

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIMI VAZIRLIGI
AJINIYOZ NOMIDAGI NUKUS DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI



Matematika-informatika fakulteti

Matematika o'qitish metodikasi kafedrası

51101100-«Matematika o'qitish metodikasi» ta'lim yo'nalishi 4^A-kurs talabasi

BOLTABOEV AZIZ OZOD O'G'LINING

**TEMA: «TENGLAMA VA TENGSIZLIKLARNI O'QITISHNING
METODIK MASALALARI»**

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Talaba: _____
Ilmiy rahbar : _____
Kafedra mudiri: _____
Ilmiy maslahatchi: _____

A.Boltaboev
katta o'qituvchi J. Valieva
f.-m.f.n., dotsent B.Prenov
f.-m.f.n. Z.B.Saparov

Kafedra májilisining 2018-yil __-may sanasidagi
____ sonli bayonnamasi bilan himoga ruxsat berildi

Nukus-2018

MUNDARIJA

Kirish.....	3
1- Bob. Tenglama va tengsizliklar va ularni echish usullari mavzusini o`qitishning nazariy masalalari	
§1.1. Algebraik tenglamalar va ularni teng kuchli almashtirishlar.....	5
§1.2. Algebraik tengsizliklar va ularning asosiy xossalari.....	13
§1.3. Koshi tengsizligi va uning isboti.....	22
2- Bob. Tenglama va tengsizliklar, ularni echish usullari mavzusini o`qitishning metodik masalalari	
§2.1. Tenglamalarni yechish va yechimlarini taxlil qilish usullari.....	29
§2.2 Tengsizliklarni yechish va yechimlarini taxlil qilish usullari.....	39
Xulosa.....	47
Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati.....	49

Kirish

Tenglama va tengsizliklarni o'qitishning metodik masalalari ya'ni uning ildizlarini tekshirish va topish usullarini o'rganish matematikada, shu bilan birga maktab matematikasida asosiy masalalarning biri bo'lib hisoblanadi. Matematikaning va boshqada fanlarning ko'pgina masalalari algebraik tenglama va tengsizliklarni echishga olib kelinadi. Bunday masalalarni echishning eng qiyin va eng ahamiyatli qismi yuqori tartibli tenglamalarda ildizlarni topish bo'lib, bu o'quvchilardan yuqori tartibli tenglamalarni echishning har xil usullarini o'rganishni talab qiladi.

Maktab matematikasida tenglama va tengsizliklar tushunchasining eng sodda tenglama va tengsizliklarning bir qancha turlarini echish usullari o'rganiladi. Bir noma'lumga ega birinchi, ikkinchi va ayrim to'rtinchi darajali tenglama va tengsizliklarni echish usullarini o'rgatish maktab matematikasining asosiy mazmunini tashkil etadi. Keyinchalik esa oliy matematikada yuqori tartibli tenglama va tengsizliklar o'rganilib, ularning ayrim turlari uchun echimni topish usullari o'rganiladi.

Bitiruv malakaviy ishi kirish qismidan, malakaviy ishining mazmunini o'z ichiga oladigan ikki bob, beshta paragrafdan, xulosa bo'limi va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan turadi.

Bitiruv malakaviy ishining birinshi bobining birinchi paragrafi «Algebraik tenglamalar va ularni teng kuchli almashtirish» deb atalib, unda algebraik tenglamalar haqida umumiy tushunchalar, algebraik tenglamalarni teng kuchli almashtirish haqidagi tushunchalar, tenglamani echish jarayonida tenglamani boshqa tenglamaga almashtirishdan hosil bo'lgan tenglamani uchinchi boshqa tenglamaga almashtirishdan va jarayonni echimi ma'lum bo'lgan tenglama hosil bo'lgan almashtirishlarni bajarish va buning uchun kerakli: tenglamadagi tenglik ishorasining ikki tomoniga noma'lum qatnashgan yoki qatnashmagan ba'zi ifodani qo'shish, tenglik ishorasining ikki tomoniga noma'lum qatnashgan yoki qatnashmagan ba'zi ifodani ko'paytirish yoki bo'lish, tenglik ishorasining ikki

tomonini darajaga ko'tarish, tenglik ishorasining ikki tomonini ildizdan chiqarish kabi operatsiyalarni bajarishlarni o'rganishning nazariy masalalari qaraladi.

Birinshi bobining ikkinchi paragrafi «Algebraik tengsizliklar va ularning asosiy xossalari» deb atalib unda algebraik tengsizliklar va ularning xossalari haqida umumiy tushunchalarning nazariy masalalari qaralib bunda, agar tengsizlikning ikki tomonini musbat songa ko'paytirganda tengsizlik ishorasi o'zgarmay qolishi, agar tengsizlikning ikki tomonini manfiy songa ko'paytirsak tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgarishi haqidagi xulosalar beriladi.

Bitiruv malakaviy ishining yechinchi paragrafi «Koshi tengsizligi va uning isboti» deb atalib unda, n ixtiyoriy manfiy bo'lmagan sonlarning o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi orasidagi tengsizlik Koshi tengsizligi deb atalalishi, Koshi tengsizligining algebraik va geometrik usullari va uning isboti haqida umumiy tushunchalar beriladi.

Bitiruv malakaviy ishining ikkinchi bobining birinchi paragrafi «Tenglamalarni yechish va yechimlarini taxlil qilish usullari» deb atalib, unda tenglamani bir o'zgaruvchili tenglama turlari uning yechimlari, echimini topishda tenglama ustida bajariladigan turli hil almashtirishlar, tenglamani almashtirish natijasida o'ziga teng kuchli bo'lgan tenglama hosil bo'lishini yoki berilgan tenglamaning natijasi bo'lgan tenglama hosil bo'lishini yoki bo'lmasa almashtirish natijasida ba'zi ildizlar yo'qolib qolishini haqidagi tushunchalar misollar echish usullari yordamida keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishining uchinchi paragrafi «Tengsizliklarni yechish va yechimlarini taxlil qilish usullari» deb atalib, unda birinshi va ikkinshi darajali tengsizliklarni umumiy ko'rinishi ularni yechishning, ko'paytuvchilarga ajratish bilan yechish usuli, *yuqori darajali ratsional tengsizliklarni yechishning intervallar usuli*, bir nomalumli kasr ratsional tengsizliklarni yechish usullari keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishining oxirida xulosa va adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

**1- Bob. Tenglama va tengsizliklar va ularni echish usullari mavzusini
o`qitishning nazariy masalalari**

**§1.1. Algebraik tenglamalar va ularni teng kuchli
almashtirishlar**

Ikkita funktsiyaning teng qiymatlarga ega bo`ladigan argumentning qiymatlarini topish haqidagi masalaning simbolik yozilishi tenglama deyiladi. Bir noma`lumga ega tenglama umumiy holatda quyidagi

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (1)$$

ko`rinishga ega. Bu tenglamada  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  funktsiyalarning  $x$  argumenti tenglamadagi noma`lum miqdor deyiladi. $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalari aniqlangan ba`zi  $\Omega$  sohada (1) tenglamani echish, bu demak  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  funktsiyalari teng qiymatlarga ega bo`ladigan x argumentning qiymatlarini topish bo`lib hisoblanadi. Agar  $x$  noma`lumning $x = x_0$ qiymatida $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ tenglik bajarilsa, u holda $x = x_0$ soni tenglamani qanoatlantiradi deyiladi va bu son (1) tenglamaning echimi yoki ildizi deyiladi.

Tenglamadagi $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning xarakteriga bog`liq (1) tenglama algebraik yoki transtsendent bo`lishi mumkin.

Ta`rif. $y = f(x)$ funktsiyasi algebraik funktsiya deyiladi, agar bu funktsiya

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)y + a_n(x) = 0 \quad (2)$$

tenglikni qanoatlantirsa, bu erda $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ lar x ning ko`phadlari.

Masalan $y = x^2 - 2$ funktsiyasi algebraik funktsiya, shunki bu funktsiya

$$y - (x^2 - 2) = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Algebraik funktsiyaning ta`rifidan  $b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$  ko`phadining $\frac{p(x)}{q(x)}$

kasr ratsional funktsiyaning algebraik funktsiyalar bo`lishi kelib chiqadi, bu erda  $p(x)$  va  $q(x)$  lar ko`phadlar.

*Ta`rif.* (2) tenglamani qanoatlantirmaydigan funktsiyalar transtsendent funktsiyalar deyiladi. Elementar transtsendent funktsiyalar qatoriga ko`rsatkichli $y = a^x$, logarifmik $y = \log_a x$, irratsional ko`rsatkichga ega darajali $y = x^a$ va trigonometrik funktsiyalar kiradi.

*Ta`rif.* (1) tenglama algebraik deyiladi, agar  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  funktsiyalari algebraik funktsiyalar bo`lsa.

(1) tenglamaning xossasi $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning xossalari va bu tenglama bilan bog`liq qo`yilgan masalaning xarakteri bilan aniqlanadi. Misol uchun $x^2 - 2 = 0$ echimga ega emas, agar shart bo`yicha echim ratsional son bo`lishi kerak bo`lsa.

(1) tenglama $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning aniqlanish sohalarining umumiy qismida ma`noga ega. Faqat ushbu sohadagina bu tenglamani qarash mumkin. Bu soha (1) tenglamaning mavjud qiymatlar sohasi deyiladi.

Tenglamani echish jarayoni umuman olganda tenglamani boshqa tenglamaga almashtirishdan va hosil bo`lgan tenglamani uchinchi tenglamaga almashtirishdan va hakoza echimi ma`lum bo`lgan tenglama hosil bo`lgancha almashtirishlarni bajarishdan iborat. Buning uchun quyidagi operatsiyalarni bajarish lozim: tenglamadagi tenglik ishorasining ikki tomoniga noma`lum qatnashgan yoki qatnashmagan ba`zi ifodani qo`shish, tenglik ishorasining ikki tomoniga noma`lum qatnashgan yoki qatnashmagan ba`zi ifodani ko`paytirish yoki bo`lish, tenglik ishorasining ikki tomonini darajaga ko`tarish, tenglik ishorasining ikki tomonini ildizdan chiqarish. Bu almashtirishlarni bajarish vaqtida ayrim echimlar yo`qolishi yoki ayrim chet ildizlar hosil bo`lishi mumkin.

*Ta`rif.*  $f_1(x) = f_2(x)$  va  $F_1(x) = F_2(x)$  tenglamalar teng kuchli deyiladi, agar birinchi tenglamaning har bir echimi ikkinchi tenglama uchun ham echim bo`lib, ikkinchi tenglamaning har bir echimi birinchi tenglama uchun ham echim bo`lsa.

Masalan $2x - 4 = 0$ tenglamasi bilan $x - 2 = 0$ tenglamasi teng kuchli, shunki bu ikki tenglamaning har biri bir echimga ega bo`lib, bu echimlarning ikkalasi ham  $x = 2$  bo`ladi.

Xususiyl holatda ikki tenglama ham echimga ega bo`lmasa u holda ham bu ikki tenglama teng kuchli deyiladi.

Karrali ildizlar almashtirish paytida bir ildiz bo`lib hisoblanadi. Misol uchun $(x-1)^2 = 0$ tenglamasi bilan $x-1 = 0$ tenglamasi teng kuchli.

Teorema 1.

$$F_1(x) = F_2(x) \quad (3)$$

tenglama ham

$$F_1(x) + \omega(x) = F_2(x) + \omega(x) \quad (4)$$

tenglama teng kuchli bo`ladi, agar  $\omega(x)$  tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida ma`noga ega bo`lsa.

