

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«AMALIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

**141-AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA GURUXI
TALABASI**

Iskandarov Azizbek Madiyorovichning

**5130200-Amaliy matematika va informatika ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

MAVZU: Tekis deyarli davriy funksiyalar va ularning xossalari

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.d.Yaxshimurodov A.B.

Urganch-2018
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
«AMALIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

Tekis deyarli davriy funksiyalar va ularning xossalari

Bajaruvchi:
Ilmiy rahbar:
A.B.

Iskandarov A.M.
f.-m.f.d.Yaxshimuratov

Urganch-2018

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

AMALIY MATEMATIKA KAFEDRASI

BITIRUV MALAKAVIY ISHNI BAJARISH BO‘YICHA

TOPSHIRIQLAR REJASI:

1. Talaba Iskandarov Azizbek Universitet rektorining №187-T§4 sonli buyrug‘i bilan bitiruv malakaviy ish bajarish uchun “**Tekis deyarli davriy funksiyalar va ularning xossalari**” mavzusi tasdiqlangan.

2. Kafedra majlisining qaroriga binoan f.-m.f.d.Yaxshimuratov A.B. bitiruv malakaviy ishini bajarishga rahbar qilib tayinlangan.

3.Bitiruv malakaviy ishining tarkibiy tuzilmasi:

Bitiruv malakaviy ishi kirish, asosiy qism, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati bo‘limlaridan iborat.

4.Bitiruv malakaviy ish uchun ma’lumotlar mavzu bo‘yicha ma’lumotlar beruvchi adabiyotlar, mavzuga oid maqolalar va internet saytlaridan olinadi.

5.Bitiruv malakaviy ishga ilova qilinmaydi.

Urganch davlat universiteti “Fizika-matematika” fakulteti
“Amaliy matematika” kafedrası
«Amaliy matematika va informatika» bakalavr ta’lim yo‘nalishi

Tasdiqlayman
Fakultet dekani
_____ dots.J.U.Xujamov.
“ ____ ” _____ 2018 y.

BITIRUV MALAKAVIY ISH BO‘YICHA TOPSHIRIQ

Talaba Iskandarov Azizbek Madiyorovich.

1. Ishning mavzusi: “Tekis deyarli davriy funksiyalar va ularning xossalari” mavzusi 01.11.2017 yil universitet rektorining №187-T §4 sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan.

2.Ishni topshirish muddati: “12” iyun 2018 yil.

3.Mavzu bo‘yicha dastlabki ma’lumotlar beruvchi adabiyotlar ro‘yxati

1. Левитан Б.М. «Почти-периодические функции». Гос. изд. техн. - теор. лит., Москва, 1953.
2. Бор Г. «Почти-периодические функции». Гос. изд. техн.-теор. лит., Москва, 1934.
3. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. Москва, 1963 г.
4. Левитан Б.М., Жиков В.В. «Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения». Москва, Изд-во МГУ, 1978.

4. Ishning maqsadi: Tekis deyarli davriy funksiyalar va ularning xossalarining berilganlarini atroflicha tahlillash, funksiyalarning qo‘yilishi va umumiy xulosalar.

5. Maslahatchilar:

f.-m.f.d.Yaxshimuratov A.B.

Bo'limlar	Maslahatchi F.I.SH.	Imzo, sana	
		Topshiriq berdi	Topshiriq o'rganilib chiqildi.
Kirish	Yaxshimuratov.A.B.	20.11.2017	01.12.2017
Tekis deyarli davriy funksiyalar ta'rif va elementar xossalari	Yaxshimuratov.A.B.	11.12.2017	25.12.2017
Boxner teoremasi va uning natijalari	Yaxshimuratov.A.B.	15.01.2017	29.01.2018
Tekis deyarli davriy funksiyaning boshlang'ichi haqidagi teorema	Yaxshimuratov.A.B.	12.02.2018	26.02.2018
Tekis deyarli davriy funksiyaning o'rta qiymati haqidagi teorema	Yaxshimuratov.A.B.	05.03.2018	19.03.2018
Tekis deyarli davriy funksiyalar uchun Fure qatori	Yaxshimuratov.A.B.	22.03.2018	29.03.2018
Fure qatori ustida formal amallar	Yaxshimuratov.A.B.	22.03.2018	29.03.2018
Tekis deyarli davriy funksiyalar haqidagi asosiy teoremlarning o'zaro ekvivalentligi	Yaxshimuratov.A.B.	02.04.2018	13.04.2018
Approksimatsiya teoremasini Viner usulida isbotlash	Yaxshimuratov.A.B.	16.04.2018	27.04.2018
Approksimatsiya teoremasini Boxner-Feyer usulida isbotlash	Yaxshimuratov.A.B.	01.05.2018	14.05.2018
Xulosa	Yaxshimuratov.A.B.	19.05.2018	27.05.2018
Adabiyotlar	Yaxshimuratov.A.B.	28.05.2018	30.05.2018

6. Ishga taqrizchi: _____ f.-m.f.n. Mamedov Q.
7. Ilmiy rahbar: _____ f.-m.f.d.
Yaxshimuratov.A.B.
8. BMI bajaruvchi talaba: _____ Iskandarov A.M.
9. Kafedra mudiri: _____ f.-m.f.n. Babajanov.B.A.

M U N D A R I J A

Kirish	3
1-§. Tekis deyarli davriy funksiyalar ta'rifi va elementar xossalari.....	4
2-§. Boxner teoremasi va uning natijalari.....	8
3-§. Tekis deyarli davriy funksiyaning boshlang'ichi haqidagi teorem.....	10
4-§. Tekis deyarli davriy funksiyaning o'rta qiymati haqidagi teorema.....	12
5-§. Tekis deyarli davriy funksiyalar uchun Fure qatori.....	16
6-§. Fure qatori ustida formal amallar.....	19
7-§. Tekis deyarli davriy funksiyalar haqidagi asosiy teoremlarning o'zaro ekvivalentligi.....	23
8-§. Approksimatsiya teoremasini Viner usulida isbotlash.....	26
9-§. Approksimatsiya teoremasini Boxner-Feyer usulida	

isbotlash.....	27
Xulosa.....	33
Adabiyotlar.....	34

Kirish

Mavzuning dolzarbligi. Hozirgi kunda deyarli davriy funksiyalar nazariyasi differensial tenglamalar nazariyasida, mexanika masalalarida ishlatilib kelinmoqda. Ikkita uzluksiz davriy funksiyaning yig'indisi hamisha ham davriy bo'lmasligi mumkin, masalan $\sin x + \cos(x\sqrt{2})$ davriy funksiya emas. Davriylik ajoyib xossa, yuqoridagi misolda bu xossa oddiygina amalda yo'qolib ketdi. Funksiyaning davriylik xossasini qanday qilib umumlashtirganda, «umumlashgan davriylik» xossasi odatdagi amallarda saqlanadi degan tabiiy savol tug'iladi. Hozirgi kunda bunday umumlashma mavjud bo'lib, unga deyarli davriylik xossasi deyiladi.

Deyarli davriy funksiyalar nazariyasining shakllanishiga Kroneker, P.Bol, E.Esklangon, G.Bor, N.Viner, G.Veyl, Vale-Pussen, S.Boxner, N.N.Bogolyubov, V.V.Stepanov, A.Bezikovich, Dj. Fon Neyman, V.Maak, V.A.Marchenko, B.M.Levitan va boshqa olimlar beqiyos hissa qo'shganlar.

Ishning maqsad va vazifalari. Deyarli davriy funksiyalarning xossalarini o'rganish. Ishning vazifalari deyarli davriy funksiyalarning algebraik xossalarini o'rganish, deyarli davriy funksiyalar uchun Furiye qatori tushunchasini kiritish hamda Parseval tengligini isbotlash.

Mavzuning o'rganilish darajasining qiyosiy tahlili. Deyarli davriy funksiyalar nazariyasining shakllanishiga Kroneker, P.Bol, E.Esklangon, G.Bor, N.Viner, G.Veyl, Vale-Pussen, S.Boxner, N.N.Bogolyubov, V.V.Stepanov, A.Bezikovich, Dj. Fon Neyman, V.Maak, V.A.Marchenko, B.M.Levitan va boshqa olimlar beqiyos hissa qo'shganlar.

Ishning ilmiy yangiligi. Mazkur bitiruv malakaviy ish referativ xarakterga ega.

Ishning predmeti va ob'ekti. Tekis deyarli davriy funksiyalar. Tekis deyarli davriy funksiyalarning algebraik xossalarini o'rganish, deyarli davriy funksiyalar uchun Furiye qatori tushunchasini kiritish hamda Parseval tengligini isbotlash.

Bitiruv malakaviy ishida matematik analiz va differensial tenglamalar usullaridan foydalanilgan.

Ishning ilmiy ahamiyati. Mazkur bitiruv malakaviy ishida o'rganilgan "Tekis deyarli davriy funksiyalar va ularning xossalari" amaliy matematikaning bir qator masalalarini o'rganishda qo'llaniladi.

1-§. Tekis deyarli davriy funksiyalar ta'rifi va elementar xossalari

Ta'rif. $f(x)$ funksiya R^1 da uzluksiz bo'lsin. Biror τ son uchun ushbu

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in R^1$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, τ songa $f(x)$ funksiyaning ε -davri deyiladi.

Izox. $f(x) \in C(-\infty, \infty)$ funksiya davriy funksiya bo'lib, T uning eng kichik musbat davri bo'lsin. U xolda $\forall \varepsilon > 0$ uchun nT son ε -davri bo'ladi. Bu sonlar xaqiqiy o'qda quyidagicha joylashadi. Uzunligi $\ell > T$ bo'lgan ixtiyoriy intervalda $\{nT\}$ sonlardan kamida bittasi yotadi.

Ta'rif. Agar $E \subset R^1$ to'plam uchun $\ell > 0$ son topilib, ixtiyoriy $(\alpha, \alpha + \ell)$ intervalda E to'plamning kamida bitta elementi bo'lsa, E to'plamga nisbiy zich to'plam deyiladi.

Misol. 1) $\{nT\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nisbiy zich, $\{\pm \sqrt{n}\}_{n=0}^{\infty}$ nisbiy zich, $\{\pm n^2\}_{n=0}^{\infty}$ nisbiy zich emas.

Ta'rif. $f(x) \in C(-\infty, \infty)$ bo'lsin. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun ε -davrlardan tuzilgan nisbiy zich to'plam $\{\tau(\varepsilon)\}$ topilsa, $f(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflarni inobatga olib, tekis deyarli davriy funksiyaning quyidagicha ta'riflash mumkin.

