



EZGU FIKR, EZGU SO‘Z, EZGU AMAL!

ILM SARCHASHMALARI

**URGANCH DAVLAT UNIVERSITETINING
ILMIY-METODIK JURNALI**



2018–3

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Ilm sarchashmalari

Jurnal O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining FILOLOGIYA va FALSAFA hamda FIZIKA-MATEMATIKA fanlari bo‘yicha doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrdir.

3.2018

**научно-методический журнал
Издаётся с 2001 года**

Urganch – 2018

Бахром Абдуллаев (УрГУ), Севдиёр Имомкулов (НГПИ), Расулбек Шарипов (УрГУ)
ОБ ОДНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ $(n-s, q)$ – ЕМКОСТИ

Annotatsiya. Ushbu maqolada $(n-s, q)$ –sig‘imi nol bo‘lgan to‘plamlarning tekisliklar bilan kesimi xarakteristikalarini o‘rganilgan va P.Mattila teoremasining umumlashmasi isbot qilingan.

Аннотация. В данной статье исследуются сечения множеств нулевой $(n-s, q)$ – емкости с гиперплоскостями и доказано обобщение теоремы П.Маттилы.

Annotation. In this article the intersection of sets of zero $(n-s, q)$ –capacity with hyperplanes was considered and generalization of Mattila’s theorem was proved.

Kalit so‘zlar: subgarmonik funksiya, $(n-s, q)$ –sig‘im, gipertekislik, Borel o‘lchovi.

Ключевые слова: субгармонические функции, $(n-s, q)$ – емкость, гиперплоскость, Борелевская мера.

Key words: subharmonic function, $(n-s, q)$ –capacity, hyperplanes, Borel measure.

Одним из важных этапов исследований по теории потенциала является выработка общего понятия ёмкости и плодотворное применение ёмкостных характеристик ко многим задачам анализа. Некоторые множества емкости нуль оказываются устранимыми особыми множествами в различных классах функций (например, в классе ограниченных субгармонических функций, классах Соболева и т.п.).

$C_{n-s,q}$ – емкость, $1 < q \leq \frac{n}{s}$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ ядро

$K_s(x) = 1/|x|^{n-s}$, при $0 < s < n$ и $K_s(x) = \ln|x|$, при $s = n$. Для положительной борелевской меры μ , как обычно, определяем потенциал Рисса:

$$U_{n-s}^{\mu}(x) = \int K_s(x-y) d\mu(y).$$

Для произвольного компактного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ ёмкостная величина определяется следующим образом (см [3])

$$C_{n-s,q}(E) = \sup \mu(E), \quad 1 < q < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\|U_{n-s}^{\mu}(x)\|_p = \left[\int |U_{n-s}^{\mu}(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1)$$

Для $p > \frac{n}{n-s}$, т.е. $qs < n$ интеграл $\int_{|x| \geq 1} |U_{n-s}^{\mu}(x)|^p dx$ существует. Однако, при

$p = \frac{n}{n-s}$, т.е. $qs = n$, в выше приведенном определении емкости $C_{n-s,q}$ есть неудоб-

ство в связи с тем, что для таких s потенциал $U_{n-s}^{\mu}(x)$ может не принадлежать классу $L_p(\mathbb{R}^n)$ и интеграл в (1), вообще говоря, не определен из-за поведения ядра $K_s(x)$ в

окрестности бесконечно удаленной точки. В таком случае мы можем предположить, что $E \subset B(0,1)$ и определить емкость только для таких множеств:

$$C_{n-s,q}(E) = \sup \mu(E), \quad 1 < q < +\infty,$$

где верхняя грань теперь берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\|U_{n-s}^\mu(x)\|_p = \left[\int_{B(0,1)} |U_{n-s}^\mu(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq 1, \quad p = \frac{n}{n-s}.$$

Здесь через $B(0,1)$ обозначен единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке нуля.

Существует следующее эквивалентное определение $(n-s, q)$ -емкости (см. [4,5]).