Isbot. Mayli $x = x_0$ (3) tenglamaning ildizi bo`lsin. U holda

$$F_1(x_0) = F_2(x_0) \quad (3^1)$$

tengligi bajariladi. $x = x_0$ soni tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida bo`lganligi sababli  $\omega(x_0)$  ma`noga ega bo`ladi. (3<sup>1</sup>) ning ikki tomoniga  $\omega(x_0)$  ni qo`shib

$$F_1(x_0) + \omega(x_0) = F_2(x_0) + \omega(x_0) \quad (4^1)$$

ayniyatga ega bo`lamiz. (4<sup>1</sup>) ayniyat esa  $x = x_0$  sonining (4) tenglama uchun ildiz ekanligini ko`rsatadi.

Mayli $x = x_0$ soni (4) tenglamaning echimi bo`lsin. U holda (4<sup>1</sup>) ayniyat o`rinli bo`ladi. Bu tenglikning ikki tomonidan  $\omega(x_0)$  ni ayirib (3<sup>1</sup>) tengligiga ega bo`lamiz. Bu esa $x = x_0$ sonining (3) tenglama uchun echim ekanligini ko`rsatadi.

Bu teoremani quyidagicha aytish mumkin: agar tenglamaning ikki tomoniga tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida ma`noga ega bitta ifodani qo`shsa, u holda tenglama teng kuchli bo`lgan tenglamaga almashadi.

Natija. Tenglamaning ikki tomoniga tenglamadagi noma`lumning ko`phadini, xususiyl holatda nolinchil darajali ko`phadni qo`shishga bo`ladi.

Natija. Agar $\omega(x)$ tenglamaning barcha echimlari uchun ma'noga ega bo'lsa, u holda tenglamaning ikki tomoniga $\omega(x)$ ni qo'shishga bo'ladi. Bu holatda berilgan tenglama teng kuchli tenglamaga almashadi.

Misol.

$$3 - x = 2$$

tenglamasining ikki tomoniga $\frac{1}{x-1}$ ni qo'shsak

$$3 - x + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

tenglama hosil bo'ladi, lekin bu ikki tenglama teng kuchli emas. Sababi birinchi tenglama uchun tenglamaning mavjud qiymatlar sohasi son o'qining barcha nuqtalari bo'lsa, ikkinchi tenglama uchun tenglamaning mavjud qiymatlar sohasi $x = 1$ nuqtadan boshqa nuqtalardan iborat. $x = 1$ nuqta birinchi tenglamaning ildizi.

Agar birinchi tenglamaning ikki tomoniga $\frac{1}{x-2}$ ni qo'shsak

$$3 - x + \frac{1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu ikki tenglama teng kuchli. Sababi birinchi tenglamaning $x = 1$ echimi uchun $\omega(x) = \frac{1}{x-2}$ ma'noga ega.

Natija. Tenglamaning ixtiyoriy hadini tenglik ishorasining ikkinchi tomoniga teskari ishora bilan o'tkazishga bo'ladi. Natijada berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

Mayli

$$F_1(x) + \omega(x) = F_2(x)$$

tenglamasini qaraylik. Bu tenglamada $\omega(x)$ tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida ma'noga ega, u holda $-\omega(x)$ ham tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida ma'noga ega. Demak tenglamaning ikki tomoniga $-\omega(x)$ ni qo'shib, berilgan tenglamaga teng kuchli

$$F_1(x) = F_2(x) - \omega(x)$$

tenglamani hosil etamiz.

Teorema 2.

$$F_1(x) = F_2(x) \quad (3)$$

va

$$F_1(x) \cdot \omega(x) = F_2(x) \cdot \omega(x) \quad (5)$$

tenglamalar teng kuchli bo'ladi, agar $\omega(x)$ tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida ma'noga ega bo'lib, noldan farqli bo'lsa.

Isbot. Mayli $x = x_0$ soni (3) tenglamaning ildizi bo'lsin. U holda

$$F_1(x_0) = F_2(x_0) \quad (3^1)$$

tengligi bajariladi. $x = x_0$ soni tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida bo'lganligi sababli $\omega(x_0)$ ma'noga ega bo'ladi. (3^1) ning ikki tomonini $\omega(x_0)$ ga ko'paytirib

$$F_1(x_0) \cdot \omega(x_0) = F_2(x_0) \cdot \omega(x_0) \quad (5^1)$$

ayniyatga ega bo'lamiz. (5^1) ayniyat esa $x = x_0$ sonining (5) tenglama uchun ildiz ekanligini ko'rsatadi.

Mayli endi $x = x_0$ soni (5) tenglamaning echimi bo'lsin. U holda (5^1) ayniyat o'rinli bo'ladi. Bu tenglikning ikki tomonini $\omega(x_0)$ ga bo'lib (3^1) tengligiga ega bo'lamiz. Bu esa $x = x_0$ sonining (3) tenglama uchun echim ekanligini ko'rsatadi.

Bu teoremani quyidagicha aytish mumkin: agar tenglamaning ikki tomonini tenglamaning mavjud qiymatlar sohasida ma'noga ega va noldan farqli bitta ifodaga ko'paysa, u holda tenglama teng kuchli bo'lgan tenglamaga almashadi.

Natija. Tenglamaning ikki tomonini noldan farqli ixtiyoriy songa ko'paytirilsa bo'ladi, Bu holatda berilgan tenglama teng kuchli tenglamaga almashadi.

Misol.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} = 0 \quad (6)$$

tenglamasini haqiqiy sonlar to'plamida echaylik.

Tenglamaning mavjud qiymatlarining Ω sohasi 0, 1 va 2 sonlaridan farqli barcha sonlar to'plami bo'ladi. Tenglamaning ikki tomonini $\omega(x) = x(x-1)(x-2)$ ga ko'paytirib

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (7)$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli, sababi $\omega(x)$ Ω sohada nolga teng emas.

(7) tenglamani butun son o'qida qaraydigan bo'lsak, u $x_1 = 1$ va $x_2 = 2$ ildizlarga ega. Ω sohada bu tenglama echimga ega emas. Demak (6) tenglama barcha haqiqiy sonlar to'plamida echimga ega emas.

Misol.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{5}{2(x-1)(x-2)} = 0 \quad (8)$$

tenglamasini haqiqiy sonlar to'plamida echaylik.

Tenglamaning mavjud qiymatlarining Ω sohasi oldingi tenglamadagi singari 0, 1 va 2 sonlaridan farqli barcha sonlar to'plami bo'ladi. Tenglamaning ikki tomonini $\omega(x) = x(x-1)(x-2)$ ga ko'paytirib

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0 \quad (9)$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli, sababi $\omega(x)$ Ω sohada nolga teng emas. (9) tenglama Ω sohada $x_1 = 4$ va $x_2 = \frac{1}{2}$ ildizlarga ega. (9) tenglamaga teng kuchli bo'lgan (8) tenglamada $x_1 = 4$ va $x_2 = \frac{1}{2}$ ildizlarga ega.

(3) tenglamani echish paytida tenglik ishorasining ikki tomonini tenglamadagi noma'lumning ko'phadiga ko'paytirish zarurligi tug'iladi va natijada tenglamaning mavjud qiymatlarining Ω sohasida uni nolga aylantirishi ham mumkin bo'ladi. Bu holatda ikkinchi teoremaning shartlari buzilib, berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lmagan tenglama hosil bo'lishi mumkin.

Mayli $\omega(x)$, x ning ko'phadi bo'lsin. (3) tenglamaning ikki tomonini $\omega(x)$ ga ko'paytirib

$$F_1(x) \cdot \omega(x) = F_2(x) \cdot \omega(x) \quad (5)$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Al $\omega(x)$ ko'phadi x ning barcha qiymatlarida ma'noga ega bo'lgani sababli

$$F_1(x_0) = F_2(x_0) \quad (3^1)$$

tengligidan

$$F_1(x_0) \cdot \omega(x_0) = F_2(x_0) \cdot \omega(x_0) \quad (5^1)$$

tengligi kelib chiqadi. Bu demak, tenglamaning ikki tomonini ko'phadga ko'paytirish paytida tenglamaning ildizi yo'qolmaydi. Shuning bilan birgalikda $\omega(x_0) = 0$ va $F_1(x_0) \neq F_2(x_0)$ uchun ham (5^1) tenglik bajariladi. Bu vaqtda (5) tenglama (3) tenglamaning ildizlaridan boshqa ham ildizlarga ega bo'ladi. Demak, tenglamaning ikki tomonini ko'phadga ko'paytirish paytida ko'phadning ildizlari berilgan tenglama uchun chet ildizlar bo'lishi mumkin.

Endi x ning ko'phadi bo'lgan $\omega(x)$ ga tenglamaning ikki tomonini bo'laylik. U holda shu ko'phadning ildizi bo'ladigan berilgan tenglamaning ildizlari yo'qolib ketadi. Haqiqatan ham mayli $x = x_0$ soni (5) tenglamaning ildizi bo'lsin. U holda (5^1) tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik $\omega(x_0) = 0$ va $F_1(x_0) \neq F_2(x_0)$ uchun ham bajariladi. Shu sababli (5) tenglamadan bo'lish orqali (3) tenglamaga o'tish paytida $\omega(x) = 0$ tenglamaning ildizlari yo'qolib ketadi.

Tenglamani echish paytida har xil almashtirishlar bajariladi, shuning bilan birga kasrni qisqartish ham bo'lishi mumkin. Kasrni qisqartish paytida tenglamaning mavjud qiymatlari sohasi o'zgarib, bu soha kattalashadi. Shu sababli chet ildizlar hosil bo'lishi mumkin.

Masalan $\frac{(x-1)^2}{x-1} = 0$ tenglamasini oladigan bo'lsak, bu tenglama haqiqiy sonlar to'plamida ildizga ega emas. Agar kasrni $x-1$ ga qisqartib $x-1 = 0$ tenglamasini oladigan bo'lsak, bu $x = 1$ ildizga ega.

Mayli almashtirish paytida ildizlar sonining o'zgarishiga olib keladigan bir misolni qaraylik. Aytaylik, haqiqiy sonlar to'plamida

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 5 \quad (10)$$

tenglamasini echish talab etilsin. Tenglamani echish uchun $\sqrt{3x+1}$ ni o'ng tomonga o'tkazamiz va berilgan tenglamaga teng kuchli

$$\sqrt{5x+4} = 5 - \sqrt{3x+1} \quad (11)$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning ikki tomonini kvadratga ko'tarib

$$x - 11 = -5\sqrt{3x+1} \quad (12)$$

bu holatda hosil bo'lgan tenglamaning berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lishini aytish qiyin, biroq oxirgi tenglamaning ildizlari berilgan tenglama uchun ham ildiz bo'ladiganligini aytish oson. Haqiqatan ham agar

$$\sqrt{5x_0+4} = 5 - \sqrt{3x_0+1}$$

bo'lsa, u holda

$$x_0 - 11 = -5\sqrt{3x_0+1}$$

tengligi ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan tenglamaning ikki tomonini kvadratga ko'tarish paytida berilgan tenglama ildizlari yo'qolmaydi. Endi $x - 11 = -5\sqrt{3x+1}$ tenglamasini yana bir marta kvadratga ko'tarib, ildizlari $x_1 = 1$ va $x_2 = 96$ bo'lgan

$$x^2 - 97x + 96 = 0 \quad (13)$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Demak (10) tenglamaning ildizlari $x_1 = 1$ va $x_2 = 96$ bo'lishi mumkin va boshqa ildizlarning bo'lishi mumkin emas. Bu ildizlarni (10) tenglamadagi o'rinlariga qo'yib ko'rish orqali $x_1 = 1$ ning qanoatlantirishini ko'rishga bo'ladi, lekin $x_2 = 96$ qanoatlandirmaydi. Agar (10) tenglamaning ildizlariga diqqat etib qaraydigan bo'lsak, u holda $x_2 = 96$ ildiz (12) tenglamadan (13) tenglamaga o'tish paytida hosil bo'ldi. Demak (10), (11) va (12) tenglamalar bir-biri bilan teng kuchli, (13) tenglama ular bilan teng kuchli emas.

