

Ózbekistan respublikası joqarı hám orta arnawlı bilimlendiriw ministrliǵı

Ájiniyaz atındaǵı Nókis Mámleketlik pedagogikalıq institutı

Matematika hám informatika fakulteti

Matematika oqıtıw metodikası kafedrası

“Matematika oqıtıw metodikası” bilimlendiriw baǵdarı 4^g - kurs talabası

Turdimuratova Inabattın

« Teńlemelerdi sheshiwde belgisizlerdi almastırıw usılların oqıtıw »

temasındaǵı

PITKERIW QÁNIGETLIK JÍMÍSÍ

Kafedra baslıǵı:

docent B. Prenov

Ilimiy basshı:

docent M. Asqarov

Nókis-2018

MAZMUNI

Kirisiw.....	3
I-bap. Teńlemeler haqqında tiykargı maǵlıwmatlar.....	5
1-§. Teńlemeler túsinigi hám olardı sheshiwdiń ádettegi usılları.....	5
2-§. Algebralıq teńlemelerdi sheshiw.....	13
II-bap. Teńlemelerdi sheshiwde belgisizlerdi almastırıw usılların oqıtıw.....	23
1-§. Racional bólshek teńlemelerdi sheshiw.....	23
2-§. Irracional teńlemelerdi sheshiw.....	34
3-§. Sabaq islenbesi.....	42
Juwmaqlaw.....	46
Paydalanılǵan ádepiyatlar.....	47

KIRISIW

Rawajlanıp baratırğan zaman talabına say ósip kiyatırğan jas áwladtı óz betinshe oylawğa hám bazar ekonomikası sháriyatında kadrlar básekesine shıdam bere alatuǵınday etip tárbiyalaw máselesi alǵa qoyılǵan. Sonlıqtan mektepler hám orta arnawlı oqıw orınlarında matematika sabaqlarında oqıwshılardı sıpatlı oqıtıw hám olarǵa tereń bilim beriw uqıbına iye bolǵan oqıtıwshılardı tayarlaw búgingi kúnniń tiykarǵı talabı bolıp esaplanadı.

Mektep hám orta arnawlı oqıw orınları matematika kurslarında teńlemeler hám olardı sheshiw túsiniǵine baylanıslı materiallar kiritilgen hám bul materiallar joqarı oqıw orınlarında tereńlestirip rawajlandırıladı.

Pitkeriw qániygelik jumısı mektep hám orta arnawlı oqıw orınlarında ótiletúǵın matematika kursında oqıwshılarda teńlemelerdi sheshiwge arnalǵan bilim hám kónlikpelerin qalıplestiriwge hám olardı teńlemelerge baylanıslı máselelerdi sheshiw usılların úyretiwge qaratılǵan.

Temanin aktuallıǵı: Mektep hám orta arnawlı oqıw orınlarında teńlemelerdi sheshiwge baylanıslı materiallar berilip biraq olarda tiykarınan ápiwayı usıllarǵa itibar qaratılǵan. Teńleme hám olardı sheshiw usılların oqıtıw matematikaniń eń áhmiyetli máseleleriniń biri bolıp esaplanadı. Teńlemelerdi sheshiwdiń mánisin tereń ózlestiriwdi oqıtıwda mektep hám orta arnawlı oqıw orınlarında quramalı hámde standart emes teńlemelerdi sheshiwge arnalǵan temalardı oqıtıwda úlken qıynshılıqlardı payda etedi. Bul temaniń aktuallıǵın belgileydi.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń mazmunı: Pitkeriw qániygelik jumısı tiykarǵı eki baptan, kirisiw hám juwmaqlaw bólimleri, paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Jumıstıń birinshi babı teńlemeler haqqındaǵı tiykarǵı maǵlıwmatlardan ibarat bolıp, teńlemeler hám olardıń qásiyetleri, teńlemelerdi sheshiwdiń ádettegi usılları hám algebralıq teńlemelerdi sheshiw haqqında maǵlıwmatlar berilgen hám bulardıń oqıtılıw usılları islep shıǵılıp tiyisli kórsetpeler berilgen.

Jumıstıń ekinshi babında teńlemelerdi sheshiwde belgisizlerdi almastırıw usılların oqıtıwǵa arnalǵan bolıp, 1-§ te bólshek racional teńlemelerdi sheshiw, 2-§ te irracional teńlemelerdi sheshiwge arnalǵan materiallar berilip, tiyisli mısallar menen bekkemlengen hám sonıń menen birge sabaq islenbesi islep shıǵılǵan. Jumıstıń aqırında juwmaqlaw hám ádebiyatlar dizimi berilgen.

Pitkeriw qánigelik jumısıńnıń maqseti : Bul jumısında teńlemelerdi sheshiw túsiniginiń kiritiliwi hám belgisizlerin almastırıw arqalı sheshiwdiń oqıtıw usılların izlewdi máqset etip qoyılǵan.

Pitkeriw qánigelik jumısıńnıń obiekti hám mashqalası : Bul jumısta teńlemeler hám olardı sheshiwge baylanıslı bolǵan materialardı tártipke keltiriw , olarǵa tiyisli shınıǵıwlar toplaw hám olardı oqıwshılardıń jetkeriw talap etiledi. Hár bir toparda oqıwshılardıń jıynalǵan shınıǵıwlardıń keminde 80% in ózlestirip alıw mashqalaları bar ekenligi anıqlandı.

Pitkeriw qánigelik jumısıńnıń predmeti: Bul jumıstıń predmeti, tiykarınan tómendegilerinen ibarat:

- Teńlemelerdi sheshiw túsiniginiń kiritiliwi.
- Ápiwayı teńlemelerdi sheshiw usılları.
- Teńlemelerdi sheshiwdiń belgisizlerin almastırıw usılları.

1-§. Теңлемелер түсиниги һәм оларды шешiwдиң әдеттеги usılları.

1. Теңлемелер һаqqında түсиниклер.

Meyli eki funksiya berilgen bolsın: Anıqlanıw oblastı P kópligi bolğan $y=f(x)$ funksiyaı hám anıqlanıw oblastı L kópligi bolğan $y=g(x)$ funksiyaı. Meyli M bul funksiyaıların anıqlanıw oblastlarınıń kesispesi bolsın: $M = P \cap L$.

Meyli másele berilsin: M oblastındağı $f(\alpha) = g(\alpha)$ sanlı teńsizligi orınlanatuğın barlıq α sanlardı tabıń. Bunday jağdayda bir belgisizli $f(x)=g(x)$ teńlemeneni sheshiw máseleai qoyılğan yamasa bir belgisizli $f(x)=g(x)$ teńleme berilgen dep ataladı. Kóbinese qıaqasha “ $f(x)=g(x)$ teńleme” dep aytadı.

Teńlemenin mánisleriniń bar bolıw oblastı dep $y = f(x)$ hám $y=g(x)$ funksiyaıların anıqlanıw oblastlarınıń ulıwmalıq bólegine (kesilispesine) aytamız.

Eger $f(x)=g(x)$ teńlemenin bar bolıw oblastındağı α sanın teńlemedegi belgisiz x tiń ornına qoyğanda $f(\alpha) = g(\alpha)$ durıs sanlı teńlik kelip shıqsa, onda α sanına berilgen teńlemenin sheshimi (koreni) dep ataladı.

Teńlemeneni $f(x) = g(x)$ sheshiw- bul demek onıń barlıq kórenleriniń kópligin tabıw boladı. Bul kóplik bos kóplik bolıwıda múmkin, bul eki jağdayda boladı:

a) eger $f(x)=g(x)$ teńlemenin bar bolıw oblastı bos kóplik bolsa b) eger $f(x)=g(x)$ teńlemenin bar bolıw oblastı M bos emes kóplik bolsa, onda hesh bir $\alpha \in M$ sanı ushın $f(\alpha)=g(\alpha)$ teńligi orınlanbaydı.

Eger $f(x)=g(x)$ teńlemenin barlıq korenleriniń kópligi $x_1, x_2 \dots x_k$ sanlardan tursa, onda teńleme tek k korengge iye dep aytıladı, yağnıy onıń barlıq korenleriniń kópligi $\{x_1, x_2 \dots x_k\}$ boladı. Eger $f(x)=g(x)$ teńlemenin barlıq korenleriniń kópligi tek bir san x_1 bolsa, onda teńleme birden bir jalğız x_1 korengge iye dep ataladı.

Meyli eki $f(x)=g(x)$ hám $p(x)=\varphi(x)$ teńleme berilgen bolsın. Eger birinshi teńlemenin qálegen koreni ekinshi teńlemenin de koreni bolsa, onda ekinshi teńlemege birinshi teńlemenin saldarı dep ataladı. Eger $f(x)=g(x)$ teńlemenin sheshimleri kópligi M_1 al $p(x)=\varphi(x)$ teńlemenin sheshimleri kópligi M_2 bolsa, onda $M_1 \subset M_2$ boladı.

Eger birinshi teńlemenin qálegen koreni ekinshi teńlemenin koreni bolıp hám kerisinshe ekinshi teńlemenin qálegen koreni birinshi teńlemenin de koreni bolsa onda bul eki teńlemege teń kúshli (ekvihalent) teńlemeler dep ataladı. Bul jaǵdayda $M_1 = M_2$ boladı. Bunnan eki sheshimge iye bolmaǵan teńlemelerge de teń kúshli dep aytıwǵa boladı. Sebebi $M_1 = M_2 = \emptyset$ boladı.

Eger bir teńleme oǵan teń kúshli bolǵan ekinshi teńleme menen almastırılса, onda buǵan teń kúshli ótiw dep ataladı.

Teń kúshli teńlemelerdin qásiyetleri:

- 1) $f(x)=g(x)$ hám $f(x)-g(x)=0$ teńlemekeri teń kúshli boladı.
- 2) Qálegen $\alpha \in \mathbb{R}$ ushın $f(x)=g(x)$ hám $f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$ teńlemeleri teń kúshli boladı.
- 3) Qálegen $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ sanı ushın $f(x)=g(x)$ hám $\alpha f(x)=\alpha g(x)$ teńlemeleri teń kúshli boladı.
- 4) Eger qálegen $x \in \mathbb{R}$ ushın $g(x)=\varphi(x)$ birdeylik bolsa, onda $f(x)=g(x)$ hám $f(x)=\varphi(x)$ teńlemeleri teńkúshli boladı.
- 5) Qálegen $a > 0, a \neq 1$ ushın $f(x)=g(x)$ hám $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ teńlemeleri teń kúshli boladı.

