар йиғиндиси минимал бўлсин.

Транспорт масаласини шартли равишда жадвал кўринишида берамиз. Жадвалда қуйидагилар кўрсатилади: қабул қилиш пунктлари, жўнатиш пунктлари, юк запаслари, юкка бўлган эҳтиёж ва ҳар бир i -чи жўнатиш пунктдан j -чи қабул қилиш пунктига юбориладиган юк бирликларининг нархи (яъни тариф матрицаси) берилади.

Жўнатиш	Қабул қилиш пунктлари	Юк
---------	-----------------------	----

пунктлари	B_1	B_2		B_n	заҳраси
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{11} x_{11}	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{12} x_{12}	c_{11} x_{11}	c_{2n} x_{2n}	a_2
....					
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{11} x_{11}	c_{mn} x_{mn}	a_n
Юкка бўлган эҳтиёж	b_1	b_2		b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Бу ерда $C=\{c_{ij}\}$ матричасига тариф матричаси ёки транспорт харажатлари дейилади. $X=\{x_{ij}\}$ матричасига эса транспорт масаласининг режаси дейилади. Бу ерда x_{ij} -i-чи пунктдан j-чи пунктга етказиладиган юклар ҳажми (сони). Ташиш режаси билан боғлиқ кетган харажатларнинг умумий йиғиндиси қуйидаги мақсад функцияси орқали ифодаланади.

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}.$$

Бу ерда x_{ij} - ўзгарувчилар юк запаси, юкка бўлган эҳтиёж ва манфий бўлмаслик шартларини (чегараланишларни) бажарган бўлиши керак.

Юқоридагиларни ҳисобга олган ҳолда транспорт масаласининг иқтисодий математик моделини қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad (j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (j = \overline{1, n}) \\ Z &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Транспорт масаласининг математик қўйилиши қуйидагича талқин қилинади: Чегаравий тизимлар, манфий бўлмаслик шарти ва мақсад функцияси берилган дейлик. Талаб қилинадики тизимнинг ечимлар тўпламида шундай манфий бўлмаган ечимларни (режасини) топиш керакки, мақсад функцияси минимал қийматга эришсин.

Транспорт масалси икки турга бўлинади, очик ва ёпиқ турдаги. Агар юк запаслари йиғиндиси талаб қилинган юклар йиғиндисига тенг бўлса, яъни

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Масала ёпик турдаги масала бўлади

Агар юк запаслари йиғиндиси талаб қилинган юклар йиғиндисига тенг бўлмаса, яъни

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

Масала очик турдаги масала бўлади.

4.2 Транспорт масаласини ечиш усуллари

Транспорт масаласини ечиш икки босқичдан иборат

1. Бошланғич таянч планни топиш.
2. Таянч планлар ичидан оптимал планни топиш.

Таянч планни тузишнинг бир неча усуллари мавжуд: “Шимолий-ғарб бурчак”, “Кичик элементлар”, “Фогел” ва бошқалар.

“Шимолий-ғарб бурчак” усули.

Юкларни ташишнинг бошланғич планни тузишда “шимолий-ғарб бурчак” усулидан фойдаланиш қуйидагича амалга оширилади:

1. Тариф жадвали тузилади.

	b_1	b_2		b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}
.....				
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

2. Чап томондаги юқоридаги бурчак, яъни (шимолий-ғарб бурчак) дан бошлаб сатр бўйича ёки устун бўйича силжиймиз. (1,1) катакка a_1 ва b_1 нинг энг кичигини жойлаштирамиз, яъни $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

3. Агар $a_1 > b_1$ бўлса $x_{11} = b_1$ ни берамиз, биринчи устун шу билан ёпилади, яъни $x_{11} = 0$ ($i=2, m$). (Биринчи қабул қилувчининг талаби тўлиқ қаноатлантирилди).

4. Биринчи сатр бўйича силжиймиз (1;2) катакка, бу ерда $a_1 - b_1 - b_2$ нинг энг кичигини жойлаштирамиз, яъни $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$.

5. Агар $b_1 > a_1$ бўлса 1-чи сатр ёпилади, яъни $x_{1j} = 0$ ($j=2, n$).

6. Қўшни катакларни тўлдиришга ўтамиз (2.1), яъни $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$.

7. Иккинчи сатр ёки иккинчи устун катакларини тўлдиришга ўтамиз ва ҳаказо. Бу жараён токи ресурслар тугамагунча давом этади.

“Кичик элементлар” усули.

“Кичик элементлар” усули ёрдамида таянч планни топиш қуйидагича амалга оширилади:

1. Юклар қабул қилувчиларга тариф жадвалидаги энг кичик c_{ij} ташиш нарҳига мос каткани тўлдиришдан бошланади.
2. Энг кичик тариф c_{ij} катагига a_i ёки b_j нинг энг кичиги жойлаштирилади.
3. Кейин тўлиқ юк запаслари сарф қилинган сатр ёки қабул қилиш пункти талаби кондирилгач мос устун йўқотилади.
4. Агар жўналиш пунктидаги юк запаслари тўлиқ тақсимланган бўлса ва қабул қилувчи талаби тўлиқ қаноатлантирилса уларга мос сатр ва устун йўқотилади.
5. Қолган сатр ва устунлардан яна кичик таъриф олинади. Юк запасларини тақсимлаш жараёни, токи юк запаси тугагунча ва талаблар қаноатлантирилгунча давом этади.

Потенциаллар усули.

Агар юқоридаги усуллар ёрдамида бошланғич таянч план топилган бўлса, оптимал планни топиш потенциаллар усулида бажарилади.

Транспорт масаласи оптимал планни топишнинг потенциал усули қуйидагилардан иборат:

1. Юқоридаги келтирилган усуллар ёрдамида юкларни ташишнинг таянч режаси аниқланади.

2. Мос равишда юкларни қабул қилувчи ва жўнатувчи пунктлар учун u_i ва v_j потенциаллари аниқланади.

3. Бўш катакларда потенциаллар йиғиндиси ҳисобланади $c'_{ij} = u_i + v_j$.

4. Бўш катакларда c_{ij} ва c'_{ij} тарифлар фарқи ҳисобланади.

$$S_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

5. Агар ҳамма бўш катаклардаги фарқ $S_{ij} > 0$ бўлса олинган план оптимал бўлади.

6. Агар бўш катаклардан бирортасида $S_{ij} < 0$ бўлиб қолса, бўш бўлмаган катакларга x_{ij} ўзгарувчи қиймати киритилади, яъни юқоридаги фарқ минимал бўлсин. Шу катак учун бўш бўлмаган катаклар ёрдамида ёпиқ контур ҳосил қилинади ва юклар шу контурда қайта тақсимланади. Натижада янги ташиш планга эга бўламиз.

Бу жараён токи фарқ $S_{ij} > 0$ бўлмагунча давом этади ва охириги олинган юкларни ташиш режаси оптимал бўлади.

Масала.

Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

b_k	40	25	20	50
-------	----	----	----	----

$a_i \backslash$				
60	5	4	1	2
40	4	2	6	3
35	7	3	5	4

Ечиш: Бошланғич таянч планни “Шимолий-ғарб бурчак” ва “Кичик элементлар” усулида топамиз. “Шимолий-ғарб бурчаги” усули қондасига биноан жадвалнинг (1,1) катагига $X_{1,1} = \min(60,40) = 40$ сонини жойлаштирамиз, кейинги $X_{1,2} = \min(60-40,25) = 20$ сонини (1,2) катагига жойлаймиз. Шу билан биринчи пунктда юк тугади ва кейинги катаклар (1,3) ва (1,4) ёпилади.

Кейинги пунктдаги юкларни тақсимлашни бошлаймиз. (2,2) катакка $X_{2,2} = \min(40,5) = 5$ сонини жойлаштирамиз. Шу билан 1-чи ва 2-чи талабгорлар талаби қондирилди, яъни 1-чи ва 2-чи устун ёпилди. (2,3) катакка $X_{2,3} = \min(35,20) = 20$ жойлаштирилади. 3-чи талабгор талаби бажарилди. Қолган юкни (2,4) катакка жойлаштирамиз, яъни $X_{2,4} = \min(15,50) = 15$ ва иккинчи жўнатиш пунктида юк тугади. 3-чи жўнатиш пунктидаги юкни тақсимлашни бошлаймиз.

(3,1), (3,2), (3,3) катаклар ёпилган, яъни 1,2 ва 3 талабгорлар талаби қондирилган. (3,4) катакка $X_{3,4} = \min(35,35) = 35$ ёзамиз. Шу билан юклар тўлиқ тақсимланади, яъни қуйидаги планга эга бўлдик.

$$X = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Мақсад функцияси қиймати $Z=595$ ни ташкил қилади.

Қўйилган масаланинг таянч режасини энди “Энг кичик элементлар” усули билан топамиз.

Ечиш: Устун ёки сатр бўйича энг кичик харажатни топамиз.

Сатр бўйича бу элемент (1,3) катакда жойлашган, яъни $c_{13}=1$. Шунинг учун бу катакка $X_{13} = \min(60,20) = 20$ юкни жойлаймиз. Учинчи талабгорнинг талаби қаноатлантирилди. Шу туфайли кейинги ҳисоблашларга 3-чи устун қаралмайди. Кейинги энг кичик элементни топамиз. Бу элемент (1,4) ва (2,2) катакларда жойлашган, яъни $c_{14}=2$ ва $c_{22}=2$. Юкларни бу катакларга жойлаймиз. $X_{14} = \min(60-20,50) = 40$, $X_{22} = \min(40,25) = 25$. Иккинчи талабгор талаби қаноатлантирилди, шу туфайли кейинги ҳисоблашларда 2-чи устун қаралмайди.

Кейинги энг кичик элементлар (2,4) ва (3,2) катакларда жойлашган, яъни $c_{24}=3$ ва $c_{32}=3$. Бу катакларга юкларни жойлаштирамиз $X_{24} = \min(40-25,50-40) = 10$. (3,2) катак қаралмайди, чунки бу устун ҳисобдан чиқарилган. Кейинги энг кичик элементни излаймиз, бу элемент $c_{21}=4$. Юкни бу катакка жойлаймиз $X_{21} = \min(15-10,40) = 5$. Энг охириги кичик элемент $c_{31}=7$. Бу катакка ҳам юкни жойлаймиз $X_{31} = \min(35,40-5) = 35$. Натижада юкларни тақсимлаб, бошланғич таянч планга эга бўлдик, яъни

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Мақсад функциясини ҳисоблаймиз $Z=415$.

Энди масаланинг оптимал режасини топамиз. Оптимал планни топиш учун потенциаллар усулидан фойдаланамиз. Бошланғич таянч план “Энг кичик элементлар” усулида топилган дейлик. Уни қуйидаги жадвал кўринишида ёзамиз.

$b_k \backslash a_i$	40	25	20	50	U
60	5	4	1 20	2 40	0
40	+ 4 5	- 2 25	6	3 10	1
35	- 7 35	+ 3	5	4	4
V	3	1	1	2	

Жадвалда бўш бўлмаган катаклар қуйидаги шартни қаноатлантиради.

$$r=3+4-1=6$$

Юкни жўнатувчи ва талабгорлар потенциалини аниқлаймиз ва қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз.

$$u_1 + v_3 = 1; \quad u_1 + v_4 = 2; \quad u_2 + v_1 = 4; \quad u_2 + v_2 = 2; \quad u_2 + v_4 = 3; \quad u_3 + v_1 = 7;$$

Маълумки тенгламалар сони номаълумлар сонидан 1 та кам, яъни номаълумлар 1 таси озод ва u исталган қиймат олиши мумкин. Масала учун айтайлик $u_1 = 0$. У ҳолда қолган потенциаллар қуйидагича аниқланади.

$$u_1 = 0, \quad v_3 = 1, \quad v_4 = 2, \quad u_2 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_1 = 3, \quad u_3 = 4.$$

Бўш катакларда s_{ij} қийматини қуйидаги формула билан аниқлаймиз $S_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. У ҳолда

$$\begin{aligned} S_{11} &= 5 - (0 + 3) = 2; & S_{12} &= 4 - (0 + 1) = 3; & S_{23} &= 6 - (1 + 1) = 4; \\ S_{32} &= 3 - (4 + 1) = 2; & S_{11} &= 5 - (4 + 1) = 0; & S_{11} &= 4 - (4 + 2) = 2. \end{aligned}$$

Олинган план оптимал бўла олмайди, чунки, s_{ij} лар ичида манфийлари ҳам мавжуд $S_{32} = S_{34} = -2$. Бу катаклар учун ёпиқ контур (цикл) ҳосил қиламиз. (3,2) катак учун контур (3,2), (3,1), (2,1), (2,2). Контурни соат стрелкаси бўйича ёки унга тескари йўналишда (3,2) катакдан бошлаб кетма-кет + ва – ишораларини қўйиб чиқамиз. Манфий катаклардан энг кичигини танлаймиз $\min(25; 35) = 25$, яъни $x_{22} = 25$. Катакларда юкларни қайта тақсимлаймиз. Тақсимлашда умумий баланс бу катакларда бузилмасин ва харажатлар минимал бўлсин. Минусли катак (2,2) даги юкни кейинги мусбат катакдаги юкка қўшамиз. У ҳолда (2,1) катакда юк $5 + 25 = 30$ бўлади. Баланс бузилмаслик учун (3,1) катакдаги юкдан 25 бирлигини (3,2) катакка юклаймиз. Шундай қилиб янги планга эга бўлдик. Бу жадвал учун потенциалларни аниқлаймиз ва бўш катакларда s_{ij} ларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} S_{11} &= 5 - (0 + 3) = 2; & S_{12} &= 4 - (0 + 1) = 3; & S_{23} &= 6 - (1 + 1) = 4; \\ S_{22} &= 2 - (2 + 1) = 0; & S_{33} &= 5 - (4 + 1) = 0; & S_{34} &= 4 - (4 + 2) = 2. \end{aligned}$$

$b_k \backslash a_i$	40	25	20	50	u
----------------------	----	----	----	----	---

60	5	4	1 20	2 40	0
60	5	4	1 20	2 40	0
40	+ 4 30	2 0	6	3 10	1
35	- 7 10	3 25	5	+ 4	4
V	3	1	1	2	

Янги олинган план ҳам оптимал эмас, чунки $S_{34}=-2$. Ёпиқ контур тузамиз ва юкларни бу контур ичида қайта тақсимлаймиз ва натижада қуйидаги планга эга бўламиз.

$a_i \backslash b_k$	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 40	2 0	6	3	1
35	7	3 25	5	4 10	2
V	3	1	1	2	

Олинган план оптимал план, чунки барча бўш катакларда S_{ij} лар мусбат. Демак, оптимал план қуйидагича бўлади.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Максад функциясининг қиймати $z_{\min}=375$.

4.3. Очiq турдаги транспорт масаласини ечиш

Баъзи транспорт масалаларида юк запаслари талаблар йиғиндисидан кичик ёки катта бўлиши мумкин. Бундай масалалар очiq турдаги транспорт масаласи дейилади. Бундай ҳолларда соҳта (фиктив) $m+1$ жўнатиш ёки $n+1$ қабул қилиш (истеъмол) қилувчи пунктлари киртилади, яъни

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i > 0 \text{ yoki}$$

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j > 0$$

Бу пунктларда транспорт харажатлари нолга тенг қилиб олинади, яъни $c_{m+1,j}=0$ ёки $c_{i,n+1}=0$.