Ta'rif. $f(x) \in C(-\infty, \infty)$ bo'lsin. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\ell = \ell(\varepsilon) > 0$ son topilib, uzunligi ℓ bo'lgan xar bir $(\alpha, \alpha + \ell)$ intervalda kamida bitta ε -davri mavjud bo'lsa, ya'ni biror $\tau \in (\alpha, \alpha + \ell)$ son uchun ushbu

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in R^1 \quad (1)$$

tengsizlik urinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya deyiladi.

Lemma 1. Agar tekis deyarli davriy funksiyaning ta'rifidagi $\ell(\varepsilon)$ chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. $\ell(\varepsilon) < \ell_0 = \text{const}$ bo'lsin. $\varepsilon = \frac{1}{n}$ deb olamiz va $(\alpha, \alpha + \ell_0)$ intervaldagi ε -davrni $\tau(\varepsilon) = \tau_n$ orqali belgilaymiz. $\alpha = \ell_0$ desak, $\tau_n \in (\ell_0, 2\ell_0)$ bo'ladi. Bolsano-Veyershtass lemmasiga ko'ra $\{\tau_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin $\tau_{n_k} \rightarrow \tau_0$, $(n_k \rightarrow \infty)$. $\tau_0 \geq \ell_0 > 0$ bo'lishi ravshan. Agar ushbu

$$|f(x + \tau_{n_k}) - f(x)| < \frac{1}{n_k} \quad (2)$$

tengsizlikda $n_k \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $f(x + \tau_0) = f(x)$ kelib chikadi. **Lemma isbotlandi.**

Lemma 2. Agar $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, $\lambda f(x)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Bu yerda λ ixtiyoriy kompleks son.

Isbot. $\lambda \neq 0$ bo'lsin. Tekis deyarli davriy funksiya ta'rifida ε o'rnida $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ ni olamiz va unga mos keluvchi $\ell = \ell(\frac{\varepsilon}{|\lambda|})$ ni ham ta'rifdan topamiz. Demak,

$$\begin{aligned} \left| f\left(x + \tau\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)\right) - f(x) \right| &< \frac{\varepsilon}{|\lambda|}, \\ \left| \lambda f\left(x + \tau\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)\right) - \lambda f(x) \right| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

ya'ni $\tau\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$ son $\lambda f(x)$ funksiya uchun ε -davr ekan. **Lemma isbotlandi.**

Lemma 3. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, $f(x+c)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Bu erda c ixtiyoriy haqiqiy son.

Isbot. (1) tengsizlikda x ixtiyoriy bo'lgani uchun uning o'rniga $x+c$ ni qo'yamiz:

$$|f(x+c+\tau(\varepsilon)) - f(x+c)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Bunga ko'ra $f(x+c)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Lemma isbotlandi.

Lemma 4. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, $|f(x)|$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. Ushbu

$$\left| |f(x+\tau)| - |f(x)| \right| \leq |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlikdan keltirilgan fikr darhol kelib chiqadi. **Isbotlandi.**

Lemma 5. Agar $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, $\inf_{\mathbb{R}^1} |f(x)| = \gamma > 0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. τ son $f(x)$ funksiya uchun $\gamma^2 \cdot \varepsilon$ davr bo'lsin. U holda

$$\left| \frac{1}{f(x+\tau)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{|f(x) - f(x+\tau)|}{|f(x+\tau)| \cdot |f(x)|} \leq \frac{1}{\gamma^2} \cdot |f(x) - f(x+\tau)| < \frac{1}{\gamma^2} \cdot \gamma^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

bo'ladi. **Lemma isbotlandi.**

Lemma 6. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, E uning qiymatlar to'plami bo'lsin. $F(z)$ funksiya E da tekis uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $\varphi(x) = F(f(x))$ funksiya ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. $F(z)$ funksiya E da tekis uzluksiz funksiya bo'lgani uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad z_1, z_2 \in E, \quad |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |F(z_1) - F(z_2)| < \varepsilon. \quad (3)$$

τ son $f(x)$ uchun δ -davr bo'lsin. U holda

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \delta$$

Bo'ladi. (3) da $z_1 = f(x+\tau)$, $z_2 = f(x)$ deb olsak, ushbu

$$|F(f(x+\tau)) - F(f(x))| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, τ son $\varphi(x) = F(f(x))$ funksiya uchun ε -davr bo'lar ekan. **Lemma isbotlandi.**

Teorema 1. Tekis deyarli davriy funksiya chegaralangan funksiya bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, $\varepsilon=1$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $\ell = \ell(1) > 0$ mavjud. $m = \max_{[0,1]} |f(x)|$ bo'lib, $x_0 \in R^1$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. $(-x_0, -x_0 + \ell)$ intervalda biror τ deyarli davr topiladi. Bunga ko'ra $0 < x_0 + \tau < \ell$ bo'ladi. Demak, ushbu

$$|f(x_0)| \leq |f(x_0) - f(x_0 + \tau)| + |f(x_0 + \tau)| < \varepsilon + m = 1 + m$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni $f(x)$ chegaralangan. **Teorema isbotlandi.**

Natija. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, $f^2(x)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. Quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$|f^2(x) - f^2(x+\tau)| = |f(x) + f(x+\tau)| \cdot |f(x) - f(x+\tau)| < 2M \cdot \varepsilon.$$

Bu tengsizlikka ko'ra $f^2(x)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Natija. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, $|f(x)|^2$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. $|f(x)|$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lishini ko'rgan edik. Oldingi natijadan $|f(x)|^2$ funksiyaning tekis deyarli davriyligi kelib chiqadi.

Izox. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, $f(x) \neq 0$, $\inf f(x) = 0$ bo'lsa, $\frac{1}{f(x)}$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lmaydi, chunki $\frac{1}{f(x)}$ funksiya chegaralanmagan.

Teorema 2. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya R^1 da tekis uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Tekis deyarli davriy funksiyaning ta'rifidan $\ell = \ell(\frac{\varepsilon}{3})$ ni topamiz. $f(x)$ funksiya Kantor teoremasiga ko'ra $[-1, 1 + \ell]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi. Bunga ko'ra, shunday $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$ son topiladiki, bunda

$$|y_1 - y_2| < \delta, \quad y_1, y_2 \in [-1, 1 + \ell] \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

bo'ladi. Biz $\delta < 1$ deb xisoblaymiz. x_1 va x_2 ushbu $|x_1 - x_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonlar bo'lsin. $\tau \in (-x_1, -x_1 + \ell)$ $f(x)$ ga mos keluvchi $\frac{\varepsilon}{3}$ -davr bo'lsin. U xolda $0 < x_1 + \tau < \ell$ buladi. Bu tengsizlikka $-\delta < x_2 - x_1 < \delta$ tengsizlikni kushib, $\delta < 1$ ekanini inobatga olsak, $-1 < -\delta < x_2 + \tau < \ell + 1$ kelib chiqadi. Demak, $x_1 + \tau, x_2 + \tau \in [-1, 1 + \ell]$ ekan. (4) ga ko'ra

$$|f(x_1 + \tau) - f(x_2 + \tau)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikka asosan

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &\leq |f(x_2) - f(x_2 + \tau)| + |f(x_2 + \tau) - f(x_1 + \tau)| + \\ &+ |f(x_1 + \tau) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

o'rinli, ya'ni $f(x)$ funksiya tekis uzluksiz funksiya bo'ladi. **Isbotlandi.**

2-§. Boxner teoremasi va uning natijalari

Ta'rif. R^1 da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun ushbu $\{f(x+h)\}$, $h \in R^1$ to'plam R^1 da tekis yaqinlashish topologiyasi bo'yicha kompakt bo'lsa, ya'ni har bir $\{f(x+h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikdan R^1 da tekis yaqinlashuvchi $\{f(x+h_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiyaga *normal funksiya* deyiladi.

Lemma 1. Normal funksiya chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Chegaralanmagan deb faraz qilaylik. U holda, shunday x_n ketma-ketlik topiladiki, bunda $f(x_n) \rightarrow \infty$, $(n \rightarrow \infty)$ bo'ladi. Bunga ko'ra ushbu $\{f(x+x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning ixtiyoriy qisman ketma-ketligi $x=0$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu esa ta'rifga zid. **Isbotlandi.**

Teorema 1. (Boxner). $f(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'lishi uchun u normal bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremadan quyidagi teoremlar kelib chiqadi.

Teorema 2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ lar tekis deyarli davriy funksiyalar bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ va $f(x) \cdot g(x)$ lar ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ va $g(x)$ lar normal bo'ladi. Bunga ko'ra $\{f(x+h_n)\}$ $\{f(x+h_{n_k})\}$ tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. $\{g(x+h_{n_k})\}$ ketma-ketlikdan ham tekis yaqinlashuvchi $\{g(x+h_{n_{k_m}})\}_{m=1}^{\infty}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Demak, $\{f(x+h_{n_{k_m}})\}$ va $\{g(x+h_{n_{k_m}})\}$ lar tekis yaqinlashuvchi ketma-ketliklardir. Bularga ko'ra $\{f(x+h_n)+g(x+h_n)\}$ va $\{f(x+h_n) \cdot g(x+h_n)\}$ dan tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin, ya'ni $f(x)+g(x)$ va $f(x) \cdot g(x)$ funksiyalar normal funksiyalar ekan. Boxner teoremasiga ko'ra bular tekis deyarli davriy funksiyalar bo'ladi. **Teorema isbotlandi.**

Teorema 3. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tekis deyarli davriy funksiyalar ketma-ketligi biror $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, $f(x)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Tekis yaqinlashish ta'rifiga ko'ra, shunday $N = N(\varepsilon) > 0$ nomer topiladiki, bunda $\forall n \geq N$ uchun

$$\sup_{R^1} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

bo'ladi. τ son $f_N(x)$ uchun $\frac{\varepsilon}{3}$ -davr bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} |f(x+\tau) - f(x)| &\leq |f(x+\tau) - f_N(x+\tau)| + |f_N(x+\tau) - f_N(x)| + \\ &\quad + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi. **Teorema isbotlandi.**

Natija. Quyidagi yig'indini ko'rib chiqamiz:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x}, \lambda_k \in R^1, a_k \in C.$$