Meyli $y = f(x)$ tiykargı elementar funkciya, b bazıbir haqıyqıy san bolsın. Bul jaǵdayda $f(x) = b$ teńlemege ápiwayı teńleme dep ataladı.

Bir ózgeriwshili $A(x)$ hám $B(x)$ ańlatpalardan dúzilgen

$$A(x) = B(x) \quad (1)$$

teńlik *bir ózgeriwshili teńleme*, *x* tiń oni duris sanli teńlikke aylandiriwshi hár qanday mánisi bolsa bul *teńlemenin sheshimi (kóreni)* dep ataladı.

Bir ózgeriwshili teńleme sheshimge iye bolmaslıǵı, bir yamasa bir neshe kórenge iye boliwi, yamasa sheksiz kóp kórenlerge iye boliwi múmkin.

Máselen, $x^2 + 4 = 0$ teńleme sheshimge iye emes, $x + 4 = 0$ teńleme bir ($x = -4$) sheshimge iye, $(x + 1)(x - 2)(x + 3) = 0$ teńleme úsh ($x = -1, x = 2, x = -3$) sheshimge iye hám aqirinda, $0 \cdot x = 0$ teńleme sheksiz kóp sheshimge iye boladi.

Teńlemenı sheshiw onıń *barlıq kórenleri kópligin* tabiw degen sóz. Eger

$A_1(x) = B_1(x)$ teńlemenıń sheshimleri kópligi $A_2(x) = B_2(x)$ teńlemenıń sheshimleri kópligine teń bolsa, olar *teń kúshli teńlemeler* delinedi. Bunnan, sheshimge iye bolmağan hár qanday sonday bir ózgeriwshili teńlemelerdiń teń kúshli ekenligi kelip shıǵadı.

1-mısal. $x^2 - 5x + 6 = 0$ hám $(x - 2)(x - 3) = 0$ teńlemeler teń kúshli teńlemeler ekenligin kórsetemiz.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ teńleme $x_1 = -2, x_2 = -3$ kórenlerge iye. Onıń sheshimler kópligi $X_1 = \{2; 3\}$ nan ibarat. $(x - 2)(x - 3) = 0$ teńleme hám $x_1 = -2, x_2 = -3$ kórenlerge iye.

Bul sebepli onıń sheshimleri kópligi $X_2 = \{2; 3\}$ nan ibarat. Bunnan $X_1 = X_2$ ge iye bolamız. Demek, berilgen teńlemeler teń kúshli boladı.

2-mısal. $x^2 - 5x + 6 = 0$ hám $\frac{x-2}{x-3} = 0$ teńlemeler teń kúshli teńlemeler emes.

x ózgeriwshiniń $A(x)$ ańlatpa mániske iye bolatúǵın barlıq mánisleri kópligi $A(x)$ ańlatpanıń anıqlanıw oblastin (bar bolıw oblastin) payda etedi. $A(x)$ hám $B(x)$ ańlatpalar anıqlanıw oblastlariniń uliwma bólegi $A(x) = B(x)$ teńlemenıń *anıqlanıw oblasti* (x ózgeriwshiniń *anıq mánisleri oblasti*) dep ataladı.

Tenglamaniń sheshimler kópligi onıń anıqlanıw oblastinniń úles kópligi bolıp, oǵan teń bolıwı shárt emes.

Máselen, $\sqrt{-(x - 1)^2} = 0$ teńlemenıń sheshimler kópligi hám, anıqlanıw oblasti hám $\{1\}$ kóplikten ibarat, biraq $x^2 - 5x + 6 = 0$ teńlemenıń (1- mısalǵa qarań) sheshimler kópligi $\{2; 3\}$ nen, anıqlanıw oblasti bolsa $R = (-\infty, +\infty)$ nan ibarat boladı.

Endi teńlemelerdiń teń kúshliligi haqqındaǵı bázi teoremalardı keltiremiz.

1- teorema. Eger $C(x)$ ańlatpa barliq $x \in X$ da aniqlanǵan bolsa, $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$ (2) hám (1) teńlemeler teń kúshli boladi, bul jerda $X - (1)$ teńlemeninń aniqlanıw oblastı.

Dálilew. α sani (1) teńlemeninń kóreni bolsın. Bul jaǵdayda $A(\alpha) = B(\alpha)$ shin sanlı teńlik payda boladı. Ekinshi tárepten, $\alpha \in X$ ekenliginen $C(\alpha)$ sani bar hám buǵan kóre $A(\alpha) + C(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha)$ hám shin teńlik. Demek, $x = \alpha$ sani (2) teńlemeninde kóreni. (2) niń hár bir kóreni (1) ushında kóren boliwi bul siyaqlı kórsetiledi.

Teoremadan kórinedi $A(x) = B(x)$ teńlemenı oǵan teń kúshli bólgan $f(x) = 0$ kórinistegi teńleme menen almastırıw múmkin.

2- teorema. Eger $C(x)$ ańlatpa barliq $x \in X$ mánislerde nolden parqlı mánisler qabil qılsa, (1) teńleme $A(x)C(x) = B(x)C(x)$ teńlemege teń kúshli boladi, bul jerda $X - (1)$ teńlemeninń aniqlanıw oblastı.

Bul teorema 1- teorema siyaqlı dálılenedi: $A(\alpha) = B(\alpha)$ teńlikten $A(\alpha)C(\alpha) = B(\alpha)C(\alpha)$ teńlik kelip shıǵadı, keyingi teńlikten bolsa $C(\alpha) \neq 0$ bolǵaninan $A(\alpha) = B(\alpha)$ teńlik payda boladı. Kóbeytiriwde (demek, bóliwde de) $C(x) \neq 0$ boliwi kerek. Bunday jaǵdayda, shet kórenleri payda boliwi múmkin.

Tengleme eki bólegine x tiń ayrim mánislerinde sanlı mániske iye bólmaytúǵın ańlatpa qosılsa yamasa eki úles bunday ańlatpaǵa kóbeytirilse, kóren joǵalıwı múmkin.

3-mısal. $(2x + 1)(x^2 + 3) + x^3 = (x - 3)(x^2 + 3) + x^3$ hám $2x + 1 = x - 3$ teńlemeler teń kúshli, sebebi R kóplikte $x^2 + 3$ kóbeytiwshi nolden parqlı, x^3 qosiliwshi bolsa barliq R da aniqlanǵan.

4-mısal. $\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = -4$ hám $x - 2 = -4$ teńlemeler teń kúshli emes, sebebi $x = -2$ da birinshi tenleme mániske iye emes, Ekinshi teńleme bolsa mániske iye hám duris sanlı teńlikke aylanadı. $x - 2 = -4$ teńlemeninń jalǵız kóreni.

Eger teńlemenin eki bólegi $x - 3$ ge bólinse, oǵan teń kúshli bolmaǵan $x + 3 = 1$ teńleme payda boladi. Sebebi, onin tek bir, yaǵniy $x = -2$ kóreni bar. Bul jerde, teńlemenin ózgeriwshili ańlatpaǵa bóliw nátiyjesi, berilgen teńlemenin $x = 3$ nan ibarat kóreni joǵalǵanin kóremiz.

2. Teńlemelerdi sheshiwdiń ádettegi usılları.

Biz mektep matematika kursınan ayrim ápiwayi teńlemelerdi, kvadrat teńlemenin sheshiwdi bilemiz. Bul órinda uliwma jaǵdayda keń qollanilatugin *kóbeytiwshilerge ajratıw* hám taza *ózgariwshi kiritiw* usıllarin aytıp ótemiz.

Teorema. $P(x) = P_1(x) \times \dots \times P_n(x)$ hám $P_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, X kóplikte aniqlanǵan bolsin. Bul jaǵdayda $P(x) = 0$ teńlemenin hár qanday $x \in X$ kóreni $P_k(x) = 0$, $1 \leq k \leq n$ teńlemelardan keminde birinin kóreni bóladi (hám kerisinshe).

Dálilew. $\alpha \in X$ sani $P(x) = 0$ teńlemenin kórenlerinen biri bolsin. $P(\alpha) = 0$ yamasa $P_1(\alpha) \cdot \dots \cdot P_n(\alpha) = 0$ (1). Kóbeyme nolge teń bolıwı ushin kópaytiwshilerden keminde biri nolge teń bolıwı, yaǵniy α sani $P_k(x) = 0$, $1 \leq k \leq n$, teńlemelerden keminde birinin kóreni bolıwı kerek. Kerisinshe, eger α sani $P_k(x) = 0$ teńlemelerden birinin kóreni bolsa, yaǵniy $P_k(x)$ kóbeytiwshilerden biri nolge aylantırsa, (1) degi kóbeyme nolge aylanadi. Teorema dálilendi.

1-misal. $P(x) = (3x + 1)(3x - 1)(2x + 5) = 0$ teńlemenin sheshin.

Sheshiw. Berilgen teńleme sáykes ráwishte $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{5}{2}$ kórenlerge iye bolǵan $3x + 1 = 0$, $3x - 1 = 0$, $2x + 5 = 0$ teńlemelerge ajiraladi. 1- teoremaǵa kóre $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{2}\right\}$ kóplik berilgen teńlemenin sheshimi boladi.

2-misal. $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ teńlemenin sheshin.

Bul *bikvadrat teńleme* dep atalıwshi $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) teńlemenin jeke jaǵdayı.

Bunday kórinistegi teńlemelerdi sheshiw ushin $x^2 = y$ almastiriwdi orınlaw kerek.

Bul almastiriw berilgen teńlemenin $y^2 - 9y + 20 = 0$ kvadrat teńleme iye alıp keledi. Biz berilgen teńlemenin kóbeytiwshilerge ajratıw usılı menen sheshemiz.

Sheshiw. Teńlemenin shep bólegin kóbeytiwshilerge ajiratamız:

$$x^4 - 9x^2 + 20 = (x^4 - 4x^2) - (5x^2 - 20) = x^2(x^2 - 4) - 5(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 - 5) = (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

Endi $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - \sqrt{5} = 0$, $x + \sqrt{5} = 0$ teńlemelerdi sheship, berilgen teńleme sheshimlerin tabamiz:

$$\{2; -2; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$$

3-misal. $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$ teńlemenini sheshiń.

Sheshiń. Teńlemenini shep tárepinde 4 – dárejeli kópaǵzalı turipti oni kvadrat úchaǵzalı kóbeymesi túrinde ańlatıwǵa háreket qılamiz:

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + px + q)(x^2 + bx + c).$$

Shep hám oń táreplerde turǵan kópaǵzalılardıń sáykes koeffitsiyentlerin teńlestiremiz:

$$\begin{cases} p + b = 4 \\ c + q + pb = -10 \\ pc = qb = 37 \\ qc = -14 \end{cases}$$

Bul sistemaniń bazi bir pútin mánisli sheshimin tawamiz. $qc = -14$ dan q hám c lar 14 dıń bóliwshileri ekenin kóriw qiyin emes. Demek, olar ushin ± 1 , ± 2 , ± 7 , ± 14 lardi sinap kóriw kerek.

