

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ТОШКЕНТ КИМЁ-ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ

**ОЗИҚ-ОВҚАТ МАҲСУЛОТЛАРИ ТЕХНОЛОГИЯСИ
ФАКУЛЬТЕТИ
ОЗИҚ-ОВҚАТ САНОАТИ МАШИНА ВА ЖИҲОЗЛАРИ –
МЕХАНИКА АСОСЛАРИ КАФЕДРАСИ**

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА
фанидан
МАСАЛАЛАР ЕЧИШ
бўйича услубий қўланма

(кинематика ва динамика бўлимлари бўйича)

(5320300-Технологик машина ва жиҳозлар, 5311300-Технологик жараёнлар
ва ишлаб чиқаришни автоматлаштириш ва бошқариш таълим йўналиши
талабалари учун)

Тошкент-2017

Қўлингиздаги ушбу “Назарий механика фанидан масалалар ечиш” бўйича ёзилган услубий қўлланма, 5320300 – Технологик машиналар ва жиҳозлар (озик-овқат саноати машина ва жиҳозлари бўйича) ва 5311300-Технологик жараёнлар ва ишлаб чиқаришни автоматлаштириш ва бошқариш таълими йўналиши талабалари учун режалаштирилган бўлиб, “Назарий механика фанидан масалалар ечиш” бўйича Давлат таълим Стандарти ва ўқув дастурига мувофиқ (кинематика ва динамика бўлимлари бўйича) амалий машғулотлари мавзуларини ўз ичига олган.

Унда “Назарий механика фанидан масалалар ечиш”нинг бакалаврлар учун зарурий бўлган, ҳозирги замон талабларига жавоб берадиган, шунингдек, бу йўналишдаги ўзгаришлар ва бу фан қамраб олган айрим масалаларни ечиш муаммолар атрофлича ёритиб берилган.

Кинематика бўлимига оид барча амалий машғулотлар мавзулари бўйича, зарурий формулалар ва иборалар алоҳида қайд этилган. Бу эса, ўз навбатида, амалий машғулотларда янада самарали фойдаланиш имкониятини яратади.

“Назарий механика фанидан масалалар ечиш” бўйича ёзилган услубий қўлланма **“Озик-овқат саноати машина ва жиҳозлари-механика асослари” кафедраси** йиғилишида кўриб чиқилган ва маъқулланган.

-сонли йиғилиш баённомасии _____ 2017 й.

Тузувчилар: **А.Н.Шернаев**, ООСМЖ-МА кафедраси – катта ўқитувчиси.
 Ш.В.Мўминов, ООСМЖ-МА кафедраси – катта ўқитувчиси.

Такризчилар: **Б.А.Мусабоев**, ТКТИ т.ф.н, доц.

Сўз боши

Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури”да ёш авлодга таълим-тарбия ишларини ҳар томонлама яхшилаш, ўқитиш самарадорлигини тубдан ислоҳ қилиш масалалари қўйилган.

Бўлажак кадрларни тайёрлашда Давлат таълими стандартларига мос ҳолда фан бўйича ишлаб чиқилган дастурлар асосида тузилган ўқув ва ўқув-услубий дарсликлар, қўлланмалар ва кўрсатмалар катта аҳамиятга эга.

Ёш мутахассис кадрларни тайёрлашда ва умуман таълим жараёнида, хусусан, барча соҳаларида замон талабларига тўла жавоб берадиган адабиётларнинг, шу жумладан оддий ва электрон дарсликлар, ўқув ва ўқув-услубий қўлланма ва кўрсатмаларининг яратиш алоҳида аҳамият касб этади ва уларнинг бу соҳалардаги тутган ўрни бекиёсдир. “Назарий механика фанидан масалалар ечиш” бўлимини талабалар томонидан тушунарли тарзда эгаллай олиш ва чуқур ўзлаштиришга эришиш мақсади билан ушбу услубий қўлланмани яратилди.

Тузувчилар услубий қўлланмада учраши мумкин бўлган камчиликларнинг бўлишини аввалдан ҳис этган ҳолда, бу хусусдаги фикр ва мулоҳазаларини билдирганларга олдиндан ўз миннатдорчилигимизни билдирамиз. Умидимиз, бу услубий қўлланмани даврма давр маънан ва мазмунан шунингдек, ҳажм нуқтаи назардан ҳам бойитиб бориш.

Тузувчи.

1-2-машғулот
КИНЕМАТИКА
Нукта кинематикаси

Қаттиқ жисмларнинг механик ҳаракатларини ҳаракатга келтирувчи сабабларига боғламасдан, ҳаракатни фақат геометрик нуктаи назардан текширадиган механиканинг қисмига **кинематика дейилади**.

Кинематикада вақт узлуксиз ўзгарувчи скаляр миқдор деб қаралади ва аргумент ролини бажаради, унинг бирлиги учун секунд олинади. Ҳаракатни текширишда ҳисоблаш боши қилиб $t = t_0$ вақт белгиланади (кўпинча ҳисоб боши қилиб $t = 0$ олинади). t_1 ва t_2 вақт оралигига ($t_2 - t_1 = \Delta t$) ўтган вақт дейилади. Кинематикада учрайдиган узунликлар (ҳаракатдаги нуктанинг координаталари, ўтилган йўл ва бошқа узунликлар) метрда ифодаланади. Кинематикада ҳаракатни ўрганиш учун кўп тажрибаларда исботланган геометрия аксиомаларига асосланади, бошқа қўшимча қонун ва аксиомалар талаб қилинмайди.

Кинематикада иккита асосий масала қаралади: биринчиси қаттиқ жисм ёки нукта ҳаракатини математик ифодалаш, иккинчиси қаттиқ жисм ҳаракати берилганда бутун жисмнинг ёки нуктасининг ҳамма кинематик миқдорини (траекторияси, тезлиги, тезланиши ва бошқаларни) аниқлашдан иборот. қаттиқ жисм ҳаракат қилганда унинг ҳар бир нуктаси ҳар хил ҳаракат қилиши мумкин. Шунга кўра кинематикада дастлаб нуктанинг ҳаракати текширилиб, ундан олинган маълумотлар асосида система ва қаттиқ жисм ҳаракати текширилади. Шунинг учун кинематика бўлими нукта кинематикаси ва қаттиқ жисм кинематикасига бўлинади.

Исталган бир вақт оралигида жисмнинг фазода бирор системага нисбатан қандай вазият олиншини аниқлаш мумкин бўлса, унинг ҳаракати маълум бўлади.

Нуктанинг ҳаракати давомида фазода чизиб ўтадиган туташ чизиғи, яъни қолдирадиган изи **траектория дейилади**.

Нукта траекториясининг тўрига (тўғри ёки эгрилигига) қараб нукта ҳаракати тўғри чизикли ёки эгри чизикли ҳаракат деб аталади.

Ҳаракатдаги нуктанинг вақт оралигида оладиган вазиятини аниқлаш учун татбиқ қилинадиган тенглама нуктанинг ҳаракат тенгламаси дейилади. Кинематикада нукта ҳаракати уч усул билан, яъни 1) табиий усул, 2) координаталар усули ёки 3) вектор усули билан аниқланади.

Нукта ҳаракатини табиий усулда ифодалаш

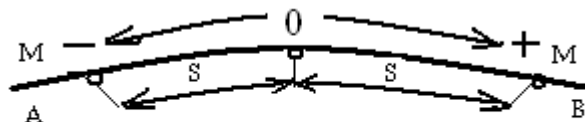
Нукта ҳаракатини табиий усулда ёки ҳаракат қонуни билан ифода қилиш учун нукта траекториясини, яъни ҳисоб бошланадиган нуктадан нуктанинг вақт оралигида траектория бўйлаб қанча масофа босиб ўтишини аниқлайдиган тенглама маълум бўлиши керак.

Масалан; нукта траекторияси, яъни АВ эгри чизик (1-расм) берилган бўлсин. Траекторияда бирор О нуктани танлаб олиб, уни ҳисоб бошланадиган нукта деб қабул қиламиз. Ҳисоб бошланадиган нукта билан

траектория бўйлаб ҳаракат қилаётган M нукта орасидаги масофа топилса, нуктанинг траекториядаги вазияти ҳам топилган бўлади.

Одатда, ҳисоб бошлана-диган O нукта билан ҳаракат қилаётган M нукта орасидаги s масофа O нуктанинг ҳаракат йўналишидаги томонида бўлса масофа, тескари томонида бўлса, манфий масофа деб олинади.

M нуктадан траектория бўйлаб ҳисоб бошланадиган O нуктагача бўлган s масофани M нуктанинг ёй координатаси деб қараш мумкин.



1-расм

Нукта масофасининг вақтга қараб ўзгариши табиий усулда қуйидагича ифодаланади:

$$s = f(t). \quad (1)$$

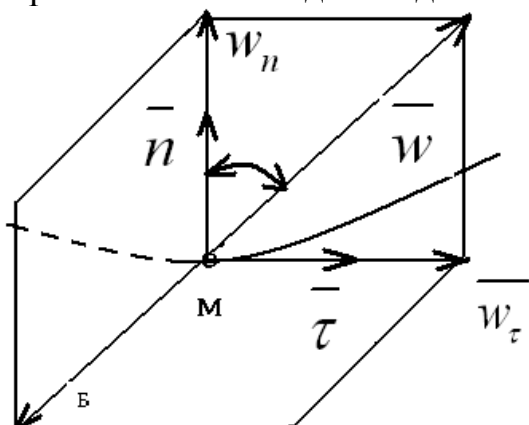
(1) тенглама M нуктанинг ҳаракат қонуни ёки ҳаракат тенгламаси деб аталади.

Нуктанинг ҳар бир вақт оралиғидаги тезлигининг катталиги, s масофада вақтга нисбатан олинган ҳосилага тенг:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

тезлик вектори траекторияга уринма ҳолда ҳаракат томонга қараб йўналган бўлади. Нуктанинг траекторияси маълум бўлса, нуктанинг тўла тезланиши, катталиги билан йўналиши, табиий ўқларидаги проекциялари ёрдамида топилади.

Дифференциал теометриядан маълумки, эгри чизикнинг ҳар қандай нуктасидан учта қирра тушириш ва у қирраларининг ҳар биридан табиий ўқлар ўтказиш мумкин: $\bar{\tau}$ – ўқ траекторияга шу нуктада уринма бўйлаб йўналган, $\bar{n}$ – ўқ бош нормал бўйлаб йўналган ва $\bar{b}$ – ўқ бинормал бўйлаб йўналган бўлади (2-шакл). Уринма ва бош нормал ўқлар ётган текислик эгрилик текислиги дейилади.



2-шакл

Нуктанинг тўла тезланиши эгрилик текислигида ётади, шунинг учун бинормал тезланиш $w_b = 0$. тезланишнинг уринма ва нормал ўқлардаги w_τ , w_n проекциялари маълум бўлса, тўла тезланишни топиш мумкин.

Уринма тезланишнинг катталиги:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}. \quad (3)$$

Уринма тезланиш w_τ мусбат бўлса, v тезлик билан бир томонга қараб уринма бўйлаб йўналади.

Нормал тезланишнинг катталиги: $w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (4)$

бу ерда ρ -эгри чизилган нуктадаги эгрилик радиуси, v -нуктанинг берилган вақтдаги тезлиги.

Нормал тезланиш вектори нормал бўйлаб эгри чизикнинг ботиқ томонига йўналади.

$$\text{Тўла тезланишнинг катталиги: } w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)}, \quad (5)$$

$$\text{йўналиши эса: } \operatorname{tg} \mu = \frac{|w_\tau|}{|w_n|}, \quad (6) \text{ бу ерда } \mu \text{ -нормал билан тўла}$$

тезланиш орасидаги бурчак. Текисликдаги траектория $y = f(x)$ тенглама

билан берилса, траекториянинг эгрилик радиуси $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ формуладан

топилади, бунда, $y' = \frac{dy}{dx}$ ва $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Нукта текис ёки нотекис ҳаракат

қилади. Текис ҳаракатда нукта тезлигининг катталиги ўзгармайди. Шунинг

учун уринма тезланиш нолга тенг, яъни $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ бўлади. У ҳолда тўла

тезланиш вектори ($\vec{w}$) нормал бўйлаб йўналади ва унинг модули $w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$

га тенг. Ҳаракат нотекис бўлса, тезлик вақт ўтиши билан ўзгаради, демак,

уринма тезланиш нолга тенг бўлмай қолади $w_\tau \neq 0$ ҳамда умумий ҳолда

вақт функцияси, хусусий ҳолда эса ўзгармас катталик бўла олади. Уринма

тезланишнинг катталиги ўзгармас ва мусбат бўлса, нуктанинг ҳаракати

текис тезланувчан ҳаракат, манфий бўлса, текис секинланувчан ҳаракат

бўлади. Агар нукта тўғри чизикли ва ўзгарувчи ҳаракат қилса,

траекториясининг эгрилик радиуси $\rho \rightarrow \infty$, демак, $w_n = 0$. У ҳолда тезланиш

вектори $\vec{w}$ нуктанинг тўғри чизикли траекторияси бўйлаб йўналади ва

унинг модули:

$$w = |w_\tau| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right| \quad \text{га тенг.}$$

Нукта тўғри чизикли ва тенг ўлчовли ҳаракатда бўлса, $w_n = 0$, $w_\tau = 0$ ва $w = 0$ га тенг.

Бир текис, текис тезланувчан ёки текис секинланувчан ҳаракат текшириладиган бўлса, масалалар ечишда қуйидаги формулалардан фойдаланиш мумкин.

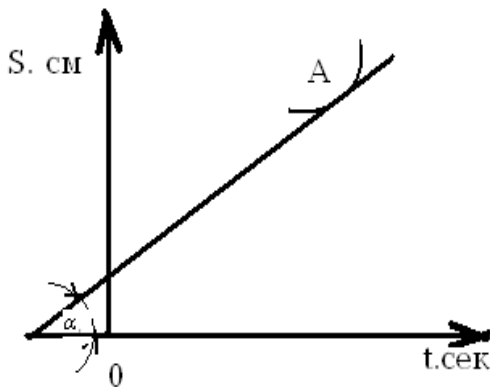
$$\text{Ҳаракат бир текис, яъни ўзгармайдиган бўлса: } s = s_0 + vt, \quad (7)$$

бу ерда s -исталган вақт оралигида нуктадан ҳисоб бошланадиган нуктагача бўлган масофа; s_0 –вақт $t = 0$ бўлганда нуктадан ҳисоб бошланадиган нуктагача бўлган масофа; t -вақт.

Ҳаракат текис тезланувчан ёки текис секин бўлса, ҳаракат қонуни

$$\text{қуйидагича кўринишда бўлади: } s = s_0 + v_0 t \pm \frac{w_\tau \cdot t^2}{2}. \quad (8)$$

Исталган вақт оралигида нуқтанинг тезлиги қуйидагича бўлади:



3-шакл

$$v = v_0 \pm w_t \cdot t, \quad (9)$$

бу ерда v_0 -нуқтанинг $t=0$ даги тезлиги. Нуқтанинг ҳаракат қонунини, тезликларнинг ўзгаришини ва уринма тезланишларни график усулда тасвирлаш мумкин.

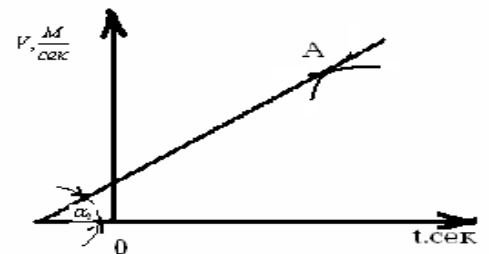
Бу усул ҳаракатни яққол тасвирлашга имкон беради ва мураккаб масалаларни ечишни кўпинча осонлаштиради.