Масала. Қуйидаги очиқ моделли транспорт масаласини ечинг.

$a_i \backslash b_k$	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Бу масалада

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 16 > \sum_{j=1}^5 b_j = 13$$

Шунинг учун олтинчи сохта талабгорни киритамиз, унинг талаби $b_6=16-13=3$ бўлади. Бу сохта пунктни киритиб, масалани қуйидагича ёзамиз.

$a_i \backslash b_k$	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Бу масалани ечиш 7-циклда оптимал ечимни топамиз, яъни

$$x_{12}=1, x_{13}=3, x_{24}=2,$$

$$x_{25}=2, x_{26}=1, x_{31}=3, x_{32}=2, x_{36}=2,$$

$$y_{\min}=1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 13$$

Амалий машғулот учун масалалар

Учта A_1, A_2, A_3 пахта пунктларида мос равишда a_1, a_2, a_3 тонндан пахта бор. Бу пахталарни B_1, B_2, B_3, B_4 базаларга мос равишда b_1, b_2, b_3, b_4 тонндан тақсимлаш зарур. Агар бир тонна пахтани ташиш нарҳи d_{ij} бўлса, ташишнинг оптимал режасини тузинг.

$$\begin{array}{ll} 1. & a_1=330 & b_1=180 \\ & a_2=260 & b_2=220 \\ & a_3=310 & b_3=300 \\ & & b_4=200 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 10 & 13 & 16 & 9 \\ 11 & 14 & 17 & 8 \\ 12 & 15 & 18 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 2. & a_1=240 & b_1=150 \\ & a_2=230 & b_2=160 \\ & a_3=230 & b_3=170 \\ & & b_4=220 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 15 & 18 \\ 10 & 13 & 16 & 19 \\ 11 & 14 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 3. & a_1=390 & b_1=240 \\ & a_2=290 & b_2=230 \\ & a_3=320 & b_3=310 \\ & & b_4=220 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 18 & 15 & 12 & 15 \\ 17 & 13 & 16 & 17 \\ 16 & 9 & 17 & 16 \end{vmatrix}$$

$$4. \quad a_1=330 \quad b_1=320$$

$$\begin{array}{ll} 6. & a_1=200 \quad b_1=180 \\ & a_2=250 \quad b_2=120 \\ & a_3=150 \quad b_3=130 \\ & \quad \quad b_4=170 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 7 \\ 7 & 6 & 14 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 7. & a_1=250 \quad b_1=130 \\ & a_2=200 \quad b_2=110 \\ & a_3=150 \quad b_3=190 \\ & \quad \quad b_4=170 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 14 & 17 \\ 13 & 8 & 11 & 20 \\ 19 & 16 & 12 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 8. & a_1=280 \quad b_1=180 \\ & a_2=220 \quad b_2=270 \\ & a_3=300 \quad b_3=310 \\ & \quad \quad b_4=200 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 20 & 15 & 16 \\ 12 & 14 & 21 & 10 \\ 16 & 19 & 17 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 9. & a_1=250 \quad b_1=180 \\ & a_2=200 \quad b_2=120 \\ & a_3=150 \quad b_3=130 \\ & \quad \quad b_4=170 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 20 & 15 & 16 & 13 \\ 3 & 14 & 21 & 10 \\ 12 & 16 & 19 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 10. & a_1=350 \quad b_1=230 \\ & a_2=400 \quad b_2=270 \\ & a_3=250 \quad b_3=200 \\ & \quad \quad b_4=300 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 15 & 16 & 13 & 10 \\ 20 & 14 & 21 & 17 \\ 3 & 12 & 16 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 11. & a_1=250 \quad b_1=200 \\ & a_2=250 \quad b_2=120 \\ & a_3=250 \quad b_3=180 \\ & \quad \quad b_4=250 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 16 & 13 & 10 & 17 \\ 15 & 21 & 14 & 19 \\ 20 & 3 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 12. & a_1=250 \quad b_1=170 \\ & a_2=270 \quad b_2=160 \\ & a_3=170 \quad b_3=110 \\ & \quad \quad b_4=250 \end{array}$$

$$d = \begin{vmatrix} 13 & 10 & 17 & 19 \\ 16 & 21 & 14 & 16 \\ 15 & 20 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

13. $a_1=350$ $b_1=320$
 $a_2=300$ $b_2=260$
 $a_3=370$ $b_3=215$
 $b_4=225$
 $d = \begin{vmatrix} 10 & 17 & 19 & 16 \\ 13 & 14 & 21 & 12 \\ 16 & 15 & 20 & 5 \end{vmatrix}$
14. $a_1=250$ $b_1=190$
 $a_2=350$ $b_2=210$
 $a_3=300$ $b_3=230$
 $b_4=270$
 $d = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 16 & 10 \\ 13 & 13 & 18 & 12 \\ 19 & 9 & 10 & 13 \end{vmatrix}$
15. $a_1=230$ $b_1=200$
 $a_2=400$ $b_2=280$
 $a_3=280$ $b_3=250$
 $b_4=180$
 $d = \begin{vmatrix} 17 & 13 & 17 & 20 \\ 10 & 9 & 15 & 6 \\ 7 & 13 & 21 & 7 \end{vmatrix}$
16. $a_1=290$ $b_1=200$
 $a_2=310$ $b_2=180$
 $a_3=240$ $b_3=220$
 $b_4=240$
 $d = \begin{vmatrix} 6 & 14 & 18 & 14 \\ 13 & 7 & 5 & 15 \\ 16 & 10 & 16 & 9 \end{vmatrix}$
17. $a_1=330$ $b_1=130$
 $a_2=370$ $b_2=280$
 $a_3=300$ $b_3=230$
 $b_4=360$
 $d = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 16 & 11 \\ 21 & 10 & 7 & 23 \\ 19 & 13 & 17 & 18 \end{vmatrix}$
18. $a_1=340$ $b_1=200$
 $a_2=260$ $b_2=240$
 $a_3=280$ $b_3=180$
 $b_4=260$
 $d = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 12 & 15 \\ 11 & 9 & 14 & 13 \\ 10 & 6 & 16 & 9 \end{vmatrix}$
19. $a_1=300$ $b_1=190$
 $a_2=280$ $b_2=170$
 $a_3=220$ $b_3=240$
 $b_4=200$
 $d = \begin{vmatrix} 8 & 12 & 10 & 15 \\ 4 & 13 & 15 & 14 \\ 9 & 16 & 17 & 11 \end{vmatrix}$
20. $a_1=400$ $b_1=225$
 $a_2=250$ $b_2=230$
 $a_3=350$ $b_3=335$
 $b_4=210$
 $d = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 14 & 17 \\ 9 & 5 & 11 & 22 \\ 4 & 17 & 18 & 21 \end{vmatrix}$

Мавзулар бўйича саволлар

1. Транспорт масаласининг иқтисодий маъносини тушунтириб беринг.
2. Транспорт масаласининг иқтисодий математик модели қандай талқин қилинади?
3. Тариф матрицаси нима?
4. Транспорт масаласининг режаси деганда нимани тушунаси?
5. Транспорт масаласи қачон очик турда ва қачон ёпиқ турда бўлади?
6. Транспорт масаласини ечиш қандай босқичлардан иборат?
7. Таянч планни топишнинг қандай усуллари биласиз?
8. Оптимал планни топишнинг қандай усуллари биласиз?
9. Оптимал планни аниқлаш қандай критерия ёрдамида аниқланади?

5. ЧИЗИҚСИЗ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

5.1. Чизиксиз дастурлаш масаласининг қўйилиши

Умумий ҳолда чизиксиз дастурлаш масаласи қўйилиши қуйидагича формулировка қилинади.

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1, i = \overline{1, m_1} \\ \dots\dots\dots \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m, i = \overline{m_2 + 1, m} \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min(\max) \end{cases}$$

бу ерда x_j – бошқариш параметрлари ёки чизиксиз дастурлаш масласи ечими, $j=1,2,\dots,n$;

b_i – фиксирланган параметрлар, $i=1,2,\dots,m$;

f, g_i – n та ўзгарувчига боғлиқ берилган функциялар, $i=1,2,\dots,m$.

Агар f, g_i чизикли бўлса, у ҳолда масала чизикли дастурлаш масаласига айланади. Чизиксиз дастурлаш масаласининг математик қўйилиши шундан иборатки, шундай x_j – бошқариш параметрлари қийматини топиш керакки иқтисодий математик моделда келтирилган чекланишлар тизими қаноатлантириш ва мақсад функцияси максимум ёки минимум қийматга эришсин.

Чизиксиз дастурлаш масалаларининг мақсад функциялари ва чекланиш шартларида катнашадиган функциялар изланаётган номаълумларнинг чизиксиз функцияларидан иборат бўлади. Агар бизга n ўзгарувчи, яъни $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ га боғлиқ бўлган бирорта функциянинг чекланиш тенгламалари ёки тенгсизликлари тизимини қаноатлантирадиган минимумни топиш талаб қилинган бўлса, бу шартли минималлаш масаласи шартсиз минималлаш масаласига келтирилади. Бу функция минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шarti қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \varphi(x) = 0.$$

Бу шарт функциянинг стационарлик шarti дейилади.

Чизиксиз оптималлаш масаласи ечиш усули нуктаи назаридан икки синфга бўлинади:

- шартсиз оптималлаш масаласи;
- шартли оптималлаш масаласи.

Шартсиз оптималлаш масаласи мақсад функциясининг ҳеч қандай қўшимча шартларсиз оптимумини излаб топишни тасвирлайди ва у қуйидагича ёзилади:

$$F(x) \rightarrow \max(\min)$$

Бундай масалалар амалиётда жуда кам учрайди, уни ечиш усули эса амалий оптималлаш масалаларини ечиш учун асосий бўлиб хизмат қилади.

Шартли оптималлаш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ёзилади:

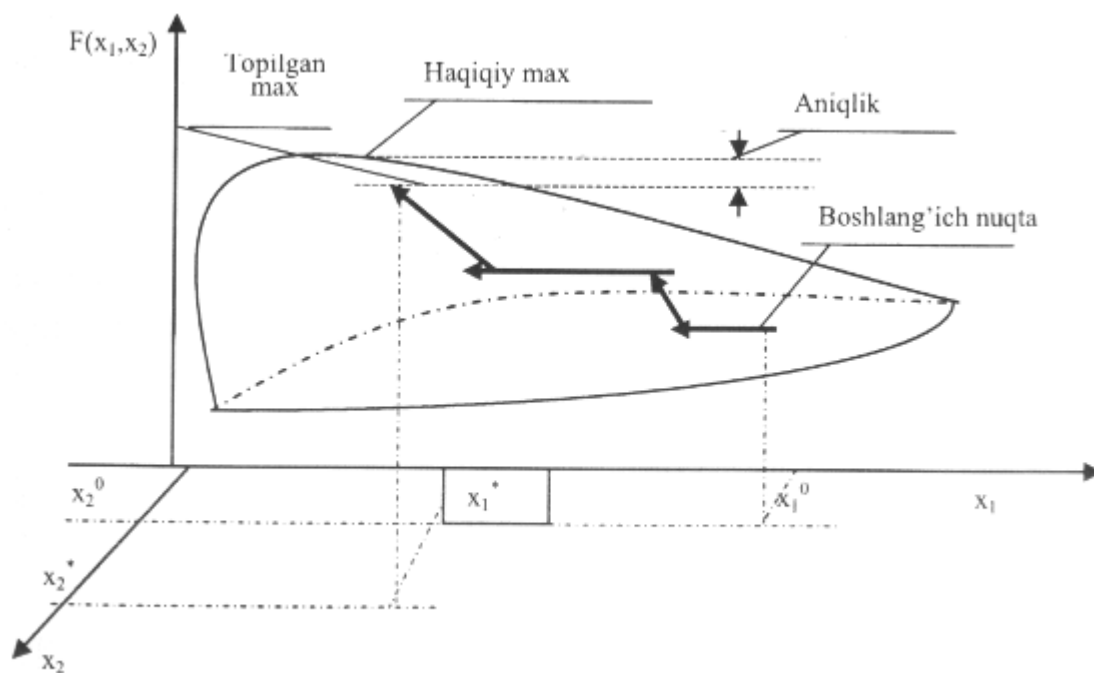
$$\begin{aligned} F=f(x_j) &\rightarrow \max \\ g(x_j) &\leq B_i \\ d_j \leq x_j \leq D_j \quad &i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

Отималлаш масаласининг бундай масаласи ўз ичига мақсад функциясини, ҳамда қўшимча чегараловчи шартлар ва чегаравий шартларни ҳам олади.

5.2 Шартсиз оптималлаш масаласини ечиш усуллари

Чизиксиз оптималлаш масаласи ҳар хил усулларда ечилади. Ихтиёрий сонли ўзгарувчили функция экстремумини излаб топиш қуйидагича амалга оширилади.

Аввало излаш бошланғич нуқта координатаси $x^0_j, j=1,n$ берилади. Излаш вақтини қисқартириш учун иложи борича бошланғич нуқта $x^0_j, j=1,n$ изланаётган экстремумга яқин танлаш керак бўлади. Агар реал (аниқ) масала ечилаётган бўлса, у ҳолда мутахассис ҳамма вақт экстремум топиладиган кутилаётган соҳани бўлади ва бошланғич нуқтани унга яқин қилиб танлайди. Агар ечилаётган масалани шу соҳа мутахассиси ечмаётган бўлса, у ҳолда бошланғич излаш нуқтаси яхши танланмаслиги мумкин. Бошланғич яқинлашув нуқтасини танлашнинг энг асосий талабларидан бири мақсад функцияси бу нуқтада нолдан фарқли бўлиши керак, яъни $f(x^0_j) \neq 0$.



5.1 расм

Экстремумни излашнинг асосий ғояси қуйидагидан иборат:

1. $x^0_j, j=1,n$. Бошланғич нуқтани бериш.
2. Берилган нуқтада биринчи кадамда b_j ҳаракат йўналишини аниқлаш.
3. t_1 кадам катталигини қабул қилиш.
4. Биринчи кадам охири координатасин аниқлаш.
5. Биринчи кадамда экстремум белгиси қийматини ҳисоблаш.
6. Экстремум белгиси бажарилишини текшириш.

Агар шарт белгиси бажарилса, у ҳолда шу нуқтада экстремум топилган бўлади, акс ҳолда эса кейинги кадам бажарилади.

Излаш усули деб шундай усулга айтиладики, унда b йўналишни ва t кадам катталигини аниқлаш учун фақат мақсад функцияси қиймати ишлатилади.

Бундай усулларга нолинчи тартибли усуллар дейилади. Градиент усуллар ҳам мавжуд бўлиб, уларга биринчи тартибли усуллар дейилади ва улар b йўналишни t кадам катталигини аниқлашда мақсад функцияси биринчи тартибли дифференциали қийматини ишлатади ва унинг градиенти аниқланади.

Ньютон усули ҳам мавжуд бўлиб, унга иккинчи тартибли усуллар дейилади ва улар b йўналишни ва t кадам катталигини аниқлашда мақсад функцияси иккинчи тартибли дифференциали қийматини ишлатади.