Eger $q = 1$ bolsa, $c = -14$ boladı. Ekinshi hám úshinshi teńlemeler $\begin{cases} pb = 3 \\ -14p + b = 37 \end{cases}$

sistemani beredi. Bul sistemadan b ushin $b^2 - 37b - 42 = 0$ teńleme payda boladı. Bul teńleme bolsa sheshimge iye emes.

Sonıń ushin, $q = 1$ da sistema pútin sheshimge iye emes.

Eger $q = 2$ bolsa, $c = -7$ ge iye bolamiz. Bul jaǵdayda sistema $q = 2$, $c = -7$, $b = 1$, $p = -5$ lardan dúzilgen pútin sheshimge iye boladı.

Sunday qilip,

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7).$$

Demek, berilgen teńleme $x^2 - 5x + 2 = 0$ hám $x^2 + x - 7 = 0$ teńlemelerge ajiraladi.

Bul teńlemelerdi sheship, berilgen teńlemeninde sheshimleri bolatúǵın $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ $\frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$ sanlardı tabamiz.

4-mısal. $(x^2 + x + 4)^2 + 3x(x^2 + x + 4) + 2x^2 = 0$ teńlemenı sheshiń.

Sheshiliwi. Shep tárepti $y = x^2 + x + 4$ ǵa qarata kvadrat úshaǵzalı sipatında qarap, kóbeytiwshilerge ajiratamiz:

$$y^2 + 3xy + 2x^2 = (y+x)(y+2x).$$

Bunnan $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 0$ teńleme payda boladı. Aqırǵı teńleme sheshimge iye emes. Demek, berilgen teńlemede sheshimge iye emes.

5-mısal. $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$

teńlemenı sheshiń.

Sheshiw. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = (x+1)(x+2)(x-4)(x-5) = [(x+1)(x-4)] \cdot [(x+2)(x-5)] = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10)$ bolǵanı ushin berilgen teńlemenı tómendegishe jazıp alıw múmkin:

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

Bul teńlemede $y = x^2 - 3x$ almastırıw arqalı taza ózgeriwshi y ni kiritemiz:

$$(y+1)(y-4)(y-10) = -30.$$

Bul teńlemeden $y_1 = 5$, $y_2 = 4 + \sqrt{30}$, $y_3 = 4 - \sqrt{30}$ lardı tawıp, tómendegi úsh kvadrat teńlemege iye bolamiz:

$$x^2 - 3x + 5 = 0, \quad x^2 - 3x + 4 + \sqrt{30} = 0, \quad x^2 - 3x + 4 - \sqrt{30} = 0.$$

Bul teńlemelerdi sheshsek, berilgen teńlemenıń barlıq kórenleri payda boladı:

$$\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$$

6-mısal. $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$ teńlemenı sheshiń.

Sheshiw. $\sqrt{2} = a$ dep, $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$ teńlemenı payda qılamiz. Bul teńlemenı a ǵa qarata kvadrat teńleme sipatında qarap, onıń $a = x^2 - x$, $a = x^2 + x + 1$ kórenlerin tabamiz. $a = \sqrt{2}$ bolǵanı ushin tómendegi teńlemelerge iye bolamiz:

$$x^2 - x = \sqrt{2}. \quad x^2 + x + 1 = \sqrt{2}.$$

Bul teńlemeler berilgen teńlemenin barliq kórenlerini anıqlaw imkanin beredi:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$$

7-mısal. $\frac{4x}{x^2+x+3} = \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$ teńlemenini sheshin.

Sheshiw. $x = 0$ sani teńlemenin sheshimi emes. Bul sebepli berilgen teńleme tómendegi teńlemege teń kúshli:

$$\frac{4}{x + \frac{3}{x} + 1} = \frac{5}{x + \frac{3}{x} - 5} = -\frac{3}{2}$$

$y = x + \frac{3}{x}$ almastiriw alsaq, $\frac{4}{y+1} = \frac{5}{y-5} = -\frac{3}{2}$ teńleme payda boladi. Bul teńleme

$y_1 = -5$, $y_2 = 3$ kórenlerge iye bolgani ushin berilgen teńleme

$$x + \frac{3}{x} = -5, \quad x + \frac{3}{x} = 3$$

teńlemeler jiynaǵına teń kúshli. Olardi sheship, berilgen teńlemenin kórenlerin tabamiz:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

2-§. Algebralıq teńlemelerdi sheshiw

Eger teńleme berilgen bolsa

$$F(f(x)) = 0 \quad (I)$$

Onda $y = f(x)$ belgisizdi almasırwı dáslep

$$F(y) = 0 \quad (II)$$

teńlemege kiritilip, al keyninen (II) túrdegi teńlemenıń barlıq sheshimleri tabılǵannan soń

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

ler teńlemeler jıynaǵına kiritiledi

$$f(x) = y_1, f(x) = y_2, \dots, f(x) = y_n, \dots \quad (III)$$

Bul usıl júdá jaqsı belgili, sonlıqtan, bul bolimde tiykarınan (I) túrde jazılmaǵan teńlemelerdiń hár qıylı dara jaǵdayların qaraymız.

1. Teńlemenıń dárejesin páseytiriw.

Ayırım algebralıq teńlemeler ondaǵı bazıbir kópaǵzalını bir hárıp penen almasırwı arqalı dárejesi berilgen teńlemenıń dárejesinen kishi bolǵan hám sheshiliwi ańsat bolǵan algebralıq teńlemege keltiriliwi múmkin.

1-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3) = 6 \quad (1)$$

Sheshiw. $x^2 + x + 2 = t$ belgileymiz, onda (1) teńlemenı $t(t + 1) = 6$ jazıwǵa boladı. Keyngi teńleme $t_1 = 2$ hám $t_2 = -3$ korenine iye. Demek, (1) teńleme $x^2 + x + 2 = 2$ hám $x^2 + x + 2 = -3$ teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı. Bul jıynaqtıń birinshi teńlemesi $x_1 = 0, x_2 = -1$ sheshimge iye boladı. Ekinshi

teńlemenin sheshimi $x_3 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_4 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ boladı. (1) teńlemenin sheshimi x_1, x_2, x_3 hám x_4 ler boladı.

Juwabı: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}, x_4 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

2-mısal. Teńlemenin sheshin.

$$(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 1 \quad (2)$$

Sheshiw. Teńlemenin eki tárepin 12 ge kóbeytip hám $6x + 6 = z$ arqalı belgilep $(z + 1)^2(z + 2)z = 12$ teńlemege iye bolamız. Bul teńlemenin bilay jazıp

$$(z^2 + 2z + 1)(z^2 + 2z) = 12 \quad (3)$$

hám $z^2 + 2z = u$ arqalı belgilep (3) teńlemenin $(u + 1)u = 12$ túrde qayta jazamız. Keyingi teńleme $u_1 = 3$ hám $u_2 = -4$ korenlerge iye. Sonlıqtan, (3) teńleme $z^2 + 2z = 3$ hám $z^2 + 2z = -4$ eki teńlemenin jıynaǵına teń kúshli boladı. Bul jıynaqtın sheshimi $z_1 = -3$ hám $z_2 = 1$ boladı, yaǵnıy (2) teńleme mına teńlemeler jıynaǵına teń kúshli:

$$6x + 6 = -3 \text{ hám } 6x + 6 = 1 \quad (4)$$

(4) jıynaqtın sheshimi $x_1 = -\frac{3}{2}$ hám $x_2 = -\frac{5}{6}$ bolıp, ol (2) teńlemenin sheshimi bolıp esaplanadı.

Juwabı: $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -\frac{5}{6}$

2. $(x + \alpha)^4 + (x + \beta)^4 = c$ türdegi teńlemeler.

Bunday türdegi

$$(x + \alpha)^4 + (x + \beta)^4 = c \quad (5)$$

bunda α, β hám c –berilgen sanlar, teńlemeni

$$y = \frac{(x+\alpha)+(x+\beta)}{2}$$

belgisizdi ózgeritiw arqalı bikvadrat teńlemege keltiriwge boladı, yaǵnıy mına

$$y = x + \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

3-mısal. Teńlemeni sheshiń.

$$(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 82 \quad (6)$$

Sheshiw. $y = \frac{(x-1)+(x+3)}{2}$ belgilew kiritemiz, yaǵnıy $y = x + 1$ yamasa $x = y - 1$ ózgeriwshi almaştıramız. Bul jaǵdayda (6) teńlemeni $(y - 2)^4 + (y + 2)^4 = 82$ türinde qayta jazıwǵa boladı, yamasa $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ formulasın qollanıp mına türde

$$2y^4 + 48y^2 + 2 \cdot 16 = 82 \quad (7)$$

Kvadrat $z^2 + 24z - 25 = 0$ teńlemeniń korenleri $z_1 = 1$ hám $z_2 = -25$ bolǵanı ushın (7) teńlemeniń sheshimi $y^2 = 1$ hám $y^2 = -25$ teńlemeler jıynaǵınıń sheshimi boladı. Bul jıynaq eki $y_1 = 1$ hám $y_2 = -1$ sheshimge iye. Demek (6) teńlemeniń sheshimi $x_1 = 0$ hám $x_2 = -2$ boladı.

Juwabı: $x_1 = 0, \quad x_2 = -2$

3. $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = A$ túrindegi teńlemeler.

Bunday túrdegi

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = A \quad (8)$$

bunda $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hámde A sanları $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ hám $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ bolıp

$$y = \frac{x - \alpha + x - \beta + x - \gamma + x - \delta}{2}$$

belgilewi arqalı bikvadrat teńlemege alıp klinedi.

4-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 10 \quad (9)$$

Sheshiw. Belgisizdi ózgertemiz

$$y = \frac{x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5}{4}$$

yaǵniy $y = x + 3$ yamasa $x = y - 3$. Bul jaǵdayda (9) teńleme $(y - 2)(y - 1)(y + 1)(y + 2) = 10$ túrge keledi, yaǵniy mınaday

$$(y^2 - 4)(y^2 - 1) = 10 \quad (10)$$

(10) bikvadrat teńleme eki $y_1 = -\sqrt{6}$ hám $y_2 = \sqrt{6}$ korenge iye. Demek (9) teńlemede eki korenge iye $x_1 = -\sqrt{6} - 3$ $x_2 = \sqrt{6} - 3$.