Определение 1. Пусть E -компактное множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть

$$\Phi(E) = \left\{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi(x) > 1 \text{ при любом } x \in E \right\}.$$

Назовем $(n-s, q)$ -емкостью множества E числа

$$\gamma_{n-s,q}(E) = \inf \left\{ \|\varphi\|_{q,s} : \varphi \in \Phi(E) \right\}.$$

Здесь

$$\|\varphi\|_{q,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x^s \varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = s} \frac{s!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^s \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 \right]^{\frac{q}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Отметим, что существуют константы $0 < A_1 < A_2$, зависящие лишь от n, s и q , такие, что

$$A_1 C_{n-s,q}(E) \leq \gamma_{n-s,q}(E) \leq A_2 C_{n-s,q}(E), \quad 1 < q \leq \frac{n}{s}. \quad (2)$$

Множества $C_{n-s,q}$ -емкости нуля, $C_{n-s,q}(E) = 0$, имеют следующие метрические свойства (см. [5]).

- а) если $qs < n$, $0 < \alpha < n - qs$ и $H_\alpha(E) = 0$, то $C_{n-s,q}(E) = 0$;
- б) если $qs < n$, $n - qs < \alpha$ и $H_\alpha(E) > 0$, то $C_{n-s,q}(E) > 0$;
- в) если $qs = n$, $\varphi(r) = |\ln r|^{1-q}$, $q > 1$ и $H_\varphi(E) < \infty$, то $C_{n-s,q}(E) = 0$;
- г) если $qs = n$, $\alpha > 0$ и $H_\alpha(E) > 0$, то $C_{n-s,q}(E) > 0$.

Из а), б), в) и г) следует, что размерность множества нулевой $C_{n-s,q}$ -емкости равна $n - qs$.

В классическом случае $n > 2$, $0 < s \leq m$, П.Маттила [1] (см. также [6]) доказал следующий результат: пусть E -компакт из $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$. Если ньютоновская емкость определенная при помощи ядра Рисса $K(x) = |x|^{s-m-n}$ равна нулю, т.е. $C_{n+m-s}(E) = 0$, $0 < s \leq m$, то для почти всех $a \in \mathbb{R}_x^n$ пересечение $E \cap \{x = a\} \subset \mathbb{R}_y^m$

имеет ньютоновскую емкость нуль в плоскости $\{x = a\} \in \mathbb{R}_y^m$: $C_{m-s}(E \cap \{x = a\}) = 0$ (если $m = s$, то C_0 -емкость в $\mathbb{R}_y^m$ есть по определению логарифмической емкости).

Имеет место более общая теорема

Теорема 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – компакт и $C_{n+m-s,q}(E) = 0$, ($0 < s < m$, $1 < q \leq \frac{m}{s}$). Тогда, для почти всех $a \in \mathbb{R}_x^n$ пересечение $E \cap \{x = a\} \subset \mathbb{R}_y^m$ имеет нулевую $(m-s, q)$ -емкость: $C_{m-s,q}(E \cap \{x = a\}) = 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы 1 основывается на определении 1, $(n-s, q)$ – емкости. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ компактное множество и

$$\Phi(E) = \left\{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}) : \varphi(x, y) > 1, (x, y) \in E \right\}.$$

Согласно теореме Уитни (см [2]), для любой плоскости $\Pi_a = \{x = a\}$, такое, что $E \cap \Pi_a \neq \emptyset$, множество сужений $\varphi|_{\Pi_a} = \{\psi(y) = \varphi(a, y), \varphi \in \Phi(E)\}$ функций $\varphi(x, y) \in \Phi(E)$ совпадает множеством функций

$$\Phi(E \cap \Pi_a) = \left\{ \psi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) : \psi(y) > 1, y \in E \cap \Pi_a \right\}.$$

Ясно, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_y^s \varphi(x, y)|^q dy \right) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_{x,y}^s \varphi(x, y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \inf_{\varphi} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_y^s \varphi(x, y)|^q dy \right) dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \inf_{\varphi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_y^s \varphi(x, y)|^q dy \right) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \inf_{\varphi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_{x,y}^s \varphi(x, y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Отсюда и согласно определению 1, получим неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [\gamma_{m-s,q}(E \cap \Pi_x)]^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \gamma_{n+m-s,q}(E).$$

Следовательно, условиям из теоремы и оценке (2) получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\gamma_{m-s,q}(E \cap \Pi_x)]^q dx = 0.$$

Значит, для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ величина $\gamma_{m-s,q}(E \cap \Pi_x) = 0$. Отсюда выводим, что $C_{m-s,q}(E \cap \Pi_x) = 0$. Теорема 1 доказана.