Ньютон усули. x^* нукта $f(x)$ функцияга минимум берувчи нукта бўлиши учун шу нуктада берилган функциянинг градиенти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\text{grad } f(x^*) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функцияга минимум берувчи нукта мавжуд бўлса, у нукта қуйидаги

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \varphi(x) = 0$$

тенгламанинг ечимлари орасидан топилади. Фараз қилайлик x_1 нукта $\varphi(x)=0$ тенгламанинг тақрибий ечими бўлсин. $\varphi(x)$ функцияни $(x - x_1)$ нукта атрофида ёйамиз ва ундан иккита қўшилувчи билан чегараланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\varphi(x) \approx \varphi(x_1) + \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x} (x - x_1) = 0 \quad \text{va} \quad x = x_1 - \frac{\varphi(x_1)}{\frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x}}.$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Мақсад $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ яқинлашувчи кетма-кетликларни топишдан иборат эканлигидан фойдаланиб, бу формулани қуйидагича рекурент формула орқали ёзамиз:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{\varphi(x_{k-1})}{\frac{\partial \varphi(x_{k-1})}{\partial x}} \quad \text{yoki} \quad x_k = x_{k-1} - \frac{\varphi(x_{k-1})}{\varphi'(x_{k-1})}$$

Бу формула **Ньютон** формуласи дейилади.

Ньютон усули бўйича ҳисоблаш олдиндан берилган аниқлик $\varepsilon > 0$ сон учун

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилгунга қадар давом этади.

Масала. $x^2 - 5 = 0$ тенгламанинг мусбат ечимини $\varepsilon = 0,00001$ аниқликда Ньютон усули билан топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламанинг ечими 2 билан 2,5 орасида бўлгани учун дастлабки нолинчи ечим деб $x_0 = 2$ ни оламиз. Берилган масалада $\varphi(x) = x^2 - 5$ бўлгани учун $\varphi'(x) = 2x$

Демак, унда Ньютон формуласи қуйидагича бўлади:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^2}{2x_{k-1}}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$x_0 = 2$ бўлгани учун

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{5}{2} \right) = 2,25, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(2,25 + \frac{5}{2,25} \right) = 2,2361$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(2,2361 + \frac{5}{2,2361} \right) = 2,23605, \quad |x_3 - x_2| = |2,23605 - 2,2361| \leq \varepsilon$$

Демак, берилган тенгламанинг $\epsilon=0,00001$ аниқликдаги ечими $x^*=2,2361$ экан.

Чизиқсиз тенгламалар тизимини ечиш учун Ньютон усули.

Ньютон усули чизиқсиз тенгламалар тизими учун қуйидагича ёзилади.

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_k) \cdot F(X_k), \quad k=0,1,2,3,\dots$$

Бу ерда

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}; \quad F(X_k) = \begin{bmatrix} f_1(X_k) \\ \vdots \\ f_n(X_k) \end{bmatrix}; \quad W^{-1}(X_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1}$$

$W^{-1}(X_k)$ матрица Якоби матрицаси дейилади.

Ньютон усулининг модификацияланган варианты ҳам мавжуд бўлиб, унда тақрибий ечим бўлган $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нуқталарда ҳисобланади. Бу эса арифметик ҳисоблашларни бирмунча камайтиради. У ҳолда модификацияланган Ньютон усулини қуйидагича ёзиш мумкин.

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_0) \cdot F(X_k), \quad k=0,1,2,3,\dots$$

Лекин бу модификацияланган усулда аниқ ечимга яқинлашиш тезлиги секинроқ бўлади.

М и с о л. Бошланғич тақрибий ечим $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.5$ бўлганда

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2 + x_3^2 = 0$$

тенгламалар тизимининг тақрибий ечими Ньютон усулида ҳисоблансин.

Ечиш: Бу ерда

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \quad F(X_0) = \begin{bmatrix} 0.25 + 0.25 + 0.25 - 1 \\ 0.5 + 0.25 - 2 \\ 0.75 - 2 + 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.0 \end{bmatrix}; \quad W^{-1}(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

Ньютон формуласига асосан

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

Демак, $x_1^{(1)} = 0.875$; $x_2^{(1)} = 0.5$; $x_3^{(1)} = 0.375$. Энди $x_1^{(1)}$; $x_2^{(1)}$; $x_3^{(1)}$ лардан фойдаланиб $x_1^{(2)}$; $x_2^{(2)}$; $x_3^{(2)}$ ларни ҳисоблаймиз. Унда

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{bmatrix}; F(X_1) = \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.25125 \\ 0.43750 \end{bmatrix}; W^{-1}(X_1) = -\frac{1}{64.75} \begin{bmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.625 & -9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{bmatrix}$$

Ньютон формуласига асоан $x_1^{(2)}$; $x_2^{(2)}$; $x_3^{(2)}$ лар ҳисобланса мос равишда қуйидагига тенг бўлади

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78981 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix}$$

Худди шу йўл билан $x_1^{(3)}$; $x_2^{(3)}$; $x_3^{(3)}$ ларни топсак,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49662 \\ 0.36992 \end{bmatrix}$$

бўлади. Агар учинчи тақрибий ечим билан чегаралансак, берилган тизимнинг ечимини $x_1^{(3)}=0.78981$; $x_2^{(3)}=0.49662$; $x_3^{(3)}=0.36992$ деб қабул қиламиз.

5.3. Лагранж аниқмас кўпайтувчилар усули

Фараз қилайлик, бизга ушбу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

чириксиз функциянинг қуйидаги

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

тенгламалар тизимини қаноатлантирувчи минимумни топиш талаб қилинган бўлсин. Қуйидаги

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ёки қисқача

$$F(X, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

функцияни тузамиз. Бу функция Лагранж функцияси дейилади. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

Лагранж аниқмас кўпайтувчилар дейилади. Агар $\lambda_0=1$ бўлса, Лагранж функцияси Лагранжнинг нормал функцияси дейилади.

Лагранж функциясидан $x_j, j=1, 2, \dots, n$ ва $i=1, 2, \dots, m$ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалар олиб нолга тенглаштирсак, қуйидаги тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз.

$$\frac{\partial F(X, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial F(X, \lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Бу тенгламалар тизимини вектор формада ёзамиз

$$\frac{\partial F(X, \lambda)}{\partial X} = \frac{\partial F(X)}{\partial X} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F(X, \lambda)}{\partial \lambda} = g(X) = 0$$

Шундай қилиб, биз Лагранж усули билан n номаълумли $m+1$ тенгламалар тизимини $n+m$ номаълумли $n+m$ тенгламалар тизимига келтирдик, ёки бошқача қилиб айтганда берилган шартли минималлаш масаласини шартсиз минималлаш масаласига келтирдик.

Охирги тизимни қаноатлантирадиган X_0 нуқтага *нормал минимум нуқта*, қўйилган масалага эса *нормал шартли минималлаш масаласи дейилади*.
 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ нуқтага – қўйилган масаланинг ечими ёки Лагранж функциясининг стационар (критик) нуқтаси дейилади.

5.4. Шартли оптималлаш масаласини ечиш алгоритми

Маълумки, оптималлаш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} F &= f(x_j) \rightarrow \max \\ g_i(x_j) &\leq B_i \\ d_j &\leq x_j \leq D_j \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

Биз биламизки бу масала шартли оптималлаш масаласидир.

Бу масалани ечишнинг бир қатор усуллари мавжуд. Маълумки Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усулининг асосий ғояси шартли оптималлаш масаласини шартсиз оптималлаш масаласига келтириш бўлиб, у қуйидагича амалга оширилади:

1. Чегараланиш тенгсизлиги тенгламага ўзгартирилади

$$V_i(x_j) = g_i(x_j) - B_i, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n$$

2. Чегараланиш қуйидагича ёзилади

$$V_i(x_j) = 0, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n$$

Худди шундай чегаравий шартлар ҳам ўзгартирилади.

У ҳолда шартли оптималлаш масаласи қуйидагича бўлади.

$$\begin{aligned} F &= f(x_j) \rightarrow \max \\ V_i(x_j) &= 0, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

3. Масала Лагранж функцияси кўринишида тасвирланади.

$$L(x_j, \lambda_i) = f(x_j) - \sum_{i=1}^m \lambda_i V_i(x_j) \rightarrow \max; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$$

Бу ерда λ_i – Лагранж кўпайтувчиси.

4. Хусусий ҳосилаларни аниқлаш ва тенгламалар тизимини тузиш

$$\partial L(x_j, \lambda_i) / \partial x_j = 0$$

$$\partial L(x_j, \lambda_i) / \partial \lambda_i = 0$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$$

5. Бу тизимни ечиб λ_i га нисбатан ечиш.

6. Топилган λ_i қийматларини Лагранж функциясига қўшиш ва шартсиз оптималлаш масаласига келиш.

7. Олинган шартсиз оптималлаш масаласини юқорида берилган Ньютон усулида ечиш.

Масала. Қуйидаги шартли оптималлаш масаласини Лагранж кўпайтувчилари усулида шартсиз оптималлаш масаласига келтиринг.

$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

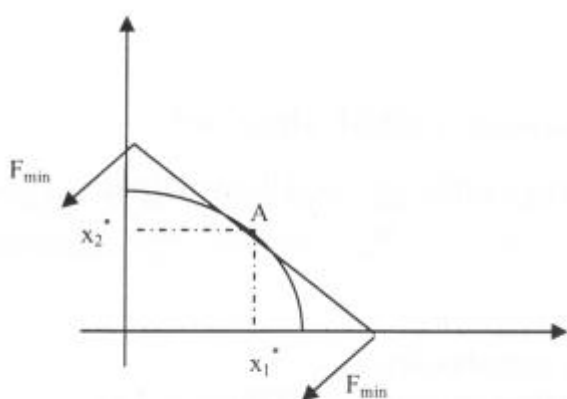
$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

1. Тизимни қуйидаги формада ёзамиз

$$F(x_1) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Масаланинг график интерпретацияси қуйидаги 5.2 расмда келтирилган



5.2 расм

2. Лагранж функциясини тузамиз

$$L(x_j, \lambda_i) = x_1 + x_2 - \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \rightarrow \min; \quad i = \bar{1}; \quad j = \overline{1,2}$$

3. Тенгламалар тизимини ёзамиз

$$\partial L / \partial x_1 = 1 - 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$\partial L / \partial x_2 = 1 - 2\lambda_1 x_2 = 0$$

$$\partial L / \partial \lambda_1 = -(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$$

4. Тенгламалар тизимини ечиб λ_1 ни топамиз

$$\lambda_1 = \frac{1}{2x_1}$$

5. Топилган λ_1 қийматни Лагранж функциясига қўямиз

$$L(x_j, \lambda_i) = x_1 + x_2 - \frac{1}{2x_1}(x_1^2 + x_2^2 - 1) \rightarrow \min;$$

Шундай қилиб шартли оптималлаш масаласини шартсиз оптималлаш масаласига келтирдик.

Амалий машғулот учун масалалар

Қуйидаги масалаг Лагранж кўпайтувчилар усулини қўллаб ечинг.

1.

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

2.

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

3.

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

4.

$$f = x_1 x_2 + x_2 x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

4.

$$F_{\max} = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

6.

$$F_{\min} = x^2 + y^2$$

$$1/2 x + 1/3 y = 1.$$

5.5. Градиент усуллар

Чизиксиз дастурлаш масалаларини ечишда энг кўп қўлланиладиган усуллардан бири градиент усуллариدير. Функцияларининг минимумини топишда қўлланиладиган градиент усуллар дастлабки танлаб олинган X тақрибий ечимини

Тенгламанинг аниқ ечим йўналиши бўйича кетма-кет аниқлигини оширишга асослангандир.

Т а ь р и ф. n ўлчовли R фазода берилган $F(X)$ функциянинг X нуктадаги градиенти град $F(X_0) = \frac{dF(X_0)}{dx}$ деб, $F(X_0 + \Delta X) - F(X_0)$ чекли орттирманинг чизикли

қисмига айтилади, яъни $F(X_0 + \Delta X) - F(X_0) = \text{grad } F(X_0) \Delta X + o(\Delta X)$.

Градиент усуллар чизикли бўлмаган масалаларни ечишнинг тақрибий усулларига киради, чунки, улар аниқ қийматни фақатгина чексиз (фақатгина алоҳида ҳолларда чекли) кадамда беради.

Градиент усулда чизикли бўлмаган дастурлашнинг ихтиёрий масаласини ечиш мумкин, бунинг учун фақатгина локал экстремумни топиш етарли. Шунинг учун уларни қўллаш каварик дастурлаш масалаларини ечишда кўпроқ самара беради, чунки бу ерда локал экстремум бир вақтнинг ўзида глобал ҳамдир.

Х нинг ўзгариш соҳасида чегараланмаган $f(x)$ функцияни максималлаштириш масласини кўриб чиқайлик. $F(x)$ функциянинг экстремал қийматини ихтиёрий мавжуд ечимдан, масалан $x_k = (x_{1k}; \dots; x_{nk})$ нуқтадан бошлаб қидириш мумкин.

$F(x)$ функциянинг x_k нуқтадаги $\nabla f(x)$ градиенти деб шундай векторга айтиладики, унинг координаталари мос ўзгарувчи бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилаларнинг қийматига тенг, яъни

$$\nabla f(x_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{1k}}; \dots; \frac{\partial f}{\partial x_{nk}} \right).$$

Берилган нуқтадаги функция градиенти $f(x)$ функциянинг тезроқ ўсиш йўналишини кўрсатади. x_k нуқтанинг градиент бўйлаб янги нуқтага кўчирилиш тенгламаси

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k) = 0 \quad (5.1)$$

га тенг бўлган тўғри чизик орқали амалга оширилади. Бу ерда λ_k –шундай сонли ўзгарувчики, унга қараб $\nabla x_k = \lambda_k \nabla f(x_k)$ кўчиш қадамнинг катталиги ўзгаради. Функция энг катта кадамга эришадиган λ_k катталиги функция экстремумининг зарурий шартидан топилиши мумкин:

$$\frac{d[\Delta f(\lambda_k)]}{d\lambda_k} = \nabla f(x_{k+1}) \nabla f(x_k) = 0 \quad (5.2)$$

λ_k параметрни ҳисоблагандан сўнг (λ_k нинг қийматини (5.1) га қўйиб) навбатдаги x_{k+1} нуқта топилади. x_{k+1} нуқтада яна градиент топамиз, ҳаракат эса $x_{k+2} = x_{k+1} - \lambda_{k+1} \nabla f(x_{k+1})$ тўғри чизик орқали янги $\nabla f(x_{k+2})$ градиент бўйлаб функция ушбу йўналишда энг катта қийматга эришадиган x_{k+2} нуқтагача амалга оширилади ва ҳ.к. Ечиш жарёни функция градиенти нолга тенг бўлган x^* нуқта топилгунча давом этади. x^* нуқтада $f(x^*)$ мақсад функцияси максимал қийматга эришади.

Масала. $f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$ функциянинг максимумини топинг. Ечиш жараёни $x_0 = (4; 4)$ нуқтадан бошлансин.