Ushbu $a_k \cdot e^{i\lambda_k x}$ funksiya davriy bo'lgani uchun tekis deyarli davriy bo'ladi. Tekis deyarli davriy funksiyalarning yig'indisi $S_n(x)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Agar $S_n(x)$ ketma-ketlik biror $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, $f(x)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Teorema 2. Agar $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, $f'(x)$ tekis uzluksiz bo'lsa, $f'(x)$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Tekis uzluksizlik ta'rifiga bo'ra shunday $h = h(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, bunda

$$|x_1 - x_2| < h \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Quyidagi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f'(t) dt = \left\{ \begin{matrix} t = s + x \\ dt = ds \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h} \int_0^h f'(s+x) ds$$

ifodaning chap tomoni tekis deyarli davriy bo'lgani uchun uning o'ng tomoni ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Quyidagi baholashni ko'rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f'(s+h) ds - f'(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_0^h f'(s+x) ds - \frac{1}{h} \int_0^h f'(x) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h |f'(s+x) - f'(x)| ds < \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu baholashga asosan

$$\frac{1}{h} \int_0^h f'(s+x) ds \xrightarrow{\text{tekis}} f'(x), \quad (h \rightarrow 0)$$

bo'ladi. Oldingi teoremaga ko'ra $f'(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

3-§. Tekis deyarli davriy funksiyaning boshlang'ichi haqidagi teorema

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, ushbu

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$$

funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda u ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ haqiqiy deb xisoblaymiz. $g = \inf_R \{F(x)\}$ va $G = \sup_R \{F(x)\}$

bo'lsin. Infimum va supremum ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $x_1, x_2 \in R$ sonlar mavjudki, bunda

$$F(x_1) < g + \frac{\varepsilon}{3}, \quad F(x_2) > G - \frac{\varepsilon}{3}$$

bo'ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\xi = \min(x_1, x_2), \quad d = |x_1 - x_2|.$$

Agar $x_1 \geq x_2$ bo'lsa, $\xi = x_2$, $d = x_1 - x_2$, $\xi + d = x_1$ bo'ladi, agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, $\xi = x_1$, $d = x_2 - x_1$, $\xi + d = x_2$ bo'ladi.

Uzunligi $\ell_0 = \ell\left(\frac{\varepsilon}{6d}\right) > 0$ bo'lgan har bir intervalda $f(x)$ funksiyaning

kamida bitta $\frac{\varepsilon}{6d}$ -davri $\tau \in (\beta, \beta + \ell_0)$ bor. $L_0 = \ell_0 + d$ bo'lsin.

$z_1, z_2 \in (\alpha, \alpha + L_0)$ sonlar topiladiki, bunda

$$F(z_1) < g + \frac{\varepsilon}{2}, \quad F(z_2) > G - \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

bo'ladi. Bu fikrlarni quyidagicha isbotlaymiz.

Agar $\tau \in (\alpha - \xi, \alpha - \xi + \ell_0)$ bo'lsa, u holda $\alpha - \xi < \tau < \alpha - \xi + \ell_0$, $\alpha < \tau + \xi < \alpha + \ell_0$, $\tau + \xi \in (\alpha, \alpha + \ell_0)$ bo'ladi. $z_1 = x_1 + \tau$ va $z_2 = x_2 + \tau$ bo'lsin. Agar $x_1 > x_2$ bo'lsa, $\xi = x_2$ bo'lgani uchun

$$z_2 = \tau + x_2 = \tau + \xi \in (\alpha, \alpha + \ell_0) \subset (\alpha, \alpha + L_0)$$

bo'ladi. $\alpha < x_2 + \tau < x_1 + \tau$ va $x_2 + \tau < \alpha + \ell_0$ ekanligidan $z_1, z_2 \in (\alpha, \alpha + L_0)$ kelib chiqadi. Bunga ko'ra

$$\begin{aligned} F(z_2) - F(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f(t)dt = F(x_2) - F(x_1) + \int_{z_1}^{z_2} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = \\ &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} [f(s + \tau) - f(s)]ds \geq (G - \frac{\varepsilon}{6}) - (g + \frac{\varepsilon}{6}) - \frac{\varepsilon}{6} = G - g - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Agar $F(z_2) \leq G - \frac{\varepsilon}{3}$ deb faraz qilsak, u holda

$$G - \frac{\varepsilon}{2} - F(z_1) \geq F(z_2) - F(z_1) > G - g - \frac{\varepsilon}{2},$$

ya'ni $F(z_1) < g$ ziddiyat kelib chiqadi. Agar $F(z_1) \geq g + \frac{\varepsilon}{2}$ deb faraz qilsak,

$$F(z_2) - (g + \frac{\varepsilon}{2}) > G - g - \frac{\varepsilon}{2},$$

ya'ni $F(z_2) > G$ ziddiyat kelib chiqadi. Demak, (1) isbotlandi.

τ son $f(x)$ funksiya uchun $\frac{\varepsilon}{2L_0}$ -davr bo'lsin. Quyidagilarni isbotlaymiz:

$$F(x + \tau) - F(x) > -\varepsilon, \quad (2)$$

$$F(x + \tau) - F(x) < \varepsilon. \quad (3)$$

Avvalo (2) tengsizlikni isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} F(x + \tau) - F(x) &= F(z_1 + \tau) - F(z_1) + \int_x^{x+\tau} f(s)ds - \int_{z_1}^{z_1+\tau} f(s)ds = \\ &= F(z_1 + \tau) - F(z_1) + \int_x^{z_1} f(s)ds + \int_{z_1}^{x+\tau} f(s)ds - \int_{z_1}^{x+\tau} f(s)ds - \int_{x+\tau}^{z_1+\tau} f(s)ds \geq \\ &\geq g - (g + \frac{\varepsilon}{2}) - \left| \int_x^{z_1} [f(x+s) - f(s)]ds \right| > -\frac{\varepsilon}{2} - L_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2L_0} = -\varepsilon. \end{aligned}$$

Endi (3) tengsizlikni isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} F(x + \tau) - F(x) &= F(z_2 + \tau) - F(z_2) + \int_x^{z_2} f(s)ds - \int_{x+\tau}^{z_2+\tau} f(s)ds < \\ &< G - (G - \frac{\varepsilon}{2}) + \int_x^{z_2} |f(s + \tau) - f(s)|ds < \frac{\varepsilon}{2} + L_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2L_0} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) va (3) ga asosan

$$|F(x + \tau) - F(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Bu esa $F(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya ekanini bildiradi.

Teorema isbotlandi.

4-§. Tekis deyarli davriy funksiyaning o'rta qiymati haqidagi teorema

Teorema 1. Agar $f(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, quyidagi limit mavjud bo'ladi

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx. \quad (1)$$

Isbot. 1) $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. $A = \sup_{x \in R} |f(x)|$ bo'lsin. $\ell = \ell(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ sonni tekis deyarli davriy funksiya ta'rifidan olamiz. Ushbu $\tau \in (\alpha, \alpha + \ell)$ biror $\frac{\varepsilon}{2}$ -davr bo'lsin. Quyidagi baholashni ko'rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx \right| = \\ & = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{T} \left(\int_{\alpha}^{\tau} f(x) dx + \int_{\tau}^{\tau+T} f(x) dx + \int_{\tau+T}^{\alpha+T} f(x) dx \right) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x) - f(x+\tau)| dx + \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\tau} |f(x)| dx + \frac{1}{T} \left| \int_{\tau+T}^{\alpha+T} f(x) dx \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{T} A(|\tau - \alpha| + |\alpha - \tau|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T}. \end{aligned} \quad (2)$$

2) (2) baholashda $\alpha = (\nu - 1)T$ desak, quyidagi kelib chiqdi:

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{T} \int_{(\nu-1)T}^{\nu T} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T}, \quad (\nu = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Bunga ko'ra,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(x) dx \right| = \\ & = \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{T} \int_{(\nu-1)T}^{\nu T} f(x) dx \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T}. \end{aligned} \quad (4)$$

3) $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1}$, $m_1, m_2 \in Z$ bo'lsin. Bu xolda $m_1 T_1 = m_2 T_2$

bo'ladi. Bunga asosan quyidagi baholashga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x) dx - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f(x) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x) dx - \frac{1}{m_1 T_1} \int_0^{m_1 T_1} f(x) dx \right| + \left| \frac{1}{m_2 T_2} \int_0^{m_2 T_2} f(x) dx - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f(x) dx \right| < \\ & < \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T_1} \right) + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T_2} \right) = \varepsilon + 2A\ell \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Olingan baholashni ushbu $T_2 = \frac{m_1}{m_2} T_1 = r T_1$ tenglikni xisobga olib, quyidagi tarzda yozamiz:

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x) dx - \frac{1}{r T_1} \int_0^{r T_1} f(x) dx \right| - 2A\ell \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{r T_1} \right) < \varepsilon. \quad (6)$$

(6) tengsizlikning chap tomoni uzluksiz bo'lganligi uchun (6) tengsizlik ixtiyoriy haqiqiy $r > 0$ uchun ham o'rinli bo'ladi.

Demak, (5) tengsizlik $\forall T_1 > 0, T_2 > 0$ sonlar uchun o'rinli ekan. Agar $T_1, T_2 > \frac{4A\ell}{\varepsilon}$ deb olsak,

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x) dx - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f(x) dx \right| < 2\varepsilon \quad (7)$$

kelib chiqadi. Agar

$$g(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

belgilash kiritsak, (7) ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $T_0 = \frac{4A\ell}{\varepsilon} > 0$ son topilib,

$\forall T_1, T_2 > T_0(\varepsilon)$ sonlar uchun $|g(T_1) - g(T_2)| < 2\varepsilon$ bo'lar ekan. Demak, Koshi kriteriyasiga ko'ra $\lim_{T \rightarrow \infty} g(T)$ mavjud bo'ladi. **Teorema isbotlandi.**

Natija. (4) tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - M\{f(x)\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T} \quad (8)$$

Izox. Agar $f(x)$ uzluksiz davriy funksiya bo'lib, $p > 0$ uning davri bo'lsa, u xolda

$$\begin{aligned} M\{f(x)\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{np + \alpha} \int_0^{np + \alpha} f(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np + \alpha} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \int_{(\nu-1)p}^{\nu p} f(x) dx + \int_{np}^{np + \alpha} f(x) dx \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np + \alpha} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \int_0^p f((\nu-1)p + t) dt + \int_0^{\alpha} f(np + t) dt \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np + \alpha} \left\{ n \int_0^p f(t) dt + \int_0^{\alpha} f(t) dt \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p + \frac{\alpha}{n}} \int_0^p f(t) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np + \alpha} \int_0^{\alpha} f(t) dt = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt. \end{aligned}$$

Demak,

$$M\{f(x)\} = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx.$$

Teorema 2. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, quyidagi xossalari o'rinli bo'ladi:

- 1) $M\{cf(x)\} = cM\{f(x)\}$,
- 2) $M\{f(x) + g(x)\} = M\{f(x)\} + M\{g(x)\}$,
- 3) $M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}$, $a \in R^1$,
- 4) $f_n(x)$, $n = \overline{1, \infty}$ tekis deyarli davriy funksiyalar bo'lib,
 $f_n(x) \xrightarrow{mekuc} f(x)$, $(n \rightarrow \infty)$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{f_n(x)\} = M\{f(x)\}$$

bo'ladi.

