

UDK 519.711.3

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ И БЕЗРАЗМЕРНОЕ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

Менглиев Ш.А.

старший научный сотрудник, исследователь Термезского государственного
университета,

тел.: (+99891) 587-86-81, www.tami.uz e-mail: shoydullo@mail.ru

Аннотация: В статье приведена математическая моделирование движения вязких несжимаемых жидкостей через трубы внутри которого расположена пучок трубки. Указаны ламинарные и турбулентные режимы движения жидкости, а также анализированы физический смысл возникновения этих режимов. В прямой трубе с гладкой стенкой и постоянным поперечным сечением каждая частица жидкости при небольших числах Рейнольдса движутся по прямолинейной траектории. Из-за наличия вязкости частицы жидкости близкие к стенке движутся медленнее, чем вдали от стенки. Течение движутся в виде упорядоченных слоев движущихся относительно друг от друга. Однако, наблюдения показывают, что при больших числах Рейнольдса течение переходит в неупорядоченное состояние или переходит в турбулентное течение. Проходит сильное перемешивание в жидкости, в этом можно убедиться если ввести в жидкость движущейся в трубе краску. Переход ламинарного форма течения в турбулентное наиболее ярко иллюстрирована с помощью опыта проведенного О. Рейнольдсом об окрашенной струйки и установлены, что такой переход осуществляется при одном и том же критическом значении число Рейнольдса. Когда течение ламинарное краска движутся в виде четко очерченной струйки и как течение становится турбулентным краска растлевется по всей трубе и окрашивает вест жидкость. Это показывает что, в турбулентном течение к жидкости движущейся по оси трубе действует поперечное движение, или возникает движение перпендикулярное к оси трубе. Это же поперечное движение приводит к перемешиванию краску по всей жидкости. Рассмотрим прямую круглую трубу с постоянным по всей длине диаметром. Скорость течения на стенках трубы вследствие прилипания равна нулю, в середины трубы она имеет наибольшее значение. Рассмотрено цилиндр с характерной длиной и характерным радиусом внутри жидкости, ось которого совпадает с осью трубы и изучены течение жидкости через цилиндра. Выведены расчётные формулы для вычисления максимальной скорости течения, объём жидкости проходящее через поперечное сечение трубки, коэффициента сопротивления к трению в трубки по длине течения, а также максимальное значение касательного напряжения.

Ключевые слова: число Рейнольдса, ламинарное течение, турбулентное течение, параболическое течение, сила трения, интеграл, координата, труба, вязкость, плотность, основная скорость течения, среднее скорость, максимальная скорость, радиус, Гук, Гегин, Пуазейл, Дарси-Вейсбах, объём жидкости, коэффициент сопротивления.

Abstract: The article presents a mathematical simulation of the motion of viscous incompressible fluids through tubes inside which a tube bundle is located. Laminar and turbulent regimes of fluid motion are indicated, and the physical meaning of the appearance of these regimes is analyzed. In a straight pipe with a smooth wall and a constant cross section, each particle of the liquid, with small Reynolds numbers, moves along a rectilinear trajectory. Due to the presence of viscosity, particles of liquid close to the walls move more slowly than far from the wall. The flow moves in the form of ordered layers moving relative to each other. However, observations show that for large Reynolds numbers the flow goes into an unordered state or goes into turbulent flow. Strong stirring takes place in the liquid, this can be seen if the paint moving in the pipe is introduced into the liquid. The transition of laminar flow to turbulent flow is most clearly illustrated by the experiment of O.

Reynoldst on the colored trickle, and it is established that such a transition occurs at the same critical value as the Reynolds number. When the flow laminar flow moves in the form of a clearly delineated trickle and as the flow becomes turbulent the paint is crimped all over the pipe and stains the vest liquid. This shows that, in the turbulent flow, a transverse motion acts on the liquid of the axis moving along the axis, or there is a motion perpendicular to the axis of the tube. This same lateral movement leads to mixing of the paint throughout the liquid. Consider a straight circular tube with a constant diameter over its entire length. The velocity of flow on the walls of the pipe due to adhesion is zero, in the middle of the pipe it has the greatest value. We consider a cylinder with a characteristic length and a characteristic radius inside a fluid whose axis coincides with the axis of the tube and the flow of liquid through the cylinder is studied. Calculation formulas are derived for calculating the maximum flow velocity, the volume of liquid passing through the cross section of the tube, the coefficient of resistance to friction in the tubes along the length of the flow, and also the maximum value of the tangential stress.