Ечиш. $f(x)$ функциянинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилаларни топамиз. $df/dx_1 = 2 - 2x_1$; $df/dx_2 = 4 - 2x_2$. x_0 нуқтадаги функция градиентлари $\nabla f(x_0) = (2 - 2 \cdot 4; 4 - 2 \cdot 4) = (-6; -4)$ га тенг бўлинади. x_0 нуқтадан $\nabla f(x_0)$ градиент бўйлаб янги x_1 нуқтага кўчирамиз: $x_1 = (4; 4) + \lambda_0(-6; -4) = (4 - 6\lambda_0; 4 - 4\lambda_0)$.

x_1 нуқтадаги функция градиентлари

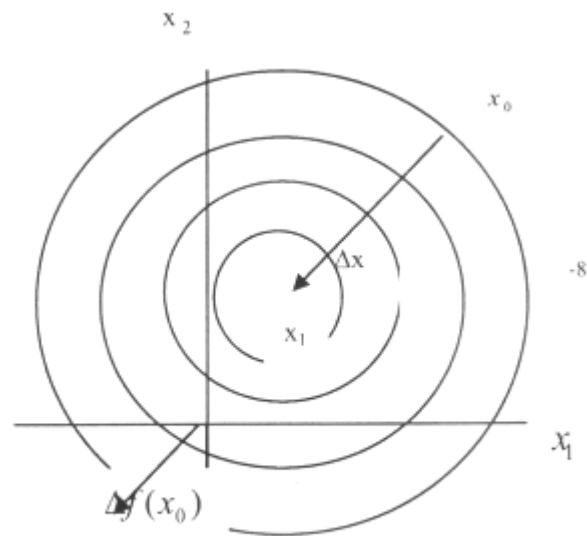
$$\nabla f(x_1) = [2 - 2(4 - 6\lambda_0); 4 - 2(4 - 4\lambda_0)] = (-6 + 12\lambda_0; -4 + 8\lambda_0).$$

Экстремумнинг зарурий шарт қуйидаги тенгламани беради

$$\frac{d[\Delta f]}{d\lambda_0} = \nabla f(x_1) \nabla f(x_0) = (-6 + 12\lambda_0)(-6) + (-4 + 8\lambda_0)(-4) = 13 - 26\lambda_0 = 0.$$

Бу ердан келиб чиқадики $\lambda_0^* = 0.5$. $d^2 \nabla f / d\lambda_0^2 = -26 < 0$ бўлгани учун, топилган λ_0^* қиймат $\nabla f(\lambda_0)$ функциянинг максимум нуқтаси бўлади.

Қидирув траекториясидаги навбатдаги нукта $x_1 = (4 - 6 \cdot 0,5; 4 - 4 \cdot 0,5) = (1; 2)$ ва $\nabla f(x_1) = (2 - 2 \cdot 1; 4 - 2 \cdot 2) = (0; 0)$. Демак $x_1 = (1; 2)$ шундай нуктаки, унда функция ўзининг максимал қийматига эришади $f(x_1) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1 - 4 = 5$ (бошланғич нуктада $f(x_0) = -8$). 5.3 расмда берилган масаланинг график кўриниши келтирилган.



5.3 расм

Энди чизиқли бўлмаган дастурлашнинг чегараланган масалаларини ечишга ўтайлик. Масаланинг мазмуни қуйидагича: қуйидаги

$$\begin{aligned} a_i x &\leq b_i \\ x &\geq 0, \\ x &= (x_1; \dots; x_n); \quad a_i = (a_{i1}; \dots; a_{in}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

чегарали $f(x)$ функциянинг максимуми топилсин. Бу ерда $f(x)$ функция дифференциалланувчи ботиқ функциядир.

Бу каби масалаларни ечишда иккита ҳол учрайди: 1) мақсад функцияси ягона экстремумга эга ва у мавжуд ечимлар соҳасининг ичида жойлашган. Бу ҳолда масалани ечиш жараёни (x_0 оптимал нуктани қидириш) юқорида баён

этилгандан мутлақо фарқ қилмайди; 2) мақсад функцияси мавжуд соҳанинг чегарасида жойлашган нуктада экстремал қиймат қабул қилади. Бу ҳолда масалани ечиш кетма-кетлиги қуйидагича бўлади: Агар бошланғич нукта мавжуд соҳанинг ичида жойлашса (ҳамма чекланишлар қатъий тенгсизлик кўринишида тасвирланса), кўчишни градиент бўйлаб амалга ошириш даркор. Лекин навбатдаги нуктанинг $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \nabla f(x_k)$ координаталари (5.3) даги шартларни қаноатлантириш керак, яъни қуйидаги тенгсизликлар бажарилиши шарт

$$\left. \begin{aligned} a_i [x_k + \lambda_k \nabla f(x_k)] &\leq b_i \quad (i = 1, \dots, m); \\ x_k + \lambda_k \nabla f(x_k) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

(5.4) тенгламалар тизимини ечиш натижасида x_1 нуқта мавжуд ораликқа тегишли бўлган λ_k ўзгарувчининг мавжуд қийматлар оралиги $[\lambda'_k; \lambda''_k]$ топилади.

$\nabla f(x_k + \lambda_k \nabla f(x_k)) = 0$, (5.2) тенгламаларни ечиш натижасида топилган λ_k қиймат $[\lambda'_k; \lambda''_k]$ ораликқа тегишли бўлиши керак. Агар λ_k қиймат ораликдан ташқарида ётса, λ_k^* сифатида λ''_k олинади. Жумладан қидирув траекториясининг навбатдаги нуқтаси (5.4) тизимнинг тенгсизлигига мос келувчи чегаравий гипертекисликда ётади, шуни ҳисобга олиб, тизимни ечишда λ''_k топилади.

Агар бошланғич x_k нуқта чегаравий гипертекисликда ётса (ёки қидирув траекториясининг навбатдаги нуқтаси чегаравий траекторияда ётиб қолса), йўналиш математик дастурлашнинг

$$a_i r_k = b_i \quad (5.5)$$

$$|r_k| = 1$$

тенгликлар бажариладиган i лар учун қуйидаги ёрдамчи масаласини ечиш орқали аниқланади:

$$T_k = \nabla f(x_k) r_k(\max); \quad (5.6)$$

$$a_i r_k \leq 0$$

бу ерда $r_k = (r_{k1}; \dots; r_{kn})$; $|r_k| = \sqrt{\sum_{j=1}^n r_{kj}^2}$ (5.6) ва (5.5) шарт x_k нуқтанинг мавжуд соҳа

чегарасига тегишли бўлиш ёки бўлмаслигини, ((5.6) шарт x_k нуқтадан r_k вектор бўйича қўчириш мавжуд соҳанинг ичига ёки чегараси бўйлаб йўналганлигини аниқлайди, (5.5) шарт эса r_k катталикини чегаралаш учун зарур). Қидирув траекториясининг кейинги $x_{k+1} = x_k + \lambda''_k r_k$ нуқтаси учун λ_k^* ўзгарувчининг қиймати топилади. Бунда экстремумнинг зарурий шarti $\nabla f(x_{k+1}^*) r_k = 0$ ҳисобга олинади.

Ечиш жараёни $T_k = \nabla f(x_{k+1}^*) r_k = 0$ бўлишини таъминловчи x_{k+1}^* нуқта олинганда тўхтайди.

Масала. $-x_1 + x_2 \leq 1$; $3x_1 + 2x_2 \leq 6$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; чекланишларни ҳисобга олган ҳолда $f = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$ ни максималлаштиринг. Оптимал қидирув (1;0.5) нуқтадан бошланади.

Е ч и ш. $x_0 = (1; 0.5)$ нуқта мавжуд соҳанинг ичида ётади ва $f(x_0) = 1.75$. Кейинги x_1 нуқтага қўчириш йўналиши сифатида $\nabla f(x) = (8 - 4x_1; 6 - 2x_2)$ градиентнинг йшналишини оламиз. x_0 нуқтадаги градиент $\nabla f(x_0) = (4; 5) \neq 0$ га тенг. Бундан келиб чиққан ҳолда навбатдаги нуқтанинг координаталарини қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$x_1 = x_0 + \lambda_0 \nabla f(x_0) = (1; 0.5) + \lambda_0 (4; 5) = (1 + 4\lambda_0; 0.5 + 5\lambda_0).$$

x_1 нуқта мавжуд соҳага тегишли бўладиган λ_0 ўзгарувчининг барча қийматлар оралигини топамиз. Бу ҳолда (5.4) тенгсизликлар тизимининг кўриниши қуйидагича:

$$\left. \begin{aligned} -1 - 4\lambda_0 + 0.5 - 5\lambda_0 &\leq 1; \\ 3 + 12\lambda_0 + 1 + 10\lambda_0 &\leq 6; \\ 1 + 4\lambda_0 &\geq 0; \end{aligned} \right\}$$

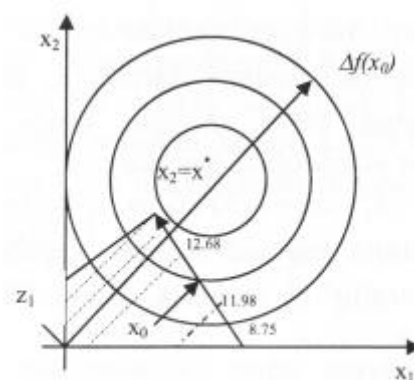
Бу тизимни ечиш натижасида $[\lambda'_0; \lambda''_0] = [-0,1; 0,09]$ оралик топилади. $d\nabla f/(d\lambda_0) = \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0) = (4 - 16\lambda_0; 5 - 10\lambda_0)(4;5) = 41 - 114\lambda_0 = 0$ ни ечиб, $\lambda_0 = 0,36$ эканлигини аниқлаймиз, ушбу қийматда функция энг катта қийматга эришади. Лекин, қиймат $[\lambda'_0; \lambda''_0] = [-0,1; 0,09]$ ораликқа тегишли эмас. Шунинг учун $\lambda'_0 = 0,09$ деб оламиз.

Янги $x_1 = (1,36; 0,95)$ нукта иккинчи чекланиш тенгсизлиги ($\lambda'_0 = 0,09$ қиймат тўғри келувчи тенгсизлик) билан аниқланувчи чегаравий тўғри чизикда ётади. x_1 нуктада функциянинг қиймати $f(x_1) = 11,98 > f(x_0) = 8,75$. x_1 нукта чегаравий тўғри чизикда ётгани учун кейинги x_2 нуктага ўтиш йўналишини r_1 вектор бўйича аниқлаймиз (градиент бўйича ҳаракат мавжуд соҳадан чиқиб кетишга олиб келади). r_1 векторни аниқлаш учун ёрдамчи (5.5) – (5.6) масаласини ёзиб оламиз:

$a_2 r_1 = (3; 2)(r_{11}; r_{12}) = 3r_{11} + 2r_{12} = 0$; чекланишларни ва $|r_1| = \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2} = 1$ ни ҳисобга олиб $T_1 = \nabla f(x_1) r_1 = (2,56; 4,1)(r_{11}; r_{12}) = 2,56 r_{11} + 4,1 r_{12}$ ни максималлаштиринг.

Берилган масаланинг тенгламалар тизими иккита ечимга эга: $(0,5568; -0,8352)$ ва $(-0,5568; 0,8352)$. Бу ечимларни T_1 функцияга қўйиб, $T_1 \neq 0$ функциясининг максимал қийматига $(-0,5568; 0,8352)$ да эришилишининг гувоҳи бўламиз, яъни x_1 нуктадан $r_1 = (-0,5568; 0,8352)$ бўйлаб, иккинчи чегаравий тўғри чизик орқали кўчиш керак. Кейинги x_2 нуктанинг координаталари $x_2 = x_1 + \lambda_1 r_1 = (1,36 - 0,5568\lambda_1; 0,95 + 0,8352\lambda_1)$. λ_1 ўзгарувчининг мавжуд қийматлар оралиғини яна аниқлаймиз, унда x_2 қиймат мавжуд соҳага тегишли бўлади. x_2 қаноатлантириши керак бўлган чекланишлар тизимига иккинчи чекланиш кирмайди, чунки бу нукта ушбу чекланиш билан аниқланган чегаравий тўғри чизикда ётади. Берилган тизимни ечиб оралиқни топамиз:

$$[\lambda'_0; \lambda''_0] = [-1,1; 1,01].$$



5.4-расм

Экстремумнинг зарурий шarti

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial \lambda_1} = \nabla f(x_2)r_1 = (2,56 + 2,2272\lambda_1) \times (-0,5568) + (4,1 - 1,6704\lambda_1) \times (0,8352) = 0$$

дан фойдаланиб, $\lambda_1=2,2$ эканлигини аниқлаймиз. Лекин $\lambda_1=2,2$ $[-1,1; 1,01]$ ораликка тегишли эмас, шунинг учун $\lambda_1^*=1,01$ деб оламиз. Янги $x_2 = (0,8; 1,8)$ нукта чекланишлар тизимининг биринчи ва иккинчи тенгсизлигига мос келувчи иккита чегаравий тўғри чизикларнинг кесишмасида ётади. Бу нуктада функция $f(x_2) = 12,68 > f(x_1) = 11,98 > f(x_0) = 8,75$ x_2 нуктадан кўчиш йўналиши $r_2 = (r_{21}; r_{22})$ векторини топамиз; $r_{21} + r_{22} = 0, 3r_{21} + 2r_{22}$ чекланишларни ҳисобга олиб $T_2 = \nabla f(x_2) r_2 = 4,8r_{21} + 2,4r_{22} = 0$ ни максималлаштиринг $|r_2| = \sqrt{r_{21}^2 + r_{22}^2} = 1$.

Масаланинг тенгламалар тизими $r_2 = (0;0)$ ечимга эга. Олинган натижани T функцияга қўйиб, максимум $T = 0$ ни ҳосил қиламиз, бу дегани x_2 мақсад функциясининг мавжуд соҳасидаги максимум нуктасидир, яъни $x_2 = x^* \max f(x^*) = 12,68$. 5.4 расмдан кўриниб тургандек $f(x)$ нинг чизиғи мавжуд соҳанинг чегараларига x_2 нуктада уринади.

Амалий машғулот учун масалалар

Оптималлаштириш жараёнини кўрсатилган нуктадан бошлаб чизикли бўлмаган дастурлаш масалаларини градиент усулда ечинг, ечимини график усулда ҳам тасвирланг.

1.

$$f = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \text{ (min);}$$

$$x_0 = (1; 3).$$

2.

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 \text{ (min);}$$

$$x_0 = (2; 8).$$

3.

$$f = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 20 \text{ (min);}$$

$$x_0 = (1; 1).$$

4.

$$f = 10x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2 \text{ (max);}$$

$$x_0 = (0; 0).$$

5.

$$f = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2 \text{ (max);}$$

$$x_0 = (2; 3).$$

6.

$$f = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 13 \text{ (max);}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 7; \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{array} \right\} x_0 = (3; 1)$$

7.

$$f = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \text{ (max);}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{array} \right\} x_0 = (3; 1)$$

8.

$$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 \text{ (max);}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{array} \right\} x_0 = (0; 0)$$

9.

$$\left. \begin{aligned} f &= 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 (\max); \\ -x_1 + x_2 &\leq 1; \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3; \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0; \end{aligned} \right\} x_0 = (2; 1)$$

10.

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x_1 - 3/4)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3/4)^2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1 - 5x_2 \rightarrow \min \\ g_1(x) &= x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ g_1(x) &= -x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

5.6. Excel дастурий воситасида чизиқсиз дастурлаш масаласини ечиш

Чизиқсиз дастурлаш масаласини Excelда ечишни кўрсатиш учун қуйидаги реал масалани қараймиз.