Juwabi. $x_1 = -\sqrt{6} - 3$ $x_2 = \sqrt{6} - 3$.

4. $(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = Ax^2$ túrdegi teńlemeler

Bunday túrdegi

$$(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = Ax^2 \quad (11)$$

bunda $c \neq 0$ hám $A \neq 0$ bolıp teńleme $x = 0$ korennine iye emes, sonlıqtan (11) teńlemenin eki tárepin x^2 bolıp oǵan teń kúshli bolǵan teńlemege iye bolamız.

$$\left(ax + \frac{c}{x} + b_1\right)\left(ax + \frac{c}{x} + b_2\right) - A = 0,$$

bul teńleme $y = ax + \frac{c}{x}$ belgisizdi almasırgannan keyin kvadrat teńleme túrinde jazılıp, onı sheshiw qıyınshılıq tuwdirmaydı.

5-mısal. Teńlemenı sheshin.

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2 \quad (12)$$

Sheshiw. (12) teńlemenin $x = 0$ sheshimi bolmaǵanı ushın onı x^2 bolıp oǵan teń kúshli bolǵan teńlemege iye bolamız.

$$\left(x + 1 + \frac{2}{x}\right)\left(x + 2 + \frac{2}{x}\right) = 2$$

Keyin $y = x + \frac{2}{x}$ ózgeriwshi kiritiw arqalı $(y + 1)(y + 2) = 2$ teńlemege iye bolamız, bul $y_1 = 0$ hám $y_2 = -3$ korennine iye. Demek berilgen (12) teńleme mına teńlemeler jiynaǵına teń kúshli

$$x + \frac{2}{x} = 0 \quad \text{hám} \quad x + \frac{2}{x} = -3$$

Bul jiynaq $x_1 = -1$ hám $x_2 = -2$ eki korenge iye boladı.

Juwabi. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$

Eskertiw. Mına túrdegi

$$ax^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda = 0$$

bunda $\frac{\beta}{\delta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}}$ hám $\alpha \cdot \lambda > 0$ bolǵan teńlemenı (11) túrge keltiriwge boladı, sonın menen birge $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ dep esaplap mına túrgede keltiriwge boladı.

$$\left(\sqrt{ax^2} + \sqrt{\lambda}\right)\left(\sqrt{ax^2} + \frac{\beta}{\sqrt{a}}x + \sqrt{\lambda}\right) = (-\gamma + 2\sqrt{a\lambda})x^2$$

5. $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = Ax^2$ túrdegi teńlemeler.

Bunday túrdegi

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = Ax^2 \quad (13)$$

bunda $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hámde A sanları $\alpha\beta = \gamma\delta \neq 0$ bolıp teńlemendegi qasırmalardıń birinshisin ekinshisine, al úshinshisin tórtinshisine kóbeytip bilay qayta jazıwǵa boladı.

$$(x - x(\alpha + \beta) + \alpha\beta)(x^2 - x(\gamma + \delta) + \gamma\delta) = Ax^2$$

yaǵniy (13) teńleme endi (11) teńleme túrinde jazıldı hám onı sheshiwdi joqarıdaǵı (11) teńlemenı sheshken sıyaqlı júrgiziwge boladı.

6-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$(x - 2)(x - 1)(x - 8)(x - 4) = 7x^2 \quad (14)$$

Sheshiw. (14) teńleme (13) teńleme túrinde, sonliqtan onı bilay jazıwǵa boladı.

$$[(x - 2)(x - 4)][(x - 1)(x - 8)] = 7x^2$$

yamasa mına túrde

$$(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 9x + 8) = 7x^2$$

Bul teńlemenıń sheshimi $x = 0$ emes, sonliqtan onıń eki tárepın x^2 bólip berilgen

teńlemege teń kúshli bolǵan teńlemege keltiremiz $\left(x - 6 + \frac{8}{x}\right)\left(x - 9 + \frac{8}{x}\right) = 7$.

Keyin ózgeriwshini $x + \frac{8}{x} = y$ almasııp $(y - 6)(y - 9) = 7$ kvadrat teńlemege

keltirip $y_1 = \frac{15+\sqrt{37}}{2}$ hám $y_2 = \frac{15-\sqrt{37}}{2}$ korenlerin tabamız. Demek berilgen (14) teńleme mına teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı.

$$x + \frac{8}{x} = \frac{15 + \sqrt{37}}{2} \quad \text{hám} \quad x + \frac{8}{x} = \frac{15 - \sqrt{37}}{2}$$

Bul jiynaqtıń birinshi teńlemesiniń sheshimi

$$x_1 = \frac{\frac{15 + \sqrt{37}}{2} + \sqrt{\left(\frac{15 + \sqrt{37}}{2}\right)^2 - 32}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{15 + \sqrt{37}}{2} - \sqrt{\left(\frac{15 + \sqrt{37}}{2}\right)^2 - 32}}{2}$$

boladı. Bul jiynaqtıń ekinshi teńlemesi sheshimge iye emes. Solay etip berilgen teńleme x_1 hám x_2 korenlerge iye.

Juwabi.

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{37} + \sqrt{30\sqrt{37} + 134}}{4}$$

$$x_2 = \frac{15 + \sqrt{37} - \sqrt{30\sqrt{37} + 134}}{4}$$

6. $a(cx^2 + p_1x + q)^2 + b(cx^2 + p_2x + q)^2 = Ax^2$ túrindegi teńlemeler

Bunda túrdegi 7

$$a(cx^2 + p_1x + q)^2 + b(cx^2 + p_2x + q)^2 = Ax^2 \quad (15)$$

bunda a, b, c, q, A sanları $q \neq 0, A \neq 0, c \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$ bolıp, teńleme $x = 0$ korenge iye emes, sonlıqtan (15) teńlemenin eki tárepin x^2 bolıp oǵan teń kúshli bolǵan teńlemege alıp kelemiz.

$$a \left(cx + \frac{q}{x} + p_1 \right)^2 + b \left(cx + \frac{q}{x} + p_2 \right)^2 = A$$

bul teńlemenin belgisizin $y = cx + \frac{q}{x}$ ózgertiw arqalı onı sheshiw qıyınshılıq tuwdirmaydı kvadrat teńleme túrinde qayta jazamız.

7-mısal. Teńlemenı sheshin.

$$3(x^2 + 2x - 1)^2 + 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 5x^2 = 0 \quad (16)$$

Sheshiw. $x = 0$ sani (16) teńlemenin sheshimi bolmaǵanlıqtan onın eki tárepin x^2 qa bolıp (16) teńlemege teń kúshli bolǵan teńlemenı payda etemiz.

$$3 \left(x + 2 - \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x + 3 - \frac{1}{x} \right)^2 + 5 = 0 \quad (17)$$

Bul teńlemede $x - \frac{1}{x} = y$ ózgeriwshisin almasırtıp qayta jazamız.

$$3(y + 2)^2 - 2(y + 3)^2 + 5 = 0 \quad (18)$$

(18) kvadrat teńleme eki $y_1 = 1$ hám $y_2 = -1$ korenge iye. Sonlıqtan (17) teńleme mına teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı.

$$x - \frac{1}{x} = 1 \text{ hám } x - \frac{1}{x} = -1 \quad (19)$$

Bul teńlemeler jıynaǵı tort korenge iye

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Bul korenler (16) teńlemenin sheshimi boladı.

Juwabi. $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

7. $P(x) = 0$, bunda $P(x) = P(a - x)$, túrindegi teńlemeler.

Meyli $P(x)$ kópaǵzalısı mınanday qásiyetke iye bolsın:

Bazi bir belgilengen a sanı ushın $P(x) \equiv P(a - x)$ birdeylikli teńlik bolsın. Bul jaǵdayda $P(x)$ kópaǵzalısı jup bolǵanda $P(x) \equiv Q\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]$ birdeylik teńligi durıs bolatuǵın $Q(y)$ kópaǵzalısı bar bolatuǵının kórsetiwge boladı.

Sonlıqtan $P(x) = 0$ teńlemesin bul jaǵdayda dárejesi $P(x) = 0$ teńlemsi dárejesinen kishi bolǵan $Q(y) = 0$ túrinde qayta jazıwǵa boladı, bunda $= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$.

Bunday teńlemlerdi sheshiw ushın bilayınsha is tutamız:

Dáslep belgisizdi $x = y + \frac{a}{2}$ ózgertiw arqalı dárejesi $P(x) = 0$ teńlemenin dárejesindey $2k$ dárejeli algebralıq teńlemge iye bolamız, biraq ol tek jup dárejeli y lerdin turadı. Keyin belgisizdi $t = y^2$ ózgertiw arqalı endi k dárejeli algebralıq teńlemege keltiremiz.

8-mısal. Teńlemenin sheshiń.

$$x^8 + (2 - x)^8 - 48(x - 1)^2(x^2 - 2x + 2)^2 - 32(x - 4)^4 = 32 \quad (20)$$

Sheshiw. Kópaǵzalını qaraymız

$$P(x) = x^8 + (2 - x)^8 - 48(x - 1)^2(x^2 - 2x + 2)^2 - 32(x - 4)^4 - 32.$$

$P(2 - x) \equiv P(x)$ bolǵanlıqtan (20) teńleme qaralıp atırǵan teńleme túri boladı. Belgisizdi $y = x - 1$ yamasa $x = y + 1$ ózgertiw arqalı (20) teńlemenin bilay jazamız

$$[(y + 1)^2]^4 + [(y - 1)^2]^4 - 48y^2(y^2 + 1)^2 - 32y^4 - 32 = 0 \quad (21)$$

bunda $(y + 1)^2 = y^2 + 1 + 2y$ al $(y - 1)^2 = y^2 + 1 - 2y$ bolganliqtan bul ańlatpalardi (21) teńlemenin sol tárepine orınlarına qoyıp hám tórtinshi dárejeni mına formula arqalı ashıp

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

(21) teńlemenin bilayinsha qayta jazamız.

$$(y^2 + 1)^4 = 16 \tag{22}$$

(22) teńleme eki $y_1 = -1$ hám $y_2 = 1$ korenge iye. Demek berilgen teńleme de $x_1 = 0$ hám $x_2 = 2$ eki korenge iye boladı.

Juwabi. $x_1 = 0, x_2 = 2$.

II-bap. Teńlemelerdi sheshiwde belgisizlerdi almastırıw usılların oqıtıw.

1-§. Racional bólshek teńlemelerdi sheshiw

Mına

$$\frac{H(x)}{Q(x)} = 0 \quad (1)$$

bunda $H(x)$ hám $Q(x)$ – kópaǵzalılar, túrdegi teńlemege bólshek racional teńleme dep ataladı.