Keywords: Reynolds number, laminar flow, turbulent flow, parabolic flow, frictional force, integral, coordinate, pipe, viscosity, density, main flow velocity, mean velocity, maximum speed, radius, Guk, Gegin, Poiseuille, Darcy-Weisbach, volume of liquid, coefficient of resistance.

1. Введение

Течение реальных жидкостей во многих случаях резко отличается от ламинарных течений. Оно обладает таким специальным свойством, которое называется турбулентностью. В реальных течениях, которое происходит в трубах, каналах и в пограничном слое с возрастанием значения числа Рейнольдса явно наблюдается переход ламинарного течения в турбулентное. Такой переход ламинарного течения в турбулентное называется возникновением турбулентности и он играет фундаментальное значение по всей гидродинамике. Первоначально такой переход был обнаружен в течениях, происходящих в прямых трубах и каналах.

В прямой трубе с гладкой стенкой и постоянным поперечным сечением каждая частица жидкости при небольших числах Рейнольдса движется по прямолинейной траектории. Из-за наличия вязкости частицы жидкости близкие к стенке движутся медленнее, чем вдали от стенки. Течение движется в виде упорядоченных слоев движущихся относительно друг от друга. Однако, наблюдения показывают, что при больших числах Рейнольдса течение переходит в неупорядоченное состояние или переходит в турбулентное течение. Происходит сильное перемешивание в жидкости, в этом можно убедиться если ввести в жидкость движущуюся в трубе краску.

В 1883 г. Осборн Рейнольдс, изучая движение воды в круглой трубе, обнаружил, что с увеличением скорости потока устойчивый ламинарный характер движения нарушается. Появляются возмущения, которые выражаются в том, что ранее прямолинейное движение частиц жидкости, ламинарное на некоторых участках становится беспорядочным, сохраняя вместе с тем общую направленность движения. Дальнейшее увеличение скорости приводит к хаотическому движению во всем потоке. Как принято говорить в настоящее время, течение из устойчивого-ламинарного превратилось в неустойчивое, возмущенное-турбулентное [2].

Наличие вязкости в жидкостях сопротивляется передвижению слоев жидкости относительно друг от друга. Другими словами, в ламинарных (слоистых) течениях за счет вязкости возникает внутреннее трение, оно выражается количеством касательных напряжений на границах слоев, или характеризуется количеством касательных сил относящийся на единичной площади. Отдельные концентрические слои жидкости относительно друг от друга движутся таким образом, что скорость жидкости будет направлено по направлению основной оси. Движение жидкости подобного типа называется ламинарным течением [1-12].

При движениях несжимаемой вязкой жидкости начиная при одном и том же значении числа Рейнольдса $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$, ламинарное течение переходит в турбулентное, это же значение числа Рейнольдса называется критическим числом Рейнольдса, где ρ - плотность, μ - вязкость жидкости, U - максимальная скорость основного течения, L - характерный масштаб длины.

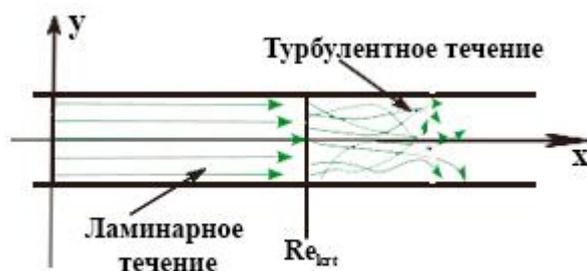


Рис. 1. Переход ламинарного форму течения в турбулентное.

Из рис. 1. видно, что при $Re < Re_{krt}$, течение ламинарное, а при $Re_{krt} < Re$ течение переходит в турбулентный режим.

2. Постановка задачи

В работе [2] приведены сведения о силах действующих для течений в цилиндрической трубе. Будем рассматривать течение жидкости в прямой круглой трубе с постоянным по всей длине диаметром внутри которой расположены пучок n трубки с длиной L и радиусом r . В реальных жидкостях жидкость прилипает к стенкам трубки и передает касательное напряжение к поверхности обтекаемой жидкостью. Здесь появляется так называемая сила внутреннего трения, в жидкостях данная сила является вязкостью. Вязкость является таким свойством газов и жидкостей, которой является сопротивлением приводящий к движению жидкостей на воздействие внешних сил. Наличие касательных напряжений и прилипание жидкостей к твердым стенкам приводит к качественным различиям реальных жидкостей от идеальных. Теперь изучаем движение жидкостей в трубе внутри которого расположена n трубки одинаковой длины и радиуса. С учётом вязкости на стенках трубки скорость равна нулю, своего максимального значения достигает на середине трубки. На достаточно удаленном расстоянии от входа трубки, распределение скорости течения не зависит от координаты направленного вдоль радиуса.