Ҳаракат қонуни эгри чизик кўринишида s, t координаталарида берилган бўлиши мумкин (3-шакл).

Горизонтал ўққа вақт (t), вертикал ўққа масофа (s) қўйилади.

Тезлик эгри чизигини v, t координаталар системасига ясалса бўлади (4-шакл).

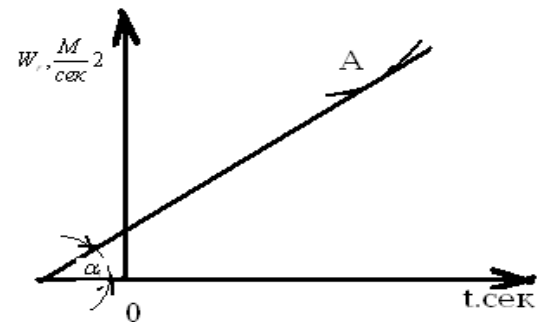
Уринма тезланишнинг эгри чизигини чизиш учун v_t, t координаталар системаси олинади ва исталган вақт оралигида w_t нинг қанча бўлиши ҳисобланади (5-шакл).



4-шакл

Вақт учала диаграммада ҳам бир хил масштабда олинади. масофа, тезлик ва уринма тезланишлар катталигида аниқ кўриниб турадиган масштабда олинади.

Тегишли нуқтанинг тезлиги шу нуқтадан масофа эгри чизигига ўтказилган уринма оғиш бурчагининг тангенсига пропорционал, яъни $v = b_1 \operatorname{tg} \alpha_1$ (3-шакл), уринма тезланиш эса тегишли нуқтадан тезлик эгри чизигига ўтказилган уринма оғиш бурчакнинг тангенсига пропорционал, яъни $w_t = b_2 \operatorname{tg} \alpha_2$ бўлади



5-шакл

(4-шакл). Эгри чизикқа ўтказилган уринма билан абсцисса ўқи ҳосил қилган бурчакнинг тангенси тегишли функциядан олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг.

12.12-масала. Нуқта $S = \frac{g}{a^2}(at + e^{-at})$ қонунга мувофиқ $m/ч$ ли ҳаракат қилади, бунда a ва d —доимий миқдорлар. Нуқтанинг бошланғич тезлиги шунингдек, унинг тезланиши тезликнинг функцияси сифатида аниқлансин.

Ечиш: Тезликни топиш учун берилган ҳаракат тенгламасидан ҳосила оламиз. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{g}{a} - \frac{g}{a} e^{-at}$ тезлик тенгламасига $t=0$ қиймат қўйиб:

$V_0 = \frac{g}{a} - \frac{g}{a} e^0 = 0$ ни топамиз. Тезланиш тенгламасини топиш учун тезлик тенгламасидан ҳосила оламиз. $w = ge^{-at}$. Энди тезланишни тезлик функцияси сифатида аниқлаймиз.

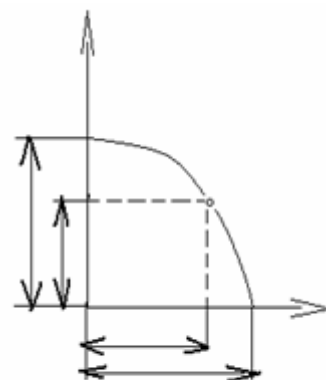
$$\frac{w}{a} = \frac{g}{a} e^{-at} \quad -\frac{w}{a} = -\frac{g}{a} e^{-at}$$

$$\frac{g}{a} - \frac{w}{a} = \frac{g}{a} - \frac{g}{a} e^{-at}$$

$$\frac{w}{a} = \frac{g}{a} - v \Rightarrow w = g - av;$$

2-масала. Самолётдан ташланган бомба $x = v_0 t$, $y = h - \frac{gt^2}{2}$ тенгламаларга мувофиқ ҳаракат қилади: Ох ўқ горизонтал равишда. Оу ўқ эса юқорига вертикал равишда йўналган.

қуйидагилар: 1) траектория тенгламаси: 2) бомбанинг Ох ўқни кесиб ўтган вақтдаги тезлиги (катталиги ва йўналиши); 3) бомбанинг қанча узоққа тушиши; 4) бомба тезлиги, годографнинг тенгламаси ва годограф чизувчи нуктанинг тезлиги v_1 топилсин. (6-шакл).



6-шакл (а)

Ечиш: Берилган тенгламалардан t вақтни чиқариб ташласак, нукта траекториясининг тенгламаси келиб чиқади:

$$x = v_0 t, \quad (1) \quad y = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

(1) тенгламадан t ни топиб, унинг қийматини (2) тенгламага қўямиз:

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2. \quad (3) \text{ бомба траекториясининг парабола эканлиги} \quad (3)$$

тенгламадан кўриниб турибди. Бомба тушгунча кетадиган вақтни (2) тенгламадан топамиз, яъни $y = 0$ бўлганда: $0 = h - g \frac{t^2}{2}$ бўлади, бундан:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (5) \text{ вақт маълум бўлгани учун тушиш масофаси } (x_{\max} = l) \text{ ни} \quad (1)$$

$$\text{тенгламадан топиш мумкин, яъни: } x_{\max} = l = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6)$$

Энди бомба тезлигини топамиз. Тезликнинг ўқлардаги проекцияси:

$$g_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \quad (7) \quad g_y = \frac{dy}{dt} = -gt \quad (8) \text{ Ҳар қандай вақт учун тезлик қиймати:}$$

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \quad (9) \text{ бўлади.}$$

Бомбанинг ерга тушиш вақти $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ даги тезлиги қуйидагича:

$g = \sqrt{g_0^2 + 2gh}$. (10) бомбанинг ерга тушиш тезлиги йўналишини унинг Ох ва Оу ўқлар билан ҳосил қиладиган бурчаклари косинусларини топамиз:

$$\cos(\bar{g}, x) = \frac{g_x}{g} = \frac{g_0}{g}, \quad (11) \quad \cos(\bar{g}, y) = \frac{g_y}{g} = \frac{-\sqrt{2gh}}{g} \quad (12)$$

Бомбанинг тезлик годографи топиш учун (7) ва (8) тенгламалардан t вақтни чиқариб ташлаймиз. У вақтда:

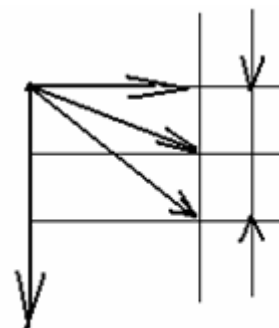
$$x_1 = g_0 \quad (13)$$

тенглама годограф тенграмаси, яъни координаталар бошидан v_0 узокликдатурган вертикал тўғри чизиқнинг тенграмаси бўлади.

(6-шакл б).

Годограф чизувчи чизиқнинг g_{1y} тезлиги (8) тенгламадан ҳосила олиш йўли билан топилади:

$$g_{1y} = -g.$$



6-шакл (б)

2-3-машғулот.

Нуқта ҳаракатини Декарт координатасида ифодалаш

Нуқта ҳаракати Декарт координатасига ифода қилинадиган бўлса, нуқтанинг ўқлардаги координаталари маълум бўлиши ва улар вақт функцияси билан ифода қилиниши керак:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1, \\ y &= f_2, \\ z &= f_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

бу тенгламаларга нуқта ҳаракатининг Декарт координатаси ўқларидаги ҳаракат проекцияси тенгламалари дейилади.

Бу тенгламалар нуқта траекториясини параметрик шаклда тасвирлайди. Траекторияни аниқ, x, y, z лар билан белгилайдиган тенгламани топиш учун (1) тенгламалардан вақт (t) ни чиқариб ташлаш керак.

(1) тенгламалар маълум бўлса, тезликнинг тегишли ўқлардаги проекцияларининг ўзгариш қонуни формуласини топиш мумкин:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2)$$

Нуқта тезлигининг катталиги эса

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (3) \quad \bar{v} \text{ тезлик векторининг йўналиши}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{v}, \bar{i}) &= \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \cos(\bar{v}, \bar{j}) &= \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \cos(\bar{v}, \bar{k}) &= \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

формулалар ёрдамида топилади. Бу ерда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ -бирлик векторлар. Тезланишнинг ўқдаги проекциялари тегишли координаталардан вақтга нисбатан олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (5) \text{Тўла тезланиш}$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \quad (6) \quad \bar{W} \quad \text{тезланиш}$$

векторининг йўналиши:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{W}, \bar{i}) &= \frac{W_x}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}, \\ \cos(\bar{W}, \bar{j}) &= \frac{W_y}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}, \\ \cos(\bar{W}, \bar{k}) &= \frac{W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

формулалар ёрдамида топилади. Нуқта хОу текисликда ҳаракатланса (1)

формула $z=0$; (2), (3), (4) формулаларда $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$ ва (5), (6), (7)

формулаларда $W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$.

12.14-масала. Буғ машинаси кривошип бармоғининг ҳаракат тенгламалари ишга тушириш даврида $x = 75 \cos 4t^2$, $y = 75 \sin 4t^2$ кўринишга эга (x ва y –сантиметр ҳисобида, t эса секунд ҳисобида). Бармоқнинг тезлиги, уринма ва нормал тезланиши топилсин.

Ечиш: Бармоқнинг ҳаракат тенгламаси координаталар системаси билан ифодаланган, яъни:

$$\begin{aligned} x &= 75 \cos 4t^2, \\ y &= 75 \sin 4t^2 \end{aligned} \quad (1), (2)$$

Бармоқнинг v тезлигини топиш учун олдин тезликнинг координаталар ўқларидаги v_x ва v_y проекцияларини кейин v ни топамиз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -75 \cdot 8t \cdot \sin 4t^2 = -600t \sin 4t^2, \quad (1) \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 75 \cdot 8t \cdot \cos 4t^2 = 600t \cos 4t^2, \quad (2)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{ёки} \quad v = \sqrt{(-600t \sin 4t^2)^2 + (600t \cos 4t^2)^2} = 600t \frac{\text{см}}{\text{сек}}. \quad (3)$$

$W_t = \frac{dv}{dt}$ формуладан фойдаланиб, бармоқнинг уринма тезланишини аниқлаймиз, v нинг қийматини қўйсак:

$$W_t = \frac{d}{dt}(600t) = 600 \frac{см}{сек^2} \quad (4) \text{ бўлади.}$$

Нормал тезланиш $W_n = \sqrt{W^2 - W_t^2}$ формуладан топилади. Олдин тўла тезланишни топиш кераклиги формуладан кўриниб турибди, шунинг учун олдин тезланишнинг координата ўқларига тушадиган W_x, W_y проекцияларини топамиз: $W_x = \frac{dv}{dt} = -600 \sin 4t^2 - 4800t^2 \cos 4t^2$, (5)

$$W_y = \frac{dv_y}{dt} = 600 \cos 4t^2 - 4800t^2 \sin 4t^2, \quad (6)$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad \text{ёки}$$

$$w = \sqrt{(-600 \sin 4t^2 - 4800t^2 \cos 4t^2)^2 + (600 \cos 4t^2 - 4800t^2 \sin 4t^2)^2} = \sqrt{600^2 + (4800t^2)^2}$$

нормал тезланиш эса:

$$w_n = \sqrt{W^2 - w_t^2} = \sqrt{600^2 + (4800t^2)^2} - 600^2 = 4800t^2 \frac{см}{сек^2}$$

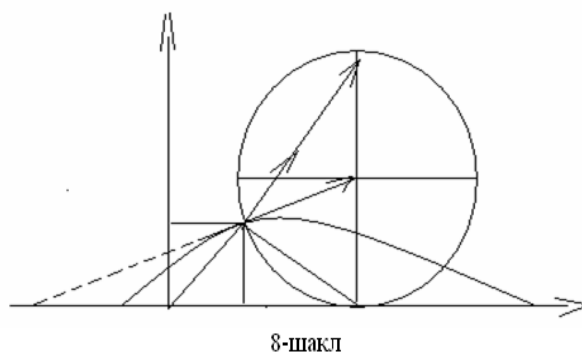
бўлади.

12.17-масала. Горизонтал Ох ўқ бўйлаб сирғанмай ғилдировчи ғилдирак нуқтаси тезлигининг қиймати ва йўналиши ҳамда траекториясининг эгри радиуси топилсин; нуқта куйидаги тенгламалар асосида циклоида чизади:

$$x = 20t - \sin 20t,$$

$$y = 1 - \cos 20t.$$

(t -секунд ҳисобида, x ва y -метр ҳисобида) $t=0$ бўлганда эгрилик радиуси ρ ҳам аниқлансин (8-шакл).



Ечиш. Тўла тезланишни координата ўқларидаги проекциялари орқали топамиз:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 400 \sin 20t \frac{м}{сек^2}, \quad (1) \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 400 \cos 20t \frac{м}{сек^2}, \quad (2)$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(400 \sin 20t)^2 + (400 \cos 20t)^2} = 400 \frac{м}{сек^2} \quad (3)$$

Тўла тезланиш йўналиши билан Ох ўқнинг йўналиши орасидаги бурчакдан фойдаланиб, тўла тезланиш векторининг йўналишини аниқлаймиз. Уларнинг орасидаги бурчак косинуси:

$$\begin{aligned}\cos(\bar{w}, x) &= \frac{w_x}{w} = \frac{400 \sin 20t}{400} = \sin 20t, \\ \cos(\bar{v}, y) &= \frac{w_y}{w} = \frac{400 \cos 20t}{400} = \cos 20t\end{aligned}\quad (4)$$

бўлади. Бундан изланаётган бурчак: $\angle(\bar{w}, x) = \frac{\pi}{2} - 20t$. (5) вертикал Оу ўк билан тезланиш вектори орасидаги ҳосил бўладиган бурчак: $\angle(\bar{w}, y) = 20t$ (6) бўлади.

Демак, тўла тезланиш вектори ҳамма вақт ғилдиракнинг СМ радиуси бўйлаб марказига томон йўналган. /илдирак радиуси билан вертикал орасидаги бурчак $\varphi = 20t$ га тенг.

Циклоидадаги ҳар қандай нуқтанинг эгрилик радиуси қуйидаги формуладан топилади: $\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}$. (7)

Демак, v ва w_τ ларни яна топиш керак. /илдирак устидаги нуқтанинг ҳар қандай вақт оралигидаги тезлик қийматини проекциялардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = 20 - 20 \cos 20t, \quad (8) \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 20 \sin 20t. \quad (9) \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(20 - 20 \cos 20t)^2 + (20 \sin 20t)^2} = \\ &= 20 \sqrt{1 - 2 \cos 20t + \cos^2 20t + \sin^2 20t} = \\ &= 20 \sqrt{4 \sin^2 10t} = 40 \sin 10t \text{ м/сек.}\end{aligned}\quad (10)$$

w_τ ни топамиз:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = 400 \cos 10t \text{ м/сек}^2. \quad (11)$$

Топилган v , w ва w_τ қиймати (7) тенгламага қўйиб ҳаракат қилаётган нуқтанинг ҳар қандай ораликдаги эгрилик радиуси ρ нинг қийматини топамиз: $\rho = -\frac{(40 \sin 10t)^2}{\sqrt{400^2 - (400 \cos 10t)^2}} = 4 \sin 10t \text{ м.}$ (12)

Ҳар қандай циклоида нуқтасининг эгрилик радиуси билан нуқтанинг МА ватари орасидаги муносабатни аниқлаймиз.