1-масала. Берилган ҳажмли параллелопипед шаклдаги бак ўлчамини аниқлаш талаб этилсин.

Бак ҳажми

$$V = abh$$

Тўлиқ сирти

$$S=2(ab) + 2(a+b)h=2(ab+(a+b)h)$$

Кетадиган материал баҳосини қуйидагича қабул қиламиз

$$c=kS$$

бу ерда k – бир бирлик материал юзаси баҳоси.

Бу формулага S ни қўйиб қуйидагига эга бўламиз

$$c=2k(ab+(a+b)h).$$

Буларни ҳисобга олиб оптималлаш масаласини қуйидагича формулировка қиламиз

$$V=abh \rightarrow \max$$

$$2k(ab+(a+b)h) \leq c$$

$$a, b, h > 0$$

Бу масаланинг қўйилиши шундан иборатки, бак a, b, h ўлчамини шундай топиш керакки, унга кетадиган материал нарҳи c дан ошмасин ва унинг ҳажми V максимал бўлсин.

Масалани ечиш учун қуйидаги аниқ қийматларни қабул қиламиз:

$$k=10 \text{ минг сўм/м}^2, c=100 \text{ минг сўм.}$$

У ҳолда масалани янада аниқ қилиб қуйидагича ёзамиз

$$V=abh \rightarrow \max$$

$$20(ab+(a+b)h) \leq 100$$

$$a, b, h > 0$$

Бу масалани Excel дастурий воситасида ечишни кўриб чиқамиз.

Excel дастурий воситасида чизиксиз дастурлаш масаласини ечиш чизикли дастурлаш масаласидан қуйидагилардан фарқ қилади:

- изланаётган ўзгарувчилар бошланғич қиймати берилади;

- “Поиск решения” процедураси ойнасининг “Параметры” диалог ойнасида “Линейная модель” белгиланмаслик (киритмаслик) керак.

Иккинчи фарқ тушунтириш талаб этмайди, биринчига эса қуйидаги тушунтиришни бериш керак. Бошланғич x_j^0 қиймат мумкин қадар оптимал ечимга яқинроқ қилиб танланиши керак, бу ўз навбатида масалани ечишни тезлатади. Бу талаб хоҳишга қараб, лекин асосий талаб мақсад функцияси бу бошланғич нуқтада нолга тенг бўлмаслигидир $F(x_j^0) \neq 0$. Бу керакли талабдир, чунки, ΔF_k қиймати нолга тенг бўлиб, ҳисоблашда нолга бўлиш ҳосил бўлиб қолади.

Юқорида берилган масалани Excel да ечишга ўтамиз ва унинг Excel да кадамба-кадам бажарилиш алгоритмини баён этамиз:

1. Берилган чизиксиз дастурлаш масаласи берилишини киритамиз:

1.1. Масала шартини киритиш учун форма тайёрлаш.

1.2. Киритиш

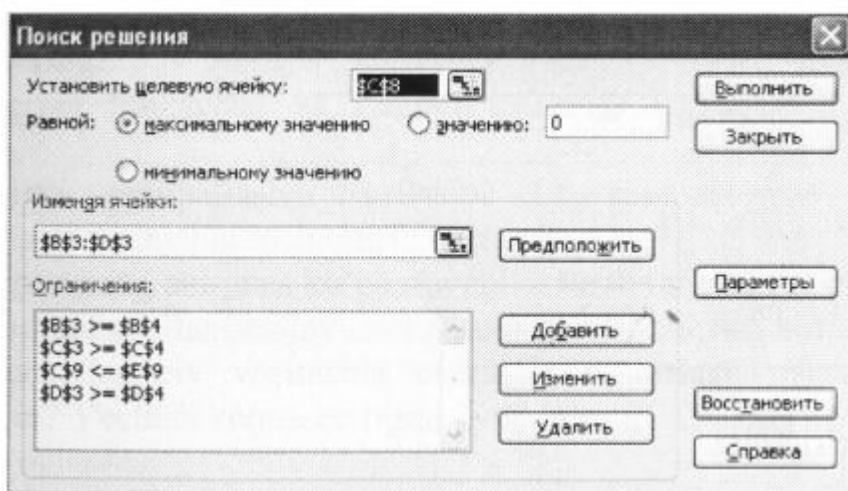
- Ҳажм ва баҳони киритиш;
- Бошланғич x_j^0 қийматларни киритиш;
- B3,C3,D3,E3 ячейкаларига $(x_j^0) \neq 0$ талабни қондириш учун 1 қийматлик киритиш.

	A	B	C	D	E
1			Ўзгарувчилар		
2		a	b	h	
3	Қиймат	1	1	1	
4	Паски чегара	0	0	0	
5			Боғланишлар		
6					
7		Белгилаш	катталик	белги	Ўнг томон

2. Ечиш.

2.1. Натижалар чиқадиган ячейкалар форматига сон каср қисми учун сон белгисини аниқлаш. Масалан, бизнинг масалаимизда бу ячейкаларга вегулдан 2 белги киритиш етарлидир. Буни амалга ошириш ячейкалар форматига кириб амалга оширилади.

2.2. Менюдан “Сервис” ва кейин –“Поиск решения” процедураси мулоқот ойнасига кирилади.



2.3. Масала шартларини тўлдириш.

Қуйидагилар тўлдирилади:

- мақсад функциясига C8; максималлаштириш;
- ўзгарадиган ячейкаларга B3:D3;
- чегаравий шартларга $B3 \geq B4$; $C3 \geq C4$; $D3 \geq D4$;
- чекланишларга $C9 \leq E9$.

2.4. Масалани ечишга ўтиш – “Поиск решения” процедураси мулоқот ойнасидан “Параметры” диалог ойнасига ўтилади. Бу ойнада оптимал ечимни излаш параметрлари белгиланади. Бу параметрлар маъносини билиш унча талаб этилмайди. Максимал вақт, секундда автоматик равишда 100. Итерация сони

чегараси, автоматик равишда 100. Агар бу параметрлар ечимни топишда етарли бўлмаса, экранда мос маълумот чиқади. Аниқлик қиймати автоматик равишда 0.000001. Бу ечимнинг юқори даражада аниқлигини таъминлайди.

2.5. Мулоқот дарчадаги келтирилган параметрлар қийматини белгилагандан сўнг ОК тугмаси босилади.

2.6. “Выполнить” буйруғи берилади. Экранда натижа чиқади.

	A	B	C	D	E
1			Ўзгарувчилар		
2		a	b	h	
3	Қиймат	1,29	1,29	1,29	
4	Паски чегара				
5			Боғланишлар		
6					
7		Белгилаш	катталик	белги	Ўнг томон

Олинган натижа $B3=C3=D3=1.29$, яъни $a=b=h=1.29$. Демак, изланаётган бак формаси куб кўринишда бўлиши керак экан.

2-масала. Қуйидаги чизиксиз дастурлаш масаласини Excel да ечинг

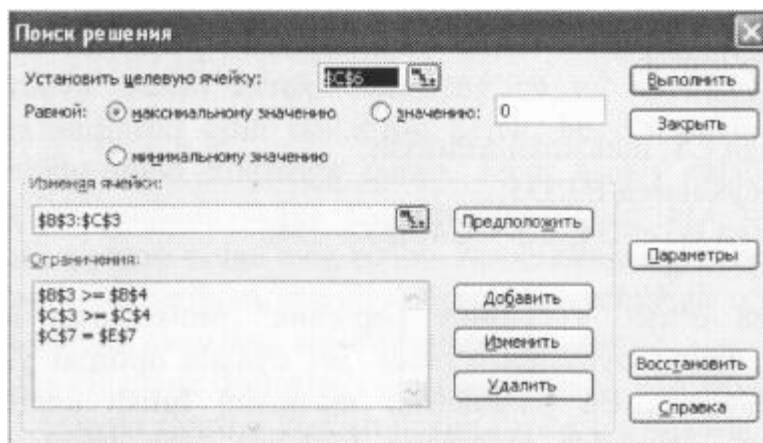
$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Масала шартини киритамиз

	A	B	C	D	E
1		Ўзгарувчилар			
2		x1	x2		
3	Қийматлар	1	1		
4	Пастки чегара				
5					
6	Мақсад ф-я	F(x)	=B3+C3		
7	Чекланиш	Ch	=B3^2+C3^2	=	1
8					

Чегаравий шартларни киритамиз



“Поиск решения” процедураси мулоқот ойнасига ўтиб “Выполнить” буйруғини берамиз ва экранда қуйидаги натижага эга бўламиз

	A	B	C	D	E
1		Ўзгарувчилар			
2		x1	x2		
3	Қийматлар	0,71	0,71		
4	Пастки чегара				
5					
6	Мақсад ф-я	F(x)	1,41		
7	Чекланиш	Ch	1,00	=	1
8					

Демак, ечим $x_1=0,71$; $x_2=0,71$; $F(x_1, x_2)_{\max}=1,41$.

Амалий машғулот учун масалалар

5.4 ва 5.5 пунктдаги масалаларни Excel да ечинг ва натижаларини солиштиринг.

Мавзу бўйича саволлар

1. Чизиксиз дастурлаш масаласи қўйилишини тушунтириб беринг.
2. Функциянинг минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти қандай?
3. Шартли ва шартсиз оптималлаш масаласига таъриф беринг.
4. Шартсиз оптималлаш масаласини ечишнинг қандай усулларини биласиз? Уларга таъриф беринг.
5. Лагранж функцияси ва Лагранж аниқмас кўпайтувчилар усулини тушунтириб беринг.
6. Шартли оптималлаш масаласини Лагранж аниқмас кўпайтувчилар усули ёрдамида ечишни тушунтириб беринг.
7. Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усулининг асосий ғояси нима?
8. Градиент усуллар қандай усуллар, уларга тушунтириш беринг.
9. Excel дастурий воситасида чизиксиз дастурлаш масаласини қандай ечиш мумкин? Ечиш кетма-кетлигини айтиб беринг.

6. ДИНАМИК ДАСТУРЛАШ

6.1. Динамик дастурлашнинг асосий масаласи

Маълум бир бошқарув жараёни бошланғич $S_0 = (S_{01}, \dots, S_{0n})$ вектор билан характерланувчи S_0 бошланғич ҳолатда турибди деб фараз қилайлик. Бошланғич ҳолатлар тўпламини S_0 орқали белгилаймиз. Вақт ўтиши билан жараён ўзгаради ва

охирги $S_n = (S_{N1}; \dots S_{Nn})$ ҳолатга ўтади. Охирги ҳолатлар тўпламини S_N орқали белгилаймиз. S_0 ҳолатдан S_N га ўтиш жараёни N та босқичга бўлиниб кетади. Жумладан, агар жараён i -босқичда S_i ҳолатда бўлса, унинг $i+1$ босқичдаги S_{i+1} ҳолати нафақат $S_i = W(S_i, \dots, S_{in})$ ҳолатлар вектори, балки i -босқичдаги топилган U_i ечими орқали аниқланади. Бундан келиб чиқиб, кейинги босқич ҳолатларининг векторини $S_{i+1} = W(S_i, U_i)$ орқали ифодалаш мумкин. Ечим эса ҳар бир босқичда мавжуд ечимларнинг U_i тўпламидан олиниб ва мақсад функциясининг қийматини аниқлайди. $f(S)$ мақсад функциясини функциялар йиғиндисини кўринишида тасвирлаймиз, уларнинг қиймати босқичдан босқичга ўтганда ўзгаради:

$$f(S) = \sum_{i=0}^{N-1} W(S_i, U_i) \quad (6.1)$$

У ҳолда динамик дастурлашнинг асосий масаласи шундан иборат бўладики, у мавжуд ечимларнинг U тўпламидан шундай U^* ечимни топиши керакки, бу ечим жараёни бошланғич S_0 ҳолатдан S_N га ўтказганда, $S_{i+1} = W(S_i, U_i)$ мақсад функцияси $S_i \in S_i, U_i \in U_i$ шартлар бажарилганда экстремал қийматлар қабул қилишга имкон яратиши керак.

Ечиш пайтида динамик дастурлаш масаласи соддароқ бўлган масалаларга ажратиб юборилади (табиий ёки сунъий усулда). Ҳар бир босқичда ушбу масалаларнинг бирон бири ечилади, жумладан оптимал ечим келажакни ҳисобга олган ҳолда танланади, яъни ҳар бир босқичда жараённи оптималлаштириб, кейинги босқичлар ҳақида унутмаслик керак.

Охирги босқич, $(N-1)$ -си келажакка боғлиқ эмас, шунинг учун бу босқичда $f_1(S_1)$ мақсад функциясининг экстремал қийматини берувчи ечим олинади. N -босқичда оптимал ечимни олиш учун тизимнинг $(N-1)$ -босқичдаги ҳолатини билиш керак. $(N-1)$ -босқичда жараённинг ҳолати номаълум бўлгани учун $S_{N-1,1}, \dots, S_{N-1,m}$ жараёнларнинг берилган босқичдаги мумкин бўлган ҳолатлари ҳақида турли хил фаразлар қилинади ва ҳар бир фараз учун N -босқичдаги оптимал ечим танланади. Шундай қилиб, N -босқичдаги оптимал ечим топилди. Эндиликда, босқичда олинган оптимал ечимини ҳисобга олиб, $(N-1)$ босқичдаги оптимал ечим топилади ва ҳакозо. Натижада S_0 жараённинг бошланғич ҳолатига келинади.

Биринчи босқич учун жараённинг мавжуд ҳолатлари ҳақида фаразлар қилинмайди, чунки ҳолат маълум. Биринчи босқичнинг оптимал ечими иккинчи босқичда олинган оптимал ечимдан келиб чиққан ҳолда топилади. Бутун

жараённинг оптимал ечими ҳамма босқичларда (S_0 дан S_N гача) олинган оптимал ечимларни кўриб чиқилиб хулоса қилиш орқали олинади.

Динамик дастурлаш масалаларини ечишнинг асосий усули функционал тенгламалар усулидир. Динамик дастурлашнинг функционал тенгламаси ҳар бир масаласи учун W функциянинг ўзига хос кўриниши ва S, U катталиклари билан характерланувчи хусусий кўринишга эга. Динамик дастурлаш масаласининг функционал тенгламасини умумий кўринишда ҳам ёзиб олиш мумкин. Динамик дастурлаш масалалари охиридан қараб бошига ечилгани учун охирги босқич ($N=1$)даги функционал тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$f_1(S_{N-1}) = \underset{U_{N-1}}{\text{extr}}[W(S_{N-1}; U_{N-1}) + f_0(S_N)]. \quad (6.2)$$

Бу ерда $f_0(S_N) - S_N \in \mathcal{S}_N$ - охирги ҳолатдан бошлаб мақсад функциясининг нол босқичларидаги экстремал қиймати. Якуний ҳолат чегараларидан ташқарида S_N жараён кўриб чиқилмагани учун, $f_0(S_N) = 0$.

N-босқич учун функционал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$f_N(S_0) = \underset{U_0}{\text{extr}}[W_0(S_0; U_0) + f_{N-1}(S_1)] \quad (6.3)$$

Бу ерда $f_0(S_N) - S_0$ ҳолатдан бошлаб ҳамма N босқичлар учун мақсад функциясининг экстремал қийматидир; $f_{N-1}(S_1) - S_0$ ҳолатдан бошлаб ҳамма N-1 босқичлар учун мақсад функциясининг экстремал қийматидир; $W_0(S_0; U_0)$ – қабул қилинган U_0 ечим натижасида S_0 ҳолатдан бошлаб N-босқичда олинган мақсад функциясининг қиймати.