$H(x) = 0$ teńlemesiniń korenlerin tawǵannan keyin, onıń qaysıları $Q(x) = 0$ teńlemenıń korenleri emesligin tekseriw kerek boladı. Tek sol korenler ǵana (1) túrdegi teńlemenıń sheshimleri boladı.

1.Ápiwayılasqan teńlemeler.

Belgisizdi almastırıw járdeminde bólshek racional teńlemeler kóbinese algabralıq teńlemelerge yamasa ápiwayıraq racional teńlemelerge alıp kelinedi.

1-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\frac{x^2+1}{2x+3} + \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{29}{10} \quad (1)$$

Sheshiw. $\frac{x^2+1}{2x+3}$ ańlatpanı y arqalı belgilep berilgen teńlemenı bilay jazamız $y + \frac{1}{y} = \frac{29}{10}$

. Bul teńlemenıń $y = 0$ sheshimi emes sonlıqtan ol $10y^2 - 29y + 10 = 0$ teńlemege teń kúshli boladı. Bul teńlemenıń sheshimi $y_1 = 5/2$ hám $y_2 = 2/5$ boladı. Demek (1) teńleme teńlemeler jıynaǵına teń kúshli:

$$\frac{x^2+1}{2x+3} = \frac{5}{2} \quad \text{hám} \quad \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{2}{5} \quad (2)$$

Bul teńlemelerdiń birinshisi barlıq $x \neq -3/2$ kópliginde

$$2x^2 - 10x - 13 = 0 \quad (3)$$

Teńlemge teń kúshli, al ekinshi teńlemesi

$$5x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (4)$$

teńlemege teń kúshli boladı. (3) teńlemenin sheshimleri $x_1 = \frac{5+\sqrt{51}}{2}$ hám $x_2 = \frac{5-\sqrt{51}}{2}$ boladı. (4) teńlemenin sheshimi $x_3 = 1$ hám $x_4 = -1/5$ boladı. Demek (1) teńlemenin sheshimi x_1, x_2, x_3, x_4 sanları boladı.

Juwapı. $x_1 = \frac{5+\sqrt{51}}{2}$, $x_2 = \frac{5-\sqrt{51}}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1/5$

2-mısal. Teńlemenin sheshin.

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right) \quad (5)$$

Sheshiw. $\frac{x}{3} - \frac{4}{x}$ ańlatpasın u arqalı belgileymiz hám (5) teńlemenin bilay jazamız.

$$2u^2 - 10u + 8 = 0 \quad (6)$$

(6) teńleme eki $u_1 = 2$ hám $u_2 = 4/3$ korengge iye. Sonlıqtan (5) teńleme mına teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı.

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \quad \text{hám} \quad \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$$

bul jıynaqtıń birinshi teńlemesi $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ hám $x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ sheshimge iye. Ekinshi teńleme $x_3 = -2$ hám $x_4 = 6$ sheshimine iye boladı. Demek berilgen (5) teńlemenin sheshimi x_1, x_2, x_3, x_4 sanları boladı.

Juwapı. $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = 6$

$$2. \frac{a_1}{x+\beta_1} + \frac{a_2}{x+\beta_2} + \dots + \frac{a_m}{x+\beta_m} = A \text{ t rdegi te nlemeler.}$$

Bunday t rdegi

$$\frac{a_1}{x+\beta_1} + \frac{a_2}{x+\beta_2} + \dots + \frac{a_m}{x+\beta_m} = A \quad (7)$$

te nlemesi α_i, A, β_i sanlarına bazı bir sh rtler qoyılǵanda t mendegishe sheshiliwi m mkin. (7) te nlemenin aǵzaların ekewden toparlarǵa ajratıp h m h r bir jupti qosıp alımında tek sanlı k beyiwshiler arqalı  zgeshe bolǵan , al b liminde birdey eki aǵzaǵa iye  sh aǵzalılar arqalı birinshi h m nolinshi d rejeli x lardan turat ǵın k paǵzalını payda etemiz. Bul jaǵdayda  zgeriwshilerdi almastırǵannan keyin kelip shiqqan te nleme (7) t rdegi biraq az sandaǵı qosılıwshıǵa iye bolǵan te nlemege yamasa birewi birinshi d rejeli, al ekinshisi (7) t rdegi biraq az sandaǵı qosılıwshıǵa iye bolǵan eki te nlemeler jıynaǵına te n k shli boladı.

2-mısal. Te nlemenı sheshin.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0 \quad (8)$$

Sheshiw. (8) te nlemenin sol t repindegi b legin birinshini aqırǵı aǵza menen, al ekinshisin aqırǵıdan aldınǵı aǵza menen toparlarǵa ajratıp (8) te nlemenı bılay jazamız.

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{x+2} = 0 \quad (9)$$

H r bir qawsırmadaǵı qosılıwshılardı qosıp (9) te nlemenı bılay jazamız

$$\frac{2(x+2)}{x^2+4x} + \frac{2(x+2)}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x+2} = 0 \quad (10)$$

(10) te nlemenin $x = -2$ sheshimi bolmaǵanlıqtan, onı $2(x+2)$ ge b lip (10) ǵa te n k shli bolǵan mına te nlemege iye bolamız.

$$\frac{1}{x^2+4x} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{2(x^2+4x+4)} = 0 \quad (11)$$

Belgisizdi $x^2 + 4x = u$ ózgertip (11) teńlemenı qayta jazamız

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{u+3} + \frac{1}{2(u+4)} = 0 \quad (12)$$

Solay etip sol tárepi bes qosılıwshıǵa iye bolǵan (8) teńleme usınday túrdegi bıraq sol tárepinde úsh qosılıwshıǵa iye bolǵan (12) teńlemege keltirildi. (12) teńlemenıń sol tárepindegi barlıq aǵzaların qosıp bılay jazamız

$$\frac{5u^2+25u+24}{2u(u+3)(u+4)} = 0 \quad (13)$$

Bólshektiń alımın $5u^2 + 25u + 24 = 0$ teńleme túrinde jazıp $u_1 = \frac{-25+\sqrt{145}}{10}$ hám $u_2 = \frac{-25-\sqrt{145}}{10}$ korenlerin tabamız. Bul sanlardıń hesh qaysısı (13) teńlemenıń sol tárepindegi racional funkciyanıń bólimin nolge aylandırmaydı. Demek (13) teńleme bul eki korengge iye, sonlıqtan berilgen (8) teńleme mına teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı.

$$x^2 + 4x = \frac{-25+\sqrt{145}}{10} \quad \text{hám} \quad x^2 + 4x = \frac{-25-\sqrt{145}}{10}.$$

Bul jıynaqtıń birinshi teńlemesiniń sheshimi

$$x_1 = -2 + \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} \quad \text{hám} \quad x_2 = -2 - \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}},$$

al ekinshi teńlemesiniń sheshimi

$$x_3 = -2 + \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} \quad \text{hám} \quad x_4 = -2 - \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}$$

boladı. Sonlıqtan berilgen teńleme x_1, x_2, x_3, x_4 sheshimlerge iye boladı.

$$\text{Juwabı. } x_1 = -2 + \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}, \quad x_2 = -2 - \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}},$$

$$x_3 = -2 + \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}, \quad x_4 = -2 - \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}$$

$$3. \frac{a_1x+a_1}{x+b_1} + \frac{a_2x+a_2}{x+b_2} + \dots + \frac{a_nx+a_n}{x+b_m} = D \text{ türdegi teńlemeler.}$$

Bunday türdegi

$$\frac{a_1x+a_1}{x+b_1} + \frac{a_2x+a_2}{x+b_2} + \dots + \frac{a_nx+a_n}{x+b_m} = D \quad (14)$$

teńlemeler a_i, b_i, a_i hám D sanlarına bazı bir shártler qoyılǵanda bılayınsha sheshiwge boladı: Teńlemedegi hár bir bólshektiń pútin bólegin ajratıw kerek, yaǵnıy (14) teńleme tómendegi teńleme menen almasırladı.

$$a_1 + \frac{\beta_1}{x+b_1} + a_2 + \frac{\beta_2}{x+b_2} + \dots + a_n + \frac{\beta_n}{x+b_m} = D,$$

keyin (7) túrge keltirilip aldınǵı punktke aytıp ótilgen usıl menen sheshiledi.

4-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} - \frac{x-8}{x-2} - \frac{x-8}{x+2} = -\frac{8}{3} \quad (15)$$

Sheshiw. (15) teńlemenı bılay jazamız

$$1 + \frac{5}{x-1} + 1 - \frac{5}{x+1} = 1 + \frac{10}{x-2} + 1 + \frac{-10}{x+2} - \frac{8}{3}$$

yamasa mına túrde jazamız

$$\left(\frac{5}{x-1} - \frac{5}{x+1}\right) = \left(\frac{10}{x-2} - \frac{10}{x+2}\right) - \frac{8}{3} \quad (16)$$

(16) teńlemenı qawsırmalardaǵı qosılıwshılardı qosıp qayta jazamız

$$\frac{10}{x^2-1} - \frac{40}{x^2-4} + \frac{8}{3} = 0 \quad (17)$$

Keyin $x^2 = u$ belgisizdi almashtırıp (17) ni mına túrde jazamız

$$\frac{10}{u-2} - \frac{40}{u-4} + \frac{8}{3} = 0 \quad (18)$$

(18) teńlemenıń sol tárepindegi aǵzalardı qosıp bılayınsha qayta jazamız

$$\frac{4u^2-65+16}{(u-1)(u-4)} = 0 \quad (19)$$

(19) teńleme $u_1 = 16$ hám $u_2 = 1/4$ eki korengge iye ekenin ańsat kóremiz. Demek berilgen (15) teńleme tórt korengge iye boladı:

$$x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1/2 \text{ hám } x_4 = -1/2$$

$$\text{Juwabı. } x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1/2, x_4 = -1/2$$

$$4. \quad \frac{a_1x+b_1}{p_1x^2+q_1x+r_1} + \frac{a_2x+b_2}{p_2x^2+q_2x+r_2} + \dots + \frac{a_nx+b_n}{p_nx^2+q_nx+r_n} = A \quad \text{túrdegi teńlemeler.}$$

Bunday túrdegi teńlemeler

$$\frac{a_1x+b_1}{p_1x^2+q_1x+r_1} + \frac{a_2x+b_2}{p_2x^2+q_2x+r_2} + \dots + \frac{a_nx+b_n}{p_nx^2+q_nx+r_n} = A \quad (20)$$

bunda a_i, b_i, p_i, q_i, r_i hám A sanlarına bazıbir shártler qoyılǵanda bılay sheshiwge boladı: (20) teńlemenıń sol tárepindegi bólsheklerdiń hár qaysısın ápiwayı bólshekler qosındısına jiklep (álbette, eger bul múmkin bolsa),

$$\frac{a_ix + b_i}{p_ix^2 + q_ix + r_i} = \frac{A_i}{x + \beta_i} + \frac{B_i}{x + \gamma_i}$$

(20) teńlemenı (7) túrge keltirip, keyin, payda bolǵan teńlemenıń aǵzaların qolaylı toparlarǵa ajratıp, onı joqarıdaǵı 2-punkttegi táriplengen usıl menen sheshiwge boladı.