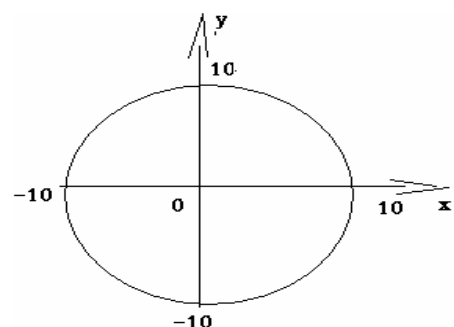
Эгрилик радиуси: $\rho = 4 \sin 10t \text{ м.}$

Тенг ёнли МСА учбурчакдан: $MA = 2r \sin 10t = 2 \sin 10t \text{ м.}$

Демак, эгрилик радиуси МА ватардан икки баравар катта: $\rho = 2MA = Mr$. (13)

$t = 0$ бўлганда, яъни бошланғич вақтда эгрилик радиуси $\rho_0 = 0$ бўлади.

12.13-масала. Нуқта ҳаракати қуйидаги тенгламалар билан берилган:



$$x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}, y = 10 \sin 2\pi \frac{t}{5}, \quad (\text{х,у-сантиметрлар, } t\text{-секундлар ҳисобида}).$$

Нуқтанинг траекторияси, тезлигининг миқдори шунингдек тезланишининг миқдори.

Ечиш: Аввал айтиб ўтганимиздек траектория тенгламасини топиш учун

t-параметрни йўқотиш зарур:

Тенгликлари ҳар иккала томонини квадратга кўтариб хадма-хад қўшамиз:

$$x^2 = 100 \cos^2 2\pi \frac{t}{5}$$

$$y^2 = 100 \sin^2 2\pi \frac{t}{5} \quad + x^2 + y^2 = 10^2$$

натижада $R=10$ га тенг бўлган айлана тенгламаси ҳосил бўлади.

Энди тезлик миқдорини ҳисоблаймиз:
9-шакл

$$x' = -10 \cdot \frac{2\pi}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5} = -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}$$

$$y' = 4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}$$

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left(-4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = 4\pi \text{ см / с};$$

Нуқта ҳаракатининг тезланишини топиш учун ҳаракат тенгламасидан биринчи тартибли ҳосила ёки тезликдан биринчи тартибли ҳосила оламиз.

$$x'' = -4\pi \cdot \frac{2\pi}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5} = -\frac{8}{5} \pi^2 \cos 2\pi \frac{t}{5}$$

$$y'' = -\frac{8}{5} \pi^2 \sin 2\pi \frac{t}{5}$$

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \sqrt{\left(-\frac{8}{5} \pi^2 \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5} \pi^2 \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = \\ &= \frac{8}{5} \pi^2 = 1,6 \pi^2 \text{ см / с}^2 \end{aligned}$$

12.15-масала. Нуқта ҳаракати қуйидаги тенгламалар билан берилган:

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt})$$

$$y = a(e^{kt} - e^{-kt})$$

бундаги a ва k — берилган доимий миқдорлар. Нуқта траекториясининг тенгламаси топилсин, тезлиги ва тезланиши $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ радиус-векторнинг функцияси сифатида ифодалансин.

Ечиш: Нуқта ҳаракати траекториясини топиш учун берилган тенгламаларни ҳар иккала томонини квадратга ошириб ҳадма-ҳад айирамиз:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} &= e^{2kt} + 2 + e^{-2kt} \\ \frac{y^2}{a^2} &= e^{2kt} - 2 + e^{-2kt} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} &= 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4a^2\end{aligned}$$

демак траекторияси гиперболодан иборат экан.

Энди тезлик ва тезланишларни топамиз:

$$\begin{aligned}x' &= a(ke^{kt} - ke^{-kt}) = ak(e^{kt} - e^{-kt}) \\ y' &= ak(e^{kt} + e^{-kt}) \\ v &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{[ak(e^{kt} - e^{-kt})]^2 + [ak(e^{kt} + e^{-kt})]^2} = \\ &= ak\sqrt{e^{2kt} - 2 + e^{-2kt} + e^{2kt} + e^{-2kt} + 2} = ak\sqrt{2e^{2kt} + 2e^{-2kt}}; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2(e^{kt} + e^{-kt})^2 + a^2(e^{kt} - e^{-kt})^2} = a\sqrt{2e^{2kt} + 2e^{-2kt}}; \quad (*)\end{aligned}$$

Энди (*)ни (**) га олиб келиб қўйсак: $W = k^2 r$; демак жавоб:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 4a^2 \\ v &= k \cdot r \quad \text{гипербола} \\ w &= k^2 \cdot r\end{aligned}$$

11.5-масала. Снаряд ҳаракати $x = v_0 t \cos \alpha_0$, $y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$

тенгламалар билан берилган; бундаги v_0 ва α_0 -доимий миқдорлар. $t=0$ бўлган ва снаряд ерга тушган пайтларда траекториянинг эгрилик радиуси топилсин.

Ечиш: Траекториянинг эгрилик радиуси $\rho = \frac{v^2}{w_n}$ формуладан топилади.

Масаламизни ечиш учун биз

w_n -нормал тезланиш

w_τ -уринма тезланиш ва

w_t -тўла тезланишларни топашимиз керак бўлади.

$$\begin{aligned}x' &= v_0 \cos \alpha_0 \quad y' = v_0 \sin \alpha_0 - gt \\ v &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 + v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2}; \\ v|_{t=0} &= v_0\end{aligned}$$

Энди w_τ -уринма тезланишни топамиз:

$$\begin{aligned}w_\tau &= \frac{dv}{dt} = \frac{-2v_0 g \sin \alpha_0 + 2g^2 t}{2\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2}}; \\ w_\tau|_{t=0} &= \frac{-2v_0 g \sin \alpha_0}{2v_0} = -g \sin \alpha_0\end{aligned}$$

энди тўла тезланиш w_t -ни топамиз:

$$x'' = 0 \quad y'' = -g$$

$$w_T = \sqrt{x''^2 + y''^2} = g$$

$w_T = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$ формуладан w_n -нормал тезланишни топамиз:

$$w_n = \sqrt{w_T^2 - w_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g \sin^2 \alpha_0} = g \cos \alpha_0$$

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha_0};$$

демак эгрилик радиуси $\rho = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha_0};$

4-5-машғулот

Нукта ҳаракатини вектор усулида ифодалаш

Нукта ҳаракатини вектор усулида ифодалаш учун нуктанинг вазияти ихтиёрий марказда чиқариладиган радиус-вектор ёрдамида топилади.

Радиус-вектор вақтнинг функциясидир (6-шакл), яъни

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1)$$

ёки координата ўқларидаги проекциялар билан ифода қилинадиган бўлса:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (2)$$

Тезлик вектори $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (3) ёки координата ўқларидаги проекциялари билан

ифода қилинадиган бўлса: $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$. (4) тўла тезланиш вектори эса

қуйидагичадир: $\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ёки $\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. (5) ёки координата ўқларидаги

проекциялари билан ифода қилинса: $\vec{W} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$. (6) нуктанинг

траектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни тенглама билан ифодаланади:

$$s = \int_0^t \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2} dt. \quad (7)$$

бу ерда, s - нуктадан ҳисоб бошланадиган нуктагача бўлган масофа;
 $f_1'(t)$, $f_2'(t)$, $f_3'(t)$ -нукта координаталаридан вақтга нисбатан олинган
 биринчи тартибли ҳосила.

1-масала. Берилган нукта ҳаракатининг тенгламаларидан нукта траекториясининг тенгламалари топилсин.

а) $x = 5 + 3\cos t, y = 4\sin t$.

тенгламадан $\cos t$ ни, иккинчисидан $\sin t$ ни топамиз:

$$\text{б) } \begin{aligned} x &= 3 \cos \left(\frac{\pi}{8} + \pi t \right), \\ y &= 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi t \right). \end{aligned}$$

(1) тенгламадаги $\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi t\right)$ нинг қийматини (2) тенгламага қўйсак:

$$\frac{y}{4} - \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{8} = \sin \left(\frac{\pi}{8} + \pi t \right) \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\frac{y}{4} - \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \sin \left(\frac{\pi}{8} + \pi t \right)$$

(1) ва (3) тенгламаларнинг икала томонини квадратга ошириб, сўнгра қўшамиз:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{\left(\frac{y}{4} - \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{4}\right)^2}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1. \text{ бундан: } \frac{x^2}{9} \cos^2 \frac{\pi}{8} + \frac{y^2}{16} - \frac{xy}{6} \sin \frac{\pi}{8} + \frac{x^2}{9} \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

11.2-масала. Эллипсограф чизгичининг
лиги $AB=40\text{см}$, кривошипнинг узунлиги
 20см , $AC=CB$. кривошип O ўқ атрофида ω
рак тезлиги билан бир текис айланади.
ичининг A учидан $MA=10\text{см}$ масофада
и M нукта траекториясининг ва тезлик
рафининг тенгламалари топилсин.

16

тенгламасини тузамиз. М нуктанинг координаталари:

$$x = 30 \cos \varphi, \quad (1), (2)$$

$$y = 10 \sin \varphi$$

бўлади.

Кривошип бир текис ω бурчак тезлик билан айланадиган бўлгани учун, кривошип билан x ўқдан ҳосил бўлган φ бурчак t вақтга пропорционал ва ωt га тенг бўлади: $\varphi = \omega t$ (3) демак, нуктанинг ҳаракат

тенгламаси қуйидагича:
$$\left. \begin{aligned} x &= 30 \cos \omega t, \\ y &= 10 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} (4)$$

траектория тенгламасини топиш учун (4) тенгламадан вақтни чиқариб ташлаймиз. Бунинг учун $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ ларни топамиз: $\frac{x}{30} = \cos \omega t$, $\frac{y}{10} = \sin \omega t$

бу тенгламаларнинг иккала томонини квадратга ошириб, сўнгга қўшамиз:

$$\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{100} = 1 \quad (5)$$

демак, бу тенглама ярим ўқлари 30см ва 10см га тенг бўлган эллипснинг тенгламасидир.

М нуктанинг тезлик годографи топиш учун М нукта тезлигининг x, y ўқлардаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$\frac{dx}{dt} = x = -30\omega \sin \omega t, \quad (6) \quad \frac{dy}{dt} = y = 10\omega \cos \omega t \quad (7)$$

Годограф тенгламасини xOy координаталарда ифодалаймиз, x ва y лар тезликдан шу ўқларга тушадиган проекциялардир.

Бунинг учун (6) ва (7) тенгламалардан t вақтни чиқариб ташлаймиз:

$$-\frac{x}{30\omega} = \sin \omega t \quad \frac{y}{10\omega} = \cos \omega t$$

Бу тенгламаларнинг иккала томонини квадратга ошириб, сўнгга қўшсак, тезлик годографи тенгламаси келиб

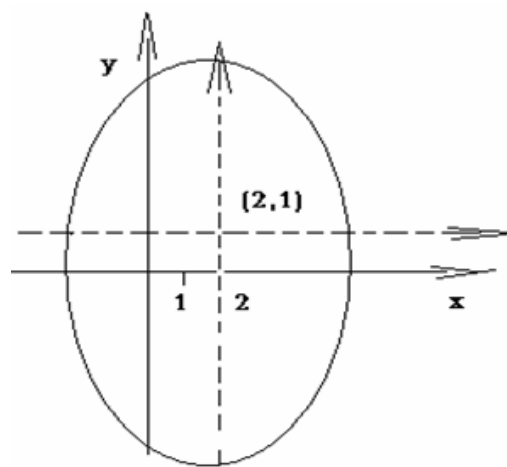
чиқади:
$$\frac{x^2}{900\omega^2} + \frac{y^2}{100\omega^2} = 1. \quad (8)$$

Бу тенглама ярим ўқлари $30 \cdot \omega$ см га тенг бўлган эллипснинг тенгламасидир.

3-масала. Нуктанинг координата усулида берилган ҳаракат тенгламаларига кўра унинг траектория тенгламаси топилсин ва расмда ҳаракат йўналиши кўрсатилсин.

$$x = 2 - 3 \cos 5t, \quad y = 4 \sin 5t - 1$$

нукта ҳаракатининг траектория тенгламасини топиш учун берилган x, y, t параметрлардан t параметрни йўқотиб x ҳамда y уни ўзаро боғлаб тенглама тузишимиз керак:



11-шакл

$$x - 2 = -3 \cos 5t \quad \cos 5t = \frac{2-x}{3}$$

$$y + 1 = 4 \sin 5t \quad \sin 5t = \frac{y+1}{4}$$

4-масала. Нуқтанинг турли частотали ўзаро перпендикуляр тебранишлари: $x = a \cos 2\omega t$, $y = a \cos \omega t$ қўшилишидан ҳосил бўлган ҳаракати траекториясининг тенгламаси топилсин.

$$x = a(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) \text{ ёки } x = a(2 \cos^2 \omega t - 1)$$

$y = a \cos \omega t$ тенгликни ҳар иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$\cos^2 \omega t = \frac{y^2}{a^2} \quad \text{ифодани иккинчи тенгликка кўямиз:} \quad x = a \left(2 \frac{y^2}{a^2} - 1 \right)$$

$$ax = 2y^2 - a^2 \quad \text{ёки} \quad 2y^2 - ax - a^2 = 0 \quad \text{бунда} \quad |x| \leq a, |y| \leq a$$

11.3-масала. Нуқта $x = 2 \cos t$, $y = 4 \cos 2t$ (х,у-сантиметрлар t-секундлар ҳисобида) тенгламаларга мувофиқ Лиссажу фигурасини чизади. Нуқта Оу ўқда бўлганида тезлигининг миқдори билан йўналиши топилсин.

Ечиш: Аввал нуқта х-тининг тезлигини топамиз. Бунинг учун ҳаракат тенгламадан биринчи тартиб ҳосила оламиз.

$$v = x = -2 \sin t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

$$v_y = y = -8 \sin 2t$$

нуқта Оу ўқда бўлганлиги учун:

$$0 = 2 \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} c$$

$$v = \sqrt{4 \sin^2 t + 64 \sin^2 2t} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}c} = 2 \text{ см} / c$$

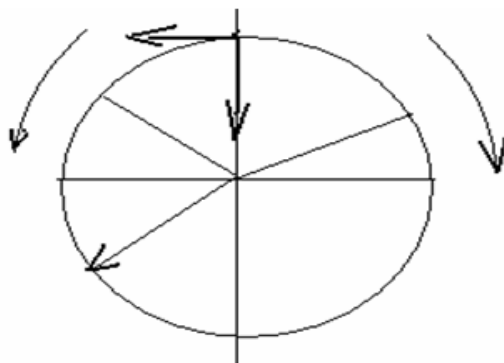
$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$\text{жаваб: } v = 2 \text{ см} / c \quad \cos(v, x) = -1;$$

6-7-машғулот.

Нуқта ҳаракатининг тезлиги билан тезланишини аниқлаш

12.11-масала. Нуқта $R = 20 \text{ см}$ радиусли айлана ёйи бўйлаб ҳаракат қилади. Унинг ўз траекторияси бўйлаб ҳаракатланиш қонуни $s = 20 \sin \pi t$ дир. (t-секунд ҳисобида, s-сантиметр ҳисобида.) $t = 50 \text{ сек}$ бўлган вақт учун нуқта тезлигининг қиймати ва йўналиши, уринма, нормал ва тўла тезланишлари топилсин. Шунингдек, тезликнинг, уринма ва нормал тезланишларнинг графиклари чизилсин.



Ечиш: Бошланғич вақтда ҳаракат қиладиган нуқта ғилдирак айланасининг А нуктасида бўлсин (12-шакл). Нуктанинг айлана бўйлаб, соат стрелкаси айланадиган томонга айланишини мусбат йўналиш деб қабул қиламиз. Ҳар қандай вақтдаги тезлик қиймати $v = \frac{ds}{dt}$ формуладан топилади, демак:

$$v = \frac{d}{dt}(20 \sin \pi t) = 20\pi \cos \pi t \text{ см/сек}$$

бўлади. $t = 5 \text{сек}$ бўлганда эса: $v = 20\pi \cos 5\pi = -20\pi \frac{\text{см}}{\text{сек}}$. бўлади.