§1.2. Algebraik tengsizliklar va ularning asosiy xossalari

Barcha haqiqiy sonlar manfiy sonlar, nol soni va musbat sonlar bo'lib bo'linadi. a sonining musbat son ekanligini ko'rsatish uchun $a > 0$ yozuvdan foydalaniladi. Ma'lumki musbat sonlarning yig'indisi va ko'paytmasi yana musbat son bo'ladi. Agar a soni manfiy son bo'lsa, u holda $-a$ soni musbat bo'ladi va aksincha. Har qanday musbat a soni uchun shunday musbat r ratsional son topiladiki, $r < a$ bo'ladi. Ushbu fakt tengsizliklar nazariyasining asosini beradi.

Ta'rif bo'yicha $a > b$ (yoki $b < a$) tengsizlik o'rinli bo'ladi faqat va faqat, agar $a - b > 0$ o'rinli bo'lsa, ya'ni agar $a - b$ soni musbat bo'lsa. Xususiyl holda $a < 0$ tengsizlikni qaraymiz. Bu tengsizlik nimani bildiradi? Yuqorida keltirilgan ta'rifga ko'ra u $0 - a > 0$ bo'lishini bildiradi, ya'ni $-a > 0$ yoki boshqacha aytganda $-a$ soni musbat. Lekin bu o'rinli bo'ladi faqat va faqat, agar a soni manfiy bo'lsa. Shunday qilib $a < 0$ tengsizligi a sonining manfiy ekanligini bildiradi.

Ko'p hollarda $a \geq b$ (yoki $b \leq a$) yozuvi ham ishlatiladi. $a \geq b$ yozuv ta'rif bo'yicha, yoki $a > b$ bo'lishini, yoki $a = b$ bo'lishini bildiradi.

Demak, $a \geq 0$ tengsizligi ta'rif bo'yicha, yoki $a > 0$ (ya'ni a -musbat son), yoki $a = 0$ bo'lishini bildiradi.

$a > b$, $a < b$ ko'rinishdagi tengsizliklar qat'iy tengsizliklar, $a \geq b$, $a \leq b$ ko'rinishdagi tengsizliklar esa qat'iy emas tengsizliklar deyiladi.

Ushbu $a \geq b$, $a > b$ tengsizliklar bilan bir qatorda qo'sh tengsizliklar deb nomlanuvchi tengsizliklar ham qaraladi, ya'ni $a < c < b$, $a \leq c < b$, $a < c \leq b$, $a \leq c \leq b$ ko'rinishdagi tengsizliklar.

Ta'rif bo'yicha

$$a < c < b \quad (1)$$

yozuv quyidagi qo'sh tengsizliklarning o'rinli bo'lishini bildiradi:

$$a < c \text{ va } c < b$$

Shunga o'qshash $a \leq c < b$, $a < c \leq b$, $a \leq c \leq b$ tengsizliklar ham shu ma'noni bildiradi.

(1) qo'sh tengsizlikni unga ekvivalent shaklda quyidagicha ham yozish mumkin:

$$(a < c < b) \Leftrightarrow (a < c) \cap (c < b),$$

$a \leq c \leq b$ qo'sh tengsizlikni unga ekvivalent shaklda quyidagicha ham yozish mumkin:

$$(a \leq c \leq b) \Leftrightarrow [(a < c) \cup (a = c)] \cap [(c < b) \cup (c = b)].$$

Tengsizliklar ustida amallarning asosiy qoidalarini va xossalarini keltiramiz.

1). Agar $a > b$ va $b > c$ bo'lsa, unda $a > c$ bo'ladi.

Isbot, Shart bo'yicha $a > b$ va $b > c$ bo'lganligi uchun $a - b > 0$ va $b - c > 0$ bo'ladi, va bundan $a - c = (a - b) + (b - c)$. Musbat sonlarning yig'indisi ham musbat bo'lishidan $a - c > 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak bundan ta'rif bo'yicha $a > c$ bo'lishi kelib chiqadi.

2). Agar $a > b$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy c uchun $a + c > b + c$ tengsizlik o'rinli.

Isbot, Shart bo'yicha $a > b$ bo'lganligi uchun $a - b > 0$ bo'ladi. Bundan $(a + c) - (b + c) = (a - b)$ sonining musbat bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $a + c > b + c$.

3). Agar $a + b > c$ bo'lsa, u holda $a > c - b$ tengsizlik o'rinli.

Isbot, Bu xossaning isboti 2) xossadan kelib chiqadi ($a + b > c$ tengsizlikning ikki tomoniga $-b$ sonini qo'shish kifoya).

4). Agar $a > b$ va $c > d$ bo'lsa, u holda $a + c > b + d$ bo'ladi.

Isbot, Tengsizlikning ta'rifi buyicha $(a + c) - (b + d)$ ayirmaning musbat bo'lishini ko'rsatish etarli. Bu ayirmani quyidagicha yozish mumkin

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d).$$

Shart bo'yicha $a - b$ va $c - d$ lar musbat bo'lganligi uchun $(a + c) - (b + d)$ ayirmaning ham musbat bo'lish kelib chiqadi.

Natija. 2) va 4) qoidalardan quyidagi tengsizliklarni ayirish qoidasi kelib chiqadi: agar $a > b$ va $c > d$ bo'lsa, u holda $a - d > b - c$ bo'ladi.

5). Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $c > 0$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz $ac > bc$, va agar $c < 0$ bo'lsa $ac < bc$ ga ega bo'lamiz.

Boshqacha aytganda, agar tengsizlikning ikki tomonini musbat songa ko'paytirganda tengsizlik ishorasi o'zgarmay qoladi, agar tengsizlikning ikki tomonini manfiy songa ko'paytirsak tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi

Isbot. Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $a - b$ musbat son bo'ladi. Bundan, $ac - bc = c(a - b)$ ayirmaning ishorasi c ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi: agar c musbat son bo'lsa, u holda $ac - bc$ ayirma musbat, va shuning uchun $ac > bc$, agar $c < 0$ bo'lsa, u holda bu ayirma manfiy, va $bc - ac$ musbat, ya'ni $bc > ac$.

6). Agar $a > b > 0$ va $c > d > 0$ bo'lsa, u holda $ac > bd$, ya'ni agar ikki tengsizlikning barcha hadlari bir xil ma'noda musbat bo'lsa u holda bu tengsizliklarni hadma-had ko'paytirganimizda shu ma'nodagi tengsizlikga ega bo'lamiz.

Isbot. Quyidagiga ega bo'lamiz
 $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$. $c > 0$, $b > 0$,
 $a - b > 0$, $c - d > 0$, bo'lishidan $ac - bd > 0$, ya'ni $ac > bd$
 tengsizlikga ega bo'lamiz.

7). Agar $a \geq b > 0$ va $c > d > 0$ bo'lsa, u holda $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$
 (tengsizliklarni bo'lish).

Isbot. Quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac - bd}{cd}.$$

Tenglikning o'ng tomonidagi kasrning sur'ati musbat, va mahraji ham musbat (bu 5) va 6) xossalardan kelib chiqadi). Demak $\frac{a}{d} - \frac{b}{c} > 0$. Shu bilan 7) xossa isbotlandi.

Eslatma. Agar 7) xossada $a = b = 1$ bo'lib $c > d > 0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$.

Ixtiyoriy n - natural soni uchun $y = x^n$ funktsiyasi $[0, +\infty)$ da monoton o'suvchi. Bundan quyidagi tengsizlikning umumiy xossasini keltiramiz.

8). Agar $a > b \geq 0$ bo'lsa, u holda $a^n > b^n$ bo'ladi (bu erda n - natural son).

Ixtiyoriy n - natural soni uchun $y = x^{2n+1}$ funktsiyasi $R = (-\infty, +\infty)$ da monoton o'suvchi. Boshqacha aytganda quyidagi tengsizlik o'rinli.

9). Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ bo'ladi (bu erda n - natural son).

Bu xossaning tengsizliklarni isbotlashda ko'p foydalaniladigan xususiy $n = 1$ bo'lgan holini keltiramiz: agar $a > b$ bo'lsa, u holda $a^3 > b^3$ bo'ladi.

$y = \sqrt[n]{x}$ funktsiyaning $[0, +\infty)$ da, va $y = \sqrt[2n+1]{x}$ funktsiyaning $R = (-\infty, +\infty)$ da o'suvchi bo'lishidan tengsizlikning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

10). Agar $a > b \geq 0$ bo'lsa, u holda $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ bo'ladi (bu erda n - natural son).

11). Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$ bo'ladi (bu erda n - natural son).

Natija. $a^2 > b^2$ tengsizlik o`rinli bo`ladi faqat va faqat, agar $|a| > |b|$ bo`lsa.

Haqiqatan ham, agar $a^2 > b^2$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, u holda biz bundan $a^2 > b^2 \geq 0$ tengsizlikni yozishimiz mumkin, va shuning uchun 10) xossa yordamida quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}, \text{ ya'ni } |a| > |b|.$$

Aksincha, agar $|a| > |b|$, ya'ni $\sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}$ bo`lsa, u holda  $\sqrt{a^2} > \sqrt{b^2} \geq 0$  tengsizlikni yozishimiz mumkin, va shuning uchun 8) xossa yordamida quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\left(\sqrt{a^2}\right)^2 > \left(\sqrt{b^2}\right)^2, \text{ yaniy } a^2 > b^2.$$

8) – 11) xossalarning isboti funktsiyaning monotonligidan kelib chiqishini ta`kidlaymiz.

Shunday qilib tengsizliklarning quyidagi xossalari o`rinli:

- 1). $(a > b, b > c) \Rightarrow a > c$;
- 2). $(a > b) \Rightarrow (a + c > b + c)$;
- 3). $(a + b > c) \Rightarrow (a > c - b)$;
- 4). $(a > b, c > d) \Rightarrow (a + c > b + d)$;
- 5). $(a > b, c > 0) \Rightarrow (ac > bc)$;
 $(a > b, c < 0) \Rightarrow (ac < bc)$;
- 6). $(a > b > 0, c > d > 0) \Rightarrow (ac > bd)$;
- 7). $(a \geq b > 0, c > d > 0) \Rightarrow \left(\frac{a}{d} > \frac{b}{c}\right)$;
- 8). $(a > b \geq 0) \Rightarrow (a^n > b^n)$;
- 9). $(a > b) \Rightarrow (a^{2n+1} > b^{2n+1})$;
- 10). $(a > b \geq 0) \Rightarrow (\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b})$;

$$11). (a > b) \Rightarrow (\sqrt[n+1]{a} > \sqrt[n+1]{b}).$$

Quyida misollar echishda ko'p qo'llaniladigan asosiy tayanch tengsizliklarni isbotlari bilan keltiramiz.

1. Ixtiyoriy ikki haqiqiy a va b sonlari uchun, quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Isboti. Tengsizlikning ta'rifidan foydalanib berilgan tengsizlikning o'ng va chap tomonlarining ayirmasi musbat son bo'lishini ko'rsatish etarli.

Bu ayirma quyidagiga teng

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Ixtiyoriy haqiqiy sonning kvadrati musbat bo'lishidan $(a - b)^2 \geq 0$ tengsizligiga ega bo'lamiz va bundan berilgan tengsizlikning isboti kelib chiqadi.

Tengsizlikning isbotidan quyidagi xulosa kelib chiqadi: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ tengsizlikda tenglik o'rinli bo'ladi faqat va faqat, agar $a = b$ bo'lsa. Tengsizlik to'la isbotlandi.