5-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24} \quad (21)$$

Sheshiw. $x^2 + 2x = x(x + 2)$, $x^2 + 12x + 35 = (x + 5)(x + 7)$, $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$, hám $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$ bolǵanlıqtan, (21)

teńlemede hár bir bólshektin alımın 2 ge kóbeytip hám $2(x + 1) = x + x + 2$,

$2(x + 6) = x + 7 + x + 5$, $2(x + 2) = x + 1 + x + 3$, $2(x + 5) = x + 4 + x + 6$

Ekenligin bayqasaq, onda (21) teńlemenı bılay jazıwǵa boladı

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6} \quad (22)$$

(22) teńleme (7) túrdegi teńleme boladı. Bul teńlemede qosılıwshılardı qayta toparlarǵa ajratıp onı qayta jazamız.

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7}\right) + \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right)$$

yamasa mına túrde

$$\frac{2x+7}{x^2+7x} + \frac{2x+7}{x^2+7x+10} = \frac{2x+7}{x^2+7x+6} + \frac{2x+7}{x^2+7x+12} \quad (23)$$

(23) teńleme tómendegi teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı.

$$2x + 7 = 0$$

hám

$$\frac{1}{x^2+7x} + \frac{1}{x^2+7x+10} = \frac{1}{x^2+7x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} \quad (24)$$

Jıwnaqtıń ekinshi teńlemesin sheshiw ushın belgisizdi $x^2 + 7x + 6 = z$ almastıramız.

Bul jaǵdayda ol bılay qayta jazıladı.

$$\frac{1}{z-6} + \frac{1}{z+4} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+6}$$

yamasa

$$\frac{2z-2}{(z-6)(z+4)} - \frac{2z+6}{z(z+6)} = 0 \quad (25)$$

(25) teńlemenin sol tárepindegi barlıq aǵzalardı qosıp, onı bilay qayta jazamız.

$$\frac{z^2+6z+18}{z(z+4)(z+6)(z-6)} = 0 \quad (26)$$

Mına $z^2 + 6z + 18 = 0$ teńleme korenge iye emes, sonlıqtan (26) teńleme de korenge iye emes boladı.

(24) teńlemeler jıwnaǵınıń birinshi teńlemeai jalǵız $x = -7/2$ korenge iye. Bul koren jıwnaқтаǵı ekinshi teńlemenin bar bolıw oblastına kirgenlikten, (24) jıwnaqtıń jalǵız koreni bolıp, al demek berilgen teńlemenin de koreni boladı.

Juwabı: $x = -7/2$.

$$5. \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_1x+\beta_1} + \frac{a_2x^2+b_2x+c_2}{a_2x+\beta_2} + \dots + \frac{a_nx^2+b_nx+c_n}{a_nx+\beta_n} = A \text{ túrdegi teńleme.}$$

Bunday túrdegi teńleme

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_1x + \beta_1} + \frac{a_2x^2 + b_2x + c_2}{a_2x + \beta_2} + \dots + \frac{a_nx^2 + b_nx + c_n}{a_nx + \beta_n} = A \quad (27)$$

Bunda $a_i, b_i, c_i, a_i, \beta_i$ hám A sanlarına qoyılǵan bazı bir shártlerde, onıń sol tárepindegi qosılıwshılardı

$$\frac{a_ix^2 + b_ix + c_i}{a_ix + \beta_i} = \gamma_i + \delta_i + \frac{B_i}{a_ix + \beta_i}$$

túrde ańlatılǵannan keyin (7) teńleme túrine alıp keliniwshi múmkin.

6-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2} - \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 3} - \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 4} = 0 \quad (28)$$

Sheshiw. Teńlemenı bilay qayda jazamız.

$$x + \frac{1}{x + 1} + x + \frac{2}{x + 2} - x - \frac{3}{x + 3} - x - \frac{4}{x + 4} = 0$$

yamasa

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 2} - \frac{3}{x + 3} - \frac{4}{x + 4} = 0 \quad (29)$$

túrde jazamız. Solay etip (28) teńleme (7) túrdegi teńlemege keltirildi. Endi birinshi aǵza menen aqırǵı aǵzanı, al ekinshi menen úshinshi aǵzanı toparlarǵa bólip (29) teńlememni bilay qayta jazamız.

$$\frac{-3x}{x^2 + 5x + 4} - \frac{x}{x^2 + 5x + 6} = 0$$

Bul teńleme mına teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı.

$$x = 0 \quad \text{hám} \quad \frac{x}{x^2 + 5x + 4} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = 0 \quad (30)$$

Jıynaqtıń keyingi teńlemesin bilay jazıwǵa boladı.

$$\frac{2x^2 + 10x + 11}{(x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3)} = 0.$$

Bul teńlemenin sheshimi $x_1 = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$ hám $x_2 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, boladı. $x = 0$ sanı (30) jıyınatın ekinshi teńlemesinin bar bolıw oblastına kirgenlikten, (30) jıyınat úsh kórengi iye boladı. $x_1 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0$.

Bulardıń barlıǵı berilgen teńlemenin sheshimleri bolıp esaplanadı.

Juwapı. $x_1 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0$

$$6. \frac{A_1 x}{ax^2 + b_1 x + c} + \dots + \frac{A_k x}{ax^2 + b_k x + c} = B \text{ túrdegi teńlemeler.}$$

Bunday túrdegi teńleme

$$\frac{A_1 x}{ax^2 + b_1 x + c} + \dots + \frac{A_k x}{ax^2 + b_k x + c} = B \quad (31)$$

bunda a_i, c, b_i hám A sanlarına bazı bir sháretler qoyılǵanda, $ax + \frac{c}{x} = y$ belgisizdi almasıǵanda mına túrge keltiriwge boladı.

$$\frac{A_1}{y + b_1} + \dots + \frac{A_k}{y + b_k} = B$$

7--mısal. Teńlemenı sheshin.

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} - \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1 \quad (32)$$

Sheshiw. $x = 0$ sanı (32) teńlemenin sheshimi bolmaǵanlıqtan onın sol tárepindegi hár bir bólsheginin alımın hám bólimin x qa bólip onı bılay jazamız

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1 \quad (33)$$

Bunda $4x + \frac{7}{x} = y$ ózgeriwshini almashtırıp teńlemenı bılay jazamız

$$\frac{4}{y-8} + \frac{3}{y-10} = 1 \quad (34)$$

(34) teńlemenıń sheshimi $y_1 = 6$ hám $y_2 = 9$ boladı. Sonlıqtan (33) teńleme teńlemeler jıynaǵına teń kúshli boladı.

$$4x + \frac{7}{x} = 16 \quad \text{hám} \quad 4x + \frac{7}{x} = 9 \quad (35)$$

Bul jıynaqtıń birinshi teńlemesiniń korenleri $x_1 = 1/2$ hám $x_2 = 7/2$ boladı.

Ekinshi teńlemesi sheshimge iye emes. Demek, (35) jıyınAQ hám berilgen teńleme eki x_1 hám x_2 korenge iye.

Juwabi. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{7}{2}$

2-§. Irracional teńlemeler.

1. $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = f(x)$ túrdegi teńlemeler.

Bunday túrdegi teńlemede

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = f(x) \quad (1)$$

bunda a, b, c, d sanlarına hám $f(x)$ funkciyasına bazı bir sháretler qoyılǵanda onı bılay sheshiwge boladı: (1) teńlemenıń eki tárepın kvadratqa kóterip onıń saldarı bolatúǵın mına teńlemege iye bolamız.

$$2\sqrt{(ax+b)(cx+d)} = f^2(x) - (ax+b+cx+d) \quad (2)$$

Eger $f^2(x) - (ax+b+cx+d) = (ax+b)(cx+d) + A$, bunda A bazı bir san bolsa, onda belgisizdi $y = \sqrt{(ax+b)(cx+d)}$ almasırw arqalı (2) teńlemenı bılay jazıwǵa boladı.

$$y^2 - 2y + A = 0 \quad (3)$$

Eger (3) teńleme y_1 hám y_2 sheshimge iye bolsa ($y_1 = y_2$ jaǵdayıda), onda mına teńlemeler jıynaǵı (1) teńlemenıń saldarı boladı

$$(ax+b)(cx+d) = y_1^2, (ax+b)(cx+d) = y_2^2.$$

Bunıń kórenlerin tawıp bulardıń qaysıları (1) teńlemenıń korenleri bolatúǵının tekseriw kerek. Egerde (3) teńleme koremge iye bolmasa, onda (1) teńleme de sheshimdge iye bolmaydı.

Eger (1) teńlemenı sheshkende saldarlarǵa kelmese, onda hár bir etapta teń kúshli ótiwdi qadaǵalaw kerek ekenligin atap ótemiz. Jánede ayırım jaǵdayda usınday usıl járdeminde mına túrdegi teńlemeler sheshiliwi múmkin.

$$\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d} = f(x) \quad (4)$$

Endi (1) hám (4) túrdegi teńlemelerdi sáykes saldarlarǵa hám teń kúshli teńlemelerge ótiw arqalı sheshiwge mısallar keltiremiz.

1-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{12-x} = \sqrt{-x^2+11x-23} \quad (5)$$

Sheshiw. (5) teńlemeniniń eki tárepini kvadratqa kóterip berilgen teńlemeniniń saldar boladıúǵın mına teńlemege iye bolamız.

$$13 - 2\sqrt{-x^2+11x+12} = -x^2+11x-23 \quad (6)$$

bunda belgisizdi $\sqrt{-x^2+11x+12} = y$ almasırw arqalı (6) teńlemenini $13 - 2y = y^2 - 35$ túrinde jazamız. Bul kvadrat teńlemeniniń sheshimi $y_1 = 6$ hám $y_2 = -8$ boladı. Sonlıqtan mına teńlemeler jıynaǵı (5) teńlemeniniń saldarı boladı.

$$\sqrt{-x^2+11x+12} = 6 \quad \text{hám} \quad \sqrt{-x^2+11x+12} = -8$$

Jıynaqtıń ekinshi teńlemesi sheshimge iye emes. Birinshi teńlemesi $x_1 = 3$ hám $x_2 = 8$ sheshimlerge iye boladı.