Манфий ишора нуқта тезлигининг мусбат ҳаракатига тескари йўналганлигини кўрсатади.

Ҳар қандай вақтдаги уринма тезланишни топамиз:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(20\pi \cos \pi t) = -20\pi^2 \sin \pi t \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$

$t = 5 \text{сек}$ бўлганда: $w_\tau = -20\pi^2 \sin 5\pi = 0$ бўлади. Ҳар қандай вақтдаги нормал

тезланишни топамиз: $w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20\pi \cos \pi t)^2}{20} = 20\pi^2 \cos^2 \pi t \text{ см/сек}^2.$

$t = 5 \text{сек}$ бўлганда: $w_n = 20\pi^2 \cos^2 5\pi = 20\pi^2 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$ бўлади.

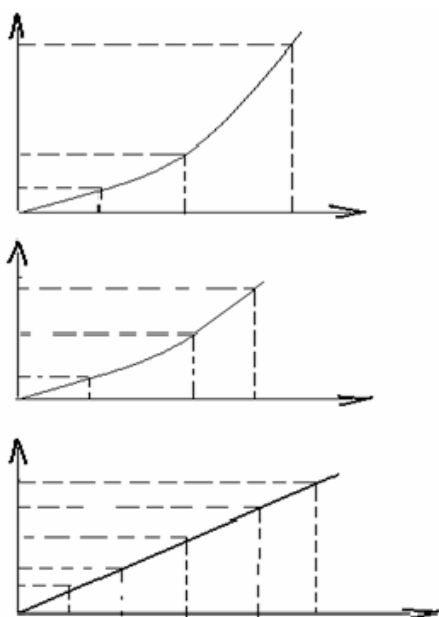
Нормал тезланиш радиус бўйлаб айланиш маркази томонга йўналган. Ҳар қандай вақтдаги тўла тезланишни топамиз:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{(-20\pi^2 \sin \pi t)^2 + (20\pi^2 \cos^2 \pi t)^2} =$$

$$= 20\pi^2 \sqrt{\sin^2 \pi t + \cos^4 \pi t} \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$

$t = 5 \text{сек}$ бўлганда, уринма тезланиш нолга тенг, демак, тўла тезланиш қиймат ва йўналиш жиҳатидан нормал тезланишга тенг, яъни:

$$\text{Жавоб. } w = w_n = 20\pi^2 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$



(а.б.в 13-шакл)

2-масала. Трамвайнинг тўғри чизикли йўлда тезланувчан ҳаракати шу билан характерланадики, трамвай босиб ўтган йўл вақтнинг кубига пропорционал: трамвай биринчи минут ичида 90м йўл босади; $t = 0$ ва $t = 5 \text{сек}$ вақтлардаги тезлик ва тезланиш топилсин. Масофа, тезлик ва тезланиш эгри чизиклари чизилсин.

Ечиш: Трамвай $s = Rt^3$ қонунга мувофиқ тўғри чизикли ҳаракат қиладидеб ҳисоблаймиз; бунда s -бошланғич ҳолатдан нуктагача бўлган масофа, R -ўзгармас коэффициент, t -вақт.

Тезлик ва тезланишни $v = \frac{ds}{dt}$ ҳамда $w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ тенгламалардан топамиз.

Ҳаракат тўғри чизиқли бўлганлиги учун нормал тезланиш нолга тенг: $w_n = 0$, тўла тезланиш эса уринма тезланишга барабар: $w = w_\tau$. Олдин $s = Rt^3$ тенгламадан R нинг қийматини топамиз. $t=1$ минутда $s=90$ м эканлиги маълум. $90 = R \cdot 1^3$, бундан: $k = 90$

бўлади; демак, трамвайнинг ҳаракат тенгламаси: $s = 90t^3$ м. ҳар қандай вақт учун нуқтанинг тезлиги: $v = \frac{ds}{dt} = 270t^2$ м/мин, (1) тезланиш эса:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = 540t \text{ м/мин}^2 \text{ бўлади.}$$

(1) ва (2) тенгламалардан бошланғич ($t=0$) вақтда трамвайнинг тезлиги билан тезланиши нолга тенг, яъни $v_0 = 0$ ва $w_0 = 0$. Ҳаракат бошланганида 5 сек ўтгач, тезлик:

$$v = 270 \left(\frac{1}{12} \right)^2 = \frac{15}{8} \text{ м/мин, тезланиш эса: } w_\tau = 570 \cdot \frac{1}{12} = 47.5 \text{ м/мин}^2 \text{ бўлади.}$$

Масофа, тезлик ва тезланишларни тўғри бурчакли координаталар системасини графикда тасвирлаш учун қуйидаги масштабларни қабул қиламиз: вақт масштаби 0,5 минут учун 1см; масофа масштаби 900 м учун 1см; тезлик масштаби 900м/мин учун 1см, тезланиш масштаби 900м/мин^2 учун 1см (13-шакл а,б,в).

12.9-масала. Поезд радиуси $R=800\text{м}$ бўлган айлана ёйи бўйлаб секинланувчан ҳаракат қилади ва $s=800\text{м}$ йўл босади. Унинг бошланғич тезлиги $v_0 = 54 \text{ км/соат}$ ва охириги тезлиги $v = 18 \text{ км/соат}$. Поезднинг ёй бошидаги ва охиридаги тўла тезланиши, шунингдек, шу ёй бўйлаб қанча вақт ҳаракат қилиши аниқлансин.

Ечиш: Поезд текис секунланувчан ҳаракат қилаётгани учун ҳаракатни (45.8) формулага мувофиқ ҳисобласак, ҳаракат қонуни:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} w_\tau t^2 \quad (1) \text{ бўлади. (48.9) формулага биноан ҳаракат тезлиги:}$$

$$v = v_0 - w_\tau \cdot t \quad (2) \text{ бўлади:}$$

(1) ва (2) тенгламалардан w_τ ни чиқариб ташлаймиз ва поезднинг айлана ёйига ўхшаш қанча вақтда ўтишини топамиз: $t = \frac{2s}{v - v_0}$. (3)

Масала шартига кўра, $v_0 = 54 \text{ км/соат} = 15 \text{ м/сек}$, $v = 18 \text{ км/соат} = 5 \text{ м/сек}$ дир, демак: $t=80\text{s}$ (4) келиб чиқади. (2) формуладан уринма тезланишни топамиз: $w_\tau = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{15 - 5}{80} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} \text{ м/сек}^2$. (5) бошланғич ва кейинги пайтдаги

ҳаракатларнинг нормал тезланишини $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ формуладан топамиз:

$$w_{no} = \frac{15^2}{800} = \frac{225}{800} = 0.281 \text{ м/сек}^2 \quad (6) \quad w_{tn} = \frac{5^2}{800} = \frac{25}{800} = 0.031 \text{ м/сек}^2, \quad (7)$$

w_τ , w_{no} ва w_{tn} ларнинг қийматини аниқлаб олганимиздан кейин $w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$ формуладан тўла тезланишни топамиз:

$$w_0 = \sqrt{(0.125)^2 + (0.281)^2} = 0.308 \text{ м/сек}^2 \quad (8) \quad w = \sqrt{(0.125)^2 + (0.031)^2} = 0.129 \text{ м/сек}^2 \quad (9)$$

4-масала. $x = at$, $y = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t})$ қонунга мувофиқ ҳаракат қилаётган нуқтанинг траекторияси. Эгрилик радиуси, тезлиги ва тезланиши топилсин.

Ечиш: Траектория тенгламасини топиш учун ҳаракат тенгламасидан t вақтни чиқариб ташласак кифоя; бунинг учун биринчи тенгламадан t нинг қийматини топиб, иккинчи тенгламага қўямиз:

$$t = \frac{x}{a}, \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right), \quad (1)$$

демак, траектория занжирли чизик кўринишда экан. Энди v тезликни топамиз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{a}{2}(e^t - e^{-t}), \quad (2) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}(e^t - e^{-t})^2} = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}).$$

(7) формулага биноан, нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракатланиш қонунини аниқлаймиз:

$$s = \int_0^t v \cdot dt = \frac{a}{2} \int_0^t (e^t + e^{-t}) dt = \frac{a}{2}(e^t - e^{-t}) = a \sinh(t). \quad (4)$$

(3), (5) формулалардан w_τ ва w_n ларнинг қийматларини топамиз:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \\ w_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}). \end{aligned} \right\} \quad (5) \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}), \quad (6) \quad w_\tau = \frac{dw}{dt} = \frac{a}{2}(e^t - e^{-t}). \quad (7)$$

нормал тезланиш эса қуйидагичадир:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}(e^t + e^{-t})^2 - \frac{a^2}{4}(e^t - e^{-t})^2} = a. \quad (8)$$

Энди (4.8.4) формуладан траекториянинг эгрилик радиусини топамиз:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\frac{a^2}{4}(e^t + e^{-t})^2}{a} = \frac{a}{4}(e^t + e^{-t})^2, \quad (9)$$

бирок, $e^t + e^{-t} = \frac{2y}{a}$ бўлгани учун:

$$\text{Жавоб: } \rho = \frac{a}{4} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = \frac{y^2}{a} \quad (10) \text{ бўлади.}$$

12.25-масала. Нуқта $x = 2 \cos 4t$, $y = 2 \sin 4t$, $z = 2t$ тенгламалар билан ифодаланадиган винтсимон текис ҳаракат қилади. Траекториянинг эгрилик радиуси ρ аниқлансин.

Ечиш: (12) ва (15) формулалардан фойдаланиб, ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги билан тезланишини топамиз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -8 \sin 4t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 8 \cos 4t, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 2,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{64 \sin^2 4t + 64 \cos^2 4t + 4} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \text{ м/сек},$$

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -32 \cos 4t, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -32 \sin 4t, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{32^2 \cos^2 4t + 32^2 \sin^2 4t} = 32 \text{ м/сек}^2.$$

энди (45.3), (45.4) ва (45.5) формулалардан w_τ , w_n ва ρ ларнинг қийматларини аниқлаймиз:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{32^2 - 0} = 32 \text{ м/сек}^2,$$

$$\text{Жабов; } \rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{68}{32} = 2 \frac{1}{8} \text{ м.}$$

7-8-машғулот.

ҚАТТИҚ ЖИСМ ҲАРАКАТЛАРИНИНГ АСОСИЙ ТУРЛАРИ

Умумий маълумотлар

Жисм ҳаракатланаётган пайтда унинг иккита нуқтаси ва шу нуқталардан ўтадиган тўғри чизик қўзғалмас ҳолда қолса, жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган бўлади. қўзғалмас нуқталардан ўтган тўғри чизик жисмнинг қўзғалмас айланиш ўқи дейилади. Жисмнинг айланиш ўқидан ўтган текисликнинг бири жисмга нисбатан қўзғалмас, иккинчисига эса жисм билан бирга ҳаракатланади деб олсак, бу текисликлар орасидаги φ бурчак (бу бурчак радиан ҳисобида ифодаланади) жисмнинг исталган вақт оралигидаги ҳолатини белгилайди.. Шунинг учун, жисм ўқ атрофида айланар экан, φ бурчак узлуксиз бир қийматли вақт функцияси бўлади:

$$\varphi = f(t). \quad (1)$$

(1) тенглик қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тенгламаси ёки айланма ҳаракат қонуни дейилади. $\varphi - \varphi_0$ бурчак айланиш бурчаги дейилади.

Жисмнинг айланма ҳаракат қонуни маълум бўлса, бурчак тезлигини ва бурчак тезланишини топиш мумкин.

Бурчак тезлиги айланиш бурчагидан вақтга нисбатан олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t). \quad (2)$$

Бурчак тезланиши айланиш бурчагидан вақтга нисбатан олинган иккинчи тартибли ҳосилага ёки бурчак тезлигидан вақтга нисбатан олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f''(t), (3) \quad \begin{aligned} [\omega] &= \frac{\text{рад}}{\text{сек}} = \frac{1}{\text{сек}} = \text{сек}^{-1}; \\ [\varepsilon] &= \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2} = \frac{1}{\text{сек}^2} = \text{сек}^{-2} \end{aligned}$$

эканлиги (2) ва (3) тенгламадан кўриниб турибди.

Жисм ўқ атрофида бир текис айланаётганда бурчак тезлиги билан минутига айланиш сони (n айл/мин) орасидаги муносабат қуйидагича ифодаланади:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{сек}^{-1}. (4)$$

Жисмнинг айланиш бурчак тезлиги билан бурчак тезланиши маълум бўлса, айланиш ўқидан R масофада турган нуқтасининг чизиқли тезлигини ва чизиқли тезланишини топиш мумкин.

Жисмнинг айланиш ўқидан R масофада бўлган нуқтасининг тезлиги катталик жиҳатидан қуйидагича бўлади:

$$v = \omega R \text{ м/сек}. (5)$$

Бу тезлик траекторияга уринма ҳолда, жисмнинг айланиш томонига йўналган. Шу нуқта уринма тезланишининг катталиги қуйидагича:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon. (6)$$

Уринма тезланиш траекторияга уринма бўйлаб йўналган, шу билан бирга ишораси мусбат бўлганда тезлик бир томонга акс ҳолда қарама-қарши томонга йўналган бўлади. Нормал тезланиш катталик жиҳатидан

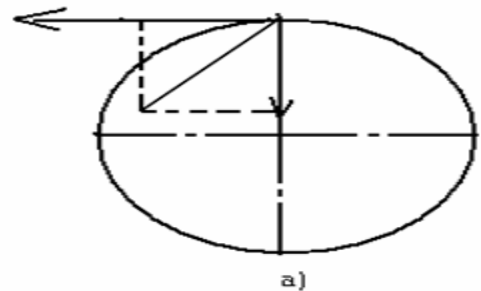
$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 R (7)$$

бўлиб, эгрилик радиуси бўйлаб, айланиш ўқи томонига йўналган.

Тўла тезланиш катталик жиҳатидан бундай бўлади:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ м/сек}^2. (8)$$

Тўла тезланиш вектори $\vec{w}$ билан нормал тезланиш вектори $\vec{w}_n$ орасидаги μ бурчак қуйидаги формуладан топилади (2-шакл,а):



2-шакл.

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|w_\tau|}{w_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. (9)$$

Ўзгармас бурчак тезлиги билан айланувчи жисмнинг айланиш қонуни қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, (10)$$

бунда φ_0 - жисмнинг бошланғич пайтгача айланиш бурчаги.

Жисм текис ўзгарувчи (тезланувчи ёки секунланувчи) ҳаракат билан айланадиган бўлса, айланиш бурчак тезланиши ε ўзгармас қийматга эга

бўлади. Айланма ҳаракат текис тезланувчан ҳаракат бўлса, ε мусбат ишора билан, текис секинланувчан ҳаракат бўлса, ε манфий ишора билан олинади.

Бу ҳолда жисмнинг айланиш қонуни:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (11)$$

формула билан, бурчак тезлигининг ўзгариши эса:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \quad (12)$$

формула билан ифодаланади. Бу формулаларда φ_0 -жисмнинг бошланғич айланиш бурчаги, ω_0 -бошланғич бурчак тезлиги.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги билан бурчак тезланишини ҳамда жисм нуқтасининг тезлиги билан тезланишини вектор кўринишда ифодалаш мумкин, бу ҳолда бурчак тезлигининг вектори:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (13)$$

бўлади; бу ерда $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ -бурчак тезлиги вектори $\vec{\omega}$ нинг x, y, z ўқлардаги проекциялари; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -ортлар.