2. Agar a va b bir xil ishorali haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Isboti. Tengsizlikning 5) xossasidan foydalanib berilgan tengsizlikning ikki tomonini musbat bo'lgan $\frac{1}{ab}$ soniga ko'paytirib quyidagi tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \frac{1}{ab} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \geq 2 \frac{1}{ab}.$$

Endi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ tengsizlikning to'g'riligini ko'rsatish uchun

tengsizlikning ta'rifidan foydalanib $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \geq 2 \frac{1}{ab}$ tengsizlikning o'ng va chap tomonlarning ayirmasi musbat son bo'lishini ko'rsatish etarli.

Bu ayirma quyidagiga teng

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} - 2 \frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2.$$

Ixtiyoriy haqiqiy sonning kvadrati musbat bo'lishidan

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 \geq 0$$

tengsizlikni yozamiz va bundan berilgan $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Oldingi misoldagiga o'qshash $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ tengsizlikda tenglik o'rinli bo'ladi

faqat va faqat agar $a = b$ bo'lganda ekanligi tengsizlikning isbotidan kelib chiqadi. Tengsizlik to'la isbotlandi.

3. $|a| < b$ tengsizlik o'rinli faqat va faqat, agar quyidagi qo'sh tengsizlik o'rinli bo'lsa: $-b < a < b$.

Isboti. Faraz qilaylik $|a| < b$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Agar $a \geq 0$ bo'lsa u holda $|a| = a$ bo'lib berilgan tengsizlikni

$$0 \leq a < b$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu erda $b > 0$ va $a \geq 0$ bo'lishidan

$$-b < 0 \leq a$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$-b < a < b,$$

ya'ni qo'sh tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. $a < 0$ bo'lgan hol ham shunga o'qshash isbotlanadi.

Endi aksincha, faraz qilaylik qo'sh tengsizlik $-b < a < b$ o'rinli bo'lsin.

Agar $a \leq 0$ bo'lsa, u holda $|a| = -a$ bo'lib biz isbotlashimiz kerak

bo'lgan $|a| < b$ tengsizlik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $-a < b$

Lekin $-b < a < b$ tengsizlikdan $-b < a$ bo'lishi kelib chiqadi, bundan isbotlashimiz kerak bo'lgan $-a < b$ tengsizlik kelib chiqadi. $a > 0$ hol ham shunga o'qshash isbotlanadi.

4. Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$a) \quad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$b) \quad |a - b| \geq ||a| - |b||.$$

Isboti. Tengsizlikning birinchi a) $|a + b| \leq |a| + |b|$ qismini isbotlaymiz. $a \neq 0$ haqiqiy sonning absolyut qiymati ta'rifidan

$$a \leq |a|, \quad -a \leq |a|$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikning ikkinchisining ikki tomonini -1 ga ko'paytirib quyidagi ikkita tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$a \leq |a|, \quad a \geq -|a|.$$

Bu ikkala tengsizliklarni birlashtirib ixtiyoriy a haqiqiy son uchun o'rinli bo'lgan quyidagi qo'sh tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Bundan a va b haqiqiy sonlar uchun o'rinli bo'lgan quyidagi

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|,$$

tengsizliklarni yozamiz. Bu tengsizliklarni qo'shib quyidagi tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

yoki

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Shunday qilib $c = |a| + |b|$ soni quyidagi

$$-c \leq a + b \leq c,$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, demak

$$|a + b| \leq c, \text{ yaniy } |a + b| \leq |a| + |b|$$

Tengsizlikning birinchi qismi isbot bo'ldi.

Endi tengsizlikning ikkinchi b) $|a - b| \geq ||a| - |b||$ qismini isbotlaymiz. Yuqorida isbotlangan $|a + b| \leq |a| + |b|$ tengsizlikdan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|,$$

bundan

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

bo'lishini ko'ramiz. Shunga o'qshash

$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,$$

tengsizlikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|b| - |a| \leq |a - b|,$$

yoki

$$|a| - |b| \geq -|a - b|.$$

Shunday qilib bu olingan tengsizliklarni birlashtirsak quyidagi tengsizliklarning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$

va bundan isbotlanishi kerak bo'lgan

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

tengsizlik kelib chiqadi. Tengsizlikning ikkinchi qismi ham isbot bo'ldi.

§1.3. Koshi tengsizligi va uning isboti

Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ - ixtiyoriy manfiy bo'lmagan sonlar bo'lsa, u holda

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli.

Tengsizlikdagi tenglik ishorasi faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bo'lgan holda o'rinli bo'ladi.

Bu tengsizlik n ixtiyoriy manfiy bo'lmagan sonlarning o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi orasidagi tengsizlik bo'lib, Koshi tengsizligi deb ataladi. Koshi tengsizligi murakkab sonli tengsizlik hisoblanadi, va shu paytgacha bu tengsizlikning o'nlab har xil ko'rinishdagi algebraik va geometrik isbotlari paydo bo'ldi. Tengsizlik dastlab Koshi tomonidan murakkab usulda bir nechta varaqda isbotlanib kursatilgan.

(1) tengsizlikning isbotini keltirishdan avval uning xususiy holini $n = 2$ uchun qaraymiz va uning algebraik va geometrik isbotlarini keltiramiz.

Agar $a_1 \geq 0$ va $a_2 \geq 0$ bo'lsa

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2} \quad (2)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. (2)-tengsizlikning isbotini keltiramiz. Algebraik usul. Tengsizlikning 5) xossasiga ko'ra (2) tengsizlikni unga ekvivalent bo'lgan quyidagi tengsizlik bilan almashtiramiz

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2} \Leftrightarrow a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} \geq 0,$$

yoki

$$a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0. \quad (3)$$

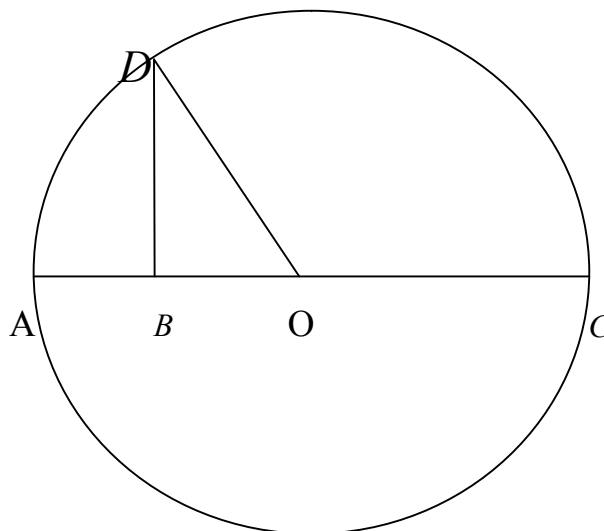
(3) tengsizlikning chap tomonida haqiqiy sonning kvadrati turgani uchun (3) tengsizlik o`rinli, va demak bundan

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

tengsizlikning o`rinli ekanligi kelib chiqadi.

Eslatma. Tengsizlikning isbotidan ma`lumki (2) tengsizlikda tenglik belgisi o`rinli bo`ladi faqat va faqat, agar u (3) tengsizlikda tenglik bajarilsa, ya`ni $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0$ bo`lsa. Bu esa faqat  $a_1 = a_2$  bo`lganda o`rinli.

Geometrik usul. Agar a_1 yoki a_2 ning birisi nol`ga teng bo`lsa (2) tengsizlikning o`rinli ekanligi ravshan. Shuning uchun  $a_1 > 0$  yoki  $a_2 > 0$  deb hisoblaymiz. Faraz qilaylik  $AB$  va  $BC$  kesmalarning uzunligi  $a_1$  va  $a_2$  ga teng bo`lsin. (1-chizma)



Uzunligi $a_1 + a_2$ ga teng bo`lgan  $AC$  kesmaga aylana chizamiz. Bunda aylananing diametri  $AC$  bo`lib markazini O bilan belgilaymiz.

Agar D nuqta AC to`g`ri chiziqdagi B nuqtaga tushirilgan perpendikulyarning aylana bilan kesishish nuqtasi bo`lsa u holda ma`lumki

$$BD = \sqrt{a_1 a_2}.$$

bo`ladi.

$$\text{Ravshanki, } OD = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

$$\text{va } BD \leq OD \quad \text{ya'ni} \quad \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{tengsizlik o'rinli.}$$

Tengsizlikning isbotidan ko`rinadiki (2) tengsizlikda tenglik o`rinli bo`ladi faqat va faqat, agar  $a_1 = a_2$  bo`lsa. (2) tengsizlik to`la isbot bo`ldi.

Biz yuqorida tengsizlikni isbotlaganda tengsizliklarni unga teng kuchli (ekvivalent) bo`lgan tengsizliklar bilan almashtirdik.

Agar (2) tengsizlikning har ikki tomonini kvadratga ko`tarsak

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \geq a_1 \cdot a_2$$

tengsizligiga ega bo`lamiz. Keyingi tengsizlikning har ikki tomonini 4 ga ko`paytirib va barcha hadlarini tengsizlikning chap tomoniga o`tkazsak

$$(a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1 a_2, \quad (a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

tengsizlik hosil bo`ladi.

Bundan, ya'ni $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ bo`lishidan berilgan (2) tengsizlikning o`rinli bo`lishi kelib chiqadi.

$$\text{Agar (2) tengsizlikni } A \text{ bilan va keyingi } \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \geq a_1 \cdot a_2,$$

$(a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1 a_2$ va $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ tengsizliklarni B , C , D lar bilan belgilasak u holda yuqoridagi mulohazamizni quyidagicha ko`rsatish mumkin:  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ . Bu mulohazalarning to`g`riligi 8), 5) va 3) xossalardan kelib chiqadi.

Demak $A \rightarrow D$ bo`lishi ko`rsatildi, ya'ni

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2} \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0.$$

Lekin (2) tengsizlikning to'g'riligi to'la isbot bo'lishi uchun bu mulohazalarning aksining ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish kerak, ya'ni $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, bo'lishini isbotlash kerak. Bu mulohazalarning to'g'riligi tengsizlikning 3), 5), 10) xossaligidan kelib chiqadi.

Demak belgili tengsizliklardan foydalanilib tengsizliklarni isbotlashda shuni hisobga olish kerakki bu yurgizilgan mulohozalarning aksining ham to'g'ri bo'lishini tekshirib ko'rish kerak.

Agar tengsizliklarni isbotlashda har bir qadamda tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan tengsizlik bilan almashtirilib borilsa u holda bu mulohazalarning aksi to'g'ri bo'lishini tekshirib ko'rish shart emas bo'ladi.

Isbot, (1) tengsizlikning isbotini keltiramiz. $n = 2$ uchun (1) tengsizlik o'rinli. Faraz qilaylik (1) tengsizlik $n = m$ uchun o'rinli bo'lsin. U holda u $n = 2m$ uchun ham o'rinli bo'ladi. Haqiqatan ham

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2m}}{2m} &\geq \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \dots + \frac{a_{2m-1} + a_{2m}}{2}}{m} \geq \\ &\geq \sqrt[m]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \dots \frac{a_{2m-1} + a_{2m}}{2}} \geq \sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \dots a_{2m}} \end{aligned}$$

$n = 2$ uchun (1) tengsizlik o'rinli. U holda u $n = 4, 8, \dots$ lar uchun ham, ya'ni ixtiyoriy $n = 2^p$ ($p = 1, 2, 3, \dots$) lar uchun ham o'rinli.

Faraz qilaylik n ixtiyoriy natural son bo'lsin. Agar $n \neq 2^p$ bo'lsa, u holda shunday natural s soni topiladiki $n + s = 2^p$ bo'ladi, va ixtiyoriy manfiy bo'lmagan $a_1, a_2, \dots, a_{n+s}$ sonlar uchun, quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+s}}{n + s} \geq \sqrt[n+s]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{n+s}}.$$

Bu tengsizlikda

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+s} = \frac{a_1 + a_1 + \dots + a_n}{n}$$

desak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)s}{n}}{n+s} \geq \sqrt[n+s]{a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^s}.$$

Agar $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A_n$ deb belgilasak $A_n \geq \sqrt[n+s]{a_1 a_2 \dots a_n A_n^s}$,

tengsizlikga ega bo'lamiz.