Tekseriw. $x = 8$ berilgen teńlemeniniń sheshimi ekenligin, al $x = 3$ onıń sheshimi emesligin kórsetedi. Demek berilgen teńleme tek bir $x = 8$ kórengiye iye.

Juwapı. $x = 8$

2-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2+2x+63} \quad (7)$$

Sheshiw. Teńlemeniniń bar bolıw oblastı bir waqıtta $x+7 \geq 0$, $9-x \geq 0$, $-x^2+2x+63 \geq 0$ shártlerin qanaatlandırıwshı barlıq x lardan turadı yaǵniy bar bolıw oblastı $-7 \leq x \leq 9$ aralıǵı boladı. Bar bolıw oblastınan $x+7 < 9-x$ shártin qanaatlandırıwshı barlıq x lar, yaǵniy $-7 \leq x < 1$ aralıqtaǵı x ushın (7) teńlemeniniń

sol tárepi teris boladı, al oń tárepi teris emes boladı, demek bul x lardıń hesh biri teńlemenıń sheshimi bolıw múmkin emes.

Meyli $x \in [1; 9]$ bolsın. Bunday x lar ushın (7) teńlemenıń eki tárepi teris emes boladı hám sonlıqtan ol usı kóplikte mına teńlemege teń kúshli boladı.

$$16 - 2\sqrt{-x^2 + 2x + 63} = (\sqrt{-x^2 + 2x + 63})^2 \quad (8)$$

Bunda belgisizdi $\sqrt{-x^2 + 2x + 63} = u$ belgisizdi almastırıp (8) di bılay jazamız. $u^2 + 2u - 16 = 0$. Bul teńlemenıń sheshimi $u_1 = -1 + \sqrt{17}$ hám $u_2 = -1 - \sqrt{17}$ boladı. Demek (8) teńleme mına jıynaqqa teń kúshli boladı.

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 63} = -1 - \sqrt{17}$$

hám (9)

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 63} = -1 + \sqrt{17}$$

Bul jıynaqtıń birinshi teńlemesi sheshimge iye emes. Ekinshisi $x \in [1; 9]$ ushın $-x^2 + 2x + 63 = 18 - 2\sqrt{17}$ teńlemege teń kúshli boladı hám ol $x_1 = 1 + \sqrt{46 + 2\sqrt{17}}$ hám $x_2 = 1 - \sqrt{46 + 2\sqrt{17}}$ korenlerge iye. Bul tabılǵan sanlardan tek x_1 sanı $1 \leq x \leq 9$ aralıǵına túsedi. Demek tek x_1 berilgen teńlemenıń koreni.

Juwabı. $x = 1 + \sqrt{46 + 2\sqrt{17}}$

2. $\sqrt[4]{a-x} \pm \sqrt[4]{x-b} = d$ túrdegi teńlemeler.

Bunday túrdegi teńleme

$$\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b} = d \quad (10)$$

bunda a, b, d – berilgen sanlar, $a > b, d > 0$ bolıp, onı bılayınsha sheshiwge boladı.

1. Teñlemenin eki tárepin kvadratqa kóterip (10) nın saldarı bolğan teñlemege iye bolamız.

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b} = d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)} \quad (11)$$

2.(11) teñlemenin eki tárepin kvadratqa kóterip (11) diń saldarı bolğan teñlemege iye bolamız.

$$a-b + 2\sqrt{(a-x)(x-b)} = [d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}]^2 \quad (12)$$

3. Bunda $y = \sqrt[4]{(a-x)(x-b)}$ belgisizli almasıw arqalı (12) teñlemenı mına túrde jazamız.

$$a-b + 2y^2 = (d^2 - 2y)^2 \quad (13)$$

(13) teñlemesi y ke qarata kvadrat teñleme boladı. Eger ol eki y_1 hám y_2 korengi iye bolsa, onda (10) teñlemenin saldarı bolatúǵın mına teñlemeler jıynaǵına iye bolamız.

$$(a-x)(x-b) = y_1^4 \quad \text{hám} \quad (a-x)(x-b) = y_2^4$$

Bul kvadrat teñlemelerdi x qa qarata sheship hám tabılǵan korenlerdin (10) teñlemenin koreni bolatúǵının tekseriw kerek. Eger (13) teñleme bir y_0 sheshimge iye bolsa onda (10) teñlemenin saldarı bolatúǵın $(a-x)(x-b) = y_0^4$ teñleme kelip shıǵadı. Bul teñlemenı sheship tabılǵan korenler (10) teñlemenin koreni bolatúǵının tekseriw kerek. Eń aqırında, eger (13) teñleme sheshimge iye bolmasa, onda (10) teñleme de sheshimge iye emes boladı.

Usı sıyaqlı

$$\sqrt[4]{a-x} - \sqrt[4]{x-b} = d \quad (14)$$

túrdegi teñlemeler de sheshiletúǵının aytıp ótemiz.

3-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\sqrt[4]{17-x} + \sqrt[4]{x+15} = 4 \quad (15)$$

Sheshiw. (15) eki tárepın kvadratqa kóterip onıń saldarı bolǵan teńlemege iye bolamız.

$$\sqrt[4]{17-x} + \sqrt[4]{x+15} = 16 - 2\sqrt{(17-x)(x+15)} \quad (16)$$

Eger (16) teńlemenı kvadratqa kótersek, onda onıń saldarı bolǵan teńleme kelip shıǵadı

$$112 - 32\sqrt{(17-x)(x+15)} + \sqrt{(17-x)(x+15)} = 0 \quad (17)$$

Belgisizdi $\sqrt{(17-x)(x+15)} = u$ almasııp (17) teńlemenı $u^2 - 32u + 112 = 0$ túrde qayta jazamız. Bul teńlemenıń sheshimi $u_1 = 4$ hám $u_2 = 28$ boladı. Demek berilgen (15) teńlemenıń saldarı bolatúǵın teńlemeler jıynaǵına iye bolamız.

$$\sqrt[4]{17-x} + \sqrt[4]{x+15} = 4 \quad \text{hám} \quad \sqrt[4]{17-x} + \sqrt[4]{x+15} = 28 \quad (18)$$

Bul jıyñaqtıń birinshi teńlemesi jalǵız $x_1 = 1$ sheshimge iye, al ekinshi teńlemesi sheshimge iye emes.

Tekseriw. $x = 1$ sannıń berilgen teńlemenıń sheshimi ekenin kórsetedi.

Juwabı. $x = 1$

Bazı bir jaǵdaylarda tabılǵan kórenlerdi tekseriw qıyınshılıq tuwdıradı, sonlıqtan (10) túrdegi teńlemenı sheshiwdiń jáne bir teń kúshli túrlendiriwlerge tiykarlangan usılın keltirip ótemiz.

1. (10) teńlemenin bar bolıw oblastın tabamız. Meyli ol $b \leq x \leq a$ aralıǵı bolsın

2. Bar bolıw aralıǵında (10) teńlemenin eki tárepi teris emes boladı, sonlıqtan (10) di kvadratqa kótergennen keyin oǵan bar bolıw oblastında teń kúshli bolǵan teńlemege iye bolamız, yaǵniy

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b} = d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)} \quad (19)$$

3. (19) teńleme $b \leq x \leq a$ oblastında mına teńlemege teń kúshli boladı

$$\left(\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}\right)^2 = \left[d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}\right]^2 \quad (20)$$

Haqıyqatında da kvadratqa kótergende teńlemenin korenleri joǵalmaydı, sonlıqtan (19) teńlemenin qálegen sheshimi (20) teńlemenin de sheshimi boladı. (20) teńlemenin qálegen sheshimi yáki (19) teńlemenin sheshimi, yáki mına teńlemenin sheshimi boladı.

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b} = -\left[d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}\right]^2 \quad (21)$$

(21) teńlemenini mına túrde jazamız

$$\left(\sqrt[4]{a-x} - \sqrt[4]{x-b}\right)^2 = -d^2 \quad (22)$$

Bunda $d \neq 0$ bolǵanı ushın (22) teńleme sheshimge iye emes, sebebi bar bolıw oblastında onıńsol tárepi teris emes, al oń tárepi teris. Demek (20) teńlemenin qálegen sheshimi (19) teńlemenin de sheshimi boladı.

Solay etip (20) teńleme onıń bar bolıw oblastında (10) teńlemege teń kúshli boladı.

4. $y = \sqrt[4]{(a-x)(x-b)}$ belgilep alıp (20) nı qayta jazamız.

$$a - b + 2y^2 = (d^2 - 2y)^2 \quad (23)$$

(23) teńleme y ke qarata kvadrat teńleme. Eger ol eki y_1 hám y_2 ($y_1 = y_2$ bolıwı múkin) korengi iye bolsa, onda bar bolıw oblastında berilgen teńlemege teń kúshli bolǵan teńlemege iye bolamız. Eger (23) teńleme sheshimge iye bolmasa, onda (10) teńleme de sheshimge iye bolmaydı.

4-mısal. Teńlemenı sheshiń.

$$\sqrt[4]{17-x} + \sqrt[4]{x+15} = 3 \quad (25)$$

Sheshiw. Teńlemenıń bar bolıw oblastı $-15 \leq x \leq 17$ aralıǵı boladı. Bar bolıw oblastında (25) teńlemenıń eki tárepide teris emes boladı, sonlıqtan kvadratqa kótergennen keyin bar bolıw oblastında berilgen teńlemege teń kúshli bolǵan teńlemege iye bolamız.

$$\sqrt{17-x} + \sqrt{x+15} = 9 - 2\sqrt[4]{(17-x)(x+15)} \quad (26)$$

Mına teńleme

$$(\sqrt{17-x} + \sqrt{x+15})^2 = (9 - 2\sqrt[4]{(17-x)(x+15)})^2 \quad (27)$$

Óziniń bar bolıw oblastında (26) teńlemege teń kúshli boladı. Bunı bılay jazamız.

$$32 + 2\sqrt{(17-x)(x+15)} = (9 - 2\sqrt[4]{(17-x)(x+15)})^2 \quad (28)$$

Bunda $\sqrt[4]{(17-x)(x+15)} = z$ belgilew arqalı (28) di qayta jazamız.

$$2z^2 - 36z + 49 = 0$$

Bul teńlemenin sheshimi $z_1 = \frac{18+\sqrt{226}}{2}$ hám $z_2 = \frac{18-\sqrt{226}}{2}$ boladı. Demek bar bolıw oblastında berilgen teńlemege teń kúshli bolǵan teńlemeler jıynaǵına iye bolamız

$$\sqrt[4]{(17-x)(x+15)} = \frac{18+\sqrt{226}}{2}$$

hám (29)

$$\sqrt[4]{(17-x)(x+15)} = \frac{18-\sqrt{226}}{2}$$

Bul jıynaqtın birinshi teńlemesi sheshimge iye emes, al ekinshisi eki korengge iye

$$x_1 = 1 + \sqrt{256 - \left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{256 - \left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4}$$

Bul eki koren de berilgen teńlemenin bar bolıw oblastına kiredi hám sonlıqtan onın korenleri boladı.