Динамик дастурлаш масаласи функционал тенгламалар усулида қуйидаги кетма-кетлик бўйича ечилади:

1) Якуний ҳолат (N=1 босқич учун) (6.2) функционал тенглама ёзиб олинади. $f_0(S_N) = 0$ бўлгани учун $f_1(S_{N-1}) = \underset{U_{N-1}}{\text{extr}}[W_{N-1}(S_{N-1}; U_{N-1})]$.

Белгиланган $S_{N-1} \in \mathcal{S}_{N-1}$ ҳолатлар ва $U_{N-1} \in \mathcal{U}_{N-1}$ ечимлар ҳамда уларга жавоб берувчи W_{n-1} қийматлар кўриб чиқилади. Ечимлар орасида шундай U_{n-1}^* танлашадики, у $\text{extr} W_{n-1}(S_{N-1}^*; U_{N-1}^*)$ ни таъминлайди;

2) Кейинги, охиридан битта олдинги (N=2) босқичга ўтилади. Берилган босқич учун функционал тенглама қуйидаги қиймат қабул қилади:

$$f_2(S_{N-2}) = \underset{U_{N-2}}{\text{extr}}[W_{N-2}(S_{N-2}; U_{N-2}) + f_1(S_{N-1})].$$

Ҳар бир мавжуд S_{N-2} ҳолат учун мавжуд U_{N-2} ечимга қараб W_{n-2} қиймат топилади. Сўнгра $W_{n-2} + f_1$ йиғинди (унда охирги босқичнинг $f_1(S_{N-1})$ қийматлари ҳисобга олинган) лар солиштирилади ва ҳар бир S_{N-2} учун экстремал йиғинди ва U_{N-2}^* оптимал ечим топилади, яъни $f_2(S_{N-2})$ функция экстремал қиймат қабул қилувчи U_{N-2}^* ечим топилади. Худди шу тарзда (N=3, N=4, ва ҳ.к) босқичдан (N=N) босқичгача ўтилади;

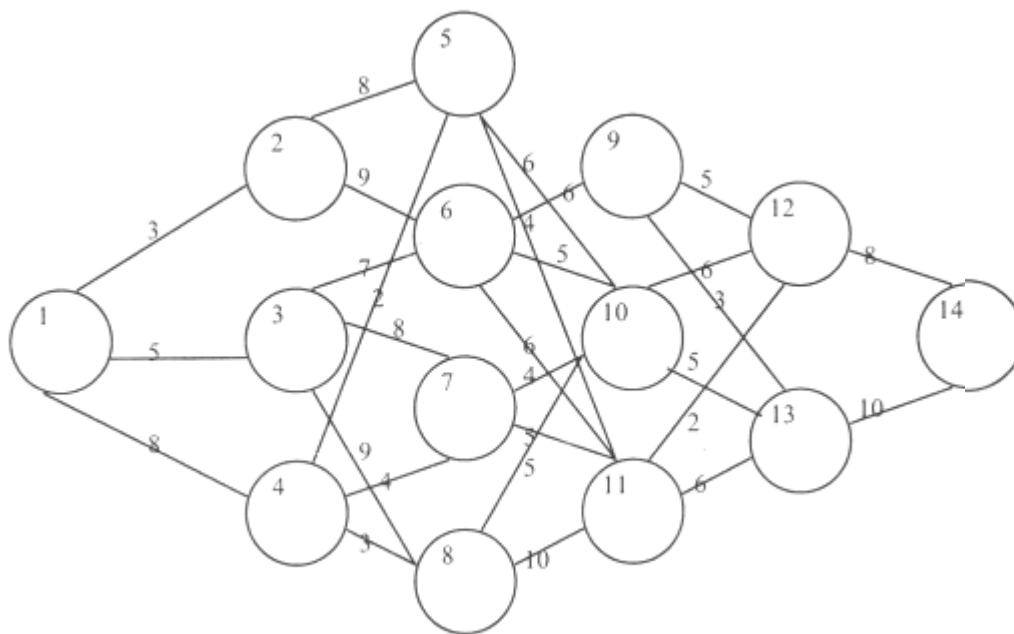
3) (6.3) функционал тенгламани биринчи N=N босқич учун ёзиб олишади. Берилган босқичда жараённинг мавжуд ҳолатлари ҳақида фараз

қилинмайди, чунки S_0 ҳолат маълум. Бу ҳолат учун оптимал қийматни иккинчи босқичнинг ҳамма шартли-оптимал ечимларини ҳисобга олган ҳолда аниқлаш керак;

4) Бутун жараённи тўғри йўл бўйлаб S_0 дан S_N гача қараб ўтилади ва бутун жараён учун $f_N(U_N^*)$ мақсад функциясига экстремал қиймат берувчи U^* оптимал қиймат танлашади.

Масала. Юкни 1 пунктдан 14 пунктга кўчириш керак. 6.1 расмда йўллар тугуни ҳамда тугуннинг алоҳида пунктлари орасида бирлик юкни кўчириш нарҳи

кўрсатилган (мос қирраларга қўйилган). 1 пункт билан 14 пункт орасида энг кам харажат кетадиган йўналишни топиш талаб этилмоқда.



6.1 Расм

Ечиш. 1 пунктдан 14 пунктга юкни етказиш жараёнини алоҳида босқичларга ажратиб юборамиз. Биринчи босқичда юкли транспорт бевосита 2,3,4 пунктларга кўчиради; иккинчи босқичда 2,3,4 пунктлардан – 5;6;7;8 га; учинчи босқичда -5;6;7;8 дан 9;10;11; тўртинчи босқичда -9;10;11 дан 12;13 пунктларга ва охириги босқичда 12;13 дан -14 пунктга;

Белгилаш киритамиз: N-босқич номери $N=1;\dots;5$; i-юк ўтказилаётган пункт $i=1;\dots;13$; j-юк етказаетган пункт ($j=2;\dots;14$); c_{ij} – юкни i пунктдан j пунктга ўтказиш нархи; $f_N(i)$ –агар охириги пунктгача N та босқич қолган бўлса, у ҳолда i пунктдан охиригача юкни ўтказиш учун кетган минимал харажатлар.

Охириги босқич учун функционал тенгламани ечиб олайлик ($N=1$);

$$f_1(i) = \min[c_{ij} + f_0(14)] = \min(c_{ij}).$$

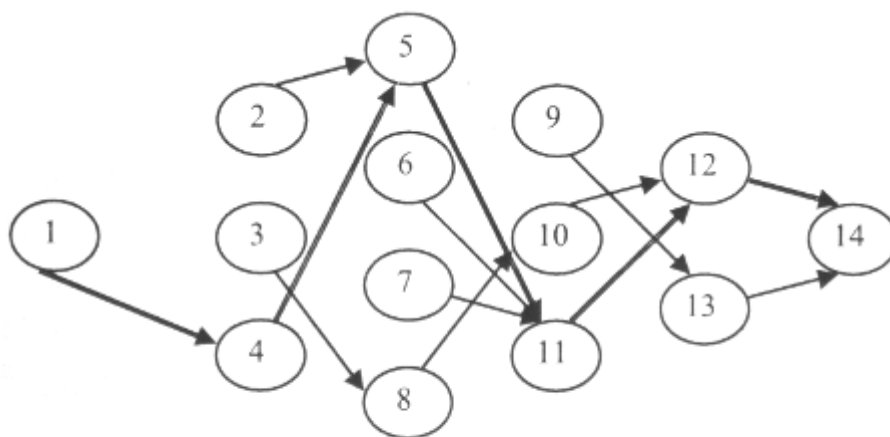
14 пунктга юк ёки 12 пунктдан, ёки 13 пунктдан етказилиши мумкин, шунинг учун $f_1(12) = c_{12} + f_0(14) = 8+0 = 8$ ва $f_1(13) = c_{13} + f_0(14) = 10+0 = 10$ ларни ҳисоблаймиз.

Охиридан битта олдинги ($N=2$) босқич учун функционал тенгламанинг кўриниши қуйидагича: $f_2(i) = \min[c_{ij} + f_1(j)]$. Уинчи босқичнинг ҳамма натижаларини кўриб чиқамиз (юк 9;10;11 пунктларнинг бирида бўлди). Фараз қилайлик юк 9 пунктга келиб қолди. Бу пунктдан 12 ёки 13 пункт орқали юриш мумкин ва $f_2(i)=\min[c_{ij} + f_1(j)]$. Демак 9 пунктдан 14 пунктга ўтишнинг шартли оптимал йўли 13 пунктдан ўтади, жумладан минимал харажатлар 13 ни ташкил этади. Агар юк 10 пунктда тўхтаса, у ҳолда $f_2(i)=\min[c_{ij} + f_1(j)]$, ушбу пункт учун шартли – оптимал йўналиш 10-12-14 ни ташкил этади ва харажатлар 10 ни ташкил этади. 11 пункт учун

$f_2(11)=\min(2 + 8; 6 + 10) = 10$ яъни бу пункт учун оптимал йўналиш 11-12-14 ни ташкил этади ва харажатлар 10 ни ташкил этади.

Кейинги босқичга ўтамиз ($N=3$). Берилган босқичда шартли оптимал ечимни олиш учун тўртинчи босқичнинг ҳамма натижаларини кўриб чиқамиз (бунда юк 5;6;7;8 пунктда бўлиб қолиши мумкин). 5 пункт учун $f_3(5)=\min[c_{5j} + f_2(j)] = \min(6+13;5+14;6+10) = 14$. Бу пункт учун оптимал йўналиш 5-11-12-14 ни ташкил этади. 6 пункт учун $f_3(6)=\min[c_{6j} + f_2(j)] = \min(6+13;5+14;6+10) = 16$. Бу пункт учун оптимал йўналиш 6-11-12-14 ни ташкил этади. 7 пункт учун $f_3(7)=\min[c_{7j} + f_2(7)] = \min(4+14;5+10) = 15$. Бу пункт учун оптимал йўналиш 7-10-12-14 ни ташкил этади. 8 пункт учун $f_3(8)=\min[c_{810} + f_2(10); c_{811} + f_2(11)] = \min(5+14;10+10) = 19$. Бу пункт учун оптимал йўналиш 8-10-12-14 ни, минимал харажатлар эса 19 ни ташкил этади.

Кейинги босқични кўриб чиқамиз ($N=4$). Биринчи босқичдан сўнг ($N=5$) юк қуйидаги пунктларнинг бирида бўлиб қолиши мумкин: 2;3;4 яъни $f_3(8)=\min[c_{810}+f_2(10); c_{811} + f_2(11)] = \min(5+14;10+10) = 19$, $f_4(4) = \min(2 + 14; 4 + 15; 3 + 19) = 16$. Бу дегани, 2 пункт учун оптимал маршрут 2-5-11-12-14 (харажатлар 22 бирлик), 3 пункт учун 3-8-10-12-14 (харажатлар 21 бирлик), 4 пункт учун 4-5-11-12-14 (харажатлар 16 бирлик) бўлади.



6.2 Расм

ва ниҳоят биринчи босқичга ўтамиз ($N=5$). $f_5(1) = \min(3 + 22; 5 + 2; 8 + 16) = 24$.

Бу пункт учун оптимал йўналиш 1 – 4 – 5 – 11 – 12 – 14 ни ташкил этади, жумладан бундаги харажатлар минимал (24 бирлик) бўлади. Берилган босқичда биз 1 - 4

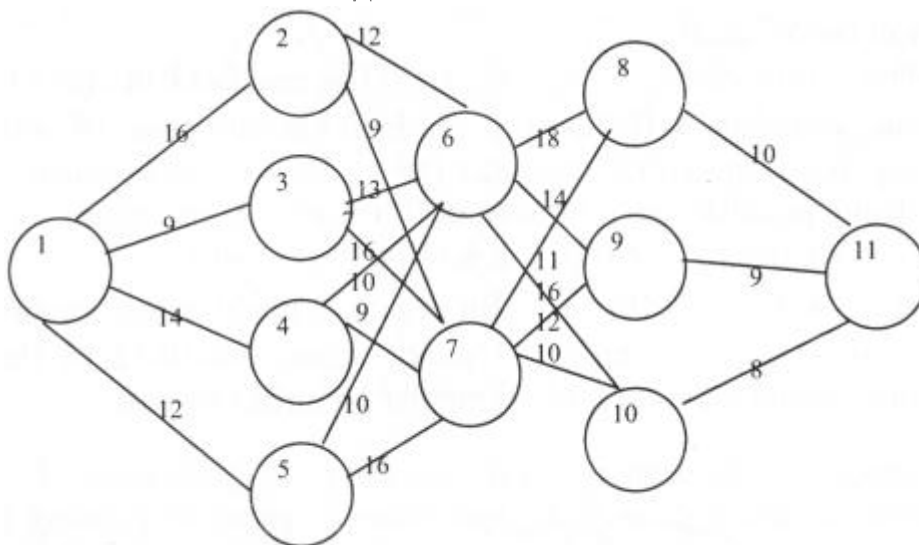
маршрутни танладик, ундаги харажатлар 1-2 маршрутдагидан 2.67, 1-3 маршрутдагидан 1.6 барабар ортиқ. Лекин нафақат биринчи балки бутун маршрутни оптималлаштириш нуқтаи назаридан келишилган ечимни биринчи босқичда қабул қилиш керак, чунки бунинг натижасида 1 пунктдан 14 пунктга юкни етказиш харажатлари минималлаштирилади, яъни ҳар бир босқичда бутун жараёндаги умумий фойдани ҳисобга олиб туриш керак.

Топилган ечим нафақат 1 дан 14 га юкни етказишнинг оптимал маршрутини балки берилган йўл тугуни учун оптимал маршрутлар тўпламини ўрнатишга имкон беради (6.2 расм).

Амалий машғулот учун масалалар

Функционал бошқарувлар усулидан фойдаланиб қуйидаги динамик дастурлаш масалаларини ечинг:

1. Берилган йўо тугунида 1 пунктдан 11 пунктга юкни етказишнинг бир неча маршрутлари бор (6.3 расм). Бирлик юкни кўчириш нарҳи кўрсатилган (мос кирраларга қуйилган). 1 пункт билан 11 пункт орасида энг кам харажат кетадиган йўналишни топиш талаб этилмоқда.



6.3 расм

2. Қуйидаги шартларни ҳисобга олган ҳолда ўн йилдан ортиқ бўлмаган жиҳозларга нисбатан оптимал сиёсатни ишлаб чиқинг:

1) ёши t га тенг бўлган бир йилда ишлаб чиқилган маҳсулот нарҳи $r(t)$, бу жиҳозли маҳсулотга хизмат кўрсатиш учун кетадиган йиллик харажат $u(t)$ лар 6.1 жадвалда келтирилган;

2) жиҳознинг қолдиқ нарҳи $s(t)$ жиҳознинг ёшига боғлиқ эмас ва нарҳи 0 га тенг;

3) янги жиҳознинг нарҳи $p(t)$ вақт ўтиши билан ўзгармайди ва 8 бирликка тенг. Максимал фойдалар матричасини тузиб бўлгандан кейин а) режа бўйича 10 йиллик давомийликка эга бўлган, аммо 7 йиллик жиҳозга нисбатан; б) режа бўйича 9 йиллик давомийликка эга бўлган, аммо 6 йиллик жиҳозга нисбатан оптимал сиёсатни ишлаб чиқиш зарур.