Жисм бурчак тезланишининг вектори:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k} \quad (14)$$

бўлади; бу ерда $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ -бурчак тезланиши вектори $\vec{\varepsilon}$ нинг x, y, z ўқлардаги проекциялари.

Жисм нуқтасининг тезлик вектори радиус-вектори $\vec{r}$ орқали ифодаланади:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]. \quad (15)$$

Уринма тезланиш вектори:

$$\vec{w}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]. \quad (16)$$

Нормал тезланиш вектори:

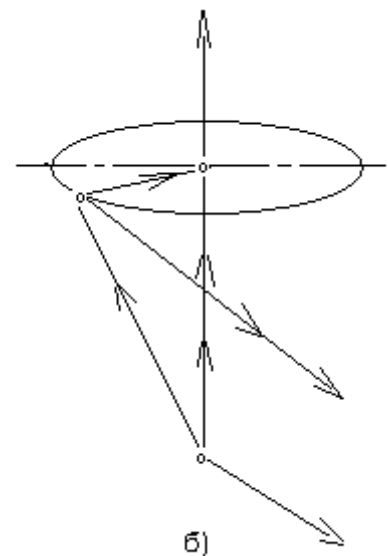
$$\vec{w}_n = [\vec{\omega} \cdot \vec{v}] = [\vec{\omega} [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]. \quad (17)$$

Тўла тезланиш вектори:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}] + [\vec{\omega} \cdot \vec{v}]. \quad (18)$$

бўлади (2-шакл, б).

$\vec{v}$ тезлик ва $\vec{w}_\tau$ уринма тезланиш векторлари нуқта траекторияси бўлган айланага уринма бўлиб йўналган. $\vec{w}_n$ -нормал тезланиш вектори радиус бўйлаб ёйнинг марказига йўналган. Агар жисм тезланишли айланишда бўлса, $\vec{v}$ ва $\vec{w}_\tau$ бир йўналишда, секинланувчан айланишда бўлса, қарама-қарши йўналишда



бўлади.

Агар жисм ўзгармас тезлик билан айланса, $\omega = const$, демак, бу ҳолда $v = const$; $\varepsilon = 0$; $w_\tau = 0$ ва $\overline{w} = \overline{w}_n$ бўлади. Бу ҳолда тўла тезланиш $\overline{w}$, нормал тезланиш $\overline{w}_n$ билан бир йўналишда бўлади. Одатда $\overline{w}_n$ га марказга интилувчи тезланиш дейилади.

9-машғулот.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг айланиш бурчагини, бурчак тезлигини ва бурчак тезланишини топишга доир масалаалар

13.2-масала. Буғ турбинаси дискни ҳаракатга келтириш давридаги айланиш тенгламаси ёзилсин; айланиш бурчаги вақт кубига пропорционал ва $t = 3\text{сек}$ бўлганда бурчак тезлиги $n = 810\text{айл} / \text{мин}$ га тўғри келади.

Ечиш: Масала шартига кўра, ҳаракат қонунини қуйидаги формула билан ифодалаш мумкин:

$$\varphi = kt^3 \text{ рад} \quad (1)$$

бу ерда к-ўзгармас қийматга эга бўлган ва изланаётган номаълум коэффициент.

(1) ҳаракат қонунидан ω -бурчак тезлигини топамиз:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3kt^2, \quad (2)$$

вақт $t = 3\text{сек}$ бўлганда $n = 810\text{айл} / \text{мин}$ эканлиги маълум, шунга кўра:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{810\pi}{30} = 27\pi \frac{1}{\text{сек}}$$

бўлади. Энди к ни топамиз:

$$\omega = 3 \cdot k \cdot 3^2 \quad (3) \quad \text{ёки} \quad 27\pi = 3 \cdot k \cdot 3^2, \quad (3') \quad \text{бундан:} \quad k = \frac{27\pi}{27} = \pi \quad (4)$$

келиб чиқади. Демак, ҳаракат қонуни: $\varphi = \pi t^3 \text{ рад}$ (5) бўлади.

2-маласа. Тинч ҳолатда турган салмоқли ғилдирак текис тезланиш билан айлана бошлайди; ҳаракат бошлангандан 10 минут кейин унинг бурчак тезлиги $120\text{айл} / \text{мин}$ га тўғри келади. Шу 10 минут ичида ғилдирак неча марта айланади?

Ечиш: Салмоқли ғилдирак текис тезланиш билан айланаётганлиги учун бурчак тезланиши мусбат бўлади ва ҳаракат даврида ўзгармайди.

$\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ деб ҳисобласак, (11) ва (12) формулаларга мувофиқ:

$\varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2}$, (1) $\omega = \varepsilon t$ (2) келиб чиқади. Бу тенгламаларда бурчак тезланиши ε

номаълум. Лекин 10 минутдан кейин салмоқли ғилдиракнинг бурчак тезлиги $n = 120\text{айл} / \text{мин}$ бўлиши маълум, яъни: $\omega = \frac{n\pi}{30} = \frac{120\pi}{30} = 4\pi \frac{1}{\text{сек}}$. (3)

демак, $t = 10 \text{ мин}$ бўлганда $\omega = 4\pi \frac{1}{\text{сек}}$. энди (2) тенгламадан фойдаланиб ε ни

топамиз: $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{600} = \frac{\pi}{150} \frac{1}{\text{сек}^2}$. Ғилдиракнинг 10 минутда тўла айланиш

бурчагини радиан билан ифодаланадиган бурчакни (1) тенгламадан

топамиз: $\varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2} = \frac{\pi}{150} \cdot \frac{(10 \cdot 60)^2}{2} = 1200\pi \text{ rad}$. Ғилдиракнинг айланиш сони:

$$N = \frac{1200\pi}{2\pi} = 600 \text{ бўлади.}$$

3-масала. Самолётнинг мотори ўчирилганда $n = 1200 \text{ айл / мин}$ га тўғри келадиган бурчак тезлиги билан айланаётган пропеллери (винти) тўхтагунча 80 марта айланади. Агар пропеллернинг айланишини текис секинланувчан деб ҳисобласак, мотор ўчирилгандан кейин пропеллер тўхтагунча қанча вақт ўтади?

Ечиш: Пропеллер айланиши текис секинланувчан айланма ҳаракат бўлгани учун бурчак тезланиши манфий бўлиб, унинг катталиги ҳаракат даврида ўзгармайди. $\varphi_0 = 0$ деб ҳисобласак, (11) ва (12) формулаларга

мувофиқ, қуйидагилар келиб чиқади: $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$, (1) $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$. (2)

$$\text{Бироқ: } \omega_0 = \frac{n\pi}{30} = \frac{1200\pi}{30} = 40\pi \frac{1}{\text{сек}}. \quad (3)$$

Пропеллер 80 марта айлангани учун унинг айланиш бурчаги $\varphi = 80 \cdot 2\pi = 160\pi \text{ rad}$. Пропеллер тўхтаганда бурчак тезлиги нолга тенг, яъни $\omega = 0$.

Шуларга биноан, иккита тенглама ҳосил бўлади:

$$40\pi t - \varepsilon \frac{t^2}{2} = 160\pi, \quad (4) \quad 40\pi - \varepsilon t = 0 \quad (5) \quad \text{Булардан: } \varepsilon = \frac{40\pi}{t} \quad \text{ва}$$

$$40\pi t - \frac{40\pi}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = 160\pi \quad \text{бундан: } t = \frac{160\pi}{20\pi} = 8 \text{ сек.}$$

II Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлигини ва тезланишини топиш.

4-масала. Машинанинг радиуси 0,3 м бўлган ғилдираги ўқ ўқи атрофида бир текис айланади, айланиш тезлиги минутига 1000 мартага тўғри келади. Ғилдиракнинг бурчак тезлиги ω тезланиши топилсин.

Ечиш: Ғилдирак бир текис айлангани учун (4) формуладан фойдаланамиз: $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{1000 \cdot 3,14}{30} = 104,7 \frac{1}{\text{сек}}$. (5) ва (7) формулаларга

$$v = \omega R = 104,7 \cdot 0,3 = 31,41 \text{ м / сек.}$$

мувофиқ: $w = w_n = \omega^2 R = (104,7)^2 \cdot 0,3 = 3289,9 \text{ м / сек}^2$ келиб чиқади,

яънибир текис айланишда; $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, $w_t = 0$ ва $w = w_n$ бўлади.

5-масала. Радиуси $R = 2 \text{ м}$ бўлган ва тинч ҳолатда турган салмоқли ғилдирак текис тезланиш билан айланади: ғилдирак тўғинида ётувчи нуқталарнинг чизиқли тезлиги $t = 10 \text{ сек}$ дан кейин $v = 100 \text{ м / сек}$ бўлади.

ғилдирак тўғинидаги нуқтанинг $t=15\text{сек}$ бўлган вақтдаги тезлиги, уринма ва нормал тезланишлари топилсин.

Ечиш: ғилдирак текис тезланиш билан айлангани учун бурчак тезланиши мусбат ва ўзгармас бўлади. Текис тезланиш билан айланиш вақтидаги бурчак тезлиги қуйидаги формуладан топилади:

$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. (1) бошланғич вақтда ғилдирак тинч ҳолатда турганлиги учун

$\omega_0 = 0$ бўлади, шунга кўра: $\omega = \varepsilon t$ (2) бўлади. Ғилдиракнинг 10сек дан

кейинги бурчак тезлигини (5) формуладан топамиз: $v = \omega \cdot R$, (3)

бундан: $\omega_{10} = \frac{v}{R} = \frac{100}{2} = 50 \frac{1}{\text{сек}}$ (4) келиб чиқади. (2) тенгламадан

фойдаланиб, бурчак тезланишини аниқлаймиз: $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50}{10} = 5 \frac{1}{\text{сек}^2}$. (5)

демак, бурчак тезлигининг вақтга нисбатан ўзгариши қуйидагича бўлади:

$\omega = 5t \frac{1}{\text{сек}}$. (6) формуладан фойдаланиб, 15 сек дан кейинги бурчак

тезлигини топамиз: $\omega_{15} = 5 \cdot 15 = 75 \frac{1}{\text{сек}}$. (7) энди (6) ва (7) формулаларга

мувофиқ, ғилдирак тўғинидаги нуқтанинг $t=15\text{сек}$ бўлган пайтда уринма ва нормал тезланишлари қанча бўлишини топамиз.

Уринма тезланиш: $w_\tau = \varepsilon \cdot R = 5 \cdot 2 = 10 \text{м} / \text{сек}^2$.

Нормал тезланиш: $w_n = \omega^2 \cdot R = 75^2 \cdot 2 = 11250 \text{м} / \text{сек}^2$.

6-масала. А шарча узунлиги $l=398\text{см}$ бўлган ипга осилган; шарча қўзғалмас горизонтал О ўқ атрофида вертикал текисликда қуйидаги тенгламага мувофиқ тебранади (3-шакл).

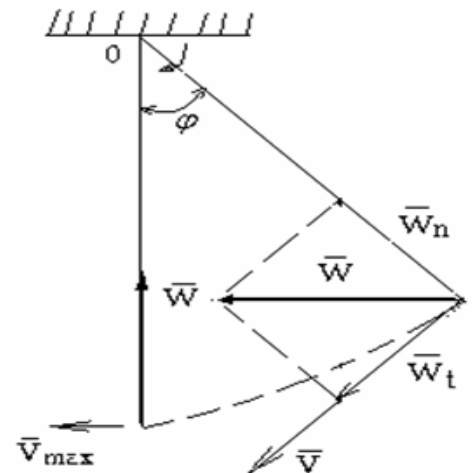
$$\varphi = \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{2} t$$

(φ -радиан ҳисобида, t -секунд ҳисобида).

1) ҳаракат бошлангандан кейин шарчанинг нормал тезланиши нолга тенг бўладиган энг кам вақт:

2) шарчанинг уринма тезланиши нолга тенг бўладиган энг кам вақт:

3) $t = \frac{1}{2} \text{сек}$ бўлганда шарчанинг тўла тезланиши аниқлансин.



3-шакл.

Ечиш: (2) ва (3) формулалардан фойдаланиб, олдин бурчак тезлиги билан бурчак тезланишини топамиз:

$$w = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{2} t, \quad (1) \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\pi^3}{32} \sin \frac{\pi}{2} t. \quad (2)$$

(48.6) ва (48.7) формулаларга мувофиқ:

$$w_\tau = \varepsilon \cdot l = -\frac{\pi^3}{34} \cdot l \cdot \sin \frac{\pi}{2} t, \quad (3) \quad w_n = \omega^2 \cdot l = \frac{\pi^4}{256} \cdot l \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} t \quad (4) \text{ бўлади.}$$

$\cos \frac{\pi}{2} t = 0$ бўлганда нормал тезланиш нолга тенг бўлади.

Бу вақтда: $\frac{\pi}{2} t = \frac{\pi}{2}$, яъни $t = 1 \text{сек.}$ $\sin \frac{\pi}{2} t = 0$ бўлганда уринма тезланиш нолга тенг бўлади, бу вақтда: $\frac{\pi}{2} t = \pi$, яъни $t = 2 \text{сек.}$ ҳамда

$t = \frac{1}{2} \text{сек}$ бўлганда тўла тезланиш (8) формулага мувофиқ қуйи-дагича бўлади:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \\ &= l \sqrt{\left(\frac{\pi^3}{32}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} t + \left(\frac{\pi^4}{256}\right)^2 \cos^4 \frac{\pi}{2} t} = \\ &= l \sqrt{\frac{\pi^6}{1024} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi^8}{256^2} \cdot \frac{1}{4}} = 282,95 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}. \end{aligned}$$

III. Айланма ҳаракатни бир жисмдан иккинчи жисмга ўтказиш.

13.8-масала. Мотор ўчирилган пайтда $40\pi \text{ рад/с}$ га тўғри келадиган бурчак тезлиги билан айланаётган самалёт пропеллери тўхтагунча 80 марта айланади. Пропеллер айланишини текис секинланувчан деб ҳисоблаб, мотор ўчирилганидан пропеллер тўхтагунча қанча вақт ўтиш топилсин.

Ечиш: Айланма ҳаракат текис секинланувчан бўлганлиги учун бурчак тезланиш манфий бўлиб, унинг катталиги ўзгармайди.

$\varphi_0 = 0$ деб олсак, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ формулаларга мувофиқ:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \text{ва} \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon t \quad \text{муносабатлар келиб чиқади.}$$

Бизда $\omega_0 = 40\pi \frac{1}{\text{сек}}$ тенг.

Пропеллер 80 марта айлангани учун унинг айланиш бурчаги $\varphi = 80 \cdot 2\pi = 160\pi$ га тенг бўлади.

Пропеллер тўхтаганда бурчак тезлиги нолга тенг, яъни

$$\begin{aligned} \omega = 0 \Rightarrow 0 &= 40\pi \frac{1}{\text{с}} - \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{40\pi}{t} \\ 40\pi t - \frac{40\pi}{t} \cdot \frac{t^2}{2} &= 160\pi \Rightarrow t = \frac{160\pi}{20\pi} = 8 \text{сек.} \end{aligned}$$

Демак жавоб 8 сек.

13.5-масала. Тинч ҳолатда бўлган жисм текис тушган билан айлана бошлаб биринчи 5 секунда у 12,5 марта айланди. Шу 5 секунд ўтгандан сўнг унинг бурчак тезлиги қанча бўлади.