Tengsizlikning 8) xossasidan foydalanib oxirgi tengsizlikning ikki tomonini $n+s$ darajaga ko'tarib $(A_n)^{n+s} \geq a_1 a_2 \dots a_n A_n^s$

tengsizligiga ega bo'lamiz. Bundan tengsizlikning 5) xossasidan foydalanib tengsizlikning ikki tomonini $(A_n)^{-s}$ ga ko'paytirib $(A_n)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n$

ga ega bo'lamiz. Tengsizlikning 10) xossasidan foydalanib oxirgi tengsizlikning ikki tomoninidan n darajali ildiz olib quyidagiga ega bo'lamiz

$$A_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{yoki} \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Shunday qilib (1) tengsizlik ixtiyoriy n uchun isbotlandi.

(1) tengsizlikda tenglik bajariladi faqat va faqat, agar

$a_1 = a_2 = \dots = a_n$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Ravshanki agar $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bo'lsa (1) tengsizlik tenglikga aylanadi. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlarning kamida ikkitasi o'z-aro teng

bo'lmasa, u holda (1) ning o'ng va chap tomonlari o'zaro teng bo'lmashligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik aniqlik uchun $a_1 \neq a_2$ bo'lsin. U holda

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \dots a_n}.$$

$a_1 \neq a_2$ bo'lishidan $\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ ga ega bo'lamiz. Demak, agar barcha $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar musbat bo'lsa, u holda

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \dots a_n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ tengsizlik bajariladi va shuning}$$

$$\text{uchun ham } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (4)$$

bo'ladi. Ravshanki agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlarning kamida bittasi nolga teng bo'lsa (4) tengsizlik yana o'rinli bo'ladi.

Misollar ko'ramiz.

1-Misol. Perimetri $2p$ bo'lgan uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'lgan uchburchakni topish so'ralsin.

Yechish: Buning uchun Geron formulasi va Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \cdot \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Demak, perimetri $2p$ bo'lgan ixtiyoriy uchburchakning yuzasi

$\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ dan oshmaydi. $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ ga faqat $p - a = p - b = p - c$, ya'ni

$a = b = c$ bo'lganda teng bo'ladi. Bu esa, bir xil perimetrli uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'ladigan teng tomonli uchburchak bo'lishini bildiradi.

2-Misol. Ixtiyoriy uchburchak uchun ushbu

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4p$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan tengsizlik chap tomonini guruhlab yozib olamiz va Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} \left(a^3 + \frac{1}{a}\right) + \left(b^3 + \frac{1}{b}\right) + \left(c^3 + \frac{1}{c}\right) &\geq 2\sqrt{a^3 \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b^3 \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{c^3 \cdot \frac{1}{c}} = \\ &= 2a + 2b + 2c = 4p \end{aligned}$$

Bu yerda tenglik faqat $a^3 = \frac{1}{a}$, $b^3 = \frac{1}{b}$, $c^3 = \frac{1}{c}$ bo'lganda, ya'ni

$a = b = c = 1$ bo'lganda bajariladi.

3-Misol. $y = x^2 + x^6 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, ($x > 0$) funksiyaning eng kichik

qiymatini topamiz. Buning uchun berilgan funktsiyani ushbu

$$y = x^2 + x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \quad \text{ko'rinishida yozib olamiz va}$$

Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$y \geq 7\sqrt[7]{x^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 7.$$

Bu yerda tenglik $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Demak, berilgan funksiyaning eng kichik qiymati 7 ekan.

2- Bob. Tenglama va tengsizliklar, ularni echish usullari mavzusini o'qitishning metodik masalalari

§2.1. Tenglamalarni yechish va yechimlarini taxlil qilish usullari

Ma'lumki, tarkibida noma'lum o'zgaruvchi qatnashgan tenglik *tenglama* deyiladi. Noma'lum o'zgaruvchining tenglikni ayniyatga aylantiradigan qiymatlari tenglamaning *yechimlari* (ildizlari) deyiladi.

Tenglamaning barcha yechimlari to'plami tenglamaning *yechimi* deyiladi. Bu to'plam bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin. Bunday holatda tenglama yechimga ega emas deyiladi. Tenglamani shartli ravishda

$$h(x) = g(x) \quad (1)$$

tenglik ko'rinishida belgilab olaylik va

$$h_1(x) = g_1(x) \quad (2)$$

undan farqli tenglama bo'lsin. Agar (1) tenglamaning yechimi (2) tenglama yechimining to'plamostisi bo'lsa, (2) tenglama (1) tenglamaning *natijasi* deyiladi. Agar ikkala tenglama bir-birining natijasi bo'lsa, bu tenglamalarni *teng kuchli* tenglamalar deyiladi. Demak, teng kuchli tenglamalarning yechimlari bir xil, ya'ni teng bo'lar ekan.

(2) tenglama (1) tenglamaning natijasi bo'lsa, u holda (1) tenglamaning yechimlari bo'lmagan (2) tenglamaning yechimlari (1) tenglama uchun *chet ildizlar* deyiladi.

$h(x) = g(x)$ va $h(x) - g(x) = 0$ tenglamalar teng kuchli tenglamalar bo'lishi ravshan, shuning uchun $h(x) - g(x)$ ifodani $f(x)$ orqali belgilab, har qanday bir noma'lumli tenglamani $f(x) = 0$ ko'rinishda yozish mumkin.

Agar $f(x) = 0$ ko'rinishdagi tenglama ba'zi almashtirishlar yordamida

$f(x) = 0$ tenglamaning natijasi bo'lgan $f_1(x) = 0$ ko'rinishdagi soddaroq tenglamaga keltirib olingan bo'lsa, u holda $f_1(x) = 0$ tenglamaning barcha yechimlari to'plamidan $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmagan barcha yechimlarini $f(x) = 0$ tenglamaga qo'yib tekshirib chiqiladi va $f(x) = 0$

tenglamani qanoatlantiradigan ildizlar to'plamini tenglamaning yechimi sifatida olainadi.

Agar $f(x)$ ifoda tarkibida transsendent (trigonometrik, logarifmik va boshqa) funksiyalar qatnashgan bo'lsa, u holda $f(x) = 0$ tenglamani *transsendent tenglama* deyiladi.

$3^x + 3^{-x} = 2$; $2^x = 8x$; $\lg x = \frac{1}{3}x$; $\sin x = \frac{1}{2}$ ko'rinishdagi tenglamalar transsendent tenglamalarga misol bo'la oladi. Umumiy holda transsendent tenglamalarni yechish usulini oldindan ko'rsatish mumkin emas. Lekin, ba'zi xususiy hollarda transsendent tenglamalarni yechish mumkin.

Ma'lumki, tenglama tarkibida noma'lum o'zgaruvchi faqat daraja ko'rsatkichidagina qatnashsa, bunday tenglama *ko'rsatkichli tenglama* deyiladi.

Bir hil noma'lum qatnashgan bir nechta tenglamalar berilgan bo'lib, noma'lumning berilgan tenglamalardan hech bo'lmaganda bittasini qanoatlantiradigan barcha qiymatlari to'plamini topish talab qilinsin. Hosil bo'lgan to'plamni *berilgan tenglamalar birlashmasining echimi* deyiladi.

Berilgan tenglamalarning birlashmasini kvadrat qavs orqali birlashtirib yoziladi.

$$\text{Masalan, } \begin{cases} 2x + 1 = 3 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Ba'zi hollarda tenglamalarning birlashmasini $2x + 1 = 3$, $x^2 - 4 = 0$ yoki $(2x + 1 = 3) \vee (x^2 - 4 = 0)$ ko'rinishda ham yozish mumkin.

Birlashmaning echimi birlashmani tashkil etgan barcha tenglamalar echimlarining birlashmasidan iboratdir.

Yuqorida keltirilgan birlashma misolida birinchi tenglama echimi $\{1\}$ va ikkinchi tenglama echimi $\{-2; 2\}$ to'plamlardan iborat. U holda birlashmaning echimi $\{1\} \cup \{-2; 2\}$ yoki $\{-2; 1; 2\}$ to'plamdan iborat bo'ladi.

Tenglamalarni echish jarayonida $f_1(x) = 0$ tenglamani ketma-ket almashtirishlar asosida berilgan tenglama natijasi bo'lgan $f_2(x) = 0$ tenglama

hosil bo'lsin. U holda $f_2(x)=0$ tenglamaning $f_1(x)=0$ tenglamani qanoatlantirmaydigan ildizlari $f_1(x)=0$ tenglamaning *chet ildizlari* deyiladi.

1 - misol. $\sqrt{x-1}=1-x$ tenglamani kvadratga oshirilsa $x-1=(1-x)^2$ yoki $(x-1)(1-x+1)=0$ hosil bo'ladi. Bundan $x_1=1$, $x_2=2$ ildizlar kelib chiqadi. Lekin $x_2=2$ tenglamaning aniqlanish sohasiga tegishli emas. Shuning uchun u chet ildiz.

Ba'zi hollarda $f_1(x)=0$ tenglamani $f_2(x)=0$ ko'rinishdagi boshqa tenglama bilan almashtirish natijasida ba'zi ildizlar yo'qolib qolishi ham mumkin.

2 -misol. $x^2=x$ tenglamadan $x=1$ tenglamaga o'tish natijasida $x=0$ ildiz yo'qolib qoladi. Bunday holat $x^2=x$ tenglamaning ikkala tomonini $x \neq 0$ shart bilan, x ga bo'lish natijasida yuzaga keladi. Shuning uchun $x=0$ qiymat tenglamaning ildizi bo'lish bo'lmasligi alohida tekshiriladi. Berilgan tenglama

uchun $x=0$ ildiz bo'lishi ayon, ya'ni $x^2=x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Tenglama echimini topishda tenglama ustida turli hil almashtirishlar bajarishga to'g'ri keladi. Shuning uchun, tenglamani qanday almashtirish natijasida o'ziga teng kuchli bo'lgan tenglama hosil bo'lishini yoki berilgan tenglamaning natijasi bo'lgan tenglama hosil bo'lishini yoki bo'lmasa qanday almashtirish natijasida ba'zi ildizlar yo'qolib qolishini bilish muhim ahamiyatga ega.

Tenglamalarni echishda ko'p ishlatiladigan teng kuchli almashtirishlar quyidagilar:

1⁰. $f(x)=g(x)$ ko'rinishdagi tenglamaning ikkala tarafiga tenglamaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning barcha qiymatlarida aniqlangan $\varphi(x)$ ifoda qo'shilsa, hosil bo'lgan $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama bo'ladi.

3 -misol. $x^2 + 3x = -2$ tenglama $x^2 + 3x + 2 = -2 + 2$ tenglama yoki $x^2 + 3x + 2 = 0$ tenglamaga teng kuchli.

4 -misol. $x^4 - 4 = 0$ tenglama $x^4 - 4 + \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x}$ tenglamaga teng kuchli bo'la olmaydi. Chunki $\sqrt[4]{x}$ ifoda x ning tenglama aniqlanish sohasidagi manfiy qiymatlari uchun ma'noga ega emas.

2⁰. $\varphi(x)$ ifoda berilgan $f(x) = g(x)$ tenglamaning aniqlanish sohasidagi barcha x lar uchun aniqlanib, bu qiymatlarning hech birida nolga teng bo'lmasin.

U holda $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ va $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}$ tenglamalar berilgan tenglamaga teng kuchli tenglamalardir.

5 -misol. $x - 9 = \sqrt{x} + 3$ tenglamaning ikkala tomonini $\sqrt{x} + 3$ ifodaga bo'lish natijasida berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lgan tenglama hosil bo'ladi, chunki $\sqrt{x} + 3$ ifoda x ning tenglamaning aniqlanish sohasiga kirgan barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lib, bu qiymatlar uchun musbat.