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R(t)	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
U(t)	13	14	15	15	17	17	17	18	19	19	20

Эслатма. Берилган масала учун функционал тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f_1(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) \quad (\text{jihozni saqlash}) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) \quad (\text{jihozni almashtirish}) \end{array} \right\}, \quad N = 1;$$

$$f_i(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + f_{i-1}(t+1) \quad (\text{jihozni saqlash}) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + f_{i-1}(t+1) \quad (\text{jihozni almashtirish}) \end{array} \right\},$$

3. Учта корхона орасида ($N=1, \dots, 4$) минг сўм бўлиниб олинди. Ушбу тўртта корхона орасида маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ортиши ажратилган пулга (x) боғлиқ. (I, II, III, IV) корхоналарда маҳсулот чиқаришнинг ортиши 6.2 жадвалда келтирилган. Умумий маҳсулот ишлаб чиқаришни ортишига сабаб бўлувчи воситаларни тақсимлаш режасини аниқланг.

6.2 жадвал

S воситалар Минг сўм	Корхоналарда маҳсулот чиқаришнинг ортиши, минг сўм			
	I	II	III	IV
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

Берилган масалани ечиш учун мўлжалланган функционал тенгламанинг кўриниши қуйидагича:

$$f_1(x) = \max[q_1(x)] = q_1(x) \quad N=1 \text{ да};$$

$$f_N(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [q_N(x) + f_{N-1}(c-x)] \quad N = 2; 3; 4 \text{ да}$$

Бу ерда $f_N(c)$ – s воситаларни корхоналар бўйича тақсимлаганда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг умумий ортиши.

4. Корхона маълум бир жиҳозни ишлаб чиқаришнинг квартал режасини ишлаб чиқиши керак, унга биноан ҳар ойлик талаб 3 бирликка тенг. Режадаги даврнинг бошида ва охирида захиранинг даражаси нолга тенг. Корхонанинг ишлаб чиқиш қуввати 5 бирликдан ортиқ маҳсулот чиқаришга рухсат беролмайди, захиравий майдонлар эса ойнинг охирида 4 бирликдан ортиқ бўлмаган тайёр маҳсулотни сақлашга мўлжалланган.

Маҳсулотни ишлаб чиқариш билан боғлиқ c_i ($x_i; i_t$) умумий харажатлар $c(x_t)$ h_t ишлаб чиқариш харажатларидан йиғилиб борилади.

6.2 Инвестицияни оптимал тақсимлаш масаласи

Инвестор X_0 миқдордаги капитал маблағни ($i=1, 2, \dots, n$) та корхонани ўз ичига олувчи бирлашмага сарф қилаётган бўлсин. Бу маблағ бирлашмадаги n та корхонага тақсимланади. Агар i -корхонага x_i миқдорда капитал маблағ ажратилса, у $Z_i(x_i)$ миқдорда даромадга эга бўлади.

Бирлашманинг умумий даромади корхоналар даромади йиғиндисидан иборат бўлади.

$$Z=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+\dots+Z_n(x_n) \quad (6.4)$$

Капитал маблағни оптимал тақсимлаш масаласининг иқтисодий математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_1+x_2+\dots+x_n=X_0 \quad (6.5)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.6)$$

$$Z_{\max}=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+\dots+Z_n(x_n) \quad (6.7)$$

Бу ерда (6.5)-шарт бирлашмага ажратилган X_0 капитал маблағ тўла тақсимланиши кераклигини; (6.6)-шарт масаланинг шартига кўра номаълумлар номанфий бўлишлигини ва (6.7)-мақсад функция бирлашманинг умумий даромади максимал бўлишлигини кўрсатади.

Берилган (6.5)-(6.7) масалада ажратилган капитал маблағ X_0 га ва корхоналар n га тенг.

Бу масалани ечишни кўп босқичли жараён деб қараймиз. Ҳар бир босқичда ажратилган капитал маблағ нолдан X_0 гача, корхоналар сони эса нолдан n гача ўзгарувчан миқдор деб аталади. Бундай динамик дастурлаш масаласини ечиш учун $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ функциялар кетма-кетлигини киритамиз. Бу ерда:

$F_1(x)-0 \leq x \leq X_0$ миқдордаги маблағни фақат 1 та корхонага тақсимлангандан олинadиган максимал даромад;

$F_2(x)-0 \leq x \leq X_0$ миқдордаги маблағни фақат 2 та корхонага тақсимлангандан олинadиган даромад ва ҳақозо;

$F_n(x)-0 \leq x \leq X_0$ миқдордаги маблағни фақат n та корхонага тақсимлангандан олинadиган даромад.

Маълумки, $F_n(X_0)=Z_{\max}$ бўлади. Қуйидаги икки ҳолда $F_i(x)$ функциялар осонгина топилади.

$$1. F_i(x)=0 \quad i=1,2,\dots,n$$

$$2. F_1(x)=Z_1(x), \quad 0 \leq x \leq X_0.$$

Демак, агар капитал маблағ тақсимланмаса, у ҳолда даромад ҳам нолга тенг бўлади. Агар капитал маблағ битта корхонага тақсимланса, бирлашманинг даромади ана шу битта корхона даромадидан иборат бўлади (капитал маблағ ажратилмаган корхоналар даромад келтирмайди деб фараз қилинади)

Энди $0 \leq x \leq X_0$ миқдордаги капитал маблағ 2 та корхона орасида тақсимланган ҳолни кўрамыз.

Агар x_2 – иккинчи корхонага ажратилган маблағ бўлса, у ҳолда қолган $x - x_2$ миқдордаги маблағ биринчи корхонага ажратилади. Бу икки корхонадан олинadиган умумий даромад қуйидаги функционал тенглама ёрдамида топилади:

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \max[Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)] \\ 0 &\leq x_2 \leq x \\ 0 &\leq x \leq X_0 \end{aligned}$$

Фараз қилайлик, $0 \leq x \leq X_0$ миқдордаги маблағ k та корхона орасида тақсимланган бўлсин. Агар k – корхонага x_k миқдорда маблағ ажратилган бўлса, ундан олинган даромад $Z_k(x_k)$ га тенг бўлади. Қолган $x-x_k$ маблағ $k-1$ та корхоналар орасида тақсимланади ва ундан олинган даромад $F_{k-1}(x-x_k)$ га тенг бўлади. Бу ҳолда олинadиган умумий даромад

$$F_k(x)=\max[Z_k(x_k)+F_{k-1}(x-x_k)]$$

$$0 \leq x_k \leq x$$

$$0 \leq x \leq X_0$$

функционал тенглама ёрдамида топилади. Дастлаб берилган масаланинг ечимини $x=X_0$ ва $k=n$ бўлган ҳолдаги қуйидаги функционал тенгламадан фойдаланиб топамиз:

$$F_n(x) = \max[Z_n(x_n) + F_{n-1}(x - x_n)]$$

$$0 \leq x_n \leq x$$

Капитал маблағни тақсимлаш масаласини динамик дастурлаш усули билан ечиш жараёни билан танишамиз. Энг аввал $0 \leq x \leq X_0$ оралиқ n та тенг интервалларга бўлинади. Ҳар бир интервалнинг узунлиги Δ га тенг деб қабул қилинади. Бундан ташқари $Z_i(x)$ ва $F_i(x)$ функциялар фақат шу нуқталарда, яъни $x=0, 2\Delta, \dots, n\Delta=X_0$ да аниқланган деб фараз қилинади.

$I=1$ да $F_i(x)$ қуйидаги тенглик ёрдамида аниқланади $F_1(x)=Z_1(x)$, $F_1(k\Delta)=Z_1(k\Delta)$, $k=0,1,\dots,n$ тенгликнинг қийматлари жадвалга жойлаштирилади. $F_1(k\Delta)$ нинг қийматидан фойдаланиб

$F_2(k\Delta)$ нинг қиймати ҳисобланади:

$$F_2(k\Delta) = \max[Z_2(k\Delta) + F_1(x_0 - k\Delta)]$$

$$k=1,2,\dots,n$$

Ҳисоблаш жараёнида $F_n(X_0) = \max Z$ нинг қийматидан ташқари $Z_2(k\Delta) + F_1(x_0 - k\Delta)$ фойдани максималлаштирувчи x_2 нинг қиймати ҳам топилади. Сўнггра $F_3(x)$ топилади ва ҳақозо, ҳамма босқичлардаги $F_i(x)$ ҳисоблашларни бажариб

$$F_n(x_0) = \max[Z_n(x_n) + F_{n-1}(x_0 - x_n)]$$

$$0 \leq x_n \leq x$$

тенглик ёрдамида $F_n(X_0) = \max Z$ топилади.

Шундай қилиб, охирги босқичда мақсад функциясининг максимал қиймати $F_n(X_0)$ ҳамда n -корхона учун ажратиладиган капитал маблағнинг миқдори, яъни X_0^* топилади.

Сўнггра ҳисоблаш жараёни тескари тартибда бажарилади. Бунда охирги қадамдан биринчи қадамгача бир марта қараб чиқилади:

n -корхонага ажратиладиган X_n^* капитал маблағни билган ҳолда қолган $n-1$ корхоналар орасида тақсимланадиган $X_0 - X_n^*$ топилади. Сўнггра олдин топилган

$$F_{n-1}(x) = \max[Z_{n-1}(x_{n-1}) + F_{n-2}(x - x_{n-1})]$$

$$0 \leq x_{n-1} \leq x$$

$$0 \leq x \leq X_0$$

дан $F_{n-1}(X_0 - X_n^*)$ ни, демак, X_{n-1}^* ни топамиз ва ҳақозо. Шундай йўл билан давом этиб охирида X_1^* ни топамиз.

Шу билан чегараланган капитал маблағ бирлашманинг n та корхоналари орасида оптимал тақсимланган бўлади.

Масала. Инвестор 200 бирлик капитал маблағни бирлашмадаги 4 та корхонага сарфламоқчи бўлсин. Ҳар бир корхона ўзига ажратилган маблағнинг миқдори

боғлиқ равишда турли миқдордаги даромадга эришади. Бу даромадлар қуйидаги 6.3 жадвалда келтирилган.

6.3-жадвал

Корхонага ажратилган мблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$

0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Инвестицияни корхоналараро оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

Ечиш. Масалани 4 та босқичга бўлиб ечамиз. Дастлаб $n=1$, яъни капитал маблағ фақат битта корхонага берилган ҳолни кўрамиз. Бунда

$$F_1(x) = Z_1(x) \quad \text{бўлади.}$$

$0 \leq x \leq 200 = X_0$ оралиқдаги ҳар бир $x_{1k} = k\Delta$ лар учун $F_1(x_{1k})$ қийматларни 6.4-жадвалга жойлаштирамиз.

6.4-жадвал

X_{1k}	0	40	80	120	160	200
$F_1(x_{1k})$	0	15	28	60	75	90

Энди $n=2$ бўлган ҳолни, яъни $X_0=200$ бирлик капитал маблағни 2 та корхонага тақсимланган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда олинган даромад

$$F_2(x) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq x \\ 0 \leq x \leq X_0}} [Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функциянинг қийматлари қуйидагича топилади. $0 \leq x \leq 200 = X_0$ оралиқдаги ҳар бир x учун $0 \leq x_2 \leq x$ топилади ва унга тегишли бўлган

$$Z_2(x_2) + F_1(x - x_2)$$

ҳисобланади. Сўнгра топилади.

Масалан $x=0$ да $x_2=0$; 40 бўлади

Демак

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0, \quad Z_2(0) + F_1(40) = 15 \\ x_2 = 40, \quad Z_2(40) + F_1(0) = 14 \end{array} \right\} F_2(x = 40) = 15$$

$x=80$ да $x_2=0; 40; 80$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0, \quad Z_2(0) + F_1(80) = 0 + 28 \\ x_2 = 40, \quad Z_2(40) + F_1(40) = 14 + 15 \\ x_2 = 80, \quad Z_2(80) + F_1(0) = 30 + 0 \end{array} \right\} F_2(x = 80) = 30$$

$x=120$ да $x_2=0; 40; 80; 120$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0, \quad Z_2(0) + F_1(120) = 0 + 60 \\ x_2 = 40, \quad Z_2(40) + F_1(80) = 14 + 28 \\ x_2 = 80, \quad Z_2(80) + F_1(40) = 30 + 15 \\ x_2 = 120, \quad Z_2(120) + F_1(0) = 55 + 0 \end{array} \right\} F_2(x = 120) = 60$$

ва ҳакозо, шундай йўл билан $x=160$ ва $x=200$ бўлган ҳоллар учун $F_2(x=160)$ ва $F_2(x=200)$ топамиз. $F_1(x)$ функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 6.5-жадвалда кўрсатамиз.

6.5-жадвал

$\begin{matrix} x_2 \\ x \end{matrix}$	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	x_2^*
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3 босқичда $n=3$ бўлган ҳолни, яъни $X_0=200$ капитал маблағ 3 та корхона ўртасида бўлинган ҳолни кўраамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромадни ҳар бир $0 \leq x_3 \leq x$, $0 \leq x \leq 200 = X_0$ учун қуйидаги функционал тенглама орқали ҳисоблаймиз:

$$F_3(x) = \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq x \\ 0 \leq x \leq 200}} [Z_3(x_3) + F_2(x - x_3)]$$

Худди юқорида бажарганимиз каби, бу ҳол учун ҳам ҳисоблашларни қуйидагича бажарамиз:

Масалан $x=0$ да $x_3=0$ бўлади. $x=40$ да $x_3=0$; 40 бўлади.

Демак

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = 0, \quad Z_3(0) + F_2(40) = 0 + 15 \\ x_3 = 40, \quad Z_3(40) + F_2(0) = 17 + 0 \end{array} \right\} F_3(x = 40) = 17$$

$x=80$ да $x_3=0$; 40; 80

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = 0, \quad Z_3(0) + F_2(80) = 0 + 30 \\ x_3 = 40, \quad Z_3(40) + F_2(40) = 17 + 15 \\ x_3 = 80, \quad Z_3(80) + F_2(0) = 33 + 0 \end{array} \right\} F_3(x = 80) = 33$$

$x=120$ да $x_3=0$; 40; 80; 120

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = 0, \quad Z_3(0) + F_2(120) = 0 + 60 \\ x_3 = 40, \quad Z_3(40) + F_2(80) = 17 + 30 \\ x_3 = 80, \quad Z_3(80) + F_2(40) = 33 + 15 \\ x_3 = 120, \quad Z_3(120) + F_2(0) = 58 + 0 \end{array} \right\} F_3(x = 120) = 60$$

Ва ҳакозо, шундай йўл билан $x=160$ ва $x=200$ бўлган ҳоллар учун $F_3(x=200)$ топамиз. $F_3(x)$ функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 6.6-жадвалда кўрсатамиз.