Isbot. Dastlabki uchta xossa bevosita limit va integralning xossasidan darxol kelib chiqadi. 4-xossani isbotlaymiz.

$\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. U holda shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ nomer topilib, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $(n \geq n_0)$ buladi. $n \geq n_0$ bo'lsin, u holda

$$\begin{aligned} |M\{f_n(x)\} - M\{f(x)\}| &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T f_n(x) dx - \int_0^T f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{f_n(x)\} = M\{f(x)\}.$$

Misol. $f(x) = \sin 2x + 7 \cos \sqrt{3}x - 5 \sin \sqrt{2}x$ funksiya berilgan. $M\{f(x)\}$ ni topamiz. $f(x)$ funksiyaning o'rtachasini topish uchun har birining o'rtachasini topib qo'yish lozim:

$$M\{f(x)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2x dx + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} 7 \cos \sqrt{3}x dx - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} 5 \sin \sqrt{2}x dx = 0.$$

Teorema 3. Agar $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsa, u holda quyidagi limit a parametrga nisbatan tekis ravishda mavjud bo'ladi:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx = M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}. \quad (9)$$

Isbot. $M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}$ ekanini bilamiz. $\forall \varepsilon > 0$ son uchun a parametrga bog'lik bo'lmagan shunday $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ son topilib, $T > T_0$ uchun ushbu

$$\left| \frac{1}{T} \int f(x+a) dx - M\{f(x+a)\} \right| < \varepsilon$$

Tengsizlikni isbotlash kerak. (8) tengsizlikka ko'ra

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+a)dx - M\{f(x+a)\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A\ell}{T}.$$

Bu yerda A va ℓ lar a parametriga bog'liq emas. $T_0 = \frac{4A\ell}{\varepsilon}$ deb olsak, $\forall T > T_0$ uchun

$$\left| \frac{1}{T} \int f(x+a)dx - M\{f(x+a)\} \right| \leq \varepsilon$$

bo'ladi. **Teorema isbotlandi.**

Natija. (9) tenglikda $a = -T$ desak,

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(x)dx, \quad M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx \quad (10)$$

bo'ladi. Bularni qo'shib ikkiga bo'lsak, ushbu

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x)dx \quad (11)$$

Formula kelib chiqadi.

Natija. $f(x)$ va $g(x)$ tekis deyarli davriy funksiyalar bo'lsin. U holda $f(x) \cdot \overline{g(x)}$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'lgani uchun quyidagi limitlar mavjud bo'ladi:

$$M\{f(x) \cdot \overline{g(x)}\} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \cdot g(x)dx.$$

Teorema 4. Tekis deyarli davriy funksiyalar fazosida ushbu $(f, g) = M\{f(x) \cdot \overline{g(x)}\}$ skalyar ko'paytmani kiritish mumkin.

Bu teoremaning isbotlash uchun limit va integral xossalarini ishlatib, skalyar ko'paytma aksiomalarini tekshirib ko'rish kerak.

Natija. Tekis deyarli davriy funksiyalar fazosida ushbu $\|f\| = \sqrt{M\{|f(x)|^2\}}$ normani kiritish mumkin.

Natija. $f(t)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsin. U holda x fiksirlanganda $f(x+t)$ ham deyarli davriy funksiya bo'ladi. Bunga ko'ra $F_x(t) = f(x+t) \cdot \overline{f(t)}$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi, demak ushbu

$$g(x) = M_t\{f(x+t) \overline{f(t)}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \overline{f(t)}dt \quad (12)$$

qiymat mavjud. $g(x)$ funksiyaga $f(x)$ funksiyaning *uramasi* deyiladi.

Teorema 5. (12) limitdagi yaqinlashish x ga nisbatan tekis yaqinlashishdir.

Isbot. $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lib, $A = \sup_t |f(t)|$ bo'lsin. $\ell = \ell\left(\frac{\varepsilon}{2A}\right)$ ni

tekis deyarli davriylik ta'rifidan olamiz. τ orqali $f(t)$ funksiyaning biror $\frac{\varepsilon}{2A}$ -davrini belgilaylik. U holda

$$\begin{aligned} |F_x(t+\tau) - F_x(t)| &= |f(x+t+\tau) \cdot \overline{f(t+\tau)} - f(x+t) \cdot \overline{f(t)}| \leq \\ &\leq |f(x+t+\tau)| \cdot |f(t+\tau) - f(t)| + |f(t)| \cdot |f(x+t+\tau) - f(x+t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi. Bunga ko'ra τ son $F_x(t)$ uchun ε -davr bo'ladi va $\ell_x = \ell$ bo'ladi. Quyidagi baholash o'rinli:

$$A_x = \sup_t |f(x+t) \cdot \overline{f(t)}| \leq \sup_t |f(x+t)| \cdot \sup_t |f(t)| = A^2.$$

(8) tengsizlikda $f(t)$ o'rnida $f(x+t) \cdot \overline{f(t)}$ ni olsak, quyidagi hosil bo'ldi:

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \cdot \overline{f(t)} dt - M\{f(x+t) \cdot \overline{f(t)}\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2A_x \ell_x}{T}.$$

Agar T ni ushbu

$$\frac{2A_x \cdot \ell_x}{T} \leq \frac{2A^2 \ell}{T} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad T > \frac{4A^2 \ell}{\varepsilon} = T_0$$

shartni qanoatlantiruvchi qilib tanlasak, T_0 son x ga bog'liq emas va noldan katta bo'ladi. Demak, $\forall T > T_0$ uchun

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \cdot \overline{f(t)} dt - M\{f(x+t) \cdot \overline{f(t)}\} \right| < \varepsilon$$

bo'ladi, ya'ni (12) limitdagi yaqinlashish tekis yaqinlashishdir.

Teorema isbotlandi.

5-§. Tekis deyarli davriy funksiyalar uchun Fure qatori

$f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lsin. Ushbu $e^{-i\lambda x}$, ($\lambda \in R^1$) funksiya davriy bo'lgani uchun tekis deyarli davriy bo'ladi. Bunga ko'ra $f(x) \cdot e^{-i\lambda x}$ ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Demak, ushbu

$$a(\lambda) = M\{f(x) \cdot e^{-i\lambda x}\}$$

o'rta qiymat mavjud.

Teorema. $G = \{\lambda: a(\lambda) \neq 0\}$ ushbu to'plam yoki cheklita yoki sanoqlita bo'ladi.

Isbot. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo'lsin. U holda

$$M\{e^{i\lambda_1 x} \cdot e^{-i\lambda_2 x}\} = M\{e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)x}\} = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{|\lambda_1 - \lambda_2|}} e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = 0$$

bo'ladi. Demak,

$$M\{e^{i\lambda_1 x} \cdot e^{-i\lambda_2 x}\} = \begin{cases} 0, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 1, & \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

ya'ni $\{e^{i\lambda x}\}$ funksiyalar sistemasi ortonormallangan ekan.

Fure koeffitsientlarining minimallik xossasi va Bessel tengsizligini isbotlab olamiz. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ixtiyoriy xaqiqiy sonlar $c_1, c_2, \dots, c_n$ ixtiyoriy kompleks sonlar bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} M\left\{\left|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x}\right|^2\right\} &= M\left\{\left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x}\right) \cdot \left(\overline{f(x) - \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x}}\right)\right\} = \\ &= M\left\{\left|f(x)\right|^2 - \sum_{p=1}^n \bar{c}_p f(x) \cdot e^{-i\lambda_p x} - \sum_{k=1}^n \bar{c}_k \overline{f(x) e^{-i\lambda_k x}} + \sum_{k,p=1}^n c_k \bar{c}_p e^{i\lambda_k x} e^{-i\lambda_p x}\right\} = \\ &= M\left\{\left|f(x)\right|^2\right\} - \sum_{p=1}^n \bar{c}_p a(\lambda_p) - \sum_{k=1}^n c_k \overline{a(\lambda_k)} + \sum_{k,p=1}^n c_k \bar{c}_p M\{e^{i\lambda_k x} \cdot e^{-i\lambda_p x}\} = \\ &= M\left\{\left|f(x)\right|^2\right\} - \sum_{k=1}^n \bar{c}_k a(\lambda_k) - \sum_{k=1}^n c_k \overline{a(\lambda_k)} + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \\ &= M\left\{\left|f(x)\right|^2\right\} + \sum_{p=1}^n |c_k - a(\lambda_k)|^2 - \sum_{k=1}^n |a(\lambda_k)|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Agar $c_k = a(\lambda_k)$ deb olsak, (1) tenglikning chap tomoni eng kichik qiymatga erishadi. Bunga ko'ra

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{k=1}^n a(\lambda_k) e^{-i\lambda_k x}\right|^2\right\} = M\left\{|f(x)|^2\right\} - \sum_{k=1}^n |a(\lambda_k)|^2 \quad (2)$$

kelib chiqadi. Chap tomon noldan katta yoki teng bo'lgani uchun ushbu

$$\sum_{k=1}^n |a(\lambda_k)|^2 \leq M\left\{|f(x)|^2\right\} \quad (3)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikka Bessel tengsizligi deyiladi.

$|a(\lambda)| \geq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi λ sonlar cheklita, aks holda (3) dan ziddiyat kelib chiqadi. Bu sonlarni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}$ orqali belgilaymiz.