6 -misol. $(x-1)(x+1) = x+1$ tenglamaga $x+1 \neq 0$ shart qo'yib uning ikkala tomonini $x+1$ ifodaga bo'linsa, hosil bo'lgan $x-1=1$ tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'la olmaydi, chunki $x+1$ ifoda tenglama aniqlanish sohasiga kirgan x ning -1 ga teng bo'lgan qiymatida nolga teng. Lekin berilgan tenglama $\begin{cases} x-1=1 \\ x+1=0 \end{cases}$ birlashmaga teng kuchli bo'ladi.

3⁰. Berilgan $f(x) = g(x)$ tenglamaning ikkala tomonini toq $(2m+1)$ darajaga ko'tarsak, hosil bo'lgan $[f(x)]^{2m+1} = [g(x)]^{2m+1}$ tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'ladi.

7 -misol. $\sqrt[3]{x-2} = 1$ tenglama $x-2=1$ tenglamaga teng kuchli.

4⁰. Ikkala tarafi musbat bo'lgan yoki ikkala tarafi ham manfiy bo'lgan, yoki bitta tarafi nolga teng bo'lgan $f(x) = g(x)$ tenglamalarning ikkala tarafini bir hil natural darajaga ko'tarish natijasida hosil bo'lgan $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'ladi.

8-misol. $2x - 1 = \sqrt{x - 3}$ tenglamaning ikkala tarafini kvadratga ko'tarilsa, hosil bo'lgan $(2x - 1)^2 = x - 3$ tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli, chunki berilgan tenglamaning aniqlanish sohasi $x > 3$ da tenglamaning ikkala tarafi ham musbat.

9 - misol. $\sqrt{x - 1} = x - 3$ tenglamaning ikkala tarafini kvadratga oshirishdan hosil bo'lgan $x - 1 = (x - 3)^2$ tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli emas, chunki masalan $x = 2$ qiymatda $\sqrt{x - 1} > 0$, $x - 3 < 0$ bo'lib, tenglamaning ikkala tarafi ikki hil ildizga ega. Hosil bo'lgan

$x - 1 = (x - 3)^2$ tenglamani soddalashtirib $x^2 - 6x + 10 = 0$ Viet formulalari qo'llansa, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ ildizlar hosil bo'ladi. Ulardan $x_2 = 5$ berilgan tenglamaning ildizi, $x_1 = 2$ esa tenglamaning chet ildizi bo'ladi.

Shunday qilib, ba'zan tenglamaning ikkala tarafidagi ifodalarni bir hil darajaga ko'tarish berilgan tenglamaga teng kuchli tenglamaga olib kelmasa ham, tenglamalarni echishda muhim ahamiyatga ega ekan.

Umuman tenglamalar ustida ba'zi almashtirishlarni bajarganimizda tenglamaning aniqlanish sohasining kengayib ketishi chet ildizlarning kelib chiqishiga sabab bo'lishi mumkin. Aksincha, tenglama aniqlanish sohasining torayishi esa, ba'zi ildizlarning yo'qolib qolishiga olib keladi. Shuning uchun berilgan tenglamani boshqa tenglama bilan almashtirganda, tenglamaning aniqlanish sohasini o'zgarishi albatta e'tiborga olinishi lozim.

Agar almashtirish natijasida tenglama aniqlanish sohasi kengayib, chet ildizlar hosil bo'lsa ular tashlab yuboriladi. Buning uchun hosil bo'lgan barcha ildizlarni tenglamaga qo'yib ko'rib, tenglamani qanoatlantirganlari qoldiriladi.

Agar tenglamani boshqa tenglama bilan almashtirganda tenglamaning aniqlanish sohasi torayib qolsa, o'zgaruvchining berilgan tenglama aniqlanish sohasiga kirib, almashtirish natijasida hosil bo'lgan tenglamaning aniqlanish sohasiga kirmagan barcha qiymatlari berilgan tenglamaning ildizi bo'lish bo'lmasligi tekshiriladi.

10 -misol. $\sqrt{4x+5} = 8 - \sqrt{2x-1}$ tenglamani eching.

Yechish._ Berilgan tenglamada o'zgaruvchining yo'l qo'yishi mumkin

bo'lgan qiymatlari sohasi $\begin{cases} 4x+5 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 8-\sqrt{2x-1} \geq 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasining echimidan

iborat. Bu sistema quyidagi $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x-1} \leq 8 \end{cases}$ sistemaga teng kuchli. Bu sistemani

qanoatlantiruvchi qiymatlarda berilgan tenglamaning ikkala tarafi musbat. Shuning uchun tenglamani kvadratga ko'tarib, soddalashtirilsa $8\sqrt{2x-1} = 29 - x$ tenglama kelib chiqadi. Bunda $29 - x \geq 0$ deb faraz qilib, tenglamani kvadratga ko'tarilsa $x^2 - 186x + 905 = 0$ tenglama undan $x_1 = 5$, $x_2 = 181$ ildizlar kelib chiqadi.

Xosil bo'lgan ildizlardan $x_1 = 5$ tenglamaning ildizi, $x_2 = 181$ tenglamaning chet ildizi bo'ladi.

11 -misol. $\sqrt{3x+2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{x-2}$ tenglamani eching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $\begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ sistema echimidan

iborat.

Demak $\begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x \geq 2 \end{cases}$ bundan $x \geq 2$ berilgan tenglamaning aniqlanish sohasi.

Tenglama unga teng kuchli tenglamalar bilan almashtirish yordamida echiladi:

$$\sqrt{3x+2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x+2 = 18 + 6\sqrt{2(x-2)} + x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 14 = 6\sqrt{2(x-2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq \frac{14}{3} \\ x^2 - 14x + 196 = 9(2x - 4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4\frac{2}{3} \\ x^2 - 32x + 85 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4\frac{2}{3} \\ x_{1,2} = 16 \pm 3\sqrt{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4\frac{2}{3} \\ x_1 = 16 + 3\sqrt{19} \\ x_2 = 16 - 3\sqrt{19} \end{cases}$$

Hosil bo'lgan $x_2 = 16 - 3\sqrt{19}$ ildiz $x \geq 4\frac{2}{3}$ shartni qanoatlantirmaganligi

uchun tenglamaning ildizi $x = 16 + 3\sqrt{19}$.

Endi yuqorida bayon qilingan tushunchalarga doir misollar keltiramiz.

12-misol. $\sqrt{3-2x} = x$.

Yechish. Misolda qatnashayotgan $u = \sqrt{3-2x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $2x - 3 \geq 0$ bundan $x \leq 1,5$; $u = x$ funksiyaning aniqlanish sohasi esa $(-\infty, +\infty)$ dan iborat. U holda tenglamaning aniqlanish sohasi $x \leq 1,5$ bo'ladi.

Endi tenglamaning ikkala tomoni kvadratga ko'tarilsa, $x^2 + 2x - 3 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Viyet formulalariga asosan, bu tenglama ildizlari $x_1 = -3$ va $x_2 = 1$. Ikkala ildiz ham tenglamaning aniqlanish sohasida yotadi. Lekin $x_1 = -3$ chet ildiz, chunki $\sqrt{3-2x} \geq 0$ bundan

$x \geq 0$. Agar $x \geq 0$ bo'lishini oldindan hisobga olinganda, x qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamini $[0; 1,5]$ segment sifatida olish mumkinligi kelib chiqar edi va bu holda faqat $x = 1$ ildiznigina tenglamaga qo'yib tekshirish yetarli bo'ladi. Berilgan tenglama uchun $[0; 1,5]$ to'plamni x ning *yo'l qo'yishi mumkin bo'lgan qiymatlari sohasi* deb ataladi. Qisqacha (qiymatlar sohasi) Q.S. deb belgilab olinadi.

13-misol. $\sqrt{x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{x - \sqrt{x+2}} = 2$.

Yechish. Bu ko‘rinishdagi tenglamalar uchun x ning Q.S. ni topish ko‘p vaqtni talab etadi. Shuning uchun oldin tenglamani almashtirishlar yordamida berilgan tenglamaning natijasi bo‘lgan soddaroq tenglama ko‘rinishiga keltirib olainadi. Hosil bo‘lgan tenglama ildizlarini topib, berilgan tenglamaga qo‘yib tekshirib chiqiladi.

Berilgan tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, soddalashtiriladi. Hosil bo‘lgan $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2 - x$ tenglamani yana kvadratga ko‘tarib, soddalashtirilsa $x = 2$ ildizni hosil bo‘ladi. x ning bu qiymatini berilgan tenglamaga qo‘yib, $x = 2$ tenglamaning ildizi bo‘lishiga ishonch hosil qilinadi.

14 -misol. $\sqrt{x-7} + \sqrt{7-x} = 5$ tenglamani eching.

Yechish. Bunday ko‘rinishdagi tenglamalarda x ning Q.S. ni aniqlash tenglamaning yechimlarini topish imkoniyatini beradi. Haqiqatdan ham, $\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \end{cases}$ dan $x = 7$ kelib chiqadi. Demak, x ning yo‘l qo‘yishi mumkin bo‘lgan qiymati faqat 7 ekan. Bu qiymat berilgan tenglamani qanoatlantirmaganligi sababli tenglama yechimi bo‘sh to‘plam.

15 -misol. $x^2 + 4x \cos x + 4 = 0$.

Yechish. Tenglamadagi $4\cos x$ ifodani x ning koeffisienti sifatida qarab, kvadrat tenglama yechimlari topiladi:

$$x_{1,2} = \frac{-4\cos x \pm \sqrt{16\cos^2 x - 16}}{2}. \text{ Bunda } 16\cos^2 x - 16 \geq 0 \text{ shartdan}$$

$$\cos^2 x = 1 \text{ yoki } \sin^2 x = 0 \text{ ni hosil qilinadi. U holda } x = k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ va } x = \frac{-4(\pm 1)}{2} = \pm 2. \text{ Demak, berilgan tenglama yechimi bo‘sh to‘plam.}$$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ko‘rinishdagi tenglamalarni yechishda ularning $f(x) = g(x)$ ko‘rinishdagi tenglamaga teng kuchli ekanligidan foydalaniladi.

16 -misol. $2^{x^2-4} = 1$.

Yechish. $1 = 2^0$ bo‘lganligi uchun berilgan tenglamani $2^{x^2-4} = 2^0$ ko‘rinishda yozib olinadi. U holda $x^2 - 4 = 0$, bundan $x_{1,2} = \pm 2$.

17 -misol. $4^{\cos^2 x - 1} = 1$.

Yechish. Bu tenglama $\cos^2 x - 1 = 0$ tenglamaga teng kuchli. U holda $\cos^2 x = 1$ yoki $\cos x = \pm 1$, bundan $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

18 -misol. $3^{x^2 - \frac{1}{2}x} = \sqrt[3]{9}$.

Yechish. Berilgan tenglamani $3^{x^2 - \frac{1}{2}x} = 3^{\frac{2}{3}}$ ko'rinishida yozib olinadi. U holda $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}$ yoki $6x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Kvadrat tenglamani yechib, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{12}$ topiladi.

19 -misol. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot 3^{x^2} - \frac{1}{\sqrt[5]{243}} = 0$ tenglamani eching.

Yechish. Agar $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot 3^{x^2} = 3^{-6} \cdot 3^{x^2} = 3^{x^2-6}$ va $\frac{1}{\sqrt[5]{243}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$

tenglamlarni hisobga olinsa, tenglama $3^{x^2-6} = 3^{-1}$ ko'rinishga keladi. U holda $x^2 - 6 = -1$ yoki $x^2 - 6x + 5 = 0$. Agar $x = 1$ ildiz tenglamani qanoatlantirishini hisobga olib $x^3 - 6x + 5$ ni $x - 1$ ga bo'lsak, $x^2 + x - 5$ ga ega bo'linadi. Bundan $(x - 1)(x^2 + x - 5) = 0$ tenglamani yechib $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$ lar keltirib chiqariladi.