Движение жидкости в трубе происходит под действием перепада давления в направлении оси трубы, но в каждом поперечном сечении, перпендикулярном к оси трубы, давление можно рассматривать как постоянное. Движение каждого элемента жидкости ускоряется вследствие перепада давления и замедляется вследствие напряжения сдвига, вызванного трением [2-12].

Давление p считается постоянной, то есть предполагаются что по сечению трубки $p_0, p_l = const$ [3].

В направлении основной оси на трубки действуют силы давления $p_0 n \pi r^2$ и $p_l n \pi r^2$ приложенные к входному и выходному основаниям трубки соответственно, а также касательная сила $2\pi n y L \tau$ действующая на боковую поверхность цилиндра. Требуется определить максимальную скорость течения в трубки, объём жидкости протекающие через поперечное сечение трубы,

коэффициент сопротивления трубки к трению по длине течения, а также максимальное значение касательного напряжения.

3. Решение задачи

Приравнявая сил действующая жидкости в трубки, получаем в качестве условия равновесия в направлении движения уравнение (рис.2.)

$$p_0 n \pi y^2 = p_l n \pi y^2 + 2 \pi n y L \tau . \quad (1)$$

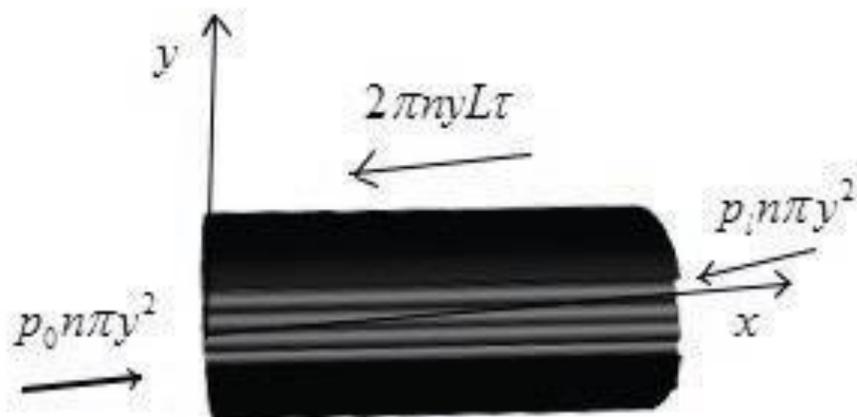


Рис. 2. В трубе расположена пучок n трубки

Проекция сила внутреннего трения взята со знаком плюс, потому что, градиент скорости отрицательный (скорость течения слоя с увеличением радиуса y уменьшается).

Из формулы (1) определим касательное напряжение τ

$$\tau = \frac{p_0 - p_l}{L} \cdot \frac{y}{2} . \quad (2)$$

В рассматриваемом случае скорость течения u уменьшается с увеличением координаты y и равна нулю при $y = r$. Поэтому на основании закона трения

Гука $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ следует принять, что $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$. Подставляя это выражение в (2),

получим

$$-\mu \frac{du}{dy} = \frac{p_0 - p_l}{L} \cdot \frac{y}{2} ,$$

отсюда, можно видеть, что

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_0 - p_l}{\mu L} \cdot \frac{y}{2} . \quad (3)$$