$\frac{1}{2} \leq |a(\lambda)| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar ham cheklita, ularni

$\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \dots, \lambda_{n_2}$ bilan belgilaymiz. $\frac{1}{3} \leq |a(\lambda)| < \frac{1}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi

sonlar ham cheklita, ularni $\lambda_{n_2+1}, \lambda_{n_2+2}, \dots, \lambda_{n_3}$ bilan belgilaymiz. Bu jarayonni davom qildirib, $|a(\lambda)| \neq 0$ bo'ladigan barcha λ larni olamiz. Demak, G to'plam, chekli to'plamlarining sanoqlita birlashmasidan iborat. Bunga ko'ra G to'plamning o'zi sanoqlita bo'ladi. **Teorema isbotlandi.**

Ta'rif. $a(\lambda) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha sonlarni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ orqali belgilaymiz. Bu sonlarga $f(x)$ funksiya uchun Fure ko'rsatkichlari deyiladi.

Demak, xar bir tekis deyarli davriy $f(x)$ funksiya bitta Fure qatori mos keladi:

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} = \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

6-§. Fure qatori ustida formal amallar

Teorema 1. $f(x)$ va $g(x)$ tekis deyarli davriy funksiyalar bo'lib, ularga quyidagi Fure qatorlari mos keluvchi bo'lsin:

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} = \sum_\lambda a(\lambda) e^{i\lambda x},$$

$$g(x) \sim \sum_n B_n e^{i\lambda_n x} = \sum_\lambda b(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

U holda quyidagilar o'rinli:

- 1) $k \cdot f(x) \sim \sum_n k \cdot A_n e^{i\lambda_n x},$
- 2) $e^{i\mu x} \cdot f(x) \sim \sum_n A_n e^{i(\lambda_n + \mu)x},$ bu yerda $\mu \in R^1,$
- 3) $f(x + \alpha) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \cdot e^{i\lambda_n \alpha},$ bu yerda $\alpha \in R^1,$
- 4) $\overline{f(x)} \sim \sum_n \overline{A_n} e^{-i\lambda_n x},$
- 5) $f(x) + g(x) \sim \sum_\lambda (a(\lambda) + b(\lambda)) e^{i\lambda x},$

Isbot. Keltirilgan fikrlarni isbotlash uchun chap tomonda turgan tekis deyarli davriy funksiyalarga mos keluvchi Fure ko'rsatkichlarini va Fure koeffitsientlarini topish lozim.

- 1) $M\{k \cdot f(x) \cdot e^{-i\lambda x}\} = k \cdot M\{f(x) \cdot e^{-i\lambda x}\} = k \cdot a(\lambda).$
- 2) $M\{e^{i\mu x} f(x) \cdot e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x) \cdot e^{-i(\lambda - \mu)x}\} = a(\lambda - \mu), \lambda - \mu = \lambda_n,$
 $\lambda = \lambda_n + \mu,$ bo'lgani uchun

$$e^{i\mu x} \cdot f(x) \sim \sum_\lambda a(\lambda - \mu) \cdot e^{i\lambda x} = \sum_n a(\lambda_n) \cdot e^{i(\lambda_n + \mu)x} = \sum_n A_n \cdot e^{i(\lambda_n + \mu)x}.$$

$$3) M\{f(x + \alpha) e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x + \alpha) e^{-i\lambda(x + \alpha)} \cdot e^{i\lambda \alpha}\} =$$

$$= e^{i\lambda \alpha} M\{f(x + \alpha) e^{-i\lambda(x + \alpha)}\} = e^{i\lambda \alpha} M\{f(x) e^{-i\lambda(x)}\} = e^{i\lambda \alpha} \cdot a(\lambda).$$

$$4) M\{\overline{f(x)} e^{-i\mu x}\} = \overline{M\{f(x) e^{i\mu x}\}} = \overline{a(-\mu)}, \quad -\mu = \lambda_n, \quad \mu = -\lambda_n \text{ bo'lgani}$$

uchun

$$\overline{f(x)} \sim \sum_\mu d(\mu) e^{i\mu x} = \sum_n \overline{a(\lambda_n)} e^{-i\lambda_n x}.$$

$$5) M\{(f(x) + g(x)) e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} + M\{g(x) e^{-i\lambda x}\} = a(\lambda) + b(\lambda)$$

bo'lgani uchun

$$f(x) + g(x) \sim \sum_\lambda (a(\lambda) + b(\lambda)) e^{i\lambda x}.$$

Teorema isbotlandi.

Teorema 2. Quyidagi tekis deyarli davriy funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin:

$$f_m(x) \sim \sum_n A_n^{(m)} \cdot e^{i\lambda_n^{(m)} x}, \quad m = \overline{1, \infty}.$$

Agar $f_m(x)$ ketma-ketlik $m \rightarrow \infty$ da biror $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $M\{f_m(x)e^{-i\lambda x}\}$ ketma-ketlik $m \rightarrow \infty$ da $\lambda \in R^1$ ga nisbatan $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ tekis yaqinlashadi. Boshqacha qilib aytganda, Fure koeffitsienti Fure koeffitsientiga intiladi, Fure ko'rsatkichi Fure ko'rsatkichiga intiladi.

Isbot. Bu fikr quyidagi baholashdan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} |M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} - M\{f_m(x)e^{-i\lambda x}\}| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^T (f(x) - f_m(x))e^{-i\lambda x} dx \right\} \right| \leq \\ &\leq M\{|f(x) - f_m(x)|\} \leq \sup_x |f(x) - f_m(x)| \rightarrow 0, \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

Teorema 3. $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$ bo'lib, $f'(x)$ mavjud va tekis uzluksiz bo'lsin. U holda

$$f'(x) \sim \sum_n i\lambda_n A_n e^{i\lambda_n x}$$

bo'ladi.

Isbot. Teoremaning sharti bajarilganda $f'(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lishi bizga ma'lum. Bunga ko'ra

$$\begin{aligned} M\{f'(x) \cdot e^{-i\lambda x}\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f'(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ f(x)e^{-i\lambda x} \Big|_0^T + i\lambda \int_0^T f(x)e^{-i\lambda x} dx \right\} = \\ &= i\lambda M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = i\lambda a(\lambda). \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

Teorema 4. $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$ bo'lib, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ chegaralangan funksiya bo'lsa, u holda ushbu

$$F(x) \sim C + \sum_n \frac{A_n}{i\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$$

munosabat o'rinli. Isboti olindingi teoremaning isboti kabi.

Teorema 5. $g(x) = M_t \{f(x+t) \cdot \overline{f(t)}\}$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy haqiqiy λ son uchun ushbu

$$M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} = |M_t \{f(t)e^{-i\lambda t}\}|^2 \quad (1)$$

tenglikni o'rinli bo'ladi.

Isbot. Bu tenglikni avvalo $\lambda = 0$ bo'lgan holda isbotlaymiz. $g(x)$ urama funksiyaning aniqlaydigan o'rtacha qiymat x ga nisbatan tekis ravishda mavjud bo'lgani uchun $\forall \varepsilon > 0$ son uchun x ga bog'lik bo'lmagan shunday $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ son topilib barcha x larda ushbu

$$\left| M_t \{f(x+t) \overline{f(t)}\} - \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(x+t) \overline{f(t)} dt \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunga ko'ra

$$\begin{aligned} & \left| M_x \{g(x)\} - M_x \left\{ \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(x+t) \overline{f(t)} dt \right\} \right| \leq \\ & \leq M_x \left\{ \left| g(x) - \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(x+t) \overline{f(t)} dt \right| \right\} < M_x \{\varepsilon\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon dx = \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Ushbu

$$M_x \left\{ \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(x+t) \overline{f(t)} dt \right\} = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \overline{f(t)} dt \cdot M_x \{f(x+t)\} \quad (3)$$

tenglikni isbotlab olamiz. b ixtiyoriy son bo'lsin. U holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b \left\{ \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(x+t) \overline{f(t)} dt \right\} dx = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \left\{ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b f(x+t) dx \right\} \overline{f(t)} dt.$$

Bu tenglikda $b \rightarrow \infty$ limitga o'tsak, natijada (3) hosil bo'ladi. (2) va (3) dan ushbu

$$\left| M_x \{g(x)\} - \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \overline{f(t)} dt \cdot M_x \{f(x)\} \right| < \varepsilon \quad (4)$$

baholash kelib chiqadi. Bu yerda $\varepsilon \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, quyidagi tenglik

$$M \{g(x)\} = |M_t \{f(t)\}|^2 \quad (5)$$

hosil bo'ladi. Demak, (1) tenglik $\lambda = 0$ bo'lgan holda isbotlanadi.

$\lambda \neq 0$ bo'lsa, $f_1(t) = f(t)e^{-i\lambda t}$ deymiz. Isbot qilganimizga ko'ra ushbu

$$M \{g_1(x)\} = |M_t \{f_1(t)\}|^2$$

tenglik o'rinli. Bu yerda ushbu

$$g_1(x) = M \{f_1(x+t) \overline{f_1(t)}\} = M_t \{f(x+t) e^{-i\lambda(x+t)} \overline{f(t)} e^{i\lambda t}\} = e^{-i\lambda x} g(x)$$

tenglikni hisobga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M \{g(x) e^{-i\lambda x}\} = |M_t \{f(t) e^{-i\lambda t}\}|^2.$$

Teorema isbotlandi.

Natija. Agar $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, unga quyidagi

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$$

Fure qatori mos keluvchi bo'lsa, u holda $g(x) = M_t \{f(x+t) \cdot \overline{f(t)}\}$ urama funksiya quyidagi Fure qatori mos keladi:

$$g(x) \sim \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Teorema 6. Agar ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

trigonometrik qator $(-\infty, \infty)$ oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi $S(x)$ uchun bu qator Fure qatori bo'ladi.

Isbot. $S(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo'lishini bilamiz. Berilgan qator tekis yaqinlashgani uchun «yig'indi belgisi» va «o'rtacha qiymat belgisi» o'rinlarini almashtirish mumkin:

$$M\{S(x)e^{-i\lambda x}\} = M\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}\right) \cdot e^{-i\lambda x}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M\{e^{i\lambda_n x} \cdot e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} a_k, & \lambda = \lambda_k \\ 0, & \lambda \notin \{\lambda_n\}. \end{cases}$$

Teorema isbotlandi.

Natija. Fure ko'rsatkichlaridan tuzilgan sanoqli to'plamning tabiati turli xil bo'lishi mumkin. Masalan, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ ixtiyoriy sanoqli to'plam bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

bo'lsa, ushbu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Chunki, bu yerdagi qator Veyershtas alomatiga ko'ra tekis yaqinlashadi hamda uning har bir hadi tekis deyarli davriy funksiya.