20 -misol. $x^{2\lg^2 x} = x^{3\lg x + 2}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning aniqlanish sohasi $(0, +\infty)$ to'plamdan iborat.

Tenglamani shakl almashtirib $2\lg^2 x = 3\lg x + 2$ tenglamaga ega bo'lamiz, ya'ni $2\lg^2 x - 3\lg x - 2 = 0$. Hosil bo'lgan tenglamaga $\lg x = t$ belgilashni qo'llasak, $2t^2 - 3t - 2 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning

$t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{1}{2}$ ildizlaridagi t ning o'rniga $\lg x$ ni qo'ysak,

$$\lg x = 2, x_1 = 100; \lg = -\frac{1}{2}, x = 10^{-\frac{1}{2}}, x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Bu ildizlardan tashqari $x = 1$ ham tenglama ildizi bo'lishini ko'rish qiyin emas. Shunday qilib, tenglama uchta ildizga ega

$$x_1 = 100; x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}, x_3 = 1.$$

21 -misol. $2^{\frac{x}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{2x}} - 2^{\frac{1}{3}}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani $2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{2x}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{2x}} = 2^{\frac{7}{3}}$ yoki $2^{\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x}} = 2^{\frac{7}{3}}$ ko'rinishga keltirib, daraja ko'rsatkichlarini o'zaro tenglashtirib olamiz. U holda

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x} = \frac{7}{3} \quad \text{tenglamada} \quad x \neq 0 \quad \text{bo'lishini hisobga olgan holda umumiy}$$

mahrajga keltiraylik. Natijada $3x^2 + 2x^2 - 3 = 14x$ yoki $5x^2 - 14x - 3 = 0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu kvadrat tenglamadan $x_1 = 3, x_2 = -0,2$ ildizlarni topamiz.

§2.2 Tengsizliklarni yechish va yechimlarini taxlil qilish usullari

Birinchi darajali bir nomalumli tengsizliklarni yechish. Ushbu

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

ko'rinishdagi tengsizliklar birinchi darajali bir nomalumli chiziqli algebraik tengsizliklar deyilad. Bu tengsizliklar $a > 0$ bo'lganda mos ravishda

$$x \in (-\frac{b}{a}; \infty), x \in (-\infty; -\frac{b}{a}); x \in (-\frac{b}{a}, \infty), x \in (-\infty; -\frac{b}{a})$$

yechimlar to'plamiga ega, $a < 0$ bo'lganda esa mos ravishda

$$x \in (-\infty; \frac{b}{a}); x \in (-\frac{b}{a}; \infty); x \in (-\infty; \frac{b}{a}), x \in (-\frac{b}{a}; \infty)$$

yechimlar to'plamiga ega bo'ladi.

$ax + b$ ($a \neq 0$) ikkihadni tekshiraylik. Bu ikkihadning ildizi yoki nolini topaylik: $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Endi $ax + b$ ikkihadni $a(x + \frac{b}{a})$ ($a \neq 0$) ko'rinishda ifodalaylik.

$a > 0$ bo'lib, $x + \frac{b}{a} > 0$ bo'lsa, ikkihadning qiymati musbat ($x > -\frac{b}{a}$ bo'lganda), $x + \frac{b}{a} < 0$ ($x < -\frac{b}{a}$ bo'lganda) ikkihadning qiymati manfiy bo'ladi.

Xulosa qilib aytganda, $a > 0$ bo'lib, x ning qiymati $-\frac{b}{a}$ ildizdan katta bo'lganda $ax + b$ ikkihadning qiymati musbat, x ning qiymati $-\frac{b}{a}$ ildizdan kichik bo'lganda ikkihadning qiymati manfiy bo'ladi ($a < 0$ bo'lganda teskarisi bo'ladi).

Geometrik nuqtaiy nazardan $a > 0$ bo'lganda $ax + b$ ikkihadning qiymati o'z ildizining chap qismida manfiy o'ng qismida musbat bo'ladi.

1-misol $\frac{3x+1}{6} + \frac{1}{2} \geq \frac{x+3}{3} - 1,5$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning ikkala qismini 6 ga ko'paytiramiz.

$$3x + 1 + 3 \geq 2(x + 3) - 1,5 \cdot 6,$$

$$3x + 4 \geq 2x + 6 - 9, 3x - 2x \geq -3 - 2x - 3 - 4, x \geq -7.$$

Javob. $x \in [-7; \infty]$

2. Ikkinchi darajali bir noma'lumli (kvadrat) tengsizliklarni yechish. Ushbu

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \geq 0, \\ ax^2 + bx + c \leq 0 (a \neq 0) \end{aligned} \quad (2)$$

ko'rinishdagi tengsizliklar bir noma'lumli ikkinchi darajali (kvadrat) tengsizliklar deyiladi.

$ax^2 + bx + c > 0$ ($a \neq 0$) tengsizlikni yechaylik.

Agar $a > 0$ bo'lsa, bu tengsizlik $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$ yoki

$$x^2 + px + q > 0 \quad (3)$$

tengsizlikka teng kuchli. Bunda $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$.

Agar $a < 0$ bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$ yoki

$$x^2 + px + q < 0 \quad (4)$$

tengsizlikka teng kuchli bo'ladi. Bunda $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$. Shunga o'xshash boshqa tengsizliklar ham (3) yoki (4) kabi ko'rinishga keltiriladi.

Endi

$$x^2 + px + q \quad (5)$$

uchhadni qaraylik.

1. Agar $D = p^2 - 4q > 0$ bo'lsa, u holda $x^2 + px + q$ uchhadni chiziqli ko'paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

bunda $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ($x_1 < x_2$) kvadrat uchhadning ildizlari (no'llari).

Agar $x < x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $x - x_1 < 0$ va $x - x_2 < 0$ bo'lib, $x^2 + px + q > 0$ bo'ladi.

Agar $x_1 < x < x_2$ bo'lsa, u holda $x - x_1 < 0$ va $x - x_2 < 0$ bo'lib, $x^2 + px + q < 0$ bo'ladi.

Agar $x > x_2 > x_1$ bo'lsa, u holda $x - x_1 < 0$ va $x - x_2 < 0$ bo'lib, $x^2 + px + q > 0$ bo'ladi.

Xulosa. Agar $D > 0$ bo'lsa, u holda x kichik ildizdan kichik, katta ildizdan katta bo'lganda $x^2 + px + q$ kvadrat uchhadning qiymati musbat, x ning qiymati ildizlar oralig'ida bo'lganda manfiy bo'ladi.

2. Agar $D = p^2 - 4q = 0 \left(q = \frac{p^2}{4} \right)$ bo'lsa, u holda uchhad to'liq kvadratni tashkil

$$\text{qiladi. } x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2.$$

$x \neq -\frac{p}{2}$ bo'lganda uchhadning qiymati musbat, $x = -\frac{p}{2}$ bo'lganda 0 ga teng.

3. Agar $D = p^2 - 4q < 0$ bo'lsa, u holda (5) uchhadga quyidagicha to'liq kvadrat ajratish mumkin:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \frac{4q - p^2}{4},$$

bunda $\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 \geq 0$ va $4q - p^2 > 0$, shuning uchun x ning barcha qiymatlarida $x^2 + px + q > 0$ bo'ladi. Shuningdek, $x^2 \geq x + q > 0$ va $x^2 + x + q \leq 0$ tengsizliklar ham yechiladi. $x^2 + x + q \geq 0$ ($x^2 + x + q \leq 0$) tengsizlik yechimlari to'plami $x^2 + x + q > 0$ ($x^2 + x + q < 0$) tengsizlik yechimlari to'plamiga $x^2 + x + q$ uchhadning ildizlari qo'shib olinishidan hosil qilinadi.

2-misol $x^2 - 8x + 15 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning chap qismni chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz $(x-3)(x-5) > 0$. Bu yerda $x_1 = 3$ yoki $x_2 = 5$ bo'lganda tengsizlikning chap qismi nolga aylanadi.

$x > 5$ bo'lganda x ning barcha qiymatlarida $x-3 > 0$ va $x-5 > 0$ bo'lib, kvadrat uchhad faqat musbat qiymatlar qabul qiladi va x ning bunday qiymatlari yechim bo'la oladi.

$3 < x < 5$ bo'lganda, $x-3 > 0$ va $x-5 < 0$ bo'lib, kvadrat uchhad manfiy qiymatlar qabul qiladi va x ning bunday qiymatlari berilgan tengsizlikning yechimi bo'la olmaydi.

$x < 3$ bo'lgand $x-3 < 0$ va $x-5 < 0$ bo'lib, $(x-3)(x-5)$ bo'ladi, ya'ni uchhad musbat qiymatlarni qabul qiladi, x ning bunday qiymatlari ham berilgan tengsizlikning yechimi bo'ladi.

Javob. $x < 3$ yoki $x > 5$.

3-misol $x^2 - x - 6 < 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratamiz:
 $((x+2)(x-3) < 0$.

Bu tengsizlik x ning qiymatlari uning ildizlari oraligida yotganda bajariladi:
 $x_1 < x < x_2$. $x_1 = -2$ $x_2 = 3$. Demak, $-2 < x < 3$.

4-misol $x^2 - 10x + 25 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratsak, to'liq kvadrat tashkil qilishini ko'rish qiyin emas: $(x-5)(x-5) > 0$ $(x-5)^2 > 0$

Oxirgi tengsizlikning chap qismi $x \neq 5$ bo'lganda hamma vaqt musbat.

Javob. $x \neq 5$.

5-misol $3x^2 + 5x + 3 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikning chap qismi chiziqli haqiqiy ko'paytuvchilarga ajralmaydi. Tengsizlikning chap qismidan to'liq kvadrat ajratamiz.

$$3x^2 + 5x + 3 = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}x + \frac{25}{36} + \frac{11}{36}\right) = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}.$$

$3x\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0$ tengsizlik x ning $(-\infty; +\infty)$ oraliqdan olingan barcha qiymatlarida bajariladi.

Javob. $-\infty < x < \infty$.

Bir nomalumli yuqori darajali ratsional tengsizliklarni yechish. Intervallar usuli.
 Berilgan bir nomalumli n -darajali ratsional tengsizlikni quyidagi kanonik ko'rinishlarning biriga keltirish mumkin.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a > 0 \quad (6)$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a < 0 \quad (7)$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a \geq 0 \quad (8)$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a \leq 0 \quad (9)$$

(6)-(9) tengsizliklarni turli usullar bilan yechish mumkin. Biz esa bu tengsizliklarni yechishga intervallar usulini qo'llaymiz. Intervallar usulining mazmunini aniq misollar yechish bilan ochishga harakat qilaylik.

6 -misol $(x+1)(x-3)(x-5) > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Bu tengsizlikning chap qismidan iborat bo'lgan $f(x) = (x+1)(x-3)(x-5) > 0$ funksiya barcha R haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan. Funksiyaning (ko'phadining) qiymatlari $x = -1; x = 3$ va $x = 5$ nuqtalarda nolga aylanadi.

Bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty; -1); (-1; 3); (3; 5)$ va $(5; +\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Tengsizlikning chap qismi $(x+1)(x-3)(x-5)$ uchta ko'paytuvchining ko'paytmasidan iborat. Bu ko'paytuvchilardan har biring qaralayotgan oraliqlardagi ishoralari jadvalda ko'rsatilgan.