Теперь, учитывая, что при $y = r$ скорость $u(y) = 0$ и интегрируя уравнение (3) с этим начальным условием имеем

$$u(y) = -\frac{p_0 - p_l}{4\mu L} y^2 + C , \quad (4)$$

для определения постоянной C из уравнение (4), используем условие $u(r)=0$ при $y=r$, или

$$u(r) = -\frac{P_0 - P_l}{4\mu L} r^2 + C = 0,$$

отсюда можно видеть, что

$$C = \frac{P_0 - P_l}{4\mu L} r^2. \quad (5)$$

Подставляя значение константы C из (5) в уравнение (4) имеем

$$u(y) = -\frac{P_0 - P_l}{4\mu L} y^2 + \frac{P_0 - P_l}{4\mu L} r^2,$$

И в свою очередь, получим уравнение для определения скорости течения следующую формулу

$$u(y) = \frac{P_0 - P_l}{4\mu L} (r^2 - y^2). \quad (6)$$

Таким образом, имеем параболическое распределение скоростей по радиусу трубы (рис. 3.). Наибольшее значение скорость имеет в середине трубки ($y=0$), где она равна

$$u_{\max} = \frac{P_0 - P_l}{4\mu L} r^2. \quad (7)$$

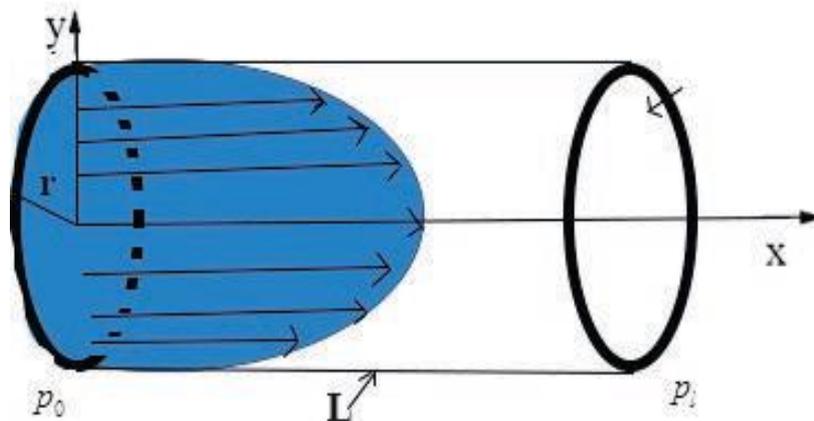


Рис. 3. Расход жидкости для одной трубки

Полное количество Q жидкости, протекающее сквозь сечение трубки (расход жидкости) определяется как объем параболоида вращения (рис.3.) и в свою очередь определяется следующим образом.

Уравнение (6) перепишем в следующем виде:

$$u(y) = \frac{P_0 - P_l}{4\mu L} (r^2 - y^2),$$

отсюда, можно видеть, что

$$u(y) = \frac{P_0 - P_l}{4\mu L} r^2 \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2} \right) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right). \quad (8)$$

Общий поток жидкости Q через трубки с круглым сечением на основании формулы Гагена-Пуазейля определяется следующим образом [1,3,7,8,11,12]

$$Q = \int_0^r u(y) 2\pi y dy = 2\pi u_{\max} \int_0^r \left(y - \frac{y^3}{r^2} \right) dy = 2\pi u_{\max} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4r^2} \right]_0^r,$$

или учитывая формулу (7), для расхода жидкости имеем формулу

$$Q = 2\pi \cdot \frac{p_0 - p_l}{4\mu L} \cdot r^2 \cdot \frac{r^2}{4} = \frac{\pi(p_0 - p_l)r^4}{8\mu L}. \quad (9)$$

Вводим среднюю скорость течения, значения которой определяется по поперечному сечению трубки следующим образом:

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi r^2}. \quad (10)$$

Уравнение (10) с учётом формулу (9) записывается в виде

$$\bar{u} = \frac{(p_0 - p_l)r^2}{8\mu L},$$

сравнивая функцию $\bar{u}(y)$ с максимальной скоростью u_{\max} определяемый по формуле (7) можно видеть, что $\bar{u}(y) = \frac{1}{2}u_{\max}$ или средняя скорость ламинарного течения в трубе равен половине максимальной скорости (рис. 3).

Определим разность давлений $(p_0 - p_l)$

$$p_0 - p_l = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2},$$

отсюда имеем

$$p_0 - p_l = \frac{8\mu L \bar{u}}{r^2} = \frac{32\mu \bar{u}}{2r} \cdot \frac{L}{2r} = \frac{32\mu \bar{u}}{D} \cdot \left(\frac{L}{D}\right), \quad (11)$$

здесь $D = 2r$ диаметр трубы.