Izox. Shunday tekis deyarli davriy funksiyalar borki, ularga mos keluvchi Fure qatorining ozod hadi yo'k, ammo boshlang'ich funksiyasi chegaralanmagan. Masalan, quyidagi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{i\frac{1}{n^2}x} \quad (6)$$

funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Agar ushbu

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

funksiya chegaralangan deb faraz qilsak, u holda $F(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Teorema 4 ga ko'ra bu funksiyaga quyidagi Fure qatori mos keladi:

$$F(x) \sim C + \sum_{n=1}^{\infty} -ie^{i\frac{1}{n^2}x}.$$

Ziddiyat, Bessel tengsizligiga ko'ra Fure koeffitsientlari nolga intilishi lozim.

7-§. Tekis deyarli davriy funksiyalar haqidagi asosiy teoremlarning o‘zaro ekvivalentligi

Teorema 1. (Parseval tengligi). Agar $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiyaga ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$$

Fure qatori mos keluvchi bo‘lsa, u holda ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{f(x)|^2\} \quad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Teorema 2. (Yagonalik teoremasi). Agar $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiyaga ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$$

Fure qatori mos keluvchi bo‘lib, $A_n = 0$, $n = 1, \infty$ bo‘lsa, $f(x) \equiv 0$ bo‘ladi.

Teorema 3. (Fure qatorlarini ko‘paytirish). $f(x)$ va $g(x)$ tekis deyarli davriy funksiyalar bo‘lib, ularga quyidagi Fure qatorlari mos keluvchi bo‘lsin:

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} = \sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad g(x) \sim \sum_n B_n e^{i\lambda_n x} = \sum_{\lambda} b(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

U holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$f(x)g(x) \sim \sum_n C_n e^{i\nu_n x}, \text{ bu yerda } C_n = \sum_{\lambda_p + \mu_q = \nu_n} A_p B_q.$$

Boshqacha aytganda

$$M\{f(x)g(x)e^{-i\lambda x}\} = \sum_{\lambda_p + \mu_q = \lambda} A_p B_q.$$

Teorema 2 dan teorema 1 kelib chiqishini isbotlaymiz.

Ushbu $g(x) = M\{f(x+t)\overline{f(t)}\}$ urama funksiyaga quyidagi Fure qatori mos kelishi oldingi paragrafda isbotlangan edi:

$$g(x) \sim \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}. \quad (2)$$

Bessel tengsizligiga ko‘ra

$$\sum_n |A_n|^2 \leq M\{f(x)|^2\}$$

bo‘lgani uchun Veyershtass alomatiga ko‘ra (2) qator tekis yaqinlashadi. Uning yig‘indisi $S(x)$ bo‘lsin. U holda

$$S(x) \sim \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x} \quad (3)$$

bo‘ladi. (2) va (3) ga ko‘ra

$$g(x) - S(x) \sim \sum_n 0 \cdot e^{i\lambda_n x}$$

bo‘ladi. Teorema 2 ga ko‘ra $g(x) \equiv S(x)$ bo‘ladi. Demak, ushbu

$$M\{f(t+x)\overline{f(t)}\} = \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}$$

tenglik o‘rinli bo‘lar ekan. Bu tenglikda $x=0$ desak, (1) Parseval tengligi kelib chiqadi.

Teorema 1 dan teorema 2 kelib chiqishini isbotlaymiz.

$A_n = 0$, $n = \overline{1, \infty}$ bo‘lgani uchun Parseval tengligiga ko‘ra

$$M\{f(x)^2\} = 0 \quad (4)$$

bo‘ladi. Bundan $f(x) \equiv 0$ tenglikni keltirib chiqarish maqsadida quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma 1. $\varphi(x) \geq 0$ tekis deyarli davriy funksiya bo‘lib, biror x_0 nuqtada $\varphi(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda $M\{\varphi(x)\} > 0$ bo‘ladi.

Isbot. $\varphi(x_0) = a > 0$ bo‘lsin. $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz ekaniga ko‘ra $\varepsilon = \frac{a}{3}$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjudki, $|x - x_0| < \delta$ ekanidan

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{a}{3}$$

kelib chiqadi.

$\ell = \ell(\varepsilon) > 0$ deb tekis deyarli davriy funksiya ta’rifidagi kesma uzunligini olamiz. Uzunligi $L = \ell + 2\delta$ bo‘lgan ixtiyoriy $(\alpha, \alpha + \ell + 2\delta)$ intervalda uzunligi 2δ bo‘lgan interval topilib, bu intervalda $\varphi(x) > \frac{a}{3}$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. $\tau \in (\alpha + \delta - x_0, \alpha + \ell + \delta - x_0)$ son $\varphi(x)$ funksiya uchun ε -davr bo‘lsin. U holda

$$\begin{aligned} \alpha + \delta - x_0 < \tau < \alpha + \ell + \delta - x_0, \\ \alpha + \delta < x_0 + \tau < \alpha + \delta + \ell \end{aligned} \quad (5)$$

bo‘ladi. Agar $|x - x_0| \leq \delta$ bo‘lsa, $-\delta \leq x - x_0 \leq \delta$ bo‘ladi. Buni (5) qo‘sh tengsizlikka qo‘shsak, ushbu

$$\alpha < x + \tau < \alpha + 2\delta + \ell$$

qo‘sh tengsizlik kelib chiqadi. Quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\varphi(x + \tau) = \varphi(x_0) + [\varphi(x) - \varphi(x_0)] + [\varphi(x + \tau) - \varphi(x)] > a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}.$$

Bunga ko‘ra ushbu

$$\frac{1}{2nL} \int_{-nL}^{nL} \varphi(x) dx = \frac{1}{2nL} \sum_{\nu=-(n-1)}^n \int_{(\nu-1)L}^{\nu L} \varphi(x) dx > \frac{1}{2nL} \cdot 2n \cdot 2\delta \cdot \frac{a}{3} = \frac{2a\delta}{3L}$$

baholash o‘rinli. Bu yerda $n \rightarrow \infty$ da limitga o‘tsak, ushbu

$$M\{\varphi(x)\} \geq \frac{2a\delta}{3L} > 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. **Lemma isbotlandi.**

$\varphi(x) = |f(x)|^2$ deb olib, $f(x) \not\equiv 0$ deb faraz qilsak, (4) tenglikka zid bo‘ladigan fikr kelib chiqadi. Demak, $f(x) \equiv 0$ ekan.

Teorema 3 dan teorema 1 kelib chiqishini isbotlaymiz.

$g(x) = \overline{f(x)}$ deb olamiz. U holda

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \quad \text{va} \quad g(x) = \overline{f(x)} \sim \sum_n \overline{A_n} e^{-i\lambda_n x}$$

bo‘ladi. Teorema 3 ga ko‘ra

$$M\{f(x) \cdot \overline{f(x)} \cdot e^{-i\lambda x}\} = \sum_{\lambda_p + \mu_q = \lambda} A_p \overline{A_q}.$$

Bu tenglikda $\lambda = 0$ desak,

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_p |A_p|^2$$

Parseval tengligi hosil bo‘ladi.

Teorema 1 dan teorema 3 kelib chiqishini isbotlaymiz.

Quyidagi tenglikdan foydalanamiz:

$$M\{f \cdot g\} = \frac{1}{4} \left[M\{|f + \overline{g}|^2\} - M\{|f - \overline{g}|^2\} + iM\{|f + i\overline{g}|^2\} - iM\{|f - i\overline{g}|^2\} \right]. \quad (6)$$

Bu tenglikni isbot qilish uchun o‘ng tomonni ochib chiqish kifoya.

$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ va $b(\lambda) = M\{g(x)e^{-i\lambda x}\}$ belgilashlarni kiritib olamiz va ushbu $f + \overline{g}$, $f - \overline{g}$, $f + i\overline{g}$, $f - i\overline{g}$ funksiyalarga Parseval tengligini qo‘llaymiz:

$$\begin{aligned} M\{|f + \overline{g}|^2\} &= \sum_{\lambda} |a(\lambda) + \overline{b(-\lambda)}|^2, \\ M\{|f - \overline{g}|^2\} &= \sum_{\lambda} |a(\lambda) - \overline{b(-\lambda)}|^2, \\ M\{|f + i\overline{g}|^2\} &= \sum_{\lambda} |a(\lambda) + i\overline{b(-\lambda)}|^2, \\ M\{|f - i\overline{g}|^2\} &= \sum_{\lambda} |a(\lambda) - i\overline{b(-\lambda)}|^2. \end{aligned}$$

Bularni (6) tenglikka qo‘ysak, ushbu ayniyat

$$M\{f(x)g(x)\} = \sum_{\lambda} a(\lambda)b(-\lambda) = \sum_{\lambda_p + \mu_q = 0} A_p B_q$$

hosil bo‘ladi. Bu yerda $g(x)$ o‘rnida $g(x)e^{-i\lambda x}$ funksiyani olsak,

$$g(x)e^{-i\lambda x} = \sum_n B_n e^{i(\mu_n - \lambda)x}$$

bo‘ladi. Demak, ushbu

$$M\{f(x)g(x)e^{-i\lambda x}\} = \sum_{\lambda_p + \mu_q - \lambda = 0} A_p B_q$$

tenglik o‘rinli ekan. **Isbotlandi.**

8-§. Approksimatsiya teoremasini Viner usulida isbotlash

Tekis deyarli davriy funksiyalarning tuzilishi quyidagi approksimatsiya teoremasi deb ataladigan teoremda yaqqol namoyon bo‘ladi.

Teorema. (Approksimatsiya hakida). $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday

$$P_{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^N c_k e^{i\lambda_k x}$$

trigonometrik ko‘pxad mavjudki, bunda ushbu

$$\sup_x |f(x) - P_{\varepsilon}(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bu paragrafda approksimatsiya teoremasi Parseval tengligi o‘zaro ekvivalent ekanligini ko‘rsatamiz. Bunda Norbert Viner usulini ishlatamiz.

Lemma 1. Approksimatsiya teoremasidan Parseval tengligi kelib chiqadi.

Isbot. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo‘lib, unga Ushbu

$$\sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$$

Fure qatori mos keladigan bo‘lsin. U holda (1) tengsizlikdan quyidagi

$$M\left\{f(x) - P_{\varepsilon}(x)\right\}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x) - P_{\varepsilon}(x)|^2 dx < \varepsilon^2$$

baholash kelib chiqadi. Bunga va Fure koeffitsientlarining minimallik xossasiga asosan ushbu

$$\begin{aligned} 0 \leq M\left\{f(x)\right\}^2 - \sum_{k=1}^N |a(\lambda_k)|^2 &= M\left\{\left|f(x) - \sum_{k=1}^N a(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}\right|^2\right\} \leq \\ &\leq M\left\{\left|f(x) - \sum_{k=1}^N c_k e^{i\lambda_k x}\right|^2\right\} < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $\varepsilon \rightarrow 0$ da limitga o‘tsak quyidagi

$$M\left\{f(x)\right\}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a(\lambda_k)|^2$$

Parseval tengligi kelib chiqadi. **Lemma isbotlandi.**

Lemma 2. Parseval tengligidan approksimatsiya teoremasi kelib chiqadi.