Juwabı.

$$x_1 = 1 + \sqrt{256 - \left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{256 - \left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4}$$

Eskertiw. $\sqrt[4]{a-f(x)} \pm \sqrt[4]{f(x)-b} = d$ túrdegi teńleme belgisizdi $y = f(x)$ almasırw arqalı (10) túrdegi yamasa (14) túrdegi teńlemege keltriledi.

3-§.Sabaq islenbe

Tema: Teńlemelerdi sheshiwde belgisizlerdi almastırıw

Sabaq túri: bilimlerdi kompleks qollanıw hám kónlikpelerdi jetilistiriw.

Sabaqtıń maqseti:

didaktiralıq: oqıwshılardıń teńlemelerdi sheshiwde belgisizlerdi almastırıw usılı boyınsha bilimlerin tereńlestiriw hám keńeytiw;

rawajlandırıw: oqıwshılardıń teńlemelerdi sheshiw usılların durıs tańlaw, ulıwmalastırıw uqıbın rawajlandırıw;

tárbiyalıq: oqıwshılardı bilimlerin standart emes jaǵdaylarda qollanıwǵa tayarlaw.

Sabaqtıń barısı:

I. Shólkemlestiriw waqtı

Oqıwshılardıń tayarlıǵın anıqlaw.

II. Bilimlerdi aktuyallastırıw

Aktuallastırıw etapı ózinshe bahalawǵa tiykarlangan tekseriw jumısları formasında ótkeriledi. Rawajlandırıw xarakterdegi hám usı sabaqta tapsırmalardı orınlawǵa kerek bolǵan oylaw aktivligin talap etetuǵın tapsırmalar beriledi.

Tekseriw jumısı

1. Tómendegi teńlemelerden algebralıq túrlendiriwler járdeminde kvadrat teńlemege keltiriwge bolatuǵın teńlemelerdi tańlań:

a) $\sqrt{x+1} = x-2$; b) $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1) = 24$; v) $3\sqrt[3]{x} =$

$x-2$; g) $\log_4 x^2 = 1$; d) $4^x + 6 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$; e) $\frac{3}{x^2-4x+1} = 3-4x$;

j) $\frac{3}{x^2-4x+1} - x^2 = 3-4x$

2. Tańlańǵan teńlemelerdiń qaysılarında belgisizdi almastırıw orın alǵanın kórsetiń.

3. Belgisizdi almastırǵanı anıq hám anıq emes almastırıw bolǵan jáne bir tekli teńlemelerdi kórsetiń.

Bul teńlemelerdi sheshiw arqalı tómendegilerdi orınlaw kerekligi haqqındaǵı juwmaq jasaladı: algebralıq túrlendiriwler; kvadrat teńlemenıń kórenlerin bar bolıwın analizlew; kórsetkishli teńlemelerdiń mánisler oblastin anıqlaw hám kórenler tekseriw. Yaǵniy oqıwshılar teńlemenı sheshiwde durıs usıldı izlew hám keleshekte paydalanıwǵa bolatuǵın kónlikpelerge iye boladı.

III. Taza temaniń bayanı.

Oqıwshılardıń teńlemelerdi sheshiwde alǵan bilim, uqıp hám kónlikpelerin ámeliyatta qollanıw.

Oqıwshılarga berilgen temaniń sorawları boyınsha dúzilgen qaǵazlar tarqatıladı.

Bul qaǵazlarda beelgili mäselerdi maqset etip qoyılǵan bes oqıw elementi kiritilgen.

Oqıw elementleri jazılǵan qaǵaz tapsırma

№ oqıw elementi	Tapsırma kórsetilgen oqıw elementi	Oqıw materialın úyreniwge kórsetpeler
OE-1	<i>Maqseti: Algebralıq teńlemelerdi anıq belgili almastırıw arqalı sheshiwde bilim, uqıp hám kónlikpelerin ulıwmalastırıw hám tártiplestiriw.</i> Teńlemenı sheshiń: a) $(x + 100)^2 - 2004(x + 100) - 2005 = 0$; b) $(x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 2 = 0$; v) $3 \cdot \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^2 - \frac{44x-66}{x+1} + 7 = 0$;	Oqıwshılardıń konspektleri

	g) $\frac{3}{x^2-4x+1} - x^2 = 3 - 4x$. 1) Sheshiwdi tekseriw. 2) Kvadrat teńleme kórenlerge iye bolıw ushin koeficientleri qanday bolıw kerekligin jazıw	
OE-2	<i>Maqseti: Algebralıq teńlemerdi anıq belgili almastırıw arqalı sheshiwde bilim, uqıp hám kónlikpelerin ulıwmalastırıw hám tártiplestiriw.</i> 1) Teńlemenı sheshiń: a) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x - 1)^2 - 1 = 0$; b) $\frac{16}{(x+6)(x-1)} - \frac{20}{(x+2)(x+3)} = 1$; c) $(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 24$. 2) Sheshiwdi tekseriw. 3) Usındat túrdegi teńleme dúziń.	
OE-3	<i>Maqseti: Bir tekli teńlemerdi sheshiwde bilim, uqıp hám kónlikpelerin ulıwmalastırıw hám tártiplestiriw.</i> 1) Teńlemenı sheshiń: a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^{x+6} \cdot 3^{2x} = 0$; b) $2^x - 6 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$ v) $(x+5)^4 - 13x^2 (x+5)^2 + 36x^4 = 0$. 2) Sheshiwdi tekseriw. 3) Usındat túrdegi teńleme dúziń.	
OE-4	Temani ózlestiriw dárejesin belgilew: Tómen – 3 ten kóp emes teńleme sheshiw; orta – 7 den kóp emes teńleme sheshiw;	

	joqarı –11 den az emes teńleme sheshiw	
OE-5	<u>Juwmaqlawshı tekseriw:</u> 1) Hár túrden 2 den az emes teńlemeler bolǵan máseleler bank toplanın dúziw. 2) Hár toparǵa alınǵan materiallardan prezentatsiya dúziw hám juwmaqlawshı sabaqta: «Teńlemerdi sheshiw» temasında bayanat tayarlaw	Teńlemelerdi sheshiwge arnalǵan ádebiyatlardan paydalanıw

IV. Úy tapsırması

Úy tapsırması juwmaqlawshı qadaǵalawdan aldın ótilgenlerdi tákirarlaw.

JUWMAQLAW

Bul pitkeriw qánigelik jumısında házirgi waqıtta mektepler hám orta arnawlı oqıw orınlarında teńlemeler hám olardı sheshiw usıllarına baylanıslı bir qatar usınıslar keltirilgen .

Teńlemeler túsinigi dáslep mektep kursında kiritilip teńlemelerdi sheshiw úyrenilgen jańa materiallarǵa baylanıslı parallel túrde alıp barılıp izbe-iz rawajlanıp hám keńeytilip barıladı. Al orta arnawlı oqıw orınlarında bolsa teńlemeler hám olardı sheshiw usılları tiykarınan otiletúǵın funkciyalardıń anıqlamalarınan baslap olardıń qásiyetlerine baylanıstırılıp izbe-iz úyreniledi.

Jumısta usı aytıp ótilgen jaǵdaylar esapqa alınıp teńlemeler hám olardı sheshiwge baylanıslı bolǵan túsiniklerdi kiriniw, olardı oqıtıw usılları keń túrde ashıp berilgen. Bunda teńlemelerdiń hár qıylı túrleri keltirilip olardıń belgisizin almasırw arqalı sheshiliw usıllarına jeterli dárejede materiyyallar berilgen. Sonıń menen birge teńlemelerdi sheshiwde oqıwshılarǵa burınnan belgili bolǵan anıqlama hám funkciyalardıń qásiyetleri járdeminde sheshiw usılların oqıtıwǵa kóbirek kewil bólingen.

Algebralıq teńlemelerdi sheshiwde kópaǵzalı hám onıń qásiyetlerinen paydalanılıp sheshiwdi ańsatlastırıwshı usıllar keltirilgen. Ayırım standart emes teńlemelerdi sheshiwge de kewil bólingtn. Ásirese ekiden joqarı bolǵan teńlemelerdi sheshiwde olardıń hár qıylı túrleri qaralıp belgisizin almasırwdıń hár qıylı formulaları keltirilip olar arqalı sheshiwdi ańsatlastırıwshı qolaylı usıllarına baylanıslı mısallar islengen hám tiyisli usınıslar berilgen.

Pitkeriw qániygelik jumisin mektep hám orta arnawlı oqıw orınları oqıwshıları hám oqıtıwshıları ushin sabaq procesinde teńlemelerdi sheshige arnalǵan mısallar isleyde, sonıń menen birge joqarı oqıw orınlarına kiriw ushın test sınaqlarına tayarlanıwda metodikalıq qollanba retinde paydalaniwǵa boladı.

Paydalanilgan ádebiyatlar

1. Algebra va analiz asoslari: órta maktablarning 10-11 sinflari uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «Óqituvchi», 1996 yil.
- 2.A. U. Abduhamidov, H. A. Nasimov, U. Nosirov, J. H. Husanov Algebra va matematik analiz asoslari, I. II qism *Akademik litseylar uchun darslik* 7- nashri T.-2008
- 3.Abduxamedov A.U. hám t.b. Algebra hám matematikalıq analiz tiykarları. Nókis: «Bilim», 2005.
- 4.SH. Alimov. A.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov.Algebra 8-klasslar ushın.Nashkent-2010.
5. Algebra: 9-sinf uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «Óqituvchi», 1996 yil.
6. Alixonov S. «Matematika óqitish metodikasi». T., «Óqituvchi» 1992 yil.
7. Alixonov S. « Matematika óqitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «Óqituvchi» 1997 yil.
8. Galitskiy M.A. va boshqalar «Algebra va matematik analiz kursini chuqur órganish» T., «Óqituvchi», 1995 yil.
- 9.Gulomov R. Matematik analiz kursidan misol va masalalar tóplami. T. “Óqituvchi” 1993, 1995.
10. referatlar.uz
11. ziyonet.uz