Потер давлений по длине течения определяется по уравнению Дарси-Фейсбаха

$$p_0 - p_l = \frac{\lambda_n}{2} \cdot n \cdot \rho \bar{u}^2 \left(\frac{L}{D}\right), \quad (12)$$

здесь λ - коэффициент гидравлического потеря по длине трубки или коэффициент сопротивления трубки. Из последнего уравнения имеем

$$\lambda_n = \frac{(p_0 - p_l)}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \cdot n} \cdot \left(\frac{D}{L}\right) \quad (13)$$

Подставляя значение $p_0 - p_l$ из формулы (11) в уравнению (13) получим, для коэффициента сопротивления трубки следующую формулу

$$\lambda_n = \frac{32\mu \bar{u}}{D} \cdot \left(\frac{L}{D}\right) \cdot \frac{2}{\rho \bar{u}^2 \cdot n} \cdot \left(\frac{D}{L}\right) = \frac{64\mu}{\rho \bar{u} D \cdot n}$$

или отсюда можно видеть, что

$$\lambda_n = \frac{64}{\text{Re} \cdot n}, \quad (14)$$

здесь $\text{Re} = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu}$ - число Рейнольдса.

Из формулы (12), имеем

$$\frac{p_0 - p_l}{L} = \frac{\lambda_n \cdot n}{D} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2. \quad (15)$$

Касательное напряжение достигает свое максимальное значение в стенке трубки, здесь данное напряжение определяется по формулу.

$$\tau_0 = \frac{(p_0 - p_l) \cdot r}{L} \cdot \frac{r}{2}, \quad (16)$$

данная формула имеет место независимо оттого на каком режиме (ламинарное или турбулентное) находится течение. Таким образом, касательное напряжение на стенке трубки определяется путем измерения уменьшения давления экспериментальным образом.

Подставляя значение $\frac{p_0 - p_l}{L}$ из формулы (15) в формулу (16) имеем следующую формулу

$$\tau_0 = \frac{\lambda_n \cdot n}{8} \rho \bar{u}^2. \quad (17)$$

Это является формулой для вычисления максимального значения касательного напряжения.

4. Анализ результатов

Согласно формулу (14) для вычисления коэффициента сопротивления приведем результаты расчётов для различного числа пучков трубки n . (4-рис.).

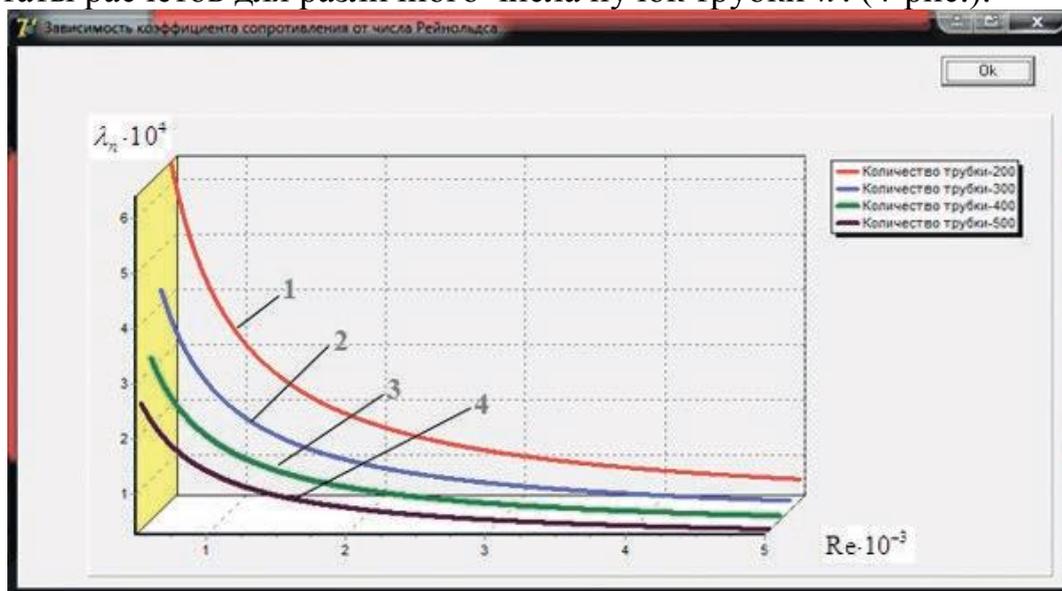


Рис. 4. Зависимость коэффициента сопротивления для гладких трубки от количество трубки n и число Рейнольдса Re : 1) $n=200$, 2) $n=300$, 3) $n=400$, 4) $n=500$.