	$x \in]-\infty; -1[;$	$x \in]-1; 3[;$	$x \in]3; 5[;$	$x \in]5; 8[;$
$x+1$	-	+	-	+
$x-3$	-	-	+	+
$x-5$	-	-	-	+

Jadvaldan ko'rinib turganidek:

agar $x \in]-\infty; -1[;$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]-1; 3[;$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]3; 5[;$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]5; 8[;$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

Biz $]-\infty; -1[;$ $]-1; 3[;$ $]3; 5[;$ $]5; 8[;$ oraliqlarning har birida funksiya (tengsizlikning chap qismi) o'z ishorasini saqlashini $-1; 3$ va 5 nuqtalar orqali o'tishda uning

ishorasi o'zgarishini ko'ramiz. Demak, berilgan tengsizlikni yechimlar to'plami $]-1;3[\cup]5;8[$; bo'ladi.

7-misol $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 > 0$ tengsizlikni yehcing.

Yechish. Tengsizlikning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$ ko'phadi $-1;1;3$ va 5 nuqtalarda 0 ga aylanadi. Demak, $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$. Bunday holda berilgan tengsizlik quyidagi ko'rinishni oladi: $(x+1)(x-1)(x-3)(x-5) > 0$. Yuqoridagiga o'xshash $]-\infty; -1[;]-1;1[;]1;3[;]3;5[;$ va $]5;+\infty[$; orliqlarning har birida $f(x)$ funksiyaning ishorasini aniqlaymiz:

agar $x \in]-\infty; -1[$; bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]-1;1[$; bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]1;3[$; bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]3;5[$; bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]5;+\infty[$; bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

Berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami $]-\infty; -1[;]1;3[;]5;+\infty[$; oraliqlarning yig'indisidan iborat bo'ladi: $]-\infty; -1[\cup]1;3[\cup]5;+\infty[$;

8-misol. $(x^2 - 4)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4x + 4) < 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$; $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$; $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$; $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ bo'lgani uchun berilgan tengsizlik $(x+2)^3(x-2)^4(x-4) < 0$ ko'rinishni oladi.

$f(x) = (x+2)^3(x-2)^4(x-4)$ funksiyaning qiymati $x = -2; x = 2; x = 4$ nuqtalarda nolga aylanadi. $f(x)$ funksiyaning $]-\infty; -2[;]-2;2[;]2;4[;$ va $]4;+\infty[$; oraliqlardagi ishoralarini aniqlaymiz:

agar $x \in]-\infty; -2[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]-2;2[$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]2;4[$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]4;+\infty[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

Berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami: $]-2;2[\cup]2;4[$.

Bir noma'lumli kasr ratsional tengsizliklarni yechish

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0; \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0; \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0; \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0 \quad (10)$$

ko'rinshdagi bir nomalumli tengsizliklar *kasr ratsional tengsizliklar* deyiladi. Bunda

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0);$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0);$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \quad \text{ko'rinishdagi ratsional tengsizlikni yechish} \quad P_n(x) \cdot Q_m(x) > 0 \quad (11)$$

tengsizlikni yechish bilan teng kuchlidir. Haqiqatan berilgan tengsizlikning ikkala qismini x ning mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida musbat bo'lgan $[Q_m(x)]^2$ kophadga kopaytirsak, (11) tengsizlik hosil bo'ladi ($Q_m(x) \neq 0$).

Qolgan tengsizliklarni yechish uchun ham yuqoridagidek mulohaza yuritish

$$\text{mumkin.} \quad \frac{ax+b}{cx+d} > k; \quad \frac{ax+b}{cx+d} \geq k; \quad \frac{ax+b}{cx+d} < k, \quad \frac{ax+b}{cx+d} \leq k \quad (12)$$

ko'rinishdagi tengsizliklar *kasr chiziqli bir noma'lumli tengsizliklar* deyiladi. Bu yerda a, b, c, d berilgan haqiqiy sonlar va $c \neq 0$, $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (agar $c = 0$ bo'lsa, kasr-

chiziqli tengsizliklar chiziqli tengsizlikka aylanadi; agar $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ bo'lsa, bunday holda (12) tengsizliklar x o'zgaruvchini o'z tarkibiga olmaydi.)

$$9\text{-misol} \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 35} > 0 \quad \text{tengsizlikni yeching.}$$

Yechish. Berilgan tengsizlikning surat va maxrajidagi uchhadlarni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$; $x^2 - 12x + 35 = (x-5)(x-7)$, natijada berilgan tengsizlik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-7)} > 0.$$

Bu tengsizlikni yechish $x \neq 5$ va $x \neq 7$ bo'lganda $f(x) = (x-2)(x-3)(x-5)(x-7)$ tengsizlikni yechish bilan teng kuchli. Bu tenglikning

chap qismini nolga aylantiradigan 2,3,5,7 nuqtalar tengsizliklarning aniqlanish sohasini $]-\infty; 2[$, $]2; 3[$, $]3; 5[$, $]5; 7[$ va $]7; +\infty[$ oraliqlarga ajratadi. Har bir oraliqda $f(x)$ funksiyaning ishorasin aniqlaymiz.

agar $x \in]-\infty; 2[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]2; 3[$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]3; 5[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

agar $x \in]5; 7[$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]7; +\infty[$ bo'lsa, $f(x) > 0$ bo'ladi;

x ning berilgan tengsizlikni qanoatlandiradigan qiymatlarini ajratib olamiz:

$$]-\infty; 2[\cup]3; 5[\cup]7; +\infty[$$

10-misol. $\frac{3x-2}{2x-3} \leq 3$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $x \neq \frac{3}{2}$ shartda berilgan tengsizlikning ikkala ismini $(2x-3)^2$ ga

ko'paytirib, unga teng kuchli bo'lgan tengsizlikni olamiz:

$$(3x-2)(2x-3) \leq 3(2x-3)^2$$

$$6x^2 - 13x + 6 \leq 12x^2 - 36x + 27$$

$$6x^2 - 23x + 21 \geq 0$$

Bu tengsizlikning chap qismini nolga aylantiradigan x ning qiymatlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{7}{2}.$$

Berilgan tengsizlik x ning kichik ildizdan kichik hamda katta ildizidan katta bo'lgan qiymatlarida bajariladi, ya'ni tengsizlikning yechimlar to'plami $x < \frac{3}{2}$ va

$x \geq \frac{7}{2}$ tengsizliklarni qanoatlandiruvchi x ning qiymatlari bo'ladi:

$$]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[.$$

Xulosa

Tenglama va tengsizliklarni o`qitishning metodik masalalari ya`ni uning ildizlarini tekshirish va topish usullarini o`rganish matematikada, shu bilan birga maktab matematikasida asosiy masalalarning biri bo`lib hisoblanadi. Matematikaning va boshqada fanlarning ko`pgina masalalari algebraik tenglama va tengsizliklarni echishga olib kelinadi. Bunday masalalarni echishning eng qiyin va eng ahamiyatli qismi yuqori tartibli tenglamalarda ildizlarni topish bo`lib, bu o`quvchilardan yuqori tartibli tenglamalarni echishning har xil usullarini o`rganishni talab qiladi.

Maktab matematikasida tenglama va tengsizliklar tushunchasining eng sodda tenglama va tengsizliklarning bir qancha turlarini echish usullari o`rganiladi. Bir noma`lurga ega birinchi, ikkinchi va ayrim to`rtinchi darajali tenglama va tengsizliklarni echish usullarini o`rgatish maktab matematikasining asosiy mazmunini tashkil etadi. Keyinchalik esa oliy matematikada yuqori tartibli tenglama va tengsizliklar o`rganilib, ularning ayrim turlari uchun echimni topish usullari o`rganiladi.

Bu bitiruv materiallari bilan tanishgan har bir o`qituvchi yoki talabada hosil bo`ladigan ma`lumatlarni keltirib o`tamiz:

- algebraik tenglamalar haqida umumiy tushunchalar, algebraik tenglamalarni teng kuchli almashtirish haqidagi tushunchalar, tenglamani echish jarayonida tenglamani boshqa tenglamaga almashtirishdan hosil bo`lgan tenglamani uchinchi boshqa tenglamaga almashtirishdan va jarayonni echimi ma`lum bo`lgan tenglama hosil bo`lgan cha almashtirishlarni bajarish va buning uchun kerakli: tenglamadagi tenglik ishorasining ikki tomoniga noma`lum qatnashgan yoki qatnashmagan ba`zi ifodani qo`shish, tenglik ishorasining ikki tomoniga noma`lum qatnashgan yoki qatnashmagan ba`zi ifodani ko`paytirish yoki bo`lish, tenglik ishorasining ikki tomonini darajaga ko`tarish, tenglik ishorasining ikki tomonini ildizdan chiqarish kabi operatsiyalarni bajarishlarni o`rganishning nazariy masalalari bilan;

-algebraik tengsizliklar va ularning xossalari haqida umumiy tushunchalarning nazariy masalalari qaralib bunda, agar tengsizlikning ikki tomonini musbat songa ko'paytirganda tengsizlik ishorasi o'zgarmay qolishi, agar tengsizlikning ikki tomonini manfiy songa ko'paytirsak tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgarishi haqidagi xulosalar bilan;

- n ta ixtiyoriy manfiy bo'lmagan sonlarning o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi orasidagi tengsizlik Koshi tengsizligi deb atalishi, Koshi tengsizligining algebraik va geometrik usullari va uning isboti haqida umumiy tushunchalar bilan;

-bir o'zgaruvchili tenglama turlari uning yechimlari, echimini topishda tenglama ustida bajariladigan turli hil almashtirishlar, tenglamani almashtirish natijasida o'ziga teng kuchli bo'lgan tenglama hosil bo'lishini yoki berilgan tenglamaning natijasi bo'lgan tenglama hosil bo'lishini yoki bo'lmasa almashtirish natijasida ba'zi ildizlar yo'qolib qolishini haqidagi tushunchalar misollar echish usullari bilan;

-birinshi va ikkinshi darajali tengsizliklarni umumiy ko'rinishi ularni yechishning, ko'paytuvchilarga ajratish bilan yechish usuli, yuqori darajali ratsional tengsizliklarni yechishning intervallar usuli, bir nomalumli kasr ratsional tengsizliklarni yechish usullari bilan tanishadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. T.A.Azlarov va boshqalar. Matematikadan qóllanma. Maktab óqituvchilari uchun qóllanma. T. «Óqituvchi» 1990 yil
- 2.Alixonov S. «Matematika o'qitish metodikasi». T., «O'qituvchi» 1992 yil.
- 3.Alixonov S. « Matematika o'qitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «O'qituvchi» 1997 yil.
- 4.Alimov.SH.O va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Órta maktabning 10-11 sinflari uchun darslik. T. «Óqituvchi» 1996 yil
- 5.Alimov SH.O va boshqalar “Algebra” 9-sinf ushın darslik. T. : «O'qituvchi», 2002 y.
6. Vafoev R. hám boshqalar. “Algebra hám analiz asoslari”. Akademik litsey hám kasb-hunar kollejlari ushın oquv qo'llanma. T. : «O'qituvchi», 2001 y.
- 7.Н.Я.Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ классов с углубленным изучением математики. М. «Просвещение», 1993 г
8. Jumaniyazov Q v.b. Matematikadan praktikum. T. 2007
- 9.Зайцев В. К.и др. Элементарная математика, М “Наука” 1974
- 10.Крамер. В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа. М. «Просвещение»,1990 г
- 11.Кравцев С.В.и др. Методы решения задач по алгебре М. «Экзамен» 2001
12. Kurosh.A.G. Oliy algebra kursi .T. Óqituvchi, 1976
- 13.Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия. М., Просвещение,1984.
14. Rahimqariev. A. Teńsizliklarni grafik usulida echish. T. “Óqituvchi” 1997
- 15.Сканави. М.И.Сборник задач по математике для поступающих во втузы: М., «Мир и Образование» 2003.
- 16.Saxaev. M. Algebra va elementar funkciyalar. T. “Óqituvchi” 1973.
- 17.Хорошилова. Е.В. Элементарная математика. М. Издательство Московского университета. 2010
- 18 . <http://www.pedagog.uz/>

19. <http://www.ziyonet.uz/>
20. <http://window.edu.ru/window/>