Isbot. $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya bo‘lsin. Ushbu

$$g(x) = \sup_t |f(x+t) - f(t)|$$

yordamchi funksiyani tuzib olamiz. Uchburchak tengsizligiga ko‘ra quyidagi baholashlar o‘rinli:

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &= \left| \sup_t |f(x+h+t) - f(t)| - \sup_t |f(x+t) - f(t)| \right| \leq \\ &\leq \sup_t \left| |f(x+h+t) - f(t)| - |f(x+t) - f(t)| \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_t |f(x+h+t) - f(x+t)| = \sup_t |f(t+h) - f(t)|.$$

Bu baxolashlardan $g(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'lishi kelib chiqadi. Endi quyidagi

$$\varphi_\varepsilon(\vartheta) = \begin{cases} 1 - \frac{\vartheta}{\varepsilon}, & 0 \leq \vartheta \leq \varepsilon \\ 0, & \vartheta \geq \varepsilon \end{cases}$$

funksiyani tuzib olamiz va ushbu $\varphi_\varepsilon[g(x)]$ tekis deyarli davriy funksiyani ko'rib chiqamiz. $\varphi_\varepsilon[g(x)] \geq 0$ va $\varphi_\varepsilon[g(x)] \neq 0$ bo'lishi ravshan, chunki $\varphi_\varepsilon[g(0)] = \varphi_\varepsilon(0) = 1$. Shuning uchun $M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\} > 0$ bo'ladi. Bu yordamida ushbu

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon[g(x)]}{M_x\{\varphi_\varepsilon[g(x)]\}}$$

funksiyani tuzsak, u ham tekis deyarli davriy funksiya bo'ladi. Quyidagi funksiyani ko'rib chiqamiz: $f_\varepsilon(x) = M_t\{f(t)\psi_\varepsilon(x-t)\}$. Agar $\psi_\varepsilon(x-t) \neq 0$ bo'lsa, ushbu

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon \quad (2)$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Agar $\psi_\varepsilon(x-t) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi_\varepsilon[g(x-t)] \neq 0$ bo'ladi, ya'ni $g(x-t) < \varepsilon$, ya'ni

$$\sup_u |f(x-t+u) - f(u)| < \varepsilon$$

yoki

$$\sup_u |f(x+u) - f(t+u)| < \varepsilon.$$

Bunga asosan

$$|f(x) - f(t)| \leq \sup_u |f(x+u) - f(t+u)| < \varepsilon$$

bo'ladi, ya'ni aytilgan fikr isbotlandi.

Ushbu $M_t\{\psi_\varepsilon(x-t)\} = 1$ tenglikni $f(x)$ ga ko'paytirsak,

$$f(x) = M_t\{f(x)\psi_\varepsilon(x-t)\}$$

hosil bo'ladi. Quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$\begin{aligned} f(x) - f_\varepsilon(x) &= M_t\{f(x)\psi_\varepsilon(x-t)\} - M_t\{f(t)\psi_\varepsilon(x-t)\} = \\ &= M_t\{[f(x) - f(t)]\psi_\varepsilon(x-t)\}. \end{aligned}$$

(2) tengsizlikka ko'ra

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq M_t\{|f(x) - f(t)|\psi_\varepsilon(x-t)\} < \varepsilon. \quad (3)$$

Endi Parseval tengligidan foydalanimiz. $f(x)$ funksiyaga ushbu

$$\sum_k a(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}$$

Fure qatori mos keluvchi bo'lsin. $\eta > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin, u holda shunday $N = N(\eta)$ natural son topiladiki, bunda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^2 < \eta.$$

Ushbu

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{i\lambda_k x}$$

ko'phadni tuzib olamiz va ushbu $r_N(x) = f(x) - S_N(x)$ ayirmani ko'rib chiqamiz. Parseval tengligiga ko'ra

$$M\{f(x) - S_N(x)\}^2 = M\{r_N(x)\}^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^2 < \eta. \quad (4)$$

Endi esa quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon}(x) &= M_t \{f(t) \psi_{\varepsilon}(x-t)\} = M_t \{S_N(t) \psi_{\varepsilon}(x-t)\} + M_t \{r_N(t) \psi_{\varepsilon}(x-t)\} = \\ &= \sum_{k=1}^N a_k e^{i\lambda_k x} \cdot M_t \{\psi_{\varepsilon}(t) e^{i\lambda_k t}\} + M_t \{r_N(t) \psi_{\varepsilon}(x-t)\} = P_{\varepsilon}(x) + R_{N,\varepsilon}(x). \end{aligned}$$

Bu erda $P_{\varepsilon}(x)$ trigonometrik ko'pxad. $R_{N,\varepsilon}(x)$ qoldiq hadni baholaymiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$$\begin{aligned} |R_{N,\varepsilon}(x)| &= |M_t \{r_N(t) \psi_{\varepsilon}(x-t)\}| \leq \\ &\leq \sqrt{M_t \{r_N(t)\}^2} \cdot \sqrt{M_t \{\psi_{\varepsilon}(x-t)\}^2} < \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{M\{\psi_{\varepsilon}^2(t)\}}. \end{aligned}$$

ε fiksirlanganda N sonini kattalashtiraverishimiz mumkin, ya'ni η ni shu qadar kichiklashtiramizki, bunda

$$|R_{N,\varepsilon}(x)| < \varepsilon \quad (5)$$

bo'lsin. Buning uchun

$$\sqrt{\eta} \cdot \sqrt{M\{\psi_{\varepsilon}^2(t)\}} < \varepsilon,$$

ya'ni

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{M\{\psi_{\varepsilon}^2(t)\}}$$

deb olish kifoya. (3) va (5) tengsizliklarga asosan

$$|f(x) - P_{\varepsilon}(x)| \leq |f(x) - f_{\varepsilon}(x)| + |f(x) - P_{\varepsilon}(x)| < \varepsilon + |R_{N,\varepsilon}(x)| < 2\varepsilon.$$

Oxirgi tengsizlikka ko'ra approksimatsiya teoremasi o'rinli bo'ladi.

Lemma isbotlandi.

Izox. $P_{\varepsilon}(x)$ trigonometrik ko'pxaddagi daraja ko'rsatkichlarini $f(x)$ funksiyaga mos keluvchi Fure qatoridagi daraja ko'rsatkichlari orasidan tanlash mumkin.

9-§. Approksimatsiya teoremasini Boxner-Feyer usulida isbotlash

1. $f(x)$ funksiya 2π davrli funksiya bo'lib, unga quyidagi Fure qatori mos keluvchi bo'lsin:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Quyidagi yig'indilarni tuzib olamiz:

$$S_0(x) = a_0, \quad S_n(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx},$$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n} = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) a_k e^{ikx}.$$

$\sigma_n(x)$ yig'indilarga Feyer yig'indilari deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, $\sigma_n(x)$ yig'indilar $n \rightarrow \infty$ da $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi.

$\sigma_n(x)$ yig'indini Fure qatoriga qo'shimcha

$$r_k^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{n}, & |k| \leq n \\ 0, & |k| > n \end{cases}$$

ko'paytuvchilar kiritib hosil qilish mumkin.

Endi tekis deyarli davriy funksiya $f(x)$ berilgan bo'lsin. Unga mos keluvchi Fure qatoriga qo'shimcha shunday ko'paytuvchilar kiritish mumkin ekanki, hosil bo'lgan yig'indilar $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashar ekan. Buni birinchi bo'lib S.Boxner isbotlashga muvoffak bo'lgan. Bu yig'indilar Feyer yig'indilarining tabiiy umumlashmasi bo'ladi.

2. Ta'rif. $\beta_1, \beta_2, \dots$ chekli yoki sanoqli haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Agar quyidagi ko'rinishdagi

$$r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \dots + r_n \beta_n = 0, \quad (n=1, 2, \dots)$$

shartni qanoatlantiruvchi birdaniga hammasi nol bo'lmaydigan $r_1, r_2, \dots, r_n$ ratsional sonlar topilmasa, u holda $\beta_1, \beta_2, \dots$ haqiqiy sonlar chiziqli erkli deyiladi.

Ta'rif. Agar $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ sonlar to'plamidagi xar bir son $\beta_1, \beta_2, \dots$ sonlarning ratsional koeffitsientli chekli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalansa

$$\lambda_n = r_1^{(n)} \beta_1 + r_2^{(n)} \beta_2 + \dots + r_n^{(n)} \beta_n \quad (1)$$

hamda $\beta_1, \beta_2, \dots$ sonlar chizikli erkli bo'lsa, $\beta_1, \beta_2, \dots$ sonlar ushbu $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ sonlar to'plamining bazisi deyiladi.

Teorema 1. Haqiqiy sonlardan tuzilgan sanoqli to'plamda bazis mavjud bo'ladi va bu bazis elementlari anashu to'plamdan olinadi.

Isbot. Aytaylik o'sha sanoqi to'plam ushbu

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (2)$$

to'plam bo'lsin. β_1 orqali (2) satrda birinchi bo'lib uchragan nol bo'lmagan sonni belgilaymiz va (2) satrdan ushbu

$$r_1\beta_1 + r_2\lambda_k = 0$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha λ_k sonlarni o'chirib tashlaymiz. Bu yerda r_1 va r_2 ratsional sonlar. Agar β_1 dan boshqa son qolmasa, β_1 ning o'zi bazis bo'ladi. Agar β_1 dan boshqa son qolsa, u holda qolgan sonlardan birinchisini β_2 orqali belgilaymiz. Endi qolgan sonlardan ushbu

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + r_3\lambda_k = 0$$

shartni qanoatlantiruvchi λ_k sonlarni o'chirib tashlaymiz. Bu yerda r_1, r_2, r_3 ratsional sonlar. Bu jarayonni davom qildirib $\beta_1, \beta_2, \dots$ bazisni hosil qilamiz.

Teorema isbotlandi.