6.6-жадвал

$\begin{matrix} x_2 \\ x \end{matrix}$	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	x_3^*
--	---	----	----	-----	-----	-----	----------	---------

0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4 босқичда п_{q4} бўлган ҳолни, яъни $X_0=200$ капитал маблағ 4 та корхона ўртасида бўлинган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромадни ҳар бир $0 \leq x_4 \leq x$, $0 \leq x \leq 200 = X_0$ учун қуйидаги функционал тенглама орқали ҳисоблаймиз:

$$F_4(x) = \max_{\substack{0 \leq x_4 \leq x \\ 0 \leq x \leq 200}} [Z_4(x_4) + F_3(x - x_4)]$$

Бу функционал ҳисоблаш жараёни 6.7-жадвалда келтирилган

6.7-жадвал

$x_2 \backslash x$	0	40	80	120	160	200	$F_4(x)$	X_4^*
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

6.3-6.7 жадваллардаги $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ ларни ва уларга мос

x_1^* , x_2^* , x_3^* , x_4^* векторларни қуйидаги 6.8 жадвалга жойлаштирамиз:

6.8-жадвал

	x_1^*	$F_1(x)$	x_2^*	$F_2(x)$	x_3^*	$F_3(x)$	x_4^*	$F_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Бу жадвалдан капитал маблағни оптимал тақсимлаш режасини топамиз. 200 бирлик маблағни 4 та корхонага тақсимлаш натижасида бирлашма

$$\max_{i=1,4} F_i(x=200) = \max(90, 90, 93, 95) = 95$$

бирлик даромад олади. Бунда 4-корхонага 80 бирлик маблағ берилади ва ортиб қолган 120 бирлик маблағ қолган 3 та корхонага тақсимланади.

$$\max_{i=1,3} F_i(x=120) = \max(60,60,60) = 60$$

бирлик даромад олади. Бунда 3-корхонага маблағ берилмайди. (чунки $x_3^* = 0$). Демак, 120 бирлик маблағ 1- ва 2- корхоналарга тақсимланади. Лекин 2-корхонага ҳам маблағ берилмайди. (чунки $x_3^* = 0$). Шундай қилиб, қолган 120 бирлик маблағ биринчи корхонага берилади.

Бунда бирлашма 60 бирлик даромад олади.

$$\max_{i=1,3} F_i(x=120) = \max(60,60,60) = 60$$

Шундай қилиб, капитал маблағлар тақсимлашнинг оптимал режасини топдик:
 $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (120, 0, 0, 80)$.

Амалий машғулот учун масалалар

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	93

2.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	26	23	27	24
80	45	42	44	45
120	72	68	69	67
160	85	84	83	86
200	100	95	100	102

3.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	17	16	19	14
80	27	31	33	36
120	64	58	59	62
160	72	73	74	75
200	92	89	92	91

4.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	11	13	12	14
80	31	30	32	33
120	58	57	58	57
160	75	73	74	76
200	92	91	92	93

5.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	93

6.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	93

7.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	93

8.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0

40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	93

9.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	93

10.

Корхонага ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	93

Мавзу бўйича саволлар

1. Динамик дастурлашнинг асосий масаласи нима?
2. Динамик дастурлаш масаласида функционал тенглама кўриниши қандай бўлади?
3. Динамик дастурлаш масаласида функционал тенглама усули қандай кетма-кетликда бажарилади.
4. Инвестицияни оптимал тақсимлаш масаласи қўйилишини тушунтиринг.

7. ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ

7.1. Матрицали ўйинлар

Ишлаб чиқариш ва иқтисодиёт соҳасида кўплаб амалий масалаларни ечишда конфликтли жараёнлар (ситуация) келиб чиқади. Конфликтли жараёнлар ўз ичига жуда кўплаб омилларни олади. Кўп ҳолларда жараённи ўрганиш қулай бўлиши учун асосий омилларни ҳисобга олиб, иккинчи даражали омилларни ҳисобга олмай унинг иқтисодий математик моделини тузамиз. Бундай конфликт жараённинг қисқартирилган модели ўйин дейилади. Ўйин аниқ бир қоидага биноан олиб борилади.

Ўйин маъноси шундан иборатки, ҳар бир қатнашувчи шундай бир ечимни қабул қиладики, у ўйин охирида энг яхши натижага эришсин. Ўйин натижаси (исход) – бу бир неча функциялар қиймати бўлиб, унга ютуқ функцияси ёки тўлов функцияси дейилади. Агар ўйинчилар ютуқ суммаси нолга тенг бўлса, унда ўйинга нолинчи суммали ўйин дейилади.

Ҳар қандай жуфт ўйинни матрица кўринишида ифодалаш мумкин

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Айтайлик, матрицанинг қаторлари биринчи ўйинчининг мумкин бўлган $A_1, A_2, \dots, A_m$ юришларини устунлари эса иккинчи ўйинчининг мумкин бўлган $B_1, B_2, \dots, B_n$ юришларини аниқласин. А матрицага тўлов ёки ютуқ матрицаси дейилади. Матрицанинг ҳар бир a_{ij} элементи биринчи ўйинчи A_i юришни танлаб, иккинчи ўйинчи B_j юришни танлагандаги биринчи ўйинчининг ютуғини (иккинчи ўйинчининг ютқазувини) англатади.

Ўйиннинг мақсади биринчи ўйинчини максимал ютуққа ва иккинчи ўйинчини минимал ютқазушга эришишни таъминлаш учун энг маъқул стратегияни танлашдан иборат.

Агар биринчи ўйинчи бирор A_i стратегияни танласа, у ҳеч бўлмаганда $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ ютуққа эришади. Буни ҳисобга олиб, бу ўйинчи ўзининг энг кам ютуғларини

максималлаштирувчи, яъни $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ тенгликни таъминловчи юришни танлайди.

Бу ерда α катталиқ ўйиннинг қуйи баҳоси ва унга мос стратегия $\max \min$ дейилади. Иккинчи ўйинчи, ўз навбатида, ўзининг энг катта мумкин бўлган ютқазувларини минималлаштирувчи, яъни $\beta = \max_j \min_i a_{ij}$ тенгликни таъминловчи юришни танлайди.

Бу ерда β катталиқ ўйиннинг юқори баҳоси ва унга мос стратегия $\min \max$ дейилади.

Агар $\alpha = \beta$ бўлса, яъни $V = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$ тенглик бажарилса, у ҳолда V ўйин -

нинг баҳоси дейилади. Бу шартни қаноатлантирувчи A матрицанинг a_{ij} элементига ўйиннинг эгар нуқтаси дейилади.

Демак, матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, унинг ечимини $\max \min$ ва $\min \max$ усуллари билан топилади.

1 масала. Берилган матрицали ўйин учун қуйи ва юқори баҳоларни ҳамда ўйиннинг оптимал баҳосини топинг.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица қаторидаги энг кичик элементлар қуйидагилардан иборат:

$$\begin{aligned} \min_j (3, 1, 2) &= 1 \\ \min_j (2, 4, -1) &= -1 \\ \min_j (5, 7, 6) &= 5 \end{aligned}$$

Демак, ўйиннинг қуйи баҳоси

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}) = \max_i (1, -1, 5) = 5 \quad (7.2)$$

бўлади. Энди ҳар бир устундаги энг катта элементни топамиз.

$$\begin{aligned} \max_i (3, 2, 5) &= 5 \\ \max_i (1, 4, 5) &= 7 \\ \max_i (2, -1, 6) &= 6 \end{aligned}$$

У ҳолда, ўйиннинг юқори баҳоси қуйидагига тенг бўлади.

$$\beta = \min_j (\max_i a_{ij}) = \min_j (5, 7, 6) = 5 \quad (7.3)$$

Бу ўйиннинг қуйи ва юқори баҳолари ўзаро тенг бўлгани учун ўйиннинг оптимал баҳоси $V = \beta = \alpha = 5$ бўлади. Бу баҳони таъминловчи a_{31} элемент ўйиннинг эгар нуқтаси ва A_3 ва B_1 стратегиялар оптимал стратегия бўлади.

Агар ютуқлар матрицаси эгар нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда максмин ва минимакс усуллар билан ўйиннинг ечимини топиб бўлмайди. Бу ҳолда ўйиннинг ечимини топишда аралаш стратегиялар усулидан фойдаланилади.

Биринчи ўйинчининг аралаш стратегияси деб, компонентларни қуйидаги

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (7.4)$$

шартларини қаноатлантирувчи $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ векторига айтилади. Бунда ҳар бир x_i биринчи ўйинчининг A_i юришини танлаш эҳтимолини билдиради.

Иккинчи ўйинчининг аралаш стратегияси деб, компонентлари қуйидаги

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (7.5)$$

шартларни қаноатлантирувчи $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ векторига айтилади. Бунда ҳар бир y_j иккинчи ўйинчининг B_j юришини танлаш эҳтимолини билдиради.

Аралаш стратегиялар усулида биринчи ўйинчи A_i юришни танлаб, иккинчи ўйинчи B_j юришни танлагандаги биринчи ўйинчининг ютуғи сифатида унинг ютишнинг математик кутилиши олинади, яъни у қуйидагига тенг бўлади

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (7.6)$$

$V(x,y)$ функция тўлов ёки ютуқ функцияси дейилади.

Агар биринчи ўйинчи ўзининг $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ оптимал стратегиясини қўлласса, у ҳолда иккинчи ўйинчи қандай стратегияни танлашдан қатъий назар, унинг ютуғи ўйиннинг V баҳосидан кам бўлмайди, яъни

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq V, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7.7)$$

Худди шунингдек, агар иккинчи ўйинчи ўзининг $Y^*=(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ оптимал стратегиясини қўлласса, у ҳолда биринчи ўйинчи қандай стратегияни танлашидан қатъий назар унинг ютқазуви ўйиннинг V баҳосидан ошмайди, яъни

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq V, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7.8)$$

7.2. Матрицали ўйинни чизиқли дастурлаш масаласига келтириш

Матрицали ўйинни чизиқли дастурлаш масаласига келтириш жараёнини кўриб чиқамиз. Энг аввал ўйновчининг оптимал аралаш стратегияси ва ўйиннинг баҳосини топамиз. Унинг учун (7.7) тенгсизликлар тизимини ва (7.4) шартларини умумлаштириб, қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m &\geq V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m &\geq V \\ \dots &\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m &\geq V \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \quad (7.10)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad (7.11)$$

Ўйиннинг баҳосини мусбат деб ҳисоблаб, ($v>0$) (7.9) тизимнинг ҳамма тенгсизликларига бўлиб қуйидаги тизим ҳосил қиламиз:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m &\geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m2}t_m &\geq 1 \\ \dots &\dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m &\geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{1}{V} \quad (7.13)$$

$$\text{Бу ерда} \quad t_1 = \frac{x_1}{V} \quad (7.14)$$

Биринчи ўйновчи ўз ютуғини, яъни ўйиннинг баҳосини максимум қилишга ҳаракат қилади. Демак, биринчи ўйновчи учун

$$t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{1}{V}$$

Энг кичик (минимум) қиймат қабул қилиш керак. Ушбу талабларда (7.12) – (7.14) тизим қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига айланади:

[illegible]

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \dots, t_m \geq 0 \quad (7.16)$$

$$Z = t_1 + t_2 + \dots + t_m \rightarrow \min \quad (7.17)$$

Худди шундай йўл билан иккинчи ўйновчининг оптимал аралаш стратегияси ва ўйиннинг баҳосини топиш учун қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини ечиш керак.

[illegible]

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_n \geq 0 \quad (7.19)$$

$$F = \frac{1}{V} = y_1 + y_2 + \dots + y_n \rightarrow \max \quad (7.20)$$

(15)-(17) ва (18-20) масалалар ўзаро иккиланган чизиқли дастурлаш масалаларидан иборат. Улардан ихтиёрий бирини ечиб, иккинчисининг ечимини осонликча топиш мумкин.

2-misol

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицали ўйинни аралаш стратегиялардаги ечимини топинг.

Ечиш. Биринчи ўйновчи учун ўйинни чизиқли дастурлаш масаласига айлантирамиз. Бўнинг учун энг аввал қўидаги тизимни ҳосил қиламиз.

$$\left. \begin{aligned} 5_{x_1} + 3_{x_2} + 6_{x_3} &\geq V \\ 3_{x_1} + 5_{x_2} + 3_{x_3} &\geq V \\ 2_{x_1} + 5_{x_2} + 4_{x_3} &\geq V \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (7.22)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad (7.23)$$

(21) тизимдаги ҳар бир тенгсизликнинг икки томонини ($V>0$) га бўлиб ва $t_1 = \frac{x_1}{V}$

блгилаш киритиб қўйидаги тизимни ҳосил қиламиз:

$$\left. \begin{array}{l} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \geq 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1 \end{array} \right\} \quad (7.24)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V} \quad (7.25)$$

Бу тизимни қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласи кўринишида ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 &\leq 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 &\leq 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \quad (7.31)$$

$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \max \quad (7.32)$$

II ўйинчи учун берилган матрицали ўйин қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига айланади.

$$\left. \begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 &\leq 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 &\leq 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \quad (7.31)$$

$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \max \quad (7.32)$$

(7.27)-(7.29) ва (7.30)-(7.32) масалалар ўзаро иккиланган масалалардир. Шунинг учун улардан ихтиёрий бирини ечиб, иккинчисининг ечимини осонликча топиш мумкин.

Мустақил бажариш учун масалалар

Қуйидаги матрицали ўйинларни чизиқли дастурлаш усуллари билан ечинг:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Мавзулар бўйича саволлар

1. Ўйин деб нимага айтилади?
2. Ютуқ функцияси ёки тўлов функцияси деб нимага айтилади?
3. Ўйиннинг юқори баҳоси деб нимага айтилади? ва унга мос стратегия нима дейилади.
4. Ўйиннинг эгар нуқтаси деб нимага айтилади?
5. Ўйинчининг аралаш стратегияси деб нимага айтилади?
6. Матрицали ўйинни чизикли дастурлаш масаласига келтириш жараёнини тушунтириш.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.:Высшая школа, 1996.
2. Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаш. “Ўқитувчи”, Т.1998 й.
3. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск, Высшэйшая школа, 1985.
4. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel «Санкт-Петербург», 1997г.
5. Сафаева К., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. “Ўқитувчи”, 1984 й. 1 қисм.
6. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. М. Изд. МАИ 1998.
7. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в эканомике. М. БЕК, 1998.
8. Юсуфбеков Н.А., Балакиров В.С., Волкова М.Е., Гулямов Ш.М. Методы оптимизации. Ташкент, 2001.
9. Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследование операций в режасировании и управлении. –К.: Высшая школа, 1991.
10. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2 книгах. –М.: Мир, 1985
11. Джемилов Н.И., Эйдельмант М.И. Сборник задач по математическому программированию. Ташкент, Ўқитувчи 1990.
12. [Http:\\WWW.Intuit.ru](http://WWW.Intuit.ru)
13. [Http:\\WWW.Exponenta.ru](http://WWW.Exponenta.ru)

116,1,114,3,112,5,110,7,108,9,106,11,104,13,102,15,100,17,98,19,96,21,94,23,92,25,90,27,88,29,86,31,84,33,82,35,80,37,78,39,76,41,74,43,72,45,70,47,68,49,66,51,64,53,62,55,60,57

2,115,4,113,6,111,8,109,10,107,12,105,14,103,16,101,18,99,20,97,22,95,24,93,26,91,28,89,30,87,32,85,34,83,36,81,38,79,40,77,42,75,44,73,46,71,48,69,50,67,52,65,54,63,56,61,58,59