На рис.4 для n гладких трубки приведен результаты иллюстрирующие зависимость коэффициента сопротивления λ_n от числа Рейнольдса Re .

Сравнение полученных результатов показывают что при всех значениях число Рейнольдса теоретическая формула (14) имеет место. В вычислительном эксперименты рассматривались следующий диапазон изменения характерных параметров Re и λ_n : $Re = 500 \div 5000$, $\lambda_n = 0.0001 \div 0.0007$. Из рис.4 видно, что с ростом количество трубки n коэффициент сопротивления уменьшается.

Диапазон изменения приведенного критического числа Рейнольдса, находится в хорошем согласии с критическим числом Рейнольдса для плоскопараллельных течений [5,17-24].

5. Заключение

Таким образом, показаны что движение несжимаемых вязких течений в каналах, трубах и в пограничном слое могут быть ламинарным и турбулентном режиме а также, указаны физический смысл возникновения этих режимов. Для жидкости протекающих через n трубки расположенного внутри трубы выведены формулы вычисления максимальной скорости объёма жидкости протекающие через поперечное сечение трубки, коэффициента сопротивления трубки к трению по длине течения.

Список литературы

1. Reynolds O. On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels Phil. Trans.roy.soc. 1883. № 174. P. 935-982.
2. Нармурадов Ч.Б., Менглиев Ш.А. Трубадаги суюкликлар харакатини математик моделлаштириш Ҳисоблаш ва математика муаммолари, 2018. №. 2. Б. 36-47.
3. Гордин В.А. Дифференциальные и разностные уравнения Изд.М.:«Высшая школа экономики», 2016. 517 с.
4. Горшков-Кантакузен В.А. К вопросу вычисления коэффициента Дарси методом регрессионного анализа Материалы XXI Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" имени А.Г. Горшкова, 16-20 февраля 2015, Вятчи. Том 1./МАИ.:ООО "ТРП",2015. С. 59-60.
5. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости Изд.Т.:«Fan va texnologiya», 2011. 188 с.
6. Кочен Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.Теоретическая гидромеханика М: Физматлиз, 1963. 728 с.
7. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой М: Физматлиз, 1962. 479 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 571 с.
9. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамической устойчивостью и турбулентность. Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1977. 366 с.
10. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.:Физматлит, 2005. 88 с.
11. Thomas Н.Н. The stability of plane Poiseuille flow. Phys.rev., 1953. №. 4(91). P. 780-783.
12. Patera A.T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion.Comp. Phys., 1984. Vol.54. P. 468--488.
13. Бахвалов К.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. №. 4(9). С. 841-854.

14. Loer St. Examination of the stability of disturbed boundary-layer flow by a numerical method *Phys fluids.*, 1969. №. 12(12). P. 139-143.
15. Brown W. B. A stability criterion for three-dimensional laminar boundary layers In: *Boundary layer and flow control*. London, 1961. vol.2. – P. 913-923.
16. Гольдштик М.А., Сапожников В.А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии массовых сил. *РАН. Сер. Механика жидкости и газа*. М.:Издательство, 1968. №. 5. С. 42-46.
17. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля. *РАН. Сер. Механика жидкости и газа.*, М.: Издательство, 1986. №. 1. С. 46-50.
18. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. Устойчивость двухфазного потока газ – твердые частицы в пограничном слое. *РАН. Сер. Механика жидкости и газа.*, М.:Издательство, 1987. №.2. С.60-64.
19. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А., Хужаёров Б.Х. Устойчивость пограничного слоя двухфазных потоков с учетом сил Стокса и Архимеда *Проблемы механики*, Ташкент, 1998. №. 4. С. 13-17.
20. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Сходимость спектрально–сеточного метода *Узбекский математический журнал*, Ташкент, 2003. №. 2. С. 64-71.
21. Нармурадов Ч.Б. Об эффективном методе решения задачи гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков *Докл. АН РУз.*, Ташкент, 2004. №. 1. С. 19-26.
22. Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра-Зоммерфельда *Математическое моделирование*. Москва, 2005. №. 9(17). С. 35-42.
23. Нармурадов Ч.Б. Спектр собственных значений для двухфазного течения Пуазейля и пространственная зависимость характерных параметров *Техника и технология*. Москва, 2007. №. 5(23). С. 55-57.
24. Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений *Математическое моделирование*. Москва, 2007. №. 6(19). С. 53-60.