Берилган

Ечиш:

$t = 5 \text{сек}$

Ҳаракат тинч ҳолатда бўлгани учун

$$n=12,5$$

$$w_0 = 0, \varphi = 2\pi n = 2\pi \cdot 12,5 = 25\pi, \varphi = w_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

W-?

$$25\pi \pm \frac{\varepsilon \cdot 5^2}{2}$$

$$50\pi = 25 \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = 2\pi$$

$$w = w_0 + \varepsilon t$$

$$w_0 = 0$$

$$w = \varepsilon t = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \text{ рад/с}$$

13.4-масала. Тик ҳолатда бўлган жисм текис тезланиш билан айлана бошлаб биринчи 2 минутда 3600 марта айланади. Бурчакнинг тезланиши аниқланг.

Берилган

Ечиш

$$n=3600 \text{ айл/сек}$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3600\pi}{30} = 120\pi,$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\omega_0 = 0$$

$$t=2 \text{ мин} = 120 \text{ сек}$$

$$\omega = \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \omega / t = \frac{120\pi \text{ айл/с}}{120 \text{ сек}} = \pi \text{ рад/сек}^2$$

ω -? ε -?

13.13-масала. Радиуси 0,5 м бўлган моховик ўз ўқи айтрофида бир текис айланади ғилдирак туғинида айланадиган нуқталарнинг тезлиги 2 м/с га тенг. Ғилдирак 1 минутда неча марта айланади.

Берилган

Ечиш

$$R=0.5 \text{ м}$$

$$v = \omega \cdot R, \omega = \frac{v}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ рад/с}$$

$$V=2 \text{ м/с}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad \varphi_0 = 0, \quad \omega t = \varphi, \quad \varphi = 2\pi n$$

$$t=1 \text{ м}$$

$$n = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{60}{\pi} = \frac{120}{\pi} \approx 38,2 \text{ айл/мин}$$

n-?

Ж: $n \approx 38,2 \text{ айл/мин}$

13.11-масала. Мотор ўчиргичи пайтида 40π рад/с. га тўғри келадиган бурчак тезлиги билан айланаётган самалиёт пропеллери тўхтагунча 180 марта айланади. Пропеллер айланишини текис секунланувчи деб ҳисоблаб мотор ўчирганидан пропеллер тўхтагунига қанча вақт ўтиши топилсин.

Берилган.

Ечиш:

$$\omega=40\pi \text{ рад/с}$$

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t, \varphi_0 = 0, \varphi = 2\pi n = 2\pi \cdot 80 = 160\pi$$

$$n=80$$

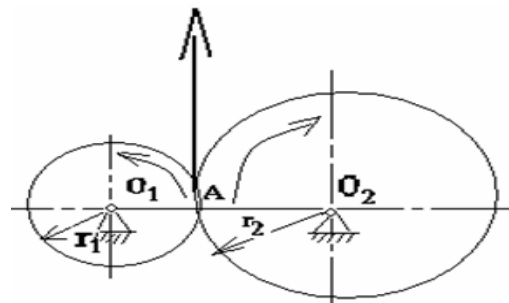
$$\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = 2\pi n, \quad t = \frac{\varphi}{\omega}, \quad \varphi = 2\pi n$$

$$t = \frac{2\pi n}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 80}{40} = \frac{160\pi \text{ см/мин}}{40 \text{ рад/с}} = 4 \text{ сек.}$$

t-?

Ж: $t=4 \text{ сек}$

10-11-машғулот.
Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи
қаттиқ жисмларга доир масалалар
ечиш.



4-шакл

Бир жисмнинг айланиш ҳаракатини иккинчи жисмга ўтказиш масалалари ҳар хил йўл билан ечилади. Бундай масалаларни ечиш учун тишли ғилдирақлар ёрдамида бир-бири билан тишлашган ва тасма билан бир-бирига бириктирилган жисмларнинг айланма ҳаракатлари учун тегишли формулаларни ёзамиз.

Радиуслари r_1 ва r_2 бўлган тишли ғилдирақлар бир-бири билан тишлашган бўлсин (4-шакл, а).

Биринчи O_1 ғилдиракни етакчи ғилдирак деб, иккинчи O_2 ғилдиракни етакланувчи ғилдирак деб фараз қилайлик.

Иккала ғилдиракнинг тишлари тегишиб турган нуқталарнинг тезлиги катталиқ ва йўналиш жиҳатидан бир хилдир:

$$\vec{v}_{1A} = \vec{v}_{2A} = \vec{v}. \quad (1)$$

Ғилдирақларнинг бурчак тезликлари ва радиуслари орасидаги муносабатни биринчи тенгламадан топиш мумкин, яъни:

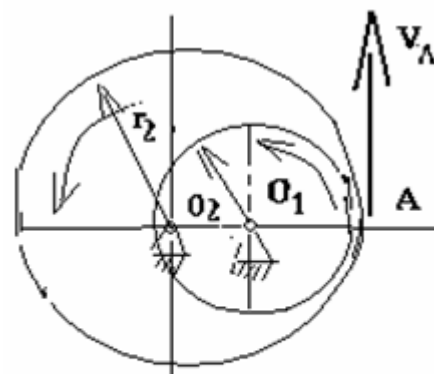
$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad (2) \quad \text{Бундан, } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (3)$$

келиб чиқади. Демак, етакчи ва етакланувчи ғилдирақлар бурчак тезликларининг нисбати радиусларининг нисбатига тескари пропорционалдир.

Ғилдирак тишлари ташқарии томондан тишлашган бўлса (4-шакл, а), улар ҳар хил томонга айланади.

Ғилдирак тишлари ичкари томондан тишлашган бўлса

(4-шакл б), иккала ғилдирак ҳам бир томонга айланади.



4-шакл б)

Бурчак тезликларнинг нисбатини ғилдирак тишларининг сони z_1 , z_2 , билан ёки айланиш сони n_1 , n_2 билан ифодалаш мумкин:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (4) \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (5)$$

Етакчи ғилдирак бурчак тезлигининг етакланувчи ғилдирак бурчак тезлигига нисбати $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{1,2}$ узатиш сони дейилади.

Ғилдирақлар ички томондан тишлашган бўлса, узатиш сони мусбат, ташқи томондан тишлашган бўлса манфий бўлади. Узатиш сони (3), (4), (5) формулаларга мувофиқ қуйидагича бўлади:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (6)$$

тишлашган ғилдираклар бир неча жуфт (масалан, n жуфт) бўлса, умумий узатиш сони ҳар жуфт ғилдирак узатиш сонларининг кўпайтмасига тенг:

$$i_{1,n} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3,4} \dots i_{(n-1),n}, \text{ бундан: } i_{1,n} = (-1)^m \cdot \frac{\omega_1}{\omega_n}, \quad (7) \text{ бу ерда}$$

m -ташқи томондан тишлашган жуфтлар сони.

Умумий узатиш сонини ғилдирак тишлари сонининг ёки радиусларининг нисбати орқали ифодалаш мумкин.

Бир-бири билан тишланиб турган ҳамма ғилдираклар тишларининг сонини ёки радиусларини ҳисобга олиш керак, яъни:

$$i_{1,n} = (-1)^m \left(\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} \dots \frac{z_n}{z_{n-1}} \right) \quad (8) \text{ ва } i_{1,n} = (-1)^m \left(\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_4}{r_3} \dots \frac{r_n}{r_{n-1}} \right), \quad (9)$$

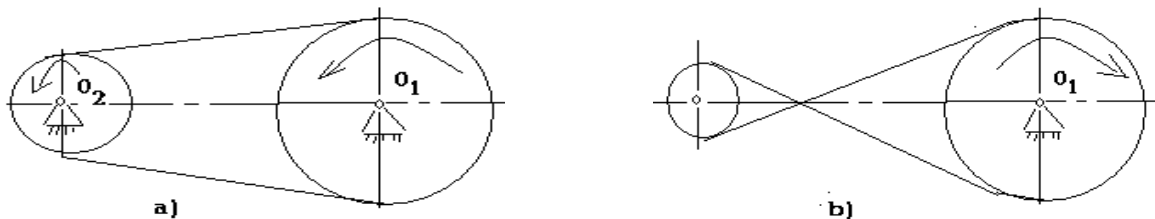
бу ерда r_1 ва r_2 -битта Валга ўрнатилган тишли ғилдиракларнинг радиус ива z_1, z_2 -улар тишларининг сони.

Ҳаракат тасма орқали узатиладиган бўлса (2-шакл), узатиш сони етакчи ғилдирак бурчак тезлигининг етакланувчи ғилдирак бурчак тезлигига бўлган нисбатига тенг.

Бу нисбат айланиш сонларининг нисбатига тўғри пропорционал бўлиб, ғилдирак радиусларининг нисбатига тескари пропорционалдир:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (10)$$

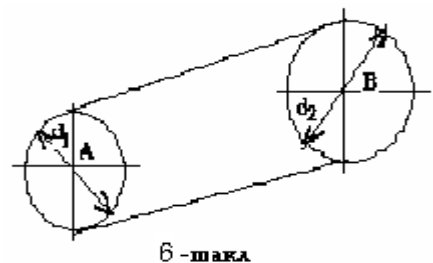
Узатма тасмалари айқашмаган бўлса (5-шакл,а), ғилдираклар бурчак тезликларининг йўналиши бир хил ва, демак, узатиш



сони мусбат бўлади.

Узатма тасмалари айқаш бўлса (5-шакл, б), ғилдиракларнинг бурчак тезликлари қарама-қарши томонга йўналган ва, демак, узатиш сони манфий бўлади.

1-масала. А ва В шкивлар тасмали узатма орқали бир-бирига туташтирилган (6-шакл) А шкив диаметри $d_1=1м$ В шкив диаметри $d_2=1,5м$. В шкив минутига 100 марта айланади. Тасмадаги нуқтанинг тезлиги v ва иккала шкивнинг бурчак тезлиги топилсин.



6-шакл

Ечиш: Тасмадаги ҳамма нуқталарнинг тезлиги бир хил бўлгани учун:

$$v_B = v_A \quad (1) \text{ ёки } \omega_1 \cdot \frac{d_1}{2} = \omega_2 \cdot \frac{d_2}{2} \quad (2)$$

бўлади, бу ерда ω_1 ва ω_2 биринчи ва иккинчи шкивларнинг бурчак тезликлари (2) формулага асосан: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}$. (3)

Демак, тасма орқали бир-бир билан бириккан шкивлар бурчак тезликларининг нисбати диаметрларининг нисбати-гatesкари пропорционалдир, шу муносабат билан:

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{d_2}{d_1} \quad (4) \text{ бўлади. (4) формулага биноан: } \omega_2 = \frac{n\pi}{30} = \frac{100\pi}{30} = \frac{10}{3} \pi \frac{1}{\text{сек}}, \quad (5)$$

шунинг учун $\omega_1 = \frac{10}{3} \pi \cdot \frac{1,5}{1} = 5\pi = 5 \cdot 3,14 = 15,708 \frac{1}{\text{сек}}$ (6) бўлади. (5)

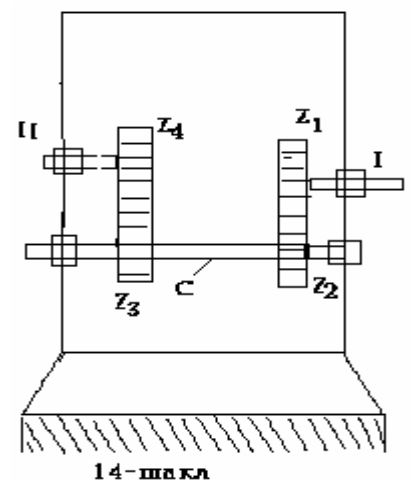
формулага мувофиқ, тезлик қуйидагича бўлади:

$$v = \omega_1 \cdot \frac{d_1}{2} = 15,7 \cdot 0,5 = 7,85 \text{ м/сек.} \quad (7)$$

2-масала. I валнинг айланишини секинлаштирадиган ва айланма ҳаракатни II Валга узатадиган редуктор тўртта шестернядан иборат (7-шакл); шестернялар тишларининг сони $z_1 = 10$, $z_2 = 60$, $z_3 = 12$, $z_4 = 70$. Механизмнинг узатиш сони топилин.

Ечиш: Редукторнинг узатиш сони (3) формуладан топилади:

$$i_{3,1} = (-1)^2 \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{10}{60} \cdot \frac{12}{70} = \frac{1}{35}, k = \frac{1}{35}.$$



12-13-машғулот.
ДИНАМИКА. МОДДИЙ НУҚТА ДИНАМИКАСИ
АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Моддий жисмларнинг ҳаракатини шу ҳаракатни вужудга келтирувчи сабабга, яъни таъсир этаётган кучга боғлаб текширадиган механиканинг қисмига динамика дейилади.

Моддий нукта (динамика) нинг оддий объектидир.

Масала ечишда ўлчамларини ҳисобга олмаслик мумкин бўлган Моддий жисм Моддий нукта деб аталади.

Моддий нуктанинг ҳаракатига ҳеч қандай чегара (чек) қўйилмаса, у эркин Моддий нукта дейилади. Моддий нуктанинг ҳаракати бирор сабаб билан чекланган бўлса, ундай моддий нукта эрксиз моддий нукта дейилади.

Динамика икки қисмга, Моддий нукта динамикасига ва абсолют каттиқ жисм динамикасига тегишли Моддий нукталар системасининг динамикасига бўлинади.

Динамика И. Ньютон таърифлаб берган тўртга аксиомага (қонунга) асосланади.

Биринчи аксиома (инерция қонуни). *Ҳар қандай Моддий нукта унга бирор таъсири куч таъсир этмагунча ўзининг тинчлик ҳолатини ёки тўғри чизиqli тенг ўлчовли ҳаракатини сақлайди.*

Ўз тезлигининг ўзгаришига моддий нукта кўрсатадиган қаршилик унинг инерцияси дейилади.

Инерция қонунини татбиқ қилиш мумкин бўлган координата системаси инерциал система деб аталади.

Иккинчи аксиома (динамиканинг асосий қонуни).

Моддий нуктанинг ҳаракатлантирувчи куч таъсирида ҳосил бўлган тезланиши бу куч билан бир йўналишда бўлиб, миқдори жиҳатдан шу кучга пропорционалдир:

$$\vec{F} = m\vec{w}, \quad (1)$$

бу ерда $\vec{w}$ -куч таъсирида Моддий нукта олган тезланиш вектори:

m -моддий нуктанинг массаси-ўзгармас миқдор;

$\vec{F}$ -моддий нуктага таъсир этирилган кучнинг вектори.

Иккинчи аксиома эркин тушишга (ерга тортилишга) татбиқ этилганда куйидаги кўринишда бўлади:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (2)$$

бу ерда $\vec{g}$ -жисмнинг эркин тушиш тезланиши:

$\vec{P}$ -жисм оғирлигининг кучи.

Учинчи аксиома (таъсир ва акс таъсир қонуни).

Икки моддий нуктанинг бир-бирига таъсир кучи ҳамма вақт миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг ва қарама-қарши томонга йўналган бўлади.

Тўртинчи аксиома (кучлар таъсирининг эркинлик принципи).

Моддий нуқтага бир вақтнинг ўзида бир қанча куч таъсир этаётган бўлса, унинг тезланиши шу моддий нуқтага ҳар қайси куч алоҳида таъсир этганда ҳосил бўлган тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг, яъни

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \dots + \bar{w}_n, \quad (3)$$

бу ерда,

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{F}_1}{m}, \quad \bar{w}_2 = \frac{\bar{F}_2}{m}, \quad \bar{w}_3 = \frac{\bar{F}_3}{m}, \dots, \bar{w}_n = \frac{\bar{F}_n}{m},$$

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ -моддий нуқтага таъсир этирилган кучлар. m -моддий нуқтанинг массаси.