Использованная литература:

1. Mattila P. Integral geometric properties of capacities. Trans, of the Amer. Math. Soc., 266, (1981), 539–554.
2. Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed set. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 36 (1934), 63–89.
3. Мельников М.С., Синанян С.О. Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного. Итоги науки и техники. ВИНТИ, 1975, том 4, 143–250.
4. Мазья В.Г. $O(p, l)$ – емкости, теоремах вложения и спектре самосопряженного эллиптического оператора. Известия Академии наук. Серия математическая. 37, 1973, 356–385.
5. Мазья В.Г., Хавин В.П. Нелинейная теория потенциала. Успехи мат. наук. 1972, т. 27, вып. 6 (168), 67–138.
6. Садуллаев А. Рациональные аппроксимации и плюрипалярные множества. Мат. сб., т.119 (161), №1 (9), 1982, 96–118.

MUNDARIJA

SHOIR VA TARJIMON MATNAZAR ABDULHAKIM TAVALLUDINING 70 YILLIGIGA

О.Жуманиёзов. Матназар Абдулҳаким шеърлятида бадиийлик, айрим стилистик бўёқ ва воситалар.....	3
--	---

MATEMATIKA

Б.Абдуллаев, С.Имомкулов, Р.Шаринов. Об одном геометрическом свойстве $(n - s, q)$ – ёмкости.....	7
---	---

XIMIYA-TEKNOLOGIYA

А.Рахимов, М.Жуманова, А.Ражабова, Ф.Садуллаева. Чучукмия баргидан табиий бўёқ олиш биотехнологияси.....	11
--	----

FALSAFA

М.Ўразметов. Коммуникация тушунчасининг фалсафий талқини.....	14
Н.Тоғаев. Тинчликпарварлик ахлокий тамойилининг тарихий асослари.....	18
С.Рўзимуродов. Ёшларни ахборот-психологик хуружлардан ҳимоя қилишда оиланинг ўрни.....	21
О.Ортиқов, Г.Азаматова, Х.Хидиров. Шайбонийлар давлатининг ижтимоий-иқтисодий ҳаёти.....	24

TILSHUNOSLIK

Ж.Якубов, Х.Рузметов. Синтаксические особенности синонимов во французском языке.....	27
Ш.Юлдашева. Интернет лингвистикаси: тавсиф ва ташхис.....	30
М.Алиева. Ўзбек миллий газлама дизайнерлиги терминлариаро муносабат турлари.....	32
Д.Мирсагатова. Инглиз ва ўзбек тилларида фразеологик бирикмаларнинг лингвокултурологик хусусиятлари.....	37
М.Ботирова. Дунё тилларида феълларнинг семантик тоифаларини аниқлаш муаммолари.....	40

ADABIYOTSHUNOSLIK

Н.Турсунова. Ўзбек драматургияси ва миллий қадриятларнинг бадиий талқинига доир.....	44
Б.Ашуров. Шоир ижодида бадиий санъатларни қўллаш маҳорати.....	47
М.Матқулиева. “Шаҳриёр” эпик сюжетининг “Қорақўзойим” достонидаги талқини.....	51
Н.Досбаева. Таржимада лақуналар элиминацияси.....	55
Г.Қурбонова. Француз ва ўзбек тиллардаги топоним компонентли фразеологик бирикларнинг тарихий-маданий таҳлили.....	58

PEDAGOGIKA

П.Нишонов. Коммуникатив методдан фаолиятга йўналтирилган ёндашув сари.....	64
D.Omonboyeva. Ta'lim muassasalarida Uolt Vitman she'riyatini o'rganish bo'yicha metodik tavsiyalar.....	68
U.Nizamova. Esp is the new Aspect in Mentoring English.....	71
М.Пирназарова, М.Искандарова. Пўлат Мўмин шеърларининг тарбиявий аҳамияти.....	73
U.Ahmedova, S.Polvannazirova. The Approach in Teaching Speaking by Using Principled Eclectic Method.....	77
M.Ruzmetova. Blended learning: face-to-face and online environment.....	79