Ta'rif. Agar bazis cheklita sondan iborat bo'lsa, unga chekli bazis deyiladi, aks holda cheksiz bazis deyiladi.

Ta'rif. Agar (1) tasvirda barcha koeffitsientlar butun sonlar bo'lsa, $\beta_1, \beta_2, \dots$ bazisga butun bazis deyiladi.

Misol. $M = \{a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ to'plam uchun $\beta_1 = 1, \beta_2 = \sqrt{3}$ bazis bo'ladi. Bu bazis chekli va butundir.

3. $f(x)$ funksiya $p = \frac{2\pi}{|\beta|}$ davrlı funksiya bo'lib, unga ushbu

$$f(x) \sim \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v e^{iv\beta x}, \quad a_v = M\{f(x) \cdot e^{-iv\beta x}\}, \quad (v \in \mathbb{Z})$$

Fure qatori mos keluvchi bo'lsin. Bu funksiya uchun Feyer yig'indisini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} S_r(x) &= \sum_{v=-r}^r a_v e^{iv\beta x} = M_t \left\{ f(t) \sum_{v=-r}^r e^{iv\beta(x-t)} \right\} = \\ &= M_t \left\{ f(x+t) \frac{\sin(r + \frac{1}{2})\beta t}{\sin \frac{\beta t}{2}} \right\} = \\ &= M_t \left\{ f(x+t) \frac{\sin(r + \frac{1}{2})\beta t \cdot \sin \frac{\beta t}{2}}{\sin^2 \frac{\beta t}{2}} \right\} = \\ &= M_t \left\{ f(x+t) \frac{\cos r\beta t - \cos(r+1)\beta t}{\sin^2 \frac{\beta t}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Bunga ko'ra

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} =$$

$$= M_t \left\{ f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{n\beta}{2} t}{n \cdot \sin^2 \frac{\beta t}{2}} \right\} =$$

$$= \sum_{v=-n}^n \left(1 - \frac{|v|}{n} \right) a_v e^{iv\beta x} = M_t \left\{ f(x+t) \sum_{v=-n}^n \left(1 - \frac{|v|}{n} \right) e^{iv\beta x} \right\}.$$

Quyidagi Feyer yadrosini ko'rib chiqamiz:

$$K_n(\beta t) = \frac{\sin^2 \frac{n\beta}{2} t}{n \cdot \sin^2 \frac{\beta t}{2}} = \sum_{v=-n}^n \left(1 - \frac{|v|}{n} \right) e^{iv\beta x}. \quad (3)$$

Bu yadro quyidagi ikkita muhim xossaga ega:

$$1) K_n(\beta t) \geq 0, \quad 2) M_t \{K_n(\beta t)\} = 1.$$

Bu xossalar (3) dan kelib chiqadi.

4. $f(x)$ funksiya tekis deyarli davriy funksiya bo'lib, unga quyidagi Fure qatori mos keluvchi bo'lsin:

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}.$$

$\beta_1, \beta_2, \dots$ orqali $\{\lambda_n\}$ to'plamdagi biror bazisni belgilaymiz. $r, m, n_1, n_2, \dots, n_r$ biror natural sonlar bo'lsin. Quyidagi Feyer yadrosini tuzib olamiz:

$$K_B^{(m)}(t) = K_{n_1} \left(\frac{\beta_1 t}{m!} \right) \cdot K_{n_2} \left(\frac{\beta_2 t}{m!} \right) \cdot \dots \cdot K_{n_r} \left(\frac{\beta_r t}{m!} \right).$$

Bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} n_1, n_2, \dots, n_r \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \end{pmatrix}.$$

$K_B^{(m)}(t)$ Feyer yadrosi uchun ham quyidagi ikkita xossa o'rinli bo'ladi:

$$1) K_B^{(m)}(t) \geq 0, \quad 2) M_t \{K_B^{(m)}(t)\} = 1.$$

Bu xossalardan birinchisi yaqqol ko'rinib turibdi. Ikkinchisini isbot qilishimiz uchun $K_B^{(m)}(t)$ yadroni quyidagi tarzda yozib olamiz:

$$K_B^{(m)}(t) = \sum_{|v_j| \leq n_j} \left(1 - \frac{|v_1|}{n_1} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{|v_r|}{n_r} \right) \cdot e^{-i \left(\frac{v_1}{m!} \beta_1 + \dots + \frac{v_r}{m!} \beta_r \right) t} =$$

$$= \sum_{k_{n_1, \dots, n_r, v_1, \dots, v_r}} k_{n_1, \dots, n_r, v_1, \dots, v_r} \cdot e^{-i \left(\frac{v_1}{m!} \beta_1 + \dots + \frac{v_r}{m!} \beta_r \right) t}. \quad (4)$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ sonlar chizikli erkli bo'lgani uchun ushbu

$$v_1 \beta_1 + v_2 \beta_2 + \dots + v_r \beta_r = 0$$

tenglik faqat $v_1 = 0, \dots, v_r = 0$ bo'lganda bajariladi. Bunga ko'ra $M_t \{K_B^{(m)}(t)\} = 1$ bo'ladi.

(4) yig'indidagi $k_{n_1, \dots, n_r, \nu_1, \dots, \nu_r}$ ko'effitsientlar quyidagi xossalarga ega:

$$1) 0 \leq k_{n_1, \dots, n_r, \nu_1, \dots, \nu_r} \leq 1,$$

2) $r, \nu_1, \dots, \nu_r$ lar fiksirlanib, $n_1 \rightarrow \infty, \dots, n_r \rightarrow \infty$ bo'lganda $k_{n_1, \dots, n_r, \nu_1, \dots, \nu_r} \rightarrow 1$ bo'ladi.

Endi Boxner-Feyer trigonometrik ko'pxadlarini kiritib olamiz:

$$\begin{aligned} P_B^{(m)}(x) &= M_t \left\{ f(x+t) K_B^{(m)}(t) \right\} = \\ &= \sum_{|\nu_j| \leq n_j} k_{n_1, \dots, n_r, \nu_1, \dots, \nu_r} \cdot a \left(\frac{\nu_1}{m!} \beta_1 + \frac{\nu_2}{m!} \beta_2 + \dots + \frac{\nu_r}{m!} \beta_r \right) e^{-i \left(\frac{\nu_1}{m!} \beta_1 + \dots + \frac{\nu_r}{m!} \beta_r \right) t}. \end{aligned}$$

bu yerda

$$a \left(\frac{\nu_1}{m!} \beta_1 + \frac{\nu_2}{m!} \beta_2 + \dots + \frac{\nu_r}{m!} \beta_r \right)$$

ko'effitsient $\frac{\nu_1}{m!} \beta_1 + \frac{\nu_2}{m!} \beta_2 + \dots + \frac{\nu_r}{m!} \beta_r$ Fure ko'rsatkichiga mos keluvchi Fure ko'effitsientidir.

$f(x)$ ga mos keluvchi Boxner-Feyerning barcha $P_B^{(m)}(x)$ ko'pxadlaridan tuzilgan to'plam tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz va tekis darajada deyarli davriy bo'lishini ko'rsatamiz.

Boxner-Feyer yadrosining xossalariga ko'ra

$$\begin{aligned} |P_B^{(m)}(x)| &\leq M_t \left\{ f(x+t) |K_B^{(m)}(t)| \right\} \leq \sup_x |f(x)| < \infty, \\ |P_B^{(m)}(x+h) - P_B^{(m)}(x)| &\leq M_t \left\{ f(x+h+t) - f(x+t) |K_B^{(m)}(t)| \right\} \leq \\ &\leq \sup_x |f(x+h) - f(x)|. \end{aligned}$$

Bu yerdagi birinchi tenglikdan tekis chegaralanganlik kelib chiqadi, ikkinchi tenglikdan esa tekis darajada uzluksizlik va tekis darajada deyarli davriylik kelib chiqadi. Bularga ko'ra $\{P_B^{(m)}(x)\}$ to'plamdan tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu qisman ketma-ketlikning limitini $\varphi(x)$ orqali belgilaymiz.

$k_{n_1, \dots, n_r, \nu_1, \dots, \nu_r}$ sonlarning xossalariga asosan $\varphi(x)$ funksiyaning Fure qatori $f(x)$ funksiyaning Fure qatori bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun yagonalik teoremasiga asosan Boxner-Feyer yig'indilari $f(x)$ funksiya ga tekis yaqinlashadi. **Approksimatsiya teoremasi isbotlandi.**

Xulosa

Deyarli davriy funksiyalar nazariyasining shakllanishiga Kroneker, P.Bol, E.Esklangon, G.Bor, N.Viner, G.Veyl, Vale-Pussen, S.Boxner, N.N.Bogolyubov, V.V.Stepanov, A.Bezikovich, Dj. Fon Neyman, V.Maak, V.A.Marchenko, B.M.Levitan va boshqa olimlar beqiyos hissa qo'shganlar.

Mazkur bitiruv malakaviy ishida tekis deyarli davriy funksiyalar va ularning xossalari o'rganilgan. Ushbu ishda tekis deyarli davriy funksiya chegaralangan bo'lishi, $f(x)$ tekis deyarli davriy funksiya R fazoda tekis uzluksiz bo'lishi, tekis deyarli davriy funksiya haqidagi Borxner teoremasi, tekis deyarli davriy funksiyaning hosilasi va boshlang'ichi haqidagi, o'rta qiymatlar haqidagi teoremlar o'rganildi. Qolaversa tekis deyarli davriy funksiyalarni Fure qatoriga yoyish va Fure qatori ustida formal amallar ko'rib chiqildi.

Hozirgi kunda deyarli davriy funksiyalar nazariyasi differensial tenglamalar nazariyasida, mexanika masalalarida ishlatilib kelinmoqda.

Mazkur bitiruv malakaviy ishda tekis deyarli davriy funksiyalar uchun approksimatsiya teoremasining Viner va Boxner-Feyer usullaridagi isbotlari o'rganilgan.

Adabiyotlar

1. Левитан Б.М. «Почти-периодические функции». Гос. изд. техн. - теор. лит., Москва, 1953.
2. Бор Г. «Почти-периодические функции». Гос. изд. техн.-теор. лит., Москва, 1934.
3. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. Москва, 1963 г.
4. Левитан Б.М., Жиков В.В. «Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения». Москва, Изд-во МГУ, 1978.
5. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов. М.: «Наука», 1966.
6. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., «Наука», 1979.
7. Саримсоков Т.А. Функционал анализ курси. Т.: «Ўқитувчи», 1986.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968.