Моддий нуқта динамикаси қуйидаги асосий икки типдаги масалани текширади:

1) моддий нуқтанинг массаси билан бирга кинематик элементлари берилган бўлиб, моддий нуқтани ҳаракатга келтирувчи кучни топиш керак. Бўлган масалалар биринчи тип масалаларга киради (динамиканинг биринчи масаласи). Бу типдаги масалаларни тўғри масалалар деб ҳам юритилади;

2) массаси маълум бўлган моддий нуқтага таъсир этувчи куч берилган бўлиб, шу куч таъсиридан ҳосил бўлган кинематик элементларини топиш керак бўлган масалалар иккинчи тип масалаларни тескари масалалар деб ҳам юритилади.

Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг асосий формулалари динамиканинг иккинчи ва тўртинчи қонунига асосан куч билан нуқтанинг тезланиши орасидаги боғланиш қуйидагича ифодаланган:

$$m\bar{w} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{E} \quad \text{ёки} \quad m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \quad (1.1)$$

(1.1) моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг вектор ифодасидир.

(1,1) вектор тенгликни бирор координата ўқлари системасига проекцияласак, моддий нуқта ҳаракатининг ўша ўқлар системасидаги дифференциал тенгламаларини олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z, \end{aligned} \right\} \quad (1,2)$$

бу ерда x, y, z -нуқтанинг координаталари; X, Y, Z - нуқтага таъсир этирилган кучлар тенг таъсир этувчисининг координата ўқларидаги проекциялари. Нуқта эрксиз бўлса, шу тенгламаларга боғланиш реакция кучлари ҳам киради.

Моддий нуқта-ҳаракати дифференциал тенгламасининг табиий координата ўқлари системасидаги проекцияси қуйидагича бўлади;

$$\left. \begin{aligned} mw_\tau &= F_\tau \\ mw_n &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned} \right\} (1,3) \text{ ёки } \left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_\tau \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n, \\ 0 &= F_b \end{aligned} \right\} (1,3')$$

бу ерда v -моддий нуқтанинг тезлиги; ρ -нуқта траекториясининг эгрилик радиуси; F_τ, F_n, F_b -нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг тегишлича уринма нормал ва бинормал ўқлардаги проекциялари. (1,3') тенгламага Моддий нуқта ҳаракатининг Эйлер ёки табиий тенгламаси дейилади.

Текисликда ҳаракат қилувчи моддий нуқтанинг қутб координата ўқлари орқали ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} m \left(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \right) &= F_n, \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) &= F_\varphi, \end{aligned} \quad (1,4)$$

бу ерда r -нуқтанинг радиус-вектори; φ -кутб бурчаги; F_τ, F_φ -нуқтага таъсир эттирилган кучнинг r ва φ даги проекциялари.

Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари ёрдамида динамиканинг икки асосий масаласини, яъни тўғри ва тескари масалаларини ечиш мумкин.

Берилган ҳаракат қонунидан кучни топиш

(Нуқта динамикасининг биринчи-тўғри масаласи)

массаси m бўлган моддий нуқта ҳаракати декарт координатасида $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ тенгламалар билан берилган бўлса, шу ҳаракатни вужудга келтирувчи $\vec{F}$ кучнинг X, Y, Z ўқлардаги проекциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (1,2) \text{ бундан:}$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos(\vec{F}, \vec{x}) = \frac{X}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{y}) = \frac{Y}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{z}) = \frac{Z}{F}.$$

Бу динамиканинг тўғри масаласи бўлгани учун берилган ҳаракат тенгламасини икки марта дифференциаллаш билан масала осонгина ечилади. Массаси m бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати траекторияда, яъни $s = f(t)$ тенглама билан берилган бўлса, шу ҳаракатни вужудга келтирувчи $\vec{F}$ кучнинг F_τ, F_n, F_b проекциялари қуйидаги формулаларда топилади:

$$F_\tau = m \frac{dv}{dt}, \quad F_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0, \quad (1,3') \text{ бундан:}$$

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_n^2}.$$

$$\cos(\vec{F}, \vec{r}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{n}) = \frac{F_n}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{b}) = 0.$$

массаси m бўлган моддий нукта ҳаракати қутб координатаси тенгламалари $r = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$ билан берилган бўлса, шу ҳаракатни вужудга келтирувчи $\vec{F}$ кучнинг F_r , ва F_φ проекциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}), \quad (1,4) \text{ бундан: } \cos(\vec{F}, \vec{r}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{\varphi}) = \frac{F_\varphi}{F}.$$

Моддий нуктага таъсир қилаётган кучнинг таъсир чизиғи доим бирор қўзғалмас нуктадан ўтса, бундай куч марказий куч деб, нукта эса марказ деб аталади. Қўзғалмас нуктага қараб йўналган кучга тортувчи (марказга интилувчи) куч, қўзғалмас нуктадан йўналган кучга итарувчи (марказдан қочувчи) куч дейилади.

Марказий куч таъсиридаги моддий нукта радиус-вектор билан нуктанинг бошланғич тезлик ётган текисликда ҳаракат қилади. Бундай ҳаракатдаги моддий нуктани табиий координата ўқлари системасида текширишда Бине формуласидан фойдаланиш қулай:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mc} F_r, \quad (1,5)$$

бу ерда c -нуктанинг секториал тезлиги, куч марказий бўлганда, бу тезлик ўзгармас: $c = S = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ (радиус-вектор чизган сектор юзи S дан вақтга нисбатан олинган биринчи тартибли ҳосила S га секториал тезлик дейилади). **Бине формуласи** марказий орбита бўйича ҳаракат тенгламаси берилганда марказий кучнинг ўзгариш қонунини топиш имконини беради. Агар F_r мусбат бўлса, марказий куч марказдан қочувчи куч бўлади, агар F_r манфий бўлса, куч марказга интилувчи куч бўлади.

1-масала. Ерга тортилиш кучининг таъсирида вертикал тушаётган, оғирлиги 10н бўлган M шар ўз оғирлиги таъсирида вертикал равишда пастга тушмоқда, унга ҳаво қаршилик кўрсатади. Шарнинг ҳаракат қонуни $s = 327t - 109(1 - e^{-3t})$ (s -см ҳисобида). Ҳавонинг қаршилик кучи тезликнинг функцияси сифатида топилсин.

Ечиш. Ҳаракат қилаётган M нуктага ернинг тортиш кучи P ва ҳавонинг қаршилик кучи $\vec{F}$ таъсир қилади. Бу масала динамиканинг тўғри масаласининг (1,2) тенгламасига асосан ечилади.

Шар ҳаракати дифференциал тенгламасининг вертикал x ўқдаги проекциясини тузамиз:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P - R, \quad (1) \text{ бундан: } R = P - m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

ҳаракат тенгламасидан биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар оламиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = 327e^{-3t} = 327(1 - e^{-3t}), \quad (3) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} = 981e^{-3t}. \quad (4)$$

Бирликларнинг абсолют системасидан фойдалансак:
 $P = mg$, $P = 10 \cdot 981 = 9810 \text{ дина}$, $m = 10g$ (4) ва (2) дан
 $K = 9810 - 9810e^{-3t} = 9810(1 - e^{-3t})$. (3) тенгламани назарга олиб R ни
 тезлик орқали ифодалаймиз: $R = 30v \text{ дина}$.

2-масала. Массаси m бўлган нуқта $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс бўйлаб ҳаракат
 қилади. Нуқтанинг тезланиши y ўққа параллел. $t = 0$ бўлганда нуқтанинг
 координаталари $x = 0$, $y = b$, бошланғич тезлик v_0 . Траекториянинг ҳар бир
 нуқтасида M нуқтага таъсир қилувчи куч аниқлансин (2-шакл).

Ечиш. Ҳаракат қилаётган M нуқта тезланиш векторининг Ox
 координата ўқидаги проекциясини топамиз. Тезланиш Oy ўққа параллел
 бўлгани учун $w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$. (1) Бу (1) дифференциал тенгламанинг
 интегралли: $x = C_1t + C_2$, (2) бу ерда C_1 ва C_2 –интеграллаш доимийлари.
 Нуқта ҳаракатининг бошланғич шартлари $t = 0$ бўлганда, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0$, $x_0 = 0$,
 (3) бўлишидан фойдаланиб, C_1 ва C_2 ни топамиз: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, (4) демак,
 $x = v_0t$. (5)

M нуқта тезланишини топиш учун нуқта траекториясининг
 тенгламаси (6) дан вақтга нисбатан икки марта ҳосила олиш керак:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (6)$$

бундан вақтга нисбатан олинган биринчи тартибли ҳосила:

$$\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dt} = 0,$$

иккинчи тартибли ҳосила:

$$\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{a^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{b^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0 \quad (2) \text{ ёки } \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{b^2}{a^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x \frac{d^2x}{dt^2}\right]. \quad (7)$$

(5) дан x қийматини (6) га олиб қўйиб, y ни топамиз:

$$y = b \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 t^2}. \quad (8)$$

(8) тенгликдан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{dy}{dt} = b \frac{-\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 t^2}} \text{ ёки } \frac{dy}{dt} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{v_0^2}{y} t. \quad (9)$$

(7), (8) ва (1) тенгламалардан фойдаланиб, изланаётган номаълум
 миқдорни топамиз:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{b^4}{a^2} \frac{v_0^2}{y^3} \quad (10)$$

Тезланиш вектори топилгандан кейин кучнинг ўша ўқдаги проекцияси Y ни (1,2) тенгламадан фойдаланиб топамиз:

$$Y = F_y = -m \frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}. \quad (11)$$

14-15-машғулот.

МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛИ ҲАРАКАТИ

Моддий нуқта тўғри чизик бўйлаб ҳаракат қилса, у чизикни Ox ўқи деб қабул қилиб, ўқни ҳаракатнинг ўсиш томонига қаратиб йўналтирамиз. Нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X. \quad (7,1)$$

Умумий ҳолда X куч нуқтанинг координатаси x , тезлиги $v = \frac{dx}{dt}$ ва вақт t нинг функцияси бўлади, яъни:

$$X = f(x, v, t).$$

Бундай типдаги масалалар тўртта группага бўлинади:

1. Моддий нуқтага қўйилган ҳамма кучларнинг тенг таъсир этувчиси ўзгармас бўлган масалалар, яъни

$$X = \text{const.}$$

2. Моддий нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси вақтга боғлиқ бўладиган масалалар, яъни:

$$X = f(t)$$

(масалан, нуқтани тебранма ҳаракатга келтирувчи даврий ўзгарувчи куч).

Бу ҳол учун (7,1) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m \frac{dv}{dt} = f(t). \quad (7,2)$$

бу группага И.В. Мешчерскийнинг «Назарий механикадан масалалар тўплами» китобидаги 694, 698, 701, 702-масалалар киради.

3. Моддий нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси нуқта координатасига (масофага боғлиқ бўладиган масалалар, яъни:

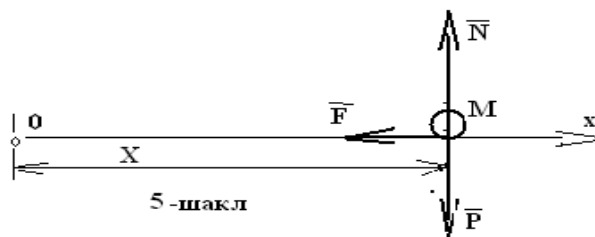
$$X = f(x) \quad (7,3)$$

(элатик пружиналар, иплар ва ҳоказоларнинг кучи).

Бу ҳол учун (7,1) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади: $mv \frac{dv}{dx} = f(x)$.

Масалалар

1-масала. Горизонтал йўлда 36 км/соат тезлик билан кетаётган трамвайга тормоз берилса, у қанча вақтда ва қандай масофада тўхтайдиган? Тормозлаш вақтида вагон ҳаракатига кўрсатиладиган қаршилик вагон оғирлигининг ҳар тоннасига 300 кГ дан тўғри келади



(1-шакл).

Ечиш: Трамвайнинг ҳамма массасини оғирлик маркази М нуқтада жойлашган Моддий нуқта деб фараз қиламиз (5-шакл).

М нуқта ҳаракат қилаётган тўғри чизикни Ох ўқи деб олиб, уни тормоз бериш вақтида М нуқта турган вазиятни ҳисоблаш боши учун қабул қиламиз.

Трамвайнинг ҳаракатини тормоз берилган $t=0$ вақтдан бошлаб текшираемиз. Масала шартига биноан $t=0$ бўлганда

$$x_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 = 10 \text{ м/сек.}$$

Ҳаракатнинг охирида трамвай тезлигининг $v=0$ бўлиши маълум. Тормозлаш вақтида трамвайга қандай кучлар таъсир қилишини Аниқлаймиз. Тормозлаш вақтида трамвайга учта куч таъсир қилади:

1) трамвайнинг оғирлик кучи $\bar{P}$; 2) рельснинг реакция кучи $\bar{N}$; 3) тоmozлаш қаршилиқ кучи $\bar{T}$. Бу кучларни М нуқтага қўйилган деб ҳисоблаймиз.

М нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз. Нуқта Ох ўқи бўйлаб тўғри чизикли ҳаракат қилгани учун, унинг ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -T$, бу ерда, m -вагоннинг массаси. Масала шартига кўра:

$$T = \frac{300}{1000} P = 0,3P = 0,3mg, \text{ шунинг учун } m \frac{d^2x}{dt^2} = -0,3mg \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -0,3g. \quad (1)$$

$$(1) \quad \text{тенгламани интеграллаймиз: } \frac{dx}{dt} = v = -0,3gt + c_1. \quad (2)$$

бу ерда c_1 -интеграллаш доимийси. Иккинчи марта интегралласак:

$$x = -0,3g \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \quad (3) \text{ бу ерда } c_2\text{-иккинчи интеграллаш доимийси.}$$

(3) ифодада иккита ўзгармас номаълум бор. Уларни (2) ва (3) тенгламалардан топиш учун улардаги t ўрнига $t=\tau$ ни (τ -тормозлаш вақти) ва чап томонларига тегишли қийматларини қўямиз. У вақтда

$$0 = v_0 - 0,3g\tau, \quad (4) \quad x = v_0\tau - \frac{0,3g\tau^2}{2}. \quad (5) \quad (4) \text{ тенгламадан тормозлаш вақти } \tau \text{ ни}$$

$$\text{топамиз: } \tau = \frac{v_0}{0,3g} = \frac{10}{0,3 \cdot 9,81} = 3,4 \text{ сек.} \quad (6)$$

Тормозлаш вақтида трамвай ўтган йўлни топиш учун тормозлаш вақтини (5) га қўямиз.

$$x = 10 \cdot 3,4 - \frac{0,3 \cdot 9,81 \cdot 3,4^2}{2} = 16,9 \text{ м,}$$

бу изланаётган тормозлаш вақтида трамвай босган йўл.

2-масала. Массаси m булган моддий нуқта $F = F_0 \cos \omega t$ (бу ерда F_0 ва ω - ўзгармас миқдорлар) қонунига мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизикли ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда нуқтанинг тезлиги $x_0 = v_0$ бўлган. Нуқта ҳаракатининг тенгламаси топилсин (2-шакл).

Ечиш. Нуқтанинг бошланғич (олдинги) пайтдаги вазиятини ҳисоблаш боши учун қабул қилиб, Ох ўқини нуқта ҳаракат қилаётган тўғри чизик бўйича йўналтирамыз. Бошланғич пайтда нуқта ҳаракатда эканлигини ҳисобга олиб, бошланғич шартларни ёзамиз:

$$t = 0 \text{ бўлганда } X = 0, \quad \vartheta = \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = \vartheta_0.$$

Нуқтага $\bar{P}$ оғирлик кучи, ҳаракатга келтирувчи $\bar{F}$ куч ва горизонтал текисликнинг $\bar{N}$ нормал реакция кучи қўйилган. Нуқтанинг x ўқи бўйича ҳаракат дифференциал тенгламаси;

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F. \quad (1) \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2) \quad \text{кўринишда бўлади.} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \text{ бўлган}$$

учун уни (2) га қўйиб ўзгарувчиларни ажратамыз: $\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ ёки

$$dv = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \cdot dt. \quad (3) \quad \text{Буни интеграллаймиз:} \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + c_1. \quad (4)$$

Бошланғич $t = 0$ бўлганда $v = v_0$ шартларни (4) га қўйсак c_1 топилади:

$$c_1 = v_0 \quad c_1 \text{ нинг қийматини (4) га қўямиз:} \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + v_0. \quad (5)$$

$$(5) \text{ даги қийматини (4) га ажратамыз:} \quad dx = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \cdot dt + v_0 dt. \quad (6)$$

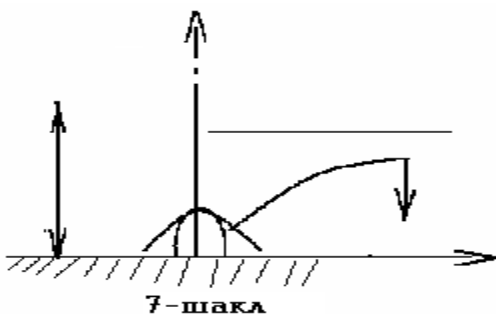
$$\text{Буни интеграллаймиз:} \quad x = -\frac{F_0}{m\omega} \cos \omega t + v_0 t + c_2. \quad (7)$$

Бошланғич шартларни ($t = 0$ бўлганда $x = x_0 = 0$) (7) га қўйиб; c_2 ни топамиз: $c_2 = \frac{F_0}{\omega^2 m}$. (8) c_2 нинг қийматини (7) га қўйсак:

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + v_0 t \text{ бўлади.}$$

3-масала. А самолёт ердан h баландликда горизонтал v_1 тезлик билан учadi. Самолёт В тўп билан бир вертикалда бўлган вақтда шу тўпдан самолётга снаряд отилган. Снаряднинг бошланғич тезлиги v_0 қандай шартни қаноатлантириши керак ва 2) снаряд горизонтга қандай α бурчак остида отилиши лозим? Ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмасин (7-шакл).

Ечиш: Координатанинг Оу ўқини тўп турган нуқтадан вертикал юқорига, Ох ўқини эса горизонтал равишда самолётнинг учиб томонига қаратиб йўналтирамыз. Снаряднинг ҳаракатиға ҳаво кўрсатадиган қаршилиқни ҳисобга олмасдан, снарядга фақат ўзининг mg оғирлик кучи таъсир қилади деб қараймиз.



(1,2) га мувофиқ снаряднинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -mg. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

бу ерда m -снаряднинг массаси.

Ҳаракат текисликда юз бераётганлиги учун (1,2) нинг учинчи тенгламаси бўлмайди. $t = 0$ бўлганда

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad (2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган (1) системанинг ечимини топамиз. (1) тенгламани бир марта интегралласак:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c_1 \\ \frac{dy}{dt} &= -gt + c_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{ёки} \quad \left. \begin{aligned} v_x &= c_1 \\ v_y &= -gt + c_2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$x = c_1 t + c_3,$$

иккинчи марта интегралласак:

$$y = -g \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_4.$$

Бошланғич (2) шартлардан фойдаланиб, c_1, c_2, c_3 . ва c_4 ни топамиз. $t = 0$ да $v_{0x} = c_1$, $v_{0y} = c_2$, $x_0 = c_3$, $y_0 = c_4$ бўлганлигидан

$$c_1 = v_0 \cos \alpha, \quad c_2 = v_0 \sin \alpha, \quad c_3 = c_4 = 0.$$

Демак, $x = v_{0x} t$; $y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$. ёки $x = v_0 t \cos \alpha$; $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$.

Снаряд самолётга текканда $x_1 = x$, $y = h$ шартларни қаноатлантиришни керак, бу ерда $x_1 = v_1 t_1$ -снаряд отилгандан то у бориб самолётга теккунча кетган тўп ўқининг қия бурчаги α ни топиш имкониятини беради:

$$v_0 \cos \alpha \geq v_1, \quad \text{яъни} \quad \cos \alpha = \frac{v_1}{v_0}. \quad (5)$$

(4) нинг иккинчи тенглигидан снаряднинг учи швакти t_1 ни топамиз:

$$t_1 = \frac{1}{g} \left(v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh} \right). \quad (6)$$

бундан: $v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh \geq 0$ (7) бўлгандагина снаряд самолётга тегиши мумкин. (7) тенгсизликни (5) тенгликка қўйсак, яъни

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}$. (8) ни (7) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$v_0^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2} \right) - 2hg \geq 0, \quad \text{бундан:} \quad v_0^2 \geq v_1^2 + 2hg. \quad (9)$$

16-машғулот.

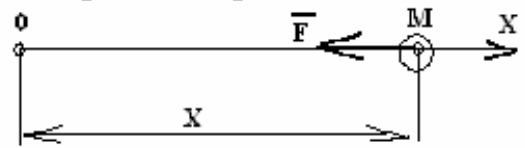
МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ

Бу бобга кирадиган масалалар асосан қуйидаги учта турга бўлинади:

1. Масофага пропорционал бўлган куч таъсирида тебранувчи моддий нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракати.
2. Қаршилиқ кўрсатувчи муҳитда моддий нуқтанинг сўнувчи тебранма ҳаракати.
3. Қаршилиқ бўлганда ва қаршилиқ бўлмаганда моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати.

Моддий нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракати

Моддий нуқта O мувозанат вазиятидан x масофагача чиқариб қўйиб юборилганда, у ҳамма вақт мувозанат вазияти O га қараб йўналган ва нуқтадан мувозанат вазиятигача



8-шакл

бўлган x масофага пропорционал $\vec{F}$ куч таъсирида бўлсин. Моддий нуқта ана шундай куч таъсирида ҳамма вақт ўзининг мувозанат вазиятига интилиб, шу O нуқта атрофида тебранма ҳаракат қилади. Бундай куч таъсиридаги моддий нуқтанинг тебраниши гармоник ёки эркин тебранма ҳаракат дейилиб, бу $F = c \cdot |x|$ куч эса қайтарувчи куч деб аталади. Бу ерда c -

нуқтани бирлик узунликка кўчириш учун зарур бўлган куч бўлиб, $\frac{H}{cm}$

билан ўлчанадиган жисмнинг бикрлик коэффиценти. Қайтарувчи $\vec{F}$ куч таъсирида горизонтал x ўқи бўйича ҳаракат қилувчи

(4-шакл) m массали M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$, (1) бу ерда x -нуқтанинг абсциссаси, O - M нуқтанинг мувозанат

ҳолатидаги вазияти. (1) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad (2) \text{ бу ерда, } k^2 = \frac{c}{m}.$$

Бошланғич $t=0$ пайтда $x=x_0$, $v=v_0$ бўлган шартларда (2) нинг умумий интегрални қуйидаги кўринишда бўлади:

$x = a \sin(kt + \alpha)$. (3) Бу тенглама гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидир.

Бу ерда, $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$ -тебраниш амплитудаси (4), $\alpha = \arctg \frac{kx_0}{v_0}$ -бошланғич

фаза (5), $(kt + \alpha)$ -тебраниш фазаси, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ -доиравий такрорлик сони,

(6), $T = \frac{2\pi}{R} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$ -тебраниш даври (7)

Моддий нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари.

1. Моддий нукта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг асосий формулалари. Динамиканинг 2-ва 4- қонунига асосан куч билан нуктанинг тезланиш орасидаги боғланиш қуйидагича ифодаланган.

$$\begin{aligned} m\vec{w} &= m \frac{d\vec{g}}{dt} = \vec{F} \quad \text{ёки} \\ m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \vec{F} \end{aligned} \quad (11)$$

1. Моддий нукта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг вектор ифодасидир.

11. Вектор тенгламасини бирор координата ўқлари системасига проекцияласак Моддий нукта ҳаракатининг ўша ўқлар системасидаги дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз.

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned} \right\}$$

бу ерда x, y, z -нуктанинг координаталари.

X, Y, Z -нуктага таъсир этувчи кучлар тенг таъсир этувчисининг координата ўқларидаги проекциялари.

1-масала. Массаси $m = 1 \text{ кг}$ бўлган жисм ҳаракати

$x = g_0 t, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}$ тенгламалар билан берилган (t -секунт, x, y -метр)

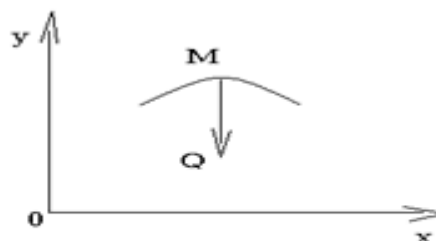
ҳисобида, g_0, h -ўзгармас, g -эркин тушиш тезланиши. Жисмга таъсир қилувчи Q -куч аниқлансин. Жисм моддий нукта деб қабул қилинсин.

Берилган:

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$x = g_0 t$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2}$$



1-шакл

$$Q = ?$$

Ечиш: (Л.И.Т.) Жисм Оху-текислигида ҳаракатланади. Шунинг учун санок системасини

1-шаклдагидек йўналтирамиз. M нуктага таъсир қилувчи куч Q -бўлгани учун унинг ҳаракат дифференциал тенгламаси

$$m \ddot{x} = Q_x \Rightarrow m \frac{d^2 t}{dt^2} = Q_x$$

$$m \ddot{y} = Q_y \Rightarrow m \frac{d^2 t}{dt^2} = Q_y$$

$$x = g_0 t \Rightarrow x = g_0$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \dot{y} = -gt$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow 0 = Q_x$$

$$\dot{y} = -g \Rightarrow -mg = Q_y$$

$$Q = Q_y = -mgH$$

Шундай қилиб, M нуктага таъсир қилувчи куч фақат оғирлик кучидан иборат. Манфий ишора $\vec{Q}$ -кучнинг йўналиши Оу ўққа тескари эканлигини кўрсатади.

2-масала. Бугдой урувчи комбайннинг қирқувчи аппарати $x = 0,05 \cos 10\pi t$ конунга мувофиқ тўғри чизиqli ҳаракат қилади. (t -сек, x , y -метр). Пичокни ҳаракатга келтирувчи P -куч аниқлансин. Пичоқ оғирлиги $G = 100H$. Эркин тушиш тезланиши $g = 10 м/с^2$ қабул қилинган.

Ечиш: Масала шартига кўра пичоқ тўғри чизиqli илгариланган ҳаракат қилади. Пичокни моддий нукта деб қараб санноқ системаси учун Ox ўқни оламиз.

Пичокнинг бошланғич ҳолати O нуктада бўлсин. Пичоққа оғирлик кучи $\vec{G}$ ҳаракатга келтирувчи $\vec{P}$ ҳамда реакция кучи $\vec{N}$ -таъсир қилади.

Пичоқ ҳаракатининг дифференция тенгламаси $m = \frac{d^2 x}{dt^2} = P$

1.1. Тенгламадан биринчи ва иккинчи тартибли ҳосила оламиз.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -0,05 \cdot 10\pi \sin 10\pi t = -0,5\pi \sin \pi t \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -5\pi^2 \cos 10\pi t м/с^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2 ни 1.1 га қўямиз. $-m5\pi^2 \cos 10\pi t = P$

$$m = \frac{G}{g} \Rightarrow p = -5 \frac{G}{g} \pi^2 \cos 10\pi t N$$

$$\Rightarrow p = -5 \frac{100}{10} \pi^2 \cos 10\pi t H$$

$$p = -50\pi^2 \cos 10\pi t H.$$

Моддий нукта ҳаракати дифференция тенгламасининг табиий координата ўқлари системасидаги проекцияси қуйидагича:

$$\left. \begin{aligned} mw_\tau &= F_\tau \\ mw_n &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m \frac{d\rho}{dt} &= F_\tau \\ m \frac{\rho^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned} \right\}$$

ρ -моддий нуқтанинг тезлиги $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}$

ρ -нуқта траекториясининг эгрилик радиуси F_τ, F_n, F_b -нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг уринма нормал ва бинормал ўқлардаги порекциялари. Ҳаракатни вужудга келтирувчи $\vec{F}$ -кучнинг $x, y, z \rightarrow$ ўқлардаги проекциялари.

$$X = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2 z}{dt^2}; \quad 1) \quad F = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos(\vec{F} \wedge \vec{X}) = \frac{X}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge \vec{y}) = \frac{y}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge \vec{z}) = \frac{z}{F}$$

$$\cos(\vec{F} \wedge \vec{\tau}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge \vec{n}) = \frac{F_n}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge \vec{b}) = 0$$

3-масала. Ерга тортилиш кучининг таъсирида вертикал тушаётган оғирлик 10 Н бўлган М шар ўз оғирлиги таъсирида вертикал равишда пастга тушмоқда, унга ҳаво қаршилик кўрсатади.

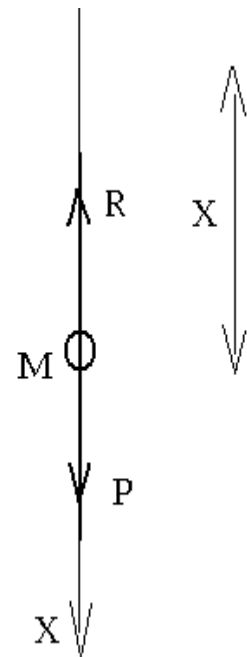
Шарнинг ҳаракат қонуни $S = 327t - 109(1 - e^{-3t})$.

Ҳавонинг қаршилик кучи тезликнинг функцияси сифатида топилсин.

Ечиш: Ҳаракат қилаётган М нуқтага ернинг тортиш кучи $\vec{P}$ ва ҳавонинг қаршилик кучи $\vec{R}$ таъсир қилади. Уларнинг йўналиши. Бу масала динамиканинг тўғри масаласига асосида ечилади.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P - R$$

$$R = P - m \frac{d^2 x}{dt^2}$$



$$g = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = 327t - 109(1 - e^{-3t}) =$$

Ҳаракат 1- ва 2-тортилиш ҳаракатини оламыз.

$$= 327 - 327e^{-3t} = 327(1 - e^{-3t})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} = 981e^{-3t} \quad 1\text{кг} \cdot \text{с} = 9,8\text{Н}$$

$$P = mg, \quad P = 10 \cdot 981 = 9810 \text{ дина}$$

$$m = 10\text{г} \quad 1\text{дина} = 10^{-5}\text{Н}$$

$$R = 9810 - 9810e^{-3t} = 9810(1 - e^{-3t})$$

$$R = 209 \text{ дина}$$

№	Мундарижа	
1	1-2-машғулот. Кинематика. Нуқта кинематикаси	4
2	2-3-машғулот. Нуқта ҳаракатини декарт координатасида ифодалаш.	9
3	4-5-машғулот. Нуқта ҳаракатини вектор усулида ифодалаш.	15
4	6-7-машғулот. Нуқта ҳаракатининг тезлиги билан тезланишини аниқлаш.	18
5	7-8-машғулот. Қаттиқ жисм ҳаракатларининг асосий турлари.	22
6	8-9-машғулот. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг айланиш бурчагини, бурчак тезлигини ва бурчак тезланишини топишга доир масалаалар.	25
7	10-11-машғулот. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмларга доир масалалар ечиш.	30
8	12-13-машғулот. Динамика моддий нуқта динамикаси. Асосий тушунчалар.	33
9	14-15-машғулот. Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати.	38
10	16-машғулот. Моддий нуқтанинг тебранма ҳаракати.	42